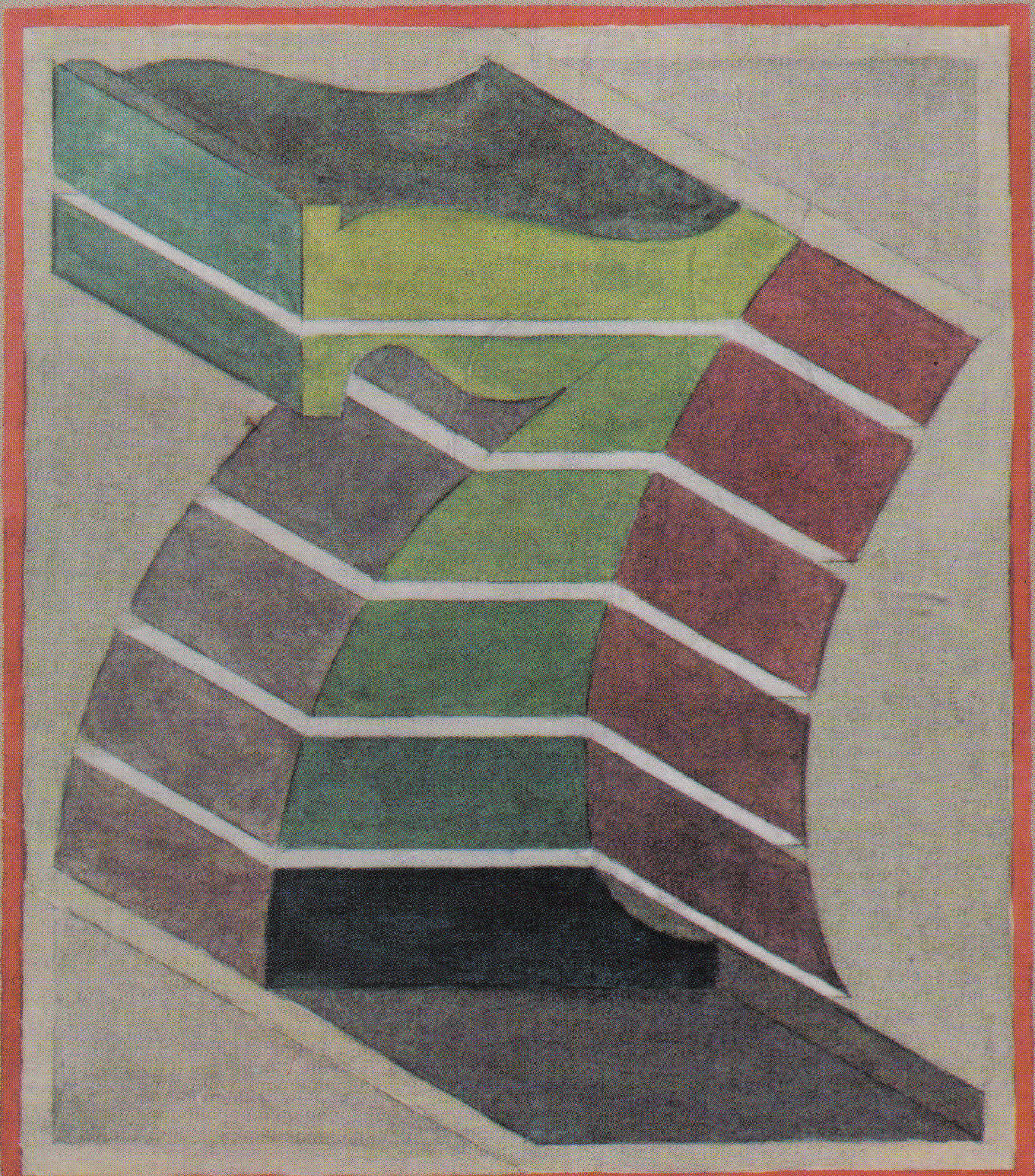
NÚMEROS COMPLEXOS POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE



NOÇÕES DE MATEMÁTICA VOLUME 7

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallante

12,00

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Noções de Matemática

VOLUME 7

SEGUNDO GRAU

1.ª edição

EDITORA MODERNA

Capa:
Ricardo Van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

N916	Números complexos, polinômios, equações algébricas : 2º grau / Aref Antar Neto ... [et al.]. -- São Paulo : Ed. Moderna, 1982. (Noções de matemática ; v. 7)
	1. Equações 2. Matemática (2º grau) 3. Números complexos 4. Polinômios I. Antar Neto, Aref, 1949- II. Série.
	17. CDD-510.07
	18. -510.7
	17. -512.2
	18. -512.94
	17. -512.21
	18. -512.942
	17. -512.81
82-0032	18. -512.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Equações algébricas 512.2 (17.) 512.94 (18.)
2. Matemática : Estudo e ensino 510.07 (17.) 510.7 (18.)
3. Números complexos : Álgebra 512.81 (17.) 512.7 (18.)
4. Polinômios : Álgebra 512.21 (17.) 512.942 (18.)

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 531-5099
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1982

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Hamilton Fábio Mota Medeiros.
Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

PARTE I

Capítulo 1 — **O conjunto dos números complexos**

Capítulo 2 — **Forma algébrica dos números complexos**

Capítulo 3 — **A geometria dos números complexos**

Capítulo 4 — **A trigonometria dos números complexos**

Capítulo 5 — **Operações na forma trigonométrica**

Harilton Fábio Mota Medeiros.

Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

Capítulo

1

O conjunto dos números complexos

1.1 — INTRODUÇÃO

A criação dos números complexos teve estímulo na necessidade, sentida pelos matemáticos, de ampliar o campo numérico de seu trabalho, dando significado, principalmente, às raízes quadradas de números negativos.

Por que razão, quando se trabalha com números reais, algumas equações do segundo grau têm duas raízes, enquanto que outras não têm nenhuma?

Como sabemos, isso acontece porque não existe, entre os reais, um número que elevado ao quadrado dê resultado negativo:

$$(?)^2 = -25$$

$$(?)^2 = -\frac{2}{9}.$$

e isso se confirma quando a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é escrita na forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

onde vemos que não existe valor real de x capaz de satisfazer a equação no caso em que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo.

Ora, como todo número negativo pode ser escrito como o produto de seu simétrico por -1:

$$-25 = 25 \cdot (-1) = 5^2 \cdot (?)^2$$

$$-\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \cdot (-1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]^2 \cdot (?)^2$$

a questão de ampliar o campo numérico reside, portanto, em *criar* algum ente que verifique a igualdade:

$$(?)^2 = -1$$

Observa-se, assim, a necessidade de ampliação do universo numérico.

Essa necessidade não é nova: **Diofante de Alexandria** (cerca de 250 d.C.) esteve às voltas com o seguinte problema:

Determinar os lados de um triângulo retângulo de perímetro 12 e área 7.

A montagem desse problema nos traz a equação:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

onde x é a medida de um dos catetos.

O discriminante dessa equação é negativo ($\Delta = -167$), o que nos leva a concluir que *não existe o triângulo procurado*. Não teria Diofante despertado sua atenção para **equações que,** como essa, **têm** $\Delta < 0$?

Em 1545, o médico italiano **Girolamo Cardano** (1501-1576) propôs e resolveu o problema seguinte:

Dividir 10 em duas partes tais que seu produto seja 40.

A equação representativa desse problema é:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

tendo Cardano encontrado as respostas $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e, sobre isso, teria dito que o resultado é *tão sutil quanto inútil*, no que, ao menos quanto à utilidade, estava inequivocamente enganado, já que hoje a teoria dos números complexos tem larga aplicação na Física e na Engenharia.

Ele próprio, sem o saber, teve uma mostra de que o fato de se dar uma interpretação à raiz quadrada de números negativos seria útil, pois, ao estudar a solução de equações da forma:

$$x^3 = ax + b$$

encontrou resultados que, em certos casos, incluíam tais raízes quadradas e, nesses mesmos casos, ele sabia existir uma solução **real**. Por exemplo, o resultado que se obtém para a equação $x^3 = 15x + 4$, utilizando o método de Cardano, é dado pela expressão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Uma verificação direta mostra-nos que $x = 4$ é raiz dessa equação, o que levaria a supor, num raciocínio simples, que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Ora, se *não existe* $\sqrt{-121}$, como poderia tal expressão apresentar um valor real?

Inventando um novo número

Suponha-se, então, que convencidos da necessidade, resolvamos *inventar* um número cujo quadrado seja -1.

Imediatamente surge a questão: como operar com esse novo número?

É claro que essa criação nos será útil apenas se pudermos usar os mesmos processos operacionais a que estamos acostumados.

Assim, sem ter, por enquanto, a preocupação de *formalizar uma estrutura numérica nova*, procurando apenas ganhar intimidade com a idéia, consideremos um novo número que, por falta de outro melhor, representaremos pelo símbolo **i**, e formulemos duas hipóteses:

1.ª) $i^2 = -1$
2.ª) i obedece às principais propriedades operacionais da Álgebra.*

Com isso, podemos já completar as igualdades questionadas no início deste item:

$$-25 = 25 \cdot (-1) = 5^2 \cdot i^2$$

$$-\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \cdot (-1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]^2 \cdot i^2$$

e também podemos encontrar soluções para equações antes impossíveis. Optamos por exemplificar esse fato por meio de exercícios para que, durante a leitura, as eventuais dúvidas que o leitor tenha sobre a consistência das hipóteses feitas (e o modo de operar), sirvam de estímulo para o estudo do próximo item, onde daremos tratamento mais formal e rigoroso aos números complexos.

Exercícios Resolvidos

1.1) Resolva a equação $x^2 + 1 = 0$.

Solução

Este é um exemplo típico de equação cujo conjunto-verdade, no campo dos números reais, é vazio.

Agora, com base nas hipóteses adotadas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x + i)(x - i) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x + i = 0 \text{ ou } x - i = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = -i \text{ ou } x = i \end{aligned}$$

Logo: $S = \{-i; i\}$.

---

* Comutativa (da adição e da multiplicação), associativa (da adição e da multiplicação) e distributiva.

1.2) Resolva a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Solução

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = 16 - 52 = -36$$

Baseados nas hipóteses adotadas, escrevemos:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

Logo: $S = \{2 + 3i; 2 - 3i\}$.

O leitor pode verificar que, realmente, qualquer um dos números obtidos satisfaz a equação; por exemplo, substituindo em $x^2 - 4x + 13$, **x** por $2 + 3i$, temos:

$$(2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 = (4 + 12i + 9\overset{-1}{i^2}) - (8 + 12i) + 13 =$$
$$= 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 =$$
$$= 0$$

1.3) Resolva a equação $x^3 + 8 = 0$.

Solução

Trabalhando no campo dos números reais, faríamos simplesmente:

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

No entanto, com as hipóteses adotadas, podemos verificar a *existência* de duas outras soluções; lembrando a fatoração:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

escrevemos:

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

Logo: $S = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$.

1.4) Verifique que o número **i** é raiz da equação $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

Solução

Substituindo, no primeiro membro da equação, **x** por **i**, vem:

$$i^3 - 2i^2 + i - 2 = \overset{-1}{i^2} \cdot i - 2\overset{-1}{i^2} + i - 2 = -i + 2 + i - 2 = 0$$

Logo: **i** é raiz.

1.5) Mostre, com base nas hipóteses adotadas, que o número **i** não é positivo, não é negativo e não é igual a zero, isto é, que as **relações** $i > 0$, $i < 0$ e $i = 0$ não têm significado.

Solução

Lembrando que:

$$1.^{\circ}) \; a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$$
$$2.^{\circ}) \; a < 0 \Rightarrow a^2 > 0$$
$$3.^{\circ}) \; a = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0$$

mostremos que qualquer uma das hipóteses: $i > 0$, $i < 0$ ou $i = 0$ nos conduz a um absurdo.

I) Supondo $i > 0$, vem:

$$i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \text{ (!!!)}$$

II) Supondo $i < 0$, vem:

$$i < 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \text{ (!!!)}$$

III) Supondo $i = 0$, vem:

$$i = 0 \Rightarrow i^2 = 0 \Rightarrow -1 = 0 \text{ (!!!)}$$

Assim, não valem as relações $i > 0$, $i < 0$ e $i = 0$.

1.6) Talvez o fato de termos *inventado* um número (**i**), e trabalhado com relativo sucesso apenas *supondo* que ele obedece às principais propriedades operacionais, leve-nos a querer usar esse procedimento em outras situações.

Por exemplo, sabemos que não se define **divisão por zero**. Teríamos sucesso se inventássemos um resultado nesse caso?

Suponha, então, um novo *número*, representado pelo símbolo $\square\!\square$, tal que:

I) $\dfrac{1}{0} = \square\!\square$

II) $\square\!\square$ satisfaz as principais propriedades operacionais da Álgebra. (Veja nota de rodapé anterior.)

Mostre que I e II conduzem a absurdos como a afirmação:

Números diferentes são iguais.

Solução

Sejam **x** e **y** números tais que $x \neq y$.

Sabemos que $0 \cdot x = 0 \cdot y$. Multiplicando ambos os membros por $\square\!\square$:

$$\square\!\square \cdot (0 \cdot x) = \square\!\square \cdot (0 \cdot y)$$

Como estamos supondo válida a propriedade associativa, podemos escrever:

$$(\square\!\square \cdot 0) \cdot x = (\square\!\square \cdot 0) \cdot y \quad (1)$$

Como, de I e II temos $\dfrac{1}{0} = \square\!\square \Rightarrow \square\!\square \cdot 0 = 1$, a igualdade (1) fica:

$$1 \cdot x = 1 \cdot y$$

Donde: $x = y$ (!!!)

Exemplificando numericamente:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot \sqrt{5} &= 0 \cdot 8 \\
\square\square \cdot (0 \cdot \sqrt{5}) &= \square\square \cdot (0 \cdot 8) \\
(\square\square \cdot 0) \cdot \sqrt{5} &= (\square\square \cdot 0) \cdot 8 \\
1 \cdot \sqrt{5} &= 1 \cdot 8 \\
\sqrt{5} &= 8 \text{ (!!!)}
\end{aligned}
$$

Isso nos mostra que não basta criar uma nova proposta numérica apenas na *esperança* de que as regras sejam obedecidas. É preciso montar uma estrutura consistente e compatível com o rigor matemático.

Exercícios Propostos

1.7) Resolva as equações:

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $x^2 + 5 = 0$

c) $x^4 - 1 = 0$

d) $x^4 - 256 = 0$

(*Sugestão*: fatore as expressões usando diferença de quadrados nos itens *c* e *d*.)

1.8) Resolva as equações:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $4x^2 - 16x + 17 = 0$

c) $x^2 - 6x + 17 = 0$

d) $x^2 - 10x + 40 = 0$

1.9) Resolva a equação $x^3 + 1 = 0$.

1.10) Verifique que o número ω é raiz da equação (E) nos seguintes casos:

a) $\omega = -i$; (E): $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

b) $\omega = 2i$; (E): $x^4 - 2x^3 - 8x - 16 = 0$

c) $\omega = 2 + i$; (E): $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$

1.2 — NÚMEROS COMPLEXOS

Há, em Matemática, mais de uma maneira de se conceituar, formalmente, número complexo. Preferimos aqui adotar a seguinte **definição**:

> Chama-se **número complexo** a qualquer **par ordenado** $(x; y)$ **de números reais.**

É usual indicar um número complexo pela letra **z**. Assim, $z_1 = (-2; 3)$, $z_2 = (0; -1)$, $z_3 = \left(\frac{5}{3}; 0\right)$ e $z_4 = (\sqrt{2}; \pi)$ são exemplos de números complexos.

Já com vistas a introduzir uma estrutura operatória aos números complexos, estabelecemos, também, as seguintes definições, onde **a**, **b**, **c** e **d** são números reais:

I) Igualdade de números complexos

$$(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

II) Adição de números complexos

$$(a;\ b) + (c;\ d) = (a + c;\ b + d)$$

III) Multiplicação de números complexos

$$(a;\ b) \cdot (c;\ d) = (ac - bd;\ ad + bc)$$

Exemplos

a) Se $(x;\ y) = (-2;\ 3)$, então $x = -2$ e $y = 3$.

b) Se $z_1 = (2;\ 3)$ e $z_2 = (4;\ 5)$, então:

$$z_1 + z_2 = (2;\ 3) + (4;\ 5) = (2 + 4;\ 3 + 5) = (6;\ 8) \text{ e}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2;\ 3) \cdot (4;\ 5) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5;\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4) = (-7;\ 22)$$

c) Sendo **z** um número complexo qualquer, temos:

$$z^2 = z \cdot z$$

Assim, se $z = \left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, então:

$$z^2 = z \cdot z = \left(\frac{1}{2};\ -2\right) \cdot \left(\frac{1}{2};\ -2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - [-2] \cdot [-2];\ \frac{1}{2} \cdot [-2] + [-2] \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{15}{4};\ -2\right)$$

Para quem está tomando contato pela primeira vez com esta teoria, é intrigante observar que as definições de igualdade e adição dadas são, digamos, *intuitivas*, enquanto que a da multiplicação foge completamente a essa intuição: por que não definir $(a;\ b) \cdot (c;\ d)$ por $(a \cdot c;\ b \cdot d)$?

A isso respondemos com a lembrança de que estamos procurando criar um campo onde existam números cujo quadrado seja negativo e, como veremos mais adiante, será justamente esse modo de multiplicar, estabelecido na definição (III), que nos fornecerá tais resultados.

Exercícios Resolvidos

1.11) Determine os reais **x** e **y** para que $(x - 3y;\ x + y) = (1;\ -4)$.

Solução

Da igualdade de números complexos vem:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$x = -\frac{11}{4} \text{ e } y = -\frac{5}{4}$$

1.12) Determine o número complexo **z** tal que $(-2;\ 8) + z = (2;\ 0) \cdot z$.

Solução

Seja $z = (x;\ y)$; então:

$$(-2;\ 8) + (x;\ y) = (2;\ 0) \cdot (x;\ y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + x;\ 8 + y) = (2 \cdot x - 0 \cdot y;\ 2 \cdot y + 0 \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + x;\ 8 + y) = (2x;\ 2y) \Rightarrow \begin{cases} -2 + x = 2x \\ 8 + y = 2y \end{cases}$$

Logo, $x = -2$ e $y = 8$, e daí $z = (-2;\ 8)$.

1.13) Resolva a equação $z^2 = (0;\ 1)$.

Solução

Seja $z = (x;\ y)$; então:

$$z^2 = (0;\ 1) \Rightarrow z \cdot z = (0;\ 1) \Rightarrow (x;\ y) \cdot (x;\ y) = (0;\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \cdot x - y \cdot y;\ x \cdot y + y \cdot x) = (0;\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2;\ 2xy) = (0;\ 1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (lembrando que **x** e **y** são números **reais**), obtemos:

$$\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Logo, $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e o conjunto-solução da equação é:

$$S = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Exercícios Propostos

1.14) Dados $z_1 = (1; 4)$, $z_2 = (-2; -2)$ e $z_3 = (0; 3)$, calcule:

a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 + z_2 + z_3$
c) $z_1 \cdot z_2$
d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
e) $z_2 \cdot (z_1 + z_3)$
f) $z_1^2 + z_3^2$
g) $(z_1 + z_2)^2$

1.15) Determine os reais **x** e **y** para que se tenha:

a) $(x + 2; y - 3) = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$

b) $(2x - 3y; 3x + 2y) = \left(8; \frac{11}{2}\right) \cdot (2; 0)$

1.16) Dados $z_1 = (5; -5)$ e $z_2 = \left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$, determine **z** tal que:

a) $z + z_1 = (0; 0)$
b) $z \cdot z_2 = (1; 0)$
c) $z + z_2 = z_1$
d) $z \cdot z_1 = z_2$

1.17) Resolva a equação $z^2 = (0; -8)$.

1.3 – O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Com a definição de número complexo, seguida dos conceitos de igualdade, adição e multiplicação, dados no item 1.2, podemos agora definir **conjunto dos números complexos** como sendo o **conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais:**

$$\mathbb{C} = \{z = (x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

É importante notar que, desta forma, estamos definindo o conjunto dos números complexos como o **produto cartesiano** do conjunto dos números reais por ele mesmo, isto é:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Estando, então, definidas em $\mathbb{C}$ a igualdade (I), a adição (II) e a multiplicação (III), conforme o item anterior, é bastante simples provar que, nesse novo conjunto, são verdadeiras as nove propriedades operacionais da Álgebra, a saber:

1. Propriedade comutativa da adição

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) = \\ &= (c + a; d + b) = (c; d) + (a; b) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

2. Propriedade associativa da adição

$$z_1 + [z_2 + z_3] = [z_1 + z_2] + z_3, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + [z_2 + z_3] &= (a; b) + [(c; d) + (p; q)] = (a; b) + (c + p; d + q) = \\ &= (a + [c + p]; b + [d + q]) = ([a + c] + p; [b + d] + q) = \\ &= (a + c; b + d) + (p; q) = [(a; b) + (c; d)] + (p; q) = \\ &= [z_1 + z_2] + z_3 \end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro da adição

$$\exists \eta_a \in \mathbb{C} \mid z + \eta_a = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $\eta_a = (x; y)$ tal que $z + \eta_a = z$:

$$(a; b) + (x; y) = (a; b) \Leftrightarrow (a + x; b + y) = (a; b)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases}$

donde $x = 0$ e $y = 0$. Existe, portanto, o **elemento neutro** $\eta_a = (0; 0)$, que **somado** a qualquer número complexo **z** dá como resultado o próprio **z**.

4. Existência do elemento simétrico

$$\exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = \eta_a, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $z' = (x; y)$ tal que $z + z' = \eta_a$. Como $\eta_a = (0; 0)$, escrevemos:

$$(a; b) + (x; y) = (0; 0) \Leftrightarrow (a + x; b + y) = (0; 0)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases}$

donde $x = -a$ e $y = -b$. Existe, portanto, o elemento simétrico $z' = (-a; -b)$.

Observação: Indicando **z'** por **−z**, temos $z' = (-a; -b) = -z = -(a; b)$.

Com isso, sendo $z_1 = (m; n)$ e $z_2 = (p; q)$, ao efetuarmos a adição $z_1 + z_2'$, escrevemos:

$$z_1 + z_2' = z_1 + (-z_2) = (m; n) + (-p; -q) = (m-p; n-q)$$

dando assim um significado para o que chamamos de *subtração* de números complexos. Por exemplo:

$$(5; 8) - (9; 3) = (5 - 9; 8 - 3) = (-4; 5)$$
$$(-13; 5) - (2; -4) = (-15; 9)$$

5. Propriedade comutativa da multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$
$$z_2 \cdot z_1 = (c; d) \cdot (a; b) = (ca - db; da + cb)$$

Logo: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

6. Propriedade associativa da multiplicação

$$z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] = [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] &= (a; b)\,[(c; d) \cdot (p; q)] = (a; b) \cdot (cp - dq; cq + dp) = \\ &= (a[cp - dq] - b[cq + dp]; a[cq + dp] + b\,[cp - dq]) = \\ &= (acp - adq - bcq - bdp; acq + adp + bcp - bdq) \\ [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3 &= [(a; b) \cdot (c; d)] \cdot (p; q) = (ac - bd; ad + bc) \cdot (p \cdot q) = \\ &= ([ac - bd]p - [ad + bc]q; [ac - bd]q + [ad + bc]p) = \\ &= (acp - bdp - adq - bcq; acq - bdq + adp + bcp) \end{aligned}$$

Logo: $z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] = [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3$

7. Existência do elemento neutro da multiplicação

$$\exists \eta_m \in \mathbb{C} \mid z \cdot \eta_m = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $\eta_m = (x; y)$ tal que $z \cdot \eta_m = z$:

$$(a; b) \cdot (x; y) = (a; b) \Leftrightarrow (ax - by; ay + bx) = (a; b)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases}$

A resolução do sistema fornece $x = 1$ e $y = 0$. Existe, portanto, o **elemento neutro**

$$\eta_m = (1;\ 0)$$

que **multiplicado** por qualquer número complexo **z** dá como resultado o próprio **z**.

Exemplificando numericamente:

$$(5;\ 3) \cdot (1;\ 0) = (5 \cdot 1 - 3 \cdot 0;\ 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = (5;\ 3)$$

$$(1;\ 0) \cdot (3;\ -\sqrt{2}) = (1 \cdot 3 - 0 \cdot [-\sqrt{2}];\ 1 \cdot [-\sqrt{2}] + 0 \cdot 3) = (3;\ -\sqrt{2})$$

8. Existência do elemento inverso

$$\exists z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z \cdot z^{-1} = \eta_m,\ \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Seja $z = (a;\ b) \neq (0;\ 0)$, isto é, $z \in \mathbb{C} - \{(0;\ 0)\} = \mathbb{C}^*$. Vamos mostrar que existe o número complexo $(x;\ y)$, indicado por $\mathbf{z}^{-1}$, tal que $z \cdot z^{-1} = \eta_m$:

$$(a;\ b) \cdot (x;\ y) = (1;\ 0) \Leftrightarrow (ax - by;\ ay + bx) = (1;\ 0)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$

A resolução do sistema fornece $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$. Existe, portanto, o elemento inverso de $z = (a;\ b)$ (também chamado inverso multiplicativo):

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2};\ \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

Exemplos

1.º) O inverso de $z_1 = \left(\frac{4}{5};\ \frac{2}{5}\right)$ é:

$$z_1^{-1} = \left(\frac{\frac{4}{5}}{\left[\frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{2}{5}\right]^2};\ \frac{-\frac{2}{5}}{\left[\frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{2}{5}\right]^2}\right) = \left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$$

2.º) O inverso de $z_2 = (-3;\ 0)$ é:

$$z_2^{-1} = \left(\frac{-3}{[-3]^2 + 0^2};\ \frac{0}{[-3]^2 + 0^2}\right) = \left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$$

3.º) O inverso de $z_3 = (0;\ -4)$ é:

$$z_3^{-1} = \left(\frac{0}{0^2 + [-4]^2};\ \frac{-[-4]}{0^2 + [-4]^2}\right) = \left(0;\ \frac{1}{4}\right)$$

9. Propriedade distributiva

$$z_1 \cdot [z_2 + z_3] = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3,\ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C},\ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot [z_2 + z_3] &= (a; b) \cdot [(c; d) + (p; q)] = \\
&= (a; b) \cdot (c + p;\ d + q) = \\
&= (a[c + p] - b[d + q];\ a[d + q] + b[c + p]) = \\
&= (ac + ap - bd - bq;\ ad + aq + bc + bp) \\
z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (a; b) \cdot (c; d) + (a; b) \cdot (p; q) = \\
&= (ac - bd;\ ad + bc) + (ap - bq;\ aq + bp) = \\
&= ([ac - bd] + [ap - bq];\ [ad + bc] + [aq + bp]) = \\
&= (ac - bd + ap - bq;\ ad + bc + aq + bp)
\end{aligned}$$

Logo: $z_1 \cdot [z_2 + z_3] = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Exercício Resolvido

1.18) **Divisão de números complexos** – A existência do elemento inverso (propriedade 8) permite-nos definir divisão de dois números complexos como sendo o produto do primeiro pelo inverso do segundo. Assim, sendo z_1 e z_2, com $z_2 \neq (0; 0)$, dois elementos de $\mathbb{C}$, a divisão de z_1 por z_2 é indicada e definida por:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Nessas condições, efetue:

a) $\dfrac{(2;\ -3)}{(3;\ 2)}$

b) $\dfrac{(-1;\ 1)}{(1;\ -1)}$

Solução

a) O inverso de $(3;\ 2)$ é:

$$(3;\ 2)^{-1} = \left(\frac{3}{3^2 + 2^2};\ \frac{-2}{3^2 + 2^2}\right) = \left(\frac{3}{13};\ -\frac{2}{13}\right)$$

Então:

$$\frac{(2;\ -3)}{(3;\ 2)} = (2;\ -3) \cdot (3;\ 2)^{-1} = (2;\ -3) \cdot \left(\frac{3}{13};\ -\frac{2}{13}\right) =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{3}{13} - [-3] \cdot \left[-\frac{2}{13}\right];\ 2 \cdot \left[-\frac{2}{13}\right] + [-3] \cdot \frac{3}{13}\right) = (0;\ -1)$$

b) O inverso de $(1;\ -1)$ é:

$$(1;\ -1)^{-1} = \left(\frac{1}{1^2 + [-1]^2};\ \frac{-[-1]}{1^2 + [-1]^2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$$

Então:

$$\frac{(-1;\ 1)}{(1;\ -1)} = (-1;\ 1) \cdot (1;\ -1)^{-1} = (-1;\ 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left([-1] \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2};\ [-1] \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = (-1;\ 0)$$

Exercícios Propostos

1.19) Determine os inversos multiplicativos dos números complexos:

a) $\left(\frac{12}{13};\ \frac{5}{13}\right)$ b) $(5;\ 0)$ c) $(0;\ 3)$

1.20) Efetue as divisões:

a) $\dfrac{(1;\ 1)}{\left(\frac{12}{13};\ \frac{5}{13}\right)}$ b) $\dfrac{(0;\ -5)}{(5;\ 0)}$ c) $\dfrac{(-3;\ 0)}{(0;\ 3)}$

1.21) Seja $z = (a;\ b) \in \mathbb{C}^*$. Se o inverso multiplicativo de $\mathbf{z}$ é $\mathbf{z}^{-1} = (c;\ d)$, mostre que:

$$[a^2 + b^2] \cdot [c^2 + d^2] = 1$$

1.22) **Potências de expoentes inteiros** – Tendo como fundo de consistência a *propriedade associativa*, para todo $z \in \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, definimos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots z}_{\text{n fatores}}$$

Por exemplo, se $z = (2;\ 1)$ e $n = 3$, temos:

$$z^3 = (2;\ 1)^3 = (2;\ 1) \cdot (2;\ 1) \cdot (2;\ 1) = (3;\ 4) \cdot (2;\ 1) = (2;\ 11)$$

Adotando, também, as definições:

$$z^0 = \eta_m = (1;\ 0)$$

$$z^1 = z$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = (z^n)^{-1},\quad \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ficam completamente caracterizadas as potências de expoentes inteiros dos números complexos, valendo para elas as *propriedades* usuais, como, por exemplo:

$$z^{n_1} \cdot z^{n_2} = z^{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad (z^{n_1})^{n_2} = z^{n_1 \cdot n_2}$$

Assim sendo, calcule $\mathbf{z}$ tal que:

$$z = \frac{(1;\ 3)^5}{(1;\ 3)^3} + (1;\ 0)^7 - \frac{(-3;\ 5)^5}{(3;\ -5)^5}$$

Capítulo

2

Forma algébrica dos números complexos

2.1 – INTRODUÇÃO

Desde que nos habituemos à regra de multiplicação, o trabalho algébrico com números complexos não apresenta maiores dificuldades. No entanto, não podemos dizer que seja um trabalho confortável, principalmente quando comparado ao que usualmente temos ao operar com números reais.

Por isso, visando *agilizar* o modo de operar com números $z \in \mathbb{C}$, vamos introduzir algumas **notações** novas.

2.2 – DESCOBRINDO QUE OS NÚMEROS REAIS SÃO COMPLEXOS

Comecemos por considerar o subconjunto $\mathbb{C}_r$ de $\mathbb{C}$, formado pelos complexos da forma **(x; y)**, isto é:

$$\mathbb{C}_r = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}$$

Assim, $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ e $(\sqrt{2}; 0)$ são exemplos de elementos de $\mathbb{C}_r$.

Efetuando a **adição** e a **multiplicação** de dois elementos, $(a; 0)$ e $(c; 0)$, de $\mathbb{C}_r$:

$$(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0 + 0) = (a + c; 0)$$
$$(a; 0) \cdot (c; 0) = (a \cdot c - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (a \cdot c; 0)$$

notamos que as **segundas componentes** (y) dos resultados continuam sendo **zero** (portanto esses resultados pertencem a $\mathbb{C}_r$), e as **primeiras componentes** são obtidas como se tivéssemos usado a **adição** e a **multiplicação dos números reais**.

Exemplos

em $\mathbb{C}_r$	em $\mathbb{R}$
$(2;0) + (5;0) = (7;0)$	$2 + 5 = 7$
$(12;0) - \left(\frac{1}{2};0\right) = \left(\frac{23}{2};0\right)$	$12 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$
$(2;0) \cdot (5;0) = (10;0)$	$2 \cdot 5 = 10$
$(-12;0) \cdot \left(\frac{1}{2};0\right) = (-6;0)$	$(-12) \cdot \frac{1}{2} = -6$

Vemos, então, que **os elementos de $\mathbb{C}_r$, obedecendo às definições de igualdade, adição e multiplicação de complexos, têm comportamento idêntico ao dos números reais**. (Num ramo da Matemática, chamado Álgebra Moderna, os conjuntos $\mathbb{C}_r$ e $\mathbb{R}$ são ditos **isomorfos**.)

Ora, já que podemos operar com os complexos da forma **(x; 0)** do mesmo modo que operamos com o real **x**, vamos adotar a **notação**:

$$(x;0) = x$$

para todo x real. Podemos, portanto, escrever:

$$(0;0) = 0,\ (1;0) = 1,\ (-1;0) = -1,\ (\sqrt{2};0) = \sqrt{2}$$

Admitida a igualdade $(x;0) = x$, é evidente que $\mathbb{C}_r = \mathbb{R}$; passamos, então, a considerar o conjunto dos números reais como **subconjunto** do conjunto dos números complexos:

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

podendo, por isso, afirmar que **todo número real é complexo**.

2.3 — UNIDADE IMAGINÁRIA

A igualdade $(1;0) = 1$ define, em $\mathbb{C}$, o número complexo $(1;0)$ como **unidade real**.

Definimos como **unidade imaginária o número complexo (0; 1)**, que passamos a indicar pelo símbolo i:

$$\boxed{i = (0;1)}$$

Era nossa intenção conseguir um número cujo quadrado fosse negativo. Agora, já o temos! Observando que:

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0)$$

e utilizando a notação adotada no item 2.2, obtemos a **propriedade fundamental da unidade imaginária**:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Imaginários puros – Todos os números complexos da forma **(0; y), com y ≠ 0**, são denominados **imaginários puros**.

Notemos que:

$$(y; 0) \cdot (0; 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1; y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; y)$$

Assim, por exemplo:

$$(0; 3) = (3; 0) \cdot (0; 1)$$
$$(0; -5) = (-5; 0) \cdot (0; 1)$$

Como $(y; 0) = y$ e $(0; 1) = i$, podemos escrever:

$$(0; y) = (y; 0) \cdot (0; 1) = y \cdot i$$

ou seja, para todo imaginário puro vale a notação:

$$(0; y) = yi$$

Portanto, $(0; 3) = 3i$, $(0; -5) = -5i$, $(0; -1) = -i$ são exemplos de imaginários puros.

2.4 – FORMA ALGÉBRICA

Com as novas notações e definições vistas, podemos representar um número complexo qualquer $z = (x; y)$ numa outra forma que, como veremos, tornará bem mais práticas e simples as operações.

Notando que sempre podemos escrever:

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y)$$

como $(x; 0) = x$ e $(0; y) = yi$, temos:

$$\boxed{z = (x; y) = x + yi}$$

que é a chamada **forma algébrica de z**.

Observação: Se $z = (x; y) = x + yi$ apresenta $y \neq 0$, **z** é chamados **número imaginário**.

Exemplos

a) $(2; 7) = 2 + 7i$
b) $(-3; 5) = -3 + 5i$
c) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$
d) $(-10; 0) = -10 + 0i = -10$
e) $(0; 7) = 0 + 7i = 7i$
f) $(0; 0) = 0 + 0i = 0$

Os números reais **x** e **y** são, respectivamente, denominados **parte real de z** e **parte imaginária de z**. É usual representá-los pelos símbolos:

$$\boxed{x = \mathrm{IR_e}(z)} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \mathrm{I_m}(z)}$$

Operações na forma algébrica — Examinando alguns exemplos, vejamos como se aplicam com a forma $x + yi$ a igualdade, a adição e a multiplicação de complexos.

Exemplos

1.º) $\begin{cases} (x; y) = (-2; 13) \Leftrightarrow x = -2 \text{ e } y = 13 \\ x + yi = -2 + 13i \Leftrightarrow x = -2 \text{ e } y = 13 \end{cases}$

Vemos aqui que, para igualarmos dois complexos na forma algébrica, basta identificar as partes reais e as partes imaginárias, isto é:

$$\boxed{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{d} \text{ reais})$$

2.º) $\begin{cases} (2; 13) + (5; 1) = (7; 14) \\ 2 + 13i + 5 + i = 7 + 14i \end{cases}$

Para somarmos dois complexos na forma algébrica, somamos as partes reais e as partes imaginárias, ou seja:

$$\boxed{[a + bi] + [c + di] = [a + c] + [b + d]\,i} \quad (\mathbf{a}\ \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{d} \text{ reais})$$

3.º) $\begin{cases} (7;3)\cdot(5;6) = (7\cdot 5 - 3\cdot 6;\ 7\cdot 6 + 3\cdot 5) = (17;57) \\ [7+3i]\cdot[5+6i] = 35 + 42i + 15i + 18\underbrace{i^2}_{-1} = 17 + 57i \end{cases}$

Para multiplicarmos dois complexos na forma algébrica, aplicamos a **propriedade distributiva**, como se estivéssemos trabalhando com expressões reais da forma a + bx, mas lembrando sempre que $\mathbf{i^2 = -1}$. Em termos gerais:

$$[a + bi]\cdot[c + di] = ac + adi + bci + bdi^2 = [ac - bd] + [ad + bc]\,i \qquad (\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\ \text{e}\ \mathbf{d}\ \text{reais})$$

Resumo da nomenclatura — O quadro a seguir nos dá uma visão da nomenclatura introduzida neste capítulo. Nele acrescentamos algumas denominações que não foram citadas anteriormente.

Símbolo	*Denominação*
$(1;0) = 1$	unidade real
$(0;1) = i$	unidade imaginária
$z = (x;y)$	forma cartesiana de **z**
$z = x + yi$	forma algébrica de **z**
$R_e(z)$	parte real de **z**
$I_m(z)$	parte imaginária de **z**

Se $y = 0$, então $z = x + yi = x$ é real.
Se $y \neq 0$, então $z = x + yi$ é imaginário.
Se $x = 0$ e $y \neq 0$, então $z = x + yi = yi$ é imaginário puro.

Exercícios Resolvidos

2.1) Sendo $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 3 - 3i$ e $z_3 = 5i$, efetue:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $z_1 \cdot z_2 + z_3$

c) $(z_1 + z_2)^2$

d) $(z_1 - z_2)^2 - z_3^3$

Solução

Lembrando que as operações com números complexos na forma algébrica se processam de modo análogo ao que utilizamos com expressões algébricas, e que $i^2 = -1$, temos:

a) $z_1 + z_2 - z_3 = (1 + 4i) + (3 - 3i) - (5i) = 1 + 4i + 3 - 3i - 5i = 4 - 4i$

b) $z_1 \cdot z_2 + z_3 = (1 + 4i) \cdot (3 - 3i) + 5i = (3 - 3i + 12i - 12i^2) + 5i =$
$= 3 - 3i + 12i + 12 + 5i = 15 + 14i$

c) $(z_1 + z_2)^2 = (1 + 4i + 3 - 3i)^2 = (4 - i)^2 = 16 - 8i + i^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$

d) $(z_1 - z_2)^2 - z_3{}^3 = (1 + 4i - 3 + 3i)^2 - (5i)^3 = (-2 + 7i)^2 - 125i^3 =$
$= (4 - 28i + 49i^2) - 125i^2 \cdot i = 4 - 28i - 49 + 125i = -45 + 97i$

2.2) Calcule $(1 - i)^6$.

Solução

É claro que poderíamos calcular $(1 - i)^6$ efetuando o produto de 6 fatores $(1 - i)(1 - i) \ldots (1 - i)$ ou utilizando a fórmula de desenvolvimento do binômio de Newton $(x - a)^n$.* Porém, neste caso, podemos fazer:

$(1 - i)^6 = [(1 - i)^2]^3 = [1 - 2i + i^2]^3 = [1 - 2i - 1]^3 = [-2i]^3 = -8i^3 = -8i^2 \cdot i = 8i$

2.3) Determine o real **x** para que o número complexo $z = 2 + (x - 4i) \cdot (2 + xi)$ seja:

a) real

b) imaginário

c) imaginário puro

Solução

Vamos, inicialmente, escrever **z** na forma algébrica $a + bi$:

$z = 2 + (x - 4i)(2 + xi) = 2 + 2x + x^2i - 8i - 4xi^2 = 2 + 2x + x^2i - 8i + 4x$

Assim, $z = (2 + 6x) + (x^2 - 8)i$.

a) Para que **z** seja real é necessário que sua parte imaginária seja nula:

$$I_m(z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

b) Para que **z** seja imaginário é necessário que sua parte imaginária não seja nula:

$$I_m(z) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 2\sqrt{2} \text{ e } x \neq -2\sqrt{2})$$

c) Para que **z** seja imaginário puro é necessário que sua parte real seja nula e sua parte imaginária não seja nula:

$$R_e(z) = 0 \Leftrightarrow 2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

(Note que, se $x = -\frac{1}{3}$, $R_e(z) = 0$ e $I_m(z) \neq 0$.)

* No capítulo 5 estudaremos um processo geral para o cálculo de potências da forma $(a + bi)^n$.

2.4) Sendo $z_1 = 3x - 2yi$, $z_2 = x + 5yi$ e $z_3 = 6 - 6i$, determine os reais **x** e **y** para que $z_1 + z_2 = z_3$.

Solução

$$z_1 + z_2 = z_3 \Leftrightarrow 3x - 2yi + x + 5yi = 6 - 6i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3yi = 6 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ 3y = -6 \end{cases}$$

Logo: $x = \dfrac{3}{2}$ e $y = -2$.

2.5) Determine os reais **x** e **y** para que se tenha $(2x - 3yi) \cdot (2 + i) = -30i$.

Solução

Efetuando o produto indicado no primeiro membro da igualdade, temos:

$$4x + 2xi - 6yi - 3yi^2 = -30i$$
$$4x + 2xi - 6yi + 3y = -30i$$

É importante que, para igualarmos dois números complexos, escrevamos em destaque a parte real e a parte imaginária de cada um. Assim, a última igualdade acima se escreve:

$$(4x + 3y) + (2x - 6y) = 0 - 30i$$

e dela tiramos o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = -30 \end{cases}$

que resolvido fornece $x = -3$ e $y = 4$.

2.6) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 8$.

Solução

Para que possamos utilizar a igualdade de complexos, fazemos $z = x + yi$ (**x** e **y** reais). Então, $z^3 = 8$ se escreve:

$$(x + yi)^3 = 8$$
$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 8$$
$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i^2 \cdot i = 8$$

Destacando a parte real e a parte imaginária de cada membro, temos:

$$(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 8 + 0i$$

e daí o sistema $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8 & \text{(I)} \\ 3x^2y - y^3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Fatorando a equação (II):

$$y(3x^2 - y^2) = 0$$

obtemos $y = 0$ ou $y^2 = 3x^2$.

Fazendo, em (I), $y = 0$, vem $x = 2$.

Substituindo, em (I), y^2 por $3x^2$, vem $x = -1$ e, portanto, $y = \pm\sqrt{3}$.
Logo, os valores de $z = x + yi$ são:

$$(x = 2;\ y = 0) \Leftrightarrow z = 2$$
$$(x = -1;\ y = \sqrt{3}) \Leftrightarrow z = -1 + \sqrt{3}\,i$$
$$(x = -1;\ y = -\sqrt{3}) \Leftrightarrow z = -1 - \sqrt{3}\,i$$

2.7) Determine $z \in \mathbb{C}$ para que se tenha $z^2 + 5 = 2z$.

Solução

Fazendo a substituição $z = x + yi$ (x e y reais), temos:

$$z^2 + 5 = 2z \Leftrightarrow (x + yi)^2 + 5 = 2(x + yi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 + 5 = 2x + 2yi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 5) + 2xyi = 2x + 2yi$$

Desta igualdade tiramos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 5 = 2x & \text{(I)} \\ 2xy = 2y & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), $y(x - 1) = 0$, obtemos $y = 0$ ou $x = 1$.
Para $y = 0$, a equação (I) não apresenta soluções reais para **x**.
Para $x = 1$, a equação (I) fornece $y = \pm 2$.
Logo, o número $z = x + yi$ é $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

Outro modo – A equação $z^2 + 5 = 2z$ pode ser escrita:

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

Trata-se, então, de uma equação do 2.º grau de **coeficientes reais**, podendo, por isso, ser resolvida como segue:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Assim, $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

O leitor deve entender que este processo só foi utilizado no momento pela facilidade de calcularmos a raiz quadrada do discriminante Δ, que, neste exemplo, é um número real ($\Delta = -16$).

No caso em que Δ resultasse um número imaginário — e isso pode ocorrer quando os coeficientes da equação não são reais — teríamos alguma dificuldade em calcular a raiz quadrada de Δ. No capítulo 5, exercício 5.14, mostraremos como enfrentar o problema.

2.8) Sabendo que a equação em **x**:

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

(onde **a**, **b**, **c** e **d** são reais não nulos), admite uma raiz real, mostre que $abd = d^2 + b^2c$.

Solução

Seja $x = \alpha$ a raiz real da equação. Então:

$$\alpha^2 + (a + bi)\alpha + c + di = 0 \quad \text{ou}$$

$$\alpha^2 + a\alpha + b\alpha i + c + di = 0 \quad \text{ou}$$

$$(\alpha^2 + a\alpha + c) + (b\alpha + d)i = 0 + 0i$$

Da igualdade de complexos, tiramos:

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + c = 0 & \text{(I)} \\ b\alpha + d = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) vem $\alpha = -\dfrac{d}{b}$; substituindo em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0$$

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$$

$$d^2 - abd + b^2c = 0$$

Logo: $d^2 + b^2c = abd$.

2.9) Considere os complexos $z_1 = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$ e $z_2 = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$, onde α é um real qualquer. Mostre que, se $z = z_1 \cdot z_2$, então $-1 \leqslant R_e(z) \leqslant 1$ e $-1 \leqslant I_m(z) \leqslant 1$.

Solução

$$z = z_1 \cdot z_2 = (\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)$$
$$z = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha - i\,\text{sen}^2\,\alpha + i\cos^2\alpha - i^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$
$$z = (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha)\,i$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = \text{sen}\,2\alpha \\ \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha \end{array}}$$

As fórmulas trigonométricas do quadro ao lado permitem escrever:

$$z = \underbrace{\text{sen}\,2\alpha}_{R_e(z)} + i\,\underbrace{\cos 2\alpha}_{I_m(z)}$$

Como $R_e(z) = \text{sen}\,2\alpha$ e $-1 \leqslant \text{sen}\,2\alpha \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant R_e(z) \leqslant 1$.
Como $I_m(z) = \cos 2\alpha$ e $-1 \leqslant \cos 2\alpha \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant I_m(z) \leqslant 1$.

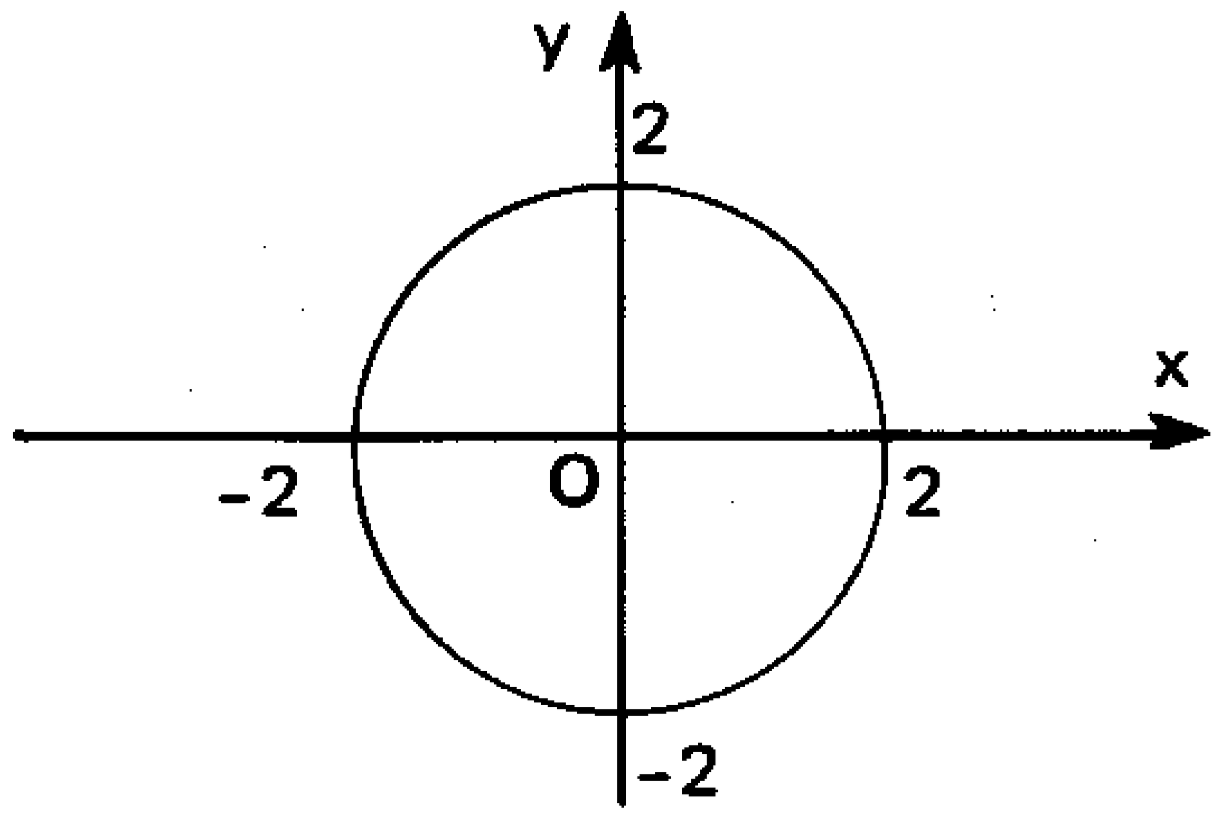
2.10) Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x; y)$ do plano cartesiano para os quais o produto de números complexos $(x + yi)(y + xi)$ seja $4i$.

Solução

$$(x + yi)(y + xi) = 4i$$
$$xy + x^2i + y^2i + xyi^2 = 4i$$
$$xy + x^2i + y^2i - xy = 4i$$
$$0 + (x^2 + y^2)i = 0 + 4i$$

Temos, então, que $x^2 + y^2 = 4$.

Da Geometria Analítica, sabemos que uma equação da forma $x^2 + y^2 = r^2$ representa uma circunferência com centro na origem (0; 0) e raio $|r|$. Portanto, o lugar geométrico procurado é a circunferência de centro O (0; 0) e raio 2.



Exercícios Propostos

2.11) Sendo $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 5i$ e $z_3 = -1 + i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 + z_3$
b) $z_1 - 3z_2 + iz_3$
c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
d) $iz_1 + z_2 \cdot z_3$
e) $(z_1 + z_2)^2 + z_3^2$
f) $z_1^2 - z_2^2 + z_3^3$

2.12) Calcule:

a) $(-3i)^5$ b) $(1 + i)^4$ c) $(-1 - i)^6$ d) $(1 - i)^{10}$

2.13) Determine o real **x** de modo que o complexo $z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi)$ seja:

a) real b) imaginário c) imaginário puro

2.14) A que condição devem obedecer os reais **x** e **y** para que $z = (x + yi) \cdot (y + xi)$ seja um imaginário puro?

2.15) Seja $z = ai(a - 2i) - (10 + 9i)$, $a \in \mathbb{R}$. Determine **a** para que se tenha:

a) $R_e(z) \geqslant 0$ b) $I_m(z) < 0$ c) $R_e(z) < 0$ e $I_m(z) \geqslant 0$

2.16) Sendo $z_1 = 2x + yi$, $z_2 = y - 2xi$ e $z_3 = 1 - i$, determine os reais **x** e **y** tais que:

a) $z_1 + z_2 = 23z_3 - 2$ b) $z_1 \cdot z_2 = z_3 + (1 + i)$

2.17) Determine o real **x** para que:

a) $x(2 + xi) - 6i^2 = 9i$ b) $(x - 5i)(2 + xi) = 14$

2.18) Determine $z \in \mathbb{C}$, tal que:

a) $z^2 = 3 + 4i$ b) $z^3 = -27$

2.19) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $z^2 = 2z - 3$ b) $z^2 + 14z + 50 = 0$

2.20) Sejam os reais **a**, **b**, **c** e **d** não nulos. Sabendo que a equação em **x**:

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

admite um número imaginário puro como raiz, mostre que $abd = d^2 - a^2c$.

2.21) Escreva na forma algébrica $a + bi$ os seguintes números complexos:

a) $\left(\cos \dfrac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}\right)^2$ b) $2\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{8} + i \cos \dfrac{\pi}{8}\right)^2$

2.22) Sendo **a** e **b** números reais e $a + bi = (\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha)(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)$, mostre que $a^2 + b^2 = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2.23) Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Se $z = (1 + i \operatorname{tg} \alpha)(1 - i \operatorname{tg} \alpha)$, mostre que $R_e(z) \geqslant 1$ e $I_m(z) = 0$.

2.5 — AS POTÊNCIAS NATURAIS DE i

Consideremos as potências do tipo i^n, onde **n** é natural. Vejamos alguns exemplos:

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^1 = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Começamos então a perceber que, à medida que **n** cresce, os resultados de i^n vão-se repetindo periodicamente, assumindo sempre um dos valores da seqüência:

$$1, \ i, \ -1, \ -i$$

sendo, pois, de **4 unidades** o período de repetição; isto nos sugere que, para calcular o valor de i^n, basta **elevar i ao resto da divisão euclidiana de n por 4**.

De fato, se dividindo **n** por **4** encontramos quociente **q** e resto **r**, temos:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \Leftrightarrow n = 4q + r \text{ e } r < 4$$

Então:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = (1)^q \cdot i^r$$

e, portanto:

$$\boxed{i^n = i^r}$$

Exemplos

a) Calculemos i^{67}.

$$\begin{array}{r|l} 67 & 4 \\ \cline{2-2} 27 & 16 \\ 3 & \end{array}$$

Como $r = 3$, temos:

$$i^{67} = i^{3} = -i$$

b) Calculemos i^{726}.

$$\begin{array}{r|l} 726 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 181 \\ 06 & \\ 2 & \end{array}$$

Como $r = 2$, temos:

$$i^{726} = i^{2} = -1$$

Quando o expoente **n** é maior que 99, podemos facilitar a regra acima utilizando um resultado da Aritmética que nos diz:

> *O resto da divisão euclidiana de um número natural* **n** *($n \geqslant 100$) por 4 pode ser obtido dividindo por 4 apenas o número formado pelos* **dois últimos** *algarismos de* **n**.

Assim, no caso do exemplo *b* acima, podemos fazer:

$$\begin{array}{r|l} 726 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 181 \\ 06 & \\ 2 & \end{array} \quad \text{ou, simplesmente,} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

c) Calculemos $i^{836\,753}$.

Como o número formado pelos dois últimos algarismos do expoente é 53, fazemos:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 4 \\ \cline{2-2} 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$i^{836\,753} = i^{1} = i$$

Em resumo, temos as seguintes igualdades, para todo **k** $\in \mathbb{N}$:

$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i$	$i^{4k+2} = -1$	$i^{4k+3} = -i$

Observação: Na realidade, as quatro igualdades acima são válidas para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$. Basta notar que, independentemente de **k** ser **positivo ou não**, temos:

$$
\begin{aligned}
i^{4k} &= (i^4)^k = 1^k = 1 \\
i^{4k+1} &= i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^{4k+2} &= i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\
i^{4k+3} &= i^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i
\end{aligned}
$$

Exercícios Resolvidos

2.24) Quantos valores distintos assume a expressão $A = i^n + i^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$?

Solução

$$A = i^n + i^{-n} = i^n + \frac{1}{i^n} = \frac{i^{2n} + 1}{i^n} = \frac{(i^2)^n + 1}{i^n} = \frac{(-1)^n + 1}{i^n}$$

Se **n** é par, temos $\begin{cases} (-1)^n = 1 \\ i^n = \pm 1 \end{cases}$

e, portanto:

$$A = \frac{1 + 1}{\pm 1} = \pm 2$$

Se **n** é ímpar, temos $(-1)^n = -1$ e, portanto, $A = \dfrac{-1 + 1}{i^n} = 0$

Logo, A assume três valores distintos: $-1, 0, 1$.

2.25) Determine a relação entre os naturais **m** e **n** para que $i^m = i^n$.

Solução

Dividindo a igualdade dada por i^n, temos:

$$\frac{i^m}{i^n} = \frac{i^n}{i^n}$$

ou seja, $i^{m-n} = 1$.

Como $1 = i^{4k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, vem:

$$m - n = 4k \qquad (m - n \text{ é múltiplo de } 4)$$

Exercícios Propostos

2.26) Calcule:

a) i^{38}
b) i^{507}
c) $i^{1\,348}$
d) $i^{307\,533}$
e) $i^{32} - i^5 + i^7 - i^{17} - i^{42}$ $= -3i + 2$
f) $(1 + i)^{28}$ $= ((1+i)^4)^7$

$= ((1+i)^2)^{14} =$

$(1+2i-1)^{14}$ $(2i)^{14}$

$2^{14} \cdot i^2 = -2^{14}$

2.27) Sendo $n \in \mathbb{N}$, calcule:

a) $A = \dfrac{i^n}{i^{-n}}$ b) $A = i^n + i^{n+1}$ c) $A = \dfrac{i^n \cdot i^n}{\dfrac{1}{i}}$

2.28) Quantos valores distintos assume a expressão $A = i^{3n+2} - i^{2-n}$, $n \in \mathbb{N}$?

2.29) Determine a relação entre os naturais **m** e **n** para que se tenha:

a) $i^m = i^{-n}$ b) $i^m = i^{n+3}$

2.6 — CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = a + bi$ (**a** e **b** reais) um número complexo. Chama-se **conjugado** de z o número complexo:

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Exemplos

a) Se $z = 5 + 11i$, seu conjugado é $\bar{z} = 5 - 11i$.
b) Se $z = 1 - 6i$, seu conjugado é $\bar{z} = 1 + 6i$.
c) $z = 3i \Leftrightarrow \bar{z} = -3i$
d) $z = 5 \Leftrightarrow \bar{z} = 5$
e) $\overline{-7 + 5i} = -7 - 5i$
f) $z = 3 + 4i \Leftrightarrow \bar{z} = 3 - 4i \Leftrightarrow \overline{(\bar{z})} = 3 + 4i$

É imediato que:

1.º) Se $z = \bar{z}$, então z é real (veja exemplo *d* acima).
2.º) $\overline{(\bar{z})} = z$ (Veja exemplo *f* acima.)

Um resultado muito importante é dado pelo produto de um número complexo pelo seu conjugado:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$

ou seja, **o produto** $z \cdot \bar{z}$ **é sempre um número real não negativo**:

$$\boxed{(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2}$$

Exemplos

g) $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
h) $(2 - 5i)(2 + 5i) = 2^2 + (-5)^2 = 4 + 25 = 29$
i) $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i) = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

2.7 — DIVISÃO

No exercício 1.18 aprendemos a dividir dois números complexos multiplicando o primeiro pelo inverso do segundo. Agora, utilizando o resultado do produto $z \cdot \bar{z}$, visto no item anterior, podemos efetuar a divisão de forma bem mais prática. Acompanhemos o exemplo:

$$\frac{2+i}{5+3i} = \frac{2+i}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{10 - 6i + 5i - 3i^2}{5^2 + 3^2} = \frac{13 - i}{34} = \frac{13}{34} - \frac{1}{34} i$$

Assim, temos que: para se efetuar a divisão $\frac{z_1}{z_2}$, basta **multiplicar** numerador e denominador **pelo conjugado do denominador**.

Exercícios Resolvidos

2.30) Calcule $\frac{3i}{2-i}$.

Solução

$$\frac{3i}{2-i} = \frac{3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6i + 3i^2}{2^2 + (-1)^2} = \frac{-3 + 6i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5} i$$

2.31) Determine o inverso de **z** nos seguintes casos:

a) $z = 1 + \frac{1}{2} i$ b) $z = i$

Solução

a) $z = 1 + \frac{1}{2} i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} i} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} i}{1 - \frac{1}{2} i} =$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2} i}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{2} i}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} i$$

b) $z = i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$

2.32) Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = \dfrac{2x + i}{3 + xi}$ seja:

a) real b) imaginário não puro

Solução

Vamos determinar as partes real e imaginária de **z**, efetuando a divisão:

$$z = \frac{2x + i}{3 + xi} = \frac{2x + i}{3 + xi} \cdot \frac{3 - xi}{3 - xi} = \frac{6x - 2x^2 i + 3i - xi^2}{9 + x^2} = \frac{7x}{9 + x^2} + \frac{3 - 2x^2}{9 + x^2} i$$

Assim, $R_e(z) = \dfrac{7x}{9 + x^2}$ e $I_m(z) = \dfrac{3 - 2x^2}{9 + x^2}$

a) Para que **z** seja real, devemos ter $I_m(z) = 0$. Então:

$$\frac{3 - 2x^2}{9 + x^2} = 0 \Rightarrow 3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) Para que **z** seja imaginário não puro, devemos ter $R_e(z) \neq 0$ e $I_m(z) \neq 0$:

$$R_e(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{7x}{9 + x^2} \neq 0 \Rightarrow 7x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$I_m(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{3 - 2x^2}{9 + x^2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ e } x \neq -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Então: $x \neq 0$ e $x \neq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ e $x \neq -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2.33) Seja $z = \dfrac{a + bi}{c + di}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são reais e $c + di \neq 0$. Mostre que, se $z \in \mathbb{R}$, então $bc = ad$.

Solução

$$z = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow I_m(z) = 0 \Rightarrow \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \Rightarrow bc - ad = 0 \Rightarrow bc = ad$$

2.34) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $iz + 2\bar{z} = -3 - 3i$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$ (x e y reais), a equação fica:

$$i(x + yi) + 2(x - yi) = -3 - 3i$$
$$xi + yi^2 + 2x - 2yi = -3 - 3i$$
$$(2x - y) + (x - 2y)i = -3 - 3i$$

Então: $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Resolvendo este sistema, encontramos $x = -1$ e $y = 1$. Portanto, $z = x + yi = -1 + i$.

2.35) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $(1 + i)z + 2 - 3i = 3 + i$.

Solução

É evidente que podemos resolver esta equação fazendo, como no exercício anterior, $z = x + yi$. Vamos, no entanto, cuidar deste caso apenas isolando **z**:

$$\begin{aligned}(1 + i)z + 2 - 3i &= 3 + i \\ (1 + i)z &= 3 + i - 2 + 3i \\ (1 + i)z &= 1 + 4i \\ z &= \frac{1 + 4i}{1 + i}\end{aligned}$$

Efetuando a divisão:

$$z = \frac{(1 + 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + 4i + 4}{1^2 + 1^2} = \frac{5 + 3i}{2}$$

Logo: $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$

2.36) Seja $z \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot \bar{z} = 1$. Prove que $\frac{1 + z}{1 + \bar{z}} = z$, com $z \neq -1$.

Solução

Tomando $z = a + bi$, **a** e **b** reais, temos que:

$$z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{1 + z}{1 + \bar{z}} = \frac{1 + a + bi}{1 + a - bi} = \frac{(1 + a + bi)(1 + a + bi)}{(1 + a - bi)(1 + a + bi)} = \frac{(1 + a + bi)^2}{(1 + a)^2 + b^2} = \frac{[(1 + a) + bi]^2}{1 + 2a + \underbrace{a^2 + b^2}_{1}} =$$

$$= \frac{(1 + a)^2 + 2(1 + a)bi - b^2}{1 + 2a + 1} = \frac{1 + 2a + a^2 + 2(1 + a)bi - b^2}{2 + 2a} =$$

$$= \frac{1 + 2a + a^2 - b^2}{2(1 + a)} + \frac{2(1 + a)bi}{2(1 + a)} = \frac{1 + 2a + a^2 - (1 - a^2)}{2(1 + a)} + bi =$$

$$= \frac{2a + 2a^2}{2(1 + a)} + bi = \frac{2a(1 + a)}{2(1 + a)} + bi = a + bi = z$$

Exercícios Propostos

2.37) Efetue as divisões:

a) $\frac{1 + 2i}{3 + 2i}$ b) $\frac{10 - i}{1 + 3i}$ c) $\frac{1 + 3i}{1 - 3i}$ d) $\frac{4 + 3i}{3 - 4i}$ e) $\frac{7 + 7i}{\sqrt{3} + 2i}$ f) $\frac{6i}{1 - i}$

2.38) Determine o inverso do complexo **z** nos seguintes casos:

a) $z = -3i$ b) $z = 1 + i$ c) $z = i^{77} - i^{43} + i^{26}$ d) $\cos x + i \operatorname{sen} x, \ x \in \mathbb{R}$

2.39) Determine $x \in \mathbb{R}$ de forma que o complexo $z = \dfrac{30}{x^2 + 4} + \dfrac{x + 4i}{2 + xi}$ seja:

a) real b) imaginário não puro

2.40) A que condições devem obedecer os reais **a**, **b**, **c** e **d** para que $z = \dfrac{a + bi}{c + di}$ seja um imaginário puro? $(c + di \neq 0)$

2.41) Determine o imaginário puro **w** para o qual $z = \dfrac{4 + wi}{w + 1 + i}$ é real.

2.42) Mostre que, se $z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\dfrac{z^2 + 1}{z}$ é real.

2.43) Sendo $z = \operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha$, prove que $\dfrac{1 + z}{1 + \bar{z}} = z$, $\bar{z} \neq -1$.

2.44) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $z - 2\bar{z} = 4 - 3i$ b) $2z - i\bar{z} = 15i$ c) $z = (\bar{z})^2$ d) $z = i\bar{z}$

2.45) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $iz + 3 - i = 4 + 3i$ b) $(2 - 3i)z + 5 - i = 4$ c) $(1 + i)z + 1 - 3i = -2iz$

2.46) Efetue:

a) $\overline{(1 + 7i) + (3 - 5i)}$ c) $\overline{(1 + 2i) \cdot (3 - i)}$ e) $\overline{\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)}$

b) $\overline{(1 + 7i)} + \overline{(3 - 5i)}$ d) $\overline{(1 + 2i)} \cdot \overline{(3 - i)}$ f) $\dfrac{\overline{1 - i}}{\overline{1 + i}}$

2.47) **Propriedades dos conjugados** — Sendo z_1 e z_2 números complexos quaisquer, prove que:

1.º) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2.º) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3.º) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

2.48) Mostre que, para todo **n** natural, $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

2.49) Sabendo que $z \in \mathbb{C}$ e $2z^3 + 3z^2 = a + bi$, **a** e **b** reais, mostre $2(\bar{z})^3 + 3(\bar{z})^2 = a - bi$.

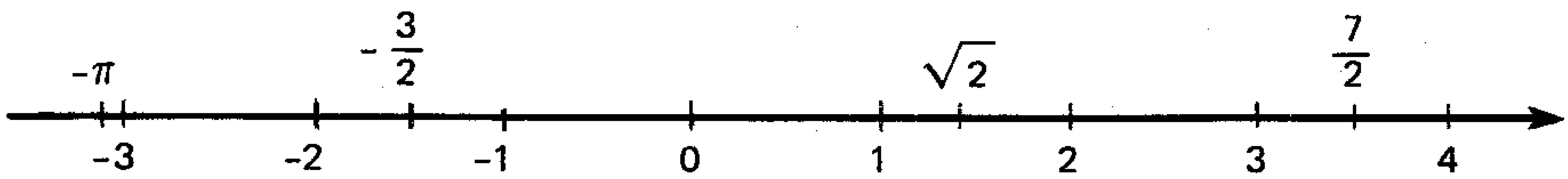
2.50) Considere a equação (E): $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, onde α, β e γ são reais $(\alpha \neq 0)$. Mostre que, se o número imaginário **z** é raiz de (E), então $\bar{z}$ também o é.

Capítulo 3

A geometria dos números complexos

3.1 — O PLANO DE ARGAND-GAUSS

Sabemos que os números **reais** podem ser associados aos pontos de uma reta, isto é, a cada número real corresponde um ponto da reta e a cada ponto da reta corresponde um número real:



Como representar graficamente um número complexo? As próprias definições dadas:

— um número complexo **z** é um **par ordenado** de números reais **a** e **b**:

$$z = (a; b) = a + bi$$

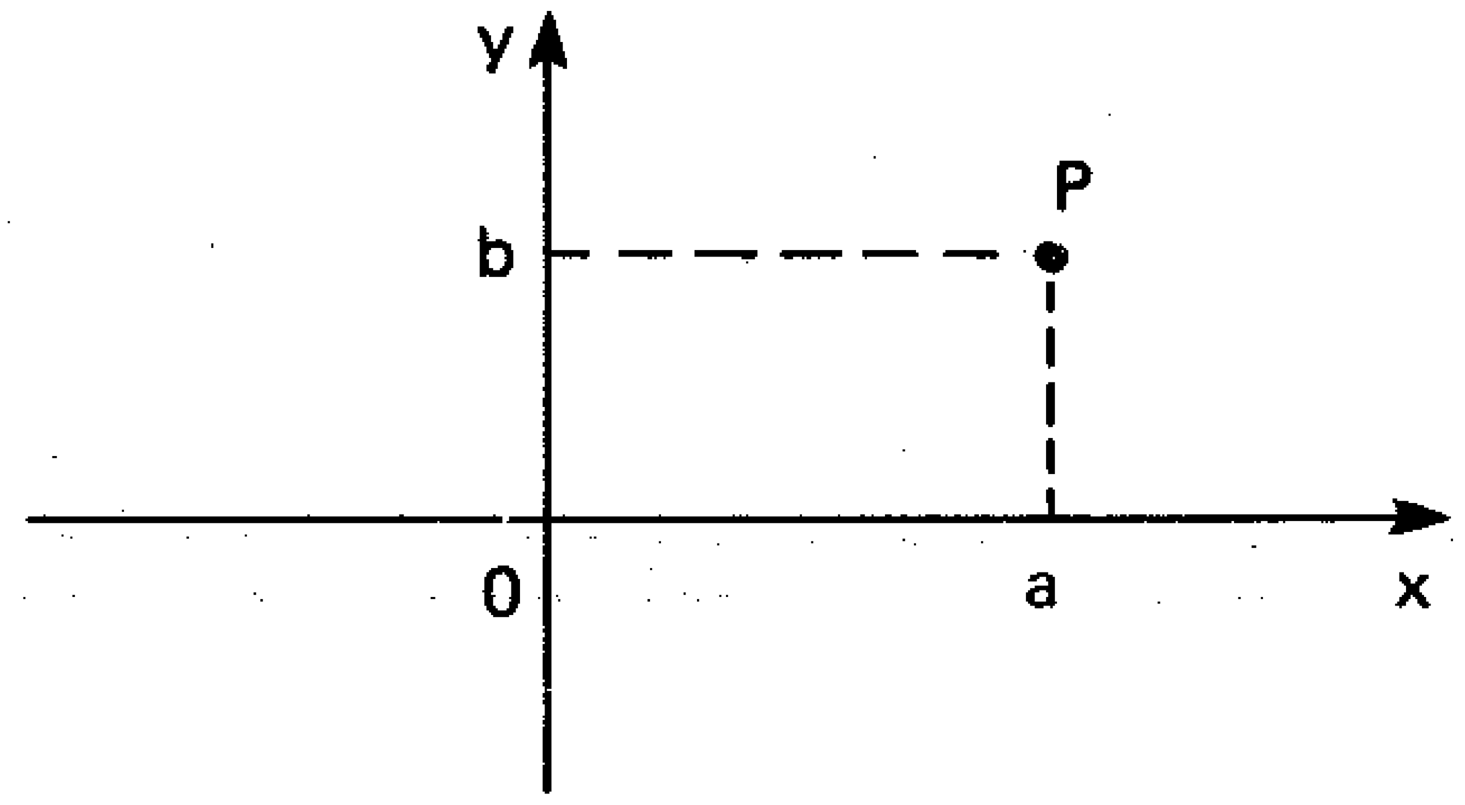
— $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

são, por si só, suficientes para percebermos a possibilidade de representação através de um **ponto do plano cartesiano.**

Vamos, então, a cada número complexo $z = a + bi$ associar o ponto $P(a; b)$ do plano cartesiano. Desta maneira:

A cada número complexo corresponde um único ponto do plano cartesiano, e a cada ponto corresponde um único número complexo.

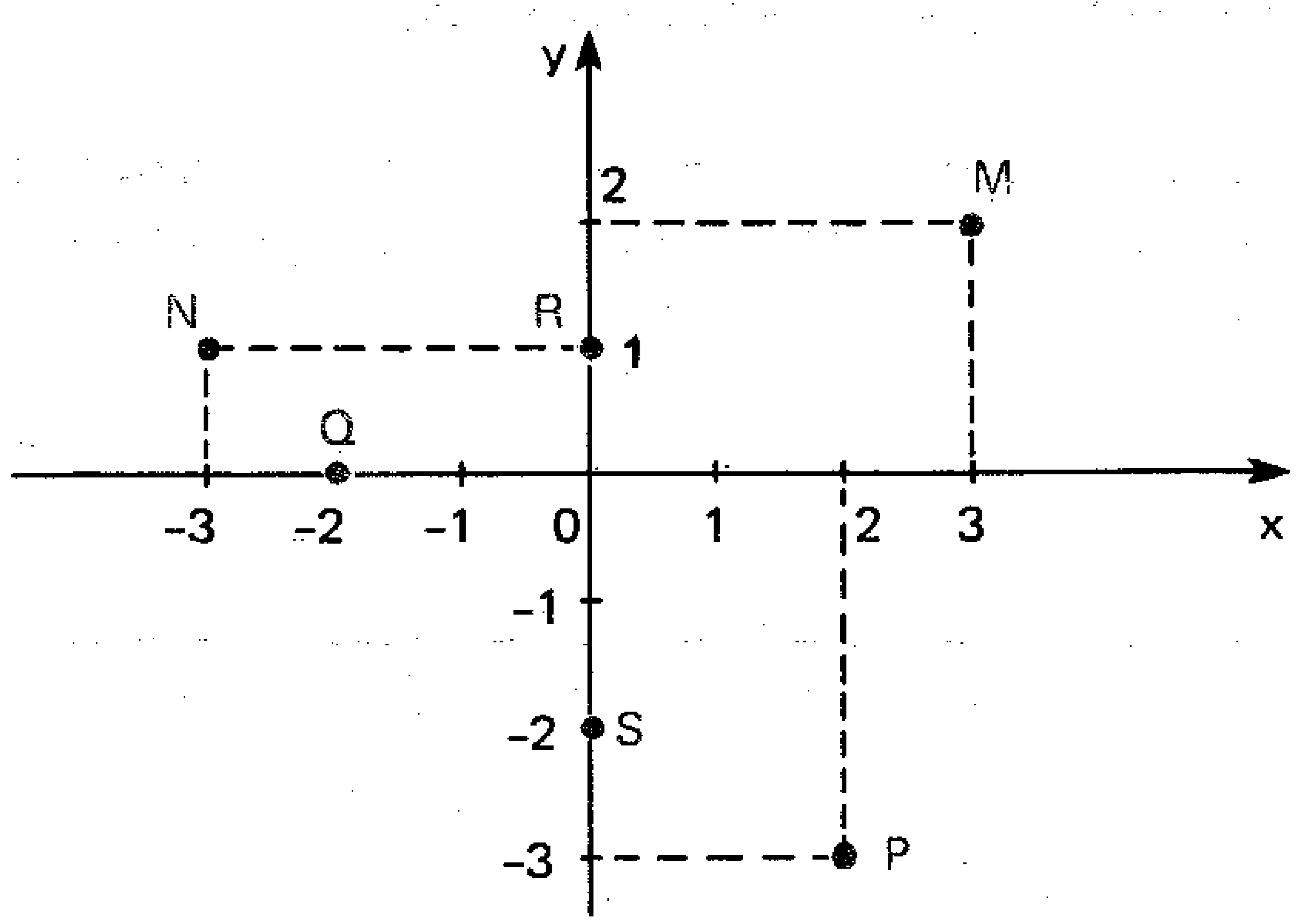
Chamaremos o ponto P de **afixo** ou de **imagem geométrica** do complexo **z**.



$$\boxed{P(a;\, b) \rightleftarrows z = a + bi}$$

Exemplos

Consideremos os pontos assinalados na figura:



a) O ponto M é a *representação gráfica* do complexo $3 + 2i$.
b) O ponto N é o *afixo* do complexo $-3 + i$.
c) O ponto $P(2;\, -3)$ é a *imagem geométrica* do complexo $2 - 3i$.
d) O afixo do complexo $-2 + 0i = -2$ é o ponto Q.
e) A unidade imaginária **i** tem por afixo o ponto $R(0;\, 1)$.
f) O afixo do imaginário puro $-2i$ é o ponto $S(0;\, -2)$.

A representação gráfica dos números complexos foi introduzida através de estudos de **Caspar Wessel** (1745-1818), publicados em 1798 na Revista da Academia Dinamarquesa. No entanto, a idéia só começou a ser conhecida a partir de 1806, quando **Jean Robert Argand** (1768-1822) publicou sua exposição. A incorporação definitiva da representação gráfica à Matemática só se deu quando da divulgação dos trabalhos de **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), durante a segunda década do século XIX.

Por isso, quando o plano cartesiano é utilizado para representar números complexos, é costume chamá-lo de **Plano de Argand-Gauss**.

Observemos que:

— todos os números **reais** têm seus afixos no eixo **Ox**; por isso **Ox** é chamado **eixo real**;

— os números imaginários têm seus afixos **fora** do eixo **Ox**; em particular, os **imaginários puros** são representados por pontos do eixo **Oy**, que, por isso, é chamado **eixo imaginário**.

