Segunda-feira, 11 de julho de 2016

Problema 1. O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja a bissetriz do ângulo $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz do ângulo $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo (com $AM \parallel EX$ e $AE \parallel MX$). Demonstre que as retas BD, FX e ME são concorrentes.

Problema 2. Determine todos os inteiros positivos n tais que pode-se preencher cada casa de um tabuleiro $n \times n$ com uma das letras I, M e O de tal forma que ambas as condições seguintes sejam satisfeitas:

- em cada linha e em cada coluna, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O;
- em cada diagonal formada por um número de casas que seja múltiplo de 3, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.

Observação: As linhas e as colunas de um tabuleiro $n \times n$ são numeradas de 1 a n. Assim, cada casa corresponde a um par de inteiros positivos (i, j) com $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Para $n > 1$, o tabuleiro tem $4n - 2$ *diagonais* de dois tipos. Uma diagonal do primeiro tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i + j$ é igual a uma constante. Uma diagonal do segundo tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i - j$ é igual a uma constante.

Problema 3. Seja $P = A_1A_2 \ldots A_k$ um polígono convexo no plano. Os vértices A_1, A_2, $\ldots$, A_k têm coordenadas inteiras e pertencem a uma circunferência. Seja S a área de P. Seja n um inteiro positivo ímpar tal que os quadrados dos comprimentos dos lados de P sejam todos números inteiros divisíveis por n. Demonstre que $2S$ é um inteiro divisível por n.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Terça-feira, 12 de julho de 2016

Problema 4. Um conjunto de números inteiros positivos é chamado *fragante* se contém pelo menos dois elementos e cada um de seus elementos tem algum fator primo em comum com pelo menos um dos elementos restantes. Seja $P(n) = n^2 + n + 1$. Determine o menor número inteiro positivo b para o qual exista algum número inteiro não negativo a tal que o conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

seja fragante.

Problema 5. No quadro está escrita a equação

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tem 2016 fatores lineares de cada lado. Determine o menor valor possível de k para o qual é possível apagar exatamente k destes 4032 fatores lineares, de modo que fique pelo menos um fator de cada lado e que a equação resultante não admita nenhuma solução real.

Problema 6. Há $n \geqslant 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o seu segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

(a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.

(b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos