EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Imagine a seguinte situação: Laura é irmã mais velha de Lucas e a diferença de idade entre eles é de 6 anos. Lucas tem 9 anos, então qual é a idade de Laura?

O jeito mais simples de se resolver este problema, já que a diferença é de 6 anos, é adicionar 6 à idade de Lucas, ou seja, $9 + 6 = 15$. Sendo assim, a idade de Laura é 15 anos.

Este caso é simples de se resolver, mas quando temos dados maiores e mais complexos em um problema, podemos pensar na resolução de uma forma diferente: a diferença de idade entre eles é de 6 anos, como Laura é a irmã mais velha, ela tem a idade maior. Ou seja, a idade de Laura menos a idade de Lucas é 6 anos. Desta forma, como a idade de Lucas a gente já sabe e o que queremos descobrir é a idade de Laura, vamos chamar esse valor desconhecido de x. E com isso, podemos montar a seguinte igualdade:

$$x-9=6$$

Lendo essa igualdade temos: a idade de Laura (x) menos a idade de Lucas (9) é igual a 6, já que a diferença de idade entre eles é 6.

Esta igualdade é um exemplo de **equação de primeiro grau**.

> Uma equação de primeiro grau é uma expressão escrita na forma:
>
> $ax+b=0$ com a, b reais e $a\neq 0$.

x é o termo a ser determinado e é chamado de **incógnita**. A equação é chamada de primeiro grau pois o expoente da incógnita é 1.

São exemplos de equação de primeiro grau:

1) $2x - 4 = 4$
2) $10x + 8 = 20$
3) $x - 3 = 8 - 2x$

A **resolução** de uma equação de primeiro grau consiste em descobrirmos o valor da incógnita, ou seja, **descobrirmos o valor de x**.

Para resolvermos a equação, primeiro isolamos a incógnita separando os termos que a possuem em um lado da igualdade e os termos que têm somente números no outro lado da igualdade. Por fim, para encontrar o valor de x, basta efetuarmos as operações que surgirão.

Como exemplo vamos resolver a equação do problema proposto anteriormente:

$$x-9=6$$

Para isolarmos a incógnita, começamos **somando + 9 dos dois lados da igualdade** para que x fique sozinho no lado esquerdo da equação, ou seja:

$$x-9+9=6+9$$

$$x+0=6+9$$

$$x=6+9$$

Isolada a incógnita, basta efetuar a operação que apareceu:

$$x=6+9$$

$$x=15$$

Isso quer dizer que o valor de x é 15. Como definimos que x era a idade de Laura, então ela está com 15 anos.

E como podemos verificar se o **resultado está correto**? Para isto basta substituir o x na equação pelo valor encontrado:

$$x-9=6 \Rightarrow 15-9=6$$

Neste exemplo, dizemos que 15 é a raiz (solução) do problema. Mas afinal, o que é a raiz?

Raiz de uma equação são os valores que substituímos na incógnita que tornam a equação verdadeira.

Para fixar, seguem outros exemplos de resolução de equações de primeiro grau.

1) $x-3=10$

$$x-3+3=10+3$$

$$x+0=13$$

$$x=13$$

Verificando:

$$x-3=13-3=10$$

2) $2x+4=12+x$

Note que agora temos a incógnita em ambos os lados da igualdade, então primeiro deixamos todos os termos com a incógnita em um lado da igualdade e todos os termos sem a incógnita do outro lado. Para isso, **somaremos e/ou subtrairemos** dos dois lados da equação as quantias necessárias:

$$2x+4-x = 12+x - x$$

$$2x-x+4 = 12+0$$

$$x+4 = 12$$

$$x+4-4 = 12- 4$$

$$x+0 = 12-4$$

$$x = 12-4$$

$$x = 8$$

Verificando:

$$2.8+4 = 12+8$$

$$16+4 = 12+8$$

$$20 = 20$$

3) $4x-3 = 22-x$

Seguindo os mesmos passos que nos exemplos anteriores temos:

$$4x-3+x = 22 - x + x$$

$$4x+x-3 = 22+0$$

$$5x-3 = 22$$

$$5x-3+3 = 22+ 3$$

$$5x+0 = 22+3$$

$$5x = 25$$

Observe que o 5 está multiplicando o x. Para o isolarmos, basta **dividirmos os dois lados da equação** por 5. Lembrando que dividir por 5 equivale a multiplicar por $\frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 25$$