Exercício Resolvido

3.1) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os afixos dos números complexos **z** tais que:

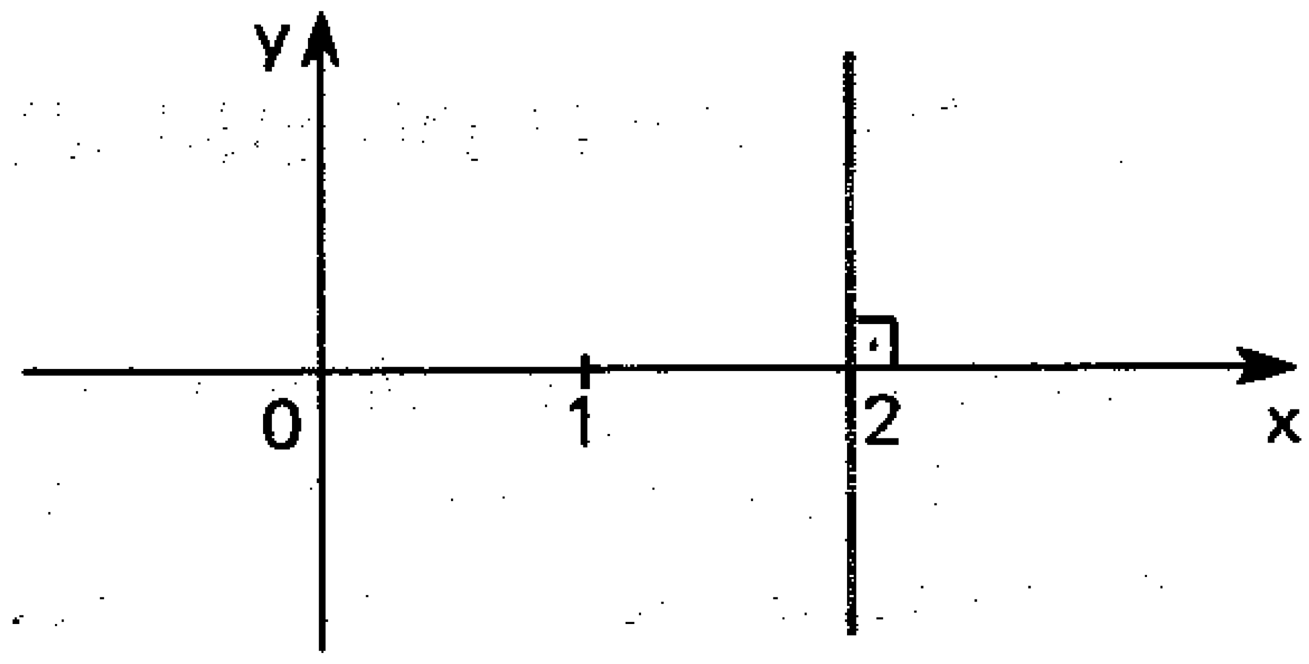
a) $R_e(z) = 2$ b) $I_m(z) \geqslant 1$ c) $-2 < R_e(z) \leqslant 1$ d) $R_e(z) - I_m(z) = 0$

Solução

Façamos $z = x + yi$, com **x** e **y** reais. Então:

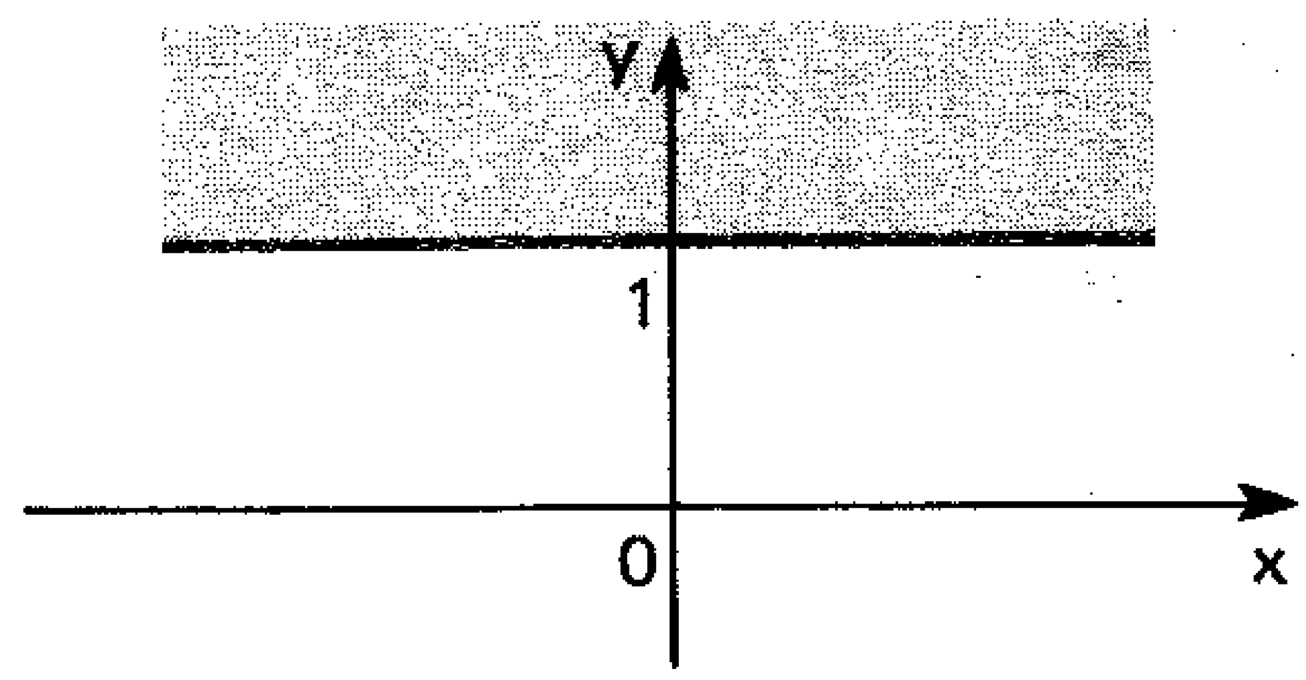
a) $R_e(z) = 2 \Leftrightarrow x = 2$

No plano cartesiano, a equação $x = 2$ representa uma reta vertical traçada pelo ponto $(2; 0)$.



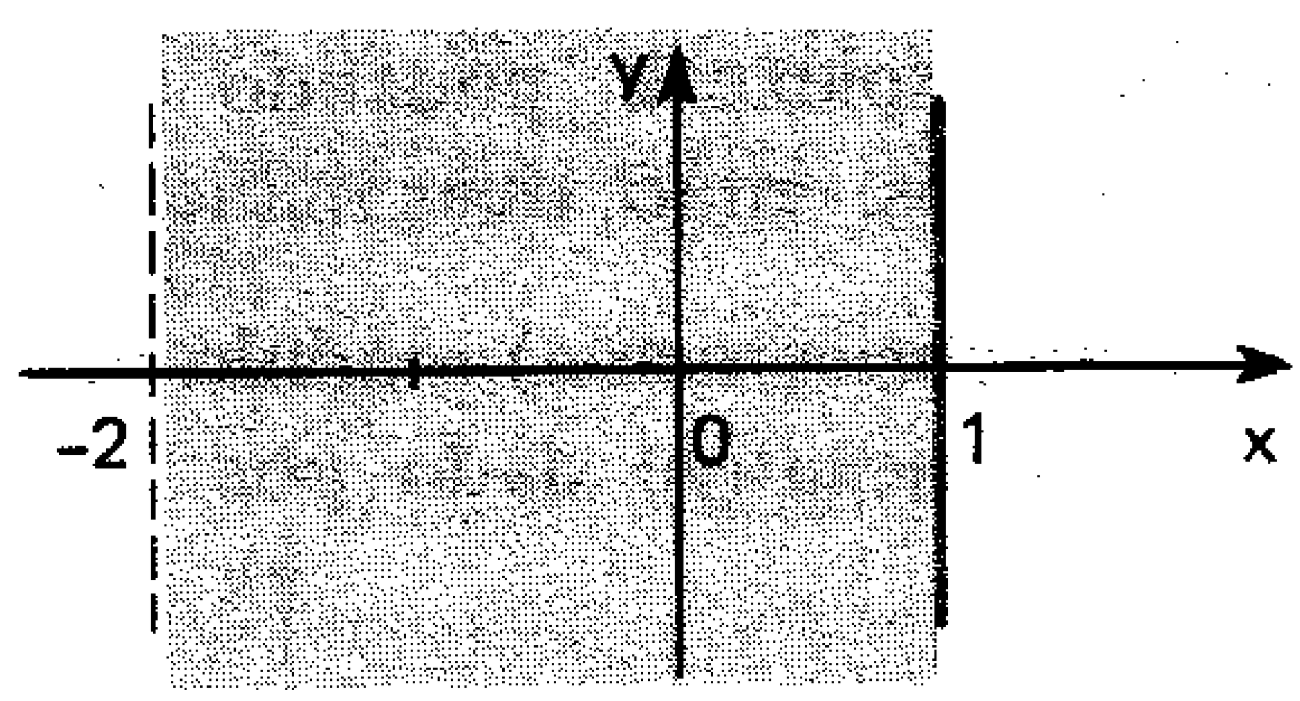
b) $I_m(z) \geqslant 1 \Leftrightarrow y \geqslant 1$

Esta desigualdade representa a região do plano situada acima da reta horizontal da equação $y = 1$ (incluem-se os pontos dessa reta).



c) $-2 < R_e(z) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 < x \leqslant 1$

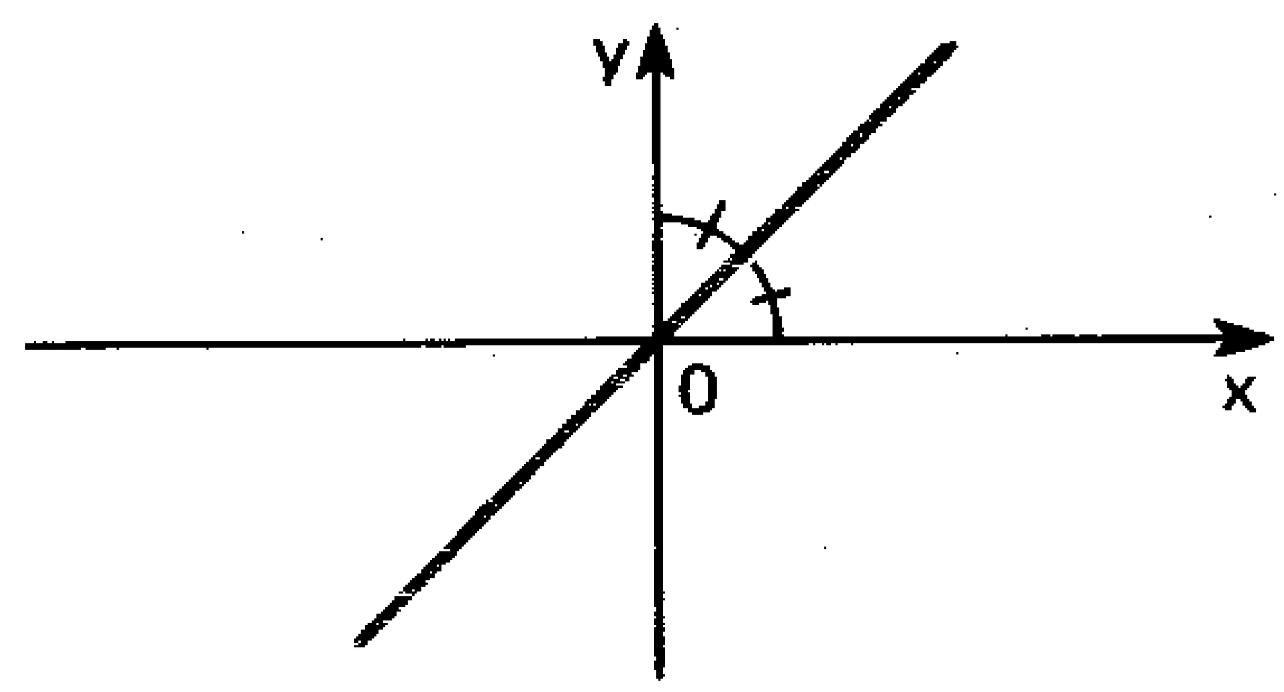
Esta desigualdade representa a faixa vertical do plano delimitada pelas retas $x = -2$ e $x = 1$, excluídos os pontos da primeira.



d) $R_e(z) - I_m(z) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Da Geometria Analítica, sabemos que $x \cancel{+} y = 0$ é a equação da *bissetriz dos quadrantes impares*.

erro!



Exercícios Propostos

3.2) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os afixos dos números complexos **z** tais que:

a) $1 \leqslant I_m(z) < 3$

b) $0 \leqslant R_e(z) \leqslant 3$ e $-2 \leqslant I_m(z) \leqslant 0$

c) $R_e^2(z) + I_m^2(z) = 9$

3.3) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** para os quais o quociente $\dfrac{z}{\bar{z}}$ é um imaginário puro.

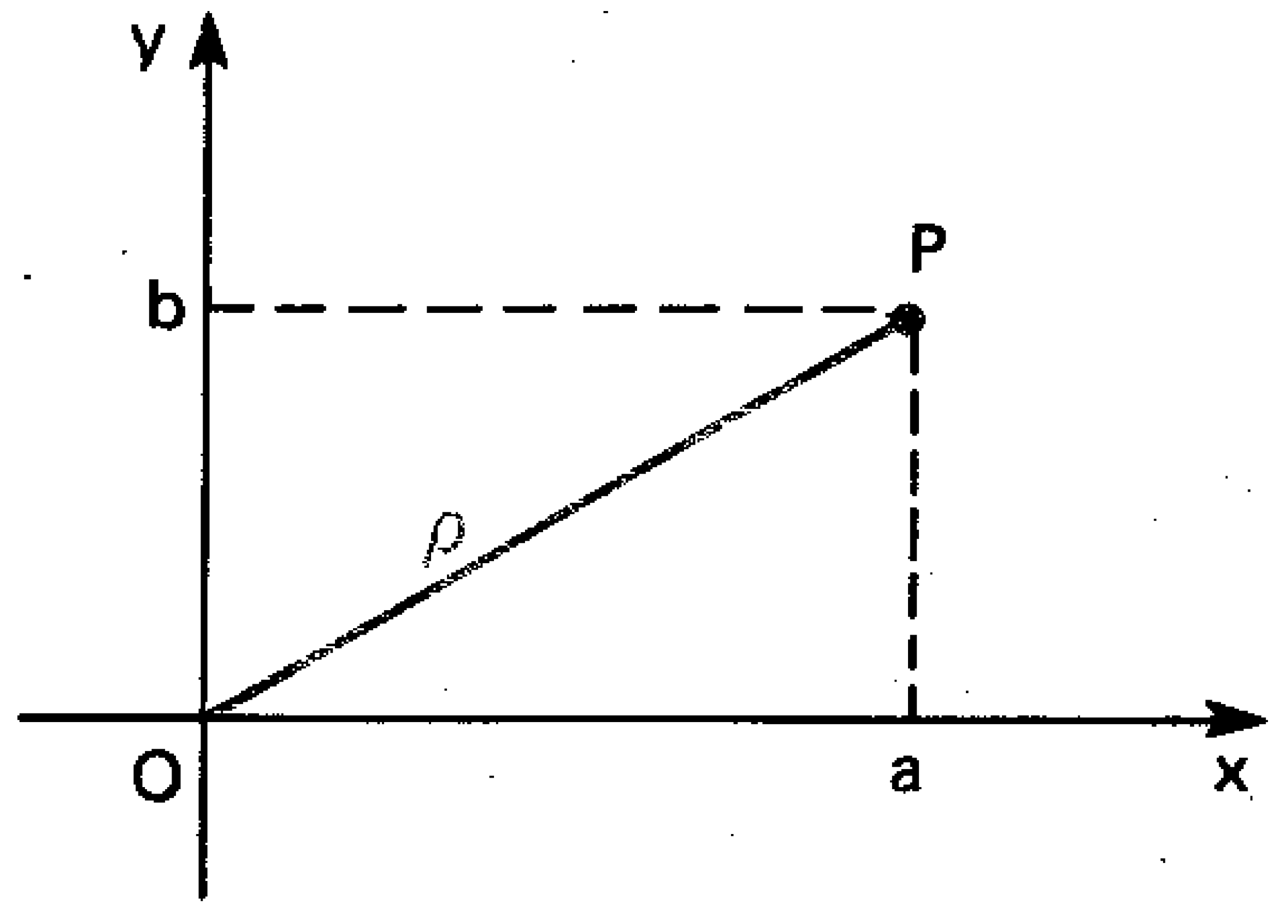
3.4) Represente graficamente os números complexos $z = (x; y)$ para os quais:

$$(x - 2yi)(2y - xi) = -16i$$

3.2 – MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considerado um número complexo $z = a + bi$, o ponto $P(a; b)$ é o seu afixo. A **distância** ρ, de P até a origem O é facilmente obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Pois bem: esse número ρ (real e não negativo) é chamado **módulo** do número complexo **z**, podendo também ser representado por $|\mathbf{z}|$.

Temos, então, duas maneiras de entender **módulo** de um número complexo **z**:

1.ª) (algebricamente) módulo do número complexo $z = a + bi$ é o número real não negativo dado por:

$$\boxed{|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.ª) (geometricamente) **módulo** do número complexo **z** é a distância do afixo de **z** até a origem:

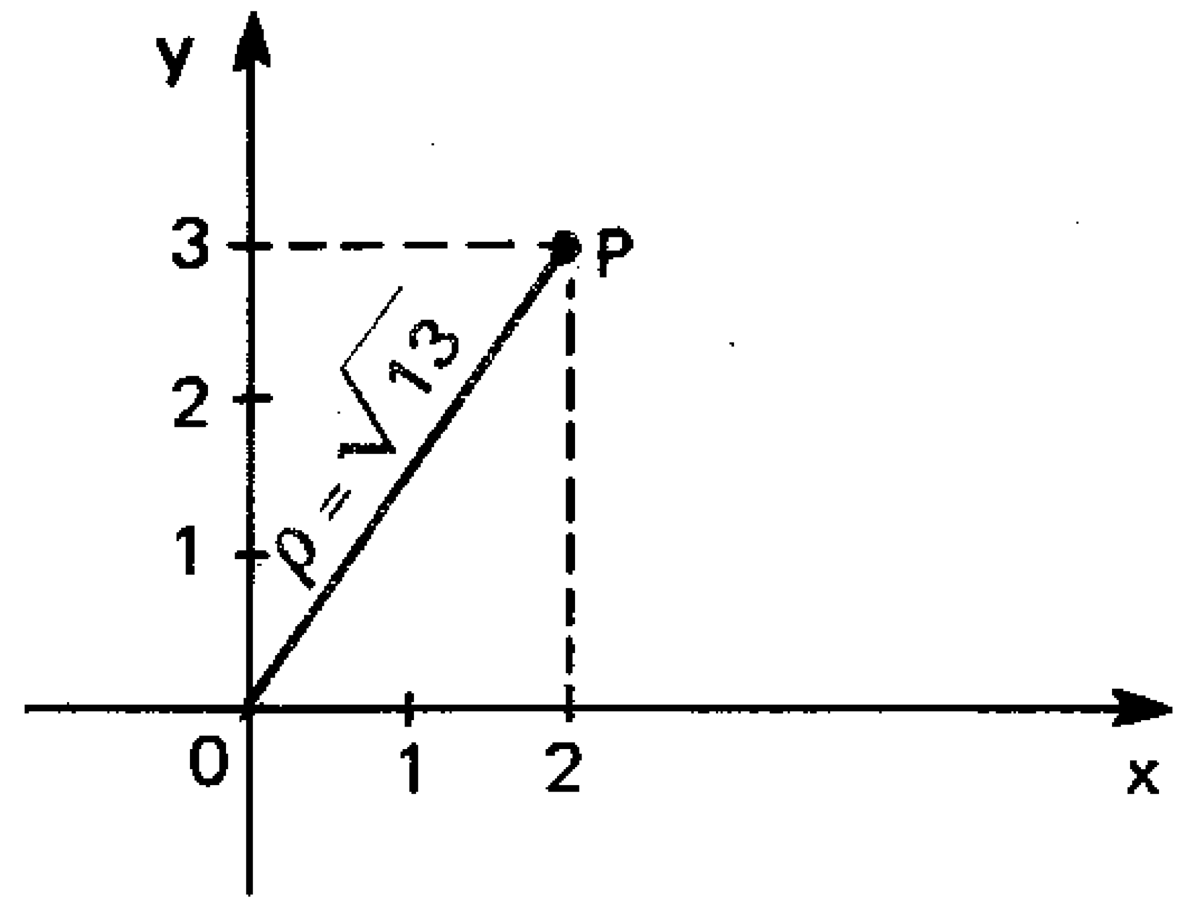
$$\boxed{|z| = \rho = \delta_{OP}}$$

Exemplos

a) Sendo $z = 2 + 3i$, temos:

$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

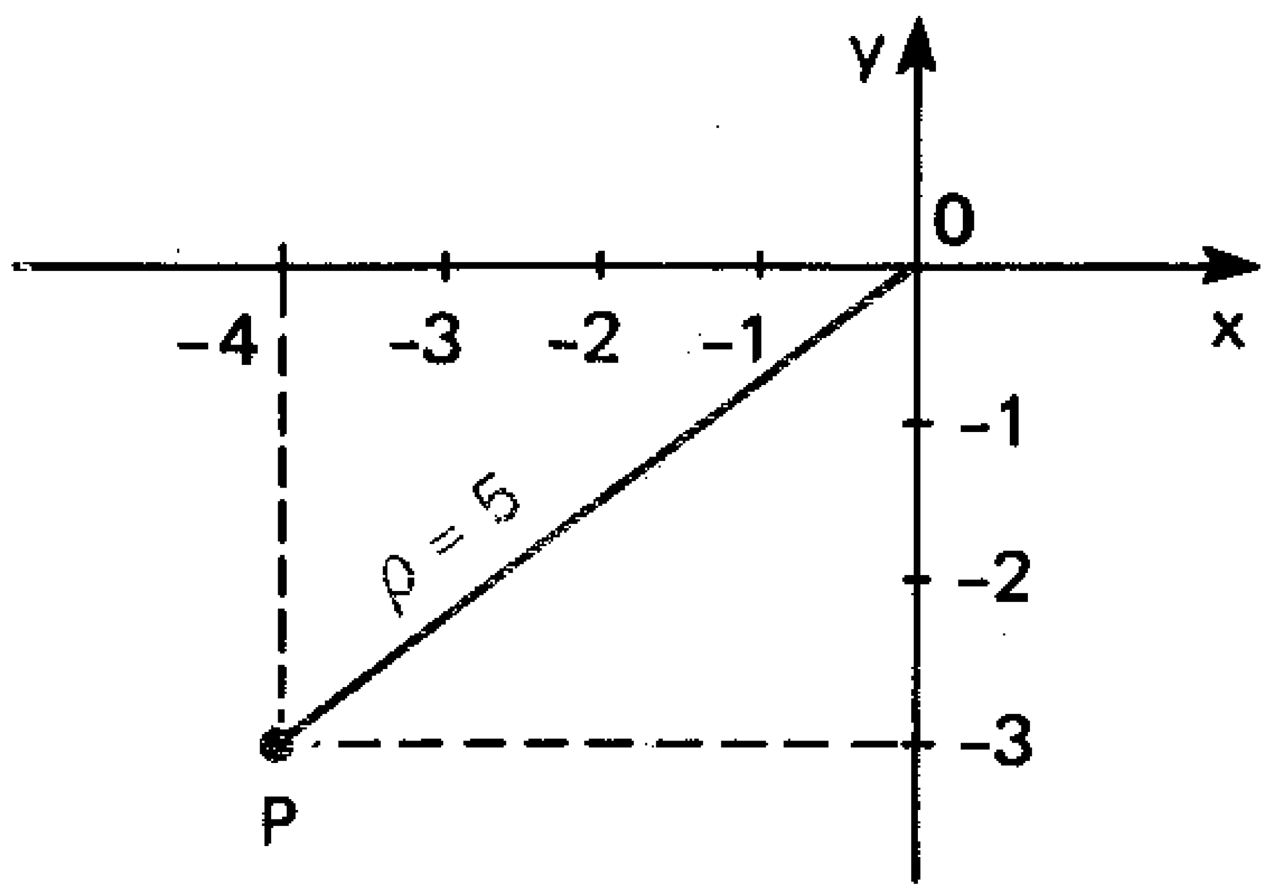
Logo: $|z| = \rho = \sqrt{13}$.



b) Sendo $z = -4 - 3i$, temos:

$|z| = |-4 - 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$

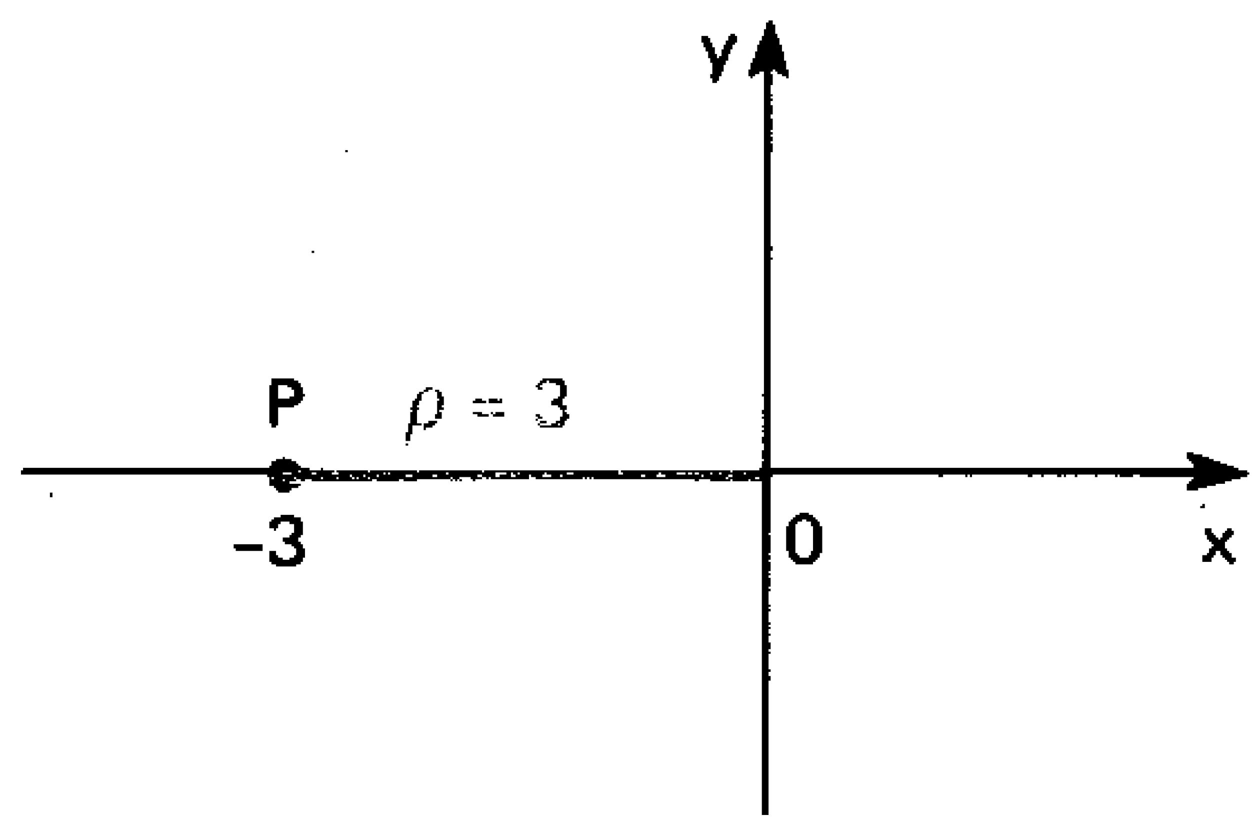
Logo: $|z| = \rho = 5$.



c) Sendo $z = -3 = -3 + 0i$, temos:

$|z| = |-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$

Logo: $|z| = \rho = 3$.

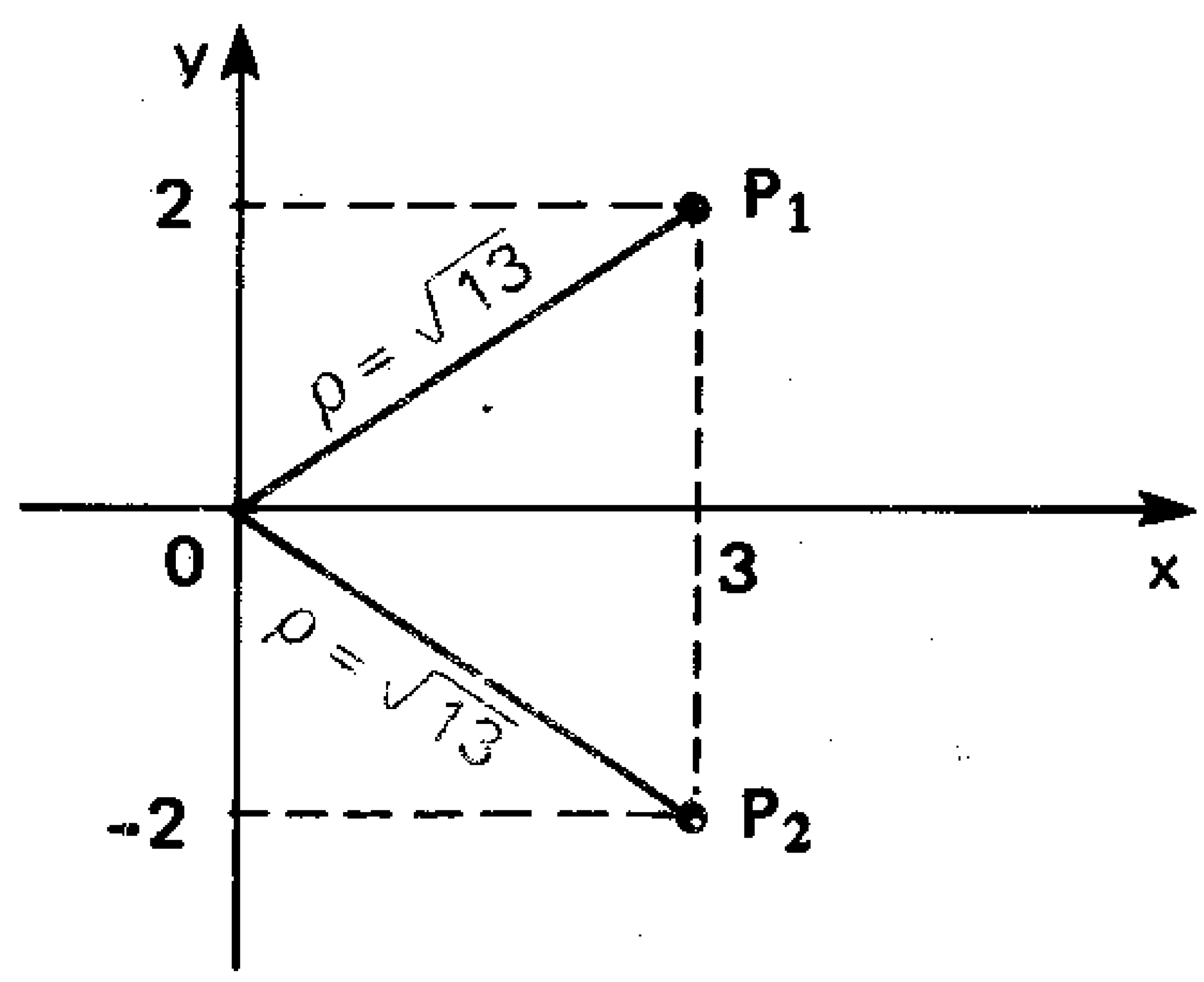


Note, neste exemplo, que **z** é real e a definição de módulo de um número complexo está de acordo com a definição de módulo de um número real, que já conhecíamos do volume 1 desta coleção.

d) Sejam P_1 o afixo de $z = 3 + 2i$ e P_2 o afixo de seu conjugado $\bar{z} = 3 - 2i$. Repare que:

1.º) P_1 e P_2 são simétricos em relação ao eixo Ox.

2.º) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{13}$



3.3 — PROPRIEDADES IMEDIATAS DO MÓDULO

Sendo **z** e **w** dois números complexos, valem as propriedades:

1.ª) $|z| = |\bar{z}|$

2.ª) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3.ª) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

Suas demonstrações são imediatas, podendo ficar a cargo do leitor.

Exemplos

a) Sendo $z = 12 + 5i$, temos $\bar{z} = 12 - 5i$ e

$$\begin{cases} |z| = |12 + 5i| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \\ |\bar{z}| = |12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \end{cases}$$

b) $|(2 + 3i) \cdot (1 - 4i)| = |2 + 3i| \cdot |1 - 4i| =$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{221}$$

c) $\left|\dfrac{1 - 3i}{2 + i}\right| = \dfrac{|1 - 3i|}{|2 + i|} = \dfrac{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$

Exercícios Resolvidos

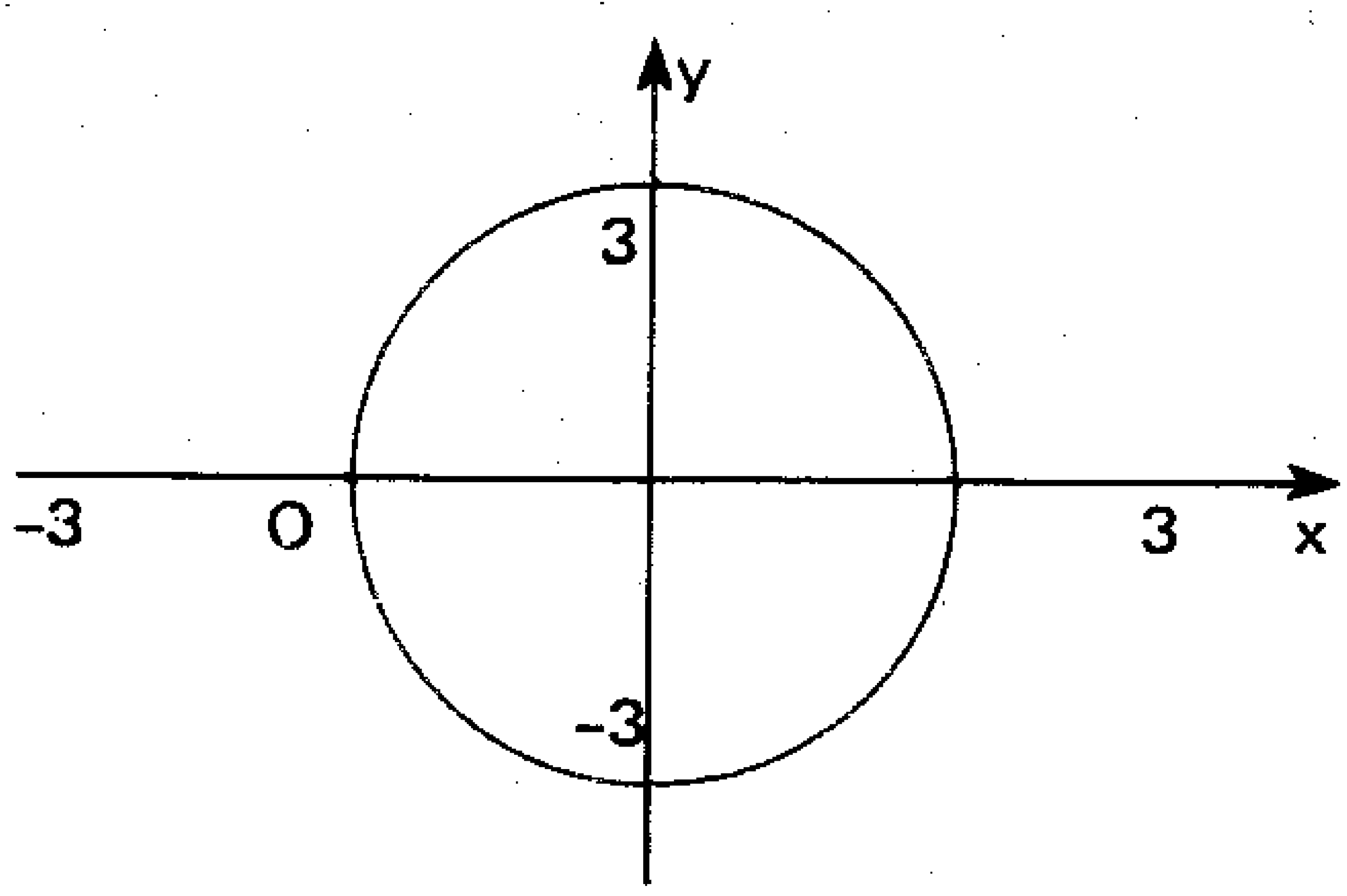
3.5) Qual o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** tais que $|z| = 3$?

Solução

Podemos resolver este problema de dois modos: por um simples raciocínio geométrico ou analiticamente.

1.° modo — Como sabemos, o módulo de um número complexo é a distância de seu afixo até a origem; estamos, então, procurando o **conjunto dos pontos cuja distância até a origem seja 3**.

Ora, sabemos que o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância a um ponto fixo deste plano é constante, é uma circunferência; logo, o lugar dos afixos de **z** é a circunferência de centro na origem e raio 3.



2.° modo — Fazendo $z = x + yi$, temos:

$$|z| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{(I)}$$

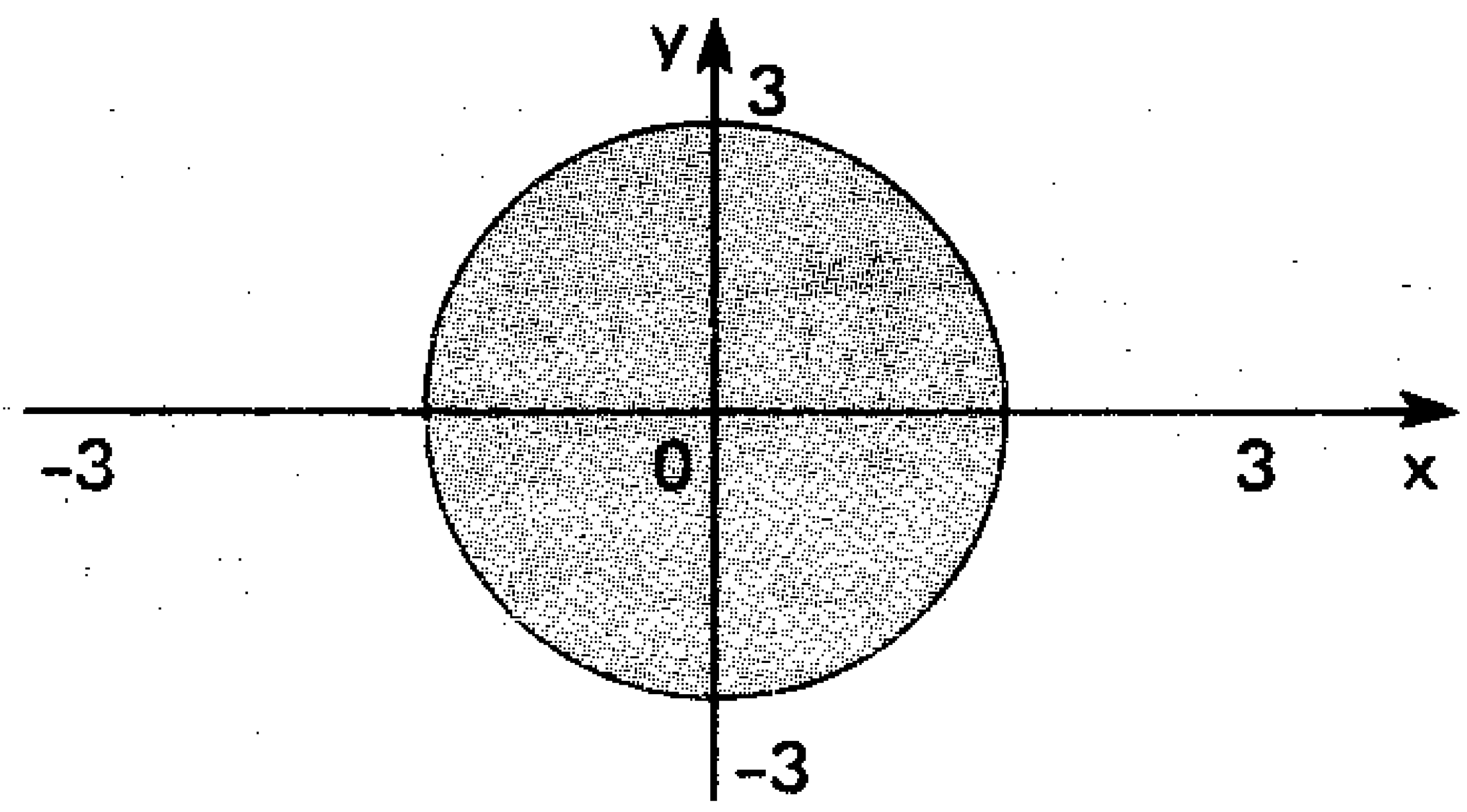
Na *Geometria analítica* (vol. 6 desta coleção) aprendemos que a equação (I) representa uma circunferência de centro $O(0; 0)$ e raio $r = 3$.

Assim, o lugar geométrico procurado é a circunferência da figura anterior.

3.6) Qual o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** tais que $|z| \leqslant 3$?

Solução

De modo análogo ao exercício anterior, concluímos que a região do plano correspondente à condição dada é o **círculo** de centro $O(0; 0)$ e raio 3 (sua relação é $x^2 + y^2 \leqslant 9$).



3.7) Represente graficamente os números complexos **z** que satisfazem a equação $|z|^2 \cdot i = \bar{z}^2$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$, temos:

$$|z|^2 \cdot i = \bar{z}^2 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \cdot i = (x - yi)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2)i = x^2 - y^2 - 2xyi$$

Desta igualdade de números complexos vem o sistema:

$$\begin{cases} 0 = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases}$$

que pode também ser assim escrito:

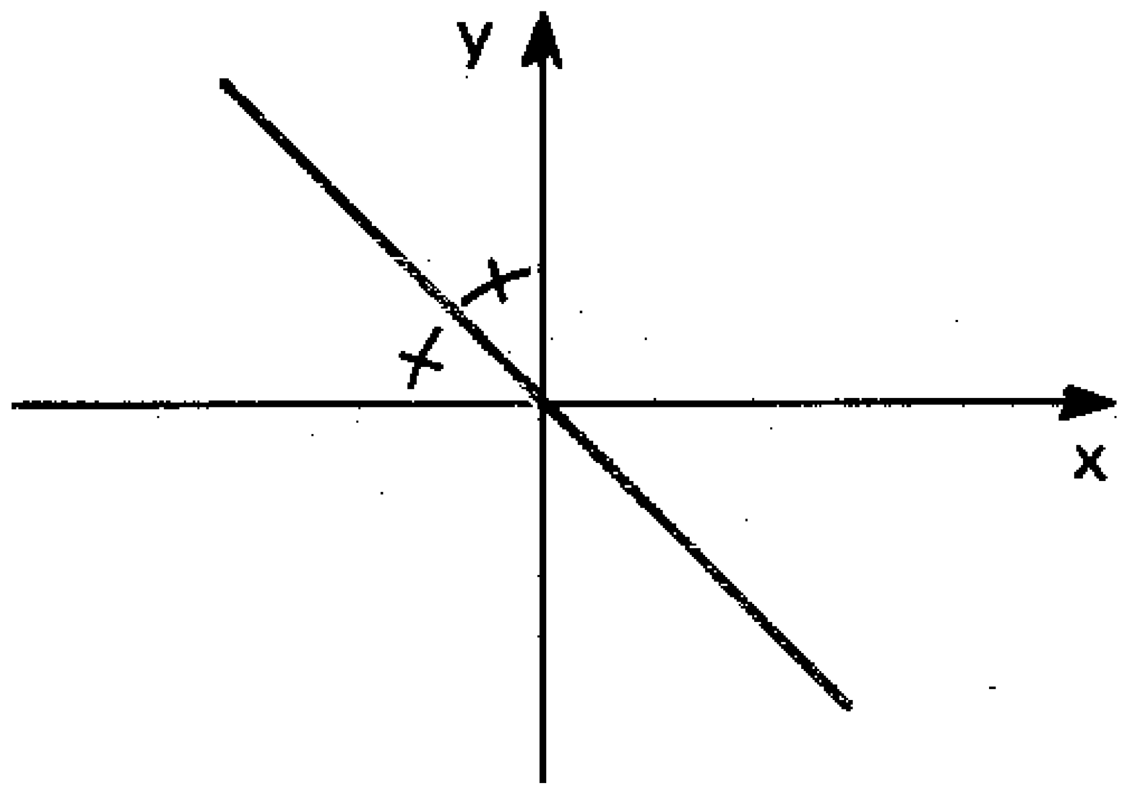
$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x - y) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Pq ela é uma [illegible] da $x + y = 0$

É fácil, então, perceber que essas duas equações são simultaneamente satisfeitas apenas pelos pares $(x; y)$, que obedecem à relação:

$$x + y = 0$$

que, conforme a Geometria Analítica, representa a *bissetriz dos quadrantes pares*.



3.8) Sendo $w = 1 - i$, represente graficamente os números complexos z tais que:

$$|z + w| \geqslant |z - wi|$$

Solução

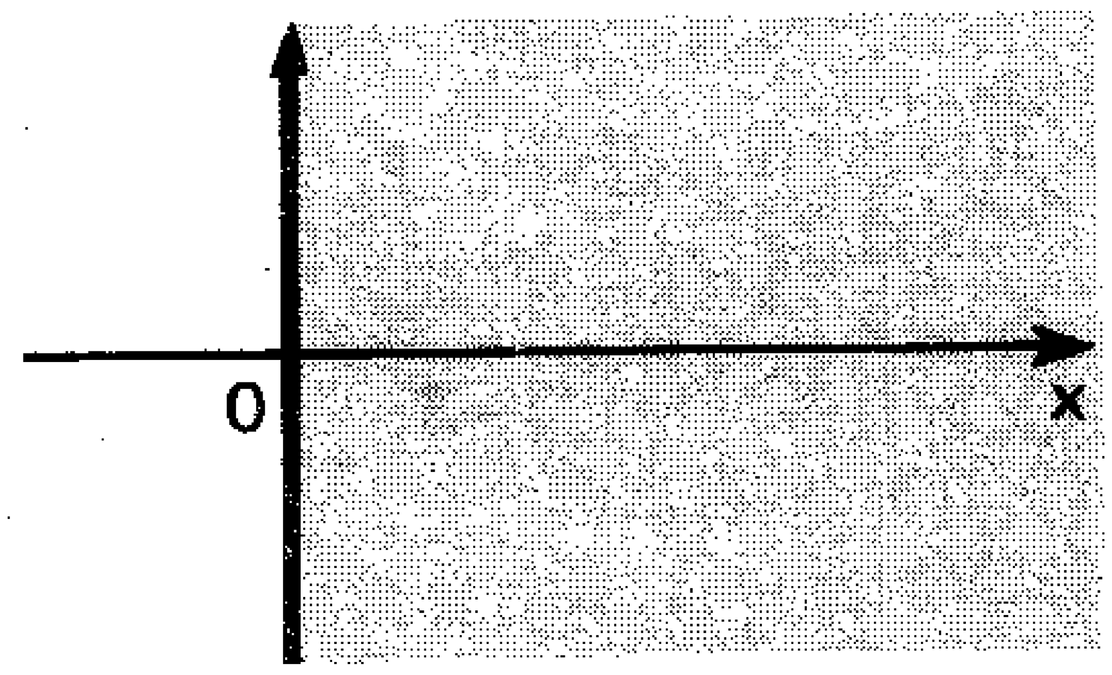
Fazendo $z = x + yi$, temos:

- $|z + w| = |x + yi + 1 - i| = |(x + 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$
- $|z - wi| = |x + yi - (1 - i)i| = |(x - 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$

Como $|z + w| \geqslant |z - wi|$, podemos escrever:

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \geqslant \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geqslant (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 \geqslant x^2 - 2x + 1$$
$$4x \geqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$

Portanto, a representação gráfica dos complexos z tais que $|z + w| \geqslant |z + wi|$ é o semiplano da figura ao lado.



3.9) Determine a área do polígono cujos vértices são os afixos dos números complexos z tais que $|z| = 1$ e $R_e(z^2) = 0$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$, temos:

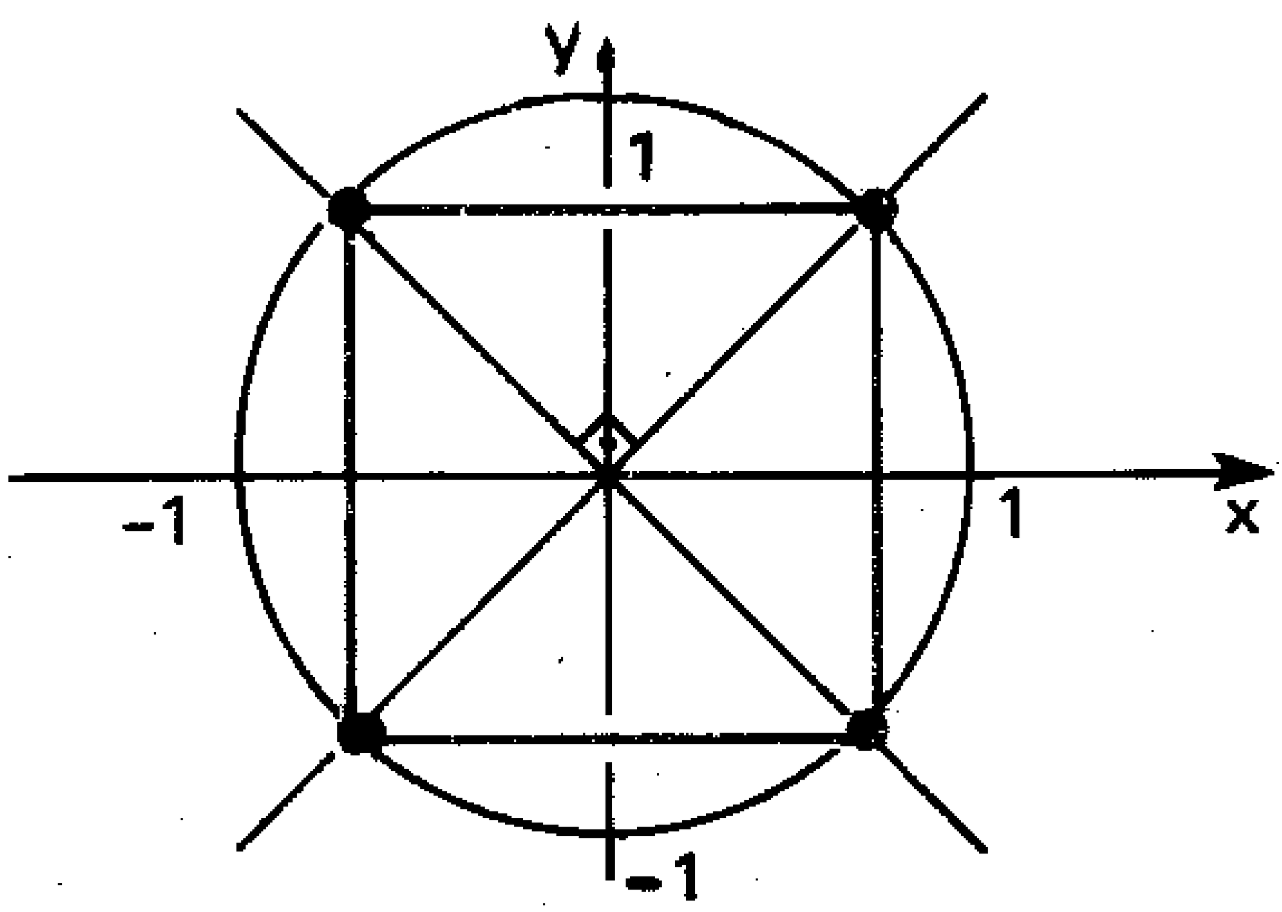
1.º) $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (I)

2.º) $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

Como $R_e(z^2) = 0$, vem $x^2 - y^2 = 0$. (II)

(I) é a equação de circunferência de centro na origem e raio 1.

(II) é a equação do par de *bissetrizes* ($x + y = 0$ ou $x - y = 0$).



Assim, os afixos dos complexos que satisfazem simultaneamente as duas condições são os vértices de um **quadrado** cuja diagonal tem medida 2 (diâmetro da circunferência).

Logo, a área pedida é:

$$S = (\text{lado})^2 = \left(\frac{\text{diagonal}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$$

3.10) Sendo z e w, $z \neq w$, dois números complexos tais que:

1.º) $|z| = |w| = 1$
2.º) $z \cdot \overline{w}$ é imaginário puro

determine $\left|\dfrac{z + w}{z - w}\right|$.

Solução

Fazendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos:

- $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$
- $|w| = 1 \Rightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = 1 \Rightarrow c^2 + d^2 = 1$
- $z \cdot \overline{w} = (a + bi)(c - di) = ac - adi + bci + bd = (ac + bd) + (b - ad)i$

Como $z \cdot \overline{w}$ é imaginário puro, $ac + bd = 0$ e $bc - ad \neq 0$.

Então:

$$\left|\frac{z + w}{z - w}\right| = \frac{|z + w|}{|z - w|} = \frac{|(a + c) + (b + d)i|}{|(a - c) + (b - d)i|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}}{\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2}{a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2}}$$

Como $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, essa última expressão pode ser escrita:

$$\left|\frac{z + w}{z - w}\right| = \sqrt{\frac{1 + 1 + 2ac + 2bd}{1 + 1 - 2ac - 2bd}} = \sqrt{\frac{2 + 2(ac + bd)}{2 - 2\underbrace{(ac + bd)}_{0}}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

3.11) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática*, que $|z^n| = |z|^n$ para todo natural $n \geqslant 1$.

Solução

Teorema 1 – A igualdade é válida para $n = 1$:

$$|z^1| = |z| = |z|^1$$

Teorema 2 – Vamos provar que, se a igualdade é válida para $n = k$, então também o é para $n = k + 1$.

Hipótese: $|z^k| = |z|^k$

Tese: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$

Vamos partir do primeiro membro da tese e utilizar a propriedade $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

$$|z^{k+1}| = |z^k \cdot z^1| = \overset{\text{Hipótese}}{|z^k| \cdot |z| = |z|^k} \cdot |z| = |z|^{k+1} = \text{(2.º membro da tese)}$$

Aplicação: Vamos calcular $|(\sqrt{3} - i)^8|$:

$$|(\sqrt{3} - i)^8| = |\sqrt{3} - i|^8 = [\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}]^8 = [\sqrt{4}]^8 = 2^8 = 256$$

---

* Veja volume 2 desta coleção, p. 31.

Exercícios Propostos

3.12) Calcule:

a) $|7 - 24i|$

b) $|(2 + 3i) \cdot (1 - i)|$

c) $\left|\dfrac{(-3 - 4i)(2 + 2i)}{1 + i}\right|$

d) $\left|\dfrac{(\sqrt{2} + 2i)^8}{(-1 + 2\sqrt{2}\,i)^4}\right|$

3.13) Represente graficamente os números complexos **z** tais que:

a) $|z| = 2$ b) $|z| \geqslant 2$ c) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$

3.14) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** para os quais:

a) $|z| + z = 2 + 4i$

b) $|z - 3i| = |z + 2|$

c) $|z - 1 + 2i| = 2$

d) $|z - 1 + 2i| \leqslant 2$

3.15) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os complexos **z** tais que:

a) $|z + 2| + |z - 2| = 6$

b) $|z + 2| + |z - 2| \leqslant 6$

3.16) Sendo $w = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, α real, determine o módulo do número complexo **z** para o qual tem-se $\left|\dfrac{z^2}{w}\right| = 8$.

3.17) Sendo **z** e **w** números complexos tais que:

1.º) $|z| = |w| = 1$

2.º) $\left|\dfrac{z + w}{zw}\right| = \sqrt{10}$

determine $R_e\left(\dfrac{z}{w}\right)$

3.4 — OUTRA PROPRIEDADE DO MÓDULO: A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Sendo **z** e **w** números complexos quaisquer, tem-se que:

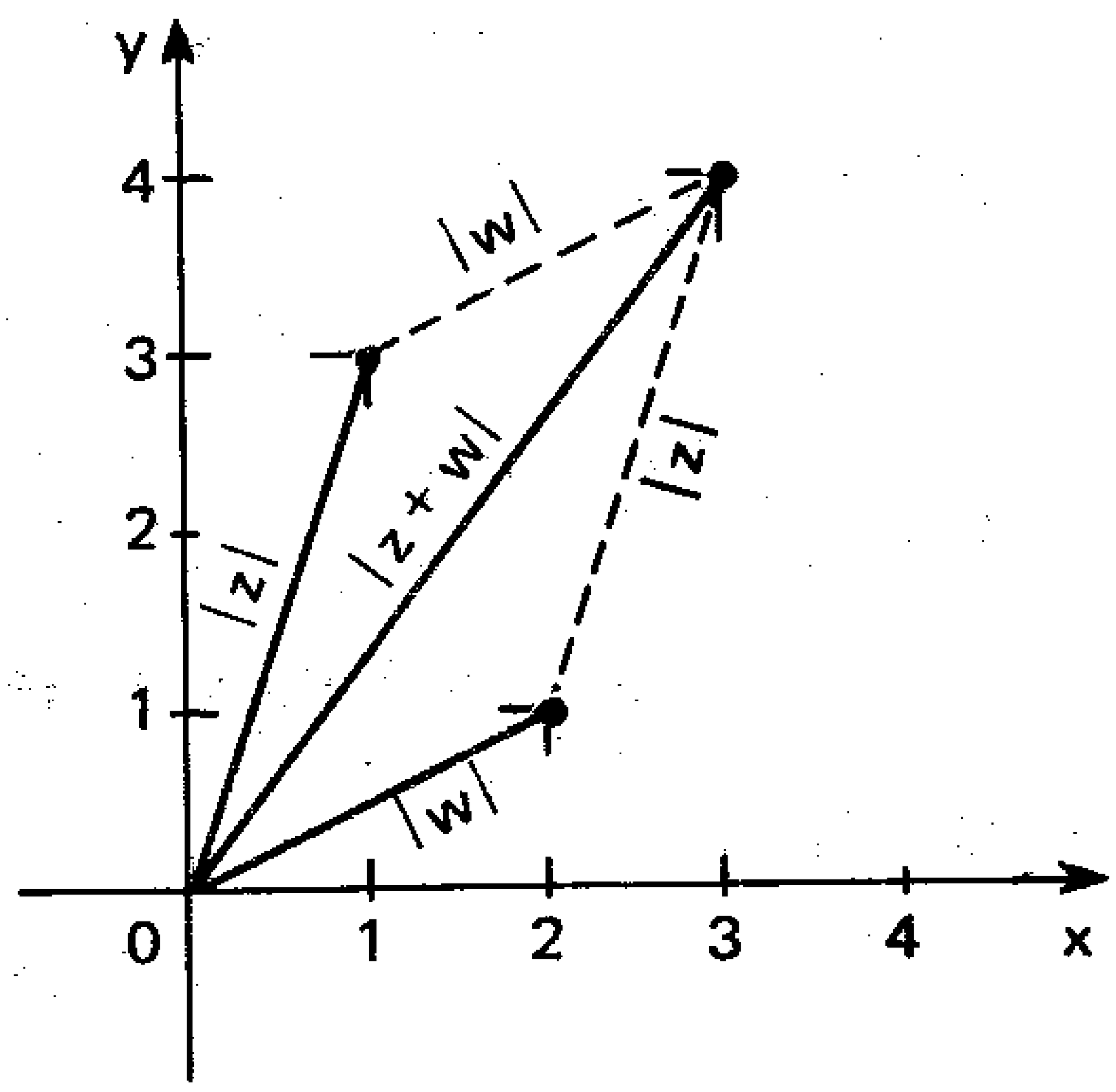
$$\boxed{|z + w| \leqslant |z| + |w|}$$

Examinemos um **exemplo**. Sendo $z = 1 + 3i$ e $w = 2 + i$, temos:

- $|z + w| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $|z| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$
- $|w| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \cong 2{,}23$

De fato, temos $5 < 3{,}16 + 2{,}23$; portanto, neste exemplo vemos que **o módulo da soma é menor que a soma dos módulos**.

Pelo gráfico abaixo, a situação torna-se visível: a figura mostra um paralelogramo, onde os lados têm medidas $|z|$ e $|w|$, e uma diagonal mede $|z + w|$.



Assim, observamos que nos triângulos em que o paralelogramo está dividido, os lados têm medidas $|z|$, $|w|$ e $|z + w|$; da Geometria Plana sabemos que (num triângulo) cada lado é menor que a soma dos outros dois. Daí a propriedade:

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

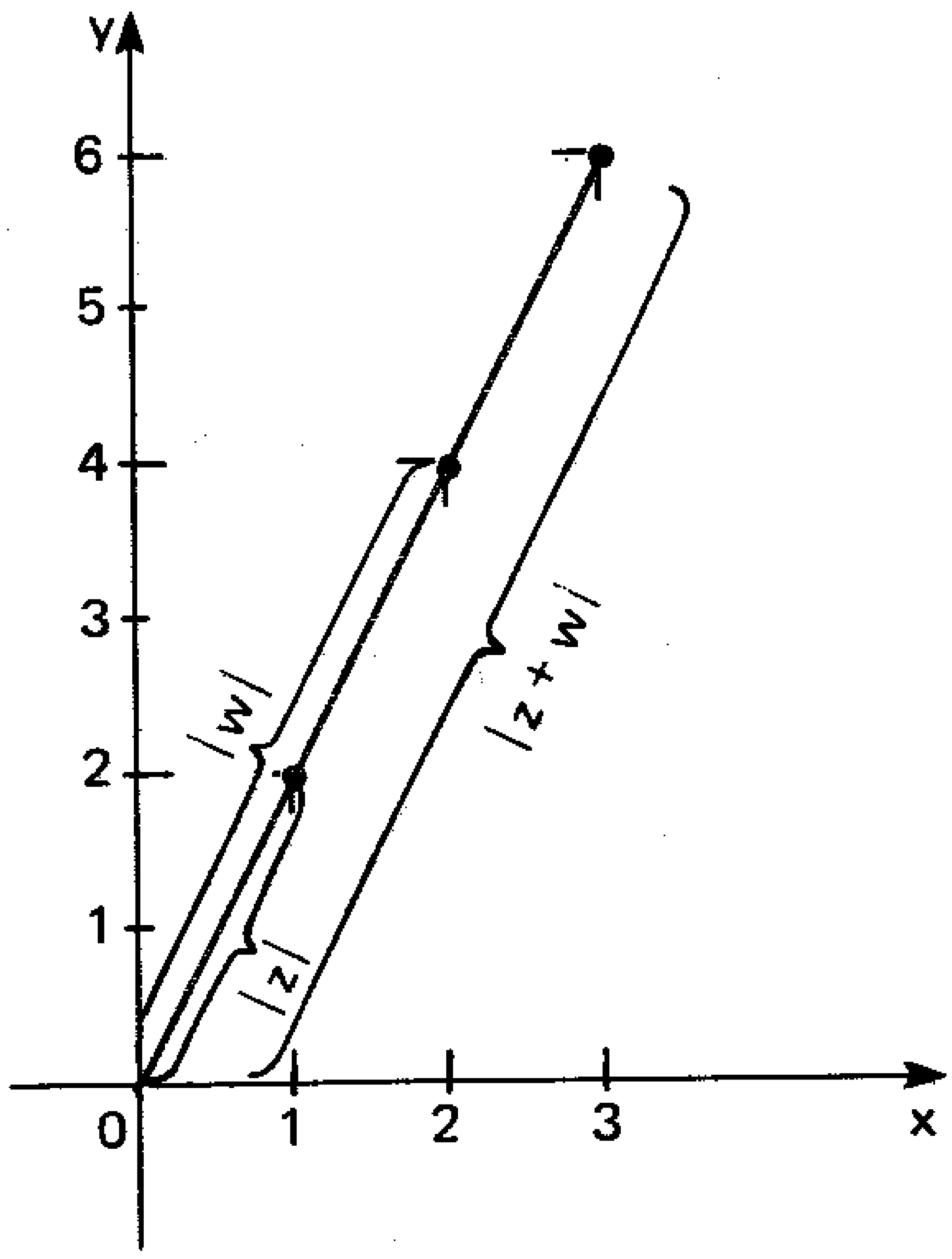
ser conhecida como **desigualdade triangular**.

Fica evidente que, quando $|z|$ e $|w|$ estiverem representados por segmentos contidos numa mesma reta que passa pela origem, ocorre o caso em que $|z + w| = |z| + |w|$.

Por exemplo, se $z = 1 + 2i$ e $w = 2 + 4i$ (note que os pontos $(1; 2)$ e $(2; 4)$ pertencem à reta da equação $y = 2x$), temos:

- $|z + w| = |3 + 6i| = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$
- $|z| = |1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|w| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

$$(3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5})$$



Demonstração da propriedade

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, **a**, **b**, **c** e **d** reais. Assim, temos $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

A desigualdade $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ pode, então, ser escrita:

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, ela é verdadeira se:

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leqslant a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + d^2$$

que simplificada fica:

$$ac + bd \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Quadrando novamente ambos os membros, a desigualdade é verdadeira se:

$$a^2c^2 + 2\,abcd + b^2d^2 \leqslant a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

isto é, se:

$$2\,abcd \leqslant a^2d^2 + b^2c^2$$

Esta última relação é equivalente a:

$$(ad - bc)^2 \geqslant 0$$

que é **indiscutivelmente verdadeira**, sendo **a**, **b**, **c** e **d** reais.

Portanto, partindo desta desigualdade, revertendo o processo passagem por passagem (e cada uma delas é reversível), provamos a propriedade.

Exercícios Resolvidos

3.18) Sendo **z** um número complexo tal que $|z + 3 - 4i| = 12$, determine o valor mínimo de $|z|$.

Solução

Pela desigualdade triangular, temos que:

$$|z + 3 - 4i| \leqslant |z| + |3 - 4i|$$

Como $|z + 3 - 4i| = 12$ e $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, a desigualdade se escreve:

$$12 \leqslant |z| + 5$$

donde obtemos:

$$|z| \geqslant 7$$

Assim, o valor mínimo de $|z|$ é 7.

3.19) Os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são tais que $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ e $|z + w| = |z| + |w|$.

Determine a relação entre **a**, **b**, **c** e **d**.

Solução

Sabemos que, quando o módulo da soma é igual à soma dos módulos, os afixos dos complexos pertencem a uma mesma reta (r) que passa pela origem.

Seja, então, $y = mx$ a equação dessa reta (r).

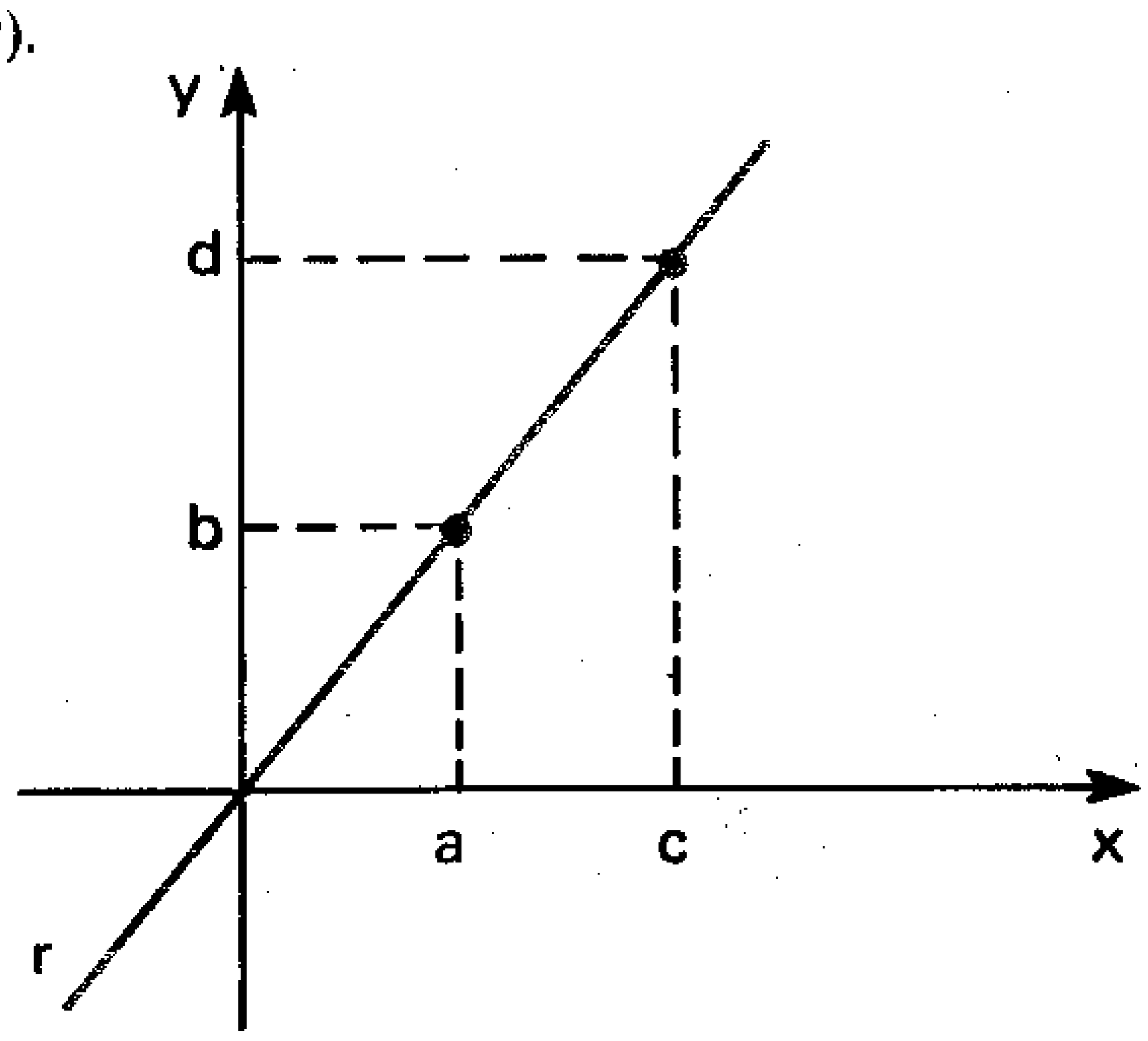
Se $(a; b) \in r$, temos $b = ma$. (I)

Se $(c; d) \in r$, temos $d = mc$. (II)

De (I) e (II) temos:

$$m = \frac{b}{a} \text{ e } m = \frac{d}{c}$$

Portanto, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ou $ad = bc$.



Exercícios Propostos

3.20) Mostre que, sendo **z** e **w** números complexos quaisquer, então $|z - w| \leqslant |z| + |w|$.

3.21) Mostre que, sendo z_1, z_2 e z_3 números complexos quaisquer, então:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

$|(z_1 + z_2) + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

Capítulo 4

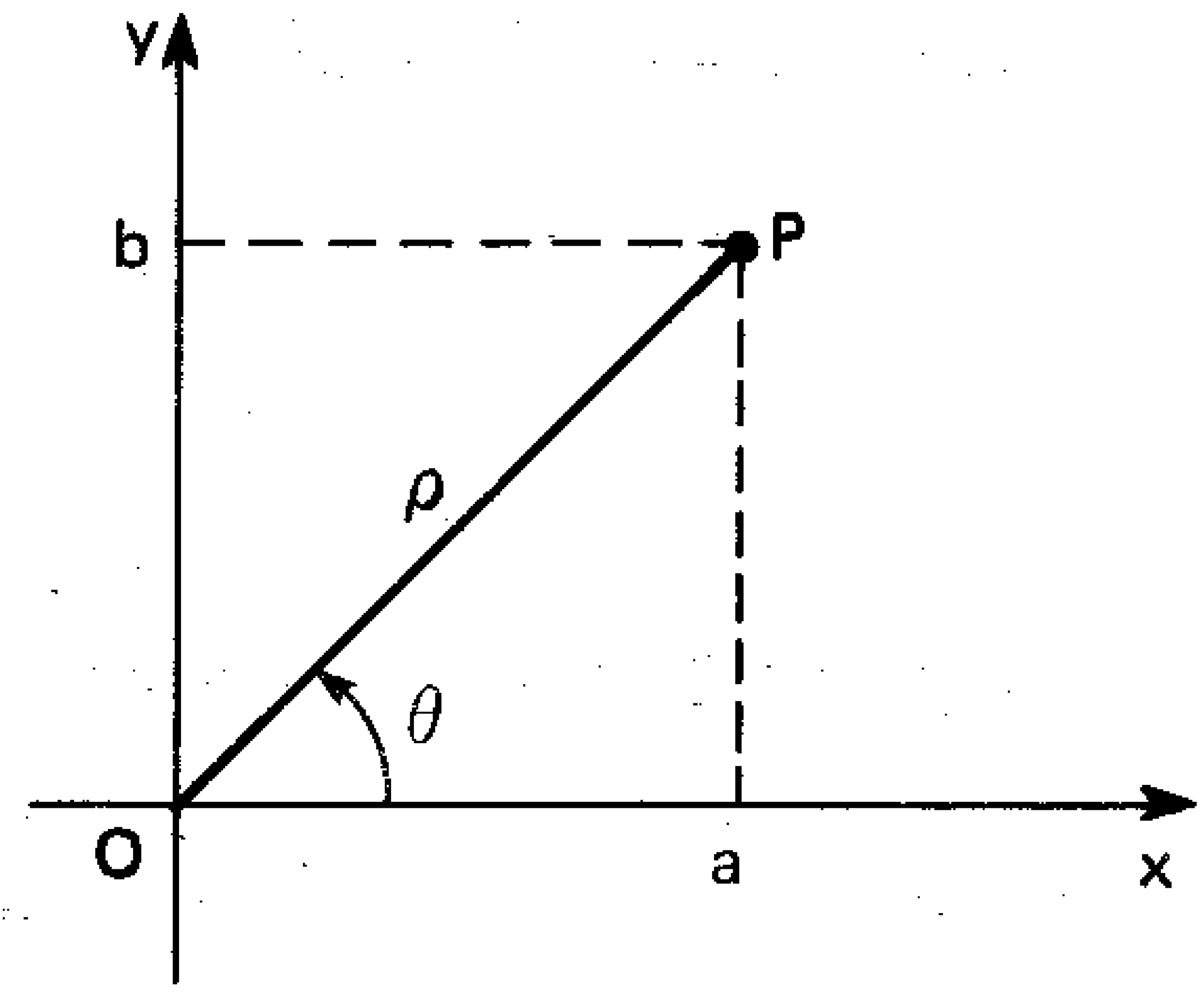
A trigonometria dos números complexos

4.1 — ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Sejam $z = a + bi$ um número complexo **não nulo** e P o ponto que o representa.

A medida θ do ângulo formado pelo semi-eixo positivo **Ox** e pelo segmento $\overline{OP}$ (tomada no sentido anti-horário) é chamada **argumento principal** do número complexo **z**, e é indicada por arg(z):

$$\theta = \arg(z)$$



No caso em que $b = 0$ e $a > 0$, isto é, quando P está no semi-eixo positivo **Ox**, adotamos $\theta = 0$. Percebemos, então, que:

$$0 \leqslant \arg(z) < 2\pi$$

Nota: Damos o nome de **argumento principal** a θ pelo fato de também serem considerados como argumentos do número complexo $z = a + bi$ **todos os côngruos de** θ, ou seja, os ângulos de medidas:

$$\theta_k = \theta + 2k\pi$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se $\theta = \frac{\pi}{2}$ é o argumento principal de um complexo **z**, também são argumentos de **z**:

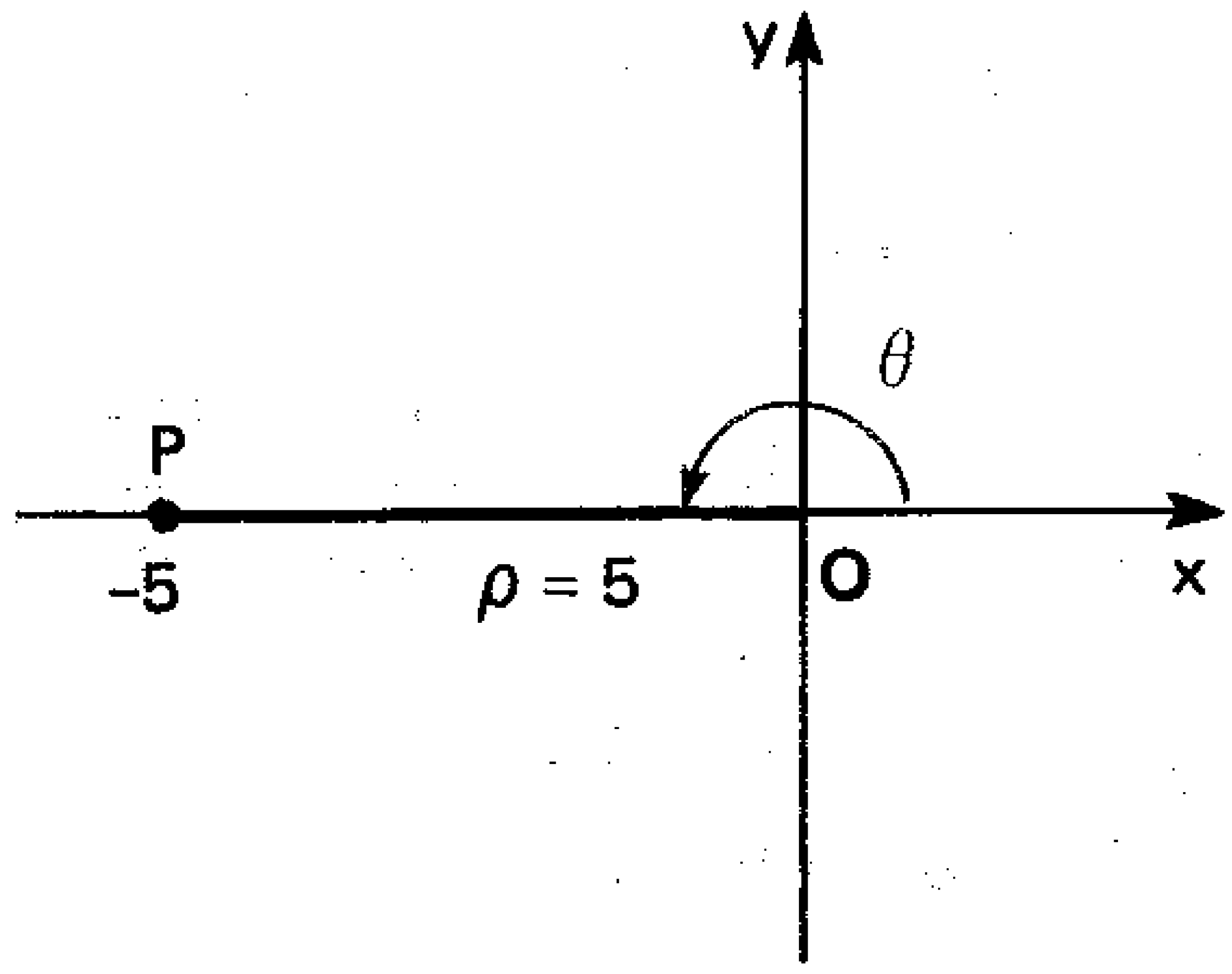
$$\frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \text{ etc.}$$

No entanto, é freqüente nos referirmos ao argumento principal θ simplesmente como argumento de **z**.

