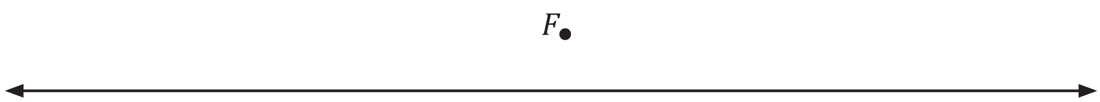
PARÁBOLA

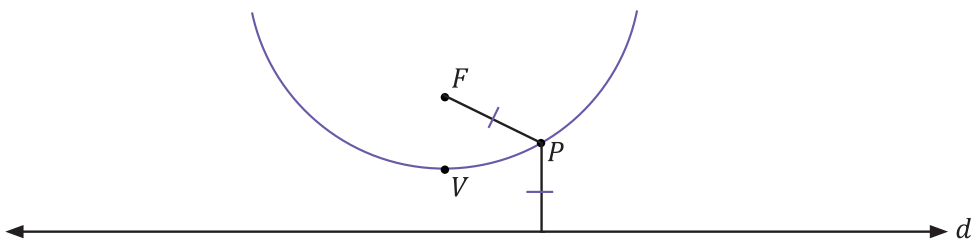
Parábolas derivam das cônicas e é obtida por um corte em um cone duplo em que se inicia pela base e sai pela lateral, ou vice e versa. Em outras palavras, parábolas são formas geométricas formadas por um conjunto de pontos, uma reta e um ponto fixo, cuja a distância entre qualquer um desses pontos até o ponto fixo é igual à distância deste mesmo ponto à uma reta chamada diretriz. Diferente das outras duas seções cônicas estudadas anteriormente, há apenas um foco aqui. Dessa forma, temos como principais elementos a distância, um ponto fixo (foco) e uma reta diretriz. Para realizar a construção de uma parábola iniciamos com um ponto e uma reta, aos quais chamaremos de foco e diretriz, F e d, respectivamente.



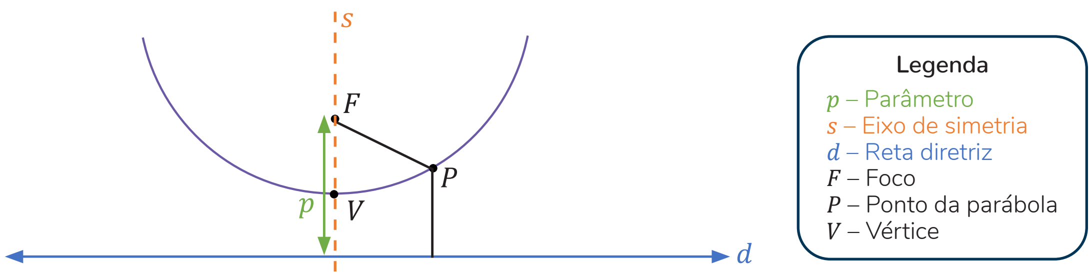
Para o ponto F e a reta d podemos construir um segmento, cujo ponto médio será o vértice da parábola (V). Dado um qualquer ponto P que não esteja contido em d e que satisfaça

$$d(P,F)=d(P,d)$$

então, o ponto P pertence à parábola. Visualmente falando:



Após obtida nossa parábola, vamos conhecer seus outros elementos. O primeiro elemento é a **eixo de simetria** que consiste na reta s determinada pelos pontos F e V. O **parâmetro** p que corresponde à distância entre o foco e a reta diretriz. Além disso, a metade do parâmetro corresponde a medida da distância do vértice ao foco e do vértice a diretriz.



EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

Vamos conhecer quatro formas em que a equação da parábola pode aparecer no plano cartesiano. Elas estão relacionadas ao fato da reta diretriz ser paralela ao eixo x ou ao eixo y. Caso a reta diretriz esteja paralela ao eixo x, a equação que descreve a parábola de vértice $V=(x_v, y_v)$ e parâmetro p será:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ou} \quad 2p(y - y_v) = (x - x_v)^2$$

Na primeira equação, as coordenadas do vértice e o valor do parâmetro não estão explícitas. Para encontrar os valores x_v e y_v, realizamos o seguinte cálculo;

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Deste modo, encontramos as coordenadas do vértice da parábola. Para determinarmos as coordenadas do foco e a reta diretriz d, precisamos determinar o valor do parâmetro p. Quando a equação está expressa na forma $y=ax^2+bx+c$, o valor do parâmetro p é dado por:

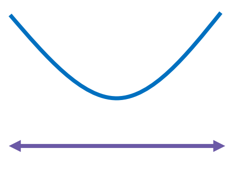
$$p = \frac{1}{2a}$$

Após identificado o valor de p, obtemos as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz por meio das relações abaixo. As expressões abaixo são utilizadas também para o caso da equação estar na forma $2p(y-y_v)=(x-x_v)^2$, pois aqui o valor de p e as coordenadas do vértice V já estão dados. Logo:

Se $p>0$:

$$F = \left(x_v\,, y_v + \frac{p}{2}\right)$$

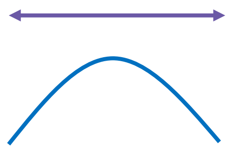
$$d: y = y_v - \frac{p}{2}$$



Se $p<0$:

$$F = \left(x_v\,, y_v - \frac{p}{2}\right)$$

$$d: y = y_v + \frac{p}{2}$$



Perceba que o valor de p determina se a parábola estará com a abertura voltada para cima ($p>0$) ou se estará voltada para baixo ($p<0$).

No caso da reta diretriz estar paralela ao eixo y, a equação que descreve a parábola de vértice $V=(x_v, y_v)$ e parâmetro p será:

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{ou} \quad 2p(x - x_v) = (y - y_v)^2$$

O método para identificar os elementos são semelhantes, conforme poderemos perceber na sequência. Para identificar as coordenadas do vértice quando a diretriz é paralela ao eixo y e a expressão é da forma $x=ay^2+by+c$, utilizamos:

$$x_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_v = -\frac{b}{2a}$$

Novamente, para determinarmos as coordenadas do foco e a reta diretriz d, precisamos determinar o valor do parâmetro p. Quando a equação está expressa na forma $x=ay^2+by+c$, o valor do parâmetro p é dado por:

$$\boxed{p = \frac{1}{2a}}$$

Após identificado o valor de p, para obtermos as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz por meio das relações abaixo, tanto para equações do tipo $x=ay^2+by+c$ ou $2p(x-x_v)=(y-y_v)^2$. Logo:

Se $p>0$:

$$F = \left(x_v + \frac{p}{2}, y_v\right)$$

$$d: x = x_v - \frac{p}{2}$$

Se $p<0$:

$$F = \left(x_v - \frac{p}{2}, y_v\right)$$

$$d: x = x_v + \frac{p}{2}$$