$$\frac{5}{5} \cdot x = \frac{1}{5} \cdot 25$$

$$1 \cdot x = \frac{25}{5}$$

$$x = \frac{25}{5}$$

$$x = 5$$

Verificando:

$$4x-3=22-x$$

$$4\,.5-3=22-5$$

$$20-3 =17$$

$$17=17$$

4) $\frac{x}{3} + 5 = 16$

Seguindo os mesmos passos que nos exemplos anteriores temos:

$$\frac{x}{3} + 5 - 5 = 16 - 5$$

$$\frac{x}{3} + 0 = 16 - 5$$

$$\frac{x}{3} = 11$$

Observe que o 3 está dividindo o x. Para o isolarmos, basta **multiplicarmos os dois lados da equação** por 3:

$$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 11$$

$$\frac{3}{3} \cdot x = 3 \cdot 11$$

$$1 \cdot x = 3 \cdot 11$$
$$x = 33$$

Verificando:

$$\frac{33}{3} + 5 = 11 + 5 = 16$$

5) $-x+2 = -8$

$$-x+2-2 = -8 - 2$$
$$-x+0 = -8 - 2$$
$$-x = -10$$

Quando a incógnita estiver com o sinal negativo, deve-se **multiplicar os dois lados da igualdade por** -1 para que o sinal da incógnita se torne positivo:

$$-x \cdot (-1) = -10 \cdot (-1)$$
$$x = 10$$

Verificando:

$$-(10) + 2 = -10 + 2 = -8$$

As raízes dos exemplos são respectivamente: 13, 8, 5, 33 e 10.

Observação: Podemos escrever a resposta da equação através do **conjunto solução**.

O conjunto solução é o conjunto que contém todas as soluções da equação. Denotamos esse conjunto por S.

O conjunto solução em cada um dos equações acima é escrito da seguinte forma:

1. $S=\{13\}$
2. $S=\{8\}$
3. $S=\{5\}$
4. $S=\{33\}$
5. $S=\{10\}$

Observação: não se prenda à letra x na incógnita, ela é a mais utilizada, mas pode ser substituída por qualquer outra letra sem perda de significado.

Na hora de resolver problemas de equação do primeiro grau, lembre-se:

- Identifique as incógnitas e enumere as letras que devem ser encontradas;
- Se precisar, leia mais de uma vez o problema;
- Monte a equação lembrando que ela representa uma igualdade.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Um sistema de equações é constituído por um conjunto de equações lineares que possuem mais do que uma incógnita.

Equações lineares são aquelas em que os expoentes das incógnitas valem 1.

Exemplos:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 5 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

É um sistema linear.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

É um sistema linear.

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 2 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

Não é um sistema linear.

Nos exemplos acima, as **incógnitas** são x, y e z e, em cada sistema, os valores que estão à frente de cada incógnita são chamados de **coeficientes.**

Estaremos interessados em resolver os sistemas, ou seja, encontrar os valores das incógnitas que deverão satisfazer todas as equações dadas **simultaneamente**.

Nesta apostila vamos tratar sobre os sistemas 2 por 2, ou seja, que possuem duas incógnitas e duas equações. Veremos três métodos de resolução e, vale ressaltar que todos os métodos chegam ao mesmo resultado.

Observação: todos os sistemas aparecerão com as incógnitas sendo x e y, mas, novamente, essas letras podem ser substituídas por quaisquer outras, sem perda de significado.

Método da Substituição

Neste método, começamos escolhendo uma das equações e isolamos x ou y nesta equação. Procura-se, **sempre que possível**, isolar a incógnita que possui coeficiente 1. Em seguida, substitui-se a incógnita isolada na outra equação. Com isso já será possível descobrir o valor de uma das incógnitas. Descoberto este valor, basta substitui-lo na equação que foi isolada no início para descobrir o valor da outra incógnita.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$

Começamos a resolução escolhendo uma incógnita em alguma das duas equações para isolar. Observe que na primeira equação (a da primeira linha), temos o x com o coeficiente 1. Escolhemos então isolar a incógnita x na primeira equação, ou seja:

$$x=y+1$$

Substituindo esse valor de x na segunda equação temos:

$$2x+3y = 17$$

$$2\,.\,(y+1)\ +\ 3y = 17$$

$$2y+2+3y = 17$$

$$5y = 15$$

$$y = \frac{15}{5}$$

$$y = 3$$

Com isso encontramos o valor de y. Agora, substituindo esse valor em $x = y+1$ temos:

$$x=y+1$$

$$x=3+1$$

$$x=4$$

Desta forma temos que a solução do sistema é o par ordenado $(4,3)$. Escrevendo o conjunto solução temos: $S=\{(4,3)\}$.