Exemplos

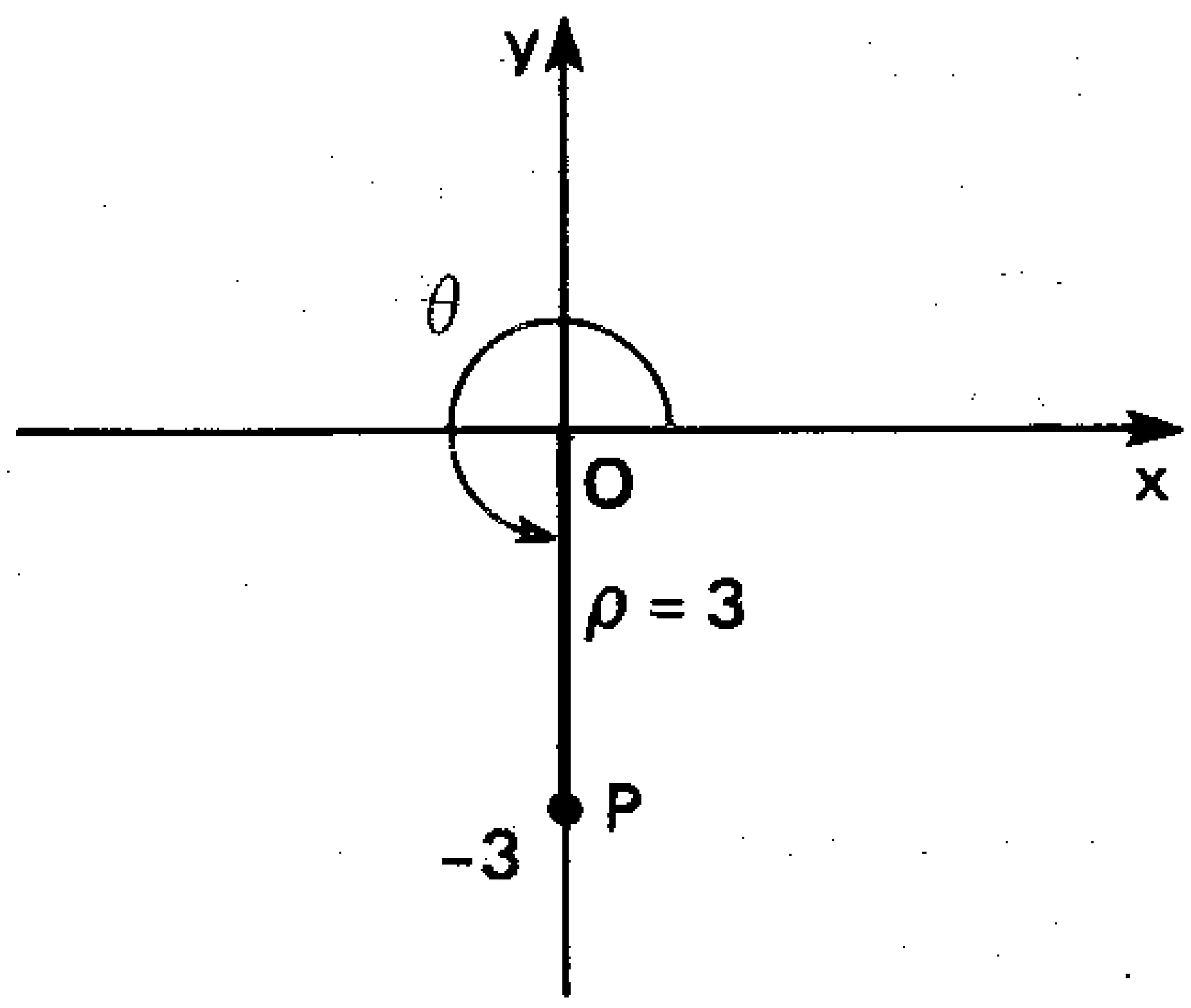
a) Seja $z = -5$.
Temos, então, o ponto $P(-5; 0)$ no semi-eixo negativo **Ox**. Portanto:

$$\theta = \pi$$



b) Seja $z = -3i$.
Temos, então, o ponto $P(0; -3)$ no semi-eixo negativo **Oy**. Portanto:

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

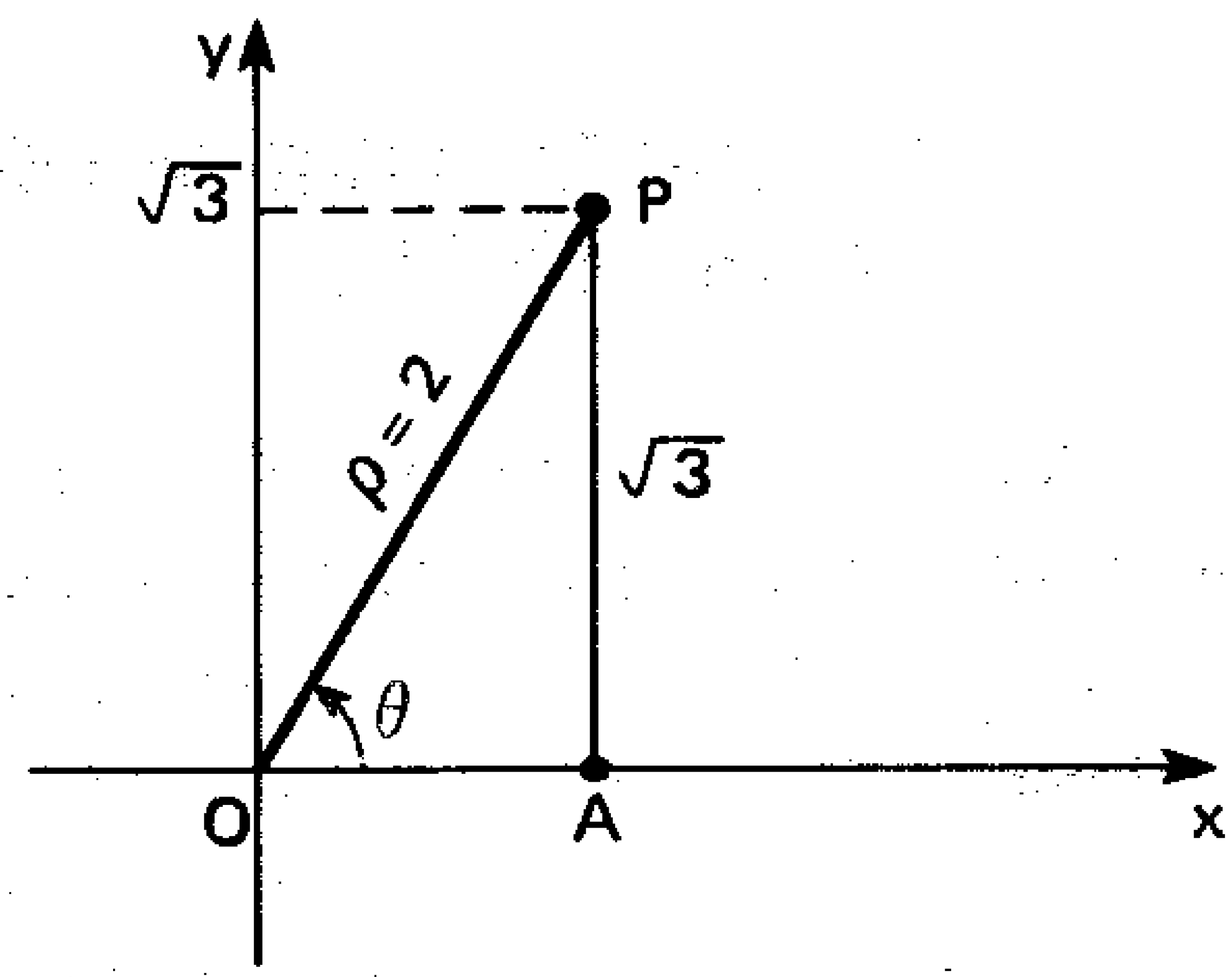


c) Seja $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.
Calculando $|z|$, temos:
$|z| = \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
No triângulo retângulo OAP, temos:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como θ é agudo, é imediato que:

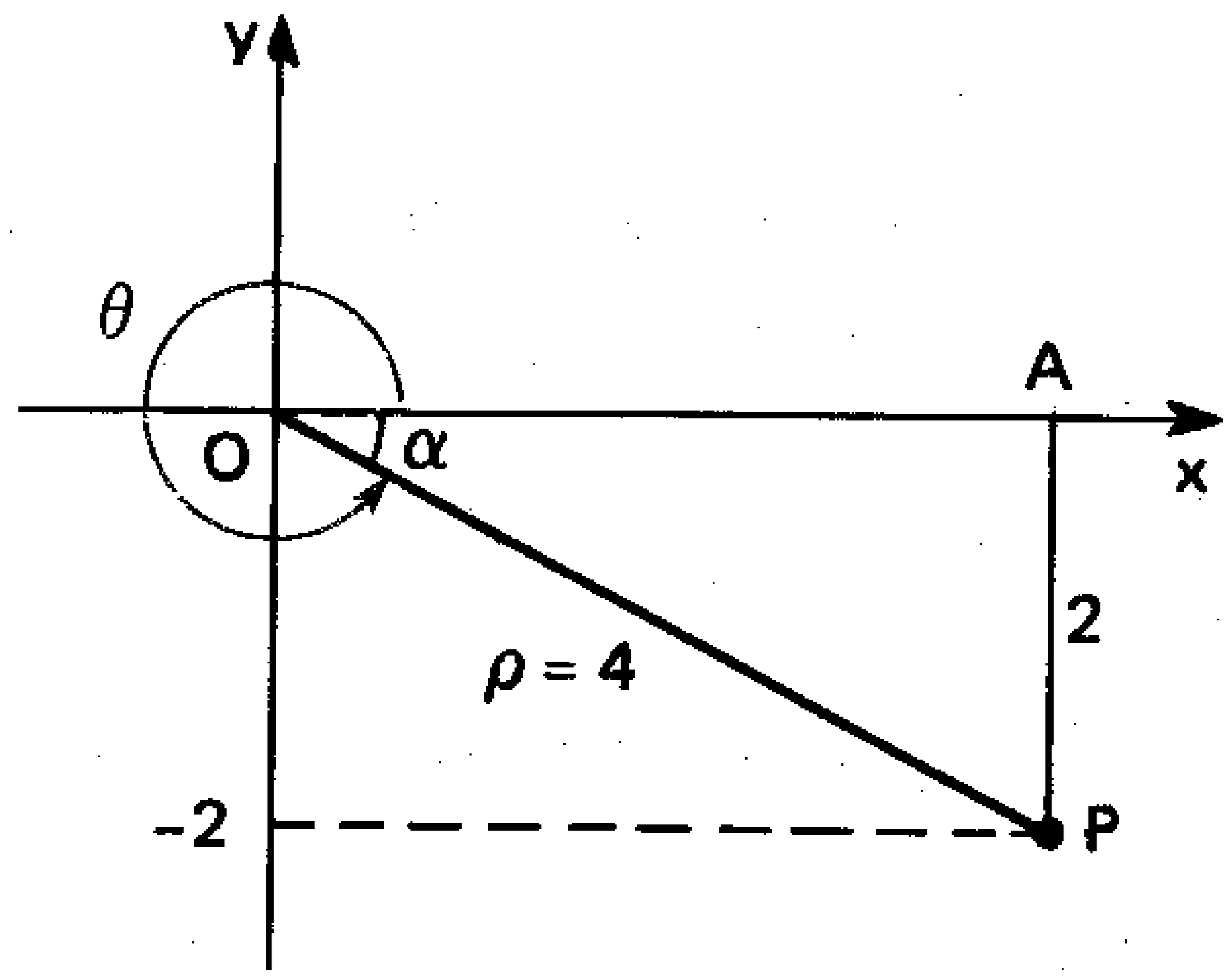
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$



d) Seja $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
Calculando $|z|$, temos:

$$|z| = \rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

Para determinarmos θ, vamos primeiramente determinar o ângulo α no triângulo OAP da figura, já que é imediato que $\theta = 2\pi - \alpha$:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Temos, então, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e,

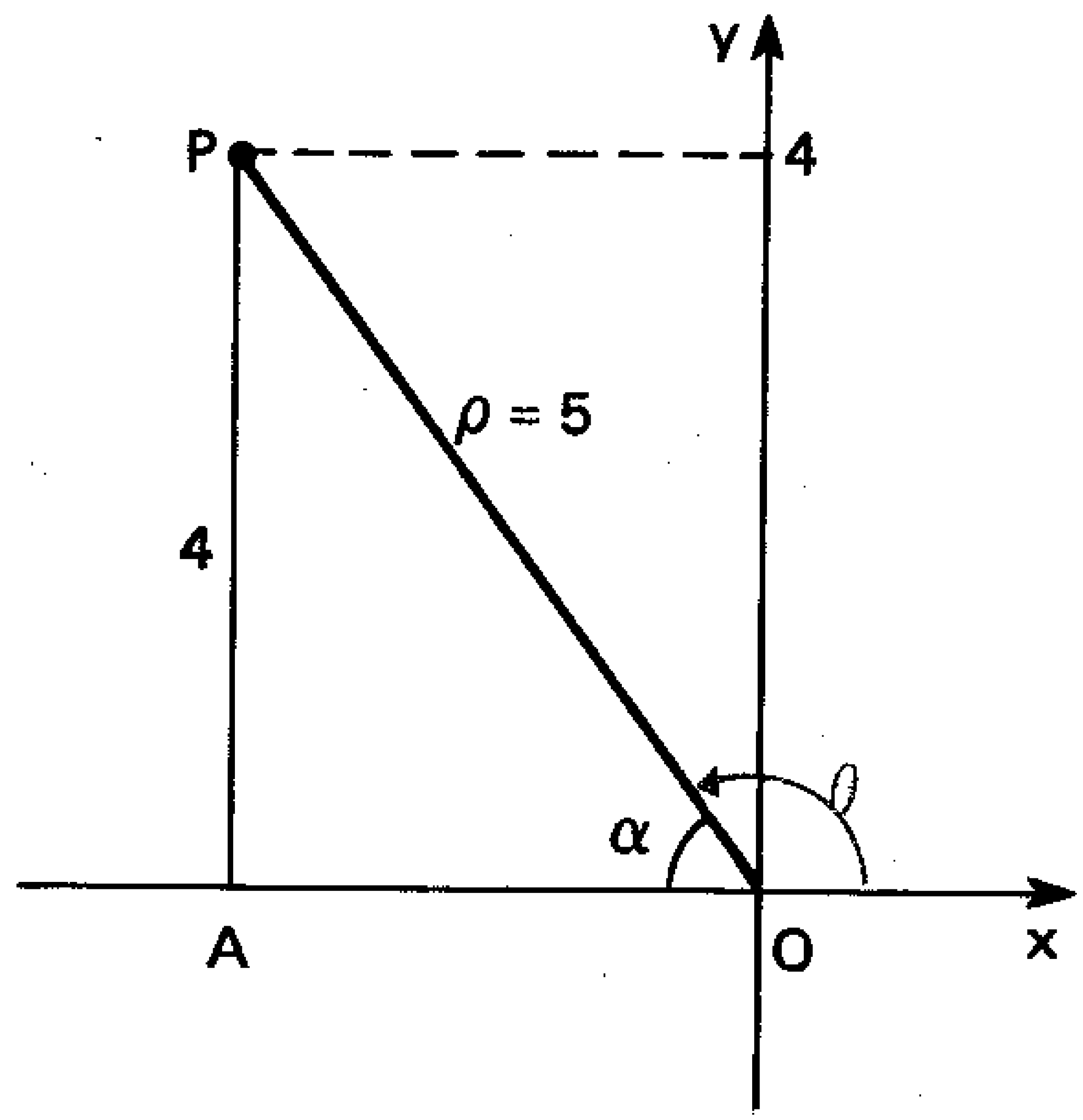
portanto:

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

e) Seja $z = -3 + 4i$.
Calculando $|z|$, temos:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Para determinarmos θ, vamos primeiramente determinar o ângulo α no triângulo OAP da figura, já que é imediato que $\theta = 180° - \alpha$:



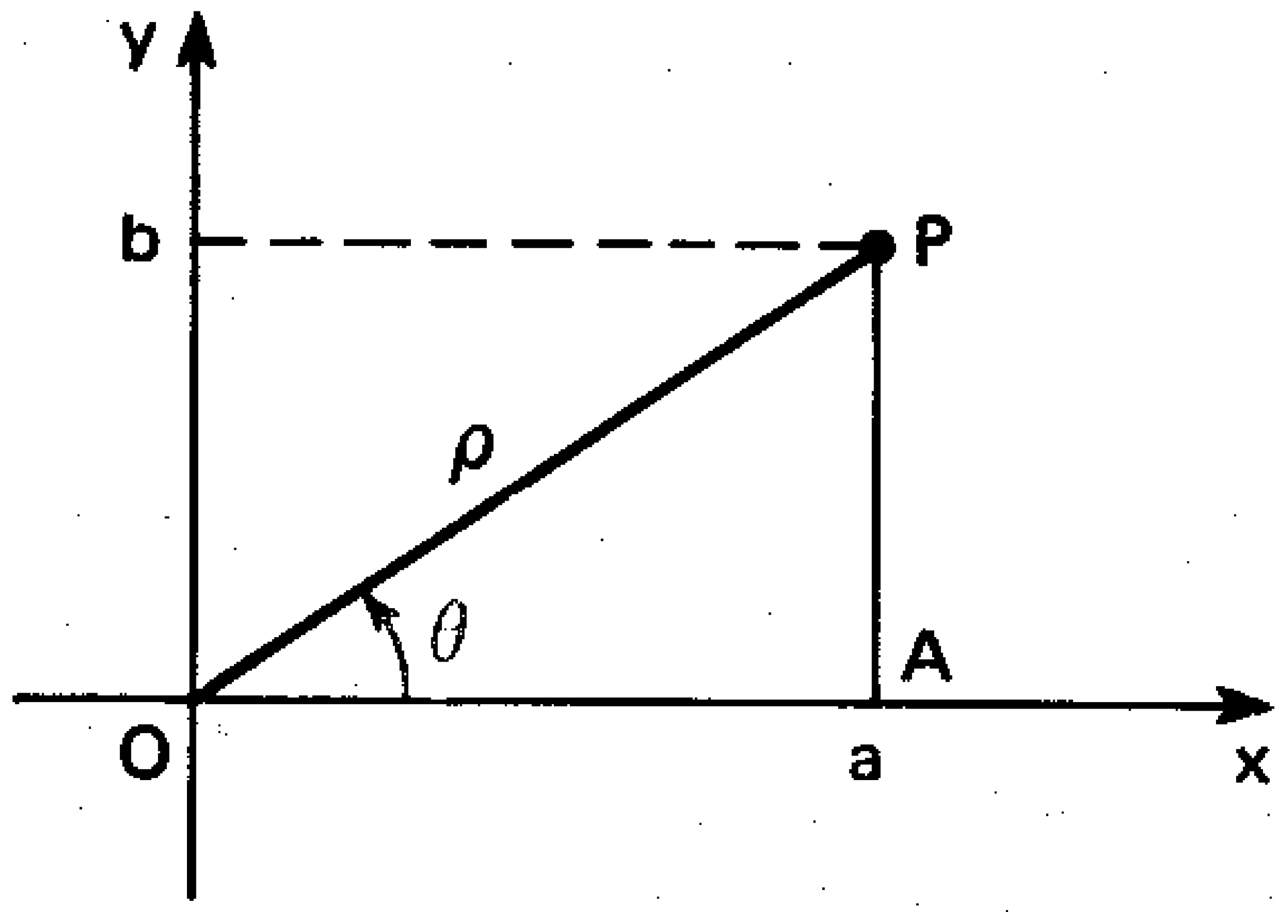
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8000$$

Consultando a tabela do final do livro, temos $\alpha \cong 53°$.
Logo, $\theta \cong 180° - 53° \cong 127°$

4.2 — A FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As definições de módulo e argumento de **z** nos permitem escrevê-lo numa nova forma, além das já utilizadas: (a; b) (cartesiana) e a + bi (algébrica).

Se lembrarmos que os sinais das coordenadas (a; b) de um ponto do plano cartesiano são, em todos os quadrantes, os mesmos que os do cosseno e do seno, respectivamente, é fácil verificar que para todo número complexo $z = a + bi \neq 0$, cujo módulo é ρ e cujo argumento é θ, valem as relações:



$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Dessas igualdades tiramos:

$$b = \rho\,\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad a = \rho\cos\theta$$

Podemos, então, escrever:

$$z = a + bi = \rho\cos\theta + (\rho\,\text{sen}\,\theta)\,i$$

isto é:

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

que é a **forma trigonométrica** do complexo z.

Exemplos

a) $z = -5$ tem $\rho = 5$ e $\theta = \pi$ (Veja exemplo *a*, do item 4.1.)

Podemos, então, escrever:

$$z = -5 = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$$

b) $z = -3i$ tem $\rho = 3$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (Veja exemplo *b*, do item 4.1.)

Então:

$$z = -3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

c) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ tem $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ (Veja exemplo *c*, do item 4.1.)

Então:

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

d) $z = 2\sqrt{3} - 2i$ tem $\rho = 4$ e $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$ (Veja exemplo *d*, do item 4.1.)

Então:

$$z = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

Observação: Como, da Trigonometria, temos que dois arcos (ângulos) côngruos têm senos iguais e cossenos iguais, é evidente que a forma trigonométrica de **z** pode ser escrita com qualquer dos argumentos de **z** dados por $\theta_k = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$$

Por exemplo, como π e 3π são côngruos, podemos escrever:

$$z = -5 = 5(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = 5(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi)$$

Exercícios Propostos

4.1) Escreva na forma trigonométrica os números complexos:

a) $z = 3$
b) $z = \sqrt{3} + i$
c) $z = 5i$
d) $z = -3 + 3\sqrt{3}\, i$
e) $z = -1$
f) $z = -1 - i$
g) $z = -4i$
h) $z = 3 - 3i$

4.2) Escreva na forma algébrica os números complexos:

a) $z = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

b) $z = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$

c) $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

4.3) Mostre que se o número complexo **z** tem argumento θ então z^2 tem argumento 2θ.

4.4) Sendo θ_1 e θ_2, com $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$, os argumentos de dois complexos de mesmo módulo, mostre que tais complexos são conjugados.

Capítulo

5

Operações na forma trigonométrica

5.1 — INTRODUÇÃO

Quando introduzimos a forma *algébrica* dos números complexos, notamos que certas operações, como a multiplicação e a divisão, tornaram-se bem mais simples de se executar.

A forma *trigonométrica*, por sua vez, tem a vantagem de simplificar o trabalho de potenciação e de radiciação de números complexos, como veremos a seguir.

5.2 — MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Sejam os números complexos (não nulos):

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

Vamos calcular o produto $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) = \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i\,(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)] \end{aligned}$$

Como, da Trigonometria, temos que:

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 = \mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)$$

escrevemos:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]}$$

onde lemos que, para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica, basta **multiplicar seus módulos e somar seus argumentos**.

É fácil verificar que esse procedimento pode ser generalizado para um número qualquer de fatores:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n)]$$

Vamos agora calcular o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - i\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2]}{\rho_2(\cos^2\theta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)]}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}$$

Como, da Trigonometria, temos:

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 = \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

e

$$\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 = 1$$

escrevemos:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$$

onde lemos que, para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, basta **dividir seus módulos e subtrair seus argumentos**.

Exemplo

Sejam $z_1 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Para calcularmos $z_1 \cdot z_2$, fazemos:

$$\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = 6 \cdot 2 = 12 \\ \theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$z_1 \cdot z_2 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

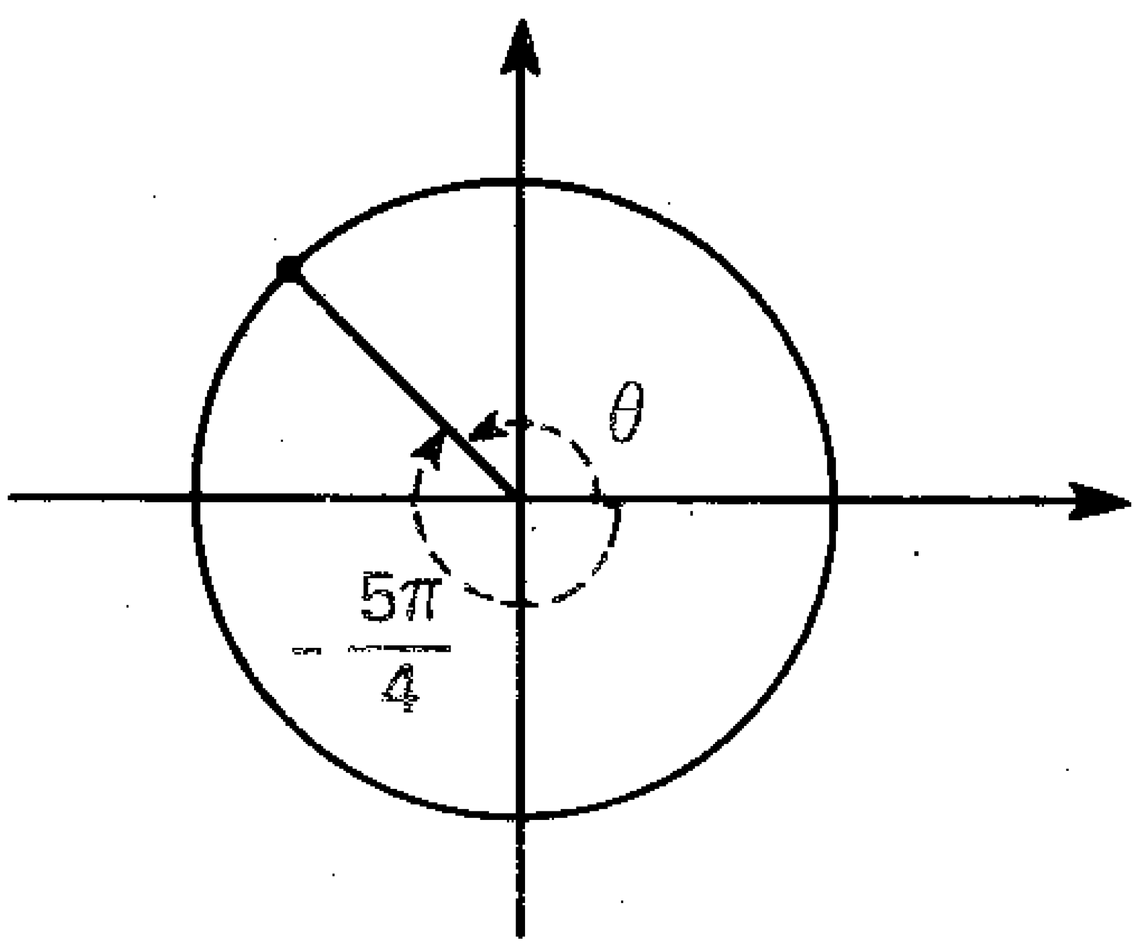
Para calcularmos $\frac{z_1}{z_2}$ fazemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

Note-se que, neste resultado, o argumento obtido não é o *principal* θ, e sim o seu côngruo $-\frac{5\pi}{4}$. Caso *desejemos* a resposta em função de θ, devemos calcular a *primeira determinação positiva** dos arcos de mesma extremidade que $-\frac{5\pi}{4}$:



$$\theta = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

podendo, depois, escrever:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

5.3 — POTENCIAÇÃO

Com base na multiplicação, na forma trigonométrica, vamos verificar como se processa o cálculo de potências da forma $z^n = (a + bi)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$, sem que precisemos recorrer a métodos exaustivos como, por exemplo, o binômio de Newton.

---

*Veja volume 3 desta coleção, p. 39.

Consideremos o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e o número inteiro **n**, ambos não nulos, e calculemos z^n.

Se $n > 0$, temos:

$$\mathbb{Z}^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\mathbf{n}\ \text{fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{\mathbf{n}\ \text{fatores}}[\cos\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\mathbf{n}\ \text{parcelas}} + i \operatorname{sen}\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\mathbf{n}\ \text{parcelas}}]$$

Portanto:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad \text{(I)}$$

Se $n < 0$, temos $-n \pm 0$, podendo, por isso, ser usado o resultado (I) para $-\mathbf{n}$. Então, fazemos:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]}$$

Da Trigonometria: $\begin{cases} \cos(-n\theta) = \cos n\theta \\ \operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen} n\theta \end{cases}$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{\rho^n}{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta} = \frac{\rho^n}{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta} \cdot \frac{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} =$$

$$= \frac{\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{\underbrace{\cos^2 n\theta + \operatorname{sen}^2 n\theta}_{1}}.$$

Vemos, então, repetido o resultado (I).

Como para $n = 0$ este resultado também se verifica $[z^0 = \rho^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1]$, temos que, para todo inteiro **n**:

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}$$

ou seja, para elevarmos um complexo $z \neq 0$ a um expoente inteiro **n** qualquer, basta **elevarmos o seu módulo a n e multiplicarmos o seu argumento por n**

A fórmula acima é conhecida como **fórmula de De Moivre**.

Exemplos

a) Seja $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$. Vamos calcular z^{18}.

$$z^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$z^{18} = 2^{9}\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{2}\right)$$

Como $\dfrac{9\pi}{2}$ é côngruo de $\dfrac{\pi}{2}$:

$$z^{18} = 512\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

b) Seja $z = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}$. Vamos calcular z^{-6} (note que $\rho = 1$).

$$z^{-6} = (1)^{-6}\left[\cos\left(-6\cdot\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-6\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$z^{-6} = 1\cdot[\cos(-10\pi) + i\,\text{sen}\,(-10\pi)]$$

Como -10π é côngruo de *zero*:

$$z^{-6} = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

Exercícios Resolvidos

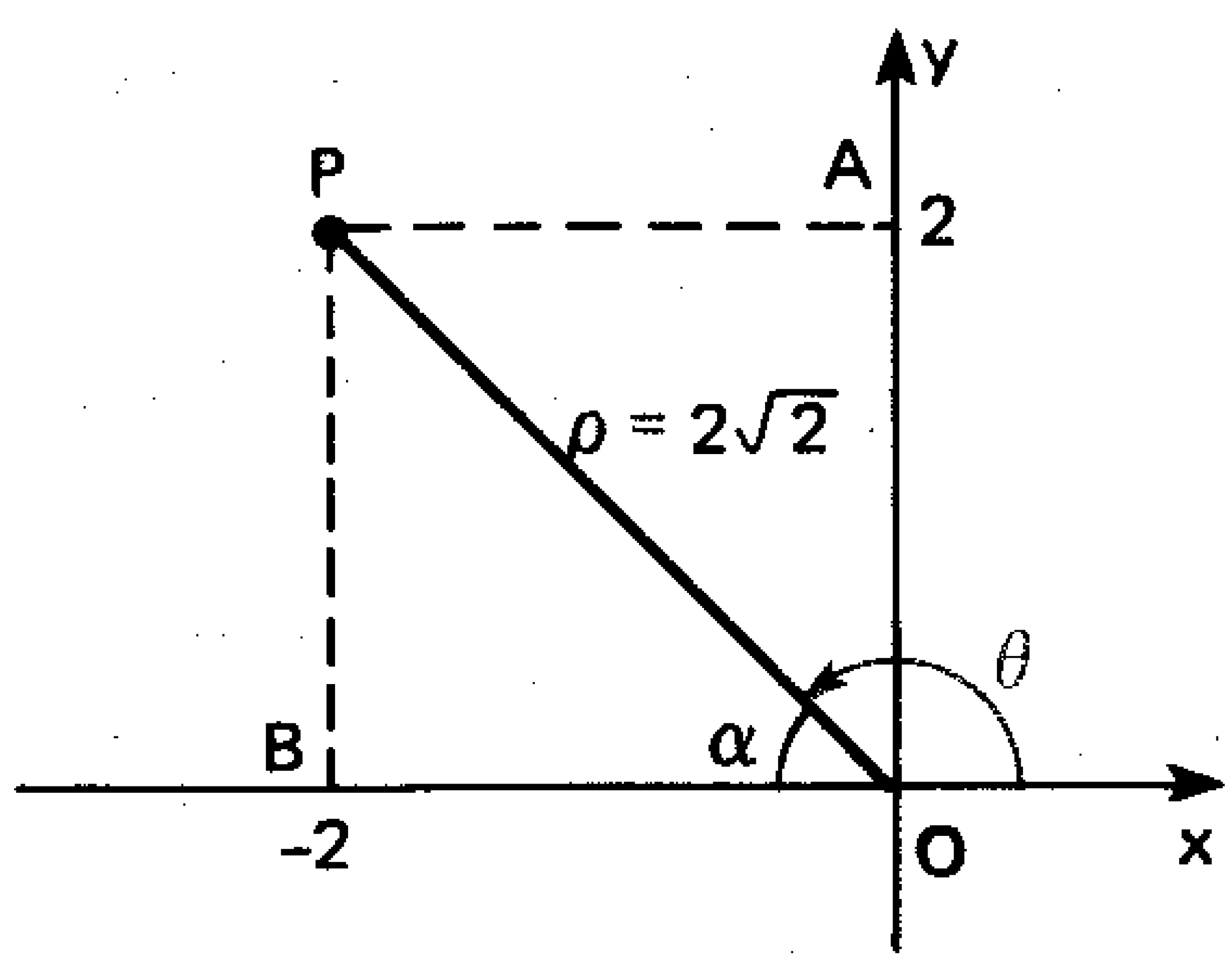
5.1) Calcule $(-2 + 2i)^5$.

Solução

Vamos escrever $-2 + 2i = z$ na forma trigonométrica:

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Na figura, OAPB é um quadrado; portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e $\theta = \pi - \theta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$



Logo: $z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right).$

$$z^5 = (-2 + 2i)^5 = (2\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\cdot 3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\cdot 3\pi}{4}\right) =$$

$$= 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$\text{Como}\ \begin{cases} \cos\dfrac{15\pi}{4} = \cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \text{sen}\dfrac{15\pi}{4} = \text{sen}\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$z^5 = 128\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 128 - 128i$$

5.2) Deduza as fórmulas de $\text{sen}\,2\theta$ e $\cos 2\theta$ em função de $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$, utilizando a fórmula de De Moivre.

Solução

Sendo $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, a fórmula de De Moivre nos dá:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Para obtermos $\cos 2\theta$ e $\text{sen}\,2\theta$, façamos $n = 2$:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \qquad \text{(I)}$$

Mas, como $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$:

$$z^2 = \rho^2(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \rho^2(\cos^2\theta + 2i\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + i^2\,\text{sen}^2\,\theta)$$

isto é:

$$z^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + i\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos:

$$\rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) = \rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + i\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

Portanto:

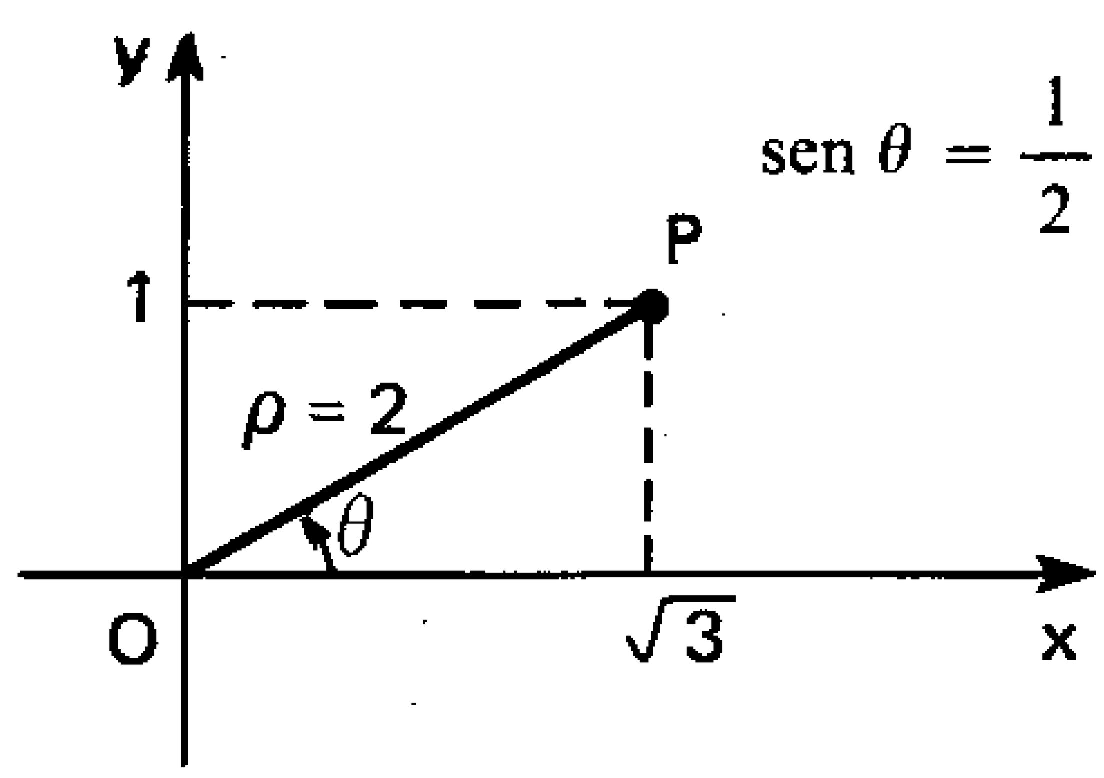
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

5.3) Mostre que se $(\sqrt{3} + i)^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, é real, então **n** é múltiplo de 3.

Solução

Vamos escrever $\sqrt{3} + i = z$ na forma trigonométrica; temos:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\[1ex] \theta = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

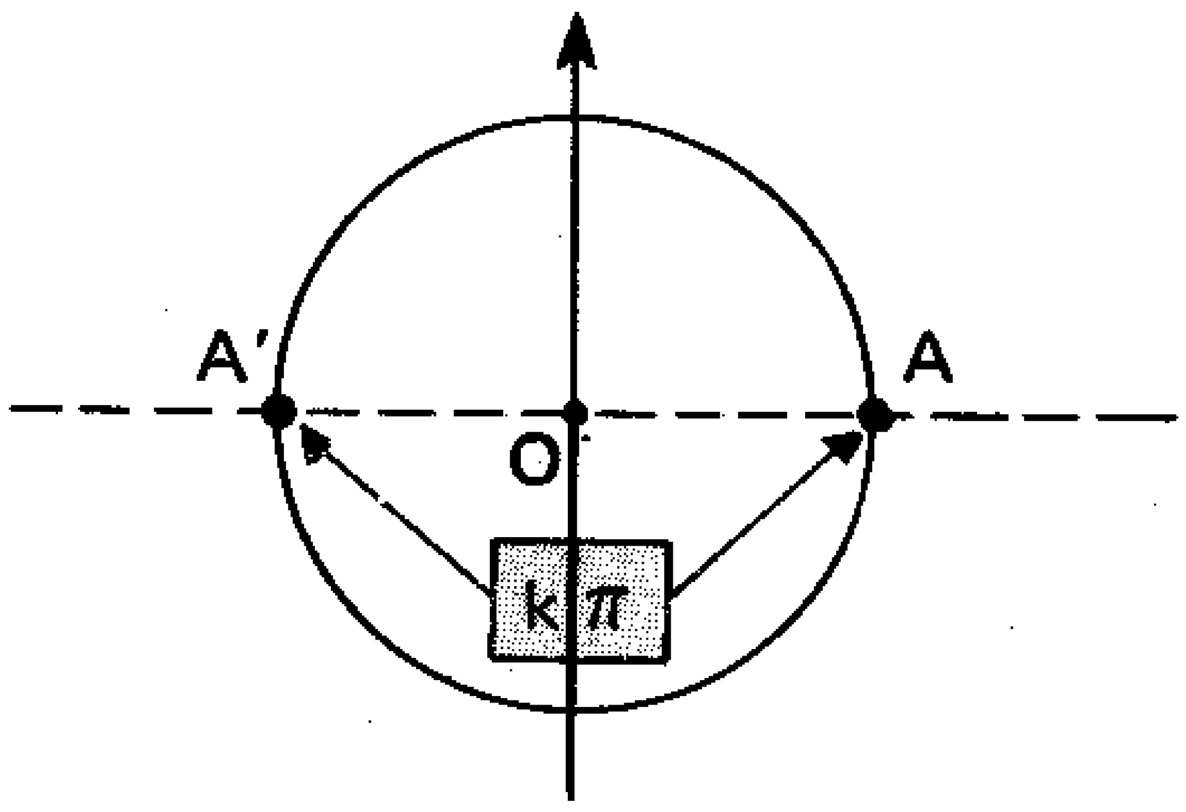


Portanto, $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e

$$z^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{2n\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{2n\pi}{6}\right)$$

$$z^{2n} = 4^{n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$$

Para que z^{2n} seja real, é necessário que $\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = 0$, isto é, o arco $\frac{n\pi}{3}$ deve ter extremidade em **A** ou em **A'** (figura abaixo).



Logo, $\frac{n\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

e daí, $n = 3k$ = múltiplo de 3.

5.4) Determine o menor natural **n** para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um imaginário puro de coeficiente positivo.

Solução

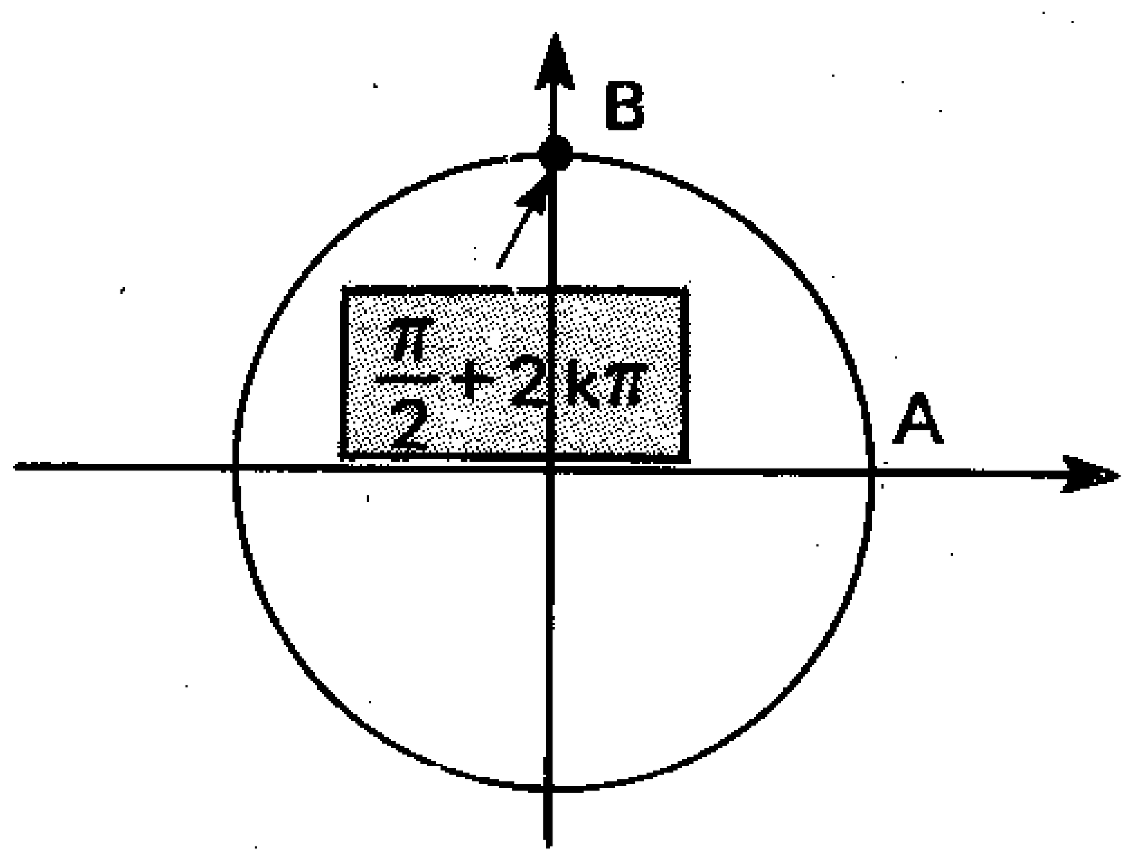
Sendo $z = \sqrt{3} + i$, temos: $|z| = \rho = 2$ e $\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$.

Portanto:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) \text{ e}$$

$$z^n = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$$

Como $2^n > 0$, para que z^n seja imaginário puro de coeficiente positivo, devemos ter:



$$\cos\frac{n\pi}{6} = 0 \text{ e } \text{sen}\frac{n\pi}{6} > 0$$

isto é, o arco $\frac{n\pi}{6}$ deve ter extremidade no ponto **B** (figura ao lado).

Logo, $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

e daí, $n = 3 + 12k$, **k** inteiro.

Finalmente, o **menor natural n** que satisfaz a condição acima é $n = 3$.

Exercícios Propostos

5.5) Calcule:

a) $(-\sqrt{3}+i)^{15}$ b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60}$ c) $(-2-2i)^{-18}$ d) $(-1-\sqrt{3}i)^{-10}$

5.6) Calcule $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{5}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{7}$.

5.7) Deduza as fórmulas de cos $(n\,\theta)$ e sen $(n\,\theta)$ em função de cos θ e sen θ, utilizando a fórmula de De Moivre e o binômio de Newton nos seguintes casos:

a) $n = 3$ b) $n = 4$

5.8) Sendo **n** um número natural, mostre que se $(1 + i)^n$ é imaginário puro, então **n** é um termo qualquer de uma progressão aritmética em que a razão é $r = 4$.

5.9) Determine o menor inteiro positivo **n** para que $(1 + i\sqrt{3})^n$ seja:

a) real positivo b) real negativo

5.10) Determine o menor natural **n** para que $(-\sqrt{3} + i)^n$ seja:

a) imaginário puro de coeficiente positivo
b) imaginário puro de coeficiente negativo

5.4 — RADICIAÇÃO

Definição — Dado um número complexo **z** e um número natural $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, chamamos raiz n-ésima de **z** a todo número complexo ω que satisfaz a relação $\omega^n = z$.

A raiz assume um nome especial para cada valor de **n**. Assim, se $n = 4$, dizemos *raiz quarta de* **z**; se $n = 7$, dizemos *raiz sétima de* **z**, etc.

No caso de $n = 2$, costuma-se dizer *raiz quadrada* e, para $n = 3$, *raiz cúbica*.

Conforme veremos, **todo número complexo não nulo admite n raízes n-ésimas.**

Por exemplo, o número 1 admite 4 raízes quartas $(1;\ -1;\ i;\ -i)$, pois:

$$1^4 = 1;\ (-1)^4 = 1;\ i^4 = 1 \text{ e } (-i)^4 = 1$$

Vejamos como determinar as raízes de um número complexo.

Dado $z = \rho \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, seja:

$$\omega = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \text{ uma raiz n-ésima de } \mathbf{z}.$$

Então:

$$\omega^n = z$$

$$r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

donde tiramos:

$$r^n = \rho, \ \cos n\alpha = \cos\theta \ \text{e} \ \text{sen}\, n\alpha = \text{sen}\,\theta$$

1.ª **conclusão**: $$r^n = \rho \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[n]{\rho}}$$

ou seja, **o módulo da raiz n-ésima** de um complexo **z** é igual à raiz n-ésima do módulo de **z**.

Assim, se por exemplo **z** tem módulo 2, suas raízes quadradas têm módulo $\sqrt{2}$; suas raízes cúbicas têm módulo $\sqrt[3]{2}$; suas raízes quartas têm módulo $\sqrt[4]{2}$,. etc.

2.ª **conclusão**: $- \begin{cases} \cos n\alpha = \cos\theta \\ \text{sen}\, n\alpha = \text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow n\alpha = \theta + 2k\pi$

donde:

$$\boxed{\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}}, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Lembremos que α é argumento de ω e notemos que, se atribuirmos a **k** os valores:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

obteremos **n** valores **distintos e não côngruos** para α e, para qualquer outro valor de **k**, o valor resultante de α será côngruo de um dos já obtidos.

Por exemplo, se **z** tem argumento $\theta = \pi$, suas raízes quartas ($n = 4$) têm argumentos dados por:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$$

onde:

$$\text{para } k = 0, \ \text{temos} \ \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{para } k = 1, \ \text{temos} \ \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{para } k = 2, \ \text{temos} \ \alpha_3 = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{para } k = n-1 = 3, \ \text{temos} \ \alpha_4 = \frac{7\pi}{4}$$

e, caso continuemos, começaremos a encontrar côngruos:

$$\text{para } k = 4, \ \alpha = \frac{9\pi}{4} \text{ (côngruo de } \alpha_1)$$

$$\text{para } k = 5, \ \alpha = \frac{11\pi}{4} \text{ (côngruo de } \alpha_2)$$

Por tudo isso, concluímos que, com o valor de **r** já determinado e cada um dos **n** valores distintos e não congruentes de α, podemos formar **n** números complexos $\omega = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, todos eles raízes n-ésimas de z, dados por:

$$\boxed{\omega = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]} \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (5.4)$$

Exemplo

Vamos calcular as raízes cúbicas de $z = 0 + 8i$.

Temos, na forma trigonométrica:

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

onde $\rho = 8$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Como $n = 3$, as raízes cúbicas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

ou seja:

$$\omega = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Atribuindo a **k** os valores 0, 1 e $2 = n - 1$, temos:

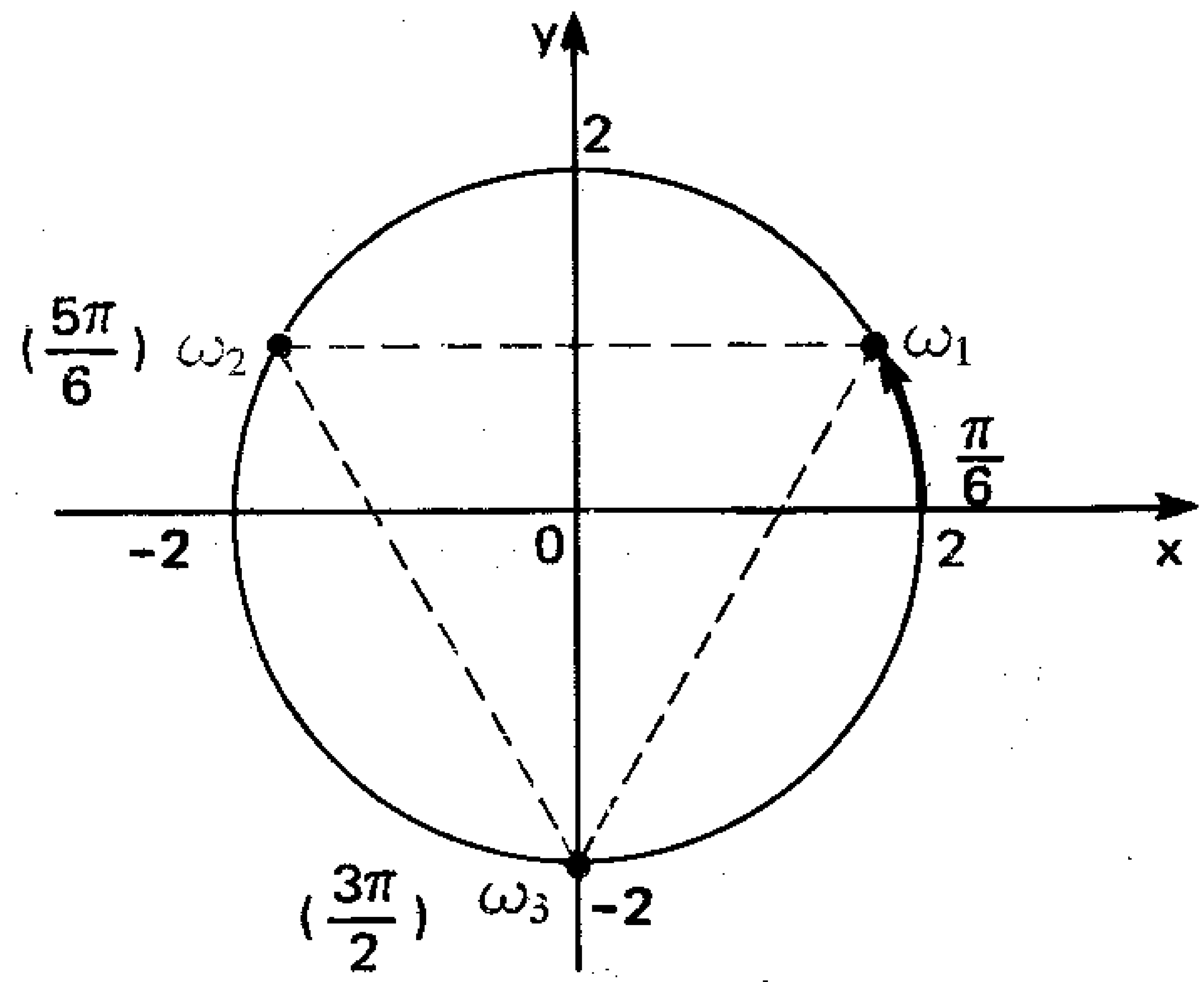
$$k = 0 \Rightarrow \omega_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Assim, $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$ são as três raízes cúbicas de $8i$.

Interpretação geométrica – Observemos o exemplo dado: como as três raízes cúbicas têm o mesmo módulo $r = 2$, seus afixos estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio 2; a expressão $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ nos diz que os argumentos α determinam, sobre esta circunferência, 3 pontos distintos e separados entre si de um arco de medida $\frac{2\pi}{3}$:



Vemos, então, que os afixos das raízes cúbicas de $z = 8i$ são vértices de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 2.

Analisando, agora, a expressão das raízes n-ésimas de **z**:

$$\omega = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

percebemos que:

1.º) as **n** raízes n-ésimas de **z** têm o mesmo módulo $r = \sqrt[n]{\rho}$, estando, por isso, seus afixos sobre uma mesma circunferência com centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{\rho}$;

2.º) da Trigonometria sabemos que arcos da forma $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ representam **n** pontos distintos no ciclo, distribuídos de modo a dividir a circunferência em **n** partes iguais.

Portanto, os afixos das raízes n-ésimas de **z** são:

— se $n = 2$, extremidades de um diâmetro da circunferência de centro $(0; 0)$ e raio $\sqrt[n]{\rho}$;

— se $n \geqslant 3$, vértices de um polígono regular de **n** lados, inscrito na circunferência de centro $(0; 0)$ e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

5.11) Sendo $\omega_0 = 1 + i$ uma das raízes quartas de um complexo **z**, determine as demais.

Solução

Vamos resolver o problema de dois modos.

1.º modo – Temos que $|\omega_0| = r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\arg(\omega_0) = \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

As raízes quartas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt[4]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right],\ k \in \mathbb{Z}$$

Como ω_0 é uma dessas raízes, devemos ter:

$$\sqrt[4]{\rho} = |\omega_0| = \sqrt{2}$$

e

$$\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2} = \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\theta}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi - 2k\pi$$

Como θ representa o argumento principal de **z**, tomemos $\theta = \pi$.
Portanto, as raízes quartas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

e daí:

$$\text{para } k = 0,\ \omega_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$\text{para } k = 1,\ \omega_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$$

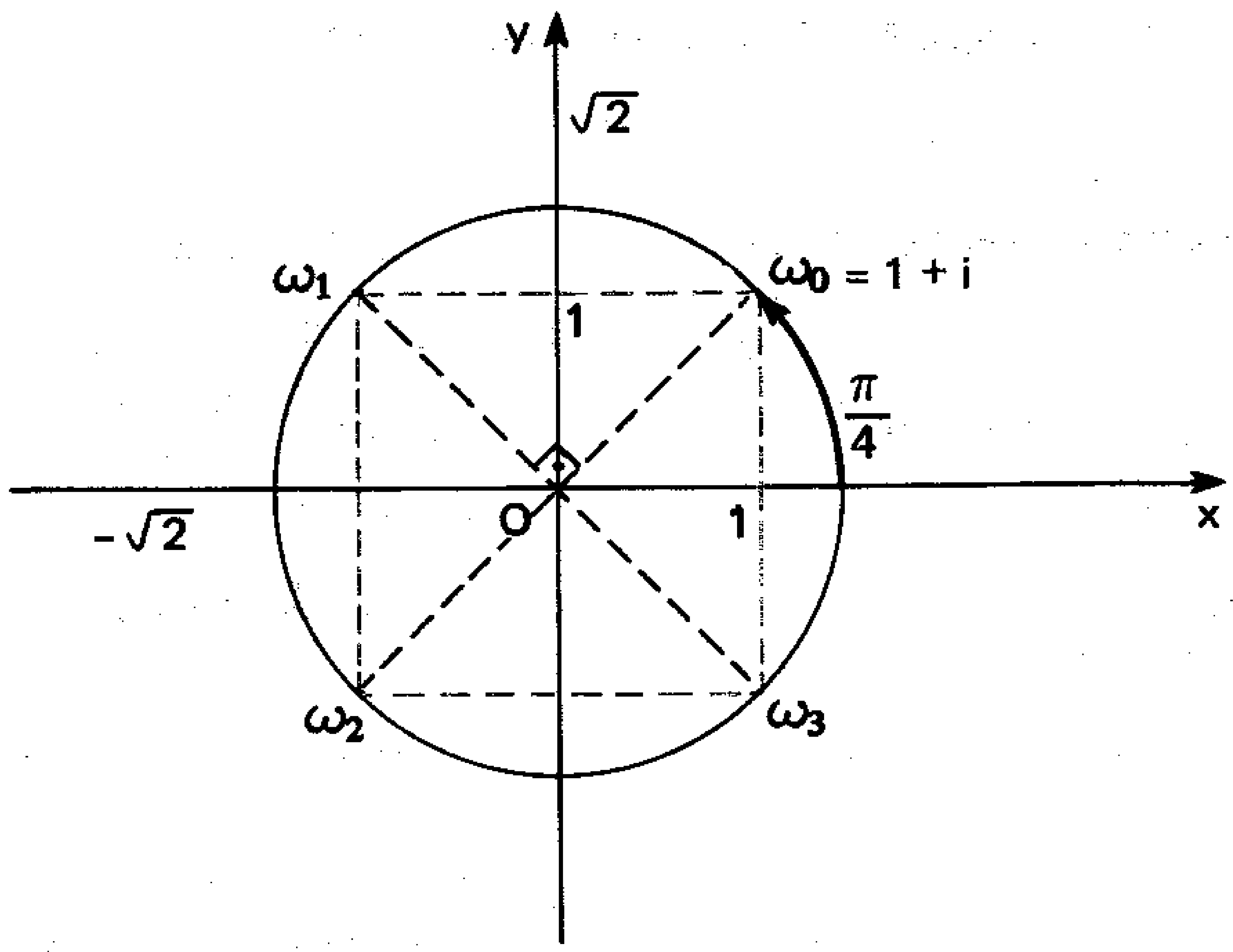
$$\text{para } k = 2,\ \omega_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i$$

$$\text{para } k = 3,\ \omega_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i$$

Assim, as demais raízes de **z** são:

$$-1 + i,\quad -1 - i,\quad 1 - i$$

2.º modo – Sabemos que as 4 raízes quartas de **z** têm seus afixos como vértices de um quadrado inscrito na circunferência de raio $r = |\omega_0| = \sqrt{2}$. Como ω_0 é um desses vértices, temos:



Então:

ω_1 é simétrico de ω_0 em relação a Oy; logo, $\omega_1 = -1 + i$.

ω_2 é conjugado de ω_1; logo, $\omega_2 = -1 - i$.

ω_3 é conjugado de ω_0; logo, $\omega_3 = 1 - i$.

5.12) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação binômia $x^3 + 8 = 0$.

Solução

Temos: $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8$

Portanto, os valores de **x** que satisfazem a equação dada são as raízes cúbicas de $z = -8$. Na forma trigonométrica, temos:

$$z = -8 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

Como $n = 3$, $\rho = 8$ e $\theta = \pi$, os valores de **x** são dados por:

$$x = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

Então:

para $k = 0$, $x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

para $k = 1$, $x_2 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -2$

para $k = 2$, $x_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Logo, o conjunto-solução de $x^3 + 8 = 0$ é:

$$S = \{-2;\ 1 + i\sqrt{3};\ 1 - i\sqrt{3}\}$$

5.13) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação trinômia $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Solução

Fazendo a mudança de variável $x^4 = y$, a equação dada se escreve:

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

Como suas raízes são $y = -1$ ou $y = 16$, vem:

$$x^4 = -1 \quad \text{ou} \quad x^4 = 16$$

Portanto, os valores de **x** que satisfazem a equação dada são as raízes quartas de -1 reunidas às raízes quartas de 16.

– As raízes quartas de $-1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ são dadas por:

$$x = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

– As raízes quartas de $16 = 16(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ são dadas por:

$$x = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\right], \ k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo a **k** os valores 0, 1, 2 e 3, obtemos, dessas duas últimas expressões, o conjunto-solução da equação proposta:

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; 2; 2i; -2; -2i\right\}$$

5.14) A *fórmula de Baskara* para determinação das raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, no caso em que os coeficientes **a**, **b** e **c** são **números complexos**, pode ser escrita:

$$x_{1,2} = \frac{-b + r_q}{2a}$$

onde o símbolo r_q representa as raízes quadradas do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Utilizando esta fórmula, resolva a equação $x^2 - (1 + i)x - \frac{1}{4}(3 + 2i) = 0$.

Solução

Tendo $a = 1$, $b = -(1 + i)$ e $c = -\frac{1}{4}(3 + 2i)$, calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(1 + i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[-\frac{1}{4}(3 + 2i)\right]$$

$$\Delta = 3 + 4i$$

Vamos, agora, calcular r_q, isto é, as raízes quadradas de $\Delta = 3 + 4i$.

É claro que, para isso, poderíamos utilizar a expressão (5.4) para n = 2:

$$\omega = r_q = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right]$$

onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de $\Delta = 3 + 4i$.

No entanto, como se trata do caso simples de determinação das **raízes quadradas**, parece-nos conveniente utilizar a **definição** de raiz: determinar $r_q = \alpha + \beta i$ (α e β reais) tal que:

$$r_q^2 = \Delta$$

Temos, então:

$$(\alpha + \beta i)^2 = 3 + 4i$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i = 3 + 4i$$

donde:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (lembrando que α e β são reais), obtemos:

$$(\alpha = 2 \text{ e } \beta = 1) \text{ ou } (\alpha = -2 \text{ e } \beta = -1)$$

Portanto, as raízes quadradas $r_q = \alpha + \beta i$ são:

$$r_{q_1} = 2 + i;\ r_{q_2} = -2 - i$$

Finalmente, com a fórmula fornecida, obtemos:

$$x_1 = \frac{-b + r_{q1}}{2} = \frac{(1 + i) + (2 + i)}{2} = \frac{3}{2} + i$$

$$x_2 = \frac{-b + r_{q2}}{2} = \frac{(1 + i) + (-2 - i)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{\frac{3}{2} + i;\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercícios Propostos

5.15) Determine:

a) as raízes quadradas de $4 + 4i\sqrt{3}$
b) as raízes cúbicas de $-27i$
c) as raízes quartas de -16

5.16) Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^3 + 8i = 0$ b) $x^6 - 1 = 0$

5.17) Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$
b) $x^2 - 2ix - \frac{9}{4} - 3i = 0$ (Utilize a fórmula fornecida no exercício 5.14.)

5.18) Uma das raízes cúbicas de um número complexo **z** é 8. Determine as outras raízes cúbicas de **z**.

5.19) O número $\omega = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ é uma das raízes quartas de um número complexo **z**. Determine as demais raízes quartas de **z**.

5.20) Uma das raízes sextas de **z** tem módulo 2 e argumento $\frac{5\pi}{6}$. Represente graficamente as seis raízes sextas de **z**.

Exercícios Suplementares

I.1) Determine a soma dos reais **x** e **y** para os quais $x^2 + y^2 + 5i = 13 + xyi$.

I.2) Sendo $z = (\text{tg}\,\alpha + i)(\text{cotg}\,\alpha + i)$, determine $R_e(z)$ e $I_m(z)$.

I.3) Determine o número complexo **z** tal que $z^2 = i\bar{z}$.

I.4) Sejam **a**, **b**, **c** e **d** reais não nulos. Mostre que a equação $x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$ não admite um número real e um imaginário puro simultaneamente como raízes.

I.5) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:

$$i^{5^n} = i, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

I.6) Sendo **z** e ω números complexos tais que $z^2 - \omega^2 = 6$ e $\bar{z} + \bar{\omega} = 1 - i$, determine $z - \omega$.

I.7) Os números complexos distintos $b + ai$ e $a + bi$, com $a \cdot b \neq 0$, têm por afixos os pontos **A** e **B**, respectivamente. Determine o complexo cujo afixo é a extremidade do vetor que se obtém fazendo o vetor $\overrightarrow{AB}$ girar de 270° em torno de **A**, no sentido trigonométrico positivo.

I.8) Represente graficamente os números complexos **z** tais que:

$$\begin{cases} 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

I.9) Sendo $\omega = 1 - 2i$, represente graficamente os números complexos **z** tais que o produto ωz seja:

a) real
b) real positivo
c) imaginário puro
d) imaginário puro de coeficiente negativo

I.10) a) Determine o complexo **z** tal que $iz + 2\bar{z} + 3 + 3i = 0$.
b) Determine o módulo e o argumento de **z**.
c) Determine a potência de expoente 16 desse complexo.
d) Represente graficamente as raízes oitavas do complexo $17 + z - i$.

PARTE II

Capítulo 6

O conceito de polinômio Igualdade

6.1 — O CONCEITO

Um **polinômio na variável ou indeterminada** x é uma expressão da forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

onde os **coeficientes** $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números complexos; às parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$, chamamos **termos** do polinômio p(x); e a_0 é o seu **termo independente**.

Exemplos

1.º) Seja $p(x) = 4 + \sqrt{2}x + ix^2$; temos $a_0 = 4$, $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = i$.
2.º) No polinômio $f(x) = 3x + 5x^3$, temos $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 5$.

6.2 — VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Sejam o polinômio:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

e o número complexo α.

Chama-se **valor numérico do polinômio p(x) em** α ao número $p(\alpha)$ que se obtém substituindo-se, em p(x), x por α, e efetuando-se as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$$

Em particular, se para o número complexo α tem-se $p(\alpha) = 0$, diz-se que α é uma **raiz** ou um **zero** do polinômio p(x).

Exemplos

Seja $g(x) = 2 - 3x + x^2$; temos:

$$g(1) = 2 - 3 \cdot (1) + (1)^2 = 0$$
$$g(0) = 2 - 3 \cdot (0) + (0)^2 = 2$$
$$g(-1) = 2 - 3 \cdot (-1) + (-1)^2 = 6$$

Observe que o número 1 é uma raiz de $g(x)$, pois $g(1) = 0$.

6.3 — DEFINIÇÃO — POLINÔMIO NULO

Denominamos **nulo** (ou **identicamente nulo**) a um polinômio $p(x)$ quando seu valor numérico é *zero* em todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, e indicamos:

$$p(x) = 0 \text{ ou } p(x) \equiv 0$$

Podemos, então, escrever:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$$

6.4 — QUANDO UM POLINÔMIO É NULO — TEOREMA

O polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é **nulo** se e somente se todos os seus coeficientes forem iguais a zero:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0)$$

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Tese: $p(x) = 0$

Por hipótese, temos:

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$$

E, para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$p(\alpha) = 0 + 0\alpha + 0\alpha^2 + \ldots + 0\alpha^n = 0$$

o que demonstra a 1.ª parte.

2.ª parte

Hipótese: $p(x) = 0$

Tese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Se $p(x)$ é **nulo** o seu valor numérico é **zero** em todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sejam, então, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n + 1$ números complexos, distintos dois a dois; temos:

$$\begin{array}{l} p(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \ldots + a_n\alpha_0^n = 0 \\ p(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_n\alpha_1^n = 0 \\ p(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_n\alpha_2^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \ldots + a_n\alpha_n^n = 0 \end{array}$$

As equações acima constituem um **sistema linear homogêneo**, formado por $n + 1$ *equações* e $n + 1$ *incógnitas*: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. A matriz incompleta do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

Note que A é uma matriz de **Vandermonde** e $\det A \neq 0$, pois os elementos de base da matriz são dois a dois distintos. (Veja volume 4 desta coleção, p. 121.) Daí podemos concluir que a única solução do sistema é a **trivial**:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

o que demonstra a 2.ª parte. (Veja volume 4 desta coleção, p. 176.)

6.5 — DEFINIÇÃO — POLINÔMIOS IGUAIS

Os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dizem-se **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem o mesmo valor numérico em qualquer α, $\alpha \in \mathbb{C}$. Indica-se:

$$\boxed{p(x) = q(x) \text{ ou } p(x) \equiv q(x)}$$

Podemos, então, escrever:

$$\boxed{p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha), \text{ para todo } \alpha, \alpha \in \mathbb{C}}$$

6.6 — QUANDO POLINÔMIOS SÃO IGUAIS — TEOREMA

Os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

são **iguais** se e somente se os seus coeficientes forem *ordenadamente iguais*:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow (a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n)$$

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$

Tese: $p(x) = q(x)$

Para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, temos:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n \underset{\text{H}}{=} b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_n\alpha^n = q(\alpha)$$

2.ª parte

Hipótese: $p(x) = q(x)$

Tese: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$

Se $p(x) = q(x)$, por hipótese, a definição 6.5 permite-nos escrever para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$p(\alpha) = q(\alpha)$$

Então:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_n\alpha^n$$

e daí:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \ldots + (a_n - b_n)\alpha^n = 0,\ \forall\alpha$$

A igualdade acima, **válida para todo** α, garante-nos que o polinômio:

$$h(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n$$

é **nulo**. (Veja definição 6.3.)

Então, pelo teorema 6.4, temos:

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$$

e daí a tese:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$$

Exercícios Resolvidos

6.1) Seja o polinômio $f(x) = 1 + x + x^3$; determine: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f[f(3)]$, $f(x-1)$ e $f(3x)$.

Solução

$$f(-2) = 1 + (-2) + (-2)^3 = -9$$
$$f(0) = 1 + 0 + 0^3 = 1$$
$$f(1) = 1 + 1 + 1^3 = 3$$
$$f(3) = 1 + 3 + 3^3 = 31, \text{ e daí } f[f(3)] = f(31) = 1 + 31 + 31^3 = 29\,823$$
$$f(x-1) = 1 + (x-1) + (x-1)^3 = -1 + 4x - 3x^2 + x^3$$
$$f(3x) = 1 + (3x) + (3x)^3 = 1 + 3x + 27x^3$$

6.2) Consideremos o polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. O que representam $P(1)$ e $P(0)$ em relação aos coeficientes?

Solução

Temos:

$$P(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \ldots + a_n \cdot 1^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Então, $P(1)$ é a *soma dos coeficientes* de $P(x)$.

$$P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n = a_0$$

Então, $P(0)$ é o *termo independente* de $P(x)$.

6.3) Dado o polinômio na variável **x**: $P(x) = pq + qx + px^2 + x^3$, determine **p** e **q** para que se tenha $P(1) = 2 \cdot P(-1) = 12$.

Solução

$$P(1) = 12 \Rightarrow pq + q \cdot (1) + p \cdot (1)^2 + (1)^3 = 12 \Rightarrow pq + q + p + 1 = 12 \quad \text{(I)}$$
$$2 \cdot P(-1) = 12 \Rightarrow P(-1) = 6 \Rightarrow pq + q(-1) + p(-1)^2 + (-1)^3 = 6 \Rightarrow pq - q + p - 1 = 6 \quad \text{(II)}$$

Subtraindo membro a membro, (I)-(II), obtemos:

$$2q + 2 = 6$$

Logo: $q = 2$

Substituindo em (II): $2p - 2 + p - 1 = 6$, obtemos $p = 3$.

6.4) O polinômio na indeterminada **x**, $f(x) = -(2c-3) + (b+2)x + (a-1)x^3$, é **identicamente nulo**. Determine **a**, **b** e **c**.

Solução

Os coeficientes de $f(x)$ devem ser nulos; então:

$$\begin{cases} -(2c-3) = 0 \\ b + 2 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Daí, temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = \dfrac{3}{2}$

Observe que o termo em x^2 foi omitido, pois o seu *coeficiente é igual a zero.*

6.5) Sejam os polinômios:

$$A(x) = 3 - bx + 2x^2 + (a - 1)x^3$$
$$B(x) = 3 + cx + bx^2$$

Determine **a**, **b** e **c** para que se tenha $A(x) \equiv B(x)$.

Solução

Os coeficientes de $A(x)$ e de $B(x)$ devem ser dois a dois iguais:

$$\begin{cases} -b = c \\ 2 = b \\ 0 = a - 1 \end{cases}$$

Então, temos: $a = 1$, $b = 2$ e $c = -2$.

Exercícios Propostos

6.6) Dado o polinômio $f(x) = 10 - 8x + 6x^2 - 4x^3 + x^5$, calcule $f(2)$.

6.7) Dado o polinômio $f(x) = -1 + 5ix - 4x^2 - 3ix^3 + x^4$, calcule $f(1 + 2i)$.

6.8) Verifique se o número 2 é uma raiz do polinômio: $p(x) = -8 + 4x - 2x^2 + 7x^3 - 5x^4 + x^5$.

6.9) O polinômio na variável **x**:

$$f(x) = (a + 2b - c - 3) + (2a - b + 3c + 4)x^2 + (3a - 2b + 3c + 1)x^3$$

é identicamente nulo. Determine **a**, **b** e **c**.

6.10) Determine α e β, sabendo-se que $\alpha + \beta x + x^2 = \beta - (\beta + 1)x + x^2$.

6.11) Quais são os coeficientes a_i no polinômio $-1 + x^{100}$?

6.12) Seja o polinômio $f(x) = b + ax + x^3$. Determine **a** e **b**, sabendo que 1 e -1 são raízes de $f(x)$.

6.13) Seja o polinômio $f(x) = \dfrac{b}{2}x^2 + \dfrac{a}{3}x^3$, onde **a** e **b** são números reais e $a \neq 0$. Se x_1 e x_2 são números reais distintos, tais que $f(x_1) + f(x_2) = 2 \cdot f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$, demonstre que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

Capítulo 7

Operações com os polinômios Grau

7.1 — ADIÇÃO DE POLINÔMIOS

Definição

Sejam os polinômios na variável **x**:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Denomina-se **soma** de p(x) e q(x) ao polinômio:

$$\boxed{p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n}$$

Exemplo

Sejam os polinômios:

$$p(x) = 2 + x - x^2$$
$$q(x) = 3 + x^2 + 2x^3$$

Temos:

$$p(x) = 2 + x - x^2 + 0x^3$$
$$q(x) = 3 + 0x + x^2 + 2x^3$$

Então:

$$p(x) + q(x) = (2 + 3) + (1 + 0)x + (-1 + 1)x^2 + (0 + 2)x^3$$
$$p(x) + q(x) = 5 + x + 2x^3$$

Propriedades da adição de polinômios

No conjunto dos polinômios com uma indeterminada **x**, de coeficientes complexos, valem as propriedades:

1.ª) A adição de polinômios é **comutativa**.

Para os polinômios p(x) e q(x) temos:

$$\boxed{p(x) + q(x) = q(x) + p(x)}$$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

Observe que $p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$ e $q(x) + p(x) = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i)x^i$.

Então:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i)x^i = q(x) + p(x)$$

2.ª) A adição de polinômios é **associativa**.

Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$\boxed{[p(x) + q(x)] + h(x) = p(x) + [q(x) + h(x)]}$$

Demonstração

Sejam os polinômios: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$ e $h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_ix^i$.

$$[p(x) + q(x)] + h(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i = \sum_{i=0}^{n} [(a_i + b_i) + c_i]x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [a_i + (b_i + c_i)]x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i)x^i =$$

$$= p(x) + [q(x) + h(x)]$$

3.ª) **Existe o elemento neutro**.

Dado o polinômio p(x), existe um polinômio e(x) tal que:

$$\boxed{p(x) + e(x) = p(x)}$$

De fato, sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ e $e(x) = \sum_{i=0}^{n} e_ix^i$; então, da igualdade $p(x) + e(x) = p(x)$, obtemos, para todo **i**, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$a_i + e_i = a_i$$

isto é, $e_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Concluímos que *o elemento neutro na adição de polinômios é o polinômio nulo.*

4.ª) **Existe o polinômio oposto.**

Dado o polinômio $p(x)$, existe um polinômio $\overline{p}(x)$ tal que:

$$\boxed{p(x) + \overline{p}(x) = e(x)}$$

De fato, sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i x^i$; então, da igualdade $p(x) + \overline{p}(x) = e(x)$, obtemos, para todo **i**, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$a_i + \overline{a}_i = 0$$

isto é, $\overline{a}_i = -a_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Então, dado o polinômio:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

o **polinômio oposto** de $p(x)$ é:

$$\boxed{\overline{p}(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \ldots + (-a_n)x^n}$$

O polinômio oposto de $p(x)$ indica-se com:

$$\boxed{-p(x)}$$

Note que $-(-p(x)) = p(x)$.

Exemplo

Seja $p(x) = 3 + 4x^2 - 3x^3$; então, $-p(x) = -3 - 4x^2 + 3x^3$.

Definição

Sejam os polinômios $p(x)$ e $q(x)$. A **diferença** $p(x) - q(x)$ define-se por:

$$\boxed{p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))}$$

Observe que se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$, então:

$$p(x) - q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n$$

7.2 — MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

Definição

Nos cursos elementares de Álgebra, o processo para se multiplicar dois polinômios é constituído essencialmente por duas etapas.

Inicialmente, todos os pares de **termos**, um em cada polinômio, são multiplicados, utilizando-se a regra:

$$(ax^m) \cdot (bx^n) = (ab)x^{m+n}$$

Em seguida, os coeficientes de iguais potências de **x** são somados:

$$ax^p + bx^p = (a + b)x^p$$

Por exemplo, para multiplicarmos os polinômios:

$$p(x) = 2 + x - 2x^2 + x^3$$

e

$$q(x) = 3 - 2x + x^2$$

usamos o processo familiar:

$$\begin{array}{lrrrrrr}
 & 2\ + & x\ - & 2x^2\ + & x^3 & & \\
 & 3\ - & 2x\ + & x^2 & & & \\
\hline
3 \cdot p(x) \longrightarrow & 6\ + & 3x\ - & 6x^2\ + & 3x^3 & & \\
(-2x) \cdot p(x) \longrightarrow & & -\ 4x\ - & 2x^2\ + & 4x^3\ - & 2x^4 & \\
(x^2) \cdot p(x) \longrightarrow & & & 2x^2\ + & x^3\ - & 2x^4\ + & x^5 \\
\hline
 & 6\ - & x\ - & 6x^2\ + & 8x^3\ - & 4x^4\ + & x^5
\end{array} \quad \oplus$$

ou usamos o seguinte processo:

$$(2 + x - 2x^2 + x^3) \cdot (3 - 2x + x^2) =$$

$$= 2 \cdot (3 - 2x + x^2) + x(3 - 2x + x^2) - 2x^2 \cdot (3 - 2x + x^2) + x^3(3 - 2x + x^2) =$$

$$= 6 - 4x + 2x^2 + 3x - 2x^2 + x^3 - 6x^2 + 4x^3 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^4 + x^5 =$$

$$= 6 - x - 6x^2 + 8x^3 - 4x^4 + x^5$$

Não é conveniente definirmos a multiplicação de polinômios usando a descrição dos processos acima. Daremos uma definição em termos gerais; mas, na prática, utilizaremos um dos métodos anteriores.

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

na variável **x** com coeficientes em $\mathbb{C}$.

O produto de p(x) e q(x) é o polinômio:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ (a_mb_n)x^{m+n}.$$

O coeficiente de $\mathbf{x}^i$ no produto $p(x) \cdot q(x)$ é o número:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0 = \sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$$

quando $a_j = 0$, se $j > m$, e $b_k = 0$, se $k > n$.

Propriedades da multiplicação de polinômios

No conjunto dos polinômios com uma indeterminada **x**, de coeficientes complexos, valem as propriedades:

1.ª) A multiplicação de polinômios é **comutativa**.

Para os polinômios p(x) e q(x) temos:

$$\boxed{p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)}$$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

O coeficiente de $\mathbf{x}^i$ no produto $p(x) \cdot q(x)$ é:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$$

e o coeficiente de $\mathbf{x}^i$ no produto $q(x) \cdot p(x)$ é:

$$b_0a_i + b_1a_{i-1} + \dots + b_{i-1}a_1 + b_ia_0$$

Mas, em $\mathbb{C}$, a adição e a multiplicação são comutativas; daí podemos concluir que os coeficientes calculados são iguais para todo **i**. Então, $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$.

2.ª) A multiplicação de polinômios é **associativa**.

Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$\boxed{[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]}$$

Demonstração

Veja o exercício 7.25.

3.ª) **Existe o elemento neutro**

Dado o polinômio p(x), existe um polinômio e(x) tal que:

$$\boxed{p(x) \cdot e(x) = p(x)}$$

Tomemos $e(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \ldots + e_nx^n$, no qual $a_0 = 1$ e $e_i = 0$ para $i \geqslant 1$. Verifica-se imediatamente que:

$$p(x) \cdot e(x) = p(x)$$

para todo polinômio p(x).

4.ª) **Distributividade**.

Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$\boxed{[p(x) + q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)}$$

Demonstração

Veja o exercício 7.26.

7.3 — GRAU DE UM POLINÔMIO

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$. Suponha que p(x) não é um polinômio nulo.

O **grau** de p(x) é o maior inteiro não negativo **n**, tal que $a_n \neq 0$.

O coeficiente $\mathbf{a_n}$ é chamado coeficiente dominante de p(x).

Exemplos

O grau do polinômio $3 + 0x$ é zero.

O grau do polinômio $2 + (-3x)$ é 1.

O grau do polinômio $3 + 2x - 4x^3$ é 3.

Os polinômios de grau zero são polinômios constantes, não nulos; os polinômios de grau 1 são os polinômios da forma $a + bx$, com $b \neq 0$; os polinômios de grau 2 são os polinômios da forma $a + bx + cx^2$, com $c \neq 0$, etc. **Não se define grau para o polinômio nulo**.

É comum indicarmos o grau de um polinômio não nulo p(x) por:

$$\boxed{gr\,[p(x)] \text{ ou } \partial p(x)}$$

Por exemplo:

$$gr\,[3 + 2x - 4x^3 + 0x^4] = 3$$
$$gr\,[x^{10}] = 10$$
$$gr\left[\frac{1}{5}\right] = 0$$

Se o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e se $gr\,[p(x)] = n$, então é óbvio que podemos escrever:

$$\boxed{p(x) = a_nx^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}$$

onde $a_n \neq 0$.

Por outro lado, se $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, então $gr\,[p(x)] = n$.

Teorema

Sejam p(x) e q(x) polinômios na variável **x**, não nulos, com coeficientes em $\mathbb{C}$; então:

a) $gr\,[p(x) \cdot q(x)] = gr\,[p(x)] + gr[q(x)]$
b) se $p(x) + q(x) \neq 0$, então $gr\,[p(x) + q(x)] \leqslant \text{máx.}\,\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$
c) se $gr\,[p(x)] \neq gr\,[q(x)]$, então $gr\,[p(x) + q(x)] = \text{máx.}\,\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$q(x) = b_mx^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_0$$

onde $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, isto é:

$$gr\,[p(x)] = n \text{ e } gr\,[q(x)] = m$$

Assim:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_nb_m)x^{n+m} + (a_{n-1}\,b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} + \ldots + a_0b_0$$

Em $\mathbb{C}$, se $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então $a_n \cdot b_m \neq 0$; daí:

$$gr\,[p(x) \cdot q(x)] = n + m = gr\,[p(x)] + gr\,[q(x)]$$

Para provarmos *b* e *c*, suponhamos inicialmente que $n > m$; podemos escrever:

$$q(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + b_m x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_0$$

Daí:

$$p(x) + q(x) = a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + (a_m + b_m)x^m + \\ + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

Então: $gr\,[p(x) + q(x)] = n = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$.
De forma análoga, se $n < m$, concluímos que:

$$gr\,[p(x) + q(x)] = m = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$$

Observe que fica provado *c*.
Para completarmos a demonstração de *b*, devemos examinar o caso $n = m$; assim:

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

Se $p(x) + q(x) \neq 0$, então $a_k + b_k \neq 0$ para algum $\mathbf{k}$, $0 \geqslant k \geqslant n$.
Portanto, fica claro que:

$$gr[p(x) + q(x)] \leqslant n = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$$

Exemplos

Sejam os polinômios:

$$p(x) = 2x^3 + x + 2$$
$$q(x) = x^2 + 2x + 2$$

$\partial\,[p(x)] = 3$, $\partial\,[q(x)] = 2$; $\partial\,[p(x) + q(x)] = 3 = \text{máx.}\ \{\partial\,[p(x)];\ \partial\,[q(x)]\}$
$\partial\,[p(x) \cdot q(x)] = 3 + 2 = 5$

Exercícios Resolvidos

7.1) Determine os números reais **A**, **B** e **C** para que se tenha: $2x^2 - x + 1 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1) + C$.

Solução

Temos, sucessivamente:

$$2x^2 - x + 1 \equiv A(x-1)(x-1) + B(x-1) + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1) + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C$$

Os coeficientes de **polinômios iguais** (ou **idênticos**) são ordenadamente iguais:

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - 2A = -1 \\ A - B + C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $A = 2$, $B = 3$ e $C = 2$.

7.2) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva o problema: "determinar **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1$ seja um **quadrado perfeito**".

Solução

Se f(x) é **quadrado perfeito**, existe um polinômio g(x) tal que:

$$f(x) \equiv [g(x)]^2$$

Observe que se f(x) tem grau 4, então g(x) é um polinômio de grau 2; isto é, g(x) é da *forma*:

$$g(x) = px^2 + qx + r$$

Então:

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1 \equiv (px^2 + qx + r)^2$$
$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1 \equiv p^2x^4 + 2pqx^3 + (q^2 + 2pr)x^2 + 2qrx + r^2$$

Daí:

$$\begin{cases} p^2 = 1 \\ 2pq = -6 \\ a = q^2 + 2pr \\ b = 2qr \\ r^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos: $a = 11$, $b = -6$ ou $a = 7$, $b = 6$.

7.3) Determine um polinômio f(x), do segundo grau, para o qual tem-se:

$$\begin{cases} f(x) - f(x-1) \equiv x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Em seguida, deduza que a soma dos **n** primeiros inteiros positivos é igual a $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Solução

O polinômio f(x), do 2.º grau, é da *forma*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

De $f(0) = 0$, obtemos $c = 0$; então, temos sucessivamente:

$$f(x) - f(x-1) \equiv x$$
$$(ax^2 + bx) - \underbrace{[a(x-1)^2 + b(x-1)]}_{\substack{f(x-1):\text{ em } f(x),\ \mathbf{x} \text{ é} \\ \text{substituído por } x-1}} \equiv x$$

$$ax^2 + bx - ax^2 + 2ax - a - bx + b \equiv x$$
$$2ax + b - a \equiv x$$

Daí:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

e, portanto: $a = b = \dfrac{1}{2}$.

O polinômio f(x) está determinado: $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

Na igualdade $f(x) - f(x-1) \equiv x$, substituindo **x** por 1, 2, 3, ..., n, obtemos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} &f(1) - f(0) = 1 \\ &f(2) - f(1) = 2 \\ &f(3) - f(2) = 3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f(n) - f(n-1) = n \end{aligned}$$

E, somando-se membro a membro as igualdades acima:

$$f(n) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Sendo $f(n) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $f(0) = 0$, temos:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7.4) No conjunto dos polinômios de coeficientes reais, o polinômio do segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é um **quadrado perfeito** se e somente se $a > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Solução

1.ª parte

Hipótese: $a > 0$ e $\Delta = 0$.
Tese: f(x) é um quadrado perfeito.

Para o polinômio f(x) temos, sucessivamente:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$ (Veja volume 1 desta coleção, p. 102.)

Sendo $a > 0$, existe $\sqrt{a}$ em $\mathbb{R}$, e como $\Delta = 0$, podemos escrever:

$$f(x) = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

e daí:

$$f(x) = \left[\sqrt{a} \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

o que demonstra que f(x) é um quadrado perfeito.

2.ª parte

Hipótese: f(x) é um quadrado perfeito.
Tese: $a > 0$ e $\Delta = 0$.

Se f(x) é quadrado perfeito, existe um polinômio do primeiro grau g(x) tal que:

$$f(x) = [g(x)]^2$$

E, sendo g(x) da forma $px + q$, $p \neq 0$, temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv (px + q)^2$$
$$ax^2 + bx + c \equiv p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

e daí:

$$\begin{cases} a = p^2 \\ b = 2pq \\ c = q^2 \end{cases}$$

Da igualdade $a = p^2$, $p \neq 0$, concluímos que $a > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2pq)^2 - 4 \cdot p^2 \cdot q^2 = 4p^2q^2 - 4p^2q^2 = 0$$

7.5) Determine o grau do polinômio na variável **x**: $p(x) = (a^2 - 3a + 2)x^3 + (a - 1)x + a - 2$.

Solução

Se $a^2 - 3a + 2 \neq 0$, isto é, $a \neq 1$ e $a \neq 2$: $\partial[p(x)] = 3$.
Se $a^2 - 3a + 2 = 0$, isto é, $a = 1$ ou $a = 2$, temos:

$$p(x) = -3 \quad \text{e} \quad \partial[p(x)] = 0 \quad (\text{para } a = 1)$$
$$p(x) = x \quad \text{e} \quad \partial[p(x)] = 1 \quad (\text{para } a = 2)$$

7.6) Definimos uma **fração racional** na variável **x** como o *quociente formal*:

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}}$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$ e q(x) não é polinômio nulo.

Para as **frações racionais** $\frac{p(x)}{q(x)}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$, definimos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow p(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot q(x)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot q(x)}{q(x) \cdot g(x)}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot f(x)}{q(x) \cdot g(x)}$$

Problema: Demonstre que a **fração racional**, não nula:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

é independente de **x** se e somente se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (supondo $a' \neq 0$, $b' \neq 0$ e $c' \neq 0$).

Solução

1.ª parte

Hipótese: a fração $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ é independente de **x**, isto é, a fração é igual (idêntica) a um **polinômio constante** de grau zero:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv k$$

Tese: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Da hipótese temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv ka'x^2 + kb'x + kc'$$

e daí:

$$a = ka'$$
$$b = kb'$$
$$c = kc'$$

Então:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

2.ª parte

Hipótese: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

Tese: $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c''} \equiv k$

Da hipótese temos:

$$a = ka'$$
$$b = kb'$$
$$c = kc'$$

e daí:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv \frac{ka'x^2 + kb'x + kc'}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv \frac{k(a'x^2 + b'x + c')}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv k$$

7.7) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

Solução

Temos, sucessivamente:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{(A + B)x - 3A - 2B}{x^2 - 5x + 6}$$

$$3x - 1 \equiv (A + B)x - 3A - 2B$$

E, então:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -3A - 2B = -1 \end{cases}$$

Obtemos: $A = -5$ e $B = 8$.

Exercícios Propostos

7.8) Dados os polinômios:

$$A(x) = x$$
$$B(x) = x + x^3$$
$$C(x) = x + x^3 + x^5$$
$$P(x) = 3x^5 - 6x^3 + 2x$$

determine os números **a**, **b** e **c** para que se tenha:

$$P(x) \equiv a \cdot A(x) + b \cdot B(x) + c \cdot C(x)$$

7.9) Efetue as multiplicações:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

7.10) Um polinômio P(x) é tal que:

$$P(x) + x \cdot P(2 - x) \equiv x^2 + 3$$

a) Determine P(0), P(1) e P(2).
b) Verifique que o grau de P(x) é 1.

7.11) O grau dos polinômios f(x), g(x) e h(x) é 3. O grau do polinômio, não nulo, $f(x) \cdot [g(x) + h(x)]$ é **n**. Quais são os possíveis valores de **n**?

7.12) Determine **b**, **c** e **d** para que se tenha: $(x + c)^3 + b(x + d) \equiv x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

7.13) Seja o polinômio na indeterminada **x**:

$$f(x) = (x - a)^2 (b - c) + (x - b)^2 (c - a) + (x - c)^2 (a - b) + (b - c)(c - a)(a - b)$$

Verifique que $f(x) \equiv 0$.

7.14) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva o problema: "determinar **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ seja um *cubo perfeito*".

7.15) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva os problemas:

1.º) "dar a condição para que o polinômio $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$, onde $aa'bb' \neq 0$, seja um *quadrado perfeito*";
2.º) "mostrar que se $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ e $(a + cx)^2 + (a' + c'x)^2$ são *quadrados perfeitos*, então, $(b + cx)^2 + (b' + c'x)$ também o é".

7.16) Qual é a progressão aritmética na qual a soma dos **n** primeiros termos é $\frac{n^2}{2}$ para todo **n**?

7.17) Determine um polinômio de grau 3, para o qual se tem:

$$g(x) - g(x - 1) \equiv x^2 \text{ e } g(0) = 0$$

Em seguida, deduza que a soma dos quadrados dos **n** primeiros inteiros positivos é igual a $\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

7.18) Determine um polinômio f(x), de grau 3, tal que:

$$P(x) \equiv P(x - 1) + x(x - 1) \text{ e } P(0) = 0.$$

Em seguida, deduza a igualdade: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n - 1)n = \frac{n(n^2 - 1)}{3}$.

7.19) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, determine todos os polinômios f(x), de grau 2, tal que:

$$f(x^2) \equiv k \cdot f(x) \cdot f(-x), \quad k \in \mathbb{R}^*$$

7.20) Determine **p** e **q** para que se tenha: $x^2 + px + q \equiv (x - p)(x - q)$.

7.21) Determine **A**, **B**, **C** e **D** para que se tenha:

$$x^3 \equiv A(x - 1)(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1) + D$$

7.22) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{x}{x^3 + 1} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

7.23) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{1}{x(x + 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{x(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)(x + 2)}$$

Em seguida, deduza a igualdade:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)}\right]$$

7.24) Mostre que se p(x) e q(x) não são nulos, então o produto $p(x) \cdot q(x)$ também não é nulo, isto é:

$$(p(x) \neq 0 \text{ e } q(x) \neq 0) \Rightarrow p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

7.25) Demonstre que a multiplicação de polinômios é associativa.

7.26) Demonstre que para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$[p(x) + q(x)] \cdot h(x) \equiv p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$$

7.27) Seja a igualdade entre polinômios:

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}.$$

Determine a soma $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$.

Capítulo 8

A divisão de polinômios

8.1 — DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema

Dados um polinômio **qualquer** A(x) e um polinômio B(x), **não nulo**, **existe um e um só par de polinômios**, Q(x) e R(x), tal que:

$$\begin{array}{l} \text{I) } A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \text{II) } gr[R(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{array}$$

Efetuar a divisão de A(x) por B(x) é determinar o par de polinômios Q(x) e R(x), satisfazendo as condições acima; A(x) é o **dividendo**, B(x) é o **divisor**, Q(x) é o **quociente** e R(x) é o **resto** na divisão.

Demonstração (opcional)

1.ª parte: *existência de uma solução*

Inicialmente observe que se $A(x) \equiv 0$ ou se $gr[A(x)] < gr[B(x)]$ existe, visivelmente, a solução $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv A(x)$, satisfazendo as condições I e II.

Suponhamos, então, A(x) não nulo e gr[A(x)] $\geqslant$ g[B(x)].

Sejam:

$$\begin{array}{l} A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0 \\ B(x) = b_0 x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0 \end{array}$$

onde $n \geqslant m$.

Construamos o polinômio:

$$R_1(x) = A(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \qquad (1)$$

onde:

$gr[R_1(x)] < gr[A(x)]$, pois há o *cancelamento* de pelo menos $a^n x^n$.

Se $gr[R_1(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) = \frac{a_n}{a_m} x^{n-m}$ e $R_1(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_1(x)] \geqslant gr[B(x)]$, vamos escrever:

$R_1(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_1 x + c_0$, onde $c_p \neq 0$ e $p \geqslant m$

Construamos:

$$R_2(x) = R_1(x) - \frac{c_p}{b_m} x^{p-m} \cdot B(x) \qquad (2)$$

onde $gr[R_2(x)] < gr[R_1(x)]$.

Se $gr[R_2(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) + Q_2(x)$, onde $Q_2(x) = \frac{c_p}{b_m} x^{p-m}$, e $R_2(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_2(x)] \geqslant gr[B(x)]$, vamos escrever:

$R_2(x) = d_q x^q + d_{q-1} x^{q-1} + \dots + d_1 q + d_0$, onde $d_q \neq 0$ e $q \geqslant m$

Construamos:

$$R_3(x) = R_2(x) - \frac{d_q}{b_m} x^{q-m} \cdot B(x) \qquad (3)$$

onde $gr[R_3(x)] < gr[R_2(x)]$.

Se $gr[R_3(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)$, onde $Q_3(x) = \frac{d_q}{b_m} x^{q-m}$, e $R_3(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_3(x)] \geqslant gr[B(x)]$ o processo continua:

$$R_4(x) = R_3(x) - Q_4(x) \cdot B(x) \qquad (4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - Q_n(x) \cdot B(x) \qquad (\mathbf{n})$$

Os graus $gr[R_i(x)]$ constituem uma seqüência decrescente em $\mathbb{N}$:

$$gr[R_1(x)] > gr[R_2(x)] > \dots > gr[R_n(x)] > \dots$$

Podemos concluir que existe um natural **n** tal que:

$$gr[R_n(x)] < gr[B(x)]$$

Então, somando membro a membro as igualdades de (1) a (**n**), obtemos:

$$R_n(x) \equiv A(x) - B(x)[Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_n(x)]$$

O par $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_n(x)$ e $R(x) = R_n(x)$ respondem à questão proposta.

Observe que se pode ter, na aplicação do processo, algum $R_i(x) \equiv 0$. Neste caso, o par que responde à questão é $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_i(x)$ e $R(x) = R_i(x)$.

2.ª parte: *unicidade*

Demonstremos que o par $Q(x)$ e $R(x)$ obtido é **único**. Suponhamos que existe um outro par $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ que responde à questão.

Então:

$$\begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ gr[R(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q'(x) + R'(x) \\ gr[R'(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R'(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Tem-se:

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) \equiv B(x) \cdot Q'(x) + R'(x)$$

e daí:

$$B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)] \equiv R'(x) - R(x) \qquad \text{(I)}$$

Se os dois membros da igualdade acima **não são nulos** podemos escrever:

$$gr\,\{B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)]\} = gr[R'(x) - R(x)]$$

Note que:

$gr\,\{B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)]\} = gr[B(x)] + gr[Q(x) - Q'(x)] \geqslant gr[B(x)]$ (1)

$gr[R'(x) - R(x)] \leqslant \text{máx.}\{gr[R'(x)];\ gr[R(x)]\} < gr[B(x)]$ (2)

As relações (1) e (2) são incompatíveis. Então, na igualdade (I), os dois membros devem ser nulos; daí, como $B(x)$ não é nulo, obtemos $R(x) = R'(x)$ e $Q(x) = Q'(x)$.

Está estabelecida a unicidade.

Divisibilidade

Se na divisão de $A(x)$ por $B(x)$ obtém-se $R(x) \equiv 0$, diz-se que **$A(x)$ é divisível por $B(x)$** ou que **$B(x)$ é um divisor de $A(x)$**.

Se $B(x)$ é um divisor de $A(x)$, indica-se:

$$\boxed{B(x) \mid A(x)}$$

Na prática o quociente e o resto podem ser obtidos como descrevemos na demonstração da existência do par, dispondo as operações de forma conveniente; é o **método da chave** para se efetuar a divisão.

Exemplos

1.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 3x^5 + 4x^2 + 1$ por $B(x) = x^2 + 2x + 3$. Adotamos a seguinte disposição prática:

$$
\begin{array}{ll|l}
A(x) \longrightarrow & 3x^5 \qquad\qquad + 4x^2 \quad + 1 & x^2 + 2x + 3 \longleftarrow B(x) \\
\cline{3-3}
-Q_1(x) \cdot B(x) \longrightarrow & \underline{-3x^5 - 6x^4 - 9x^3} & 3x^3 - 6x^2 + 3x + 16 \longleftarrow Q(x) \\
R_1(x) \longrightarrow & -6x^4 - 9x^3 + 4x^2 \quad + 1 & \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \\
Q_2(x) \cdot B(x) \longrightarrow & \underline{6x^4 + 12x^3 + 18x^2} & Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad Q_3(x) \quad Q_4(x) \\
R_2(x) \longrightarrow & 3x^3 + 22x^2 \quad + 1 & \\
-Q_3(x) \cdot B(x) \longrightarrow & \underline{-3x^3 - 6x^2 - 9x} & \\
R_3(x) \longrightarrow & 16x^2 - 9x + 1 & \\
-Q_4(x) \cdot B(x) \longrightarrow & \underline{-16x^2 - 32x - 48} & \\
R_4(x) = R(x) \longrightarrow & -41x - 47 &
\end{array}
$$

obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de A(x) pelo termo de maior grau de B(x)

obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_1(x)$ pelo termo de maior grau de B(x)

obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_2(x)$ pelo termo de maior grau de B(x)

obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_3(x)$ pelo termo de maior grau de B(x)

Tem-se, então:

$$\underbrace{3x^5 + 4x^2 + 1}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x^2 + 2x + 3)}_{B(x)}\underbrace{(3x^3 - 6x^2 + 3x + 6)}_{Q(x)}\underbrace{- 41x - 47}_{R(x)}$$

O grau do **resto**, $-41x - 47$, é menor que o grau de B(x).

2.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 2x^4 + 5x^2 - 10x + 1$ por $B(x) = 2x^2 - 5x + 5$.

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
A(x) \rightarrow & 2x^4 & & +5x^2 & -10x & +1 & 2x^2 - 5x + 5 \leftarrow B(x) \\ \cline{7-7}
 & -2x^4 & +5x^3 & -5x^2 & & & x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} \leftarrow Q(x) \\ \cline{2-6}
 & & 5x^3 & & -10x & +1 & \\
 & & -5x^3 & +\frac{25}{2}x^2 & -\frac{25}{2}x & & \\ \cline{3-6}
 & & & \frac{25}{2}x^2 & -\frac{45}{2}x & +1 & \\
 & & & -\frac{25}{2}x^2 & +\frac{125}{4}x & -\frac{125}{4} & \\ \cline{4-6}
 & & R(x) \rightarrow & & \frac{35}{4}x & -\frac{121}{4} &
\end{array}$$

Tem-se, então:

$$2x^4 + 5x^2 - 10x + 1 \equiv (2x^2 - 5x + 5)\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) + \frac{35}{4}x - \frac{121}{4}$$

Observe que o grau do **resto**, $\frac{35}{4}x - \frac{121}{4}$, é menor que o grau de $B(x)$.

3.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 6x^6 - 12x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 13x - 3$ por $2x^2 - 4x + 3$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
6x^6 & -12x^5 & +5x^4 & +14x^3 & -20x^2 & +13x & -3 & 2x^2 - 4x + 3 \\ \cline{8-8}
-6x^6 & +12x^5 & -9x^4 & & & & & 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \\ \cline{1-7}
 & & -4x^4 & +14x^3 & -20x^2 & +13x & -3 & \\
 & & 4x^4 & -8x^3 & +6x^2 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & 6x^3 & -14x^2 & +13x & -3 & \\
 & & & -6x^3 & +12x^2 & -9x & & \\ \cline{4-7}
 & & & & -2x^2 & +4x & -3 & \\
 & & & & 2x^2 & -4x & +3 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

$R(x) \equiv 0$
a divisão é *exata*:
$A(x)$ é *divisível* por $B(x)$

Tem-se, então:

$6x^6 - 12x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 13x - 3 \equiv$
$\equiv (2x^2 - 4x + 3)(3x^4 - 2x^2 + 3x - 1)$ e $R(x) \equiv 0$.

8.2 — MÉTODO DE DESCARTES PARA A DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Na divisão de $A(x)$ por $B(x)$, suponhamos que:

$$gr[A(x)] \geqslant gr[B(x)]$$

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente, o quociente e o resto procurados. Da identidade:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

obtemos:

$$gr[A(x)] = gr[B(x) \cdot Q(x) + R(x)]$$

E, como $gr[R(x)] < gr[B(x)]$ (ou $R(x) \equiv 0$), podemos escrever:

$$gr[A(x)] = gr[B(x) \cdot Q(x)]$$

ou ainda:

$$\boxed{gr[A(x)] = gr[B(x)] + gr[Q(x)]}$$

Para os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ procurados temos:

1) $gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)]$
2) $gr[R(x)] < gr[B(x)]$ (ou $R(x) \equiv 0$)

O **método de Descartes** aplica-se da seguinte forma:

1.º) determinamos o grau de $Q(x)$ e o **máximo grau** que $R(x)$ pode assumir, a partir das relações *1* e *2*, acima;
2.º) escrevemos os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, onde os coeficientes são incógnitas a serem determinadas;
3.º) escrevemos a identidade $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e daí determinamos os coeficientes incógnitos de $Q(x)$ e de $R(x)$.

Exemplos

1.º) Efetuemos a divisão de $A(x) = 8x^3 - 6x + 4$ por $B(x) = x^2 - 2x$ pelo **método de Descartes**.

$$gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)] = 3 - 2 = 1$$

Portanto, $Q(x)$ é da *forma* $ax + b$:

$$gr[R(x)] < gr[B(x)] = 2$$

Então, o máximo valor para gr[R(x)] é 1 (ou $R(x) \equiv 0$). A *forma* de R(x) é $cx + d$.

Da identidade $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, obtemos:

$$8x^3 - 6x + 4 \equiv (x^2 - 2x)(ax + b) + (cx + d)$$
$$8x^3 - 6x + 4 \equiv ax^3 + (-2a + b)x^2 + (c - 2b)x + d$$

Os coeficientes são *ordenadamente iguais*:

$$\begin{cases} a = 8 \\ -2a + b = 0 \\ c - 2b = -6 \\ d = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 8$, $b = 16$, $c = 26$ e $d = 4$; assim:

$$Q(x) = 8x + 16 \text{ e } R(x) = 26x + 4$$

2.º) Vamos dividir o polinômio $A(x) = 12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$ pelo polinômio $3x^2 - 2x + 1$.

$$gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)] = 5 - 2 = 3$$

Portanto, Q(x) é da *forma* $ax^3 + bx^2 + cx + d$:

$$gr[R(x)] < gr[B(x)] = 2$$

Então, o máximo valor para gr[R(x)] é 1 (ou $R(x) \equiv 0$). A *forma* de R(x) é $px + q$.

Podemos escrever:

$$12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x \equiv (3x^2 - 2x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (px + q)$$
$$12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x \equiv 3ax^5 + (3b - 2a)x^4 + (a - 2b)x^3 + $$
$$+ (b - 2c + 3d)x^2 + (c - 2d + p)x + d + q$$

Daí:

$$\begin{cases} 3a = 12 \\ 3b - 2a = -8 \\ a - 2b + 3c = -2 \\ b - 2c + 3d = 4 \\ c - 2d + p = -8 \\ d + q = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$, $b = 0$, $c = -2$, $d = 0$, $p = -6$ e $q = 0$; assim:

$$Q(x) = 4x^3 - 2x$$
$$R(x) = -6x$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Determine os números reais **a** e **b** para que o polinômio $A(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ seja **divisível** por $x^2 - 5x + 1$.

Solução

Efetuando a divisão pelo **método da chave**:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + ax^2 + bx - 3 & x^2 - 5x + 1 \\
\cline{3-3}
 & -2x^3 + 10x^2 - 2x & 2x + (10 + a) \\
\cline{2-2}
 & (10 + a)x^2 + (b - 2)x - 3 & \\
 & -(10 + a)x^2 + (50 + 5a)x - (10 + a) & \\
\cline{2-2}
 & (48 + 5a + b)x - (13 + a) &
\end{array}
$$

Queremos que a divisão seja exata; assim, o resto deve ser **nulo**, isto é:

$$\begin{cases} 48 + 5a + b = 0 \\ -(13 + a) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $a = -13$ e $b = 17$.

Vamos resolver o problema utilizando o **método de Descartes**.

Se a divisão é **exata**, temos $R(x) \equiv 0$, e o quociente $Q(x)$ é da forma $mx + n$, pois $gr[Q(x)] = 3 - 2 = 1$.

Então:

$$2x^3 + ax^2 + bx - 3 \equiv (x^2 - 5x + 1)(mx + n)$$
$$2x^3 + ax^2 + bx - 3 \equiv mx^3 + (n - 5m)x^2 + (m - 5n)x + n$$

Daí:

$$\begin{cases} m = 2 \\ n - 5m = a \\ m - 5n = b \\ n = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = -13$ e $b = 17$.

8.2) Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau **p** e o quociente de grau **q**, qual é o grau máximo que o resto *pode* ter?

Solução

Na divisão de $A(x)$ por $B(x)$ sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto, respectivamente. Temos:

$$gr[A(x)] = gr[B(x)] + gr[Q(x)]$$
$$gr[R(x)] < gr[B(x)]$$

e, então:

$$p = gr[B(x)] + q$$

isto é:

$$gr[B(x)] = p - q$$

Concluímos que:

$$gr[R(x)] < p - q$$

Então, o grau máximo que o resto pode ter é $p - q - 1$.

8.3) Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d**, sabendo que o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ dividido por $x^2 + d$ dá resto $r_1(x) = x$, e dividido por $x^2 - d$ dá resto $r_2(x) = -x$.

Solução

Vamos efetuar a divisão de p(x) por $x^2 + d$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c & x^2 + d \\ \cline{2-2}
-x^4 \qquad - dx^2 & x^2 - x + (a - d) \\ \cline{1-1}
-x^3 + (a - d)x^2 + bx + c & \\
x^3 \qquad\qquad + dx & \\ \cline{1-1}
(a - d)x^2 + (b + d)x + c & \\
-(a - d)x^2 \qquad\qquad - d(a - d) & \\ \cline{1-1}
r_1(x) = (b + d)x + (x + d^2 - ad) &
\end{array}
$$

E, sendo $r_1(x) = x$, obtemos:

$$
\begin{cases} b + d = 1 & (1) \\ c + d^2 - ad = 0 & (2) \end{cases}
$$

Analogamente, na divisão de p(x) por $x^2 - d$, obtemos:

$$r_2(x) = (b - d)x^2 + (c + d^2 + ad)$$

E, sendo $r_2(x) = -x$, temos:

$$
\begin{cases} b - d = -1 & (3) \\ c + d^2 + ad = 0 & (4) \end{cases}
$$

O sistema formado pelas equações (1), (2), (3) e (4) nos dá $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = 1$.

8.4) Verifique que se o polinômio $x^m - a^m$ é **divisível** por $x^p - a^p$, então **m** é **divisível** por **p**, $m > p$ e $a \neq 0$.

Solução

Vamos efetuar a divisão de $x^m - a^m$ por $x^p - a^p$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^m \qquad\qquad\qquad - a^m & x^p - a^p \\ \cline{2-2}
-x^m + a^p x^{m-p} & x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + \ldots \\ \cline{1-1}
a^p x^{m-p} \qquad\qquad - a^m & \\
-a^p x^{m-p} + a^{2p} x^{m-2p} & \\ \cline{1-1}
a^{2p} x^{m-2p} - a^m & \\
\vdots &
\end{array}
$$

Podemos concluir, então, que o quociente na divisão é da *forma*:

$$Q(x) = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + \ldots + a^{(s-1)p} \cdot x^{m-sp}$$

e o resto é da *forma*:

$$R(x) = a^{sp} x^{m-sp} - a^m, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

Devemos ter $R(x) \equiv 0$, isto é:

$$a^{sp} \cdot x^{m-sp} - a^m \equiv 0$$

Como $a \neq 0$, para se ter a identidade acima, necessariamente:

$$m - sp = 0$$

daí: $m = sp$, o que demonstra a propriedade.

8.5) Os polinômios f(x) e g(x) são **divisíveis** pelo polinômio h(x); então, demonstre que o resto r(x), da divisão de f(x) por g(x), também é **divisível** por h(x).

Solução

Se os polinômios f(x) e g(x) são divisíveis por h(x), existem os polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ tais que:

$$f(x) = h(x) \cdot q_1(x)$$
$$g(x) = h(x) \cdot q_2(x)$$

Na divisão de f(x) por g(x) temos:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Temos, sucessivamente:

$$h(x) \cdot q_1(x) = h(x) \cdot q_2(x) \cdot q(x) + r(x)$$
$$r(x) = h(x) \cdot [q_1(x) - q_2(x) \cdot q(x)]$$

A igualdade acima demonstra a propriedade.

8.6) Na divisão de um polinômio p(x) por a(x) o resto é $r_1(x)$; na divisão de p(x) por b(x) o resto é $r_2(x)$; na divisão de p(x) por $a(x) \cdot b(x)$ é r(x).
Demonstre que se r(x) é dividido por a(x), o resto é $r_1(x)$; e se r(x) é dividido por b(x), o resto é $r_2(x)$.

Solução

Da hipótese temos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & a(x) \\ \hline r_1(x) & q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & b(x) \\ \hline r_2(x) & q_2(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & a(x) \cdot b(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

$p(x) = a(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$ (1) $\begin{cases} gr[r_1(x)] < gr[a(x)] \\ \text{ou } r_1(x) \equiv 0 \end{cases}$

$p(x) = b(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$ (2) $\begin{cases} gr[r_2(x)] < gr[b(x)] \\ \text{ou } r_2(x) \equiv 0 \end{cases}$

$p(x) = [a(x) \cdot b(x)] \cdot q(x) + r(x)$ (3) $\begin{cases} gr[r(x)] < gr[a(x) \cdot b(x)] \\ \text{ou } r(x) \equiv 0 \end{cases}$

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$[a(x) \cdot b(x)] \cdot q(x) + r(x) = a(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$
$$r(x) = a(x) \cdot \underbrace{[q_1(x) - b(x) \cdot q(x)]}_{\text{quociente}} + \underbrace{r_1(x)}_{\text{resto}} \qquad (4)$$

e, sendo $gr[r_1(x)] < gr[a(x)]$ ou $r(x) \equiv 0$, a igualdade (4) mostra que se dividirmos r(x) por a(x) o resto é $r_1(x)$.

Analogamente, se substituirmos (3) em (2), concluímos que o resto da divisão de r(x) por b(x) é $r_2(x)$.

8.7) Um polinômio p(x) dividido por $x^2 + x + 1$ dá resto $-x + 1$ e dividido por $x^2 - x + 1$ dá resto $3x + 5$. Qual é o resto da divisão de p(x) por $x^4 + x^2 + 1$?

Solução

Inicialmente, observe que:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

e que o resto procurado, de p(x) por $x^4 + x^2 + 1$, é da forma: $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Temos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & a(x) = x^2 + x + 1 \\ \hline r_1(x) = -x + 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & b(x) = x^2 - x + 1 \\ \hline r_2(x) = 3x + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & \overbrace{x^4 + x^2 + 1}^{a(x) \cdot b(x)} \\ \hline r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & \end{array}$$

Do exercício anterior podemos concluir que se dividirmos $r(x)$ por $a(x) = x^2 + x + 1$ o resto é $r_1(x) = -x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-ax^3 - ax^2 - ax & ax + (b - a) \\ \cline{1-1}
(b - a)x^2 + (c - a)x + d & \\
-(b - a)x^2 - (b - a)x - (b - a) & \\ \cline{1-1}
r_1(x) = (c - b)x + (d - b + a) &
\end{array}$$

e daí: $c - b = -1$ (1) e $d - b + a = 1$ (2).

Analogamente, se dividirmos $r(x)$ por $b(x) = x^2 - x + 1$ o resto é $r_2(x) = 3x + 5$:

$$\begin{array}{r|l}
ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-ax^3 + ax^2 - ax & ax + (b + a) \\ \cline{1-1}
(b + a)x^2 + (c - a)x + d & \\
-(b + a)x^2 + (b + a)x - (b + a) & \\ \cline{1-1}
r_2(x) = (b + c)x + (d - b - a) &
\end{array}$$

e daí: $b + c = 3$ (3) e $d - b - a = 5$ (4).

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (1), (2), (3) e (4) obtemos: $a = -2$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 5$; então:

$$r(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$$

8.8) O polinômio $f(x)$ dividido por $x^4 + x^2 + 1$ dá resto $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Qual é o resto da divisão de $f(x)$ por $x^2 + x + 1$?

Solução

Inicialmente, observe que:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Temos:

$$\begin{array}{l|l}
f(x) & a(x) = x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
r_1(x) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
f(x) & \overbrace{x^4 + x^2 + 1}^{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ \cline{2-2}
r(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 &
\end{array}$$

Do exercício 8.6 concluímos que $r_1(x)$ pode ser obtido dividindo-se $r(x)$ por $a(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 - x \phantom{{}+4} & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^2 + 2x + 4 & \\
-x^2 - x - 1 & \\ \cline{1-1}
x + 3 &
\end{array}$$

Então, o resto procurado é $r_1(x) = x + 3$.

Exercícios Propostos

8.9) Divida o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, nos seguintes casos:

a) $A(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 6$ e $B(x) = x^3 + 2$
b) $A(x) = x^5 + 2x^3 - 6x + 4$ e $B(x) = x^2 + x - 2$
c) $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$
d) $A(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x - 6$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

8.10) Determine **a** e **b** para que o resto da divisão do polinômio $x^5 - 2x^4 + ax^3 - 7x^2 + 3x + b$ pelo polinômio $x^2 + 4$ seja $3x + 2$.

8.11) Determine **a** e **b** para que o polinômio $2x^3 + ax^2 - 10x + b$ seja **divisível** por $x^2 - 3x + 1$.

8.12) Na divisão de um polinômio de grau 5 por um outro de grau **m**, encontrou-se quociente de grau **q** e resto de grau 4. Determine **m** e **q**.

8.13) Seja o polinômio:

$$f(x) = x^4 - (a + 1)x^3 + (a^2 - 4)x^2 + bx + c$$

a) Determine o quociente da divisão de f(x) por $x^2 - x - 2$.
b) Determine **b** e **c**, em função de **a**, para que a divisão seja **exata**.

8.14) Sejam os polinômios:

$$f(x) = x^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$
$$g(x) = x^2 + 2bx + c$$

Se f(x) é **divisível** por g(x), verifique que f(x) é um *cubo perfeito* e g(x) é um *quadrado perfeito*.

8.15) O polinômio a(x) dividido pelo polinômio b(x) dá quociente q(x) e resto r(x); a(x) dividido por $x \cdot b(x)$ dá o mesmo resto r(x). Verifique que $x \mid q(x)$.

8.16) Na divisão de um polinômio A(x) por B(x) o quociente é Q(x) e o resto é R(x). Qual é o quociente e qual é o resto na divisão de A(x) por $2 \cdot B(x)$?

8.17) Determine **m**, **n** e **p** de modo que o resto da divisão do polinômio $6x^4 + mx^2 + nx + p$ pelo polinômio $2x^3 - 4x^2 + 3$ seja $x^2 + 3$.

8.18) Um polinômio f(x), de grau 3, dividido por $x^2 - 1$ dá resto $6x + 2$ e quando dividido por $x^2 + 1$ dá resto $2x + 8$. Determine f(x).

8.19) O polinômio $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 6ax^2 + 4bx + c$ é **divisível** pelo polinômio $g(x) = x^3 + 3mx^2 + 3ax + b$. Verifique que: $a = m^2$, $b = m^3$ e $c = m^4$.

8.20) Determine os números reais **p** e **q**, sabendo que $x^4 + 1$ é **divisível** por $x^2 + px + q$.

8.21) Sejam os polinômios:

$$A(x) = px^3 + (p^2 + q)x^2 + (2pq + r)x + q^2 + s$$
$$B(x) = px^3 + (p^2 - q)x^2 + rx - q^2 + s$$
$$C(x) = x^2 + px + q$$

Mostre que se $C(x) \mid A(x)$, então $C(x) \mid B(x)$.

8.22) Um polinômio P(x) dividido por $x + 1$ dá resto 4; dividido por $x^2 + 1$ dá resto $2x + 3$. Qual é o resto da divisão de P(x) por $(x + 1)(x^2 + 1)$?

8.23) Um polinômio f(x) dividido por $x + 1$ dá resto 2, dividido por $x^2 - x + 1$ dá resto $x - 6$ e dividido por $x^3 + 1$ dá quociente $x + 2$. Determine f(x).

8.24) Determine os reais positivos **a**, **b** e **c**, sabendo que o polinômio $ax^4 + bx^3 + c$ dividido por $x^2 + 1$ dá resto $r_1(x)$, dividido por $x^3 + 1$ dá resto $r_2(x)$, e que $r_1(x) \cdot r_2(x) \equiv 2(x - 1)(x - 5)$.

Capítulo 9

A divisão de polinômios em que o divisor é de grau 1

9.1 — TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio p(x) pelo polinômio x − c é o valor numérico de p(x) em **c**, isto é, o resto é p(c).

Demonstração

Na divisão de p(x) por x − c temos:

$$\begin{cases} p(x) = (x - c)q(x) + r(x) \\ gr[r(x)] < gr[x - c] = 1 \text{ ou } r(x) = 0 \end{cases}$$

A segunda relação garante que r(x) é **constante**: tem grau zero ou é nulo. Para calcular essa constante, substituímos **x** por **c** na primeira relação; temos, sucessivamente:

$$p(x) = (x - c)q(x) + \underbrace{r}_{\text{constante}}$$

$$p(c) = (c - c)q(c) + r$$

$$p(c) = r$$

o que demonstra a propriedade.

Do **teorema do resto**, resulta o teorema de d'Alembert:

Um polinômio p(x) é **divisível** por x − c se e somente se p(c) = 0, isto é, **c** é uma **raiz** de p(x).

É imediato que o **teorema do resto** pode ser ampliado para os divisores x + c, ax − b e ax + b, onde a ≠ 0.

Temos, então, o resultado:

dividendo	divisor	resto
p(x)	$x - c$	$p(c)$
p(x)	$x + c$	$p(-c)$
p(x)	$ax - b$	$p\left(\frac{b}{a}\right)$
p(x)	$ax + b$	$p\left(-\frac{b}{a}\right)$

Exemplos

1.º) O resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ por $x - 1$ é:

$$p(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

2.º) O resto da divisão de $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ por $x + 3$ é:

$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = 0$$

Então, p(x) é **divisível** por $x + 3$; ou ainda: -3 é **raiz** de p(x).

3.º) O resto da divisão de $p(x) = 8x^3 + 2x + 1$ por $2x - 1$ é:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$$

4.º) O resto da divisão de $p(x) = x^2 + 3x - 1$ por $3x + 1$ é:

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{9}$$

9.2 — O DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

Na divisão de um polinômio p(x) pelo polinômio $x - c$, o quociente e o resto podem ser obtidos através de um procedimento muito conveniente, conhecido como **dispositivo de Briot-Ruffini**

A descrição desse dispositivo vem a seguir.

Na divisão do polinômio:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0 \text{ e } n \geq 1$$

pelo polinômio $x - c$, o quociente $q(x)$, de grau $n - 1$, é da forma:

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q_0$$

Vamos aplicar o **método de Descartes** para efetuarmos a divisão de $p(x)$ por $x - c$:

$$\begin{array}{l}
\otimes \begin{cases} q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \ldots + q_1x + q_0 \\ \hfill x - c \end{cases} \\
\hline
q_{n-1}x^n + q_{n-2}x^{n-1} + q_{n-3}x^{n-2} + \ldots + q_1x^2 + q_0x \\
\qquad - cq_{n-1}x^{n-1} - cq_{n-2}x^{n-2} - \ldots - cq_2x^2 - cq_1x - cq_0 \\
\hline
q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - cq_{n-1})x^{n-1} + (q_{n-3} - cq_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (q_1 - cq_2)x^2 + (q_0 - cq_1)x - cq_0
\end{array}$$

A identidade $p(x) \equiv (x - c)q(x) + \overset{\overset{\text{constante}}{\uparrow}}{r}$ nos dá:

$$\begin{aligned}
q_{n-1} &= a_n \\
q_{n-2} - cq_{n-1} &= a_{n-1} \\
q_{n-3} - cq_{n-2} &= a_{n-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_1 - cq_2 &= a_2 \\
q_0 - cq_1 &= a_1 \\
r - cq_0 &= a_0
\end{aligned}$$

E, então:

$$\begin{aligned}
q_{n-1} &= a_n \\
q_{n-2} &= a_{n-1} + cq_{n-1} \\
q_{n-3} &= a_{n-2} + cq_{n-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_1 &= a_2 + cq_2 \\
q_0 &= a_1 + cq_1 \\
r &= a_0 + cq_0
\end{aligned}$$

O cálculo de $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0$ e r, através das igualdades acima, tem natureza *recorrente* e, na prática, pode ser efetuado com a utilização do **dispositivo de Briot-Ruffini**:

$$\begin{array}{c|c|ccccc|c}
 & \boxed{a_n} & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & & a_0 \\
\hline
c & \boxed{a_n} & cq_{n-1} + a_{n-1} & cq_{n-2} + a_{n-2} & \ldots & cq_1 + a_1 & & \underbrace{cq_0 + a_0}_{r} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \ldots & q_0 & &
\end{array}$$

Exemplo

Vamos dividir o polinômio $x^3 - 7x - 6$ por $x - 3$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline 3 & 1 & \underbrace{1 \cdot 3 + 0}_{3} & \underbrace{3 \cdot 3 - 7}_{2} & \underbrace{2 \cdot 3 - 6}_{0} \end{array}$$

O quociente é $q(x) = 1 \cdot x^2 + 3x + 2$ e o resto é $r = 0$.

9.3 — OBSERVAÇÕES SOBRE O DISPOSITIVO

1.ª) Quando o divisor é da forma $x + c$, escrevemos $x + c = x - (-c)$ e aplicamos o dispositivo; por exemplo, vamos dividir o polinômio $p(x) = x^4 + 6x^2 - 3x - 6$ por $x + 1$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & 6 & -3 & -6 \\ \hline -1 & 1 & \underbrace{1 \cdot (-1) + 0}_{-1} & \underbrace{(-1) \cdot (-1) + 6}_{7} & \underbrace{7 \cdot (-1) + (-3)}_{-10} & \underbrace{(-10) \cdot (-1) + (-6)}_{4} \end{array}$$

O quociente é $q(x) = 1 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 10$ e o resto é $r = 4$.

2.ª) Quando o divisor é da forma $ax - b$, onde $a \neq 0$, o **dispositivo de Briot-Ruffini** pode ser usado com pequenas modificações. Temos:

$$p(x) = (ax - b) \cdot q(x) + r$$

e daí:

$$p(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right) \cdot \underbrace{aq(x)}_{q'(x)} + r$$

Dividimos, então, $p(x)$ por $x - \dfrac{b}{a}$, obtendo o quociente $q'(x) = aq(x)$ e o resto **r**.

Observe que, para obtermos $q(x)$, fazemos $q(x) = \dfrac{1}{a} \cdot q'(x)$ e que o resto desejado é o resto **r** obtido.

Por exemplo, vamos dividir o polinômio $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ por $2x - 1$.

Dividimos, então, p(x) por $x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & -6 & 8 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} + 4}_{5} & \underbrace{5 \cdot \frac{1}{2} + (-6)}_{-\frac{7}{2}} & \Big| \underbrace{\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 8}_{\frac{25}{4}} \end{array}$$

O resto encontrado, $r = \frac{25}{4}$, é o resto procurado; os coeficientes do quociente encontrado, $q'(x)$, devem ser divididos por $a = 2$, para se obter $q(x)$:

$$q(x) = \frac{2}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{-\frac{7}{2}}{2}$$

$$q(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}$$

Vamos dividir o polinômio $p(x) = 32x^5 + 243$ por $2x + 3$.

Dividimos, então, p(x) por $x + \frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 243 \\ \hline -\frac{3}{2} & 32 & \underbrace{32 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0}_{-48} & \underbrace{(-48)\left(-\frac{3}{2}\right) + 0}_{72} & \underbrace{72 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0}_{-108} & \underbrace{-108\left(-\frac{3}{2}\right) + 0}_{162} & \Big| \underbrace{162 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 243}_{\text{zero}} \end{array}$$

O resto encontrado é o resto procurado: $r = 0$; os coeficientes do quociente encontrado, $q'(x)$, devem ser divididos por $a = 2$, para se obter $q(x)$:

$$q(x) = \frac{1}{2} \cdot q'(x) = 16x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 54x + 81$$

9.4 – A DIVISIBILIDADE PELO PRODUTO – TEOREMA

> Se um polinômio p(x) é **divisível** (separadamente) por $x - a$ e por $x - b$, $a \neq b$, então p(x) é **divisível** pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$.

Demonstração

Inicialmente, observe que $p(a) = 0$ e que $p(b) = 0$, pois $p(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

Na divisão de $p(x)$ por $(x - a) \cdot (x - b)$ o divisor é de grau 2; então, o resto é da forma $r(x) = mx + n$.

Temos:

$$p(x) = [(x - a)(x - b)] \cdot q(x) + \overbrace{mx + n}^{r(x)}$$

Substituindo **x** por **a** e por **b**, obtemos:

$$p(a) = [(a - a)(a - b)]q(a) + ma + n$$
$$p(b) = [(a - b)(b - b)]q(b) + mb + n$$

e, sendo $p(a) = p(b) = 0$:

$$\begin{cases} ma + n = 0 \\ mb + n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, vem $m = n = 0$, e daí $r(x) \equiv 0$.

Observações

1.ª) É fácil verificar que a recíproca desse teorema é verdadeira, isto é: "se $p(x)$ é **divisível** por $(x - a) \cdot (x - b)$, então $p(x)$ é **divisível** por $x - a$ e é **divisível** por $x - b$".

2.ª) O teorema pode ser generalizado para um número finito de fatores $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, ..., $(x - \ell)$, onde **a**, **b**, **c**, ..., ℓ são distintos dois a dois.

9.5 — A DIVISIBILIDADE POR $(x - c)^m$ — TEOREMA

Um polinômio $p(x)$ é **divisível** por $(x - c)^2$ se e somente se:

1.º) $p(x)$ é **divisível** por $x - c$;
2.º) o quociente $q(x)$, da divisão de $p(x)$ por $x - c$, também é divisível por $x - c$.

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $p(x)$ é **divisível** por $(x - c)^2$.
Tese: $p(x)$ é **divisível** por $x - c$ e $q(x)$ é **divisível** por $x - c$.

Se p(x) é divisível por $(x - c)^2$, podemos escrever:

$$p(x) = (x - c)^2 q'(x)$$
$$p(x) = (x - c)\underbrace{[(x - c)q'(x)]}_{q(x)}$$

A identidade acima mostra que p(x) é divisível por x − c e que o quociente da divisão de p(x) por x − c:

$$q(x) = (x - c)q'(x)$$

também é divisível por x − c.

2.ª parte

Hipótese: p(x) é **divisível** por x − c e q(x) é **divisível** por x − c.
Tese: p(x) é **divisível** por $(x - c)^2$.

Se p(x) é divisível por x − c, podemos escrever:

$$p(x) = (x - c) \cdot q(x)$$

e, se q(x) é divisível por x − c:

$$q(x) = (x - c) \cdot q'(x)$$

Daí:

$$p(x) = (x - c)[(x - c)q'(x)]$$
$$p(x) = (x - c)^2 \cdot q'(x)$$

o que garante que p(x) é divisível por $(x - c)^2$.

Observação: Da mesma forma, pode-se demonstrar que: "um polinômio p(x) é **divisível** por $(x - c)^3$ se e somente se:

1.º) p(x) é **divisível** por x − c;
2.º) o quociente q(x), da divisão de p(x) por x − c, é **divisível** por x − c;
3.º) o quociente q'(x), da divisão de q(x) por x − c, é **divisível** por x − c".

O teorema pode ser generalizado para um divisor da forma $(x - c)^m$.

Exercícios Resolvidos

9.1) Determine **k**, $k \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + kx^2 - 2x + 6$ seja **divisível** por $x + 2$.

Solução

Devemos ter $p(-2) = 0$ (**teorema do resto**):

$$(-2)^4 - 5(-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 2(-2) + 6 = 0$$
$$4k + 66 = 0$$
$$k = -\frac{33}{2}$$

9.2) Determine os valores de **a**, $a \in \mathbb{R}$, sabendo que o resto na divisão de $p(x) = x^3 + x^2 - 5x - a^3 + 6$ por $x - a$ é positivo.

Solução

Devemos ter $p(a) > 0$:

$$a^3 + a^2 - 5a - a^3 + 6 > 0$$
$$a^2 - 5a + 6 > 0$$

e daí: $a < 2$ ou $a > 3$.

9.3) Determine **a** e **b**, no polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, de modo que $f(x) + 1$ seja **divisível** por $x + 1$ e $f(x) - 1$ seja **divisível** por $x - 1$.

Solução

Se o polinômio $f(x) + 1 = x^3 + 2x^2 + ax + b + 1$ é divisível por $x + 1$, tem-se:

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + a(-1) + b + 1 = 0$$

Se o polinômio $f(x) - 1 = x^3 + 2x^2 + ax + b - 1$ é divisível por $x - 1$, tem-se:

$$1^3 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b - 1 = 0$$

Daí, temos o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ a + b = -2 \end{cases}$$

Então, $a = 0$ e $b = -2$.

9.4) Qual deve ser o valor do coeficiente **c** para que os restos das divisões de $p(x) = x^{10} + ax^4 + bx^2 + {}$ $+ cx + d$ por $x + 12$ e por $x - 12$ sejam iguais?

Solução

Deve-se ter: $p(-12) = p(12)$.
Então:

$$(-12)^{10} + a(-12)^4 + b(-12)^2 + c(-12) + d = 12^{10} + a12^4 + b12^2 + 12c + d$$

e daí: $-12c = 12c$ e $c = 0$.

9.5) Determine **m** para que o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4x - m$ seja **divisível** por $2x + 1$. Qual é o quociente na divisão?

Solução

O problema pede o quociente na divisão. Neste caso, a melhor solução é aplicarmos o **dispositivo de Briot-Ruffini**:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 0 & -5 & 4 & -m \\
\hline
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{4} & \frac{51}{8} & \underbrace{-\frac{51}{16} - m}_{\text{zero}}
\end{array}$$

A divisão é exata: $\dfrac{-51}{16} - m = 0$; e daí: $m = \dfrac{-51}{16}$.

O quociente é: $q(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{19}{8}x + \dfrac{51}{16}$.

9.6) Um polinômio $p(x)$ foi dividido pelo polinômio $x - a$. Usando-se o **dispositivo de Briot-Ruffini**, obteve-se o quadro abaixo:

	3	-4	5	d	e
a	b	-10	c	24	40

Determine $p(x)$.

Solução

Observe que no dispositivo temos sucessivamente:

$$\begin{cases} 3 = b \\ b \cdot a - 4 = -10 \\ -10 \cdot a + 5 = c \\ c \cdot a + d = 24 \\ 24 \cdot a + e = 40 \end{cases}$$

Daí: $a = -2$, $b = 3$, $c = 25$, $d = 74$, $e = 88$.
Então: $p(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 74x + 88$.

9.7) Efetue a divisão de $x^n - a^n$ por $x - a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

Solução

Aplicando o **dispositivo de Briot-Ruffini**, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0}^{(n-1)\text{ zeros}} & & & & & -a^n \\ \hline a & 1 & a \quad a^2 \quad a^3 \quad \ldots \quad a^{n-2} \quad a^{n-1} & & & & & 0 \end{array}$$

Então: $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}\,x + a^{n-1}$ e $r = 0$.

9.8) Efetue a divisão de $x^n + a^n$ por $x + a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

Solução

Inicialmente observe que o resto é:

$$r = (-a)^n + a^n$$

se **n** é par: $r = 2a^n$; se **n** é ímpar: $r = 0$.

Aplicando o **dispositivo de Briot-Ruffini**:

1.° caso: **n** é par

	1	0	0	0	...	0	a^n
$-a$	1	$-a$	a^2	$-a^3$	...	$-a^{n-1}$	$2a^n$

Então: $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1}$ e $r = 2a^n$.

2.° caso: **n** é ímpar

	1	0	0	0	...	0	a^n
$-a$	1	$-a$	a^2	$-a^3$	...	a^{n-1}	0

Então: $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1}$ e $r = 0$.

9.9) Determine os valores de **m** e **n** de modo que o polinômio:

$$P(x) = x^4 + (m + n - 2)x^3 + 5x^2 - 3mx + 6$$

seja **divisível** por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Solução

$P(x)$ é divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$ se e somente se $P(x)$ for divisível por $(x - 1)$ e por $(x - 2)$, isto é, $P(1) = 0$ e $P(2) = 0$:

$$P(1) = 1^4 + (m + n - 2) \cdot (1)^3 + 5 \cdot (1)^2 - 3\,m \cdot (1) + 6 = 0$$
$$P(2) = 2^4 + (m + n - 2) \cdot (2)^3 + 5 \cdot (2)^2 - 3\,m \cdot (2) + 6 = 0$$

Daí:

$$\begin{cases} n - m + 10 = 0 \\ 8n + 2m + 26 = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $n = -4$ e $m = 3$.

9.10) Calcule os valores de **a** e **b** de modo que o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + ax + b$ seja **divisível** por $x^2 + 1$.

Solução

Observe que:

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

Assim, para que $P(x)$ seja divisível por $x^2 + 1$ é necessário que $P(x)$ seja divisível por $(x - i)$ e por $(x + i)$, isto é, $P(i) = 0$ e $P(-i) = 0$:

$$P(i) = i^4 + i^3 + 3 \cdot (i)^2 + a \cdot (i) + b = 0$$
$$P(-i) = (-i)^4 + (-i)^3 + 3 \cdot (-i)^2 + a \cdot (-i) + b = 0$$

Daí:

$$\begin{cases} ai + b - 2 - i = 0 \\ -ai + b - 2 + i = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $a = 1$ e $b = 2$.

9.11) Determine **a** e **b** de modo que o polinômio: $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$.

Solução

O teorema 9.5 sugere-nos efetuar duas divisões sucessivas pelo **dispositivo de Briot-Ruffini**:

	1	−1	2	a	b
1	1	0	2	a + 2	a + 2 + b = 0
1	1	1	3	a + 5 = 0	

O sistema:

$$\begin{cases} a + 2 + b = 0 \\ a + 5 = 0 \end{cases}$$

nos dá: $a = -5$ e $b = 3$.

9.12) Um polinômio $P(x)$ dá resto 4 quando dividido por $x - 1$ e resto 12 quando dividido por $x - 2$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x - 1)(x - 2)$.

Solução

O **teorema do resto** nos dá: $P(1) = 4$ e $P(2) = 12$.

Como o produto $(x - 1)(x - 2)$ tem grau 2, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ terá, no máximo, grau 1 (ou será nulo); então, será da *forma* $R(x) = ax + b$.

Temos:

$$P(x) \equiv [(x - 1)(x - 2)]Q(x) + \overbrace{ax + b}^{R(x)}$$
$$P(1) = [(1 - 1)(1 - 2)]Q(1) + a \cdot 1 + b = 4$$
$$P(2) = [(2 - 1)(2 - 2)]Q(2) + a \cdot 2 + b = 12$$

O sistema:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = 12 \end{cases}$$

apresenta como solução $a = 8$ e $b = -4$.

Assim, o resto procurado é $R(x) = 8x - 4$.

9.13) O polinômio $f(x)$ dividido por $x^2 - 1$ dá resto $2x + 1$. O polinômio $g(x)$ dividido por $x^2 - 3x + 2$ dá resto $x + 2$. Qual é o resto da divisão de $s(x) = f(x) + g(x)$ por $x - 1$? Qual é o resto da divisão de $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ por $x - 1$?

Solução

Temos:

$$f(x) \equiv (x^2 - 1)q(x) + (2x + 1) \qquad (1)$$
$$g(x) \equiv (x^2 - 3x + 2)q'(x) + (x + 2) \qquad (2)$$

O resto da divisão de $s(x)$ por $x - 1$ é $s(1) = f(1) + g(1)$.

O resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é $p(1) = f(1) \cdot g(1)$.

Em (1) e (2) substituindo **x** por 1:

$$f(1) = 3$$
$$g(1) = 3$$

Daí, o resto da divisão de $s(x)$ por $x - 1$ é 6; o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é 9.

9.14) $f(x)$ é um polinômio tal que $\partial[f(x)] \geqslant 3$. $f(x)$ dividido por $x - 1$ dá quociente $q_1(x)$ e resto **a**; $q_1(x)$ dividido por $x - 2$ dá quociente $q_2(x)$ e resto 3; $q_2(x)$ dividido por $x - 3$ dá quociente $q_3(x)$ e resto 4. Determine **a**, sabendo que $2\,f(2) = 3\,f(3)$.

Solução

Temos:

$$f(x) \equiv (x - 1)q_1(x) + a \qquad (1)$$
$$q_1(x) \equiv (x - 2)q_2(x) + 3 \qquad (2)$$
$$q_2(x) \equiv (x - 3)q_3(x) + 4 \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), sucessivamente:

$$f(x) \equiv (x - 1)\underbrace{[(x - 2)q_2(x) + 3]}_{q_1(x)} + a$$

$$f(x) \equiv (x - 1)\{(x - 2)\underbrace{[(x - 3)q_3(x) + 4]}_{q_2(x)} + 3\} + a \qquad (4)$$

Em (4), substituindo **x** por 2 e, em seguida, por 3:

$$f(2) = (2 - 1)\{\underbrace{(2 - 2)[(3 - 2)q_3(2) + 4]}_{\text{zero}} + 3\} + a$$

$$f(2) = 3 + a$$
$$f(3) = (3 - 1)\{(3 - 2)[\underbrace{(3 - 3)q_3(3)}_{\text{zero}} + 4] + 3\} + a$$
$$f(3) = 14 + a$$

E sendo $2\,f(2) = 3\,f(3)$, temos:

$$6 + 2a = 42 + 3a$$

e daí: $a = -36$.

9.15) Qual é o resto da divisão do polinômio $f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ por $x^2 - 1$?

Solução

O divisor $x^2 - 1$ tem grau 2; então, o resto é da *forma*:

$$R(x) = ax + b$$

Temos:

$$x^{100} - 2x^{51} + 1 \equiv (x^2 - 1)q(x) + \overbrace{ax + b}^{R(x)}$$

Substituindo **x** por 1 e em seguida por -1, obtemos:

$$1^{100} - 2 \cdot (1)^{51} + 1 = (1^2 - 1)q(1) + a + b$$
$$(-1)^{100} - 2 \cdot (-1)^{51} + 1 = [(-1)^2 - 1]q(-1) - a + b$$

O sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases}$$

nos dá: $a = -2$ e $b = 2$.

Então, $R(x) = -2x + 2$.

9.16) Determine um polinômio $f(x)$, de grau 3, que é **divisível** por $x - 3$ e que dividido por $x + 1$, $x - 1$ e $x - 2$ dá resto sempre igual a 5.

Solução

Podemos escrever:

$$f(x) \equiv (x + 1)q_1(x) + 5$$
$$f(x) \equiv (x - 1)q_2(x) + 5$$
$$f(x) \equiv (x - 2)q_3(x) + 5$$

Daí:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)q_1(x)$$
$$f(x) - 5 \equiv (x - 1)q_2(x)$$
$$f(x) - 5 \equiv (x - 2)q_3(x)$$

As identidades anteriores garantem que o polinômio $f(x) - 5$ é divisível por $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$; então, $f(x) - 5$ é divisível pelo produto $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$. Logo:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot q(x)$$

E, sendo $f(x) - 5$ um polinômio de grau 3, $q(x)$ tem grau zero, ou seja, é *constante*:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot \mathbf{k} \qquad (1)$$

Também $f(3) = 0$, pois $f(x)$ é divisível por $x - 3$.
Substituindo **x** por 3 na identidade (1):

$$f(3) - 5 = (3 + 1)(3 - 1)(3 - 2) \cdot k$$

daí: $k = -\frac{5}{8}$; e, voltando em (1):

$$f(x) = -\frac{5}{8}(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

9.17) Determine os coeficientes **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$. Determine o quociente.

Solução

Vamos aplicar o **dispositivo de Briot-Ruffini**, efetuando duas divisões sucessivas:

	a	b	0	0	...	0	1
1	a	$a + b$	$a + b$	$a + b$	...	$a + b$	$a + b + 1 = 0$
1	a	$2a + b$	$3a + 2b$	$4a + 3b$	...	$na + (n - 1)b = 0$	

O sistema:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ na + (n - 1)b = 0 \end{cases}$$

nos dá: $a = n - 1$ e $b = -n$.
Observe que o quociente na divisão de $f(x)$ por $(x - 1)^2$ é:

$$q(x) = (n - 1)x^{n-2} + (n - 2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

Exercícios Propostos

9.18) Efetue a divisão de $A(x)$ por $B(x)$ nos seguintes casos:

a) $A(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ e $B(x) = x - 1$
b) $A(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ e $B(x) = x + 3$
c) $A(x) = 4x^3 + x^2$ e $B(x) = x + 1 + i$
d) $A(x) = x^3 - x^2 - x$ e $B(x) = x - 1 + 2i$
e) $A(x) = 4x^3 - 8x^2 + 6x + 10$ e $B(x) = 2x - 8$
f) $A(x) = 6x^2 - 7x + 8$ e $B(x) = 3x + 4$

9.19) Um polinômio $f(x)$, do segundo grau, dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ dá restos 1, 8 e 27, respectivamente. Determine $f(x)$.

9.20) Determine o valor de **m** de modo que o polinômio $5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - mx + 2$ seja **divisível** por $x + 2$.

9.21) Dividindo-se um polinômio P(x) por x − a, usando-se o **dispositivo de Briot-Ruffini**, obteve-se o quadro abaixo:

	4	13	c	d	e
a	b	1	−5	4	0

Determine o polinômio P(x).

9.22) Divida $x^n - a^n$ por $x + a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

9.23) Divida $x^n + a^n$ por $x - a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

9.24) Determine **a** e **b** para que o polinômio $ax^3 + bx^2 - 28x + 15$ seja **divisível** por $x + 3$ e que, dividido por $x - 3$, dê resto -60.

9.25) Dê as condições que **p** e **q** devem satisfazer para que o polinômio $x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ seja **divisível** por $x + a$ (**p** e **q** **naturais**, $p > q$ e $a \neq 0$).

9.26) Verifique que:

a) o polinômio $f(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ é **divisível** por $x^2 - 3x + 2$.
b) o polinômio $f(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ é **divisível** por $x(x + 1)(2x + 1)$.

9.27) Se **n** é ímpar e $a \neq b$, verifique que o polinômio: $(a + b + x)^n - a^n - b^n - x^n$ é **divisível** por $(x + a)(x + b)$.

9.28) Verifique que o polinômio $2x^5 - 15x^3 + 12x^2 + 7x - 6$ é **divisível** por $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. Qual é o quociente dessa divisão?

9.29) Os restos das divisões de um polinômio P(x) por $x - 1$ e por $x - 2$ são 3 e 4, respectivamente. Qual é o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x - 1)(x - 2)$?

9.30) Determine o resto da divisão de um polinômio A(x) por $B(x) = x^2 + 1$, conhecendo-se A(i) e A(− i), onde **i** é a *unidade imaginária.*

9.31) Qual é o resto da divisão de $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$?

9.32) Determine o resto da divisão de um polinômio A(x) por $B(x) = -x^2 + 5x - 6$, sabendo que $A(2) = 1$, $A(-1) = 3$ e que o quociente da divisão de A(x) por B(x) é **divisível** por $x + 1$.

9.33) Os restos das divisões de P(x) por $x + 1$, $x - 1$ e $x - 2$ são 5, −1 e −1, respectivamente. Qual é o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x^2 - 1)(x - 2)$?

9.34) Um polinômio p(x), quando dividido por $(x - 1)(x + 2)$, dá resto $2x + 5$. Dê os restos das divisões de p(x) por $x - 1$ e por $x + 2$.

9.35) Quando um polinômio p(x) é dividido por $ax - b$ e por $bx - a$, os restos são iguais e os quocientes são $q_1(x)$ e $q_2(x)$, respectivamente; **a** e **b** são reais não nulos e $|a| \neq |b|$.
Mostre que $q_2(x)$ é **divisível** por $ax - b$ e que $q_1(x) + q_2(x)$ é **divisível** por $x - 1$.

9.36) O polinômio f(x), dividido por $ax + b$, $a \neq 0$, dá quociente q(x) e resto **r**. Qual é o resto da divisão de:

a) f(x) por $x + \frac{b}{a}$ b) $x \cdot f(x)$ por $ax + b$ c) $x^2 \cdot f(x)$ por $ax + b$

9.37) O polinômio f(x), quando dividido por $x - 1$, dá resto **a**; dividido por $x + 2$, dá resto **b**. O quociente da divisão de f(x) por $x - 1$ é q(x). Qual é o resto da divisão de q(x) por $x + 2$?

9.38) Determine o polinômio f(x), de grau 3, sabendo que f(x) é **divisível** por $x - 4$ e que, dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$, dá o mesmo resto 6.

9.39) Determine **a** e **b** para que o polinômio $ax^4 + bx^3 + 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$.

9.40) O polinômio $A(x) = x^5 + px + q$ é **divisível** por $(x - a)^2$. Verifique que $p = -5a^4$ e $q = 4a^5$, $a \neq 0$. Qual é o quociente na divisão?

9.41) Verifique que o polinômio $p(x) = x^{n+2} - x^{n+1} + (n - 1)x^2 - (2n - 1)x + n$ é **divisível** por $(x - 1)^2$, mas não é divisível por $(x - 1)^3$.
Qual é o quociente da divisão de p(x) por $(x - 1)^2$?

9.42) Verifique que o polinômio $p(x) = x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n - 1)$ é **divisível** por $(x - a)^2$. Qual é o quociente na divisão?

9.43) Determine os números reais **a** e **b** e o maior inteiro **m**, de tal modo que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^m$.

9.44) Mostre que o polinômio:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

é **divisível** por $(x - 1)^3$.

9.45) O polinômio $p(x) = 2x^4 - ax^3 + 19x^2 - 20x + 12$ é **divisível** por $(x - p)^2$, onde **a** e **p** são inteiros positivos. Determine **a** e **p**.

9.46) Determine o polinômio f(x), de grau 3, sabendo que f(x): é **divisível** por $x + 2$; dividido por $x + 1$ dá resto 3; e dividido por $(x - 1)^2$ dá resto -9.

9.47) Verifique que o polinômio $p(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são inteiros positivos, é **divisível** por $x^3 + x^2 + x + 1$.

9.48) O polinômio $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$, com **n** inteiro positivo, dividido por $(x - 2)^2$ dá resto $2^n(x - 2)$. Determine **a** e **b**.

9.49) Prove que o polinômio $f(x) = (\cos \varphi + x \operatorname{sen} \varphi)^n - \cos (n\varphi) - x \operatorname{sen} (n\varphi)$ é **divisível** por $x^2 + 1$.

Capítulo

10

Outros temas importantes

10.1 — POLINÔMIO DERIVADO

Definição

Seja o polinômio de coeficientes complexos:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ e $n \geqslant 1$

Chama-se **polinômio derivado de p(x)** ao polinômio:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + ka_kx^{k-1} + \ldots + na_nx^{n-1}$$

De uma forma abreviada, podemos escrever:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}$$

Em particular, se o polinômio p(x) é uma *constante* ou é o polinômio *nulo*, então o polinômio derivado p'(x) é o polinômio *nulo*.

Exemplos

1.º) Se $p(x) = 6 + 5x + 4x^2$, então $p'(x) = 5 + 2 \cdot 4x = 5 + 8x$.
2.º) Se $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10$, então $p'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 4x + 2 = 6x^2 + 8x + 2$.
3.º) Se $p(x) = 2x + 1$, então $p'(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^0 = 2$.
4.º) Se $p(x) = 3$, então $p'(x) = 0$.

Adição - Propriedade I

Quaisquer que sejam os polinômios p(x) e q(x), tem-se:

$$\boxed{[p(x) + q(x)]' = p'(x) + q'(x)}$$

Demonstração

Se um dos polinômios é uma *constante*, a propriedade é evidente. Caso contrário, sejam:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ e } q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Suponhamos $n \geqslant m$; observe, então, que os coeficientes b_k são nulos para $m < k \leqslant n$. E, considerando esses eventuais coeficientes nulos, podemos escrever:

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

Por definição, tem-se:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \; q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1}, \; [p(x) + q(x)]' = \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k) x^{k-1}$$

Daí:

$$p'(x) + q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k) x^{k-1} = [p(x) + q(x)]'$$

Propriedade II

Sejam o polinômio p(x) e o número complexo λ. Tem-se:

$$\boxed{[\lambda \cdot p(x)]' = \lambda \cdot p'(x)}$$

Demonstração

Se p(x) é *constante*, a propriedade é evidente. Caso contrário, seja:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Tem-se:

$$\lambda \cdot p(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

e, por definição:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \text{ e } [\lambda p(x)]' = \sum_{k=1}^{n} (k\lambda a_k x^{k-1})$$

Daí:

$$\lambda \cdot p'(x) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot k a_k x^{k-1}) = [\lambda \cdot p(x)]'$$

Multiplicação - Propriedade III

Quaisquer que sejam os polinômios p(x) e q(x), tem-se:

$$\boxed{[p(x) \cdot q(x)]' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)}$$

Demonstração

Veja exercício 10.12.

Propriedade IV

Sejam os polinômios p(x) e q(x), tais que:

$$p(x) = [q(x)]^n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}^*$$

Então:

$$\boxed{p'(x) = n \cdot [q(x)]^{n-1} \cdot q'(x)}$$

Demonstração

Veja exercício 10.12.

Exemplos

1.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{p(x)} + \underbrace{(x^3 + 4x)}_{q(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{(2x + 1)}_{p'(x)} + \underbrace{(3x^2 + 4)}_{q'(x)}$$

2.º) Se $f(x) = \underbrace{20}_{\lambda} \cdot \underbrace{(x^4 + 3x^2 + 4x + 5)}_{p(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{20}_{\lambda} \cdot \underbrace{(4x^3 + 6x + 4)}_{p'(x)}$$

3.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 5x)}_{p(x)} \cdot \underbrace{(x^5 + 6x^2 + 2)}_{q(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{(3x^2 + 4x + 5)}_{p'(x)} \cdot \underbrace{(x^5 + 6x^2 + 2)}_{q(x)} + \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 5x)}_{p(x)} \cdot \underbrace{(5x^4 + 12x)}_{q'(x)}$$

4.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^6 + 13x^2)^{200}}_{g^{200}(x)}$, então $f'(x) = 200 \cdot \underbrace{(x^6 + 13x^2)^{199}}_{g^{199}(x)} \cdot \underbrace{(6x^5 + 26x)}_{g'(x)}$

Derivação sucessiva

Seja p(x) um polinômio de coeficientes complexos.

Define-se **polinômio derivado de ordem n do polinômio p(x)**, notado com $p^{(n)}(x)$, como segue:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.º)\ p^{(0)}(x) = p(x) \\ 2.º)\ p^{(n+1)}(x) = [p^{(n)}(x)]' \end{array}}$$

Assim, tem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}
p^{(0)}(x) &= p(x) \\
p^{(1)}(x) &= p'(x) \\
p^{(2)}(x) &= [p'(x)]', \text{ que também se nota } p''(x) \\
p^{(3)}(x) &= [p''(x)]', \text{ que também se nota } p'''(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Exemplo

Sendo o polinômio $p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x + 8$, temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned}
p^{(0)}(x) &= p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x + 8 \\
p^{(1)}(x) &= p'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 10x + 7 \\
p^{(2)}(x) &= p''(x) = 12x^2 + 36x + 10 \\
p^{(3)}(x) &= p'''(x) = 24x + 36 \\
p^{(4)}(x) &= p''''(x) = 24 \\
p^{(5)}(x) &= p'''''(x) = 0 \\
p^{(6)}(x) &= p^{(7)}(x) = p^{(8)}(x) = \ldots = 0
\end{aligned}$$

Observe que na seqüência $p^{(0)}(x)$, $p^{(1)}(x)$, $p^{(2)}(x)$, ... o grau dos polinômios diminui de **1**; assim, se $p(x)$ tem grau **n**, todos os polinômios derivados de ordem superior a **n** são **nulos**.

Exercícios Resolvidos

10.1) No polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem-se $p'(\alpha) = 0$. Verifique que $p(\alpha) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Solução

Temos:

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$p'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$p(\alpha) = p\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$

$$= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

10.2) Determine um polinômio da *forma* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, sabendo que:

$$p(2x) \equiv p'(x) \cdot p''(x)$$

Solução

Temos:

$$p(2x) = a_0 + a_1(2x) + a_2(2x)^2 + a_3(2x)^3$$
$$p(2x) = a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3$$
$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

Sendo $p(2x) \equiv p'(x) \cdot p''(x)$, temos:

$$a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3 \equiv (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)(2a_2 + 6a_3x)$$
$$a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3 \equiv 2a_1a_2 + (6a_1a_3 + 4a_2^2)x + 18a_2a_3x^2 + 18a_3^2x^3$$

O sistema:

$$\begin{cases} 2a_1a_2 = a_0 \\ 6a_1a_3 + 4a_2^2 = 2a_1 \\ 18a_2a_3 = 4a_2 \\ 18a_3^2 = 8a_3 \end{cases}$$

apresenta como solução:

1.º) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e $p(x)$ é **nulo**

2.º) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{4}{9}$ e $p(x) = \dfrac{4}{9}x^3$.

10.3) Um polinômio $p(x)$ satisfaz a condição $p(x) + p'(x) \equiv 2x^2 + 5x + 4$. Determine $p(x)$.

Solução

Note que o grau de $p(x)$ é maior que o grau de $p'(x)$; então, o grau de $p(x)$ é igual ao grau da soma $p(x) + p'(x)$, isto é, $p(x)$ tem grau 2.

Então, p(x) é da forma:

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Daí:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{p(x)} + \underbrace{(2ax + b)}_{p'(x)} \equiv 2x^2 + 5x + 4$$

$$ax^2 + (b + 2a)x + (c + b) \equiv 2x^2 + 5x + 4$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 5 \\ c + b = 4 \end{cases}$$

obtemos: $a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$; então, $p(x) = 2x^2 + x + 3$.

10.4) Os polinômios f(x) e g(x) satisfazem a condição:

$$g(x) \equiv x^2 \cdot [f(x)]^3$$

Calcule $g'(3)$, sabendo que $f(3) = 2$ e $f'(3) = 1$.

Solução

Usando as propriedades do polinômio derivado, temos:

$$g'(x) \equiv \overbrace{2x \cdot [f(x)]^3 + x^2 \cdot \underbrace{3\,[f(x)]^2 \cdot f'(x)}_{\text{propriedade IV}}}^{\text{propriedade III}}$$

Substituindo **x** por 3:

$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot [f(3)]^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot [f(3)]^2 \cdot f'(3)$$
$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1$$
$$g'(3) = 154$$

10.5) Para o polinômio $p(x) = x^k$, demonstre as **implicações**:

1.ª) $h \leqslant k \Rightarrow p^{(h)}(x) = A_{k,h} \cdot x^{k-h}$
2.ª) $h > k \Rightarrow p^{(h)}(x) = 0$

Solução

Para a demonstração da primeira implicação, vamos usar o **Método da Indução Matemática**. (Veja volume 2 desta coleção, p. 31.)

Teorema 1

A primeira implicação é evidente para $h = 0$.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a implicação é válida para $h < k$, isto é:

$$p^{(h)}(x) = A_{k,h} \cdot x^{k-h}$$

Tese: demonstremos que a implicação é válida para $h + 1 \leqslant k$, isto é:

$$p^{(h+1)}(x) = A_{k,h+1} \cdot x^{k-(h+1)}$$

De fato:

$$p^{(h+1)}(x) = [p^{(h)}(x)]' = [A_{k,h} \cdot x^{k-h}]' = A_{k,h} \cdot (x^{k-h})' = A_{k,h} \cdot (k-h) \cdot x^{k-h-1} =$$
$$= \underbrace{(k-h) \cdot A_{k,h}}_{A_{k,h+1}} \cdot x^{k-(h+1)} = A_{k,h+1} \cdot x^{k-(h+1)}$$

A primeira implicação está demonstrada para todo **h**, $h \leqslant k$. Em particular, para $h = k$ tem-se:

$$p^{(k)}(x) = k!$$

Daí, para $h > k$, como **k**! é uma *constante*:

$$p^{(h)}(x) = 0$$

o que demonstra a segunda implicação.

Exercícios Propostos

10.6) Para cada polinômio p(x) abaixo, determine p'(x):

a) $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$
b) $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$
c) $p(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x + 4)$
d) $p(x) = (5x^2 + 7)^3$
e) $p(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5$
f) $p(x) = (a + bx)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$ e $b \neq 0$

10.7) O polinômio f(x), de grau 2, satisfaz as condições: $f'(1) = 2$, $f'(2) = 1$ e $f(0) = 4$. Determine-o.

10.8) Determine **a**, **b** e **c** no polinômio $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$, sabendo que $P(x) + k(x-1) \cdot P'(x) + (x^2 - 1) P''(x) \equiv 0$, $k \in \mathbb{R}$.

10.9) Um polinômio f(x) satisfaz a condição $f(x) \cdot f'(x) \equiv 2x^3 + 6x^2 + 10x + 6$. Determine-o.

10.10) a) Se $p(x) = 5x^4$, determine $p'(x)$, $p''(x)$ e $p'''(x)$.
b) Se $p(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$, determine $p^{(4)}(x)$.

10.11) Seja o polinômio:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Demonstre as **implicações**:

1.ª) $h \leqslant n \Rightarrow p^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{n} a_k A_{k,h} \cdot x^{k-h}$

2.ª) $h > n \Rightarrow p^{(h)}(x) = 0$

10.12) Demonstre as propriedades III e IV, referidas anteriormente, neste capítulo.

10.2 — MÁXIMO DIVISOR COMUM

Definição

Sejam a(x) e b(x) polinômios não nulos, de coeficientes complexos.

Então, o polinômio d(x) é um **máximo divisor comum (mdc) de a(x) e b(x)** se e somente se:

a) $d(x) \mid a(x)$ e $d(x) \mid b(x)$;
b) se $c(x) \mid a(x)$ e $c(x) \mid b(x)$, então $c(x) \mid d(x)$.

Indica-se:

$$\boxed{d(x) = \textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)]}$$

Observe que se d(x) é um máximo divisor comum de a(x) e b(x), então $\lambda \cdot d(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, também o é. Daí, um máximo divisor comum de a(x) e b(x) *não é único.*

Exemplo

Se $(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$ e $b(x) = (x-1)(x-2)^3(x-4)$, um **mdc** de a(x) e b(x) é $d_1(x) = (x-1)(x-2)$; qualquer outro **mdc** é da forma $d(x) = c \cdot (x-1)(x-2)$, onde $c \neq 0$.

Definição

Chamamos **normalizado** a um polinômio p(x), não nulo, se o seu *coeficiente dominante* é **1**; neste caso, então, p(x) tem a forma:

$$\boxed{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}$$

Se $q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$ é um polinômio não nulo, onde $b_n \neq 0$, existe um polinômio p(x) tal que:

$$p(x) = \frac{1}{b_n} \cdot q(x) = x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_n}$$

Então, para todo polinômio q(x), não nulo, há um único **polinômio normalizado** p(x), que é o produto de q(x) por uma constante **c**, $c \neq 0$; *p(x) denomina-se polinômio normalizado associado a q(x).*

Por exemplo, se $q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$, tem-se:

$$p(x) = \frac{1}{3}[3x^3 + 2x^2 + 4x + 5] = x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

Observe que, se $d(x)$ é um **mdc** de $a(x)$ e $b(x)$, podemos associar-lhe um polinômio $d_1(x)$, **normalizado**, tal que:

$$d_1(x) = \textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)]$$

Denomina-se **mdc normalizado de a(x) e b(x)** ao polinômio $d_1(x)$. Assim, para cada par $[a(x); b(x)]$, esse polinômio $d_1(x)$ é **único**.

Agora, vamos construir um processo para a determinação do **mdc** de polinômios.

Teorema

> Se $a(x)$ e $b(x)$ são polinômios **não nulos**, onde $gr[a(x)] \geqslant gr[b(x)]$, e $r(x)$, **não nulo**, é o resto da divisão de $a(x)$ por $b(x)$, então:
>
> $$\textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)] = \textbf{mdc}\,[b(x);\ r(x)]$$

Demonstração (opcional)

Temos:

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ e, daí, } r(x) = a(x) - b(x) \cdot q(x) \qquad (1)$$

Sejam **mdc** $[a(x); b(x)] = d(x)$ e **mdc** $[b(x); r(x)] = d_1(x)$; então:

$$d(x) \mid a(x) \Rightarrow a(x) = d(x) \cdot q_1(x)$$
$$d(x) \mid b(x) \Rightarrow b(x) = d(x) \cdot q_2(x)$$

Substituindo em (1), vem:

$$r(x) = d(x) \cdot q_1(x) - d(x) \cdot q_2(x) \cdot q(x)$$
$$r(x) = d(x)[q_1(x) - q_2(x) \cdot q(x)]$$

e, daí, podemos concluir que: $d(x) \mid r(x)$.

Como $d(x) \mid b(x)$ e $d(x) \mid r(x)$, concluímos que $d(x) \mid d_1(x) =$ **mdc** $[b(x); r(x)]$.