Substituindo x e y nas equações pode-se verificar a solução:

$$x-y=1 \text{ , sendo } x = 4 \text{ e } y = 3$$

$$4-3=1$$

$$2x+3y=17, \text{ sendo } x = 4 \text{ e } y = 3$$

$$2 .4 + 3.3 = 8+9 = 17$$

Observação: a resposta é um par ordenado porque o objetivo é encontrar os valores de x e y que satisfazem o sistema.

Método da Adição

Este método consiste em somarmos as equações do sistema com o objetivo de eliminarmos uma das incógnitas e resolvermos uma equação de primeiro grau na outra incógnita. Depois de descoberto o valor de uma das incógnitas, escolhemos qualquer uma das duas equações, substituímos o valor encontrado e, assim, encontramos o valor da outra incógnita.

Para somarmos as equações muitas vezes será necessário multiplicar a primeira equação, a segunda equação ou ambas as equações por algum inteiro (positivo ou negativo) que faça sentido na eliminação de uma incógnita.

Exemplos:

1) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

Observe que as incógnitas y nas duas equações são opostas. Este fato é muito bom porque quando adicionarmos as duas equações, essa incógnita vai desaparecer e vamos resolver apenas uma equação na incógnita x. Adicionando as duas equações temos então:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \end{cases} +$$

$$(3x+2x)+ (-y+y)= 3+12$$

$$5x=15$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

Em seguida, basta escolher qualquer uma das equações e substituir o x por 3:

$$2x+y=12,\text{ sendo } x=3$$

$$2\cdot 3+ y=12$$

$$6+y=12$$

$$y=6$$

A solução do sistema é, então, o par ordenado (3,6).

2) $\begin{cases} 2x+8y=14 \\ 3x+7y=11 \end{cases}$

Para resolvermos este sistema, primeiro precisamos igualar os coeficientes de x ou de y para que eles se anulem na adição. Escolhendo igualar os coeficientes de x, precisamos multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por 2:

$$\begin{cases} 2x+8y=14\,.\,(3) \\ 3x+7y=11\,.\,(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+24y=42 \\ 6x+14y=22 \end{cases}$$

Perceba que se somarmos as duas equações, ainda vamos ter uma equação envolvendo duas incógnitas, sendo assim, ainda é preciso multiplicar alguma das duas equações por -1. Escolhendo a segunda para multiplicar temos:

$$\begin{cases} 6x+24y=42 \\ 6x+14y=22\,.\,(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+24y=42 \\ -6x-14y=-22 \end{cases}$$

Somando as duas equações temos:

$$\begin{array}{c} \begin{cases} 6x+24y=42 \\ -6x-14y=-22 \end{cases} + \\ \hline (6x-6x)+(24y-14y)=42-22 \end{array}$$

$$10y=20$$

$$y=\frac{20}{10}$$

$$y=2$$

Substituindo esse valor de y em qualquer uma das duas equações encontramos o valor de x:

$$6x+24\cdot y=42$$

$$6x+24\cdot 2=42$$

$$6x+48=42$$

$$6x=42-48$$

$$6x=-6$$

$$x=\frac{-6}{6}$$

$$x=-1$$

A solução do sistema é, então, o par ordenado (-1,2).

MÉTODO DA COMPARAÇÃO

Neste caso, vamos isolar a mesma incógnita nas duas equações e igualá-las para encontrar seu valor, depois substituímos esse valor encontrado em alguma das equações do sistema para encontrarmos o valor da outra incógnita.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x - 3y = -35 \end{cases}$

Isolando o x nas duas equações temos:

$$x=40-2y \quad \text{e} \quad x=-35+3y$$

Igualando:

$$40-2y=-35+3y$$

$$-2y-3y=-35-40$$

$$-5y=-75\,.\,(-1)$$

$$5y=75$$

$$y=75/5$$

$$y=15$$

Substituindo y por 15 em qualquer uma das equações, obtemos o valor de x:

$$x+2y=40$$

$$x+2\cdot 15=40$$

$$x+30=40$$

$$x=40-30$$

$$x=10$$

A solução do sistema é, então, o par ordenado (10,15).

ANOTAÇÕES