Por outro lado, temos:

$$d_1(x) \mid b(x) \Rightarrow b(x) = d_1(x) \cdot q_3(x)$$
$$d_1(x) \mid r(x) \Rightarrow r(x) = d_1(x) \cdot q_4(x)$$

e, substituindo na identidade $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$, vem:

$$a(x) = d_1(x)q_3(x) \cdot q(x) + d_1(x) \cdot q_4(x) = d_1(x) \cdot [q_3(x) \cdot q(x) + q_4(x)]$$

isto é, $d_1(x) \mid a(x)$. E, como $d_1(x) \mid b(x)$, vem: $d_1(x) \mid d(x)$.

Se $d(x) \mid d_1(x)$ e $d_1(x) \mid d(x)$, vem a tese: $d(x) = d_1(x)$.

O algoritmo de Euclides

O método de obtenção de um **mdc** de dois polinômios, que se baseia no teorema anterior, utiliza o algoritmo da divisão repetidas vezes – esse método denomina-se *algoritmo de Euclides*. Vamos descrevê-lo.

1. Sejam os polinômios a(x) e b(x), com $gr[a(x)] \geqslant gr[b(x)]$, e seja $r_1(x)$ o resto da divisão de a(x) por b(x).
   Se $r_1(x) = 0$, então $b(x) = \textbf{mdc}\ [a(x);\ b(x)]$.
2. Se $r_1(x) \neq 0$, tem-se $\textbf{mdc}\ [a(x);\ b(x)] = \textbf{mdc}\ [b(x);\ r_1(x)]$.
   Seja $r_2(x)$ o resto da divisão de b(x) por $r_1(x)$.
   Se $r_2(x) = 0$, então $r_1(x) = \textbf{mdc}[a(x);\ b(x)]$.
3. Se $r_2(x) \neq 0$, tem-se $\textbf{mdc}[b(x);\ r_1(x)] = \textbf{mdc}[r_1(x);\ r_2(x)]$.
   Seja $r_3(x)$ o resto da divisão de $r_1(x)$ por $r_2(x)$.
   Se $r_3(x) = 0$, então $r_2(x) = \textbf{mdc}[a(x);\ b(x)]$.

Observe que efetuando as *divisões sucessivas* temos:

$$gr[b(x)] > gr[r_1(x)] > gr[r_2(x)] > gr[r_3(x)] > \ldots$$

Então, após certo número **n** de divisões, **sempre se atinge uma divisão exata** (a divisão de um polinômio por uma *constante* é certamente exata); isto é, se $r_n(x) = 0$, temos:

$$\boxed{r_{n-1}(x) = \textbf{mdc}\ [a(x);\ b(x)]}$$

Observe a seqüência das operações executadas:

$$\begin{aligned}
a(x) &= b(x)q_1(x) + r_1(x)\\
b(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x)\\
r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-2}(x) &= \underbrace{r_{n-1}(x)}_{\textbf{mdc}}q_n(x) + \underbrace{r_n(x)}_{0}
\end{aligned}$$

O polinômio $r_{n-1}(x)$ é um **mdc** de a(x) e b(x); a ele podemos associar o **mdc normalizado**.

Exemplos

1.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ e $b(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$
\begin{array}{l|l}
a(x) = x^6 + 2x^5 \qquad + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = b(x) \\
\cline{2-2}
\quad -x^6 - 4x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 4 \\
\cline{1-1}
\qquad - 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 2 & \\
\qquad\ \ 2x^5 + 8x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 4x^4 + 10x^3 + 3x^2 - x + 2 & \\
\qquad\quad - 4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 4x + 8 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad r_1(x) = - 6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 &
\end{array}
$$

2. *Dividimos* b(x) *por* $r_1(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
b(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 & -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 = r_1(x) \\
\cline{2-2}
\quad - x^4 - \dfrac{13}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{3}x & -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{11}{36} \\
\cline{1-1}
\qquad \dfrac{11}{6}x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x - 2 & \\
\quad - \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{143}{36}x^2 + \dfrac{11}{12}x + \dfrac{55}{18} & \\
\cline{1-1}
\qquad r_2(x) = \dfrac{19}{36}x^2 + \dfrac{19}{12}x + \dfrac{19}{18} &
\end{array}
$$

3. *Dividimos* $r_1(x)$ *por* $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
r_1(x) = - 6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 & \dfrac{19}{36}x^2 + \dfrac{19}{12}x + \dfrac{19}{18} = r_2(x) \\
\cline{2-2}
\qquad\quad 6x^3 + 18x^2 + 12x & -\dfrac{216}{19}x + \dfrac{180}{19} \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 5x^2 + 15x + 10 & \\
\qquad\qquad - 5x^2 - 15x - 10 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad r_3(x) = 0 &
\end{array}
$$

Então, $r_2(x) =$ **mdc**$[a(x); b(x)]$; o **mdc normalizado** é:

$$d(x) = x^2 + 3x + 2$$

Observe que os cálculos são exaustivos; para facilitá-los, pode-se, por exemplo, antes de dividir b(x) por $r_1(x)$, multiplicar b(x) por 6.
Assim fazendo, $r_2(x)$ estará multiplicado por uma *constante*, o que pouca importância tem em nosso propósito, pois, se d(x) é um **mdc** de a(x) e b(x), então $c \cdot d(x)$, $c \neq 0$, também o é.

2.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ e $b(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$
\begin{array}{r|l}
a(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 & 2x^2 - 3x + 1 = b(x) \\
\cline{2-2}
- 6x^3 + 9x^2 - 3x \quad\ \ & 3x - 2 \\
\cline{1-1}
- 4x^2 + 6x - 2 & \\
4x^2 - 6x + 2 & \\
\cline{1-1}
r_1(x) = 0 \quad\ \ &
\end{array}
$$

Então, b(x) é um **mdc** de a(x) e b(x); o **mdc normalizado é**:

$$d(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

3.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ e $b(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
a(x) = x^4 & - x^3 & - 7x^2 & + x & + 6 & & x^4 - 13x^2 + 36 = b(x) \\ \cline{7-7}
- x^4 & & + 13x^2 & & - 36 & & 1 \\ \cline{1-5}
r_1(x) = & - x^3 & + 6x^2 & + x & - 30 & &
\end{array}$$

2. *Dividimos* b(x) *por* $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
b(x) = x^4 & & - 13x^2 & & + 36 & - x^3 + 6x^2 + x - 30 = r_1(x) \\ \cline{6-6}
- x^4 & + 6x^3 & + x^2 & - 30x & & - x - 6 \\ \cline{1-5}
& 6x^3 & - 12x^2 & - 30x & + 36 & \\
& - 6x^3 & + 36x^2 & + 6x & - 180 & \\ \cline{1-5}
& r_2(x) = & 24x^2 & - 24x & - 144 &
\end{array}$$

3. *Dividimos* $r_1(x)$ *por* $r_2(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
r_1(x) = & - x^3 & + 6x^2 & + x & - 30 & 24x^2 - 24x - 144 = r_2(x) \\ \cline{6-6}
& x^3 & - x^2 & - 6x & & -\dfrac{1}{24}x + \dfrac{5}{24} \\ \cline{1-5}
& & 5x^2 & - 5x & - 30 & \\
& & - 5x^2 & + 5x & + 30 & \\ \cline{1-5}
& & & r_3(x) & = 0 &
\end{array}$$

Então, $r_2(x) =$ **mdc** [a(x); b(x)]; o **mdc normalizado** é: $d(x) = x^2 - x - 6$.
Às vezes, e quando isso é possível, dadas as limitações de espaço, podemos dispor os cálculos da seguinte forma:

		b(x)	$q_1(x)$ ↓	$q_2(x)$ ↓
		1	$-x-6$	$\frac{-1}{24}x + \frac{5}{24}$
a(x) →	$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$	$x^4 - 13x^2 + 36$	$-x^3 + 6x^2 + x - 30$	$24x^2 - 24x - 144$
	$-x^3 + 6x^2 + x - 30$	$24x^2 - 24x - 144$	0	
	↑ $r_1(x)$	↑ $r_2(x)$	↑ $r_3(x)$	

4.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^3 (x + 2)$ e $b(x) = (x - 2)^3 \cdot (x - 3)(x + 4)$.
Observe que a(x) e b(x) estão *fatorados* em um produto de potências cujas bases são polinômios do primeiro grau, dois a dois distintos. Então, para

formarmos um **mdc**, construímos o **produto dos fatores comuns aos polinômios dados, afetados esses fatores nos menores expoentes com que aparecem em a(x) e b(x)**:

$$d(x) = (x - 2)^2 (x - 3) = \textbf{mdc}[a(x);\ b(x)]$$

Observe que o polinômio d(x) satisfaz as condições da definição.

Definição

> Chamamos **primos entre si** aos polinômios não nulos a(x) e b(x), quando:
>
> $$\textbf{mdc}\ [a(x);\ b(x)] = k,\ k \text{ constante},\ k \neq 0$$

Observe que se a(x) e b(x) são **primos entre si** o **mdc normalizado** de a(x) e b(x) é **1**.

Exemplo

Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = 2x^4 + 4x^2 - 2x + 2$ e $b(x) = 2x^2 + x - 1$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$\begin{array}{r|l}
a(x) = 2x^4 \qquad + 4x^2 - 2x + 2 & 2x^2 + x - 1 = b(x) \\ \cline{2-2}
-2x^4 - x^3 + x^2 \qquad\qquad & x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{4} \\ \cline{1-1}
-x^3 + 5x^2 - 2x + 2 & \\
x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \qquad & \\ \cline{1-1}
\frac{11}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 & \\
-\frac{11}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{11}{4} & \\ \cline{1-1}
r_1(x) = -\frac{21}{4}x + \frac{19}{4} &
\end{array}$$

2. *Dividimos* b(x) *por* $r_1(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
b(x) = 2x^2 + x - 1 & -\frac{21}{4}x + \frac{19}{4} = r_1(x) \\ \cline{2-2}
-2x^2 + \frac{38}{21}x \qquad & -\frac{8}{21}x - \frac{236}{441} \\ \cline{1-1}
\frac{59}{21}x - 1 & \\
-\frac{59}{21}x + \frac{1\,121}{441} & \\ \cline{1-1}
r_2(x) = \frac{680}{441} &
\end{array}$$

3. A divisão de $r_1(x)$ por $r_2(x)$ é exata, isto é, $r_3(x) = 0$.

Então, $r_2(x) = \dfrac{680}{441}$ = **mdc** [a(x); b(x)]; e, sendo $r_2(x)$ constante, a(x) e b(x), são **primos entre si.**

Exercícios Propostos

10.13) Dê o **mdc normalizado** dos polinômios a(x) e b(x), nos seguintes casos:

a) $a(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3$ e $b(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 3$
b) $a(x) = 4x^5 - 20x^4 + 25x^3 + 10x^2 - 20x - 8$ e $b(x) = a'(x)$
c) $a(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 24$ e $b(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$
d) $a(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 35$ e $b(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 3x + 14$
e) $a(x) = x^4 + 12x - 5$ e $b(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 15$

10.14) Determine um **mdc** dos polinômios:

a) $a(x) = (x^2 - 1)^2 (x + 1)^3$
b) $b(x) = (x^3 + 1)(x - 1)$

10.15) Determine um **mdc** dos polinômios:

a) $a(x) = 3(x - 1)^3 x(x + 2)^2$
b) $b(x) = 4(x - 1)^2 x^3 (x + 4)$

10.16) Determine **c**, real, para que os polinômios $x^2 + (c + 6)x + 4c + 2$ e $x^2 + (c + 2)x + 2c$ tenham **mdc** de grau 1.

10.17) Determine **m** e **n** para que os polinômios $p(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + mx + n$ e $q(x) = x^2 + 2x - 1$ sejam **primos entre si.**

10.3 — MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Definição

Sejam a(x) e b(x) polinômios não nulos, de coeficientes complexos.

Então, o polinômio m(x) é um **mínimo múltiplo comum (mmc) de a(x) e b(x)** se e somente se:

a) m(x) é **divisível** por a(x) e m(x) é **divisível** por b(x);
b) se n(x) é **divisível** por a(x) e n(x) é **divisível** por b(x), então n(x) é **divisível** por m(x).

Indica-se:

$$\boxed{m(x) = \textbf{mmc}\,[a(x);\ b(x)]}$$

Observe que, se m(x) é um mínimo múltiplo comum de a(x) e b(x), então $\lambda \cdot m(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, também o é. Daí, um mínimo múltiplo comum de a(x) e b(x) *não é único.*

Exemplo

Se $a(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$ e $b(x) = (x-1)(x-2)^3(x-4)$, um **mmc** de a(x) e b(x) é $m_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)$; qualquer outro **mmc** é da forma $m(x) = c \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^3(x-3)(x-4)$, onde $c \neq 0$.

Observe que, se m(x) é um **mmc** de a(x) e b(x), podemos associar-lhe um polinômio $m_1(x)$, **normalizado**, tal que:

$$m_1(x) = \textbf{mmc}[a(x);\ b(x)]$$

Ao polinômio $m_1(x)$ denominamos **mmc normalizado de a(x) e b(x)**. Para cada par [a(x); b(x)], esse polinômio $m_1(x)$ é **único**.

Agora vamos examinar como podemos determinar o **mmc** de polinômios.

Teorema

Sejam a(x) e b(x) **polinômios normalizados**; sejam também d(x) e m(x) o **mdc normalizado** e o **mmc normalizado** de a(x) e b(x), respectivamente; então:

$$a(x) \cdot b(x) = d(x) \cdot m(x)$$

Aceitaremos o teorema sem demonstração.

Exemplos

1.º) Vamos determinar o **mmc** de $a(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$ e $b(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$.

Inicialmente, determinamos um **mdc** de a(x) e b(x) com o **algoritmo de Euclides**:

$$d_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Daí, o **mdc normalizado** é:

$$d(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Em seguida, multiplicamos o polinômio normalizado associado a a(x) pelo polinômio normalizado associado a b(x); esse produto, dividido por d(x), dá o polinômio m(x):

$$m(x) = 12x^5 - 44x^4 + 63x^3 - 44x^2 + 15x - 2$$

O processo é, infelizmente, extremamente cansativo.

2.º) Vamos determinar o **mmc** de $a(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^3 (x + 2)$ e $b(x) = (x - 2)^3 (x - 3) (x + 4)$.

Observe que a(x) e b(x) estão *fatorados* em um produto de potências cujas bases são polinômios do primeiro grau, dois a dois distintos. Então, para formarmos um **mmc**, construímos o **produto dos fatores comuns e não comuns aos polinômios dados, afetados esses fatores nos maiores expoentes com que aparecem em a(x) e b(x)**:

$$m(x) = (x - 2)^3 (x - 3)^3 (x + 2) (x + 4) = \textbf{mmc}\,[a(x); b(x)]$$

Observe que o polinômio m(x) satisfaz as condições da definição.

Exercícios Propostos

10.18) Determine o **mmc normalizado** de $a(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ e $b(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

10.19) Determine o **mmc** e o **mdc**, **normalizados**, dos polinômios

$$a(x) = x^{14} - 2x^{13} + x^{12} \text{ e } b(x) = x^2 - 1.$$

10.4 — UMA OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Seja f(x) um polinômio na indeterminada **x**:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Ao polinômio f(x), fazemos corresponder uma **função f**, de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, que associa a todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, a imagem:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$$

que é o valor numérico de f(x) em α.

A função f:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \end{cases}$$

denomina-se **função polinomial**.

Por exemplo, ao polinômio $f(x) = x^2 + 2x + 1$, associamos a **função quadrática f**:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

e, ao **polinômio nulo**, associamos a **função constante f**:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

na qual todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, tem imagem zero.

Exercícios Suplementares

II.1) Um polinômio f(x) tem coeficientes inteiros. Sabe-se que:

$$f(A) = A \text{ (A é inteiro positivo)}$$
$$f(0) = P$$

onde P é um número primo, maior do que A. Determine A.

II.2) Determine os números reais **a** e **b** tais que:

$$\frac{1}{x(x+1)} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Deduza a expressão da soma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

II.3) Um polinômio f(x) é tal que:

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} = f\left(\frac{u+v}{2}\right), \ \forall u, \ \forall v, \ u \in \mathbb{C} \text{ e } v \in \mathbb{C}$$

Verifique que f(x) é da forma $a_0 + a_1 x$.

II.4) Determine **a** e **b** para que:

$$\frac{a}{10^x - 1} + \frac{b}{10^x + 2} \equiv \frac{2 \cdot 10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)}$$

II.5) Determine A, B e C tais que:

$$\frac{1}{\text{sen } x \quad \cos x \, (\text{sen } x + \cos x)} \equiv \frac{A}{\text{sen } x} + \frac{B}{\cos x} + \frac{C}{\text{sen } x + \cos x}$$

II.6) Determine **a**, **b** e **c** para que o polinômio na variável **n**: $an^3 + bn^2 + cn$, represente, para todo **n**, a soma dos quadrados dos **n** primeiros números inteiros positivos.

II.7) Um polinômio f(x), de grau 3, é tal que $f(-2) = -9$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 11$. Determine f(0).

II.8) Um polinômio f(x) dividido por $x + 3$ dá quociente q(x) e resto -5; q(x) dividido por $2x - 1$ dá resto 4. Qual é o resto da divisão de f(x) por $2x^2 + 5x - 3$?

II.9) Determine os reais **p** e **q** para que o polinômio $A(x) = x^2 + px + q$ seja **divisor** de $A(x^2)$.

II.10) Um polinômio f(x) de grau 3, quando dividido por $x^2 - x + 2$ e por $x^2 + x - 1$, dá restos $5x - 7$ e $12x - 1$, respectivamente. Determine f(x).

II.11) Divida o polinômio $(x - 2)^n - 1$ por $x - 3$, onde $n > 1$.

II.12) Seja $R(x) = mx + n$ o resto da divisão de um polinômio P(x) pelo polinômio $T(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, em que **a** e **b** são constantes distintas.

a) Determine **m** e **n** em função de **a** e **b**.
b) Determine **m** e **n**, no caso particular em que $P(x) = x^{200}$, $a = -1$ e $b = 2$.
c) Prove que, no caso *b*, cada um dos coeficientes **m** e **n** é inteiro.

II.13) Um polinômio f(x) dividido por $(x - b)(x - c)$, $(x - c)(x - a)$ e $(x - a)(x - b)$ da restos $3x - 1$, $x + 1$ e $2x + 3$, respectivamente.

a) Determine **a**, **b** e **c**.
b) Determine o resto da divisão de f(x) por $(x - a)(x - b)(x - c)$.

II.14) O polinômio f(x) dividido por $x - 5$ dá quociente g(x) e resto 3; g(x) dividido por $x - 3$ dá resto 2. Qual o resto da divisão de f(x) por $x - 3$? E por $x^2 - 8x + 15$?

II.15) Os polinômios a(x) e b(x) têm uma *raiz comum* **a**. Seja r(x) o resto da divisão de a(x) por b(x); verifique que r(x) é **divisível** por $x - a$.

II.16) Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ um polinômio de grau 3 que admite raiz 1 e duas raízes complexas, não reais, α e β.

a) Determine um polinômio $g(x) = ax^2 + bx + c$, de grau 2, tal que $g(1) = 1$, $g(\alpha) = \beta$ e $g(\beta) = \alpha$.
b) Determine $g[g(x)]$.
c) Qual é o grau de $g[g(x)]$?
d) Verifique que $h(x) = g[g(x)] - x$ é **divisível** por f(x).

II.17) Verifique que $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ é **divisível** por $x^2 + x + 1$, onde **m**, **n** e **p** são naturais.

II.18) Determine **m** para que o polinômio $x^{2m} + x^m + 1$ seja **divisível** por $x^2 + x + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$.

II.19) Calcule o resto da divisão do polinômio:

$$p(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

a) por $x - 1$
b) por $x^2 - 1$

II.20) Demonstre, usando o **Método da Indução Matemática**, que um polinômio de grau **n**, $n \geqslant 1$, admite no máximo **n** raízes.

II.21) Determine **p**, $p \in \mathbb{R}$, sabendo-se que o polinômio:

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + px + 1$$

é **divisível** por $A''(x)$.

II.22) Seja o polinômio $f(x) = x^3 + ax + b$.

a) Determine **a** e **b**, sabendo que $f(-1) = 4$ e $f'(-1) = 0$.
b) Determine **p** para que $f(x) \equiv (x - 1)^2 \cdot (x + p)$.

II.23) Considere o conjunto dos polinômios, com coeficientes reais, da forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Define-se:

$$\varphi[P(x)] = P(x) + (x - 1)P'(x)$$

Mostre que:

a) $\varphi[P_1(x) + P_2(x)] \equiv \varphi[P_1(x)] + \varphi[P_2(x)]$
b) $\varphi[kP(x)] \equiv k \cdot \varphi[P(x)]$, $k \in \mathbb{R}$.

II.24) Determine os reais **t** e **u** para que os polinômios $p(x) = x^3 + (t + 1)x^2 + 2x + 2u$ e $q(x) = x^3 + tx^2 + u$ tenham **mdc** de grau 2.

Hamilton Fábio Mota Medeiros.
Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

PARTE III

Capítulo 11 — **Equações algébricas**

Capítulo 12 — **Raízes múltiplas**

Capítulo 13 — **Raízes imaginárias**

Capítulo 14 — **Relações de Girard**

Capítulo 15 — **Raízes racionais**

Capítulo 16 — **Equações recíprocas**

Capítulo 17 — **Raízes comuns**

Capítulo 18 — **Raízes reais**

Capítulo 11

Equações algébricas

11.1 — INTRODUÇÃO

Uma equação algébrica (ou polinomial) é uma equação do tipo:

$$P(x) = 0 \qquad (11.1)$$

onde P(x) é um polinômio. Caso o polinômio tenha grau **n**, diremos que a equação tem grau **n**.

Exemplos

a) $4x^3 + (3 - 5i)x^2 + 9 = 0$ é uma equação algébrica de grau 3, onde a variável é **x**.
b) $(6 + 3i)y^2 + 7y + 8 = 0$ é uma equação algébrica de grau 2, onde a variável é **y**.
c) $2x + 3 = 0$ é uma equação algébrica de grau 1.
d) $6x^0 = 0$ é uma equação algébrica de grau zero. Observe que esta equação não tem solução, isto é, seu conjunto-solução é vazio:

$$S = \varnothing$$

e) $0 \cdot x = 0$ é uma equação algébrica para a qual não definimos grau (o polinômio do "lado esquerdo" é identicamente nulo). É fácil perceber que qualquer número complexo é solução dessa equação, isto é, no universo dos complexos o conjunto-solução é:

$$S = \mathbb{C}$$

f) Consideremos a equação:

$$2x^3 + 9x^2 + 1 = 2x^3 + 6x^2 + 7x - 8 \qquad \text{(I)}$$

que é equivalente a:

$$2x^3 + 9x^2 + 1 - 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8 = 0 \qquad \text{(II)}$$

que, por sua vez, é equivalente a:

$$3x^2 - 7x + 9 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Observemos que a equação (I), que representa a igualdade entre dois polinômios de grau 3, é equivalente à equação (III), que é uma equação algébrica de grau 2.

Em princípio, poderíamos também dar o nome de *equação algébrica* a equações do tipo:

$$A(x) = B(x)$$

onde A(x) e B(x) são polinômios (como, por exemplo, a equação (I) do exemplo *f*). No entanto, essa equação sempre é equivalente a uma equação do tipo P(x) = 0:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \underbrace{A(x) - B(x)}_{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

Neste livro, chamaremos de *equação algébrica* apenas às equações do tipo P(x) = 0. Conforme veremos, isso facilitará nossa linguagem, pois poderemos, indiferentemente, falar nas raízes da equação P(x) = 0 ou nas raízes do polinômio P(x).

Neste e nos próximos capítulos, faremos um estudo sobre as raízes das equações algébricas (isto é, sobre as raízes dos polinômios) no universo dos números complexos, embora possamos dizer que esse estudo já foi iniciado no capítulo 9 deste volume, com o teorema de d'Alembert. De início, descartamos dois casos cuja análise é imediata:

1.º) caso em que o grau é nulo (neste caso teremos sempre $S = \varnothing$ – veja exemplo *d*);
2.º) caso em que P(x) é identicamente nulo (neste caso teremos sempre $S = \mathbb{C}$ – veja exemplo *e*).

Portanto, a partir de agora nos ocuparemos apenas de equações algébricas de grau $n \neq 0$, as quais têm a forma:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0} \qquad (11.2)$$

onde:

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C} \\ a_n \neq 0 \end{cases}$$

Os números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, do mesmo modo que no caso dos polinômios, são chamados coeficientes da equação.

Antes de considerarmos o caso mais geral de equação algébrica, é conveniente fazermos alguns comentários sobre as equações algébricas de graus 1 e 2.

11.2 — EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO PRIMEIRO GRAU

Consideremos a equação algébrica de grau 1:

$$ax + b = 0 \qquad (11.3)$$

onde **a** e **b** são números complexos quaisquer, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Assim, concluímos que a equação 11.3 **sempre** terá uma única raiz, que é o número complexo $-\frac{b}{a}$, o qual indicaremos por x_1:

$$x_1 = -\frac{b}{a}$$

É importante observar (para aplicações que virão a seguir) que:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right] = a(x - x_1)$$

isto é, o polinômio do primeiro grau, $ax + b$, pode ser fatorado do seguinte modo:

$$\boxed{ax + b = a(x - x_1)} \qquad (11.4)$$

Isto está de acordo com o teorema de d'Alembert: já que x_1 é raiz do polinômio $ax + b$, então este é divisível por $x - x_1$ (o quociente é igual a a).

11.3 — EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO SEGUNDO GRAU

Seja a equação de grau 2:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (11.5)$$

onde **a**, **b** e **c** são números complexos quaisquer, com $a \neq 0$. Como vimos no capítulo 2 deste volume (veja exercício 2.7), essa equação sempre tem duas raízes complexas (que podem ser distintas ou iguais, reais ou imaginárias) indicadas por $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, que podem ser obtidas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Pode-se demonstrar (faremos isso no item 11.6 deste capítulo) que o polinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \qquad (11.6)$$

Já sabemos que a fórmula 11.6 é válida quando os coeficientes **a**, **b** e **c** e as raízes x_1 e x_2 são reais (veja capítulo 3 do volume 1 desta coleção). O que falta é demonstrar sua validade no campo dos complexos.

Quando $\Delta = 0$, temos $x_1 = x_2$ e dizemos que a equação 11.5 admite duas raízes iguais ou, então, que a equação tem uma raiz dupla ou, ainda, que a equação tem uma raiz de multiplicidade dois. Esta linguagem se justifica, pois neste caso a fórmula 11.6 fica:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

isto é, o fator $x - x_1$ aparece duas vezes.

Quando $\Delta \neq 0$, temos $x_1 \neq x_2$ e a equação 11.5 tem duas raízes distintas.

11.4 — TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Conforme vimos nos dois itens anteriores, as equações algébricas de graus 1 e 2 **sempre** têm solução. Mas o que acontece com as equações de grau maior que 2? Isto é respondido pelo teorema fundamental da Álgebra (T.F.A.):

Toda equação algébrica, de coeficientes complexos e grau maior que zero, admite pelo menos uma raiz complexa.

O que equivale a dizer: todo polinômio de coeficientes complexos e grau maior que zero admite pelo menos uma raiz complexa.

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez, de modo satisfatório, em 1798, por Gauss, em sua tese de doutoramento (foi o próprio Gauss que o chamou de "teorema fundamental da Álgebra"). Antes de Gauss, outros matemáticos (como, por exemplo, d'Alembert e Euler) apresentaram demonstrações do teorema, mas Gauss mostrou que todas elas eram incorretas (apesar disso há livros que chamam o T.F.A. de "teorema de d'Alembert"). Como a demonstração de Gauss usa conhecimentos que estão acima do nível deste livro, vamos admitir o teorema sem demonstrá-lo.

Teorema de Abel

O T.F.A. nos diz que toda equação algébrica de grau não nulo tem solução; no entanto, não nos diz como achar essa solução. Quanto às equações de primeiro e segundo graus, já sabemos como resolvê-las. Para as equações do terceiro e quarto graus, conhecem-se fórmulas desde o século XVI; porém, tais fórmulas em geral são de aplicação demorada e não serão usadas neste livro (uma fórmula para a equação do terceiro grau foi mencionada no capítulo 1 deste volume). Para as equações de grau maior que 4, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) demonstrou que é **impossível** estabelecer fórmulas gerais de resolução envolvendo operações algébricas com os coeficientes. Assim, a nossa situação até o final deste livro é a seguinte: só sabemos resolver, **no caso geral**, equações algébricas do primeiro e segundo graus. As equações de grau superior a 2 serão resolvidas em **alguns casos particulares**, quando for possível usar certos artifícios, ou forem conhecidas informações sobre as raízes, aplicando-se teoremas que apresentaremos adiante.

Dois artifícios usados com freqüência serão a fatoração do polinômio (quando a conseguirmos) e a mudança de variável, como fizemos em alguns exemplos do capítulo 5.

11.5 — TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Consideremos um polinômio P(x), de coeficientes complexos e grau $n \geqslant 1$, tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Pode-se demonstrar (faremos isso no item seguinte) que P(x) pode ser decomposto do seguinte modo:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)} \quad (11.7)$$

onde os números complexos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **n** raízes do polinômio P(x), isto é, são as **n** raízes da equação algébrica $P(x) = 0$. As fórmulas 11.4 e 11.6 são casos particulares da fórmula 11.7.

É fácil perceber que a decomposição 11.7 é única (a menos da ordem), isto é, os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as únicas raízes de P(x), pois **nenhum** outro número diferente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anularia o "lado direito" de 11.7, ao ser colocado no lugar de x.

Portanto, todo polinômio de grau $n \geqslant 1$ tem **n** (e apenas **n**) raízes, que podem ser reais ou imaginárias, não sendo, contudo, necessário que elas sejam todas distintas: podemos ter algumas (ou todas) iguais. Se na decomposição 11.7 um certo fator:

$$x - x_i$$

aparecer **m** vezes, diremos que o número x_i é raiz de multiplicidade **m**. Se um certo fator $x - x_i$ aparecer apenas uma vez, diremos que x_i é uma raiz simples (ou raiz de multiplicidade 1).

Exemplos

a) Consideremos o polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ e vamos **tentar** determinar suas raízes. Neste caso, "por sorte" (nem sempre teremos essa sorte), podemos fazer uma fatoração por agrupamento:

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 3) + 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ ou } x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \pm 2i$$

Portanto, as raízes de P(x) são os números $\frac{3}{2}$, $2i$ e $-2i$. O polinômio, sendo de grau 3, apresenta 3 raízes, as quais (neste caso) são todas distintas. Temos, então, de acordo com o teorema da decomposição:

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2i)(x + 2i)$$

b) Consideremos um polinômio P(x), que após ser decomposto, fica:

$$P(x) = 5(x - 4)(x - 4)(x - 2i)$$

isto é:

$$P(x) = 5(x - 4)^2(x - 2i)$$

Se fizermos as multiplicações, obteremos:

$$P(x) = 5x^3 - (40 + 10i)x^2 + (80 + 80i)x - 160i = 5(x - 4)^2(x - 2i)$$

Na decomposição, vemos que o fator $x - 4$ aparece 2 vezes e, portanto, o número 4 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla). Já o fator $x - 2i$ aparece apenas uma vez, assim o número $2i$ é raiz simples. No total, P(x) tem 3 raízes: 4 (dupla) e 2i (simples).

c) Sendo $P(x) = 7(x - 9)(x - 3)^2(x - 4)^5(x + 6)^3$, temos:

9 é raiz simples
3 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla)
4 é raiz de multiplicidade 5
-6 é raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla)

P(x) possui 11 raízes; portanto, é um polinômio de grau 11.

d) Consideremos $P(x) = 16x^3(x - 2)(x + i)^4(x - i)^2$. Observando que:

$$x^3 = (x - 0)^3$$

temos:

0 é raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla)
2 é raiz simples
$-i$ é raiz de multiplicidade 4
i é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla)

Assim, P(x) tem 10 raízes; portanto, é um polinômio de grau 10.

11.6 – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Consideremos, então, o polinômio P(x), de coeficientes complexos e grau $n \geqslant 1$, tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

De acordo com o T.F.A., P(x) admite pelo menos uma raiz complexa. Representando essa raiz por x_1, P(x) deve ser divisível por $x - x_1$, isto é:

$$P(x) = (x - x_1) \cdot P_1(x) \qquad (I)$$

onde $P_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$, cujo coeficiente dominante é a_n.

Supondo $n - 1 \geqslant 1$, pelo T.F.A. o polinômio $P_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa x_2. Assim, $P_1(x)$ é divisível por $x - x_2$, isto é:

$$P_1(x) = (x - x_2) \cdot P_2(x)$$

onde $P_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$, cujo coeficiente dominante é a_n. Substituindo em (I), temos:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot P_2(x) \qquad \text{(II)}$$

Procedendo de modo semelhante, pelo número necessário de vezes, chegaremos a:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \cdot P_n$$

onde P_n é um polinômio de grau $n - n$, cujo coeficiente dominante é a_n. Como $n - n = 0$, concluímos que P_n é o polinômio constante $\mathbf{a_n}$ e, portanto:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Exercícios Resolvidos

11.1). Resolva a equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual a 2.

Solução

Sendo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, o número 2 é uma das raízes de $P(x)$; portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 2$:

$$P(x) = (x - 2) \cdot P_1(x):$$

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - 2$, obtemos $P_1(x)$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \qquad P_1(x) = 2x^2 + x - 1$$

Portanto, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(2x^2 + x - 1)$.

Assim:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \quad \text{ou} \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

A equação $x - 2 = 0$ nos fornece a raiz 2, que já conhecíamos; portanto, para obtermos as outras raízes, resolvemos a equação $2x^2 + x - 1 = 0$, cujas raízes são -1 e $\frac{1}{2}$. Então, as raízes da equação dada são 2, -1 e $\frac{1}{2}$, isto é, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{2; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

Para completar, podemos dar a decomposição de $P(x)$ em fatores do primeiro grau:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 2(x - 2)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(x + 1)(2x - 1)$$

11.2) Decomponha o polinômio $P(x) = 3x^3 + (-10 - 3i)x^2 + (9 + 7i)x + (-2 - 2i)$ em fatores do primeiro grau, sabendo que uma de suas raízes é o número $1 + i$.

Solução

Se $1 + i$ é raiz de $P(x)$, este é divisível por $x - (1 + i)$:

$$P(x) = [x - (1 + i)] \cdot P_1(x) = (x - 1 - i) \cdot P_1(x)$$

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - (1 + i)$, obtemos $P_1(x)$:

$1 + i$	3	$(-10 - 3i)$	$(9 + 7i)$	$(-2 - 2i)$
	3	-7	2	0

$$P_1(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$, cujas raízes são 2 e $\frac{1}{3}$. Assim, as três raízes de $P(x)$ são $1 + i$, 2 e $\frac{1}{3}$; portanto, a decomposição é:

$$3x^3 + (-10 - 3i)x^2 + (9 + 7i)x + (-2 - 2i) = 3(x - 1 - i)(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (x - 1 - i)(x - 2)(3x - 1)$$

11.3) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$, sabendo que duas de suas raízes são os números 2 e 3.

Solução

Já que 2 e 3 são raízes de $P(x)$, podemos escrever:

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)Q(x)$$

Dividindo $P(x)$ por $x - 2$, obtemos $Q_1(x)$ e, dividindo $Q_1(x)$ por $x - 3$, obtemos $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{x - 2} = \underbrace{(x - 3) \cdot Q(x)}_{Q_1(x)} \qquad \frac{Q_1(x)}{x - 3} = Q(x)$$

Fazendo sucessivamente as duas divisões:

2	1	-8	17	2	-24
3	1	-6	5	12	0
	1	-3	-4	0	

$$Q(x) = x^2 - 3x - 4$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$, cujas raízes são 4 e -1. Portanto, o polinômio $P(x)$, de grau 4, possui 4 raízes distintas, que são os números 2, 3, -1 e 4, podendo assim ser decomposto do seguinte modo:

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)(x - 4)$$

11.4) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9$, sabendo que o número -3 é raiz dupla.

Solução

Se -3 é raiz dupla de $P(x)$, podemos escrever $P(x) = (x + 3)(x + 3) \cdot Q(x)$ isto é, $P(x) = (x + 3)^2 \cdot Q(x)$.

Para obtermos $Q(x)$, fazemos duas divisões sucessivas por $x + 3$:

-3	1	6	10	6	9
-3	1	3	1	3	0
	1	0	1	0	

$$Q(x) = x^2 + 1$$

Para acharmos as outras raízes, resolvemos a equação $x^2 + 1 = 0$, cujas raízes são i e $-i$. Assim, o polinômio $P(x)$, de grau 4, possui 4 raízes (nem todas distintas), que são os números -3 (raiz dupla), i e $-i$. Portanto, $P(x)$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 (x - i)(x + i)$$

11.5) Sabe-se que uma das raízes do polinômio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ é o número 2. Verifique sua multiplicidade.

Solução

Vamos tentar fazer várias divisões sucessivas por $x - 2$, até obtermos uma divisão não exata:

2	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	$\boxed{0}$
2	1	-1	-1	-2	$\boxed{0}$	
2	1	1	1	$\boxed{0}$		
	1	3	$\boxed{7}$			

Conseguimos fazer 3 divisões exatas (a quarta divisão nos deu resto 7), portanto o número 2 é raiz de multiplicidade 3. Podemos, então, escrever:

$$P(x) = (x - 2)^3 \cdot Q(x)$$

onde $Q(x)$ é o quociente da terceira divisão:

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

Assim: $P(x) = (x - 2)^3 (x^2 + x + 1)$

Se quisermos, poderemos obter as outras raízes resolvendo a equação $x^2 + x + 1 = 0$.

11.6) Determine os valores de **a** e **b** de modo que o número -4 seja raiz dupla do polinômio $P(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 + ax + b$. Em seguida, determine as outras raízes.

Solução

Já que -4 é raiz dupla de P(x), temos:

$$P(x) = (x + 4)^2 \cdot Q(x)$$

Isto significa que, fazendo duas divisões sucessivas por $x + 4$, essas duas divisões devem ser exatas (porém, a terceira não pode ser exata):

-4	1	8	17	a	b
-4	1	4	1	$(a - 4)$	$(b - 4a + 16)$
-4	1	0	1	$(a - 8)$	
	1	-4	17		

Devemos ter $\begin{cases} b - 4a + 16 = 0 \\ a - 8 = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 8$ e $b = 16$. (Observemos que a terceira divisão não foi exata: o resto foi igual a 17.) Temos, então:

$$P(x) = (x + 4)^2 \cdot Q(x)$$

onde Q(x) é o quociente da segunda divisão:

$$Q(x) = x^2 + 1$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $x^2 + 1 = 0$, cujas raízes são i e $-i$. Assim, P(x) possui 4 raízes: -4 (dupla), i e $-i$. Podemos, então, fatorar P(x) do seguinte modo:

$$P(x) = (x + 4)^2 (x - i)(x + i)$$

11.7) Determine os valores de **a**, **b**, **c** e **d** de modo que o número **zero** seja raiz tripla do polinômio:

$$P(x) = 2x^5 - 9x^4 + ax^3 + (b - 9)x^2 + (3c - 7)x + d$$

Solução

Se o número 0 é raiz tripla de P(x), temos:

$$P(x) = (x - 0)^3 \cdot Q(x) = x^3 \cdot Q(x)$$

onde Q(x) é um polinômio que **não** se pode anular para $x = 0$.

Poderíamos resolver este problema de modo semelhante ao empregado no exercício anterior, efetuando divisões sucessivas por $x - 0$. No entanto, neste caso, é mais fácil perceber que devemos colocar x^3 em evidência e, para que isto ocorra, os termos de P(x) que possuem grau inferior a 3 devem ter coeficientes nulos:

$$\begin{cases} b - 9 = 0 \\ 3c - 7 = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Obtemos, então, $b = 9$, $c = \frac{7}{3}$ e $d = 0$. Ao mesmo tempo, devemos impor que o coeficiente de x^3 seja diferente de zero, pois, em caso contrário, poderíamos colocar x^4 em evidência; aí o número zero não seria raiz tripla mas sim raiz de multiplicidade 4. Portanto, a resposta do problema é:

$$a \neq 0, \quad b = 9, \quad c = \frac{7}{3}, \quad d = 0$$

11.8) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$ são **a** (dupla) e **b**. Sabendo que $b = 2a$, determine os valores de **a** e **b**.

Solução

O polinômio $P(x)$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = (x - a)^2 (x - b)$$

Efetuando as multiplicações, obtemos:

$$P(x) = x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b$$

mas temos também:

$$P(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$$

Assim, por identidade de polinômios, devemos ter:

$$\begin{cases} 2a + b = 12 \\ 2ab + a^2 = 45 \\ a^2b = 54 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 3$ e $b = 6$.

11.9) Sabe-se que o número 1 é raiz da equação $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^4 = 0$. Determine todas as raízes dessa equação, com as respectivas multiplicidades.

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. O número 1 deve ser raiz de $P(x)$ e, portanto, este é divisível por $x - 1$:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos $Q(x)$:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \qquad Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

As outras raízes de $P(x)$ são as raízes de $Q(x)$. Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtemos as raízes 1 e 3. Assim, as raízes de $P(x)$ são os números 1 (dupla) e 3:

$$P(x) = (x - 1)^2 (x - 3)$$

Portanto:

$$(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^4 = 0 \Leftrightarrow [(x - 1)^2(x - 3)]^4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^8(x - 3)^4 = 0$$

Então, a equação dada possui 12 raízes:

$$\begin{cases} 1 \text{ (multiplicidade 8)} \\ 3 \text{ (multiplicidade 4)} \end{cases}$$

11.10) Determine **m** de modo que o número 2 seja raiz da equação:

$$x^3 + (2m - 1)x^2 + (5 - m)x + 7 = 0$$

Solução

Substituindo a variável **x** pelo número 2, temos:

$$2^3 + (2m - 1)(2)^2 + (5 - m)(2) + 7 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtemos $m = -\frac{7}{2}$.

11.11) Sabe-se que o número -2 é raiz da equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 6 = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$. Determine **m** de modo que todas as raízes da equação sejam reais.

Solução

Tentemos inicialmente fazer o que fizemos no exercício anterior, isto é, vamos substituir **x** por -2:

$$(-2)^3 + (m + 1)(-2)^2 + (2m + 1)(-2) + 6 = 0$$

Porém, ao simplificarmos esta última equação, obtemos:

$$0 = 0$$

Isto significa que, para qualquer valor de **m**, o número -2 é raiz da equação dada. Façamos então:

$$P(x) = x^3 + (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 6$$

Já que -2 é raiz de P(x), este é divisível por $x + 2$:

$$P(x) = (x + 2) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos Q(x):

-2	1	$(m + 1)$	$(2m + 1)$	$+6$
	1	$m - 1$	3	0

$$Q(x) = x^2 + (m - 1)x + 3$$

O polinômio Q(x) é do segundo grau e tem coeficientes reais. Portanto, para que todas as suas raízes sejam reais, devemos ter $\Delta \geqslant 0$:

$$(m - 1)^2 - 4(3) \geqslant 0$$

Resolvendo esta inequação, vem:

$$m \leqslant 1 - 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad m \geqslant 1 + 2\sqrt{3}$$

11.12) Dê um polinômio de grau 3 cujas raízes sejam os números 2 (simples) e 4 (dupla).

Solução

Seja P(x) o polinômio procurado:

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Já que conhecemos suas raízes, podemos escrever:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2 = a_3(x^3 - 10x^2 + 32x - 32)$$

onde $a_3 \neq 0$. Podemos dar infinitos valores para a_3 e, assim, há infinitos polinômios que satisfazem as condições dadas no enunciado do problema; mas, como o problema pediu **apenas um** polinômio, podemos dar um valor qualquer para a_3. Fazendo, por exemplo, $a_3 = 1$, uma resposta para esse problema é $P(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 32$. No capítulo 14 (exercício 14.7) veremos um outro modo de resolver este problema.

11.13) Seja P(x) um polinômio de grau 3 cujas raízes são os números 2 (simples) e 4 (dupla). Determine P(x) em cada um dos casos a seguir:

a) $P(6) = -80$

b) a soma dos coeficientes de P(x) é igual a 45

Solução

a) Este problema é semelhante ao anterior, mas agora temos uma condição adicional: $P(6) = -80$. Do mesmo modo que no problema anterior, temos então:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2$$

Substituindo x pelo número 6, temos:

$$P(6) = a_3(6 - 2)(6 - 4)^2 = -80$$

o que nos dá $a_3 = -10$. Assim:

$$P(x) = -10(x - 2)(x - 4)^2 = -10x^3 + 100x^2 - 320x + 320$$

b) Do mesmo modo que no caso anterior, temos:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2$$

A soma dos coeficientes de P(x) deve ser igual a 45. Mas, de acordo com o que vimos no exercício 6.2, a soma dos coeficientes de P(x) é igual a P(1). Assim:

$$P(1) = a_3(1 - 2)(1 - 4)^2 = 45$$

donde $a_3 = -5$ e $P(x) = -5(x - 2)(x - 4)^2 = -5x^3 + 50x^2 - 160x + 160$

Exercícios Propostos

11.14) Decomponha o polinômio $P(x) = (2 + i)x^2 + (-3 + i)x + (1 - 2i)$.

11.15) Um polinômio P(x), após ser decomposto, ficou:

$$P(x) = \sqrt{3}\,(x - 5)(x + 6)^3(x - \sqrt{2} + 4)^2\left(x - \frac{3}{4} - \frac{2i}{5}\right)^7$$

a) Qual é o grau de $P(x)$?
b) Quantas raízes tem $P(x)$?
c) Quantas raízes distintas tem $P(x)$?
d) Diga quais são as raízes de $P(x)$, com as respectivas multiplicidades.
e) Se fizermos todas as multiplicações e reduzirmos os termos semelhantes, qual será o coeficiente do termo em x^{13}?

11.16) Resolva a equação $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual a -4.

11.17) Decomponha o polinômio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$, sabendo que uma de suas raízes é igual a $\frac{1}{2}$.

11.18) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, sabendo que duas de suas raízes são os números 2 e -1.

11.19) Decomponha o polinômio $A(x) = x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36$, sabendo que o número -2 é raiz dupla.

11.20) Decomponha o polinômio $B(x) = 3x^3 - 7x^2 + (5 + 6i)x - (1 + 2i)$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 - i$.

11.21) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$, sabendo que uma de suas raízes é igual a 4.

11.22) O número -4 é uma das raízes da equação $x^5 + 12x^4 + 47x^3 + 52x^2 - 48x - 64 = 0$. Verifique sua multiplicidade.

11.23) Determine os valores de **p** e **q** de modo que o número 5 seja raiz dupla da equação:

$$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + px + q = 0$$

11.24) Determine os valores de **r**, **s** e **t**, de modo que o número zero seja raiz dupla da equação:

$$7x^4 - 5x^3 + (r - 6)x^2 + (3s - 2)x + (t - 9) = 0$$

11.25) Determine **k**, de modo que o número -3 seja raiz da equação $x^4 - kx^3 + (k - 1)x^2 - 18 = 0$.

11.26) Sabe-se que o número 3 é raiz da equação $x^3 + (k - 5)x^2 + (4 - k)x + (6 - 6k) = 0$, onde **k** é real. Determine **k**, de modo que todas as raízes da equação sejam reais.

11.27) Seja $P(x)$ um polinômio de grau 4 cujas raízes são **i** (dupla), -2 e zero. Determine $P(x)$, sabendo que $P(-1) = -10i$.

11.28) Determine o polinômio $P(x)$, de grau 3, cujas raízes são 4, -2 e 3, sabendo que a soma dos coeficientes é igual a 6.

11.29) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - x + 9 = 3x^2 + x - 15$, sabendo que uma de suas raízes é o número 4.

11.30) Resolva a equação $x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 24x^2 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número 3.

11.31) Resolva a equação $\dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{x^2 + 3}{5x^2 - 8x + 3}$, sabendo que uma de suas raízes é o número 2.

11.32) Resolva a equação $x^3 - 2x - 4 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número 2.

11.7 — ALGUNS ARTIFÍCIOS

Neste item, examinaremos alguns exercícios que, além da teoria já vista, necessitarão de alguns artifícios para serem resolvidos.

Exercícios Resolvidos

11.33) Obtenha as raízes e faça a fatoração do polinômio:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 27x + 54$$

Solução

Aqui, "por sorte", conseguimos fazer uma fatoração por agrupamento:

$$P(x) = \underbrace{x^5 - 2x^4}_{} + \underbrace{6x^3 - 12x^2}_{} - \underbrace{27x + 54}_{} =$$

$$= x^4(x - 2) + 6x^2(x - 2) - 27(x - 2) = (x - 2)(x^4 + 6x^2 - 27)$$

Assim:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + 6x^2 - 27) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 & \text{(I)} \\ \quad \text{ou} \\ x^4 + 6x^2 - 27 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A equação (I) nos dá a raiz 2 e a equação (II) nos dá as raízes $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $3i$ e $-3i$. Portanto, o conjunto-solução da equação $P(x) = 0$ é:

$$S = \{2;\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ 3i;\ -3i\}$$

e a fatoração de $P(x)$ é:

$$P(x) = (x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 3i)(x + 3i)$$

11.34) Decomponha o polinômio $P(x)$ do exercício anterior, no campo real.

Solução

Neste caso não devemos considerar as raízes imaginárias. Assim, ao resolvermos a equação $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$, temos:

$$x^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2}$$

isto é, $x^2 = 3$ ou $x^2 = -9$. Portanto:

$$x^4 + 6x^2 - 27 = (x^2 - 3)(x^2 + 9) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 9)$$

Temos, então:

$$P(x) = (x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 9)$$

Um outro modo de resolver esse problema é, primeiramente, fazer a decomposição no campo complexo:

$$P(x) = (x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3i)(x - 3i)$$

para, em seguida, fazer a multiplicação dos termos em que aparecem raízes imaginárias:

$$(x + 3i)(x - 3i) = x^2 + 9$$

11.35) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 1$ em fatores do primeiro grau.

Solução

1.° modo

Vamos achar as raízes de $P(x)$:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são as raízes quartas de -1:

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, temos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

isto é:

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2.° modo

Podemos usar o artifício de somar e subtrair um mesmo termo, de modo a cair em algum caso conhecido de fatoração:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2) = \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

Se o problema tivesse pedido a fatoração no campo real, deveríamos parar aqui. Mas como foi pedida a fatoração em termos do primeiro grau, devemos continuar determinando as raízes de $x^2 + 1 + \sqrt{2}x$ e $x^2 + 1 - \sqrt{2}x$, que são:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estas são as mesmas raízes que obtivemos pelo primeiro modo e, obviamente, a resposta será a mesma.

11.36) Resolva a equação $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Solução

1.° modo

Podemos fazer a mudança de variável $y = x^2$. Com isso temos:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 0$$

Resolvendo esta última equação obteremos as raízes y_1 e y_2. Em seguida, resolvemos as equações:

$$\begin{cases} x^2 = y_1, \text{ de raízes } x_1 \text{ e } x_2 \\ \quad \text{e} \\ x^2 = y_2, \text{ de raízes } x_3 \text{ e } x_4 \end{cases}$$

Finalmente teríamos:

$$P(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

No entanto, neste caso, há um modo mais rápido, que veremos em seguida.

2.º modo

Temos:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

Assim:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + x = 0 & \text{(I)} \\ \quad \text{ou} \\ x^2 + 1 - x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{A equação (I) tem raízes } \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \\ \\ \text{A equação (II) tem raízes } \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

11.37) Resolva a equação $x^2 + (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5} = 0$.

Solução

$$\Delta = (2 + \sqrt{5})^2 - 4(2\sqrt{5}) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 8\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2$$

Assim:

$$x = \frac{(2 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{(2 + \sqrt{5}) \pm (2 - \sqrt{5})}{2}$$

donde: $x_1 = 2$ e $x_2 = \sqrt{5}$:

$$S = \{2; \sqrt{5}\}$$

11.38) Resolva a equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solução

A seqüência:

$$(1;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4)$$

é uma progressão geométrica (PG) de razão igual a x. Assim, usando a fórmula da soma dos termos de uma PG (veja capítulo 6 do volume 2 desta coleção), temos:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

É óbvio que a igualdade anterior só é válida para $x \neq 1$; porém, por simples verificação, concluímos que o número 1 não é raiz da equação dada. Assim:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 - 1 = 0 \\ \text{e} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = 1 \\ \text{e} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação dada são as raízes quintas do número 1, com exceção do número 1:

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} & \omega_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5} \\ \omega_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5} & \omega_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

Se quisermos, poderemos indicar essas raízes de modo mais "compacto", lembrando que:

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} & \text{sen}\,\frac{2\pi}{5} = -\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5} \\ \cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} & \text{sen}\,\frac{4\pi}{5} = -\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5} \end{cases}$$

Assim, podemos dizer que as raízes procuradas são:

$$\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} \ \text{e}\ \cos\frac{4\pi}{5} \pm i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}$$

No capítulo 4 do volume 3 desta coleção, vimos que $\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. A partir daí, se quiséssemos, poderíamos obter $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$, $\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}$ e $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Poderíamos, também, observar que:

$$\omega_2 = \omega_1^2,\ \omega_3 = \omega_1^3,\ \omega_4 = \omega_1^4$$

Fazendo $\omega_1 = \omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$, poderíamos dizer que o conjunto-solução da equação é:

$$S = \{\omega;\ \omega^2;\ \omega^3;\ \omega^4\}$$

Este exercício será resolvido de outro modo no capítulo 16 (exercício 16.3).

11.39) Resolva a equação $(z-1)^6 = (z-3)^6$.

Solução

É fácil verificar que o número 1 não é solução da equação (isto é, $z \neq 1$). Portanto:

$$(z-1)^6 = (z-3)^6 \Leftrightarrow \frac{(z-3)^6}{(z-1)^6} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z-3}{z-1}\right)^6 = 1$$

Sejam ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 as raízes sextas do número 1 (com $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^2$, $\omega_3 = \omega^3$, $\omega_4 = \omega^4$, $\omega_5 = \omega^5$). Sendo ω_j uma delas, temos:

$$\frac{z-3}{z-1} = \omega_j$$

Isolando **z**, obtemos $z = \dfrac{\omega_j - 3}{\omega_j - 1}$.

Nesta última equação, vemos que $\omega_j \neq 1$ e, portanto, a raiz $\omega_0 = 1$ não serve. Sendo, então:

$$\omega_1 = \omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

o conjunto-solução é:

$$S = \left\{\frac{\omega-3}{\omega-1};\ \frac{\omega^2-3}{\omega^2-1};\ \frac{\omega^3-3}{\omega^3-1};\ \frac{\omega^4-3}{\omega^4-1};\ \frac{\omega^5-3}{\omega^5-1}\right\}$$

11.40) Mostre que os pontos representativos das raízes da equação $(z-1)^6 = (z-3)^6$ estão sobre uma reta.

Solução

$$(z-1)^6 = (z-3)^6 \Rightarrow |z-1| = |z-3|$$

De acordo com o que vimos no capítulo 3 deste volume, a equação $|z-1| = |z-3|$ representa a reta de equação $x = 2$.

Assim, as raízes da equação $(z-1)^6 = (z-3)^6$ são representadas por pontos (apenas alguns) que estão sobre a reta de equação $x = 2$.

11.41) Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + 21x^2 - 32x + 80 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é um número imaginário puro.

Solução

Seja **ai** (com $a \in \mathbb{R}^*$) a raiz imaginária pura da equação. Fazendo a substituição, temos:

$$(ai)^4 - 2(ai)^3 + 21(ai)^2 - 32(ai) + 80 = 0$$

donde:

$$(a^4 - 21a^2 + 80) + (2a^3 - 32a)i = 0$$

Ficamos, então, com as equações:

$$\begin{cases} a^4 - 21a^2 + 80 = 0 & \text{(I)} \\ \quad \text{e} & \\ 2a^3 - 32a = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{A equação (I) nos dá } a = \pm 4 \text{ ou } a = \pm\sqrt{5}. \\ \text{A equação (II) nos dá } a = 0 \text{ ou } a = \pm 4. \end{cases}$

Para satisfazer simultaneamente as duas equações, ficamos com $a = \pm 4$. Portanto, a equação dada admite duas raízes imaginárias puras: $4i$ e $-4i$. Daí concluímos que o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 21x^2 - 32x + 80$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = \underbrace{(x - 4i)(x + 4i)}_{x^2 + 16} \cdot A(x).$$

Dividindo $P(x)$ por $x^2 + 16$ (ou fazendo uma divisão por $x - 4i$ e, em seguida, outra por $x + 4i$), obtemos $A(x) = x^2 - 2x + 5$, cujas raízes são $1 + 2i$ e $1 - 2i$. Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{4i;\ -4i;\ 1 + 2i;\ 1 - 2i\}$$

11.42) Consideremos o polinômio $P(x) = x^n - 1$, com $n > 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Sabendo que $r_1 = 1$, calcule o valor de $(5 - r_2) \cdot (5 - r_3) \ldots (5 - r_n)$.

Solução

Sendo $P(x) = (x - 1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$, temos:

$$\frac{P(x)}{x - 1} = \underbrace{(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)}_{A(x)}$$

Percebemos, então, que:

$$(5 - r_2)(5 - r_3) \ldots (5 - r_n) = A(5)$$

Fazendo a divisão de $P(x)$ por $x - 1$, obtemos:

$$A(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1$$

Daí temos:

$$A(5) = 5^{n-1} + 5^{n-2} + 5^{n-3} + \ldots + 5^2 + 5 + 1 \qquad \text{(I)}$$

O "lado direito" da igualdade (I) é a soma dos termos de uma progressão geométrica de **n** termos e razão igual a 5. Portanto:

$$(5 - r_2) \cdot (5 - r_3) \ldots (5 - r_n) = A(5) = \frac{5^n - 1}{4}$$

11.43) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 + (-5 - 2i)x^2 + (7 + 7i)x + (-2 - 6i)$, sabendo que ele tem uma raiz real.

Solução

Seja a a raiz real de $P(x)$. Devemos ter, então, $P(a) = 0$, isto é:

$$a^3 + (-5 - 2i)a^2 + (7 + 7i)a + (-2 - 6i) = 0$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos de modo que fiquem separadas as partes real e imaginária, obtemos:

$$(a^3 - 5a^2 + 7a - 2) + (-2a^2 + 7a - 6)i = 0$$

Tanto a parte real como a parte imaginária devem ser nulas:

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 & \text{(I)} \\ -2a^2 + 7a - 6 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a equação (II), obtemos as raízes 2 e $\frac{3}{2}$. Por substituição, podemos verificar que, destas raízes, apenas o número 2 satisfaz também a equação (I). Assim, concluímos que $a = 2$, isto é, a raiz real de $P(x)$ é o número 2. Portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 2$:

$$P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos $Q(x)$:

2	1	$(-5 - 2i)$	$(7 + 7i)$	$(-2 - 6i)$
	1	$(-3 - 2i)$	$(1 + 3i)$	0

$$Q(x) = x^2 + (-3 - 2i)x + (1 + 3i)$$

Podemos, em seguida, obter as raízes de $Q(x)$, que são $1 + i$ e $2 + i$. Assim, as raízes de $P(x)$ são os números 2, $1 + i$, $2 + i$, e sua decomposição é:

$$x^3 + (-5 - 2i)x^2 + (7 + 7i)x + (-2 - 6i) = (x - 2)(x - 1 - i)(x - 2 - i)$$

Exercícios Propostos

11.44) Decomponha o polinômio $P(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108$.

11.45) Resolva a inequação $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 < 0$, no universo dos reais.

11.46) Resolva a equação $x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$.

11.47) Resolva a equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

11.48) Resolva a equação $(z - 3)^5 = z^5$.

11.49) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é um número imaginário puro.

11.50) Consideremos o polinômio $P(x) = x^n - 1$, com $n > 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$. Sabendo que $r_1 = 1$, calcule os valores de:

a) $(3 - r_2) \cdot (3 - r_3) \cdot \dots \cdot (3 - r_n)$ b) $(1 - r_2) \cdot (1 - r_3) \cdot \dots \cdot (1 - r_n)$

11.51) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 + (-6 + 2i)x^2 + (10 - 9i)x + (-3 + 9i)$, sabendo que ele possui uma raiz real.

11.52) A equação $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) + 5 = 0$ tem raízes **r**, **s** e **t**. Quais as raízes da equação $(x - r)(x - s)(x - t) - 5 = 0$?

11.53) Consideremos uma equação algébrica de grau 20. Qual o número máximo de raízes distintas que essa equação pode ter?

11.54) Consideremos dois polinômios A(x) e B(x), ambos de grau $n \geq 1$. Suponhamos que os valores numéricos de A(x) e B(x) coincidam para $n + 1$ valores distintos de x: $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$. Demonstre que, neste caso, A(x) e B(x) são idênticos.

11.8 — POLINÔMIOS DE MESMAS RAÍZES

Consideremos dois polinômios A(x) e B(x), de mesmo grau $n > 0$, que tenham as mesmas raízes, com as mesmas multiplicidades:

$$\begin{cases} A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 & \text{(I)} \\ B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Sendo $r_1, r_2, \ldots r_n$ as raízes, vem:

$$\begin{cases} A(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) & \text{(III)} \\ B(x) = b_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) & \text{(IV)} \end{cases}$$

Observando (III) e (IV), concluímos que:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_n}{b_n} = k$$

isto é:

$$A(x) = k \cdot B(x) \qquad \text{(V)}$$

onde **k** é uma constante não nula.

Substituindo (I) e (II) em (V), temos:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = kb_n x^n + kb_{n-1} x^{n-1} + \ldots + kb_1 x + kb_0$$

donde, por identidade de polinômios, concluímos que:

$$\begin{cases} a_n = k \cdot b_n \\ a_{n-1} = k \cdot b_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = k \cdot b_1 \\ a_0 = k \cdot b_0 \end{cases}$$

Em outras palavras, podemos dizer que os coeficientes correspondentes são proporcionais.

Exemplo

Consideremos o polinômio $A(x) = 3x^2 - 7x + 9$. Multiplicando-o pela constante $k = 10$, obtemos o polinômio $B(x) = 30x^2 - 70x + 90$, que deve ter as mesmas raízes de A(x), com as mesmas multiplicidades.

Capítulo

12

Raízes múltiplas

12.1 — RAÍZES MÚLTIPLAS E DERIVADAS — TEOREMA

Consideremos um polinômio P(x) de grau $n \geqslant 1$, que possui uma raiz **c** de multiplicidade $m > 1$. Conforme vimos no capítulo anterior, P(x) poderá ser escrito na forma:

$$P(x) = (x - c)^m \cdot A(x)$$

com $A(c) \neq 0$, isto é, não sendo **c** raiz de A(x). Seja $P^{(1)}(x)$ o polinômio derivado de P(x). Vale, então, o teorema (que será demonstrado no item seguinte):

$$\boxed{\mathbf{c \text{ é raiz de multiplicidade } m - 1 \text{ de } P^{(1)}(x)}} \qquad (12.1)$$

isto é, podemos decompor $P^{(1)}(x)$ na forma:

$$P^{(1)}(x) = (x - c)^{m-1} \cdot B(x)$$

onde $B(c) \neq 0$.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio:

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

que pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = (x - 1)^3 \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{A(x)}$$

A derivada primeira de P(x) é o polinômio:

$$P^{(1)}(x) = 5x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 14x + 4$$

que pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$P^{(1)}(x) = (x - 1)^2 \cdot \underbrace{(5x^2 - 6x + 4)}_{B(x)}$$

Observando que $A(1) \neq 0$, e $B(1) \neq 0$, podemos dizer que:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 3 \text{ de } P(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 2 \text{ de } P^{(1)}(x) \end{array}\right.$$

b) Consideremos novamente o polinômio $P(x)$ do exemplo anterior:

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

Conforme vimos, o número 1 é raiz tripla de $P(x)$. Determinemos algumas das derivadas sucessivas de $P(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} P^{(1)}(x) = 5x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 14x + 4 \\ P^{(2)}(x) = 20x^3 - 48x^2 + 42x - 14 \\ P^{(3)}(x) = 60x^2 - 96x + 42 \end{array}\right.$$

Aplicando-se várias vezes o teorema 12.1, podemos dizer que:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 3 \text{ de } P(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 2 \text{ de } P^{(1)}(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 1 \text{ de } P^{(2)}(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 0 \text{ de } P^{(3)}(x) \end{array}\right.$$

isto é, o número 1 não é raiz de $P^{(3)}(x)$.
Embora não tenhamos definido anteriormente, passaremos a usar a frase:

"**k** é raiz de multiplicidade 0 de P(x)"

com o seguinte significado:

"**k não** é raiz de P(x)".

O exemplo *b* anterior ilustra uma conseqüência do teorema 12.1:

Se o número **c** é raiz de multiplicidade **m** (com $m \geqslant 1$) do polinômio $P(x)$, então será também raiz dos polinômios:

$$P^{(1)}(x),\ P^{(2)}(x), \ldots,\ P^{(m-1)}(x) \qquad (12.2)$$

com multiplicidades respectivamente iguais a:

$$m-1,\ m-2, \ldots,\ 1$$

mas não será raiz de $P^{(m)}(x)$.

12.2 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Temos, então:

$$P(x) = (x-c)^m \cdot A(x)$$

com $A(c) \neq 0$. Usando a regra da derivada do produto, vem:

$$P^{(1)}(x) = m(x-c)^{m-1} \cdot A(x) + (x-c)^m \cdot A^{(1)}(x) =$$

$$= (x-c)^{m-1} \cdot \underbrace{[m \cdot A(x) + (x-c)A^{(1)}(x)]}_{B(x)} = (x-c)^{m-1} \cdot B(x)$$

Portanto, para demonstrar que c é raiz de multiplicidade $m-1$ de $P^{(1)}(x)$, basta mostrarmos que $B(c) \neq 0$. De fato:

$$B(c) = [m \cdot A(c) + (c-c)A^{(1)}(c)] = m \cdot A(c)$$

mas, como $A(c) \neq 0$, concluímos que $B(c) \neq 0$.

Teorema

Pode-se demonstrar que:

> Se o número **c** é raiz dos polinômios:
>
> $P(x), P^{(1)}(x), P^{(2)}(x), \ldots, P^{(m-1)}(x)$
>
> mas não é raiz de $P^{(m)}(x)$, então será raiz de multiplicidade **m** de $P(x)$.

(12.3)

Observação: No capítulo 17 veremos um outro processo para a pesquisa de raízes múltiplas.

Exercícios Resolvidos

12.1) Mostre que o número 2 é raiz tripla do polinômio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 11 (exercício 11.5). Agora vamos resolvê-lo de outro modo. Temos:

$$\begin{cases} P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ P^{(1)}(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4 \\ P^{(2)}(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4 \\ P^{(3)}(x) = 60x^2 - 120x + 42 \end{cases}$$

Podemos verificar que $P(2) = 0$, $P^{(1)}(2) = 0$, $P^{(2)}(2) = 0$ e $P^{(3)}(2) = 0$.

Assim, de acordo com o teorema 12.3, podemos afirmar que o número 2 é raiz de multiplicidade 3 de P(x).

12.2) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla (multiplicidade 2).

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$. Se o número c é raiz de multiplicidade 2 de P(x), será raiz de multiplicidade 1 de $P^{(1)}(x)$.

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 - 14x + 15$$

Determinemos as raízes de $P^{(1)}(x)$:

$$3x^2 - 14x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = 3$$

Portanto, c pode ser $\frac{5}{3}$ ou 3. Fazendo as substituições (ou usando Briot-Ruffini), obtemos:

$$P\left(\frac{5}{3}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad P(3) = 0$$

Assim, concluímos que $c = 3$, isto é, a raiz dupla procurada é o número 3 e, portanto, P(x) pode ser escrito:

$$P(x) = (x - 3)^2 \cdot Q(x)$$

Determinemos Q(x):

3	1	−7	15	−9
3	1	−4	3	0
	1	−1	0	

$$Q(x) = x - 1$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{3;\ 1\}$$

12.3) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (4 + 2i)x^2 + (4 + 6i)x - 4i$, sabendo que ele tem uma raiz dupla.

Solução

Derivando P(x), obtemos: $P^{(1)}(x) = 3x^2 - (8 + 2i)x + (4 + 6i)$.

Podemos obter as raízes de $P^{(1)}(x)$, que são $1 + i$ e $\frac{5 + i}{3}$

Uma delas será raiz dupla de P(x). Fazendo as verificações obtemos:

$$P(1 + i) = 0 \quad \text{e} \quad P\left(\frac{5 + i}{3}\right) \neq 0$$

Assim, $1 + i$ é a raiz dupla de $P(x)$ que procuramos:

$$P(x) = [x - (1 + i)]^2 \cdot Q(x)$$

Fazendo duas divisões sucessivas por $x - (1 + i)$, obtemos $Q(x)$:

$1 + i$	1	$(-4 - 2i)$	$(4 + 6i)$	$-4i$
$1 + i$	1	$(-3 - i)$	$(2 + 2i)$	0
	1	-2	0	

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são $1 + i$ (dupla) e 2 (simples).

12.4) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, sabendo que admite uma raiz tripla.

Solução

Temos, então:

$$P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$
$$P^{(2)}(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

Sendo c a raiz tripla de $P(x)$, deverá também ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$. As raízes de $P^{(2)}(x)$ são -1 e $\frac{1}{2}$. Portanto, c pode ser igual a -1 ou $\frac{1}{2}$. Fazendo as verificações, obtemos:

$$P(-1) = 0 \quad \text{e} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

Assim, a raiz tripla procurada é $c = -1$:

$$P(x) = (x + 1)^3 \cdot Q(x)$$

Fazendo três divisões sucessivas por $x + 1$, obtemos $Q(x)$:

-1	1	1	-3	-5	-2
-1	1	0	-3	-2	0
-1	1	-1	-2	0	
	1	-2	0		

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são -1 e 2.

12.5) Determine o valor de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + kx - 2$ admita uma raiz tripla. Depois determine as raízes.

Solução

A raiz tripla c de P(x) deverá ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$, porém não poderá ser raiz de $P^{(3)}(x)$. Temos, então:

$$\begin{cases} P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + k \\ P^{(2)}(x) = 12x^2 + 6x - 6 \\ P^{(3)}(x) = 24x + 6 \end{cases}$$

$$P^{(2)}(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Portanto, os possíveis valores de **c** são -1 e $\frac{1}{2}$

1.ª possibilidade: $c = -1$

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + (-1)^3 - 3(-1)^2 + k(-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -5$$

Assim: $\begin{cases} P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \end{cases}$

Por substituição, verificamos que:

$$P^{(1)}(-1) = 0 \text{ e } P^{(3)}(-1) \neq 0$$

Portanto, uma possibilidade é $k = -5$ e $c = -1$; teremos:

$$P(x) = (x + 1)^3 \cdot Q(x)$$

-1	1	1	-3	-5	-2
-1	1	0	-3	-2	0
-1	1	-1	-2	0	
	1	-2	0		

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, para $k = -5$, as raízes são -1 e 2.

2.ª possibilidade: $c = \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{41}{8}$$

Assim: $\begin{cases} P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + \dfrac{41}{8}x - 2 \\ P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + \dfrac{41}{8} \end{cases}$

Por substituição, verificamos que $P^{(1)}\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0$ e, portanto, a possibilidade $c = \dfrac{1}{2}$ não serve.

Em resumo, a resposta do exercício é:

$$\begin{cases} k = -5 \\ \text{raízes: } -1 \text{ e } 2 \end{cases}$$

12.6) Determine os valores de **m** e **n** de modo que o polinômio:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + (m - 1)x + (2n - 2)$$

admita uma raiz tripla.

Solução

A raiz tripla **c** de P(x) deverá ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$, porém não poderá ser raiz de $P^{(3)}(x)$. Temos, então:

$$\begin{cases} P^{(1)}(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + (m - 1) \\ P^{(2)}(x) = 12x^2 - 30x + 12 \\ P^{(3)}(x) = 24x - 30 \end{cases}$$

$$P^{(2)}(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 30x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Portanto, os possíveis valores de **c** são 2 e $\dfrac{1}{2}$.

Observemos que $P^{(3)}(2) \neq 0$ e $P^{(3)}\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0$.

1.ª possibilidade: $c = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + (m-1)\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2n - 2 = 0 \Leftrightarrow 8m + 32n = 25 \\ P^{(1)}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 15\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\dfrac{1}{2}\right) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Daí temos $m = -\dfrac{7}{4}$ e $n = \dfrac{39}{32}$.

2.ª possibilidade: $c = 2$

$$\begin{cases} P(2) = 0 \Leftrightarrow (2)^4 - 5(2)^3 + 6(2)^2 + (m-1)(2) + 2n - 2 = 0 \Leftrightarrow m + n = 2 \\ P^{(1)}(2) = 0 \Leftrightarrow 4(2)^3 - 15(2)^2 + 12(2) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \end{cases}$$

Daí tiramos $m = 5$ e $n = -3$.

Portanto, a resposta do problema é:

$$m = -\frac{7}{4} \text{ e } n = \frac{39}{32}$$

ou

$$m = 5 \text{ e } n = -3$$

Exercícios Propostos

12.7) Resolva a equação $x^3 + 7x^2 + 6x + 12 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

12.8) Resolva a equação $x^3 - (5 - 2i)x^2 + (6 - 8i)x + 6i = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

12.9) Resolva a equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0$, sabendo que admite uma raiz tripla.

12.10) Determine **k** de modo que a equação $x^3 + 9x^2 + 24x + k = 0$ admita uma raiz dupla.

12.11) Determine o valor de **k** de modo que a equação $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + kx + 8 = 0$ admita uma raiz tripla. Depois resolva a equação.

12.12) Determine os valores de **k** e **t** de modo que a equação $x^4 + x^3 - 3x^2 + kx + t = 0$ admita uma raiz tripla.

12.13) Determine o valor de **k** de modo que a equação $x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 8x + k = 0$ admita uma raiz dupla real e negativa.

12.14) Determine o valor de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + (k-4)x^2 + (4-4k)x + 4k$ admita o número 2 como raiz dupla.

Capítulo

13 Raízes imaginárias

13.1 — TEOREMA DAS RAÍZES CONJUGADAS

> Consideremos um polinômio P(x) de grau **n** e coeficientes reais. Se o número imaginário $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$) é raiz de P(x), temos:
>
> a) $\bar{z}$ também é raiz de P(x);
> b) $\bar{z}$ tem a mesma multiplicidade de **z**.

(13.1)

Demonstração

a) Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são números reais. Se **z** é raiz de P(x), temos $P(z) = 0$:

$$P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{(I)}$$

Calculemos $P(\bar{z})$:

$$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{(II)}$$

Já que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são reais, temos:

$$a_n = \overline{a_n}$$
$$a_{n-1} = \overline{a_{n-1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 = \overline{a_0}$$

Usando esse fato e lembrando que para um número complexo qualquer ω vale:

$$(\overline{\omega})^n = \overline{(\omega^n)}$$

a igualdade (II) transforma-se em:

$$P(\bar{z}) = \overline{a_n}(\overline{z^n}) + \overline{a_{n-1}}(\overline{z^{n-1}}) + \ldots + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0)} = \overline{P(z)} = 0$$

Assim, se $P(\bar{z}) = 0$, $\bar{z}$ é raiz de $P(x)$.

b) Temos $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$. Suponhamos que **z** seja raiz de multiplicidade **m** (com $m \geqslant 1$). Já que **z** e $\bar{z}$ são raízes de $P(x)$, temos:

$$P(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \cdot A(x) = [x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}] \cdot A(x) =$$

$$= \underbrace{[x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)]}_{B(x)} \cdot A(x)$$

Observando que $P(x)$ e $B(x)$ têm coeficientes reais, concluímos que $A(x)$ também tem coeficientes reais.

Se **z** for raiz simples de $P(x)$ (isto é, $m = 1$), então **z** não será raiz de $A(x)$ e, portanto, $\bar{z}$ também não será raiz de $A(x)$; isto nos leva a concluir que $\bar{z}$ também será raiz simples. Em outras palavras, se **z** é raiz simples, $\bar{z}$ também é raiz simples de $P(x)$.

Se $m > 1$, então **z** deverá ser raiz de $A(x)$; mas, levando em conta que $A(x)$ possui coeficientes reais, $\bar{z}$ também será raiz de $A(x)$.

Aplicando-se esse raciocínio o número necessário de vezes, chegaremos à conclusão de que **z** e $\bar{z}$ têm a mesma multiplicidade.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$.
Suponhamos que alguém nos informe que o número $z = 2 + i$ seja raiz de $P(x)$. Observando que os coeficientes do polinômio são todos **reais**, concluímos que o número $\bar{z} = 2 - i$ também deve ser raiz de $P(x)$.

b) Consideremos o polinômio $P(x) = x^2 - (4 + 2i)x + (2 + 4i)$.
Observemos que alguns de seus coeficientes são **imaginários**; disso resulta que para esse polinômio **não** se aplica o teorema 13.1. De fato, se determinarmos as raízes de $P(x)$, obteremos $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 + i$; no entanto, os números $\bar{z}_1 = 3 - i$ e $\bar{z}_2 = 1 - i$ **não** são raízes de $P(x)$.

c) Sabe-se que o número $z = -3i$ é raiz dupla do polinômio:

$$P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$$

Como todos os coeficientes de $P(x)$ são reais, o número $\bar{z} = 3i$ também é raiz dupla de $P(x)$. Donde, podemos escrever:

$$P(x) = (x + 3i)^2 (x - 3i)^2 \cdot A(x)$$

Observação: Nos capítulos 11 e 12 apresentamos teoremas que valem para polinômios de coeficientes complexos; neste capítulo, enunciamos um teorema que vale apenas quando os coeficientes são reais. Nos próximos teoremas, devemos observar cuidadosamente para que "tipos" de coeficientes eles valem.

13.2 – CONSEQÜÊNCIA

Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Como conseqüência do teorema anterior, temos que o número de raízes imaginárias de P(x) é sempre par. Assim, se P(x) for de grau ímpar, terá um número ímpar de raízes reais (isto é, pelo menos uma raiz real).

Propriedade

Para facilitar nosso trabalho em alguns exercícios, chamaremos a atenção para um detalhe. Consideremos os números imaginários $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$). Sendo P(x) um polinômio de coeficientes reais, suponhamos que **z** seja raiz de P(x); nesse caso, $\bar{\mathbf{z}}$ também é raiz de P(x), portanto podemos escrever:

$$P(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \cdot A(x)$$

Fazendo o produto dos dois termos correspondentes às raízes conjugadas, temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - (bi)][(x - a) + (bi)] =$$
$$= (x - a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

Observe que $-2a$ é real e $a^2 + b^2$ também é real.

O produto de dois termos correspondentes a duas raízes imaginárias conjugadas apresenta sempre um polinômio de grau 2 de coeficientes reais (é este o detalhe que queríamos ressaltar).

Exercícios Resolvidos

13.1) Qual o menor grau possível para um polinômio P(x) de coeficientes reais e de grau $n > 0$ que admite os números 2, 5 e $7 + i$ como raízes?

Solução

Já que P(x) tem coeficientes reais e $7 + i$ é raiz, concluímos que $7 - i$ também é raiz. Assim, P(x) terá no mínimo quatro raízes:

$$2,\ 5,\ 7 + i \text{ e } 7 - i$$

Portanto, P(x) é no mínimo de grau 4.

13.2) Dê um polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números 2 e $1 + i$.

Solução

Se $1 + i$ é raiz, $1 - i$ também o é. Assim, P(x) terá no mínimo três raízes e será, no mínimo, de grau 3.

Assim:

$$P(x) = a_n(x - 2)[x - (1 + i)][x - (1 - i)] \qquad \text{(I)}$$

De acordo com o que destacamos no item 13.3, temos:

$$[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - 2(1)x + (1^2 + 1^2) = x^2 - 2x + 2$$

Substituindo em (I), vem:

$$P(x) = a_n(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = a_n(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$$

Fazendo $a_n = 1$, obtemos um dos polinômios que satisfaz as condições do problema:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

13.3) Dê um polinômio P(x) de coeficientes complexos, de menor grau possível, que admita como raízes os números 2 e $1 + i$.

Solução

Este exercício assemelha-se ao anterior. Naquele, pedíamos que o polinômio tivesse coeficientes reais; neste, estamos pedindo que os coeficientes sejam complexos. Então, não é necessário que o número $1 - i$ seja raiz do polinômio. Temos, então:

$$P(x) = a_n(x - 2)[x - (1 + i)] = a_n[x^2 - (3 + i)x + (2 + 2i)]$$

Fazendo $a_n = 1$, obtemos um polinômio que satisfaz a condição do exercício:

$$P(x) = x^2 - (3 + i)x + (2 + 2i)$$

13.4) Dê um polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números 7, $3 - i$ e $5i$, com multiplicidades 1, 3 e 2, respectivamente.

Solução

$$\begin{cases} 7 \text{ é raiz simples} \\ 3 - i \text{ é raiz tripla} \Rightarrow 3 + i \text{ é raiz tripla} \\ 5i \text{ é raiz dupla} \Rightarrow -5i \text{ é raiz dupla} \end{cases}$$

Assim, P(x) admite no mínimo 11 raízes e é no mínimo de grau 11. Podemos, então, escrever:

$$P(x) = a_n(x - 7) \cdot [x - (3 - i)]^3 \cdot [x - (3 + i)]^3 \cdot (x - 5i)^2 \cdot (x + 5i)^2$$

onde a_n é um número real qualquer, não nulo.

13.5) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$. Como os coeficientes são todos reais e o número $2 + i$ é raiz, concluímos que o número $2 - i$ também é raiz. Portanto, podemos escrever:

$$P(x) = [x - (2 + i)]\,[x - (2 - i)] \cdot A(x) \qquad \text{(I)}$$

Para obtermos A(x), podemos fazer uma divisão por $x - (2 + i)$ e, em seguida, outra por $x - (2 - i)$:

$$\begin{array}{c|cccc}
2+i & 1 & -7 & 17 & -15 \\
\hline
2-i & 1 & -5+i & 6-3i & 0 \\
 & 1 & -3 & 0 &
\end{array}$$

$$A(x) = x - 3$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{3;\ 2 + i;\ 2 - i\}$$

No entanto, poderíamos ter obtido A(x) de outro modo. De acordo com o que vimos no item 13.3, temos:

$$[x - (2 + i)]\,[x - (2 - i)] = x^2 - 2(2)x + (2^2 + 1^2) = x^2 - 4x + 5$$

Substituindo em (I):

$$P(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot A(x)$$

Portanto, podemos obter A(x) dividindo P(x) por $x^2 - 4x + 5$, utilizando o método da chave:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 - 7x^2 + 17x - 15 & & x^2 - 4x + 5 \\
\cline{3-3}
-x^3 + 4x^2 - 5x & & x - 3 \\
\cline{1-1}
-3x^2 + 12x - 15 & & \\
3x^2 - 12x + 15 & & \\
\cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

$$\boxed{A(x) = x - 3}$$

No capítulo 14 resolveremos este exercício de outro modo (exercício 14.5).

13.6) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$, sabendo que o número $3i$ é raiz dupla.

Solução

Os coeficientes de P(x) são reais. Portanto, se $3i$ é raiz dupla, $-3i$ também o é. Logo:

$$P(x) = (x - 3i)^2(x + 3i)^2 \cdot A(x)$$

Para obtermos A(x), fazemos duas divisões sucessivas por $x - 3i$ e duas divisões por $x + 3i$:

$3i$	1	-1	18	-18	81	-81
$3i$	1	$-1+3i$	$9-3i$	$-9+27i$	$-27i$	0
$-3i$	1	$-1+6i$	$-9-6i$	9	0	
$-3i$	1	$-1+3i$	$-3i$	0		
	1	-1	0			

$$A(x) = x - 1$$

Como a raiz de A(x) é o número 1, concluímos que as raízes de P(x) são: $3i$ (dupla), $-3i$ (dupla) e 1 (simples).

Este exercício será resolvido de outro modo no capítulo 14 (exercício 14.6).

13.7) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 11x + m$ admita uma raiz imaginária de módulo igual a 1.

Solução

Seja $z = a + bi$ a raiz imaginária mencionada. Já que $|z| = 1$, temos $a^2 + b^2 = 1$. Como os coeficientes de P(x) são reais, $\bar{z}$ também é raiz de P(x); assim, concluímos que P(x) é divisível por $(x - z)(x - \bar{z})$. Mas, de acordo com o que vimos no item 13.3, temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 \underbrace{-2a}_{k} x + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{1} = \underbrace{x^2 + kx + 1}_{A(x)}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. As raízes de A(x) são ambas imaginárias e, portanto, seu discriminante deve ser negativo:

$$\Delta = k^2 - 4 < 0$$

Assim:

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x)$$

Façamos a divisão de P(x) por A(x):

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +\ 2x^2 & -11x & +\ m & x^2 + kx + 1 \\
\cline{5-5}
-5x^3 & -\ 5kx^2 & -5x & & \underbrace{5x + (2 - 5k)}_{Q(x)} \\
\cline{1-3}
 & (2-5k)x^2 & -16x & +\ m & \\
 & -(2-5k)x^2 & -(2k-5k^2)x & -(2-5k) & \\
\cline{1-4}
 & & (5k^2 - 2k - 16)x & +\ (5k - 2 + m) &
\end{array}$$

Como o resto dessa divisão deve ser identicamente nulo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 5k^2 - 2k - 16 = 0 & \text{(I)} \\ 5k - 2 + m = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I) tiramos $k = 2$ ou $k = -\frac{8}{5}$.

Antes de substituirmos na equação (II), devemos verificar se esses valores de **k** satisfazem a condição $\Delta < 0$:

$$\begin{cases} k = 2 \Rightarrow \Delta = k^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0 \text{ (não satisfaz)} \\ k = -\frac{8}{5} \Rightarrow \Delta = k^2 - 4 = \left(-\frac{8}{5}\right)^2 - 4 = -\frac{36}{25} \text{ (satisfaz)} \end{cases}$$

Substituindo $k = -\frac{8}{5}$ na equação (II), tiramos $m = 10$. Portanto, a resposta do problema é:

$$\boxed{m = 10}$$

No entanto, se quisermos, poderemos obter as raízes de P(x). Temos:

$$\begin{cases} -2a = k = -\frac{8}{5} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Deste sistema, obtemos $a = \frac{4}{5}$ e $b = \pm\frac{3}{5}$ Portanto:

$$z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \text{ e } \bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

Para obtermos a raiz real, o meio mais rápido é achar a raiz do quociente Q(x).

$$Q(x) = 5x + (2 - 5k) = 5x + 10$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

As raízes de P(x) são, então: $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ e -2.

13.8) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 11x + m$ admita uma raiz de módulo 1.

Solução

Neste caso, o enunciado não esclarece se a raiz de módulo 1 é real ou imaginária. Temos, então, duas possibilidades:

1.ª possibilidade: a raiz é imaginária.

Neste caso, temos um problema idêntico ao anterior e a resposta é $m = 10$.

2.ª possibilidade: a raiz é real.

Neste caso, a raiz real de módulo 1 pode ser 1 ou -1.

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Leftrightarrow 5(1)^3 + 2(1)^2 - 11(1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 4 \\ P(-1) = 0 \Leftrightarrow 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - 11(-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = -8 \end{cases}$$

A resposta do exercício é, então, $m = 10$ ou $m = 4$ ou $m = -8$

13.9) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7$ tem apenas uma raiz real.

Solução

Os coeficientes do polinômio são todos reais e o grau do polinômio é ímpar. Daí concluímos que P(x) tem pelo menos uma raiz real. Seja **k** essa raiz real.

$$P(x) = (x - k) \cdot A(x)$$

Vamos dividir P(x) por x − k para obtermos A(x):

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & -1 & 3 & -7 \\ \hline & 1 & (k-1) & (k^2 - k + 3) & (k^3 - k^2 + 3k - 7) \end{array}$$

$$A(x) = x^2 + (k - 1)x + (k^2 - k + 3)$$

O discriminante de A(x) é:

$$\Delta = (k - 1)^2 - 4(k^2 - k + 3) = -3k^2 + 2k - 11$$

O discriminante da expressão $-3k^2 + 2k - 11$ é:

$$\Delta' = 2^2 - 4(-3)(-11) = 4 - 132 = -128$$

Como $\Delta' < 0$ e o coeficiente de k^2 é negativo (−3), concluímos que a expressão $-3k^2 + 2k - 11$ será negativa para qualquer $k \in \mathbb{R}$; assim, temos que A(x) não tem raízes reais. Portanto, P(x) tem apenas uma raiz real (que é o número **k**).

Exercícios Propostos

13.10) Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ que admite as raízes 3, 4 e $2 - 6i$.

a) Supondo que os coeficientes de P(x) sejam reais, qual o menor grau possível para esse polinômio?

b) Supondo que os coeficientes de P(x) sejam complexos, qual o menor grau possível para esse polinômio?

13.11) Um polinômio de coeficientes reais e não identicamente nulo tem o número 6 como raiz dupla, o número 8 como raiz tripla e o número $7 + 5i$ como raiz de multiplicidade 4. Qual o menor grau possível para esse polinômio?

13.12) Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* para cada uma das sentenças abaixo:

a) Se **n** for ímpar, P(x) tem pelo menos uma raiz real.
b) Se **n** for ímpar, o número de raízes reais de P(x) também é ímpar.
c) Se **n** for par, P(x) tem pelo menos 2 raízes reais.
d) Se **n** for par, pode acontecer que todas as raízes de P(x) sejam imaginárias.
e) Se **n** for ímpar, pode acontecer que todas as raízes de P(x) sejam imaginárias.
f) Se **n** for par, o número de raízes reais também é par.

13.13) Sabe-se que os números 7, −9 e $2 + 3i$ são raízes de um polinômio P(x) de grau 17 e de coeficientes reais. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* para cada sentença a seguir:

a) P(x) tem pelo menos 3 raízes reais.
b) P(x) pode ter até 16 raízes reais.
c) P(x) pode ter até 15 raízes imaginárias.
d) P(x) pode ter no máximo 14 raízes imaginárias.

13.14) Dê o polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que satisfaz simultaneamente as duas condições a seguir:

1.ª) os números **i**, $2 - i$ e 3 são raízes;
2.ª) o termo independente é igual a 30.

13.15) Dê o polinômio A(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que satisfaz simultaneamente as condições:

1.ª) 2i é raiz dupla;
2.ª) $1 + \sqrt{5}i$ é raiz simples;
3.ª) 0 é raiz tripla;
4.ª) o coeficiente de x^5 é igual a 32.

13.16) Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 6x - 40 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $3 + i$.

13.17) Resolva a equação $x^6 - 3x^5 - 18x^3 + 12x^2 = 30x^3 - 18x^4 - 20x^2$, sabendo que uma de suas raízes é o número 4i.

13.18) Resolva a equação $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0$, sabendo que **i** é raiz dupla.

13.19) Resolva a equação $x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$, sabendo que os números 1 e 2i são raízes.

13.20) Resolva a equação $x^7 - 2x^6 + 7x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 16x^2 + ax + b = 0$, sabendo que o número 1 é raiz simples e o número 2i é raiz dupla.

13.21) Sabe-se que o número $5 + 7i$ é raiz de um polinômio P(x), não identicamente nulo, cujos coeficientes são complexos. Podemos garantir que o número $5 - 7i$ também é raiz de P(x)?

13.22) Sabe-se que o polinômio $A(x) = 5x^3 + 27x^2 + 46x + m$, onde $m \in \mathbb{R}$, admite uma raiz imaginária de módulo igual a 2. Determine:

a) o valor de **m**;
b) as raízes de A(x).

13.23) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $A(x) = 5x^3 + 27x^2 + 46x + m$ admita uma raiz complexa de módulo igual a 2.

13.24) Resolva a equação $2x^5 + 9x^4 + 4x^3 + 54x + 27 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz dupla e que o número $1 - \sqrt{2}i$ é raiz simples.

13.25) Resolva a equação $x^8 - 6x^7 + 14x^6 - 22x^5 + 25x^4 + 8x^3 - 60x^2 = 0$, sabendo que ela admite a raiz $2 + i$ e uma raiz imaginária pura.

Capítulo

14 Relações de Girard

14.1 — INTRODUÇÃO

Existem importantes **relações entre os coeficientes e as raízes** de uma equação algébrica, estabelecidas por Girard (Albert Girard, flamengo, 1590-1633). Porém, antes de mostrarmos como são essas relações no caso geral, estudaremos alguns casos particulares.

14.2 — EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são complexos, com $a \neq 0$. Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ suas raízes, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2]$$

isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Por identidade de polinômios, obtemos as relações:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}} \qquad (14.1)$$

que são as relações de Girard para a equação do segundo grau. Já as havíamos estudado no campo **real** (veja capítulo 3 do volume 1 desta coleção); agora, estudaremos estas relações no campo **complexo**.

Exemplo

Seja a equação $8x^2 - 10x + 3 = 0$, cujas raízes são $x_1 = \frac{3}{4}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

Neste caso temos:

$$a = 8,\ b = -10 \ \text{e} \ c = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} \\ -\frac{b}{a} = -\frac{(-10)}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{array}\right. \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ \frac{c}{a} = \frac{3}{8} \end{array}\right. \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

14.3 — EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são complexos, com $a \neq 0$. Sendo x_1, x_2 e x_3 suas raízes, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

ou

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ &\quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1 \cdot x_2x_3 \end{aligned}$$

Por identidade de polinômios, obtemos as relações:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.^{a})\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ 2.^{a})\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ 3.^{a})\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{array}} \qquad (14.2)$$

que são as relações de Girard para a equação do terceiro grau. Observe que na **primeira** relação temos as raízes tomadas **uma a uma**; na **segunda** relação temos as raízes tomadas **duas a duas**; na **terceira** relação temos as **três raízes**.

Exemplos

a) Consideremos a equação $5x^3 - 7x^2 - 9x + (6 + i) = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. Temos:

$$a = 5,\ b = -7,\ c = -9 \text{ e } d = 6 + i$$

Portanto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-7}{5} = \dfrac{7}{5} \\[2ex] x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-9}{5} \\[2ex] x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{6+i}{5} \end{cases}$$

b) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $7x^3 + 9x^2 + 6x + 5 = 0$.
As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{9}{7} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{6}{7} \\[2ex] abc = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

14.4 — EQUAÇÃO DO QUARTO GRAU

Consideremos a equação de grau 4:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4. Por um processo semelhante ao usado nos itens anteriores, obtemos as relações de Girard para essa equação:

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$

4.ª) $x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}$

Observe que:

1.º) na primeira relação, temos as raízes tomadas **uma a uma**;
2.º) na segunda relação, temos as combinações das 4 raízes, tomadas **duas a duas**; lembrando que $C_{4,2} = 6$, temos 6 parcelas;
3.º) na terceira relação, temos as combinações das 4 raízes, tomadas **três a três**; como $C_{4,3} = 4$, temos 4 parcelas;
4.º) na quarta relação, tomamos as **4 raízes**.

Exemplo

Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as raízes da equação $5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 8x + 9 = 0$.

As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{6}{5} \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{7}{5} \\ abc + abd + acd + bcd = -\dfrac{8}{5} \\ abcd = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

14.5 — CASO GERAL

Consideremos a equação algébrica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0 = 0$$

de grau $n > 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Por um processo semelhante ao usado nos três itens anteriores, podemos obter as relações de Girard para essa equação:

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

....

n.ª) $x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n}$

Observemos que:

1.º) na primeira relação, temos as raízes tomadas **uma a uma**;
2.º) na segunda relação, temos as combinações das **n** raízes tomadas **duas a duas**;
3.º) na terceira relação, temos as combinações das **n** raízes tomadas **três a três**;

....

n.º) na n-ésima relação, temos todas as **n raízes**.

Exemplo

Vamos escrever as relações de Girard para a equação do quinto grau

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

cujas raízes são x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\dfrac{b}{a}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 +$

$+ x_4x_5 = \dfrac{c}{a}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 +$

$+ x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = -\dfrac{d}{a}$

4.ª) $x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = \dfrac{e}{a}$

5.ª) $x_1x_2x_3x_4x_5 = -\dfrac{f}{a}$

Observação: As relações de Girard só são úteis na resolução de equações quando temos mais alguma informação sobre as raízes. Sozinhas, elas não são suficientes para resolver equações.

Exercícios Resolvidos

14.1) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 9x^3 - 18x^2 + 11x - 2$, sabendo que uma de suas raízes é igual à soma das outras duas.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes do polinômio, as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-18}{9} = 2 & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{11}{9} & \text{(II)} \\[2ex] abc = -\dfrac{-2}{9} = \dfrac{2}{9} & \text{(III)} \end{cases}$$

A condição dada no enunciado pode ser traduzida por:

$$a = b + c \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (I), obtemos:

$$2a = 2$$

donde:

$$2 = 1$$

Agora que já temos a raiz $a = 1$, podemos abandonar as relações de Girard e dividir $P(x)$ por $x - 1$, obtendo o polinômio $A(x) = 9x^2 - 9x + 2$, cujas raízes são $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$.

Assim, as raízes de $P(x)$ são: 1, $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$.

14.2) Obtenha a soma e o produto das raízes da equação $6x^5 + 7x^3 + 9x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solução

Observemos que o coeficiente de x^4 é nulo, isto é, a equação pode ser escrita:

$$6x^5 + 0x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 4x + 5 = 0$$

Sendo x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as raízes da equação, vamos considerar apenas a primeira e a última relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\dfrac{0}{6} = 0 \\[2ex] x_1x_2x_3x_4x_5 = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

14.3) Resolva a equação $x^3 + 8x^2 + 9x - 18 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o dobro de outra raiz.

Solução

Sejam **a**, **b** e **c** as raízes. As relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{8}{1} & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{9}{1} = 9 & \text{(II)} \\[2ex] abc = -\dfrac{-18}{1} = 18 & \text{(III)} \end{cases}$$

A condição dada no enunciado pode ser traduzida por:

$$a = 2b \qquad \text{(IV)}$$

Tomemos o valor de **a** da equação (IV) e substituamos nas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 3b + c = -8 & \text{(V)} \\ 2b^2 + 3bc = 9 & \text{(VI)} \end{cases}$$

De (V), tiramos $c = -8 - 3b$ (VII)
Substituindo em (VI), obtemos a equação $7b^2 + 24b + 9 = 0$, cujas raízes são $b = -3$ e $b'' = -\dfrac{3}{7}$. Substituindo nas equações (IV) e (VII), vem:

$$\left[\begin{array}{l} 6 = -3 \Rightarrow a = -6 \text{ e } c = 1 \\[2ex] b = -\dfrac{3}{7} \Rightarrow a = -\dfrac{6}{7} \text{ e } c = \dfrac{-47}{9} \end{array}\right.$$

A fim de sabermos qual destas duas séries de valores serve, fazemos o teste na equação que ainda não foi usada (III) e vemos que apenas a primeira série serve. Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{-3;\ -6;\ 1\}$$

14.4) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

Solução

Já resolvemos este exercício com o auxílio de derivada (veja exercício 12.2). Agora vamos resolvê-lo usando as relações de Girard. Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-7}{1} = 7 \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{15}{1} = 15 \\[2ex] abc = -\dfrac{-9}{1} = 9 \end{cases}$$

Já que a equação tem uma raiz dupla, façamos b = a. Substituindo nas três equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} 2a + c = 7 & \text{(I)} \\ a^2 + 2ac = 15 & \text{(II)} \\ a^2c = 9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), tiramos: $c = 7 - 2a$ (IV). Substituindo em (II), obtemos a equação:

$$3a^2 - 14a + 15 = 0$$

cujas raízes são $a' = 3$ e $a'' = \frac{5}{3}\cdot$ Substituindo em (IV), temos:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow c = 1 \\ a = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Para sabermos qual destes pares de valores vão servir, fazemos a verificação na equação que ainda não foi usada (III) e observamos que serve apenas o par $a = 3$ e $c = 1$.

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{3;\ 1\}$$

onde **3** é a raiz dupla.

14.5) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 13 (exercício 13.5). Vamos agora resolvê-lo de outro modo (bem mais rápido).

Observemos que os coeficientes da equação são todos reais; portanto, se o número $2 + i$ é raiz, o número $2 - i$ também o é. Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, pela primeira relação de Girard, temos:

$$a + b + c = -\frac{-7}{1} = 7$$

Fazendo $a = 2 + i$ e $b = 2 - i$, temos:

$$(2 + i) + (2 - i) + c = 7$$

donde:

$$c = 3$$

Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \{2 + i;\ 2 - i;\ 3\}$$

14.6) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$, sabendo que o número $3i$ é raiz dupla.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 13 (exercício 13.6).

Sejam **a**, **b**, **c**, **d** e **e** as raízes de P(x). Observando que os coeficientes de P(x) são todos reais, concluímos que se 3i é raiz dupla, −3i também o é. Assim, podemos fazer:

$$a = b = 3i \quad e \quad c = d = -3i$$

Mas, pela primeira relação de Girard, temos:

$$a + b + c + d + e = -\frac{-1}{1} = 1$$

isto é:

$$3i + 3i - 3i - 3i + e = 1$$

donde:

$$e = 1$$

Portanto, as raízes são 3i, −3i e 1.

14.7) Dê um polinômio de grau 3, cujas raízes sejam os números 2 (simples) e 4 (dupla).

Solução

Observe que este exercício já foi resolvido de outro modo no capítulo 11 (exercício 11.12).

Já que não houve exigência especial, vamos construir um polinômio em que o coeficiente de x^3 é igual a 1:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes de P(x), as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{\alpha}{1} = -\alpha & \text{(I)} \\[2ex] x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{\beta}{1} = \beta & \text{(II)} \\[2ex] x_1x_2x_3 = -\dfrac{\gamma}{1} = -\gamma & \text{(III)} \end{cases}$$

Como 2 é raiz simples e 4 é raiz dupla, podemos fazer: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 4$. Substituindo em (I), (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 2 + 4 + 4 = -\alpha \\ 2(4) + 2(4) + 4(4) = \beta \\ (2)(4)(4) = -\gamma \end{cases}$$

donde:

$$\alpha = -10, \ \beta = 32 \ e \ \gamma = -32$$

Assim, $P(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 32$.

14.8) Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes da equação, $5x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 9x + 13 = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Solução

Vamos tentar calcular o valor da expressão dada, sem sabermos quais são as raízes, usando apenas as relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{-7}{5} = \dfrac{7}{5} & \text{(I)} \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{6}{5} & \text{(II)} \\ abc + abd + acd + bcd = -\dfrac{9}{5} & \text{(III)} \\ abcd = \dfrac{13}{5} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Temos, então:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = \frac{\dfrac{-9}{5}}{\dfrac{13}{5}} = \frac{-9}{13}$$

14.9) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 7x + 3 = 0$, calcule os valores de:

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$

b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

d) $a^3 + b^3 + c^3$

Solução

As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ ab + ac + bc = 7 \\ abc = -3 \end{cases}$$

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} = \dfrac{c + b + a}{abc} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$

b) Vamos nos lembrar da identidade:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Portanto:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = (4)^2 - 2(7) = 16 - 14 = 2$$

c) Temos:

$$\begin{aligned}(ab + ac + bc)^2 &= (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2[(ab)(ac) + (ab)(bc) + (ac)(bc)] = \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= (ab + ac + bc)^2 - 2(abc)(a + b + c) = \\ &= (7)^2 - 2(-3)(4) = 49 + 24 = 73\end{aligned}$$

d) Já que **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 7x + 3 = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} a^3 - 4a^2 + 7a + 3 = 0 \\ b^3 - 4b^2 + 7b + 3 = 0 \\ c^3 - 4c^2 + 7c + 3 = 0 \end{cases}$$

Somando membro a membro estas três equações, obtemos:

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 4\underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{2} + 7\underbrace{(a + b + c)}_{4} + (3 + 3 + 3) = 0$$

Daí tiramos: $a^3 + b^3 + c^3 = -29$.

14.10) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ as raízes da equação algébrica de grau **n** (com $n > 1$):

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Calcule o valor de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$.

Solução

Vamos partir da identidade:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) \qquad \text{(I)}$$

Escrevamos a primeira e a segunda relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \text{(II)} \\[2ex] x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \text{(III)} \end{cases}$$

Introduzindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)$$

donde:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\,\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

14.11) **Sejam a, b, c e d as raízes da equação** $3x^4 + \sqrt{2}\,x^3 + (1 + i)x^2 + \dfrac{7}{5}x - (8 + 3i) = 0$. Calcule o valor de $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Solução

De acordo com o que vimos no exercício anterior, vamos partir da identidade:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \qquad \text{(I)}$$

A primeira e a segunda relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} & \text{(II)} \\[2ex] ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{1 + i}{3} & \text{(III)} \end{cases}$$

Introduzindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\left(\frac{1+i}{3}\right)$$

donde:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{-4-6i}{9}$$

14.12) Consideremos a equação $2x^3 + 7x^2 + 5x + 3 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. Obtenha um polinômio $P(x)$ de raízes **a**, **b** e **c**, tais que: $a = x_1x_2$, $b = x_1x_3$, $c = x_2x_3$.

Solução

As relações de Girard para a equação dada são:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-7}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{5}{2} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Seja $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ o polinômio de raízes **a**, **b** e **c**. As relações de Girard para esse polinômio são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\alpha & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \beta & \text{(II)} \\ abc = -\gamma & \text{(III)} \end{cases}$$

Mas, de acordo com o enunciado, temos $a = x_1x_2$, $b = x_1x_3$ e $c = x_2x_3$. Assim:

$$\begin{cases} a + b + c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{5}{2} \\ ab + ac + bc = x_1x_2x_1x_3 + x_1x_2x_2x_3 + x_1x_3x_2x_3 = (x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = \\ = \left(\dfrac{-3}{2}\right)\left(\dfrac{-7}{3}\right) = \dfrac{21}{4} \\ abc = x_1x_2x_1x_3x_2x_3 = (x_1x_2x_3)^2 = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Substituindo em (I), (II) e (III), obtemos $\alpha = \dfrac{-5}{2}$, $\beta = \dfrac{21}{4}$ e $\gamma = \dfrac{-9}{4}$. Portanto:

$$P(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{9}{4}$$

14.13) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x - 125$, sabendo que elas têm o mesmo módulo.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever a terceira relação de Girard:

$$abc = -\frac{-125}{1} = 125$$

A condição dada no enunciado é: $|a| = |b| = |c|$

Temos, então:

$$abc = 125 \Rightarrow |abc| = 125 \Rightarrow |a| \cdot |b| \cdot |c| = 125 \Rightarrow |a|^3 = 125 \Rightarrow |a| = \sqrt[3]{125} = 5$$

Observando que P(x) é de grau ímpar e possui todos os coeficientes reais, concluímos que pelo menos uma das raízes é real; supondo que **a** seja a raiz real, temos:

$$|a| = 5 \Leftrightarrow a = \pm 5$$

Podemos verificar que $P(-5) \neq 0$ e $P(5) = 0$; portanto, temos $a = 5$.
Dividindo P(x) por $x - 5$, obtemos o polinômio $A(x) = x^2 + 6x + 25$, cujas raízes são $-3 + 4i$ e $-3 - 4i$. Assim, as raízes de P(x) são: 5, $-3 + 4i$ e $-3 - 4i$.

14.14) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 37x - 30$, sabendo que elas formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever apenas as duas primeiras relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-15}{2} = \dfrac{15}{2} & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \dfrac{37}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

A partir daqui, podemos encaminhar a resolução de vários modos.

1.º modo

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nesta ordem, uma PA, podemos usar a representação (veja capítulo 4 do volume 2 desta coleção):

$$a = b - r \quad \text{e} \quad c = b + r$$

onde **r** é a razão da PA. Substituindo em (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} (b - r) + b + (b + r) = \dfrac{15}{2} & \text{(III)} \\ (b - r)(b) + (b - r)(b + r) + b(b + r) = \dfrac{37}{2} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Da equação (III), tiramos $b = \dfrac{5}{2}$. Substituindo em (IV):

$$\left(\frac{5}{2} - r\right)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} - r\right)\left(\frac{5}{2} + r\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + r\right) = \frac{37}{2}$$

Efetuando as multiplicações, chegamos à equação $4r^2 = 1$,

donde:

$$r = \pm \frac{1}{2}$$

Para $r = \frac{1}{2}$, temos: $\begin{cases} a = b - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \\ c = b + r = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$

Para $r = -\frac{1}{2}$, temos: $\begin{cases} a = b - r = \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \\ c = b + r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$

Em resumo, tanto para $r = \frac{1}{2}$ como para $r = -\frac{1}{2}$, as raízes são: $\frac{5}{2}$, 2 e 3.

2.º modo

Podemos começar como no 1.º modo e ir até o ponto em que obtemos $b = \frac{5}{2}$. A partir daí, abandonamos as relações de Girard e fazemos a divisão de P(x) por $x - \frac{5}{2}$, obtendo $A(x) = 2x^2 - 10x + 12$, cujas raízes são 2 e 3.

3.º modo

Um outro modo de indicar que **a**, **b** e **c** formam uma PA (nessa ordem) é colocar $a + c = 2b$.

Substituindo na relação (I) temos:

$$2b + b = \frac{15}{2}$$

donde:

$$b = \frac{5}{2}$$

A partir daí procedemos como no 2.º modo.

14.15) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, sabendo que elas são reais e formam uma progressão geométrica.

Solução

Sejam **a**, **b** e **c** as raízes; as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{-7}{1} = 7 & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \frac{14}{1} = 14 & \text{(II)} \\ abc = -\frac{-8}{1} = 8 & \text{(III)} \end{cases}$$

1.º modo

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nessa ordem, uma PG, temos (veja capítulo 6 do volume 2 desta coleção):

$$ac = b^2 \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (III), obtemos $b^3 = 8$.

Em princípio, deveríamos agora extrair todas as raízes cúbicas do número 8; mas, como o enunciado do exercício diz que as raízes do polinômio são reais, ficaremos apenas com a raiz cúbica real de 8:

$$b^3 = 8 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{8} = 2$$

Dividindo P(x) por $x - 2$, obtemos o polinômio $A(x) = x^2 - 5x + 4$, cujas raízes são 1 e 4. Assim, as raízes de P(x) são: 1, 4 e 2.

2.º modo

Suponhamos que não soubéssemos que as raízes do polinômio são todas reais. Então, para evitar o problema surgido com as raízes cúbicas do número 8, introduzimos (IV) em (II), obtendo:

$$ab + b^2 + bc = 14$$

isto é,

$$b\underbrace{(a + b + c)}_{7} = 14$$

donde:

$$b = 2$$

Daí em diante, procederíamos como no 1.º modo.

3.º modo

Uma outra maneira de indicar que **a**, **b** e **c** formam uma PG (nessa ordem) é usar a representação:

$$a = \frac{b}{q} \quad \text{e} \quad c = bq$$

onde **q** é a razão da PG. Substituindo em (III), obtemos:

$$\left(\frac{b}{q}\right)(b)\,(bq) = 8$$

donde:

$$b = 2$$

Daí em diante, fazemos como no 1.º modo.

14.16) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$, sabendo que elas formam uma progressão harmônica.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), as relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-11}{2} = \dfrac{11}{2} & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{18}{2} = 9 & \text{(II)} \\[2ex] abc = -\dfrac{-9}{2} = \dfrac{9}{2} & \text{(III)} \end{cases}$$

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nessa ordem, uma PH, temos (veja capítulo 5 do volume 2 desta coleção):

$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

donde:

$$ab + bc = 2ac \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (II), obtemos $3ac = 9$,

isto é:

$$ac = 3 \qquad \text{(V)}$$

Introduzindo (V) em (III), obtemos $3b = \frac{9}{2}$,

donde: $b = \frac{3}{2}$

Dividindo P(x) por $x - \frac{3}{2}$, obtemos o polinômio $A(x) = 2x^2 - 8x + 6$, cujas raízes são 1 e 3. Assim, as raízes de P(x) são: $\frac{3}{2}$, 1 e 3.

14.17) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$, sabendo que elas formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas as duas primeiras relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{-8}{1} = 8 & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{14}{1} = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Uma maneira de indicar que **a**, **b**, **c** e **d** formam uma PA, nessa ordem, é fazer as substituições:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y - 3k) & (y - k) & (y + k) & (y + 3k) \end{array}$$

Introduzindo em (I) e (II), obtemos, após as simplificações:

$$\begin{cases} 4y = 8 & \text{(III)} \\ 6y^2 - 10k^2 = 14 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (III), tiramos $y = 2$; substituindo em (IV), obtemos $k = \pm 1$. Assim:

$$\begin{cases} y = 2 \text{ e } k = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 5 \\ y = 2 \text{ e } k = -1 \Rightarrow a = 5,\ b = 3,\ c = 1,\ d = -1 \end{cases}$$

Tanto num caso como no outro as raízes de P(x) são -1, 1, 3 e 5.

14.18) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$, sabendo que duas delas são simétricas.

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira e a terceira relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3 & \text{(I)} \\ abc + abd + acd + bcd = -27 & \text{(II)} \end{cases}$$

Supondo que as raízes simétricas sejam **a** e **b**, temos:

$$a + b = 0 \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), obtemos:

$$c + d = 3 \qquad \text{(IV)}$$

A relação (II) pode ser transformada em:

$$ab\underbrace{(c + d)}_{3} + cd\,\underbrace{(a + b)}_{0} = -27$$

donde:

$$ab = -9 \qquad \text{(V)}$$

Consideremos agora o sistema formado pelas equações (V) e (III):

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ab = -9 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 3$ e $b = -3$ (ou então $a = -3$ e $b = 3$, o que dá no mesmo). Agora que já obtivemos as raízes 3 e -3, podemos fazer a divisão de P(x) por $(x - 3)(x + 3)$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas raízes são 1 e 2. Portanto, as raízes de P(x) são: 3, -3, 1 e 2.

14.19) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$, sabendo que duas delas são recíprocas (isto é, uma delas é o inverso da outra).

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira, a terceira e a quarta relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = \dfrac{7}{2} & \text{(I)} \\[2ex] abc + abd + acd + bcd = -\dfrac{28}{2} = -14 & \text{(II)} \\[2ex] abcd = \dfrac{-12}{2} = -6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Sendo **a** e **b** as raízes recíprocas, temos:

$$ab = 1 \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$cd = -6 \qquad (V)$$

A relação (II) pode ser transformada em:

$$\underbrace{ab}_{1}(c + d) + \underbrace{cd}_{-6}(a + b) = -14$$

isto é,

$$(c + d) - 6(a + b) = -14 \qquad (VI)$$

Da relação (I), tiramos:

$$c + d = \frac{7}{2} - (a + b) \qquad (VII)$$

Substituindo (VII) em (VI), temos

$$\frac{7}{2} - (a + b) - 6(a + b) = -14$$

donde:

$$a + b = \frac{5}{2} \qquad (VIII)$$

Consideremos agora o sistema formado pelas equações (VIII) e (IV):

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{5}{2} \\ ab = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$ (ou $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$, o que dá no mesmo). Daqui por diante, podemos completar o problema de dois modos.

1.º modo

Como já temos as raízes 2 e $\frac{1}{2}$, podemos dividir P(x) por $(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - x - 6$, cujas raízes são -2 e 3. Assim, as raízes de P(x) são: $2, \frac{1}{2}, -2$ e 3.

2.º modo

Podemos substituir (VIII) em (VII), obtendo:

$$c + d = 1 \qquad (IX)$$

Consideramos em seguida o sistema formado pelas equações (IX) e (V):

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ cd = -6 \end{cases}$$

cuja solução é $c = -2$ e $d = 3$ (ou $c = 3$ e $d = -2$, o que dá no mesmo).

14.20) Consideremos um número complexo $z \neq 0$ e um número natural $n > 1$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes n-ésimas do número **z**. Mostre que:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

Solução

As raízes n-ésimas do número **z** são as raízes da equação $x^n = z$, a qual é equivalente a:

$$x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots - z = 0 \qquad \text{(I)}$$

Mas, de acordo com a primeira relação de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{0}{1} = 0$$

14.21) Seja **n** um número natural qualquer tal que $n > 1$. Mostre que:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = -1 \\[2ex] \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \end{cases}$$

Solução

Sejam $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ as raízes n-ésimas do número 1. De acordo com o exercício anterior, temos:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Porém:

$$\left[\begin{array}{l} \omega_0 = 1 \\[1ex] \omega_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} \\[2ex] \omega_2 = \cos\dfrac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex] \omega_{n-1} = \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{array}\right.$$

Substituindo em (I) e separando as partes real e imaginária, temos:

$$\left[1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] +$$

$$+ i\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$$\begin{cases} 1 + \cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \\ \\ \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \end{cases}$$

o que nos leva à tese.

14.22) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (5 + \sqrt{5})x^2 + (6 + 5\sqrt{5})x - 6\sqrt{5}$ são medidas dos lados de um triângulo retângulo. Determine essas raízes.

Solução

As raízes **a, b** e **c** do polinômio P(x) devem ser números reais positivos. Supondo $a > b > c$, pelo teorema de Pitágoras, devemos ter:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

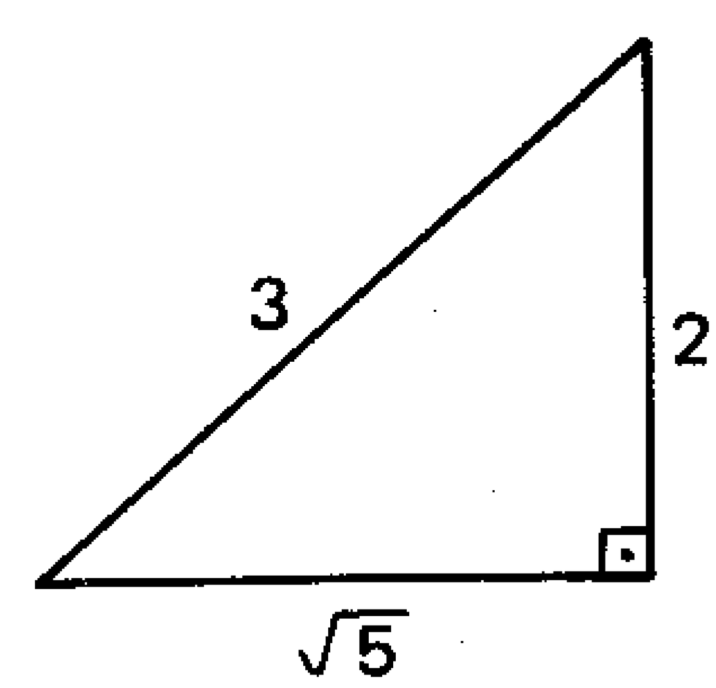
Vamos escrever apenas a primeira e a segunda relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 + \sqrt{5} \\ ab + ac + bc = 6 + 5\sqrt{5} \end{cases}$$

Temos, então:

$$a + b + c = 5 + \sqrt{5} \Rightarrow (a + b + c)^2 = (5 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} +$$

$$+ \underbrace{2(ab + ac + bc)}_{6 + 5\sqrt{5}} = 25 + 10\sqrt{5} + 5 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$$



Obtida a raiz 3, dividimos P(x) por $x - 3$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$, cujas raízes são $\sqrt{5}$ e 2. Assim, as raízes de P(x) são 3, $\sqrt{5}$ e 2.

14.23) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$, são medidas dos lados de um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

Solução

Sendo **a, b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira relação de Girard:

$$a + b + c = 14$$

Seja **p** o semiperímetro do triângulo:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

De acordo com a fórmula de Herão (veja volume 5 desta coleção), a área S do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(I)}$$

Mas, observando que $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, concluímos que:

$$(p-a)(p-b)(p-c) = P(p) = P(7) = 7^3 - 14(7)^2 + 63(7) - 90 = 8$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$S = \sqrt{(7)(8)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

14.24) Escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação $x^3 + kx + m = 0$ (onde $m \neq 0$), de modo que uma das raízes da equação seja igual à soma dos inversos das outras duas.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, a condição do enunciado é:

$$a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad \text{(I)}$$

Vamos escrever a primeira e a terceira relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \text{(II)} \\ abc = -m & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I), tiramos: $b + c = abc$ (IV)
De (II), tiramos: $b + c = -a$ (V)
De (IV) e (V), vem: $abc = -a$ (VI)

Substituindo (VI) em (III), temos $a = m$, isto é, uma das raízes da equação $x^3 + kx + m = 0$ é o número **m**. Portanto:

$$m^3 + km + m = 0$$

Mas, como $m \neq 0$, temos: $m^2 + k + 1 = 0$.

14.25) Escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$, sabendo que as raízes dessa equação estão em progressão geométrica.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, suponhamos que elas formem uma progressão geométrica, nessa ordem:

$$b^2 = ac \qquad \text{(I)}$$

As relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -k & \text{(II)} \\ ab + ac + bc = m & \text{(III)} \\ abc = -t & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (IV), vem: $b^3 = -t$ (V)

Substituindo (I) em (III), temos:

$$ab + b^2 + bc = m$$

isto é, $\underbrace{b(a + b + c)}_{-k} = m$, donde $bk = -m$, ou ainda, $b^3k^3 = -m^3$ (VI)

Substituindo (V) em (VI), obtemos $tk^3 = m^3$.

14.26) Escreva uma igualdade envolvendo os coeficientes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$, sabendo que as raízes da equação formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a, b** e **c** as raízes da equação, suponhamos que elas formem uma progressão aritmética, nessa ordem:

$$2b = a + c \qquad \text{(I)}$$

A primeira relação de Girard é:

$$a + b + c = -k \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos $b = -\frac{k}{3}$. Assim, concluímos que uma das raízes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$ é o número $\frac{-k}{3}$ e, portanto:

$$\left(\frac{-k}{3}\right)^3 + k\left(\frac{-k}{3}\right)^2 + m\left(\frac{-k}{3}\right) + t = 0$$

donde:

$$2k^3 - 9mk + 27t = 0$$

Exercícios Propostos

14.27) Determine o conjunto-solução de cada equação a seguir, utilizando a condição dada:

a) $x^3 - 6x^2 + (12 + i)x - (9 + 3i) = 0$
Uma das raízes é igual à soma das outras duas.

b) $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$
Uma das raízes é o triplo da outra raiz.

c) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$
Há uma raiz dupla.

d) $x^3 - 14x^2 + 69x - 116 = 0$
Uma das raízes é $5 + 2i$.

e) $2x^5 + 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 32x + 48 = 0$
O número $2i$ é raiz dupla.

f) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
Há duas raízes simétricas.

g) $6x^3 - 23x^2 + 16x - 3 = 0$
Há duas raízes recíprocas (uma é o inverso da outra).

h) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$
A soma de duas raízes é igual a $\frac{7}{2}$.

i) $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$
A diferença de duas de suas raízes é igual a 6.

j) $2x^4 + 25x^3 + 108x^2 + 176x + 64 = 0$
Há uma raiz tripla.

k) $2x^3 - 19x^2 + 45x - 18 = 0$
Uma das raízes é igual ao produto das outras duas.

l) $x^3 - 12x^2 + 20x + 96 = 0$
A razão entre duas de suas raízes é igual a $\frac{4}{3}$.

14.28) Uma das raízes da equação $2x^3 - 9x^2 + x + k = 0$ é igual à soma das outras duas.
a) Determine o valor de **k**.
b) Dê o conjunto-solução da equação.

14.29) Dê uma equação de grau 3, cujas raízes sejam $\frac{1}{3}$, 2 e $1 + i$.

14.30) Dê uma equação de grau 3, cujas raízes sejam 5 (dupla) e $2 - i$ (simples).

14.31) Dê uma equação de grau 4, cujas raízes sejam 3 (dupla), 2 (simples) e -1 (simples).

14.32) Determine o valor de **k** na equação $3x^2 - 7x + (k + 2) = 0$, de modo que uma das raízes seja o sêxtuplo da outra.

14.33) Determine o valor de **k** na equação $5x^2 - 12x + 6k + 2 = 0$, de modo que suas raízes sejam recíprocas.

14.34) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $3x^2 + 4x + 5 = 0$.
Calcule os valores de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

b) $a^2 + b^2$

c) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

d) $a^4 + b^4$

e) $a^3 + b^3$

(*Sugestão*: para os exercícios *b* e *e*, use as identidades: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.)

14.35) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $3x^2 + (5 - i)x + (2 - 3i) = 0$.

14.36) Determine o valor de **k**, de modo que a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^2 - 5x + k = 0$ seja igual a $\frac{7}{4}$.

14.37) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $4x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = 0$. Calcule os valores de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

d) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$

e) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

f) $a^4 + b^4 + c^4$

g) $a^3 + b^3 + c^3$

h) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

14.38) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $4x^9 + x^8 + (3 + i)x^7 + (6 - i)x^3 + 4x - 1 = 0$.

14.39) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $2x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = 0$.

Em cada caso a seguir, dê um polinômio $P(x)$, de raízes x_1, x_2 e x_3, satisfazendo a condição dada:

a) $x_1 = ab$; $x_2 = ac$; $x_3 = bc$

b) $x_1 = a - \frac{1}{bc}$; $x_2 = b - \frac{1}{ac}$; $x_3 = c - \frac{1}{ab}$

c) $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{1}{b}$; $x_3 = \frac{1}{c}$

14.40) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $x^2 + 2x + 3 = 0$.
Dê um polinômio de raízes x_1 e x_2, tais que $x_1 = a^2 + b^2$ e $x_2 = a^3 + b^3$.

14.41) Sejam **a**, **b** e **c** números complexos distintos, tais que:

$$\begin{cases} a^3 + 7a + 13 = 0 \\ b^3 + 7b + 13 = 0 \\ c^3 + 7c + 13 = 0 \end{cases}$$

Calcule o valor de $a + b + c$.

14.42) Consideremos a equação $x^3 + kx + m = 0$, onde **k** e **m** são reais e $m \neq 0$. Mostre que, se todas as raízes da equação são reais, então $k < 0$.

14.43) Determine as raízes da equação $5x^3 - 2x^2 - 4x + 40 = 0$, sabendo que elas têm o mesmo módulo.

14.44) Resolva cada uma das equações a seguir, utilizando a condição dada:

a) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.
b) $2x^3 - 21x^2 + 42x - 16 = 0$
As raízes estão em progressão geométrica.
c) $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.
d) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$
As raízes estão em progressão geométrica.
e) $3x^3 - 4x^2 - 48x + 64 = 0$
As raízes estão em progressão harmônica.
f) $x^4 - 12x^3 + 14x^2 + 132x - 135 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.

14.45) Determine o valor de **k** de modo que as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + kx - 24 = 0$ formem uma progressão aritmética.

14.46) Resolva a equação $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 40 = 0$, sabendo que há duas raízes simétricas.

14.47) Resolva a equação $3x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 18x + 9 = 0$, sabendo que há duas raízes recíprocas.

14.48) Resolva a equação $2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 13x - 6 = 0$, sabendo que o produto de duas raízes é igual a 3.

14.49) Consideremos a equação $2x^4 + kx^3 + mx^2 + 14x - 8 = 0$. Duas de suas raízes têm soma igual a 1 e as outras duas têm produto igual a 2.

a) Dê o conjunto-solução da equação.

b) Determine os valores de **k** e **m**.

14.50) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (7 + \sqrt{7})x^2 + (12 + 7\sqrt{7})x + 12\sqrt{7}$ são medidas dos lados de um triângulo retângulo. Determine essas raízes.

14.51) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 8x^2 + kx + m$ são medidas dos lados de um triângulo. Obtenha a área desse triângulo em função de **k** e **m**.

14.52) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $x^3 - 8x^2 + 24x - 16 = 0$, calcule os valores de:

a) $\log_2(a^2 + b^2 + c^2)$ b) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{a} + \dfrac{\pi}{b} + \dfrac{\pi}{c}\right)$ c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & c & 0 \\ -3 & 7 & b \end{vmatrix}$

14.53) Sejam **a**, **b** e **c** números complexos não nulos, tais que $a + b + c = 0$ e $ab + ac + bc = 0$. Mostre que $|a| = |b| = |c|$.

14.54) Em cada caso a seguir, escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação, utilizando a condição dada:

a) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
Uma das raízes é igual à soma das outras duas.
b) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
Há duas raízes simétricas.
c) $x^3 + kx + m = 0$ (com $k \neq 0$ e $m \neq 0$)
Há uma raiz dupla.
d) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
As raízes formam uma progressão harmônica.
e) $x^4 + kx^3 + mx^2 + tx + n = 0$
O produto de duas raízes é igual ao produto das outras duas.
f) $x^4 + kx^3 + mx^2 + tx + n = 0$
A soma de duas raízes é igual à soma das outras duas.

14.55) Determine os números **a**, **b** e **c** (não nulos), sabendo que eles são raízes da equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

14.56) Sendo $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{7}$, calcule o valor de $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.

(*Sugestão*: observe que ω é uma das raízes sétimas da unidade; veja exercício 14.20.)

14.57) Consideremos o número natural $n > 1$. Sendo $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$, calcule os valores de:

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1}$ b) ω^n

14.58) Sendo $\omega = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}$, calcule os valores de:

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ b) ω^6

14.59) Consideremos o número natural $n > 1$. Sendo $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$, calcule o valor de S:

$$S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + 4\omega^3 + \ldots + n\omega^{n-1}$$

(*Sugestão*: calcule $S - \omega S$.)

Capítulo

15

Raízes racionais

15.1 — TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Consideremos o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

de grau $n > 0$, cujos coeficientes são todos inteiros, com $a_0 \neq 0$. Consideremos também um número racional $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ e $q \in \mathbb{Z}^*$), com **p** e **q** primos entre si. No item seguinte demonstraremos que:

> Se $\frac{p}{q}$ é raiz de P(x), então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n. (15.1)

Observemos que:

1.º) esse teorema não garante que exista a raiz $\frac{p}{q}$; garante apenas que se existir, **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n;

2.º) o teorema só vale quando os coeficientes são **todos inteiros**;

3.º) ao colocarmos $a_0 \neq 0$, estamos excluindo o caso em que $\frac{p}{q} = 0$, pois este é de análise imediata.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio:

$$P(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ a_n}}{6}x^5 - 7x^4 + 9x^3 - x - \underset{\substack{\downarrow \\ a_0}}{15}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{divisores de } a_0\text{: } \pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15 \\ \text{divisores de } a_n\text{: } \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6 \end{array}\right.$$

Se o polinômio admitir uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (com **p** e **q** inteiros não nulos, **p** e **q** primos entre si), **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n. Dividindo de todos os modos possíveis, um divisor de a_0 por um divisor de a_n, obtemos o conjunto dos possíveis valores da raiz $\frac{p}{q}$:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{5}{2};\ \pm\frac{5}{3};\ \pm\frac{5}{6};\ \pm\frac{15}{2}\right\}$$

Isto não significa que, obrigatoriamente, um dos elementos de M seja raiz de P(x). Significa apenas que se P(x) tem uma raiz racional (não nula), ela é obrigatoriamente um elemento de M.

b) Seja o polinômio:

$$P(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ a_n}}{2}x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - \underset{\substack{\downarrow \\ a_0}}{24}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{divisores de } a_0:\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24 \\ \text{divisores de } a_n:\ \pm 1;\ \pm 2 \end{array}\right.$$

Seja M o conjunto dos possíveis valores da raiz $\frac{p}{q}$:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right\}$$

Para sabermos se algum elemento de M é raiz de P(x), vamos calculando os valores numéricos de P(x) para os diversos elementos de M (obviamente começando pelos inteiros). Esse cálculo pode ser feito pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

		2	−7	−17	58	−24
P(1) = 12	1	2	−5	−22	36	12
P(−1) = −90	−1	2	−9	−8	66	−90
P(2) = 0 ⇒ 2 é raiz	2	2	−3	−23	12	0

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$

As verificações seguintes podem ser feitas no polinômio Q(x). Devemos recomeçar essas verificações experimentando novamente o número 2, pois ele pode ser uma raiz de multiplicidade $m > 1$.

		2	−3	−23	12
$Q(2) = -30$	2	2	1	−21	−30
$Q(-2) = 30$	−2	2	−7	−9	30
$Q(3) = -30$	3	2	3	−14	−30
$Q(-3) = 0 \Rightarrow -3$ é raiz	−3	2	−9	4	0

$$\underbrace{2 \quad -9 \quad 4}_{2x^2 - 9x + 4}$$

Resolvendo a equação $2x^2 - 9x + 4 = 0$, obtemos as raízes que faltam: 4 e $\frac{1}{2}$. Observemos que estas duas raízes são também elementos de M.

15.2 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Suponhamos que o número $\frac{p}{q}$ (satisfazendo as condições do enunciado do teorema) seja raiz do polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Devemos ter:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

isto é,

$$\frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1} p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1 p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando todos os termos por q^n, obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{(I)}$$

Dividindo por **p** todos os termos de (I) e passando o último termo para o lado direito, temos:

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p} \qquad \text{(II)}$$

O lado esquerdo da igualdade (II) nos dá um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como **p** e **q** são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_0 q^n}{p}$$

seja inteiro, a_0 deve ser divisível por **p**, isto é, **p** é divisor de a_0.

Dividindo por **q** todos os termos da igualdade (I), e passando o primeiro termo para o lado direito, temos:

$$a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = -\frac{a_n p^n}{q} \qquad \text{(III)}$$

O lado esquerdo da igualdade (III) nos dá um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como **p** e **q** são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_n p^n}{q}$$

seja inteiro, a_n deve ser divisível por **q**, isto é, **q** é divisor de a_n.

15.3 – CONSEQÜÊNCIAS

Do teorema anterior, tiramos imediatamente duas conseqüências:

1.ª) Se P(x) admite uma raiz inteira $k \neq 0$, então **k** deve ser divisor de $\mathbf{a_0}$.
2.ª) Suponhamos que $a_n = 1$. Então, se P(x) admitir raízes racionais, estas serão necessariamente inteiras.

Exercícios Resolvidos

15.1) Determine o conjunto-solução da equação $3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x = 0$.

Solução

Neste caso podemos colocar **x** em evidência:

$$3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2 = 0$$

Vamos agora tentar determinar as raízes do polinômio $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2$ usando o teorema 15.1.

$$\left[\begin{array}{l}\text{divisores de } a_0\text{: } \pm 1;\ \pm 2\\ \text{divisores de } a_n\text{: } \pm 1;\ \pm 3\end{array}\right.$$

Assim, o conjunto das possíveis raízes racionais de P(x) é:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm \frac{1}{3};\ \pm \frac{2}{3}\right\}$$

Começaremos as tentativas pelos números inteiros:

		3	-4	1	6	-2
$P(1) = 4$	1	3	-1	0	6	4
$P(-1) = 0 \Rightarrow -1$ é raiz	-1	3	-7	8	-2	0

$$\underbrace{3 \quad -7 \quad 8 \quad -2}_{Q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2}$$

Continuaremos as tentativas, agora usando o polinômio Q(x), experimentando novamente a raiz -1, pois ela pode ser raiz de multiplicidade $m > 1$.

		3	-7	8	-2
	-1	3	-10	18	-20
	2	3	-1	6	10
	-2	3	-13	34	-70
	3	3	2	14	40
	-3	3	-16	56	-170
$Q\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$ é raiz	$\frac{1}{3}$	3	-6	6	0

$$\underbrace{3 \quad -6 \quad 6}_{3x^2 - 6x + 6}$$

Resolvendo a equação $3x^2 - 6x + 6 = 0$, obtemos as raízes que faltam: $1 + i$ e $1 - i$.

Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{0;\ -1;\ \frac{1}{3};\ 1 + i;\ 1 - i\right\}$$

15.2) Decomponha o polinômio $A(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x$ em fatores do primeiro grau.

Solução

O polinômio A(x) coincide com o lado esquerdo da equação dada no exercício anterior. Aproveitamos então as raízes que já foram obtidas e temos:

$$A(x) = 3x\,(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1 - i)\,(x - 1 + i)$$

15.3) Determine o conjunto-solução da equação $x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - 12 = 0$.

Solução

Vamos tentar obter as raízes usando o teorema 15.1. Mas acontece que o coeficiente de x^2 na equação dada não é inteiro. Assim, vamos multiplicar todos os termos por 2, para obtermos uma equação equivalente à equação dada, cujos coeficientes são todos inteiros:

$$x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x^2 - 10x - 24 = 0$$

Determinaremos, agora, as raízes do polinômio:

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 10x - 24$$

$$\begin{cases} \text{divisores de } a_0: \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24 \\ \text{divisores de } a_n: \pm 1;\ \pm 2 \end{cases}$$

Conjunto das possíveis raízes racionais de P(x):

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24;\ \pm \frac{1}{2};\ \pm \frac{3}{2}\right\}$$

		2	7	−10	−24
	1	2	9	−1	−25
	−1	2	5	−15	−9
$P(2) = 0 \Rightarrow 2$ é raiz	2	2	11	12	0

$$\underbrace{2 \quad 11 \quad 12}_{2x^2 + 11x + 12}$$

Resolvendo a equação $2x^2 + 11x + 12 = 0$, obtemos as outras raízes: -4 e $-\frac{3}{2}$.

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{2;\ -4;\ -\frac{3}{2}\right\}$$

15.4) Mostre que o número $1 + \sqrt{2}$ é irracional.

Solução

Sabemos que os números 1 e $\sqrt{2}$ são reais. Sabemos também que a soma de dois números reais é ainda um número real. Portanto, o número $1 + \sqrt{2}$ é real, resta saber se é racional ou irracional.

Seja $x = 1 + \sqrt{2}$. Temos:

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = 8 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

Esta última equação tem todos os coeficientes inteiros. Aplicando o teorema 15.1, concluímos que os únicos números racionais que poderiam ser raízes dessa equação são 1 e −1. Assim, concluímos que $1 + \sqrt{2}$ é irracional.

15.5) Mostre que o número $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ é inteiro.

Solução

Seja $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. É fácil verificar que o número **x** é real; resta mostrar que ele é inteiro. Para facilitar a notação, faremos:

$$a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad b=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Lembrando que:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

temos:

$$x=a+b \Rightarrow x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\underbrace{(a+b)}_{x}=a^3+b^3+3abx$$

Porém:

$$\left[\begin{array}{l} a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \Rightarrow a^3=7+5\sqrt{2} \\ b=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \Rightarrow b^3=7-5\sqrt{2} \\ ab=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}=\sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2}=-1 \end{array}\right.$$

Assim:

$$x^3=a^3+b^3+3abx=7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+3(-1)x=14-3x$$

isto é:

$$x^3+3x-14=0$$

O conjunto das possíveis raízes inteiras desta última equação é:

$$M=\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 7;\ \pm 14\}$$

Fazendo-se as tentativas:

		1	0	3	−14
	1	1	1	4	−10
	−1	1	−1	4	−18
2 é raiz	2	1	2	7	0

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 7}_{A(x)=x^2+2x+7}$$

O discriminante do polinômio A(x) é:

$$\Delta=2^2-4(1)(7)=4-28=-24<0$$

e, portanto, as raízes de A(x) são imaginárias. Concluímos, então, que a única raiz real da equação:

$$x^3+3x-14=0$$

é o número 2. Como o número **x** é real, concluímos que $x=2$.

15.6) Um número complexo é chamado de **número algébrico** se ele pode ser raiz de um polinômio (não identicamente nulo) de coeficientes **inteiros**; um número complexo que não seja algébrico é chamado de **número transcendente**. Na realidade, praticamente todos os números com que tratamos em Matemática Elementar são algébricos. Todos os números racionais são algébricos; alguns números irracionais, como, por exemplo:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{7},\ 1 - \sqrt{2}$$

são também algébricos. Como exemplo de número transcendente podemos dar o número π. Outro exemplo de número transcendente é o número **e**, base do sistema de logaritmos neperianos (veja capítulo 10 do volume 2 desta coleção). Com base no que acabamos de dizer, mostre que os seguintes números são algébricos:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ b) $3 + 4i$

Solução

a) Fazendo $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, temos:

$$x = \sqrt{5} + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 7 + 2\sqrt{10} \Rightarrow x^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow (x^2 - 7)^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4 - 14x^2 + 49 = 40 \Rightarrow x^4 - 14x^2 + 9 = 0$$

Portanto, $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ é uma das raízes da equação $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$, a qual tem todos os coeficientes inteiros; assim, podemos dizer que o número $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ é algébrico.

b) $x = 3 + 2i \Rightarrow x - 3 = 2i \Rightarrow (x - 3)^2 = (2i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -4 \Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0$

O número $3 + 2i$ é uma das raízes da equação $x^2 - 6x + 13 = 0$, a qual tem todos os coeficientes inteiros; portanto, ele é um número algébrico.

15.7) Determine todas as raízes do polinômio $P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 16x^3 - 23x^2 + 32x - 12$, sabendo que ele admite uma raiz imaginária pura.

Solução

Note que já resolvemos exercício semelhante a este no capítulo 11 (exercício 11.41). Seja **ai** a raiz imaginária pura procurada (com $a \in \mathbb{R}^*$). Devemos ter $P(ai) = 0$:

$$2(ai)^5 - 5(ai)^4 + 16(ai)^3 - 23(ai)^2 + 32(ai) - 12 = 0$$

Efetuando as operações e separando as partes real e imaginária, obtemos:

$$(-5a^4 + 23a^2 - 12) + (2a^5 - 16a^3 + 32a)i = 0$$

Devemos ter, então:

$$\begin{cases} -5a^4 + 23a^2 - 12 = 0 & \text{(I)} \\ 2a^5 - 16a^3 + 32a = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

O conjunto-solução da equação (I) é:

$$S_1 = \left\{2;\ -2;\ \sqrt{\frac{3}{5}};\ -\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$$

e o conjunto-solução da equação (II) é:

$$S_2 = \{0;\ 2;\ -2\}$$

Os números que satisfazem simultaneamente as equações (I) e (II) são 2 e -2; portanto, temos $a = \pm 2$. Concluímos, então, que o polinômio dado admite duas raízes imaginárias puras: $2i$ e $-2i$.

Assim, temos:

$$P(x) = \underbrace{(x - 2i)(x + 2i)}_{x^2 + 4} \cdot A(x) = (x^2 + 4) \cdot A(x)$$

Dividindo $P(x)$ por $x^2 + 4$, obtemos $A(x)$:

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$$

Vamos agora verificar se $A(x)$ admite alguma raiz racional.

$$\begin{bmatrix} \text{divisores de } -3: \pm 1; \pm 3 \\ \text{divisores de } 2: \pm 1; \pm 2 \end{bmatrix}$$

Assim, o conjunto das possíveis raízes racionais de $A(x)$ é:

$$M = \left\{\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\right\}$$

	2	-5	8	-3
1	2	-3	5	2
-1	2	-7	15	-18
3	2	1	11	30
-3	2	-11	41	-126
$\frac{1}{2}$	2	-4	6	0

$$\underbrace{2 \quad -4 \quad 6}_{2x^2 - 4x + 6}$$

$A\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}$ é raiz

Resolvendo a equação $2x^2 - 4x + 6 = 0$, obtemos as raízes que faltam: $1 + \sqrt{2}i$ e $1 - \sqrt{2}i$. Então, o conjunto de todas as raízes de $P(x)$ é:

$$\left\{2i; -2i; \frac{1}{2}; 1 + \sqrt{2}\,i; 1 - \sqrt{2}\,i\right\}$$

Exercícios Propostos

15.8) Consideremos a equação $6x^7 - 14x^5 + kx^2 - 3x + 4 = 0$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$. Determine:

a) as possíveis raízes inteiras dessa equação;

b) as possíveis raízes racionais não inteiras dessa equação.

15.9) Consideremos o polinômio $P(x) = 7x^3 + kx^2 - 3x + 6$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$. O número $\frac{2}{3}$ poderia ser raiz de $P(x)$?

15.10) Seja $A(x) = 4x^{37} - 5x^{22} + kx^{10} - 7$. Sabe-se que o número $\frac{2}{5}$ é raiz de $A(x)$. O número k é inteiro?

15.11) Resolva as equações:

a) $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 17x - 12 = 0$

b) $4x^4 - 24x^3 + 55x^2 - 52x + 15 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

d) $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8 = 0$

15.12) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 12x - 10$ em fatores do primeiro grau.

15.13) Mostre que o número $\sqrt[3]{2} + 1$ é irracional.

15.14) Mostre que o número $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é inteiro.

15.15) Mostre que o número $\sqrt[3]{2} + i$ é algébrico.

15.16) Resolva a equação $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 6x - 20 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

15.17) Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz dupla.

15.18) Resolva a equação $2x^5 - 9x^4 + 14x^3 - 13x^2 + 12x - 4 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz imaginária pura.

15.19) Resolva a equação $x^6 - 7x^4 + 16x^2 - 12 = 0$.

(*Sugestão*: faça a mudança de variável $x^2 = y$.)

15.20) Resolva a equação $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

15.21) Consideremos a equação $x^n + 2kx - 2 = 0$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$. Essa equação pode ter raízes racionais?

15.4 — PROPRIEDADES

Consideremos um polinômio P(x) não identicamente nulo e de coeficientes **racionais**. Consideremos ainda os números **racionais** **a**, **b**, **m** e **n** tais que $\sqrt{m}$ e $\sqrt{n}$ sejam **irracionais**. Pode-se demonstrar que:

1.º) se $a + \sqrt{m}$ é raiz de P(x), $a - \sqrt{m}$ também o é;

2.º) se $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ é raiz de P(x), os números $\sqrt{m} - \sqrt{n}$, $-\sqrt{m} + \sqrt{n}$ e $-\sqrt{m} - \sqrt{n}$ também são raízes de P(x).

Assim, por exemplo, se $2 + \sqrt{3}$ é raiz de P(x), $2 - \sqrt{3}$ também é raiz. Se $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é raiz de P(x), os números $\sqrt{5} - \sqrt{7}$, $-\sqrt{5} + \sqrt{7}$ e $-\sqrt{5} - \sqrt{7}$ também serão raízes.

Exercícios Resolvidos

15.22) Sabe-se que o número $1 + \sqrt{2}$ é raiz do polinômio:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 8x - 4$$

Determine as outras raízes.

Solução

Os coeficientes de P(x) são racionais; portanto, se $1 + \sqrt{2}$ é raiz, $1 - \sqrt{2}$ também o é. Assim:

$$P(x) = \underbrace{[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]}_{x^2 - 2x - 1} \cdot A(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot A(x)$$

Dividindo P(x) por $x^2 - 2x - 1$, obtemos A(x):

$$A(x) = x^2 + 4$$

Resolvendo a equação $x^2 + 4 = 0$, obtemos as raízes que faltam: $2i$ e $-2i$. Portanto, as raízes de P(x) são:

$$1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2},\ 2i \text{ e } -2i$$

15.23) Determine todas as raízes do polinômio $P(x) = x^6 - x^4 + 7x^2 + 9$, sabendo que uma de suas raízes é $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solução

Os coeficientes de P(x) são todos racionais; portanto, se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz, os números $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ também serão raízes.

$$P(x) = \underbrace{[x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})]}_{x^2 - 2\sqrt{2}x - 1}\ \underbrace{[x - (-\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (-\sqrt{2} - \sqrt{3})]}_{x^2 + 2\sqrt{2}x - 1} \cdot A(x) =$$

$$= (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 + 2\sqrt{2}x - 1) \cdot A(x) = (x^4 - 10x^2 + 1) \cdot A(x)$$

Dividindo P(x) por $x^4 - 10x^2 + 1$, obtemos A(x):

$$A(x) = x^2 + 1$$

As raízes de A(x) são $\pm$ **i**. Portanto, as raízes de P(x) são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3},\ \sqrt{2} - \sqrt{3},\ -\sqrt{2} + \sqrt{3},\ -\sqrt{2} - \sqrt{3},\ i,\ -i$$

Exercícios Propostos

15.24) Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + \sqrt{3}$.

15.25) Resolva a equação $x^5 + x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 9x + 9 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

15.26) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{2}$.

15.27) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x - 1$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$.

(*Sugestão*: escreva o número $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$ na forma $\sqrt{r} + \sqrt{s}$, onde **r** e **s** são racionais — veja volume 1 desta coleção, p. 260.)

Capítulo 16

Equações recíprocas

16.1 — DEFINIÇÃO

Uma equação algébrica de grau $n > 0$ é chamada de equação recíproca se, e somente se, for satisfeita a condição:

r é raiz da equação $\Rightarrow \dfrac{1}{r}$ é raiz da equação, com a mesma multiplicidade.

Em outras palavras, dada uma equação recíproca, se um número é raiz, o seu **recíproco** também é raiz, com a mesma multiplicidade. É óbvio, então, que o número zero nunca é raiz de uma equação recíproca e, portanto, o termo independente da equação recíproca é sempre diferente de zero.

Exemplos

a) A equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{2; \dfrac{1}{2}\right\}$; portanto é uma equação recíproca.

b) A equação $3x^2 - 8ix + 3 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{3i; \dfrac{-i}{3}\right\}$. Observando que $\dfrac{1}{3i} = \dfrac{-i}{3}$, concluímos que a equação é recíproca.

c) A equação $6x^3 - 19x^2 + 14x - 1 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{1; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right\}$. Observando que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{o recíproco (ou inverso) de } \dfrac{2}{3} \text{ é } \dfrac{3}{2} \\ \text{o recíproco de 1 é 1} \end{array}\right.$$

concluímos que a equação é recíproca.

d) Consideremos a equação $(x-4)^3\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=0$, cujas raízes são 4 e $\frac{1}{4}$.

Embora $\frac{1}{4}$ seja o recíproco de 4, a equação **não** é recíproca, pois as raízes **não** têm a mesma multiplicidade.

e) A equação $\left(x-\frac{4}{7}\right)^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3(x+5)^2\left(x+\frac{1}{5}\right)^2(x+1)=0$ é recíproca.

f) A equação $(x-4)(x-7)=0$ **não** é recíproca.

Devemos resaltar que:

$$r=\frac{1}{r} \Leftrightarrow r^2=1 \Leftrightarrow r=\pm 1$$

isto é, os únicos números que são iguais aos seus recíprocos são os números 1 e -1. Portanto, para $r \neq \pm 1$, devemos ter $r \neq \frac{1}{r}$. Daí, concluímos que:

1.º) se uma equação recíproca **não** admite a raiz 1 nem a raiz -1, ela deve ser de grau **par**;

2.º) se uma equação recíproca é de grau **ímpar**, ela deve admitir a raiz 1 ou a raiz -1.

16.2 — RECONHECIMENTO DE UMA EQUAÇÃO RECÍPROCA

Consideremos a equação recíproca:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad \text{(I)}$$

onde, obviamente, $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Se **x** é uma das raízes de (I), $\frac{1}{x}$ também é raiz.

Substituindo em (I), temos:

$$a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \ldots + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando todos os termos por x^n, obtemos:

$$a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + a_0x^n = 0$$

isto é:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) devem ter as mesmas raízes, com as mesmas multiplicidades; portanto (veja item 11.8) os coeficientes dos termos de mesmo grau devem ser proporcionais. Sendo **k** a constante de proporcionalidade, vem:

$$\begin{cases} a_0 = k \cdot a_n \\ a_1 = k \cdot a_{n-1} \\ a_2 = k \cdot a_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2} = k \cdot a_2 \\ a_{n-1} = k \cdot a_1 \\ a_n = k \cdot a_0 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

onde:

$$\begin{cases} a_0 \text{ e } a_n \text{ são coeficientes dos termos extremos} \\ a_1 \text{ e } a_{n-1} \text{ são coeficientes de termos eqüidistantes dos extremos} \\ a_2 \text{ e } a_{n-2} \text{ são coeficientes de termos eqüidistantes dos extremos} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De $a_0 = k \cdot a_n$ e $a_n = k \cdot a_0$ vem $k = \pm 1$.

Substituindo nas igualdades (III), concluímos que:

1.º) para $k = 1$, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são **iguais**;
2.º) para $k = -1$, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são **simétricos**. (IV)

Todos os passos que demos neste item podem ser dados "para trás", isto é, supondo que as condições (IV) são satisfeitas, podemos concluir que a equação é recíproca. Assim, podemos dizer que:

Uma condição necessária e suficiente para que uma equação algébrica de grau $n > 0$ seja recíproca é que os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) sejam **iguais** ou **simétricos**.

Quando ocorrer $k = 1$, diremos que a equação recíproca é de primeira classe; quando ocorrer $k = -1$, diremos que a equação recíproca é de segunda classe.

Exemplos

a) Seja a equação $7x^5 - 9x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 9x + 7 = 0$. Observe que os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são iguais. Portanto, é uma equação recíproca de primeira classe.

b) $6x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 6 = 0$

Os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são simétricos; portanto, é uma equação recíproca de segunda classe.

c) $5x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 6x + 5 = 0$

Os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são iguais. (Observe que neste caso o termo central é igual a ele mesmo.) Trata-se de uma equação recíproca de primeira classe.

d) A equação $5x^4 + 6x^3 - 6x - 5 = 0$ pode ser escrita:

$$5x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 6x - 5 = 0$$

Neste caso, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são simétricos e, portanto, a equação, para ser recíproca, não pode ter o termo central.

e) Consideremos a equação $7x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 7 = 0$. De acordo com o que falamos no exemplo anterior, podemos dizer que esta equação **não** é recíproca.

f) $6x^2 - 9x + 6 = 0$

Esta equação é recíproca de primeira classe.

g) A equação $4x^6 + (2 + 5i)x^4 + 9x^3 + (2 + 5i)x^2 + 4 = 0$ pode ser escrita:

$$4x^6 + 0x^5 + (2 + 5i)x^4 + 9x^3 + (2 + 5i)x^2 + 0x + 4 = 0$$

Trata-se de uma equação recíproca de primeira classe.

h) A equação $2x^5 - 7x^4 + 7x - 2 = 0$ pode ser escrita:

$$2x^5 - 7x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 7x - 2 = 0$$

Trata-se de uma equação recíproca de segunda classe.

16.3 — RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO RECÍPROCA

Consideremos o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tal que a equação:

$$P(x) = 0$$

seja recíproca. Suponhamos que os números 1 e -1 sejam raízes dessa equação, com multiplicidades **p** e **q**, respectivamente (eventualmente podemos ter $p = 0$ ou $q = 0$). Admitindo que haja outras raízes, temos:

$$P(x) = (x - 1)^p \cdot (x + 1)^q \cdot B(x) \qquad \text{(I)}$$

de modo que (de acordo com o que vimos no item 16.1) a equação:

$$B(x) = 0$$

é recíproca de grau par, que **não admite** a raiz 1 nem a raiz -1. Resta saber se a equação $B(x) = 0$ é de 1.ª ou 2.ª classe.

Suponhamos que B(x) fosse de 2.ª classe. Assim, sendo:

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

teríamos:

$$B(1) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_2 + b_1 + b_0 = 0$$

pois, a equação sendo de segunda classe, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos são simétricos. Mas aí concluiríamos que o número 1 é raiz de B(x), o que não pode ser. Então concluímos que a equação $B(x) = 0$ deve ser recíproca de grau par e 1.ª classe.

Portanto, só precisaremos de um processo especial para resolvermos uma equação recíproca de 1.ª classe e grau par que não admita a raiz 1 nem a raiz -1. Tal equação será chamada, daqui em diante, de equação recíproca normal.

Exemplo

Consideremos a equação recíproca:

$$2x^7 - 6x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Experimentando os números 1 e -1, verificamos que 1 é raiz dupla e -1 é raiz simples.

	2	−6	3	1	1	3	−6	2
1	2	−4	−1	0	1	4	−2	0
1	2	−2	−3	−3	−2	2	0	
−1	2	−4	1	−4	2	0		

$$\underbrace{2 \quad -4 \quad 1 \quad -4 \quad 2}_{B(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

A equação $B(x) = 0$ é recíproca, de grau par, de 1.ª classe e não admite a raiz 1 nem a raiz -1. Portanto, é uma equação **recíproca normal**.

16.4 — RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO RECÍPROCA NORMAL

Consideremos uma equação recíproca normal de grau **n**. O artifício usado para resolvê-la consiste em dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$ e, em seguida, fazer a seguinte mudança de variável:

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = y}$$

Para facilitar o nosso trabalho nos exercícios, vamos deixar prontos alguns cálculos:

$$x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

Assim: $\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2}$

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow y^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3y$$

Assim: $\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y}$

De modo análogo, podemos concluir:

$$\boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2}$$

e assim por diante.

Exercícios Resolvidos

16.1) Resolva a equação $6x^6 + 47x^5 + 138x^4 + 194x^3 + 138x^2 + 47x + 6 = 0$.

Solução

1.º modo

A equação dada é recíproca, de grau par, porém não sabemos ainda se é normal. Devemos começar experimentando os números 1 e -1. Fazendo isso, podemos verificar que o número 1 não é raiz e que o número -1 é raiz dupla.

	6	47	138	194	138	47	6
-1	6	41	97	97	41	6	0
-1	6	35	62	35	6	0	

Ficamos agora com a equação normal $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$, a qual tem grau $n = 4$. Vamos dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$, isto é, por x^2, obtendo:

$$\frac{6x^4}{x^2} + \frac{35x^3}{x^2} + \frac{62x^2}{x^2} + \frac{35x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$$

isto é:
$$6x^2 + 35x + 62 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

ou, ainda:
$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo a mudança de variável $x + \frac{1}{x} = y$, temos $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Substituindo em (I):

$$6(y^2 - 2) + 35y + 62 = 0$$

donde:
$$6y^2 + 35y + 50 = 0$$

cujas raízes são $y' = -\frac{5}{2}$ e $y'' = -\frac{10}{3}$.

Como $x + \frac{1}{x} = y$, temos as equações:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = -2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = -3 \text{ e } x'' = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{-1;\ -2;\ -\frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$$

2.º modo

Já que os coeficientes da equação são todos inteiros, poderíamos ter tentado o processo desenvolvido no capítulo 15, isto é, a pesquisa de raízes racionais.

16.2) Resolva a equação $12x^6 - 40x^5 - 39x^4 + 170x^3 - 39x^2 - 40x + 12 = 0$.

Solução

1.º modo

Temos uma equação recíproca, de grau par e 1.ª classe. Fazendo a verificação, concluímos que 1 e −1 não são raízes. Vamos então usar o artifício. Como o grau da equação é $n = 6$, vamos dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$, isto é, por x^3, obtendo:

$$12x^3 - 40x^2 - 39x + 170 - \frac{39}{x} - \frac{40}{x^2} + \frac{12}{x^3} = 0$$

ou,

$$12\underbrace{\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}_{y^3 - 3y} - 40\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{y^2 - 2} - 39\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{y} + 170 = 0$$

donde:

$$12y^3 - 40y^2 - 75y + 250 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo a pesquisa das raízes racionais, descobrimos que uma das raízes da equação (I) é $y' = \frac{5}{2}$. Dividindo o lado esquerdo de (I) por $y - \frac{5}{2}$, obtemos o polinômio $12y^2 - 10y - 100$, cujas raízes são $y'' = \frac{10}{3}$ e $y''' = -\frac{5}{2}$.

Lembrando que $x + \frac{1}{x} = y$, temos as equações:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = 2 \text{ e } x'' = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = 3 \text{ e } x'' = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = -2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{2;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{3};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right\}$$

2.º modo

Poderíamos ter feito a pesquisa de raízes racionais já na equação dada.

16.3) Resolva a equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 11 (exercício 11.38). Vamos agora resolvê-lo de outro modo.

A equação dada é recíproca normal. Vamos então dividir todos os termos por x^2, obtendo:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

ou,

$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{y^2 - 2} + \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{y} + 1 = 0$$

ou ainda:

$$y^2 + y - 1 = 0$$

Esta última equação tem raízes $y' = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e $y'' = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Obtemos então as equações:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ cujas raízes são } \dfrac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{e} \\[2ex] x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ cujas raízes são } \dfrac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$$

Comparando a solução dada no capítulo 11 com a solução dada agora, teríamos um novo processo (além daquele visto no volume 3 desta coleção) de calcular o seno e o cosseno de $\dfrac{\pi}{5}$

16.4) Resolva a equação $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$.

Solução

Esta equação não é recíproca, mas podemos resolvê-la usando um artifício semelhante ao que usamos no caso da recíproca normal.

Vamos dividir todos os termos por x^2:

$$6x^2 - 25x + 12 + \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo $x - \dfrac{1}{x} = y$, temos:

$$y^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

isto é:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$6(y^2 + 2) - 25(y) + 12 = 0$$

ou,

$$6y^2 - 25y + 24 = 0$$

cujas raízes são $y' = \frac{8}{3}$ e $y'' = \frac{3}{2}$

Temos então as equações:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = 3 \text{ e } x'' = -\frac{1}{3} \\ x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = 2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{3;\ -\frac{1}{3};\ 2;\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercícios Propostos

16.5) Determine os valores de **a** e **b** de modo que a equação $5x^4 + (a - b)x^3 + (3a - 2b)x^2 + x - 5 = 0$ seja recíproca.

16.6) Determine os valores de **a** e **b** de modo que a equação $4x^3 + ax^2 + 7x + b = 0$ seja recíproca.

16.7) Resolva as equações:

a) $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$

b) $2x^8 - 6x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 14x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 6x + 2 = 0$

c) $12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12 = 0$

d) $\frac{5x^3 + 5x}{2} = \frac{3x^4 + 31x^2 + 3}{7}$

16.8) Dada a equação $ax^4 + 7x^3 + 5x^2 + bx + 9 = 0$, determine os valores de **a** e **b** de modo que, se um número α é raiz da equação, o número $-\frac{1}{\alpha}$ também seja raiz da equação, com a mesma multiplicidade.

Capítulo

17

Raízes comuns

17.1 – INTRODUÇÃO

Consideremos dois polinômios: $A(x)$ e $B(x)$. Neste capítulo vamos estabelecer um processo que permita obter os números que são ao mesmo tempo raízes de $A(x)$ e $B(x)$.

17.2 – RAÍZES COMUNS E MDC

Sejam então dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, de graus maiores que zero. Conforme vimos no capítulo 10, o máximo divisor comum de $A(x)$ e $B(x)$ pode ser obtido multiplicando-se os fatores comuns, com os menores expoentes. Mas, obviamente, ao pegarmos os fatores comuns, estamos pegando os fatores que trazem as raízes comuns. Daí temos a propriedade:

As raízes comuns a $A(x)$ e $B(x)$ são as raízes do mdc de $A(x)$ e $B(x)$.

Exercícios Resolvidos

17.1) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$\begin{cases} A(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 11x + 6 \\ B(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 \end{cases}$$

Solução

Seja $D(x)$ o mdc normalizado (veja capítulo 10) de $A(x)$ e $B(x)$:

$$D(x) = x^2 - 5x + 6$$

Como as raízes de $D(x)$ são 2 e 3, concluímos que as raízes comuns a $A(x)$ e $B(x)$ são 2 e 3.

17.2) Determine o valor de **k** de modo que os polinômios:

$$\begin{cases} A(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 12 \\ B(x) = x^2 - x - 2 \end{cases}$$

admitam uma raiz comum.

Solução

Neste caso não é necessário recorrer ao mdc. As raízes de B(x) são 2 e -1. Temos, então:

$$\begin{cases} A(2) = 2^3 - 3(2)^2 + k(2) + 12 = 2k + 8 \\ A(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + k(-1) + 12 = -k + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(2) = 0 \Rightarrow k = -4 \\ A(-1) = 0 \Rightarrow k = 8 \end{cases}$$

Assim, podemos ter $k = -4$ ou $k = 8$.

17.3) Sendo $k \in \mathbb{R}^*$, determine a raiz comum aos polinômios:

$$A(x) = kx^3 + (3k - 2)x^2 + (3k - 4)x + (k - 2) \text{ e}$$

$$B(x) = kx^2 + (3k - 2)x + (2k - 4)$$

Solução

Vamos determinar um mdc de A(x) e B(x):

$$\begin{array}{r|l} kx^3 + (3k - 2)x^2 + (3k - 4)x + (k - 2) & kx^2 + (3k - 2)x + (2k - 4) \\ \cline{2-2} -kx^3 + (-3k + 2)x^2 + (-2k + 4)x & x \\ \cline{1-1} kx + (k - 2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} kx^2 + (3k - 2)x + (2k - 4) & kx + (k - 2) \\ \cline{2-2} -kx^2 + (-k + 2)x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2kx + (2k - 4) & \\ -2kx + (-2k + 4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

O mdc de A(x) e B(x) é o polinômio $D(x) = kx + (k - 2)$, cuja raiz é $\frac{2 - k}{k}$. Portanto, a raiz comum aos dois polinômios é $\frac{2 - k}{k}$.

Exercícios Propostos

17.4) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$A(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \text{ e } B(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

17.5) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$A(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 12x - 8 \quad e \quad B(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$$

17.6) Determine o valor de **k** de modo que os polinômios $A(x) = x^3 - x^2 + kx - 1$ e $B(x) = x^2 - 4$ tenham uma raiz comum.

17.7) Determine os valores de **k** e **m**, de modo que os polinômios $A(x) = x^3 + x^2 + kx + m$ e $B(x) = x^2 - 4$ tenham duas raízes comuns.

17.8) Sendo $k \in \mathbb{R}^*$, determine a raiz comum aos polinômios:

$$A(x) = kx^3 + (2 - k)x^2 - (k + 4)x + (k + 2) \quad e \quad B(x) = kx^2 + (2 - k)x - (2k + 4)$$

17.3 — RAÍZES MÚLTIPLAS E MDC

Consideremos um polinômio P(x) de grau n > e suponhamos que um número **c** seja raiz de P(x), com multiplicidade m > 1. De acordo com o que vimos no capítulo 12, podemos dizer que o número **c** é raiz de multiplicidade m − 1 do polinômio P'(x) (polinômio derivado de P(x)). Portanto, o número **c** é **raiz comum** dos polinômios P(x) e P'(x); a partir disto, concluímos:

> O número **c** é raiz de multiplicidade m − 1 do **mdc** dos polinômios P(x) e P'(x).

Exercícios Resolvidos

17.9) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Solução

Temos: $\begin{cases} P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\ P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

Podemos determinar o mdc dos polinômios P(x) e P'(x), que é $M(x) = x^2 - 2x + 1$. É fácil concluir que o número 1 é raiz dupla de M(x); portanto, o número 1 é raiz tripla de P(x):

$$P(x) = (x - 1)^3 \cdot A(x)$$

Fazendo três divisões sucessivas por x − 1, podemos obter $A(x) = x + 2$, cuja raiz é −2. Portanto, as raízes de P(x) são: 1 (tripla) e −2 (simples).

17.10) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$, sabendo que há pelo menos uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Solução

$$\begin{cases} P(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\ P'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 74x - 60 \end{cases}$$

O mdc de $P(x)$ e $P'(x)$ é o polinômio $M(x) = x^2 - 5x + 6$, cujas raízes são 2 (simples) e 3 (simples). Daí concluímos que o número 2 é raiz dupla de $P(x)$ e o número 3 é raiz dupla de $P(x)$. Como $P(x)$ é de grau 4, estas são as únicas raízes. Devemos ter, então:

$$P(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^2$$

Exercícios Propostos

17.11) Resolva a equação $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

17.12) Resolva a equação $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Capítulo 18

Raízes reais

18.1 — INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades referentes às raízes reais de um polinômio de coeficientes reais Para melhor entendermos, é útil encararmos os polinômios como funções. (Observe que o item 10.4 deste volume se refere a isto.) Para tal, usaremos vários conceitos sobre funções, como os de função crescente, decrescente, gráfico de uma função, etc., já estudados no volume 1 desta coleção.

Observamos que teremos de lançar mão de várias propriedades que só serão justificadas no volume 8 (onde serão estudados os conceitos de **limite** e de **derivada**); assim, estas propriedades serão aqui apresentadas sem demonstração.

18.2 — GRÁFICO DA FUNÇÃO POLINOMIAL

Consideremos o polinômio P(x) de grau $n > 0$ e coeficientes reais:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Obviamente, para cada valor real atribuído a **x** teremos um único valor de P(x) e, portanto, podemos considerar a função de IR em IR que a cada **x** associa o valor P(x). Pode-se demonstrar que o gráfico desta função é sempre uma **linha contínua** (como, por exemplo, na figura 18.1), **não podendo** apresentar "buracos" ou "interrupções" (como, por exemplo, na figura 18.2).

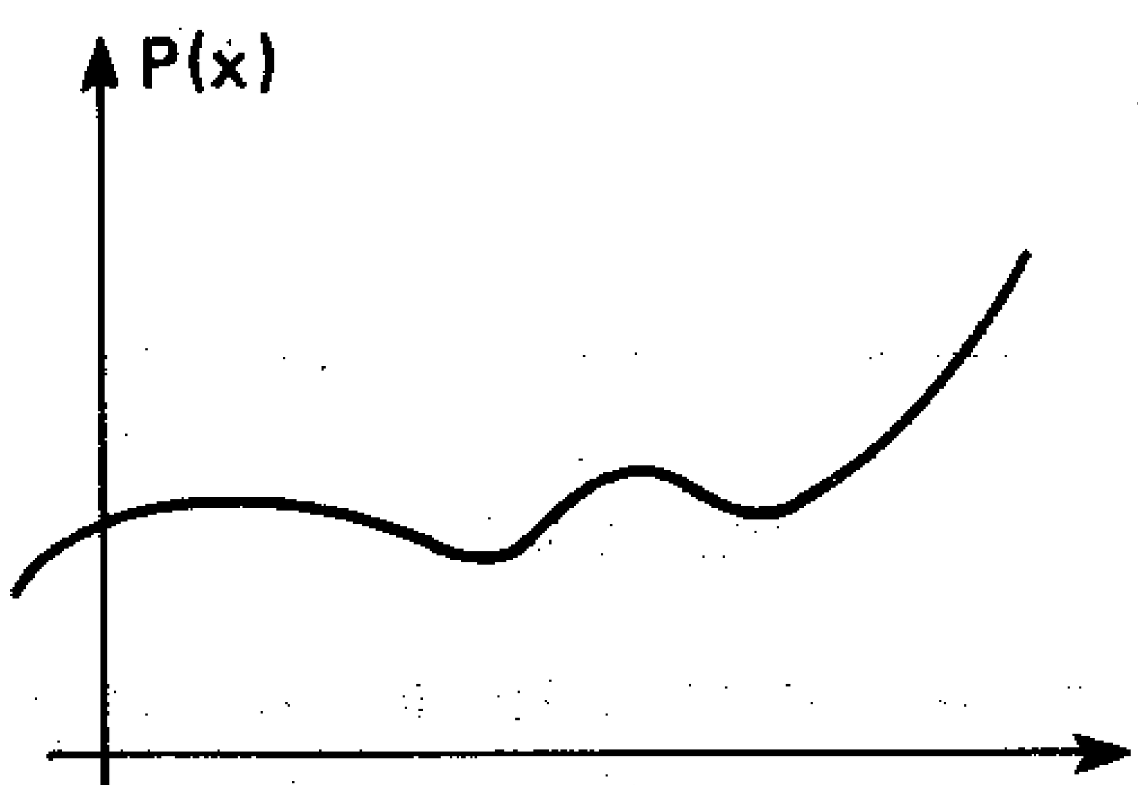


Fig. 18.1

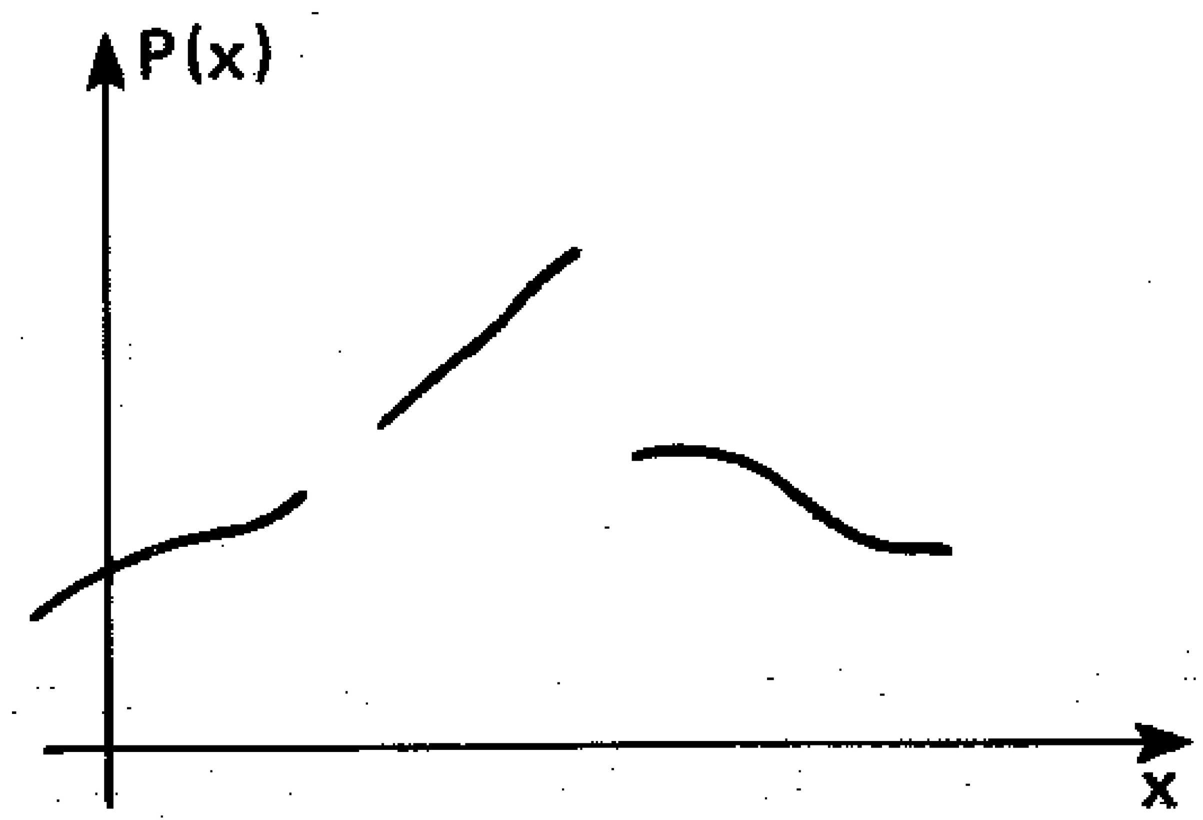


Fig. 18.2

Demonstra-se ainda que o gráfico **não pode** apresentar "bicos" do tipo que aparece na figura 18.3. É fácil ainda verificar que a interseção do gráfico com o eixo vertical nos dá o termo independente a_0, e uma interseção qualquer com o eixo horizontal nos dá uma raiz real **r** (veja figura 18.4).

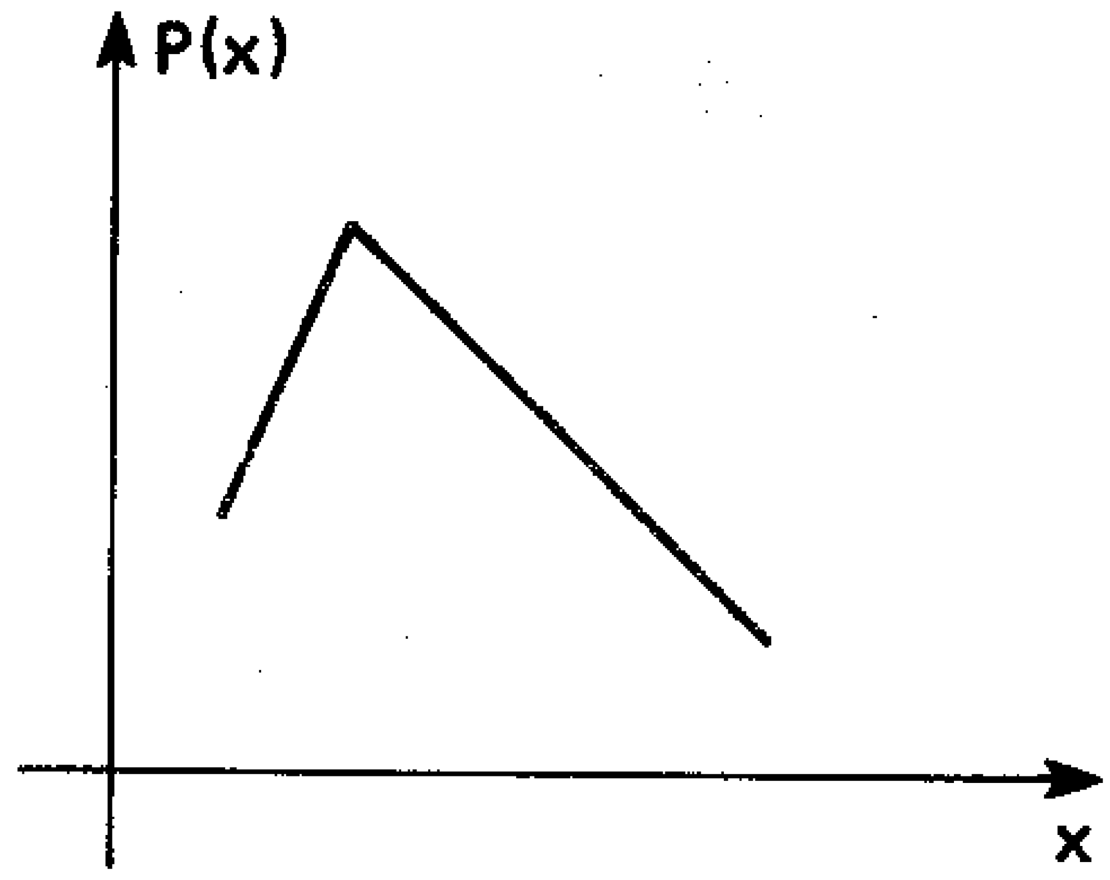


Fig. 18.3

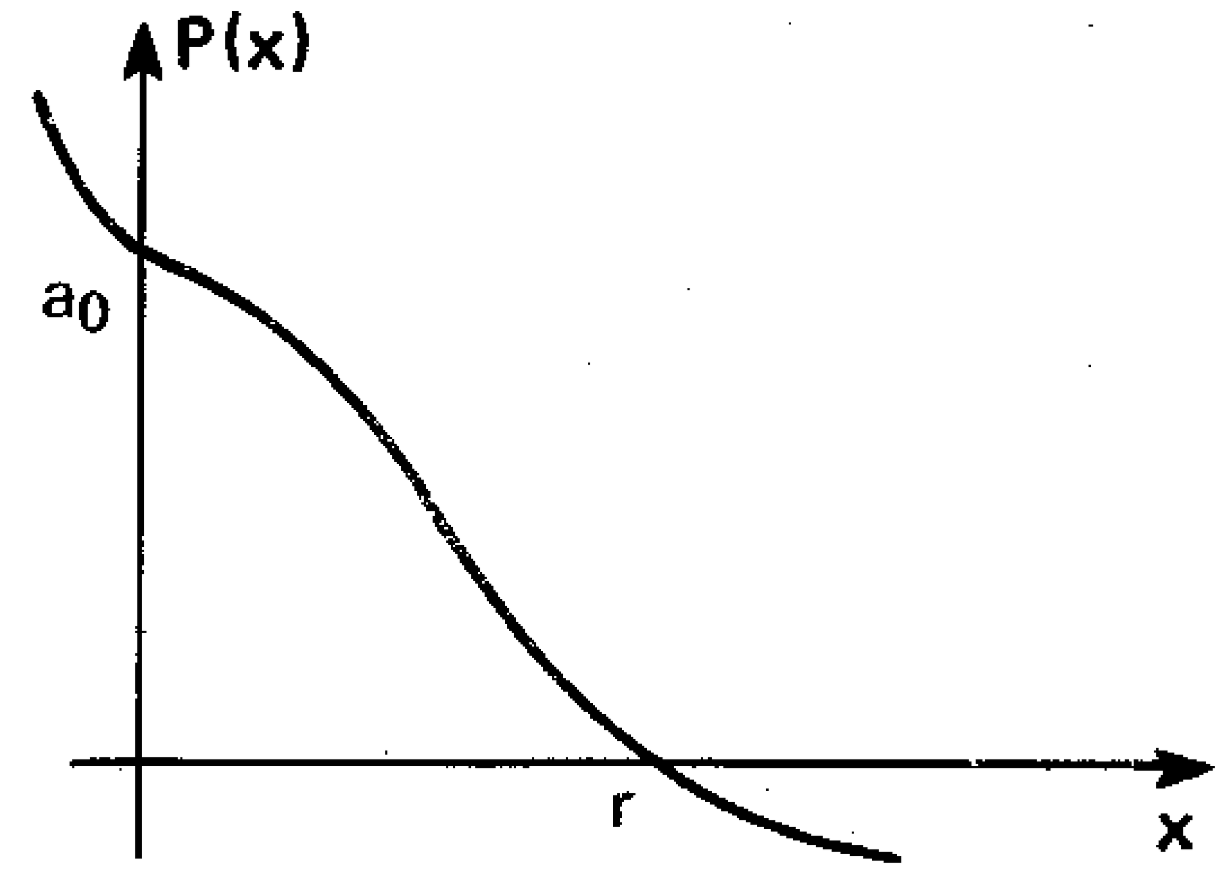


Fig. 18.4

Quando ocorrer o que vemos na figura 18.5, a raiz **r** tem multiplicidade par (o gráfico tangencia o eixo horizontal sem "cortá-lo"). Quando ocorrer o que vemos na figura 18.6, a raiz **r** tem multiplicidade ímpar maior que 1 (o gráfico corta o eixo horizontal, "tangenciando-o"). Se a raiz **r** for simples, ocorre o que vemos na figura 18.4.

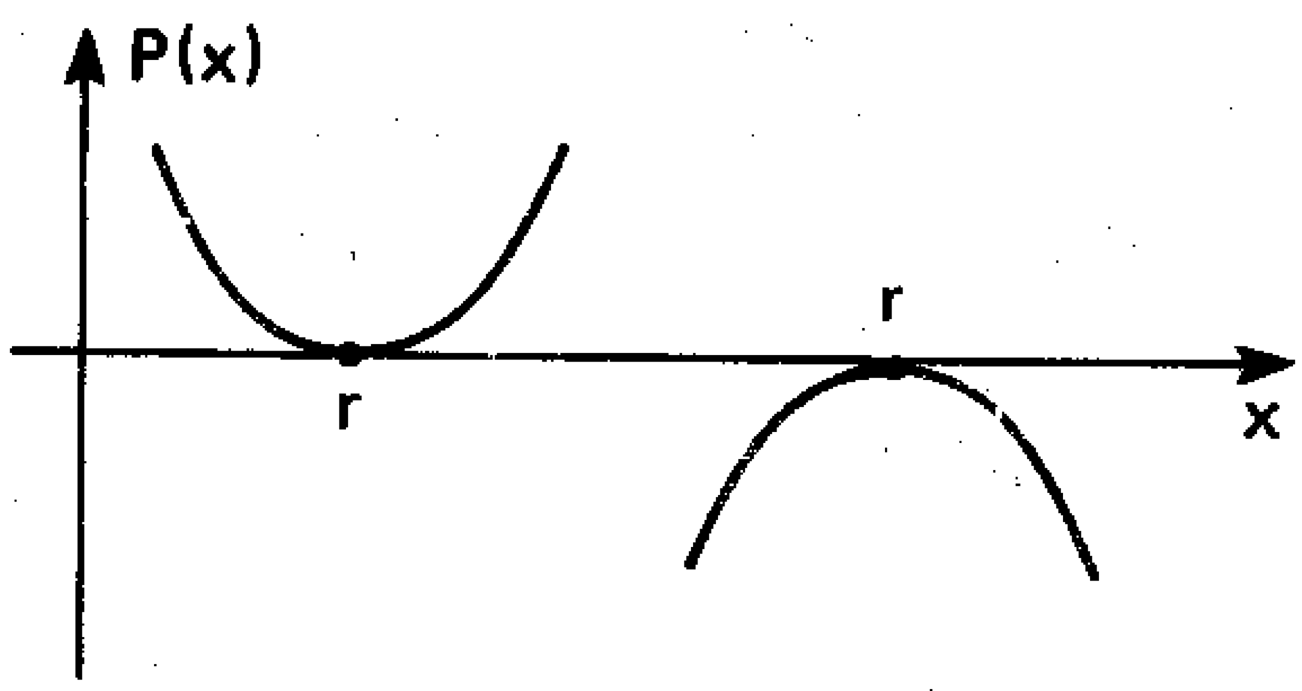


Fig. 18.5

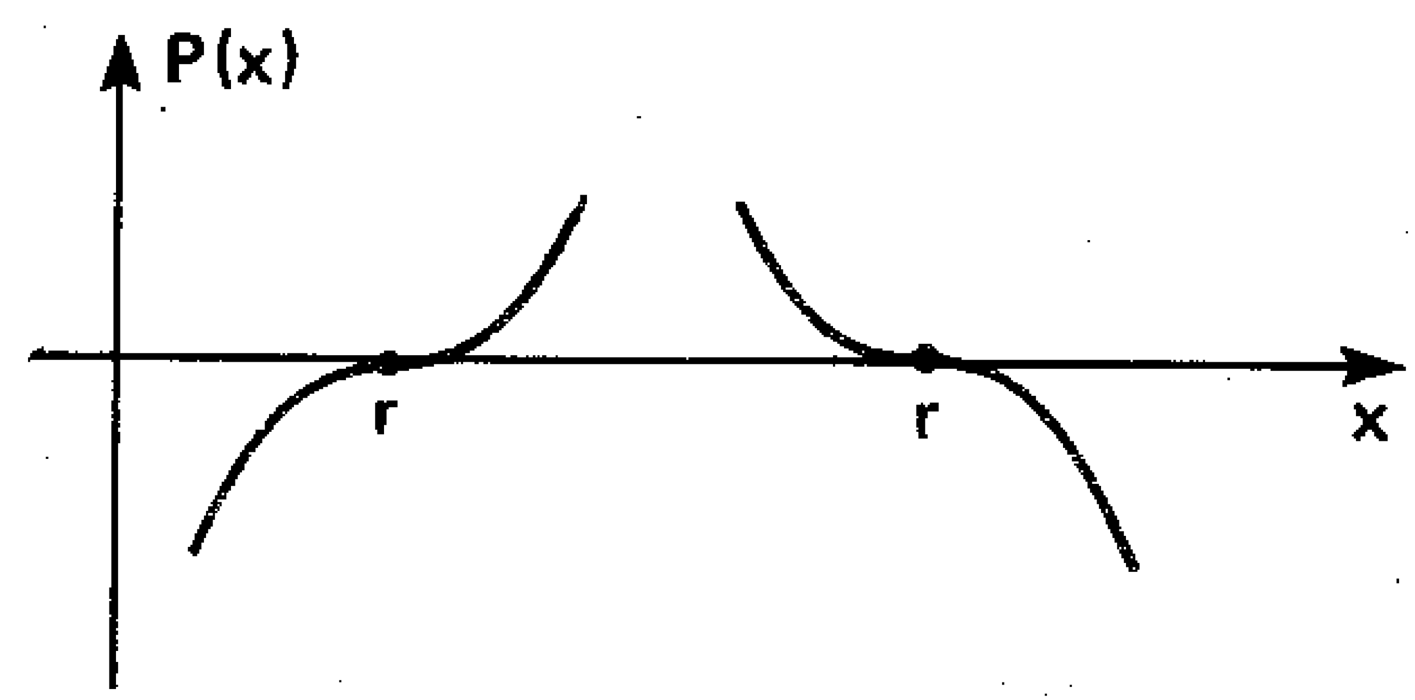


Fig. 18.6

Para aqueles valores de **x** para os quais a função é crescente (fig. 18.7), o polinômio derivado $P^{(1)}(x)$ assume valores **positivos**. Para os valores de **x** para os quais a função é decrescente (fig. 18.8), o polinômio derivado $P^{(1)}(x)$ assume valores **negativos**.

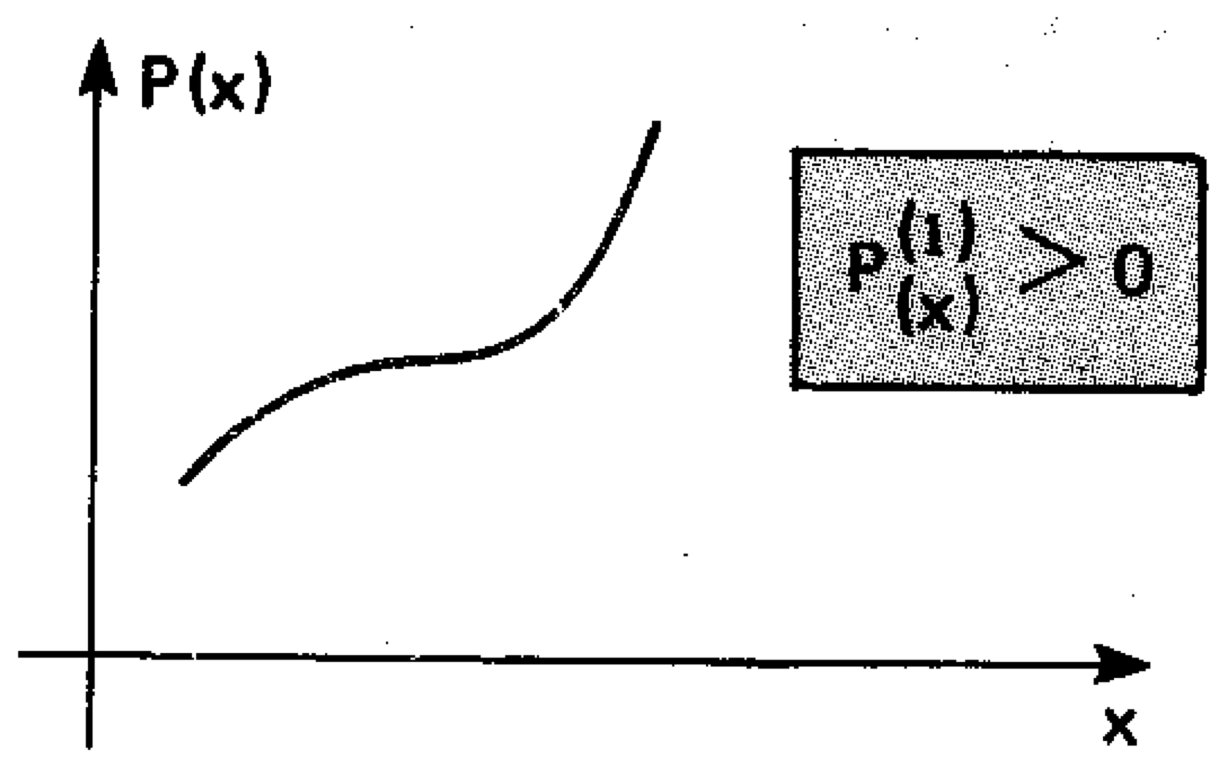


Fig. 18.7

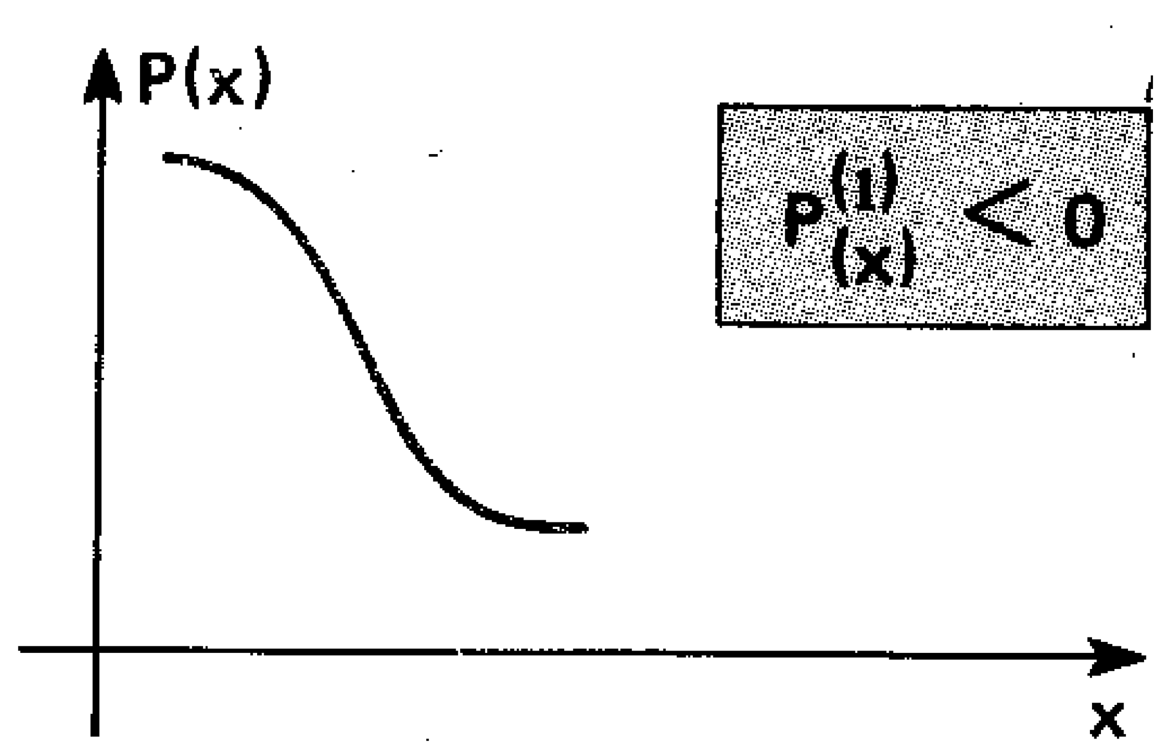


Fig. 18.8

Seja **k** um número real tal que $P^{(1)}(k) = 0$. Então, a reta tangente ao gráfica no ponto (k; P(k)) é paralela ao eixo horizontal (veja figuras 18.9, 18.10 e 18.11).

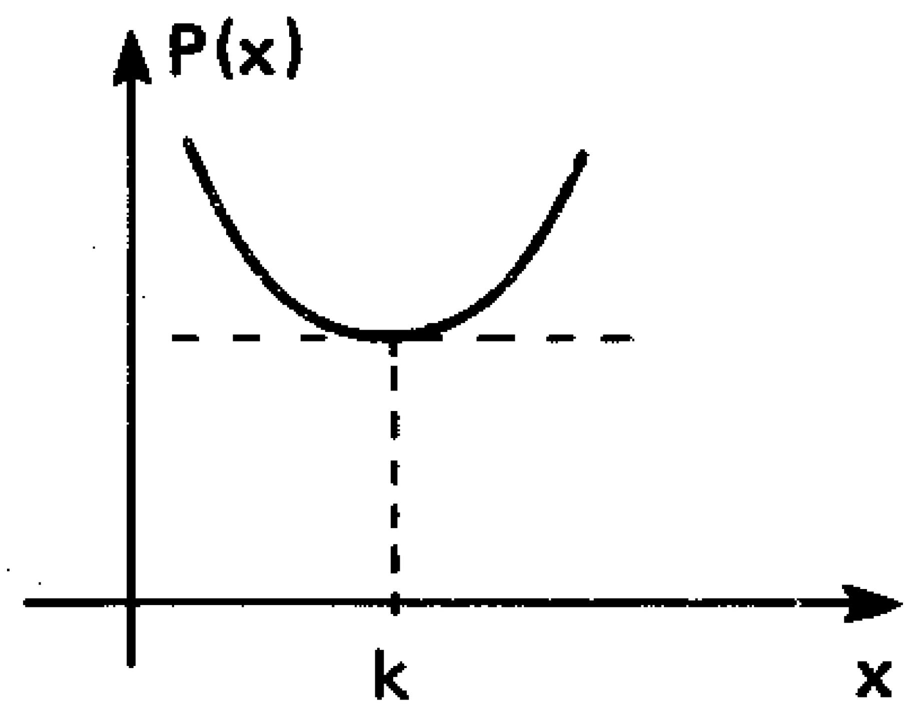


Fig. 18.9

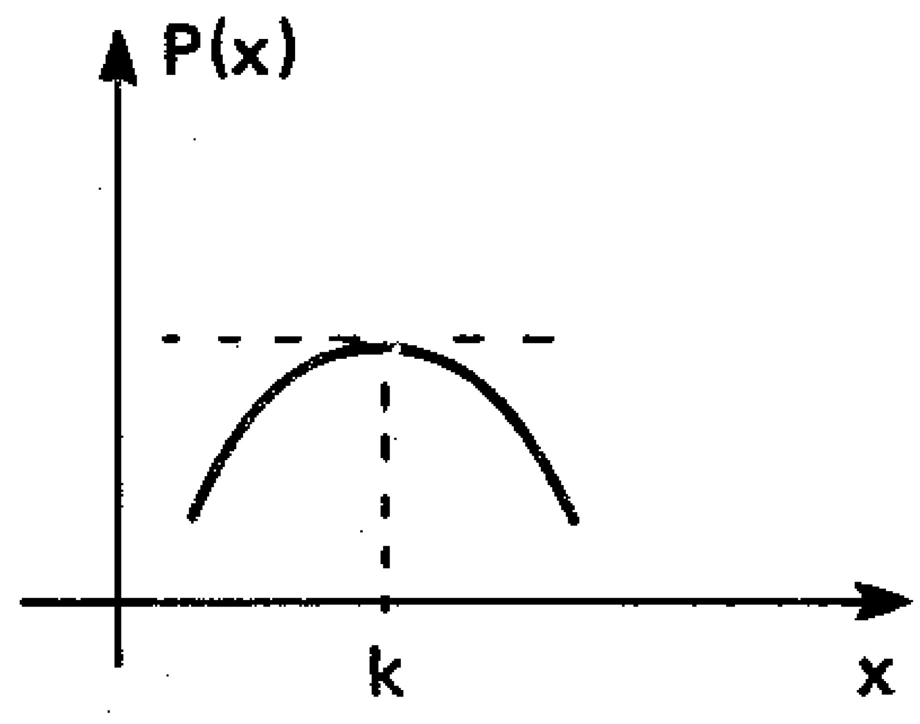


Fig. 18.10

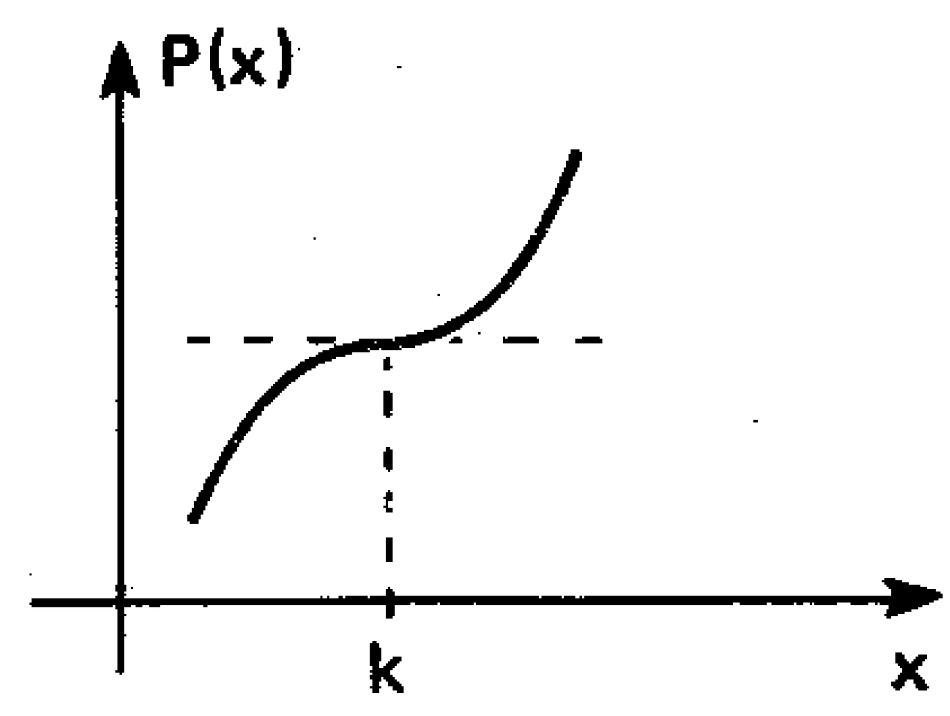


Fig. 18.11

Suponhamos que o polinômio seja de grau par. Sendo a_n o coeficiente do termo de mais alto grau, demonstra-se que:

1.º) se $a_n > 0$, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$, teremos $P(x) \to +\infty$ (como, por exemplo, na figura 18.12);

2.º) se $a_n < 0$, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$, teremos $P(x) \to -\infty$ (como, por exemplo, na figura 18.13).

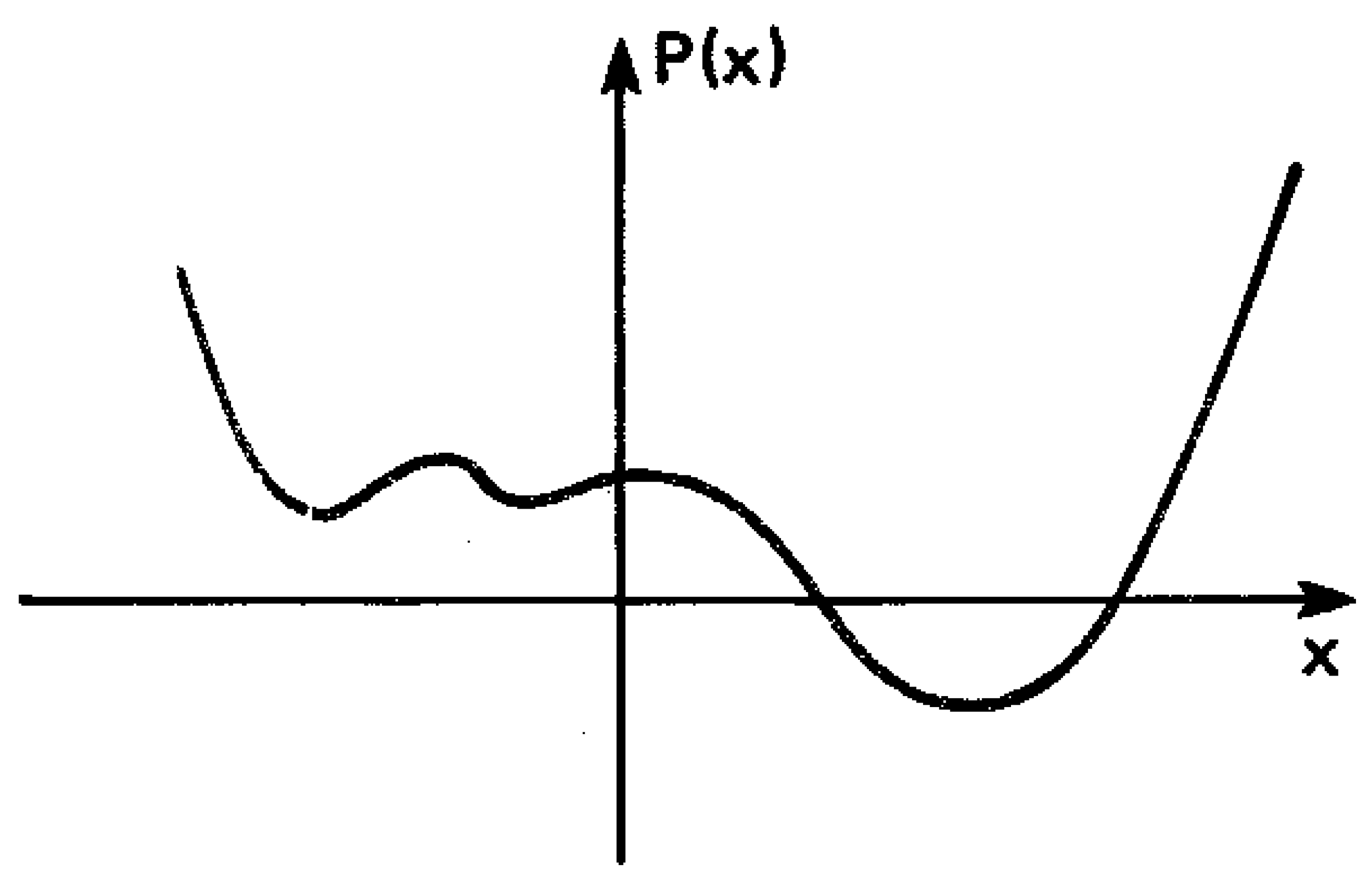


Fig. 18.12

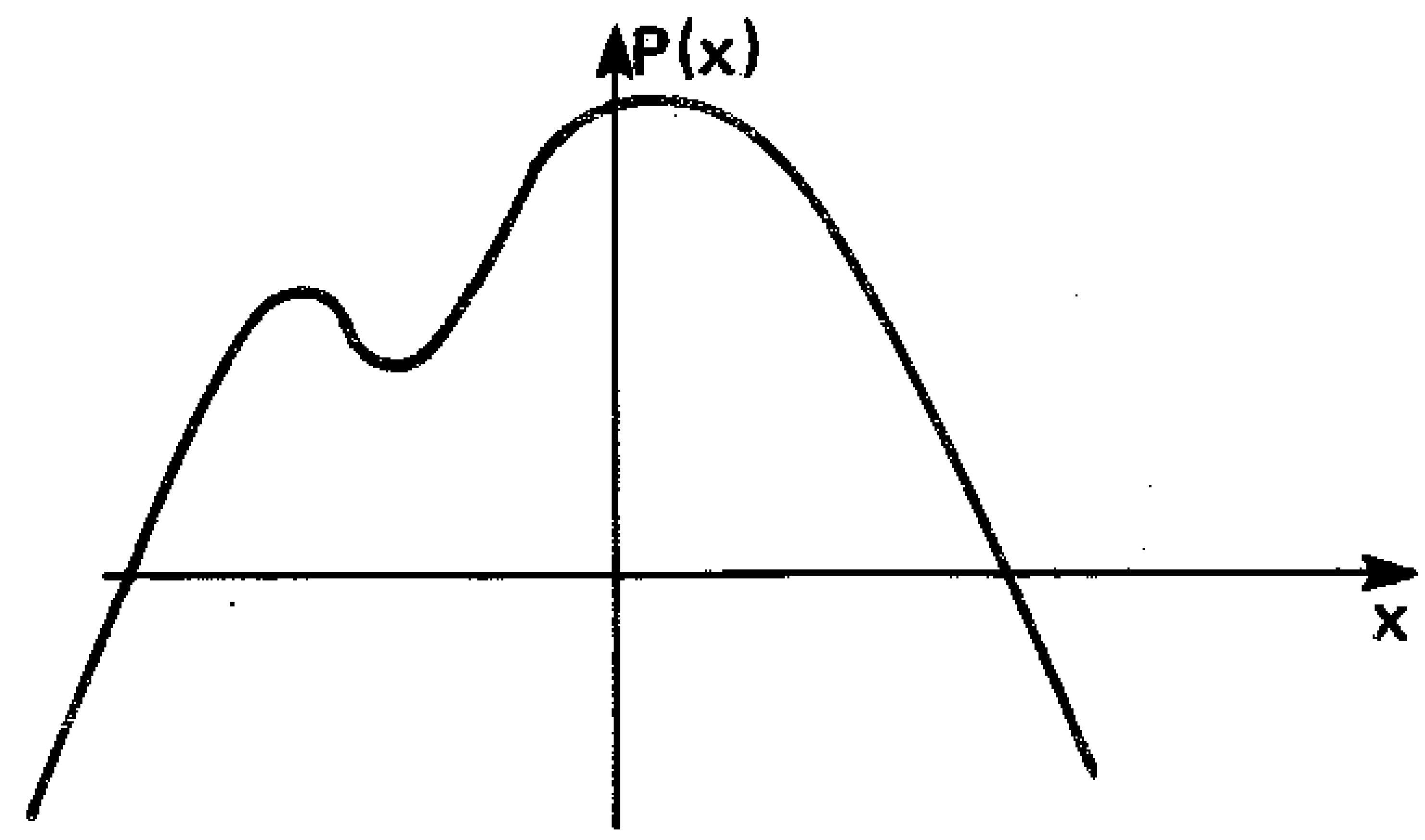


Fig. 18.13

Suponhamos agora que o polinômio seja de grau ímpar. Demonstra-se que:

1.º) $a_n > 0$

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases} \quad \text{(veja figura 18.14)}$$

2.º) $a_n < 0$

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \end{cases} \quad \text{(veja figura 18.15)}$$

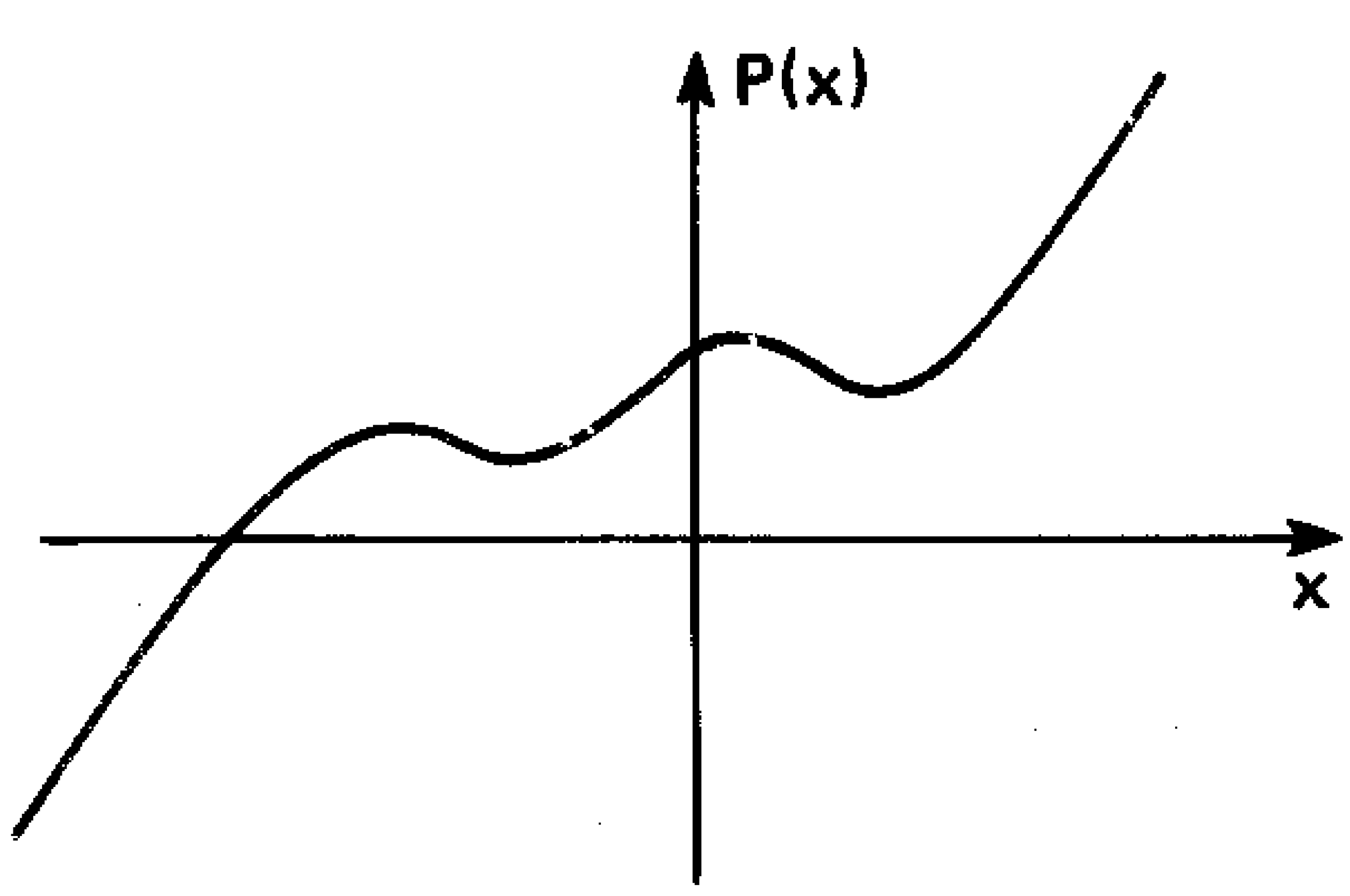


Fig. 18.14

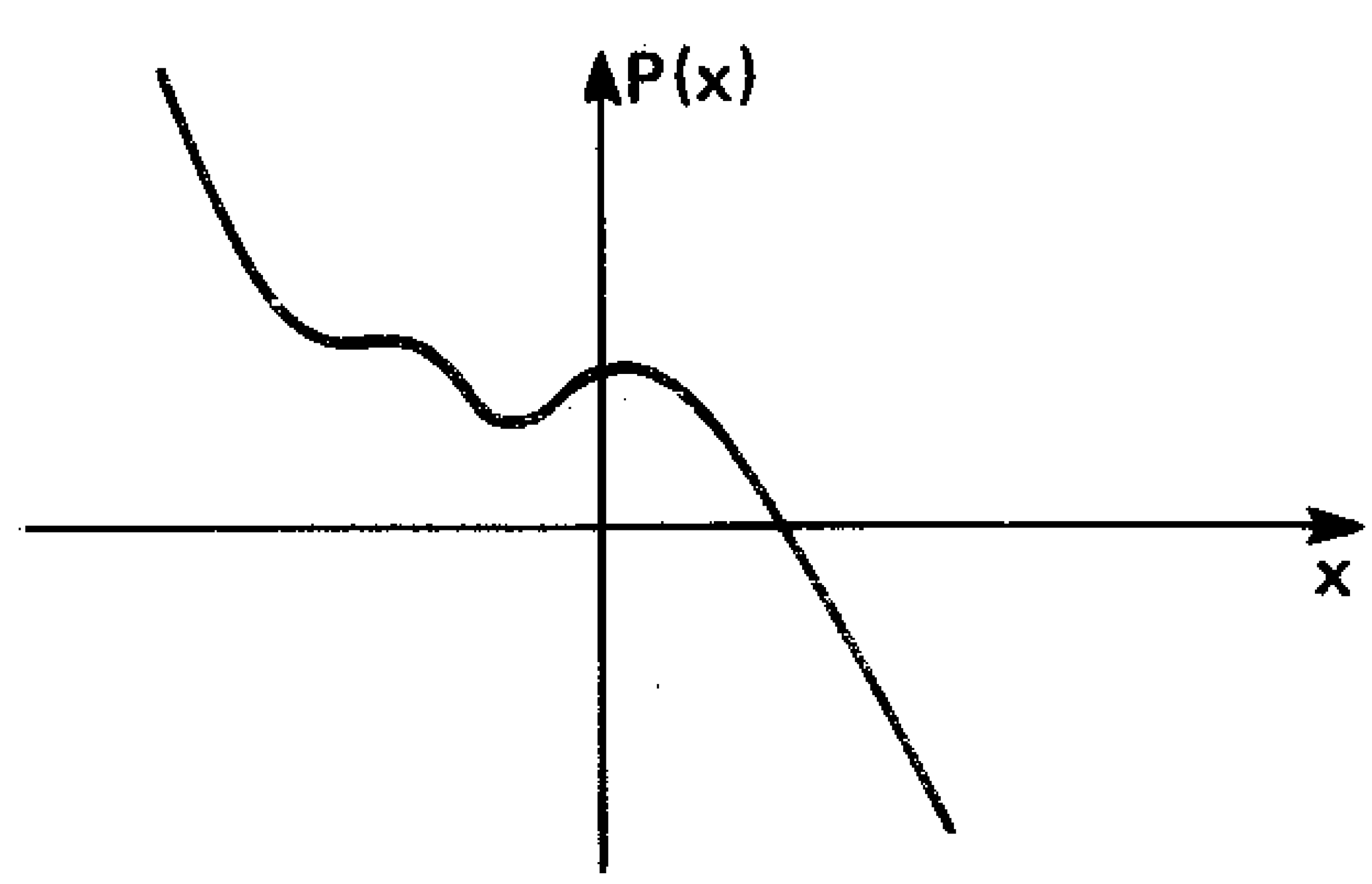


Fig. 18.15

18.1) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

a) Mostre que P(x) tem apenas uma raiz real.
b) Mostre que essa raiz real é negativa.
c) Mostre que essa raiz real é irracional.

Solução

a) Como P(x) é de grau ímpar e tem coeficientes reais, podemos garantir que ele possui pelo menos uma raiz real **r**; resta mostrar que **r** é a única raiz real. Para isso, determinemos o polinômio derivado de P(x):

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

O discriminante Δ desse polinômio é:

$$\Delta = 6^2 - 4(3)(5) = 36 - 60 = -24 < 0$$

Concluímos então (veja capítulo 4 do volume 1 desta coleção) que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, teremos $P^{(1)}(x) > 0$ e, portanto, a função polinomial P(x) é sempre crescente. Isto significa que o gráfico corta o eixo horizontal apenas uma vez (sem tangenciá-lo, pois $P^{(1)}(x) \neq 0$) e deve ter o aspecto da figura **a** ou da figura **b**.

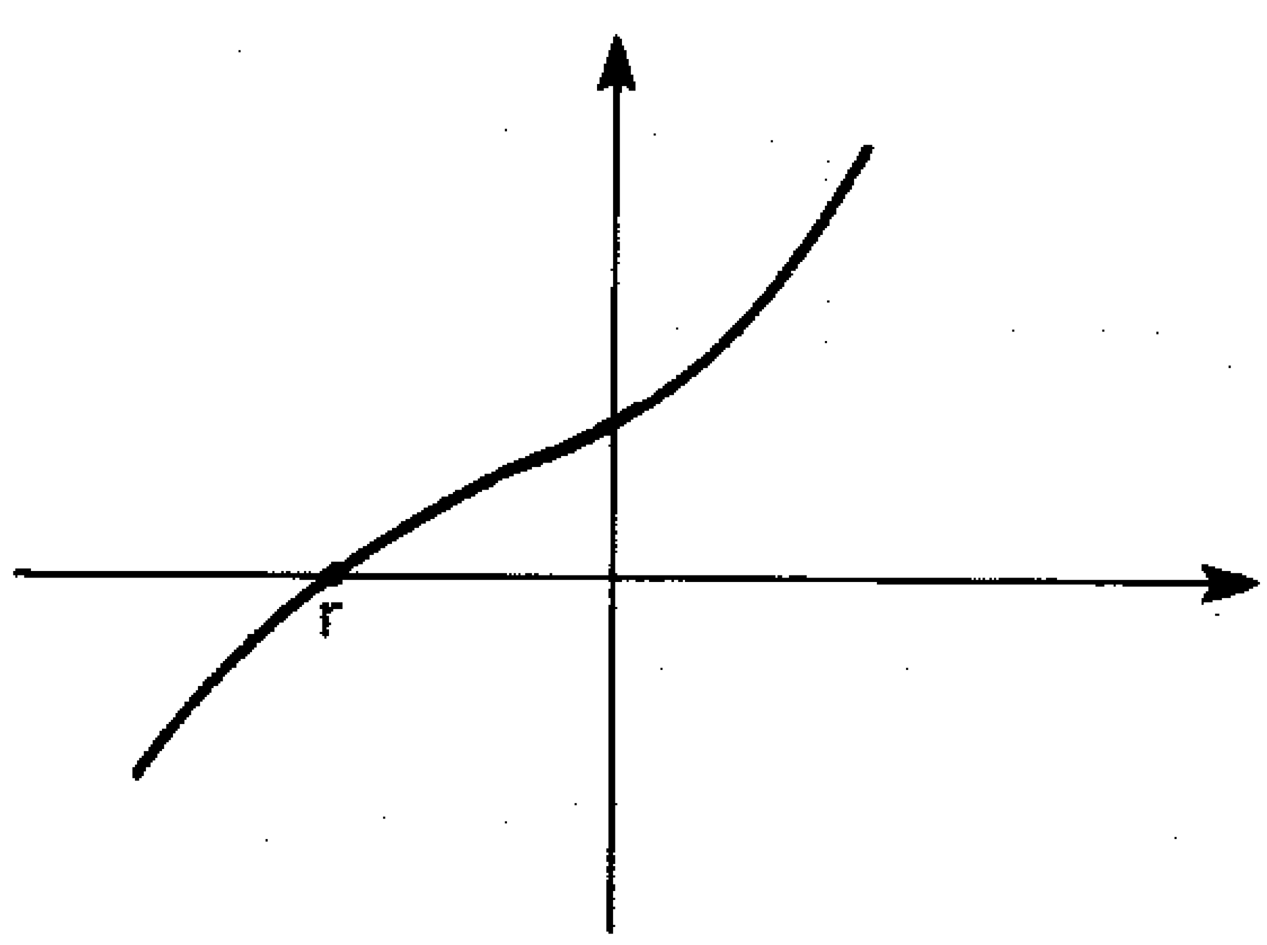


Fig. a

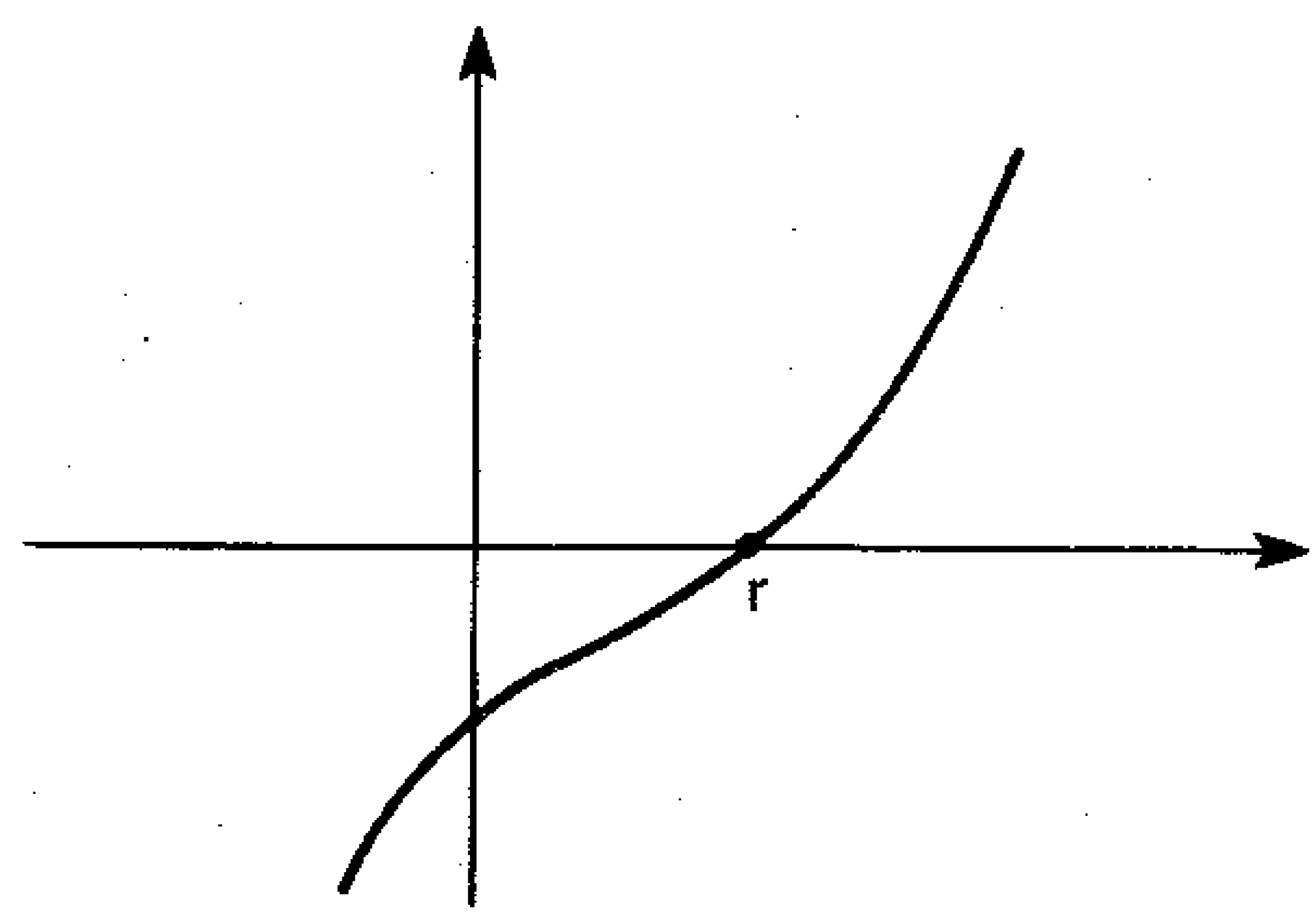


Fig. b

b) O termo independente é $a_0 = 2$ e o coeficiente do termo de maior grau é $a_n = 1$ (isto é, $a_n > 0$). Como o polinômio é de grau ímpar, o seu gráfico deve ter um aspecto parecido com o da figura **c** e, portanto, a raiz real **r** é negativa.

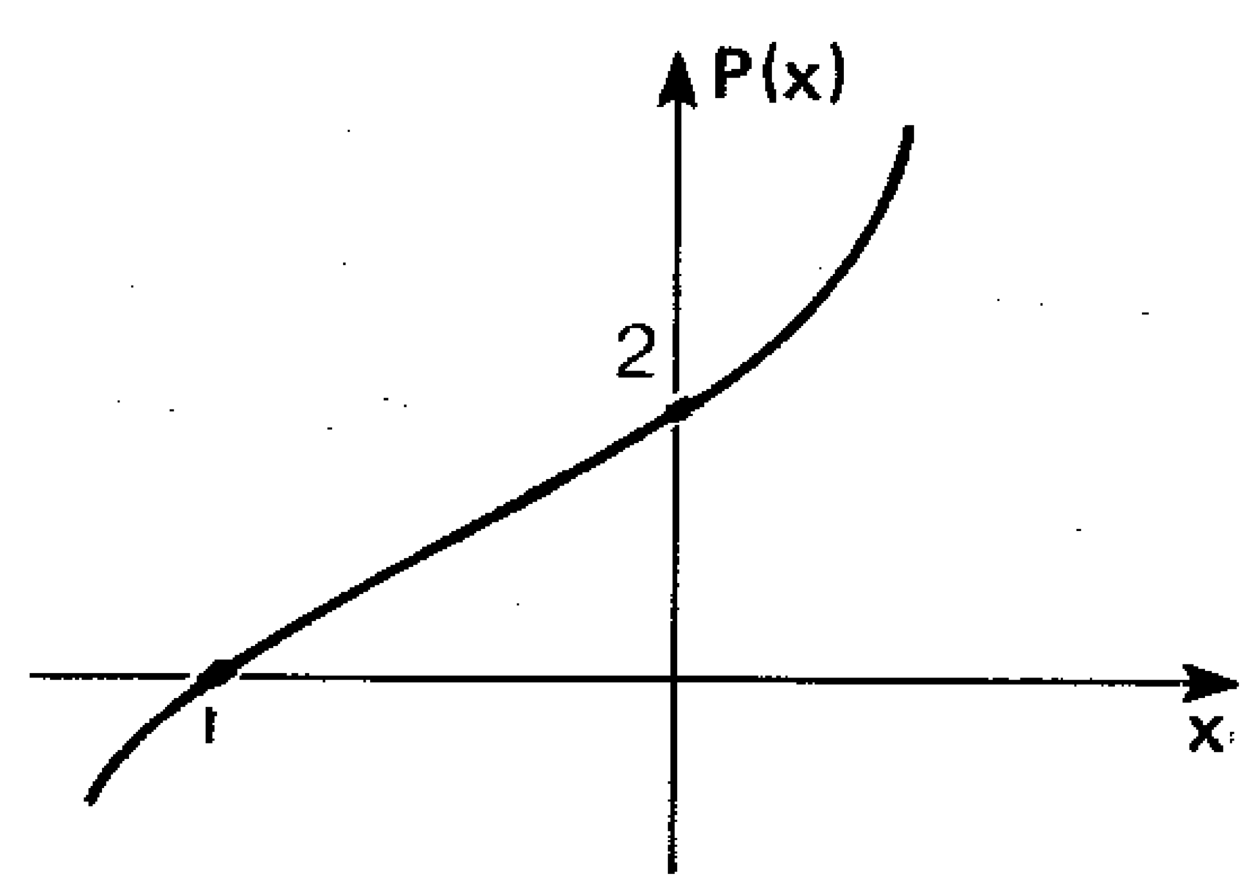


Fig. c

c) De acordo com o teorema visto no capítulo 15, as únicas raízes racionais possíveis seriam 1, −1, 2 e −2. Mas, já sabemos que a raiz real é negativa, assim, restam −1 e −2. No entanto, fazendo a verificação, vemos que $P(-1) \neq 0$ e $P(-2) \neq 0$. Portanto, P(x) não admite raízes racionais e a raiz real **r** deve ser **irracional**.

18.2) Consideremos o polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, de coeficientes reais e grau ímpar. Mostre que, se $a_n > 0$, o polinômio $P(x)$ admite pelo menos uma raiz real de sinal contrário ao do termo independente $\mathbf{a_0}$ (supondo $a_0 \neq 0$).

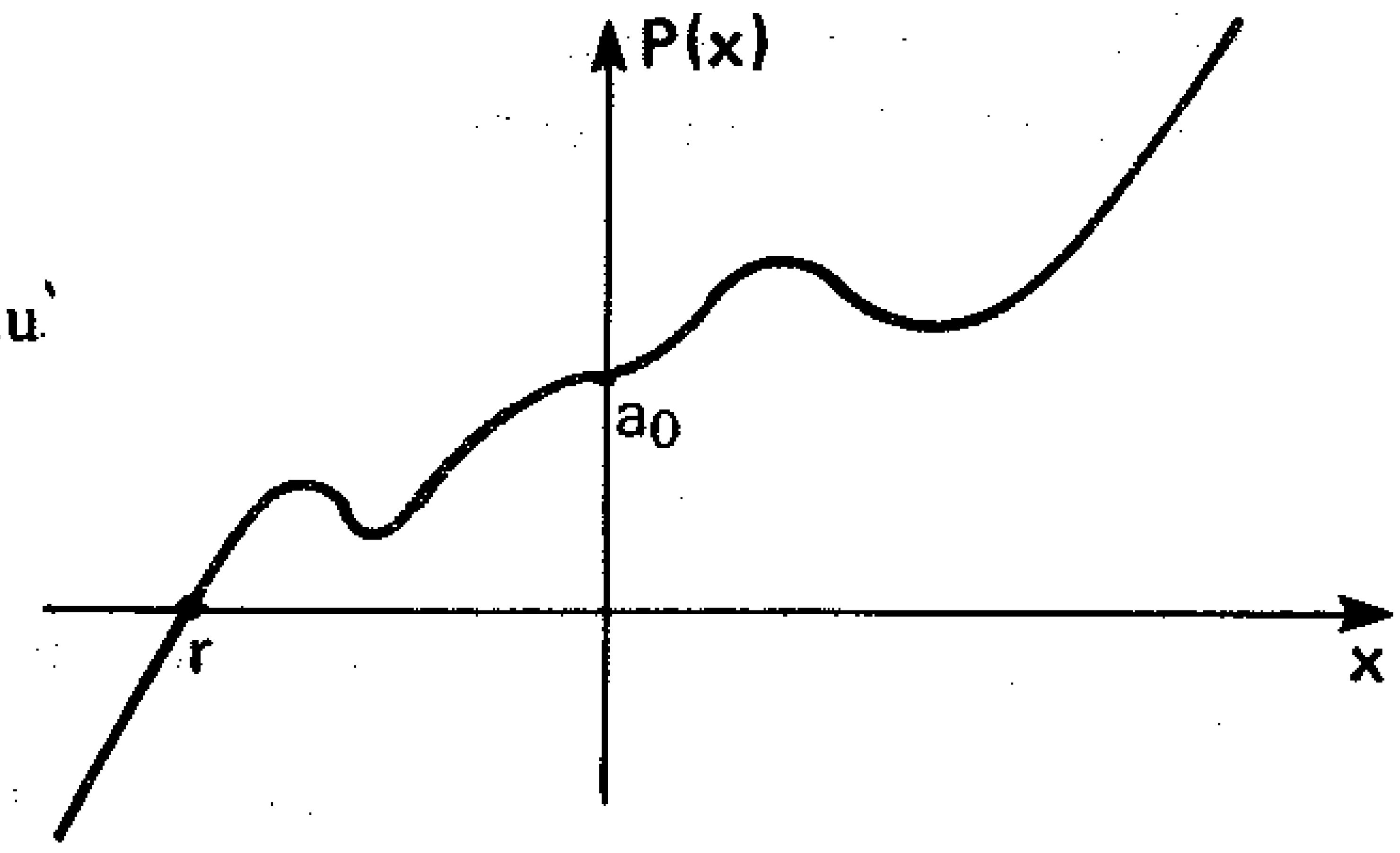
Solução

O polinômio é de grau ímpar e tem coeficientes reais; podemos então concluir que ele tem pelo menos uma raiz real. Consideremos então dois casos:

1.° caso: $a_0 > 0$

Como $a_n > 0$ e o polinômio é de grau ímpar, temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to \infty \text{ vem } P(x) \to \infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases}$$

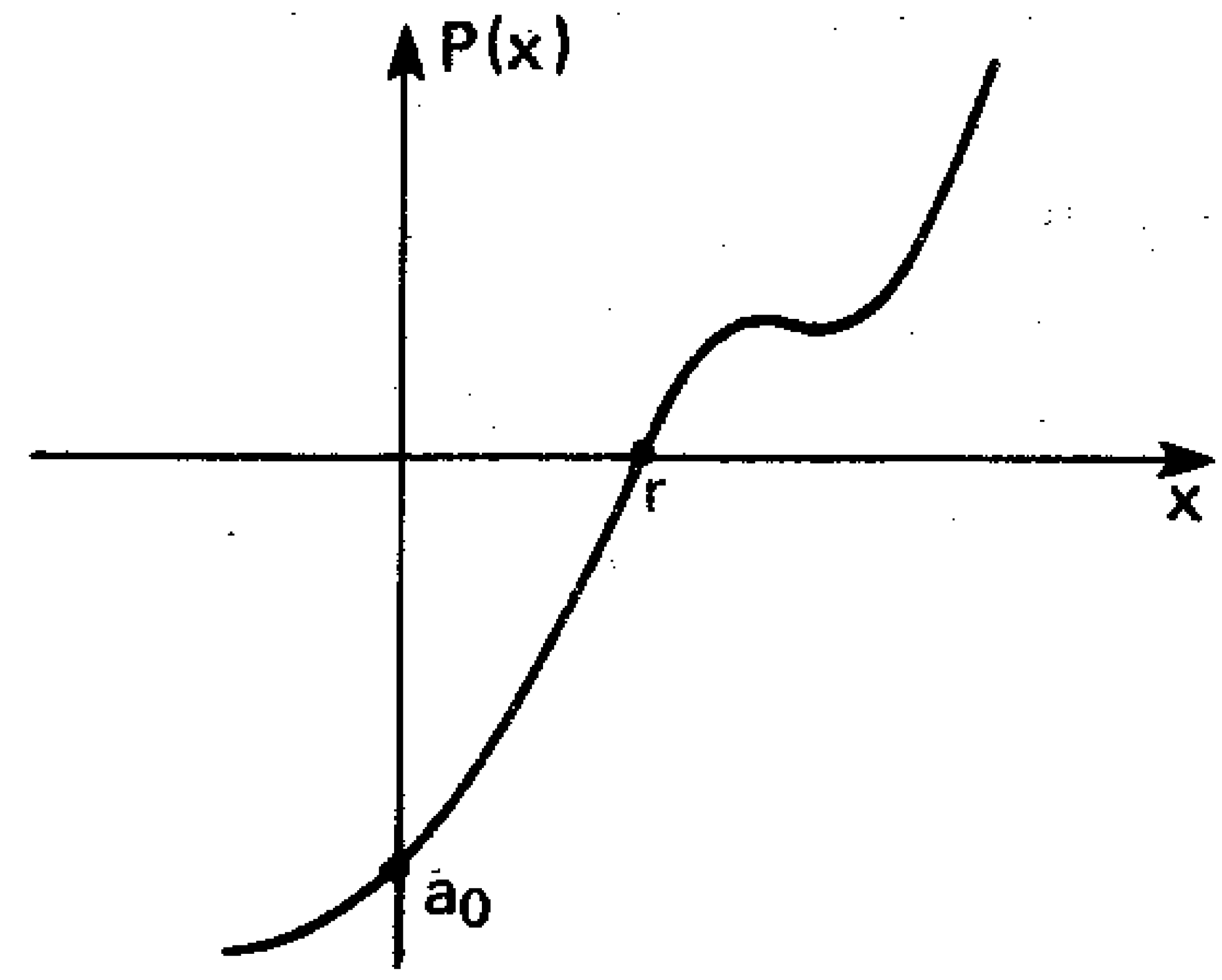


Portanto, há pelo menos uma raiz real **r** negativa, isto é, de sinal contrário ao de a_0 (obviamente, poderá ter também raízes positivas).

2.° caso: $a_0 < 0$

Como $a_n > 0$ e o polinômio é de grau ímpar, temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to \infty \text{ vem } P(x) \to \infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases}$$



Assim, há pelo menos uma raiz positiva **r** (de sinal contrário ao de a_0).

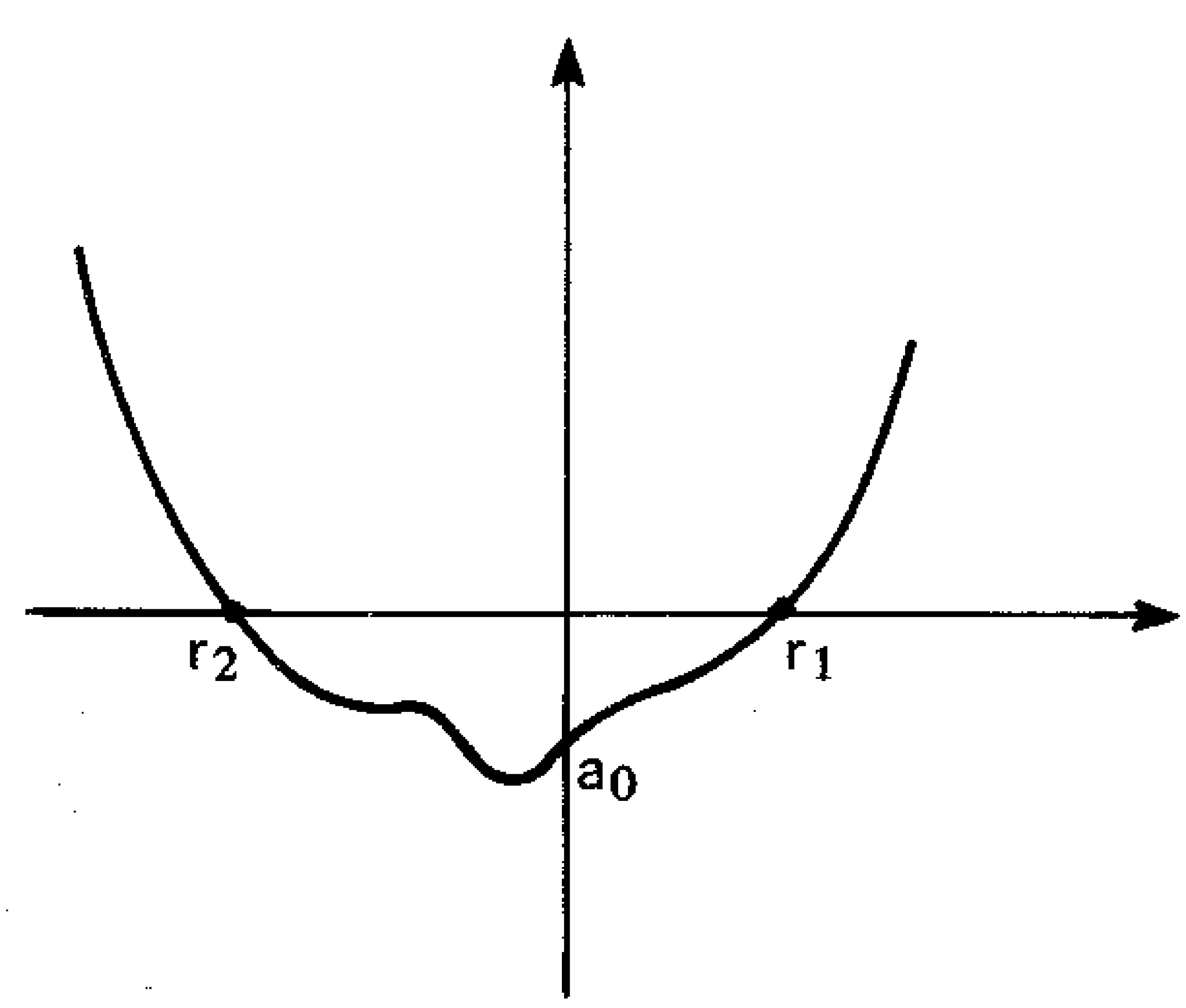
18.3) Consideremos o polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, de grau par (não nulo), tal que $a_n > 0$ e $a_0 < 0$. Mostre que esse polinômio admite pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.

Solução

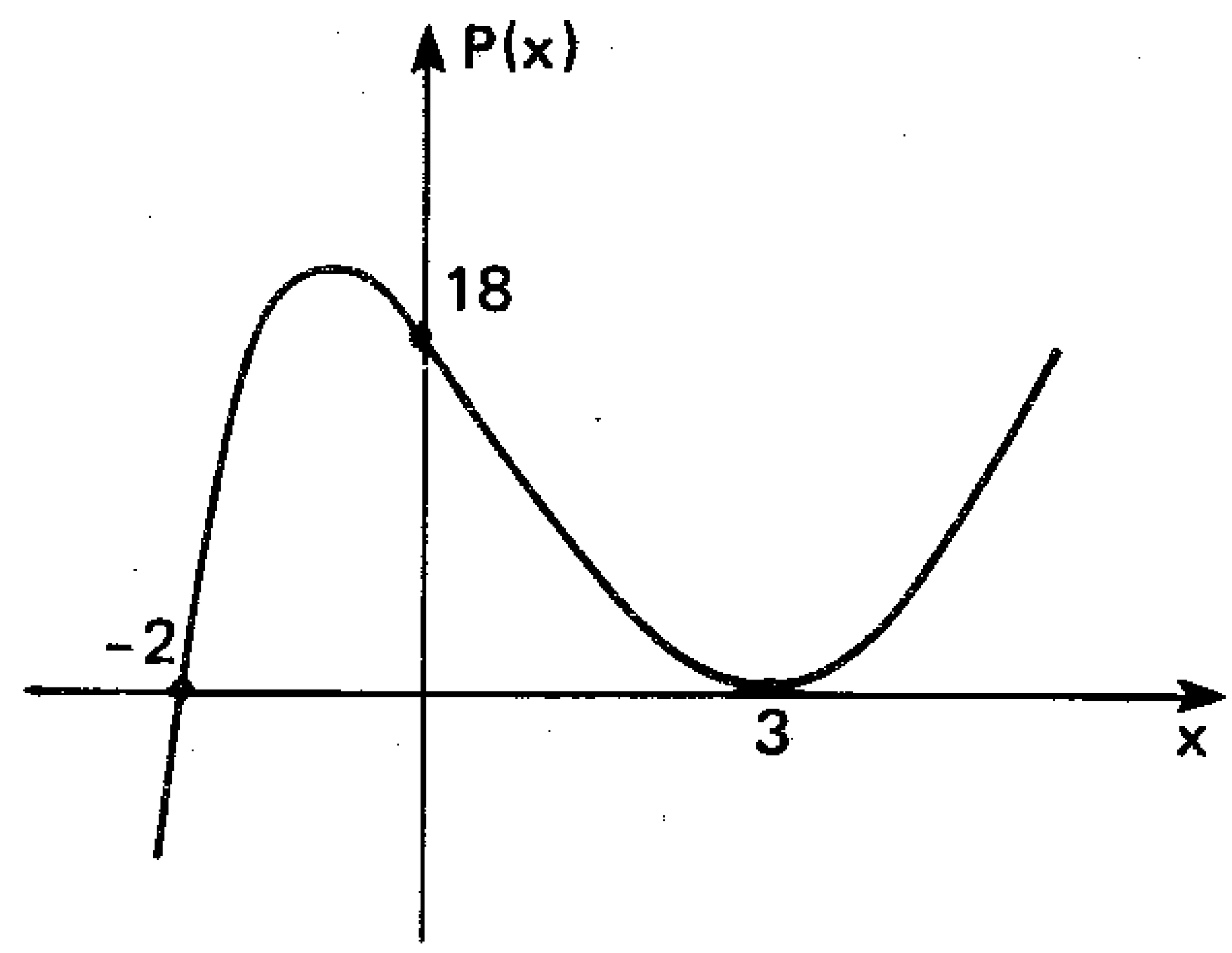
O polinômio é de grau par e $a_n > 0$. Portanto temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \end{cases}$$

Como $a_0 < 0$, o gráfico deve ser "algo parecido" com o gráfico da figura ao lado e, portanto, o polinômio admite pelo menos uma raiz positiva r_1 e pelo menos uma raiz negativa r_2.



18.4) Determine o polinômio P(x), cujo gráfico é dado ao lado, sabendo que seu grau é 3.



Solução

Vemos que -2 é raiz simples e 3 é raiz de multiplicidade par. Mas, como P(x) é de grau 3 (e portanto tem três raízes), concluímos que o número 3 é raiz dupla. Portanto, temos:

$$P(x) = a(x + 2)(x - 3)^2$$

Mas o gráfico nos informa ainda que $P(0) = 18$. Assim:

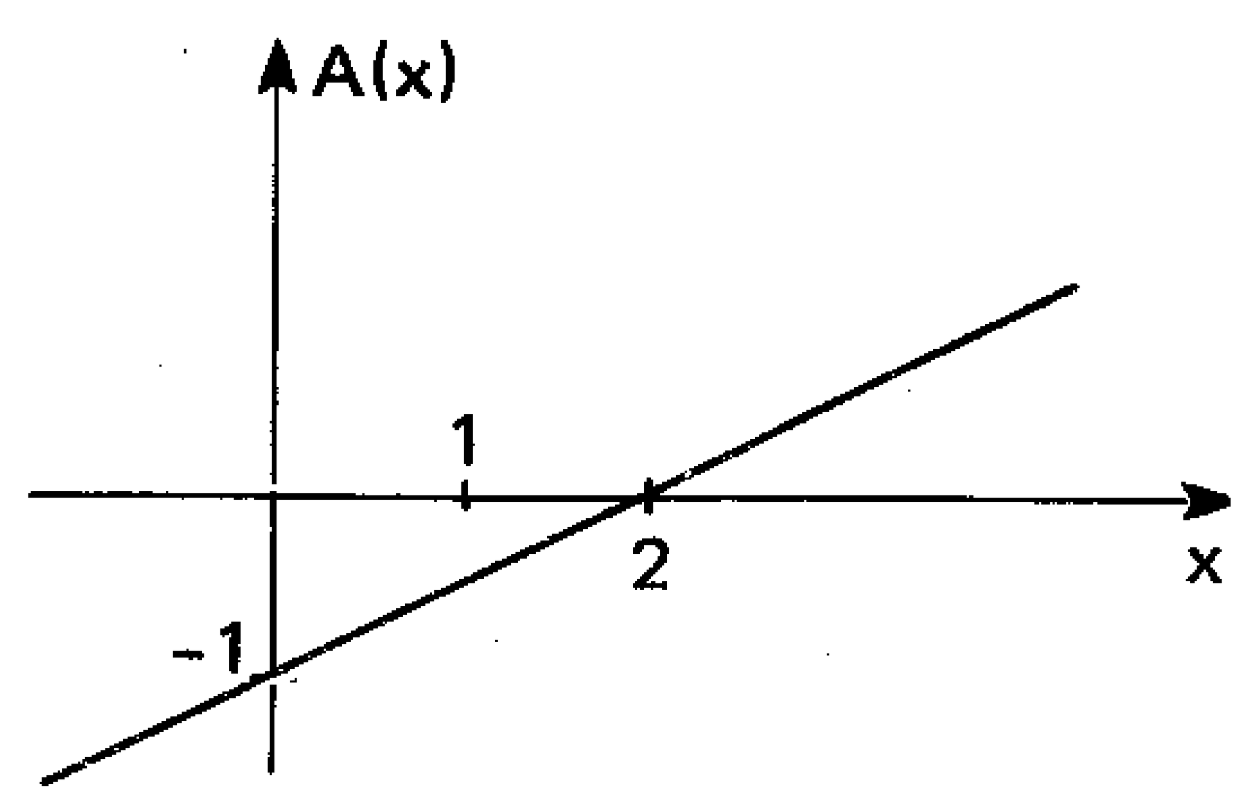
$$P(0) = a(0 + 2)(0 - 3)^2 = 18$$

donde tiramos $a = 1$.

Portanto, $P(x) = (x + 2)(x - 3)^2$

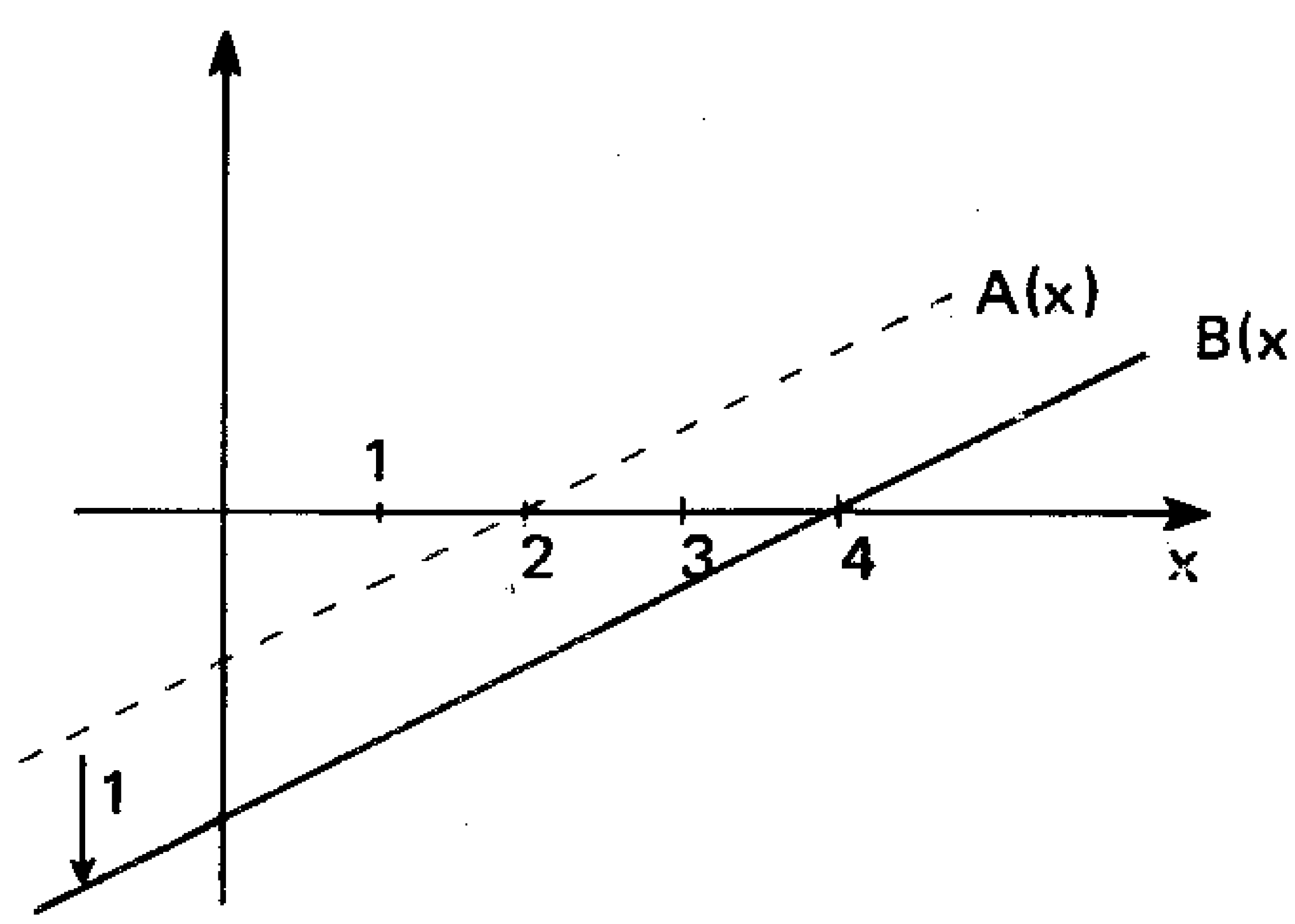
ou, desenvolvendo, $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

18.5) Temos ao lado o gráfico de um polinômio A(x). Esboce o gráfico do polinômio B(x) tal que $B(x) = A(x) - 1$.



Solução

Ao subtrairmos 1 unidade do polinômio A(x), o seu gráfico deve "descer" 1 unidade (veja capítulo 6 do volume 1 desta coleção).



18.6) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + (k^2 - 6k + 1)$, onde **k** é real.

a) Mostre que, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, P(x) admite uma única raiz real.
b) Determine o valor de **k** para o qual essa raiz real tenha o maior valor possível.
c) Determine essa maior raiz real.

Solução

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \underbrace{(k^2 - 6k + 1)}_{a_0}$

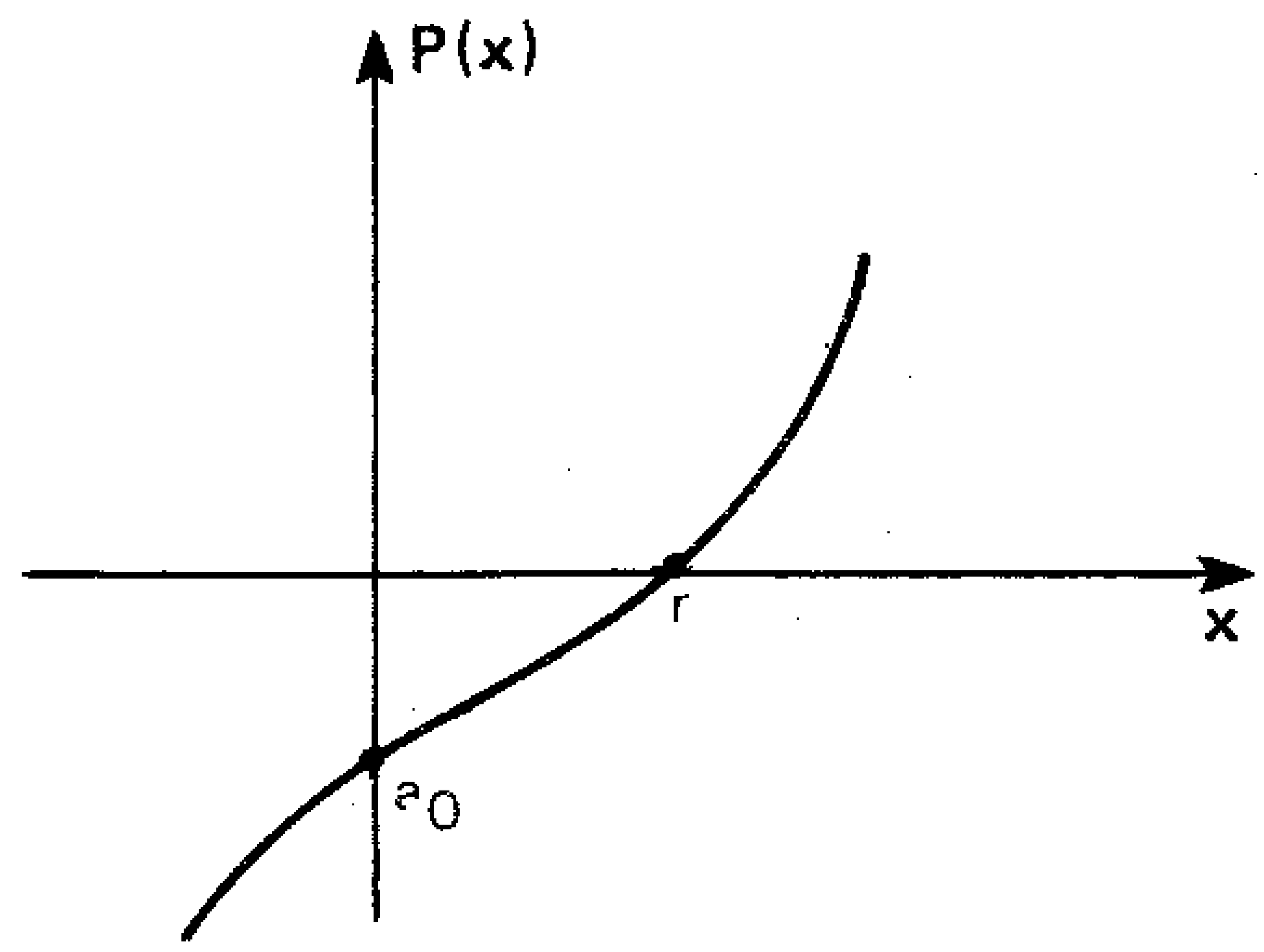
onde a_0 é uma constante (para cada valor de **k**), isto é, é o termo independente. Derivando P(x) temos:

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

cujo discriminante é:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(4) = -32 < 0$$

e, portanto, $P^{(1)}(x)$ é sempre positivo, o que acarreta que P(x) é sempre crescente. Como o grau de P(x) é ímpar e o coeficiente do termo de mais alto grau é positivo, o gráfico é "algo parecido" com o gráfico ao lado, e o polinômio admite uma única raiz **r**.



b) Observando o gráfico, percebemos que, para que **r** aumente, a_0 deve diminuir. Portanto, a raiz **r** atinge o seu valor **máximo** quando a_0 atingir o seu valor mínimo. Mas:

$$a_0 = k^2 - 6k + 1$$

e o valor **mínimo** de a_0 (veja capítulo 4 do volume 1 desta coleção) é obtido quando $k = 3$.

c) Para $k = 3$ temos $a_0 = 3^2 - 6(3) + 1 = -8$ e o polinômio fica:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

Fazendo a pesquisa das raízes racionais, concluímos que 2 é raiz e, portanto, a maior raiz real possível para P(x) é o número 2.

Exercícios Propostos

18.7) Consideremos o polinômio $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x + 7$. Mostre que ele é sempre crescente.

18.8) Mostre que o polinômio $P(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 4$ é sempre decrescente.

18.9) Considere novamente o polinômio do exercício anterior. Mostre que P(x) tem apenas uma raiz real, que é positiva e irracional.

18.10) Damos a seguir apenas o termo de mais alto grau e o termo independente de uma série de polinômios de coeficientes reais.

$A(x) = 6x^{53} + \ldots + 7$ $\qquad$ $E(x) = 8x^{42} + \ldots + 7$

$B(x) = 6x^{53} + \ldots - 7$ $\qquad$ $F(x) = 8x^{42} + \ldots - 7$

$C(x) = -6x^{53} + \ldots + 9$ $\qquad$ $G(x) = -8x^{42} + \ldots + 7$

$D(x) = -6x^{53} + \ldots - 9$ $\qquad$ $H(x) = -8x^{42} + \ldots - 7$

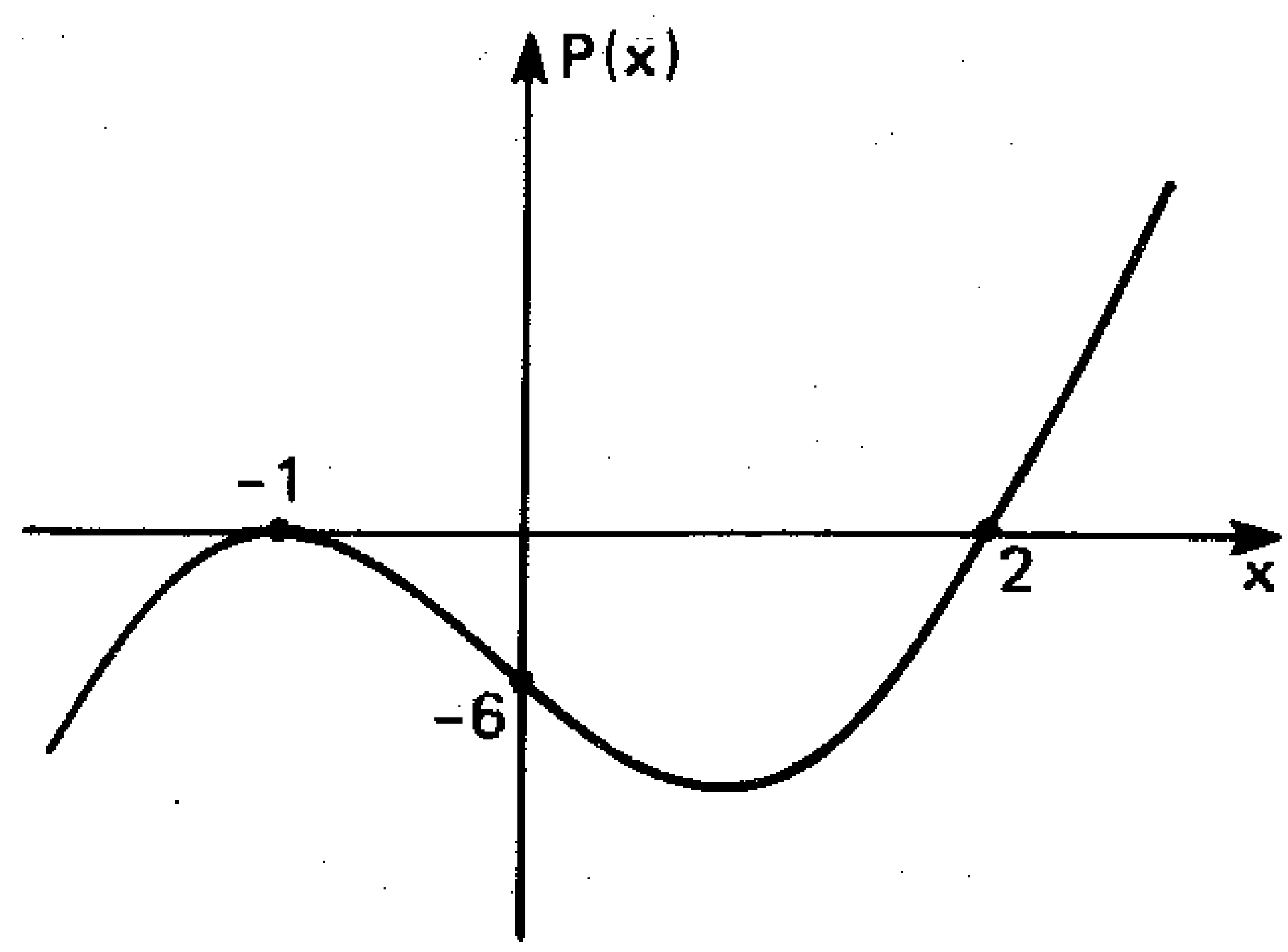
Analise cada sentença a seguir e diga se é *verdadeira* ou *falsa*.

a) $A(x)$ tem pelo menos uma raiz real positiva.
b) $A(x)$ tem pelo menos uma raiz real negativa.
c) $B(x)$ tem pelo menos uma raiz real positiva.
d) $B(x)$ tem pelo menos uma raiz real negativa.
e) $C(x)$ tem pelo menos uma raiz real positiva.
f) $C(x)$ tem pelo menos uma raiz real negativa.
g) $D(x)$ tem pelo menos uma raiz real positiva.
h) $D(x)$ tem pelo menos uma raiz real negativa.
i) $E(x)$ tem pelo menos duas raízes reais.
j) $F(x)$ tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.
k) $G(x)$ tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.
l) $H(x)$ tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.

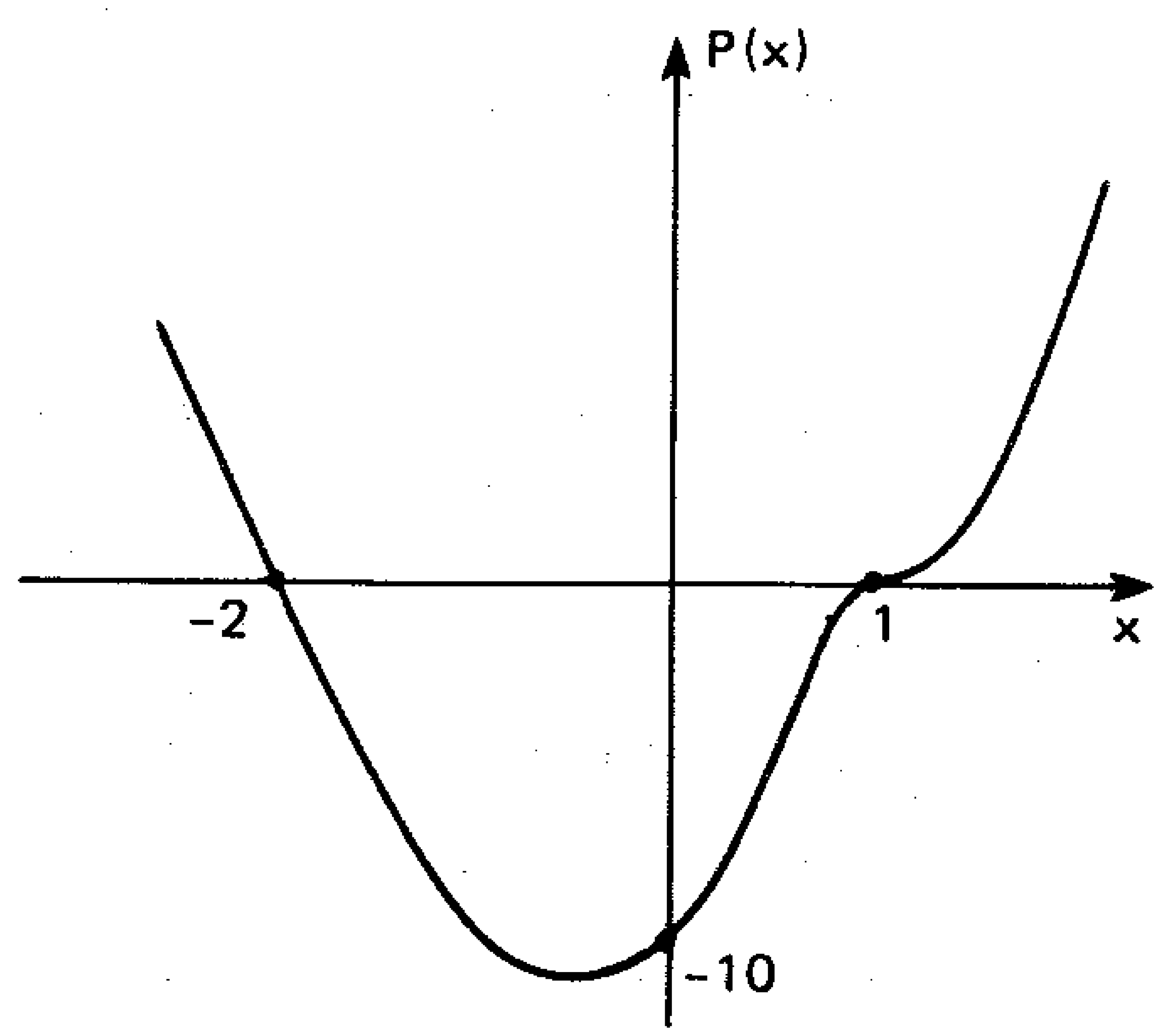
18.11) Temos, ao lado, o gráfico de um polinômio de coeficientes reais.

a) Determine esse polinômio, supondo que ele seja do terceiro grau.

b) Determine esse polinômio, supondo que ele seja de grau 5.



18.12) Temos, ao lado, o gráfico de um polinômio de grau 4 e coeficientes reais. Determine o polinômio.



18.13) Consideremos o polinômio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$, onde **k** é real.

a) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio admite uma raiz dupla.
b) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio tem 3 raízes reais distintas.
c) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio admite uma raiz real e duas raízes imaginárias.

18.3 — TEOREMA DE BOLZANO

Consideremos um polinômio P(x), de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Consideremos também dois números reais quaisquer **a** e **b**, que não sejam raízes de P(x), com $a < b$. O teorema de Bolzano (matemático tcheco, de origem italiana, 1781-1848) afirma que:

> 1.º) Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, há um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.
>
> 2.º) Se P(a) e P(b) têm o mesmo sinal, há um número par de raízes **reais** entre **a** e **b**.

Ao enunciarmos esse teorema, estamos considerando que o número 0 também é par.

A demonstração deste teorema será feita no exercício 18.17; agora daremos apenas algumas ilustrações gráficas.

Exemplos

a) Na figura 18.16 temos P(a) e P(b) de sinais contrários e uma raiz real entre **a** e **b** (isto é, um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**).
Na figura 18.17 temos P(a) e P(b) de sinais contrários e três (número ímpar) raízes reais entre **a** e **b**.

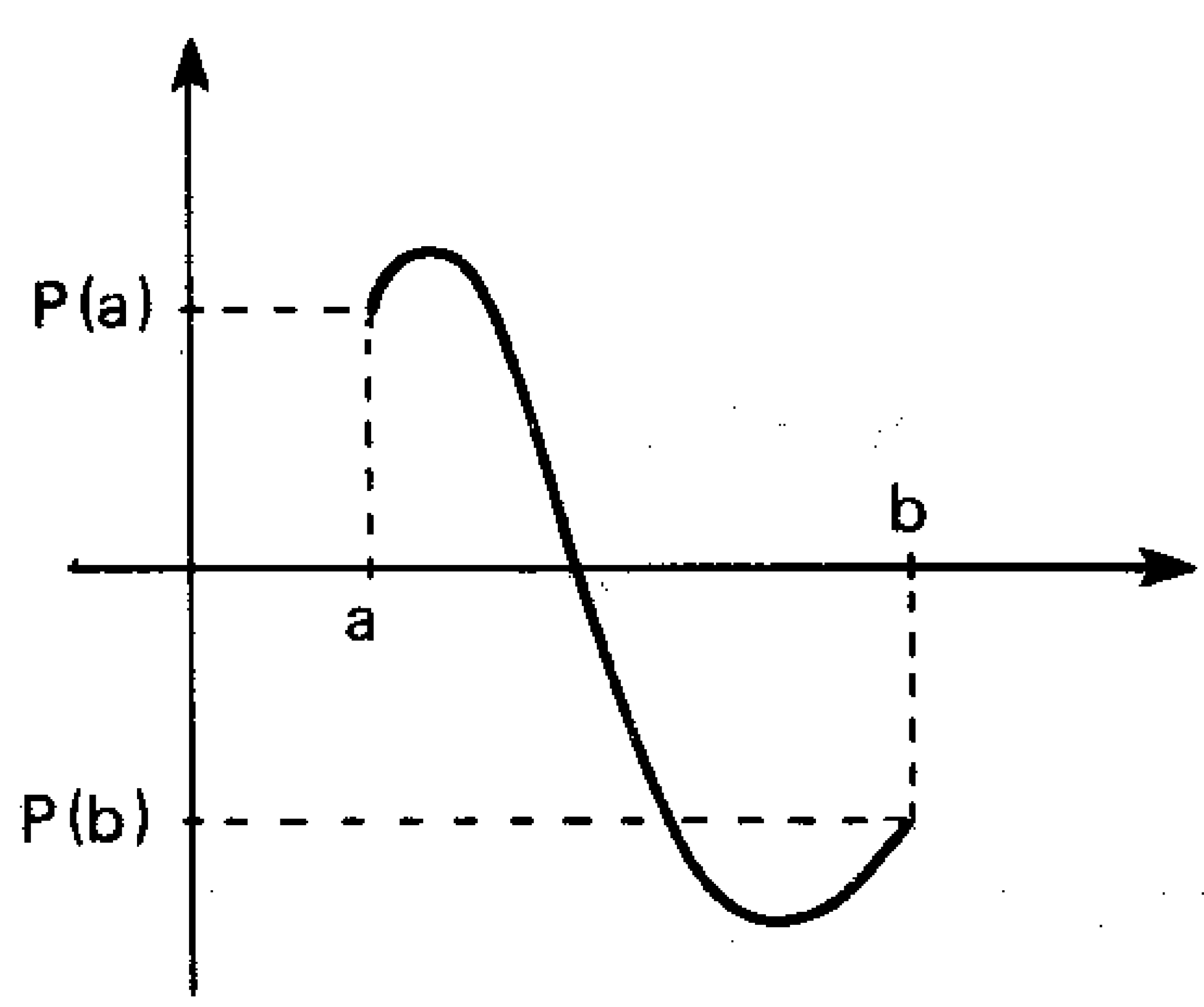


Fig. 18.16

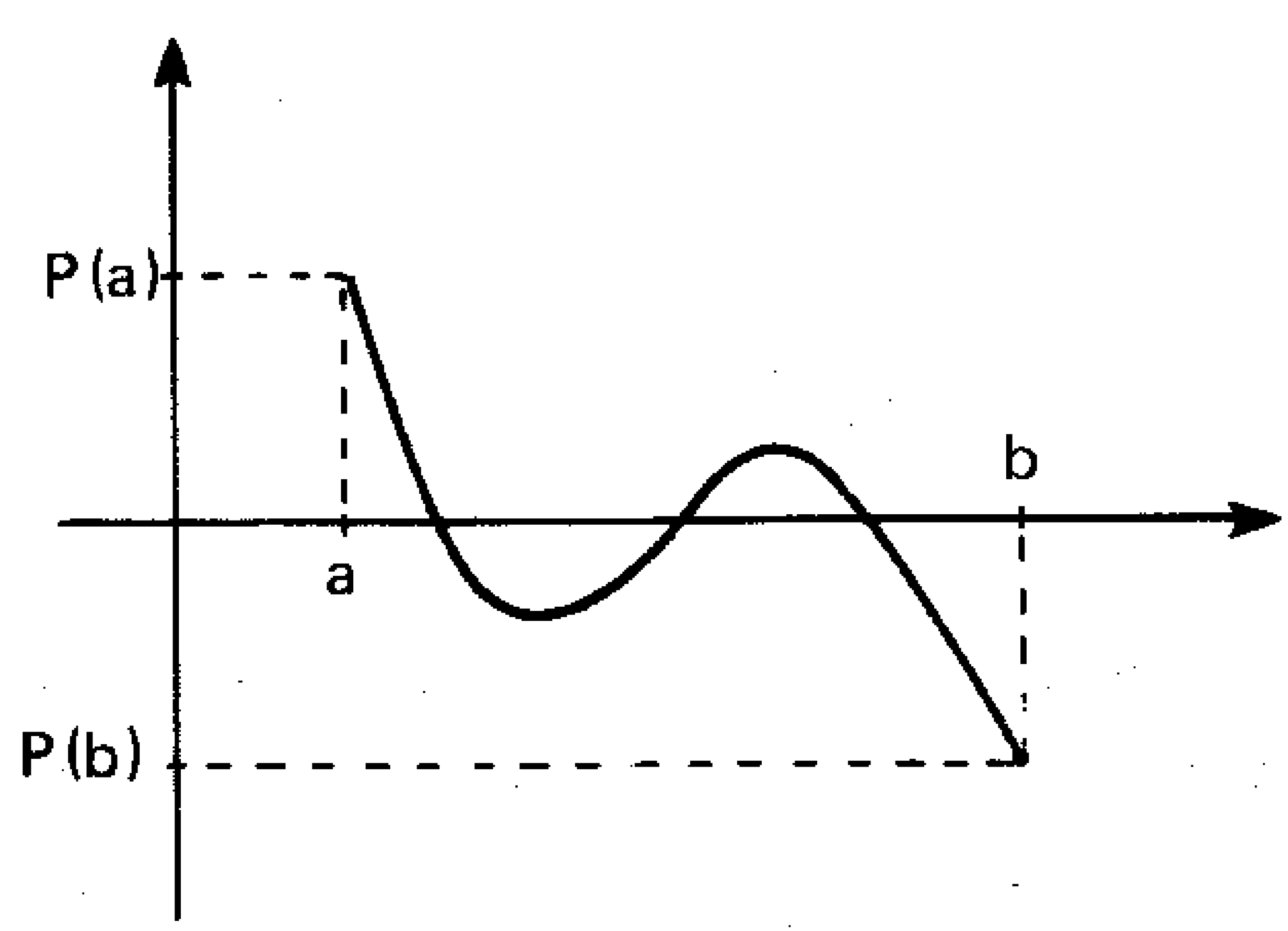


Fig. 18.17

b) Na figura 18.18 temos P(a) e P(b) de sinais contrários. O número r_1 é raiz de multiplicidade par. O número r_2 é raiz de multiplicidade 1 (raiz simples). Portanto, no total, temos um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.

Na figura 18.19 temos P(a) e P(b) de sinais contrários. O número r_1 é raiz de multiplicidade ímpar e o número r_2 é raiz de multiplicidade par. Portanto, no total, temos um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.

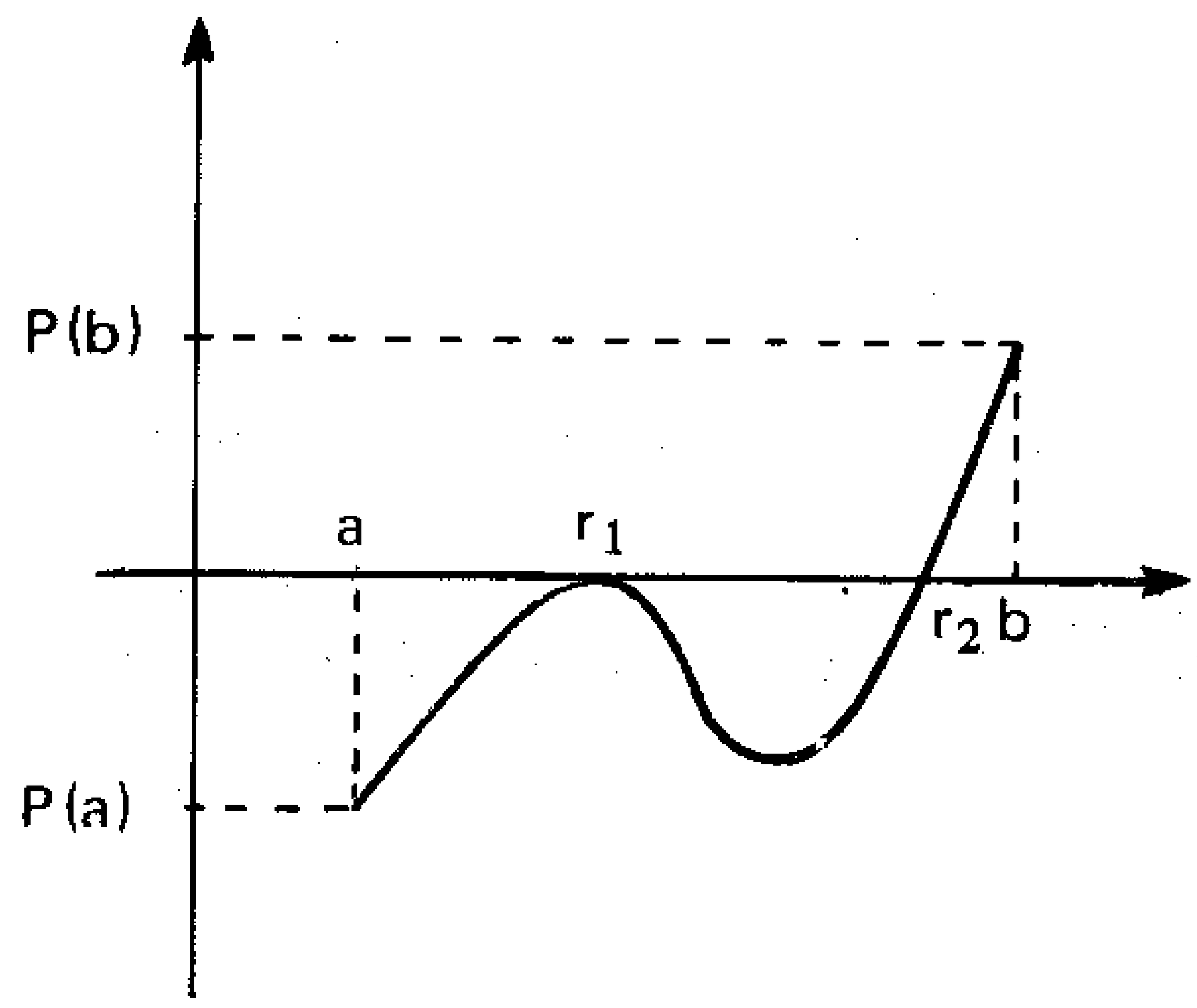


Fig. 18.18

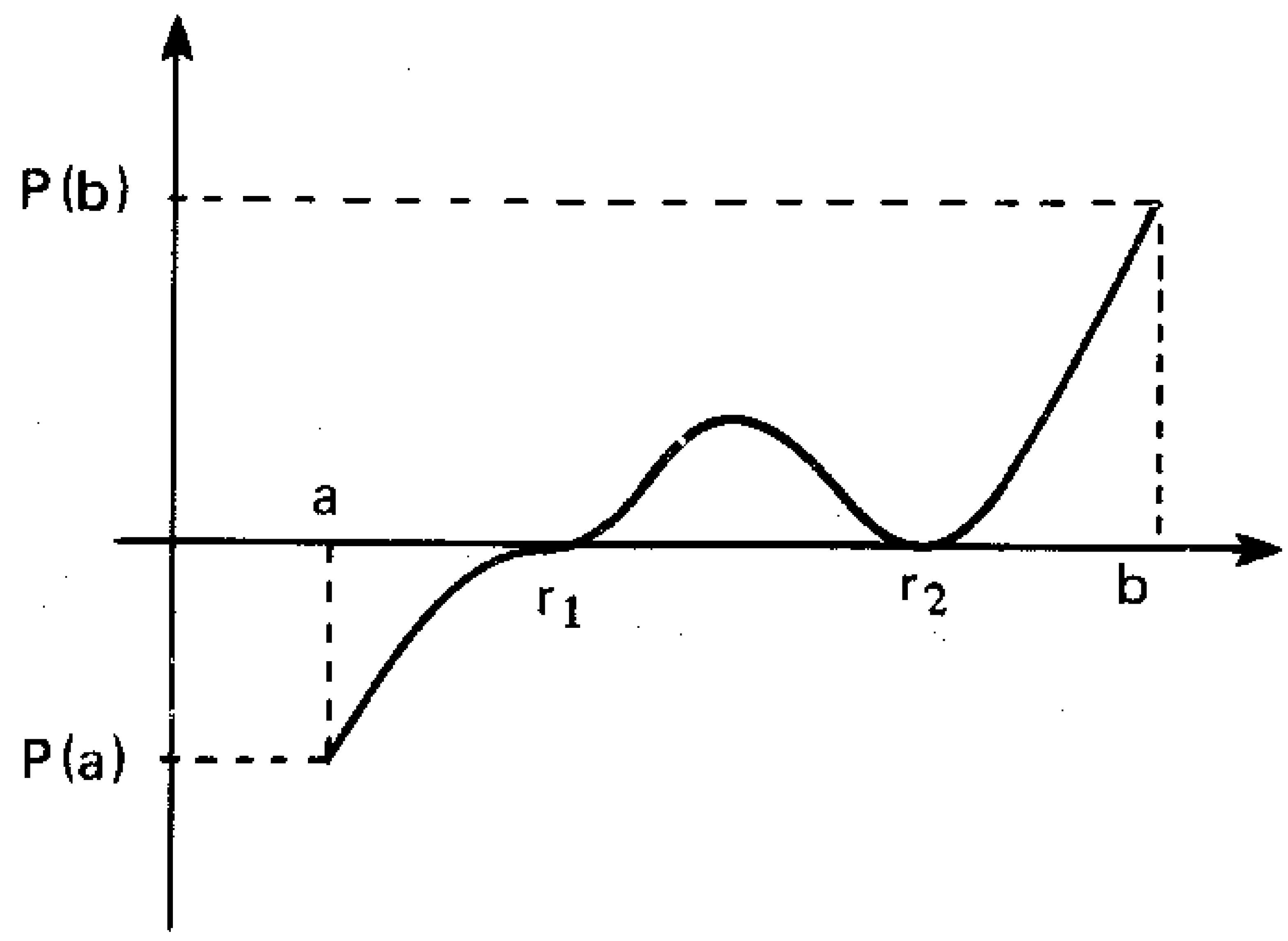


Fig. 18.19

c) Na figura 18.20, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. Há duas (número par) raízes entre **a** e **b**.
Na figura 18.21, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. Não há raízes reais entre **a** e **b**, isto é, o número de raízes reais entre **a** e **b** é zero (número par).

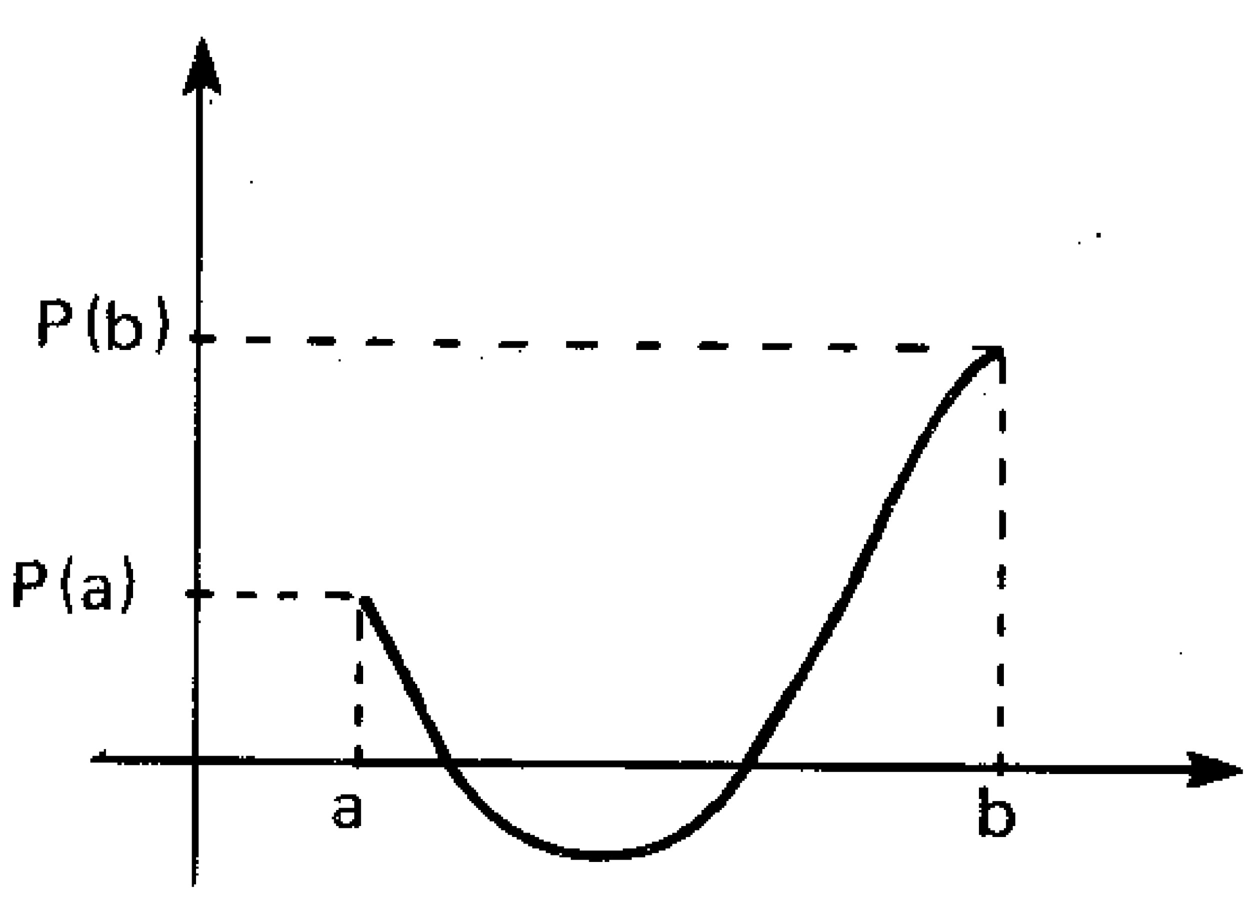


Fig. 18.20

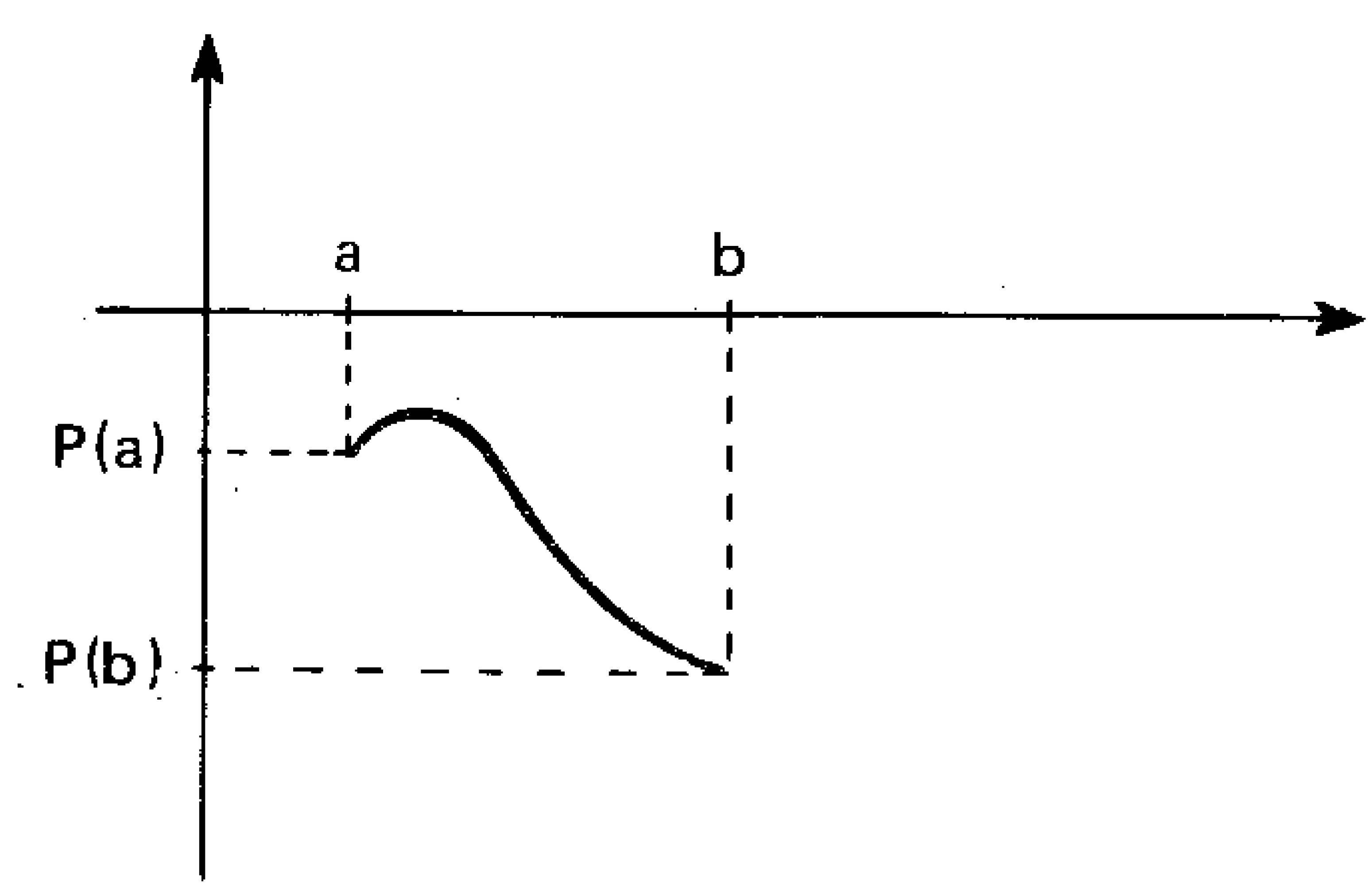


Fig. 18.21

d) Na figura 18.22, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. O número r_1 é raiz de multiplicidade par e os números r_2 e r_3 são raízes simples. Portanto, no total, temos um número par de raízes reais entre **a** e **b**.

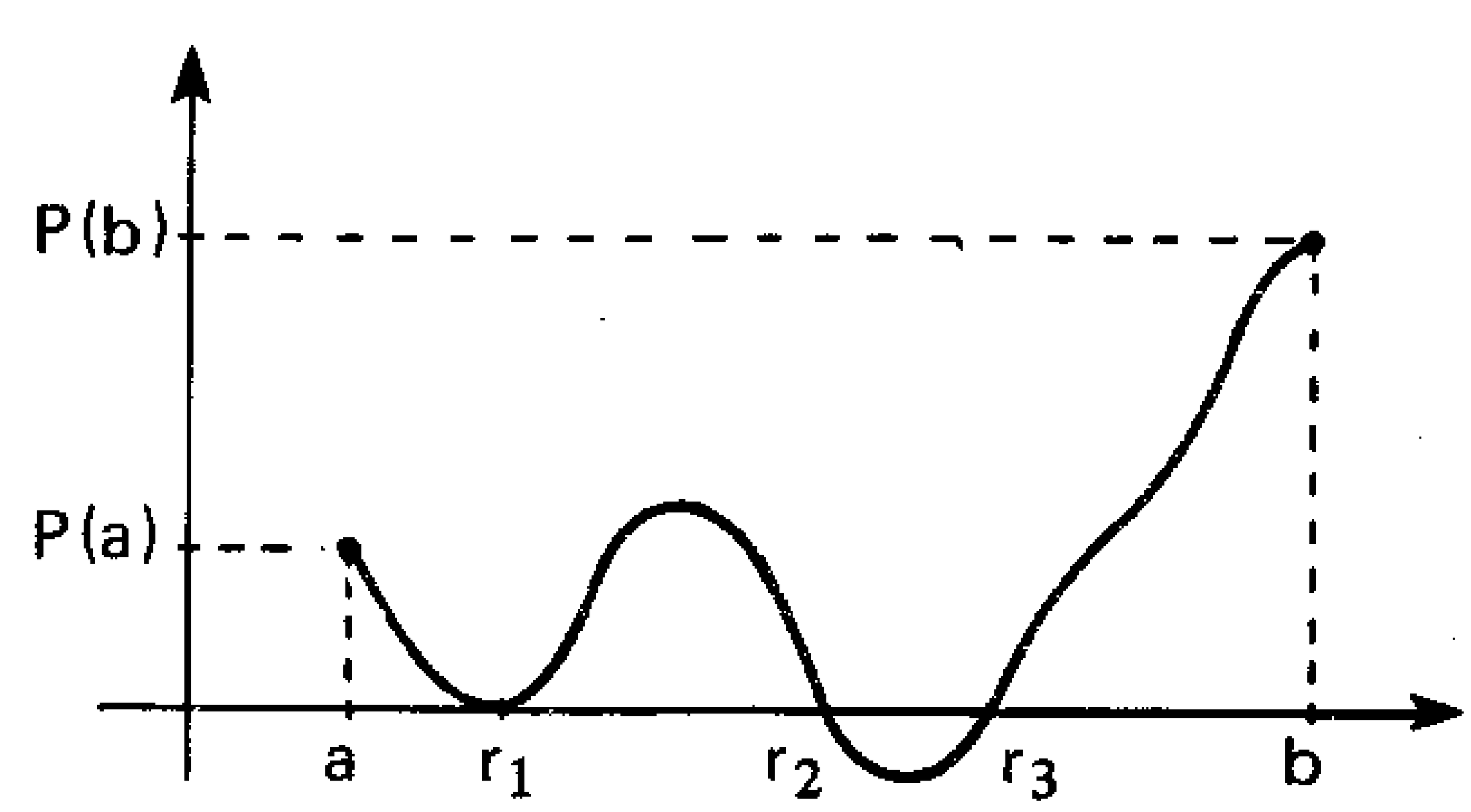


Fig. 18.22

Exercícios Resolvidos

18.14) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Quantas raízes reais ele poderia ter no intervalo $]-1; 1[$?

Solução

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -8 \\ P(1) \quad = 1^3 - 2(1)^2 + 4(1) - 1 = 2 \end{cases}$$

Como $P(-1)$ e $P(1)$ têm sinais contrários, há um número ímpar de raízes reais entre -1 e 1: pode ser uma ou três raízes reais.

18.15) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 20$ admite pelo menos uma raiz positiva menor que 2.

Solução

$$\begin{cases} P(0) = -20 \\ P(2) = 2^3 + 7(2)^2 + 6(2) - 20 = 28 \end{cases}$$

Como $P(0)$ e $P(2)$ têm sinais contrários, concluímos que há um número ímpar (pelo menos uma) de raízes reais entre 0 e 2, isto é, há pelo menos uma raiz real menor que 2 e positiva.

18.16) Determine os valores reais de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + (k + 7)$ admita um número par de raízes reais entre os números 1 e 2 (mas de modo que 1 e 2 não sejam raízes).

Solução

$$\begin{cases} P(1) = 1 - 3 + 4 + (k + 7) = k + 9 \\ P(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4(2) + k + 7 = k + 11 \end{cases}$$

Para que haja um número par de raízes reais entre 1 e 2, devemos ter $P(1)$ e $P(2)$ com o mesmo sinal, isto é:

$$P(1) \cdot P(2) > 0$$

Assim, temos a inequação:

$$(k + 9)(k + 11) > 0$$

que, resolvida, nos dá:

$$k < -11 \text{ ou } k > -9$$

18.17) Demonstre o teorema de Bolzano.

Solução

Sejam:

$z_1, z_2, \ldots, z_p$ as raízes imaginárias de $P(x)$

$x_1, x_2, \ldots, x_q$ as raízes reais entre **a** e **b**

$r_1, r_2, \ldots, r_h$ as raízes reais fora do intervalo $[a, b]$

Temos:

$$P(x) = \underbrace{a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_p)}_{A(x)}\underbrace{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_q)}_{B(x)}\underbrace{(x - r_1)\ldots(x - r_h)}_{C(x)}$$

Como os coeficientes de P(x) são reais, as raízes imaginárias (se existirem) virão aos pares e, ao decompormos A(x), obteremos pares do tipo $(x - z)(x - \bar{z})$. Sendo $z = \alpha + \beta i$ e $\bar{z} = \alpha - \beta i$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$) temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Mas, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, temos $(x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0$ e, portanto, $A(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(a) = a_n A(a) B(a) C(a) \\ P(b) = a_n A(b) B(b) C(b) \end{cases}$$

$$P(a) \cdot P(b) = a_n^2 \cdot A(a) \cdot A(b) \cdot B(a) \cdot B(b) \cdot C(a) \cdot C(b)$$

Como as raízes $r_1, r_2, \ldots, r_h$ estão fora do intervalo $[a; b]$, o produto $C(a) \cdot C(b)$ será sempre positivo. Assim, temos:

$$P(a) \cdot P(b) = \underbrace{[a_n^2 \cdot A(a) \cdot A(b) \cdot C(a) \cdot C(b)]}_{D} \cdot B(a) \cdot B(b) = D \cdot B(a) \cdot B(b)$$

onde $D > 0$. Portanto, o sinal de $P(a) \cdot P(b)$ depende do sinal de $B(a) \cdot B(b)$.

$$B(a) \cdot B(b) = \underbrace{(a - x_1)(b - x_1)}_{< 0} \underbrace{(a - x_2)(b - x_2)}_{< 0} \ldots \underbrace{(a - x_q)(b - x_q)}_{< 0}$$

Cada um dos produtos $(a - x_j)(b - x_j)$ é negativo. Daí concluímos que:

1.º) se **q** é ímpar, $B(a) \cdot B(b) < 0$ e $P(a) \cdot P(b) < 0$. Isto significa que P(a) e P(b) têm sinais contrários;

2.º) se **q** é par, $B(a) \cdot B(b) > 0$ e $P(a) \cdot P(b) > 0$. Isto quer dizer que P(a) e P(b) têm o mesmo sinal.

Exercícios Propostos

18.18) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Quantas raízes reais ele poderia ter no intervalo $]1; 4[$?

18.19) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ admite pelo menos uma raiz irracional no intervalo $]1; 3[$.

18.20) Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 8x + k$ admita um número ímpar de raízes no intervalo $]1; 3[$.

Exercícios Suplementares

III.1) Resolva a equação $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são os números -2 e $-\frac{1}{2}$.

III.2) Resolva a equação $2x^6 + x^5 + 13x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x - 48 = 0$, sabendo que $2i$ é raiz dupla.

III.3) Resolva a equação $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$, sabendo que suas raízes formam uma progressão aritmética.

III.4) Resolva as equações:

a) $x^3 + 12x^2 + 17x + 15 = 0$
b) $2x^3 - 17x^2 + 48x - 20 = 0$

III.5) Resolva a equação $x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0$, sabendo que possui uma raiz dupla.

III.6) Verifique se o número $x = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ é inteiro.

III.7) Verifique se o número $\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}$ é racional ou irracional.

III.8) Seja **n** um número natural tal que $n > 1$. Consideremos também um número real $k \neq 0$. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* a cada sentença a seguir, as quais se referem às raízes n-ésimas do número **k**.

a) Se **n** é ímpar, apenas uma das raízes é real.
b) Se **n** é par e $k < 0$, nenhuma das raízes é real.
c) Se **n** é par e $k > 0$, há duas raízes reais.
d) Para todo **n**, desde que haja raízes imaginárias, elas formam pares de números conjugados.

TESTES DE VESTIBULARES

NÚMEROS COMPLEXOS

1) (MACKENZIE-SP) O valor da expressão $y = i + i^2 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{1001}$ é:

a) 1 b) i c) $-i$ d) -1 e) $1 + i$

2) (PUC-RJ) Seja **i** o número complexo (0; 1). Então a soma:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{4n-1}$$

a) é um imaginário puro
b) é um real positivo
c) é real se e só se **n** é ímpar
d) é uma potência inteira de **i**
e) é nula

3) (MACKENZIE-SP) A igualdade $(1 + i)^n = (1 - i)^n$ verifica-se para todos os números naturais divisíveis por:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) n.r.a.

4) (F.M. ABC-SP) Chama-se "rival" de um número complexo $z = x + iy$ o número complexo $\hat{z}$ tal que $\hat{z} + z = 2yi$

a) $\hat{z} = \dfrac{1}{z}$
b) $\hat{z} = x - iy$
c) $\hat{z} = -z$
d) $\hat{z} \cdot z = x^2 + y^2$
e) $z - \hat{z} = 2x$

5) (PUC-RJ) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $\omega = \dfrac{5}{2 + i}$

Então, se $\overline{\omega}$ indica o complexo conjugado de ω:

a) $z = -\omega$ b) $z = \overline{\omega}$ c) $z = -\overline{\omega}$ d) $z = \dfrac{1}{\omega}$ e) $z = \omega$

6) (U.F.BA) O número complexo **z** que satisfaz a igualdade $(2 + i) \cdot z + 7 + 5i = 8 - 3i$ é:

a) $-\dfrac{14}{5} - \dfrac{17}{5}i$
b) $-\dfrac{6}{5} - \dfrac{17}{5}i$
c) $\dfrac{32}{5} - \dfrac{11}{5}i$
d) $2 - \dfrac{17}{3}i$
e) $2 - \dfrac{17}{5}i$

7) (U.C.MG) O produto $(x + yi)(2 + 3i)$ é um número real, quando **x** e **y** são reais e:

a) $x - 3y = 0$
b) $2y - 3x = 0$
c) $2x + 2y = 0$
d) $2x + 3y = 0$
e) $3x + 2y = 0$

8) (EPUSP) O quociente do número complexo $a + ib$ pelo número complexo não nulo $c + id$ será um número real se:

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$
b) $a + b = c + d$
c) $ac = bd$
d) $a + c + b + d = 0$
e) n.r.a.

9) (CESGRANRIO) Seja $z = x + iy$ um número complexo não nulo, onde **x** e **y** são reais. Se **a** e **b** são números reais tais que: $\dfrac{x - iy}{x + iy} = a + ib$

podemos afirmar que:

a) $|a| + |b| < 1$
b) $a = -b$
c) $a = b = 1$
d) $a^2 + b^2 = 1$
e) $a > 0$ e $b > 0$

10) (OSEC-SP) Determinando-se os valores reais de **m** e **n** de modo que se tenha: $2(m - ni) + i(m + ni) - i = 0$, pode-se afirmar que a soma de **m** e **n** é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

11) (CESESP-PE) Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença: A equação $z^3 = \bar{z}$, onde $z = a + bi$ com **a** e **b** reais, definida em $\mathbb{C}$, não admite soluções:

a) reais
b) da forma bi, com $b \neq 0$
c) da forma $a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$
d) em $\mathbb{C}$
e) inteiras

12) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Dados os números complexos:

$$z_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$
$$z_2 = \rho(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)$$

então $z_1 - iz_2$ é igual a:

a) $|z_1| - 3|z_2|$
b) $2\rho\cos\theta$
c) $\rho\cos\theta$
d) $|z_1| + 2|z_2|$
e) $|z_1| + |z_2|$

13) (FATEC-SP) Sejam $i^2 = -1$ e $z = \dfrac{1}{1 + i\operatorname{sen}\theta}$. Se $A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid |z| = 1\}$, então **A** é igual a:

a) $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\left\{\dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
c) $\left\{\dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $\{(2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\left\{\dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

14) (MACKENZIE-SP) O número de soluções distintas do sistema:

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ |z - i| = 1 \end{cases}$$

é:

a) zero b) 1 c) 2 d) 3 e) maior que 3

15) (CESGRANRIO) Seja $z = x + iy$ um número complexo não nulo, onde **x** e **y** são reais. Se **a** e **b** são números reais tais que: $\dfrac{x - iy}{x + iy} = a + ib$ podemos afirmar que:

a) $|a| + |b| < 1$
b) $a = -b$
c) $a = b = 1$
d) $a^2 + b^2 = 1$
e) $a > 0$ e $b > 0$

16) (MACKENZIE-SP) Se $z + \dfrac{1}{z} = -1$, então o valor de $|z|$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) 4

17) (MACKENZIE-SP) O número complexo $z = a + bi$ é tal que $\left|\dfrac{z - i}{z - 1}\right| = 1$. Então:

a) $a = -b$
b) $a = b$
c) $a = 2b$
d) $a = 3b^2$
e) $a = -7b$

18) (F.F.C.L.-USP) Se **z** e **w** são dois números complexos quaisquer tais que

$$|z| = |w| = 1 \text{ e } 1 + zw \neq 0$$

então o número complexo $\dfrac{z + w}{1 + zw}$ é:

a) de valor absoluto 1
b) imaginário puro
c) não real
d) real
e) n.r.a.

19) (ITA-SP) Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, são dois números complexos, tais que $z_1 \cdot z_2 = 2$. Então temos:

a) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$
b) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
c) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
d) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$
e) n.r.a.

20) (MACKENZIE-SP) O número complexo $z = x + yi$ é tal que $|z - 3| = 2$. Então, necessariamente:

a) $0 < \mathbf{x} < 2$ e $0 < \mathbf{y} < 2$
b) $1 \leqslant \mathbf{x} \leqslant 5$ e $-2 \leqslant \mathbf{y} \leqslant 2$
c) $-1 \leqslant \mathbf{x} \leqslant 2$ e $-3 \leqslant \mathbf{y} \leqslant 3$
d) $0 \leqslant \mathbf{x} \leqslant 3$ e $0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant 3$
e) $0 \leqslant \mathbf{x} \leqslant 3$ e **y** não tem restrição

21) (MACKENZIE-SP) Representando-se graficamente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos **z** tais que $z^2 = \bar{z}i$, o número de pontos obtidos é:

a) **i** b) 2 c) 3 d) 4 e) não sei

22) (CESGRANRIO) O conjunto dos pontos $z = x + iy$ do plano complexo que satisfazem $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geqslant 2$ é:

a) o conjunto vazio
b) uma região não limitada do plano
c) todos os pontos $x + iy$ tais que $y \geqslant 2$
d) uma reta
e) diferente dos quatro anteriores

23) (MACKENZIE-SP) Os números complexos **z** tais que $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$, com **a** complexo e **r** real, representados no plano de Argand-Gauss, formam:

a) uma reta
b) uma parábola
c) uma elipse com focos em **a** e $\bar{\mathbf{a}}$
d) uma circunferência com centro em **a** e raio **r**
e) uma hipérbole

24) (MACKENZIE-SP) Seja $t = 2 + 3i$ um número complexo. Se

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leqslant 1\} \quad \text{e}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z = a + bi \text{ e } b \leqslant 3\}$$

então no plano de Argand-Gauss, $A \cap B$ é:

a) um conjunto vazio
b) uma semicircunferência
c) um semicírculo
d) uma circunferência
e) um círculo

25) (ITA-SP) Seja **z** um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ é um número real, então podemos afirmar:

a) $z \neq 0$ e $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$
b) $I_m(z) = 0$ ou $|z| = 1$
c) é necessariamente um número real
d) $z^2 = -1$
e) n.r.a.

26) (ITA-SP) O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação:

$$z \cdot \bar{z} - z_0 \cdot \bar{z} - \bar{z}_0 \cdot z + k = 0$$

onde **k** um número real positivo e $|z_0^2| > k$, é:

a) uma hipérbole com centro z_0
b) uma elipse com um dos focos em z_0
c) uma circunferência com centro em z_0
d) uma parábola com vértice em z_0
e) n.r.a.

27) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Sejam **O**, $\mathbb{Z}_1$ e $\mathbb{Z}_2$ as representações gráficas dos complexos $(0 + 0i)$, $(2 + 3i)$ e $(-5 - i)$, respectivamente. A menor determinação positiva do ângulo $\mathbb{Z}_1\hat{O}\mathbb{Z}_2$ é:

a) 135° b) 150° c) 165° d) 120° e) 175°

28) (CESGRANRIO) O módulo do número complexo $(1 + 3i)^4$ é:

a) 256 b) 100 c) 81 d) 64 e) 16

29) (FATEC-SP) A representação gráfica do conjunto do **z**, $z \in \mathbb{C}$, tais que $\left| \dfrac{z}{z-1} \right| = 2$, no plano de Argand-Gauss é uma circunferência de raio $\dfrac{2}{3}$ e centro em:

a) $\left(\dfrac{4}{3}; 0\right)$ b) $\left(-\dfrac{4}{3}; 0\right)$ c) $\left(0; \dfrac{4}{3}\right)$ d) $\left(0; -\dfrac{4}{3}\right)$ e) $(0; 0)$

30) (CESESP-PE) Sendo **z** um número complexo, assinale a alternativa que não está correta.

a) $\overline{z + z}$ é um número real
b) $z \cdot \bar{z}$ é um número real
c) se $|z| = 1$ então $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$
d) $z - \bar{z}$ é sempre um número complexo não real
e) $z + \bar{z}$ é sempre um número real

31) (CESGRANRIO) No plano complexo, o conjunto dos pontos $z = x + iy$ tais que $|z| \leqslant i$ e $y \geqslant 0$ é:

a) uma circunferência
b) um círculo
c) um quadrado centrado na origem
d) um semicírculo
e) um segmento de reta

32) (MACKENZIE-SP) A função **f** associa a cada complexo seu argumento. O valor de $\text{cotg}\,[f(-1-i)]$ é:

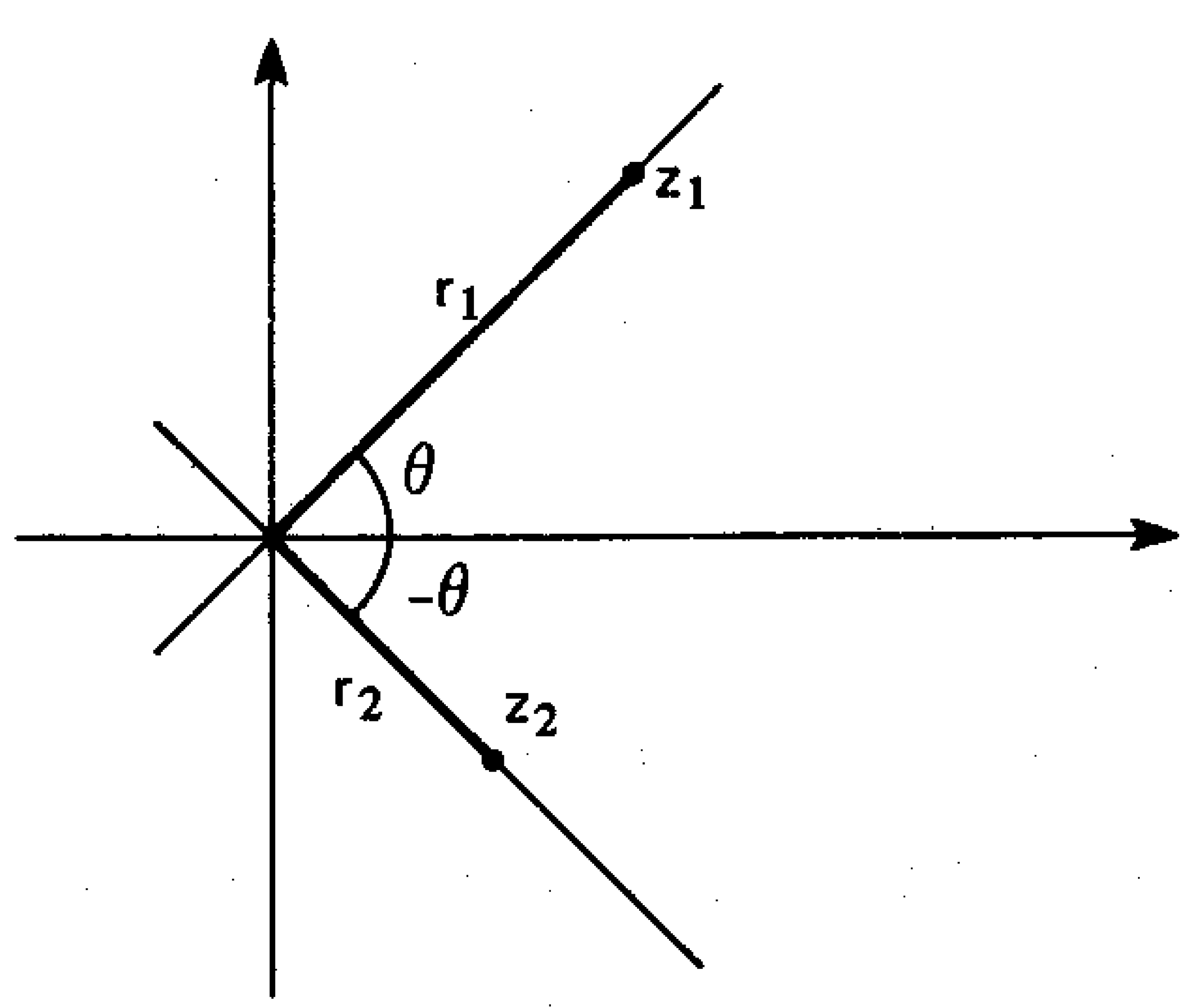
a) -1 b) 0 c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

33) (CESGRANRIO) Determinando seu argumento, pode-se concluir que o número complexo $(1 + i)^{12}$:

a) tem parte real igual à parte imaginária
b) tem parte real positiva e parte imaginária negativa
c) é real negativo
d) é real positivo
e) é imaginário puro

34) (F.M. ABC-SP) Os números complexos z_1 e z_2, ambos diferentes de zero, têm os ângulos polares opostos e módulos inversos.

a) $|z_1 + z_2| = r_1 - r_2$
b) $z_1 \cdot z_2 = 1$
c) $z_1 : z_2 = 1$
d) $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_1}$
e) $z_2 = -\dfrac{1}{z_1}$



35) (F. FRANCISCANAS-SP) O número complexo $z = -2 - 2i$ é escrito na forma trigonomética como:

a) $z = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

b) $z = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

c) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

e) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

36) (PUC-SP) Se $b = 2(\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ)$ e $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$, os afixos correspondentes a b, $b + z$, $b + z + iz$, $b + iz$ são os vértices de um:

a) trapézio
b) losango
c) quadrado
d) quadrilátero qualquer
e) n.r.a.

37) (CESCEM-SP) As funções hiperbólicas cosh z e sinh z são definidas como:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

onde $z = x + iy$ e $e^{x+iy} = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Nestas condições, podemos dizer que cosh z é igual a:

a) $\sinh x \cdot \sin y + i \cosh x \cdot \cos y$
b) $\sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sin y$
c) $\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y$
d) $\cosh x \cdot \sin y + i \sinh x \cdot \cos y$
e) $\cosh x \cdot \sinh x + i \sin x \cdot \cos y$

38) (F. C. CHAGAS-SP) Dado o número complexo $z = \cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16}$, o valor de z^{12} é:

a) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\sqrt{2} + i$

d) $-1 + i\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

39) (F. M. SANTA CASA-SP) Se $x^3 = 4\sqrt{3} + 4i$, x é dado por:

a) $2\cos(30^\circ + k \cdot 150^\circ) + 2i \operatorname{sen}(30^\circ + k \cdot 150^\circ)$

b) $\sqrt[3]{4}\,[\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ + k \cdot 120^\circ)]$

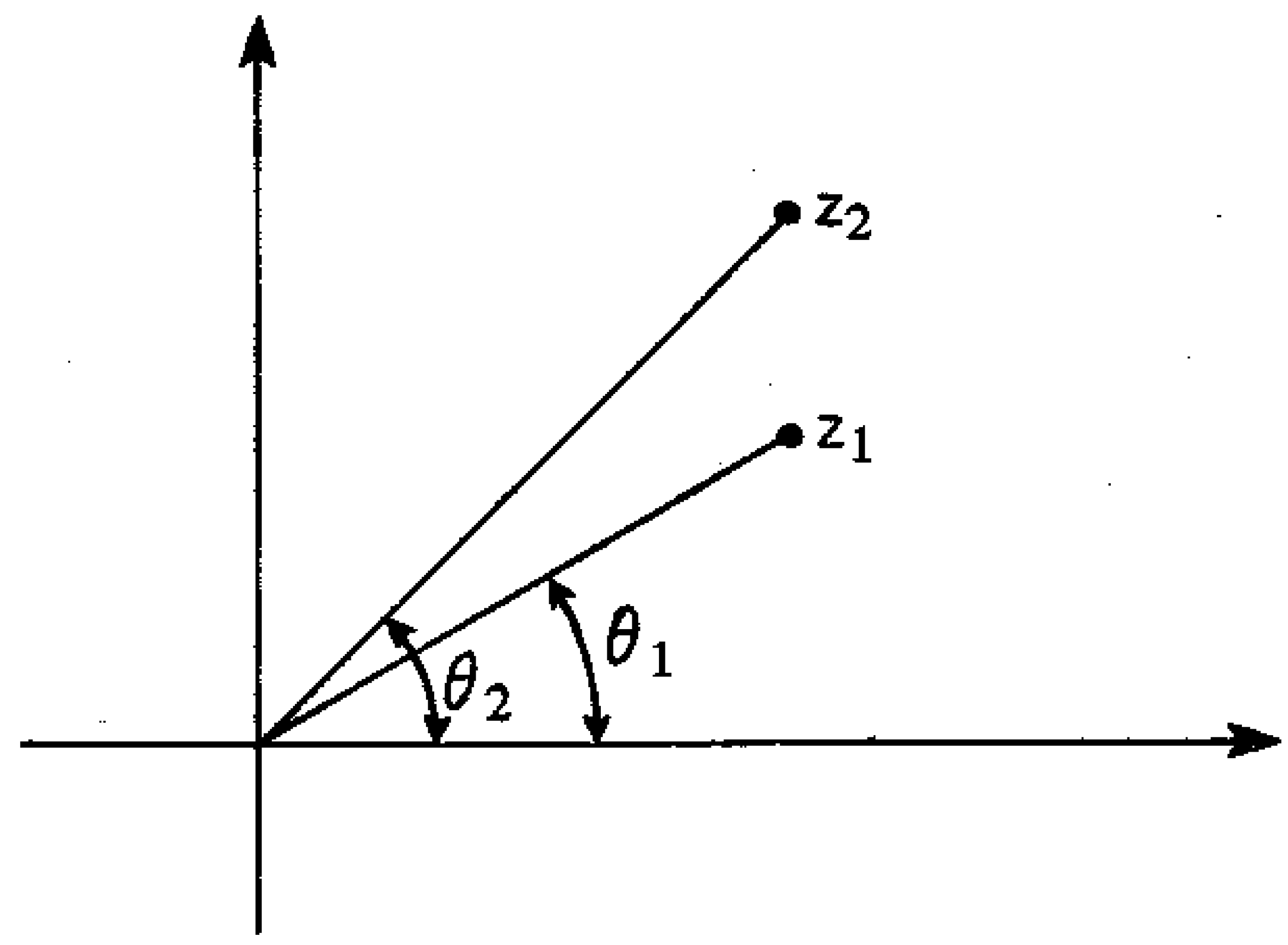
c) $\sqrt[3]{3}\,[\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + k \cdot 120^\circ)]$

d) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

e) $2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

40) (F. FRANCISCANAS-SP) Dados dois números complexos z_1 e z_2, representados geometricamente abaixo, e sabendo que $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ e $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4}$, então podemos afirmar que:

a) $R_e(z_1 \cdot z_2) < 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) = 0$
b) $R_e(z_1 \cdot z_2) > 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) > 0$
c) $R_e(z_1 \cdot z_2) = 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) < 0$
d) $R_e(z_1 \cdot z_2) < 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) < 0$
e) n.r.a.



41) (U. F.PR) Escrevendo-se $E_x = \cos x + i \operatorname{sen} x$, onde **i** é a unidade imaginária ($i^2 = -1$), então $E_u + E_v$ é igual a:

a) $E_u + E_v$ b) $E_u + i\,E_v$ c) E_{uv} d) E^2_{uv} e) E_{u+v}

42) (F. M. SANTOS-SP) As cinco raízes quintas de $z = 16 - 16\sqrt{3}\,i$ têm o mesmo módulo e seus argumentos formam uma PA cuja razão é:

a) 60° b) 120° c) 204° d) 216° e) n.r.a.

43) (F. C. CHAGAS-SP) O número complexo **z** tem módulo e argumento respectivamente iguais a $2 \cdot \theta$. Se $\cos \theta = \frac{1}{2}$, então z^3

a) tem sua imagem no eixo real
b) tem módulo igual a 6
c) é igual a $3 + 3\sqrt{3}\,i$
d) é imaginário puro
e) tem argumento igual a 120°

44) (F. M. SANTA CASA-SP) Seja o número complexo $z = (2 - 2i)^n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Se $|z| = 512$ o número **n** é:

a) primo
b) quadrado perfeito
c) divisível por 5
d) múltiplo de 4
e) divisível por 3

45) (ITA-SP) Seja **z** um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se **n** é um número inteiro positivo, $z^n + \frac{1}{z^n}$ é igual a:

a) $\cos(n\,\theta)$
b) $2\cos(n\,\theta)$
c) $\operatorname{sen}(n\,\theta)$
d) $2\operatorname{sen}(n\,\theta)$
e) $\operatorname{sen}(n\,\theta) + \cos(n\theta)$

46) (F. M. SANTA CASA-SP) O menor valor de **n** inteiro e positivo para o qual $y^n = (2 + 2\sqrt{3}\, i)^n$ seja real e positivo é (obs.: $i = \sqrt{-1}$):

a) 3 b) 12 c) 6 d) 9 e) n.r.a.

47) (F. M. SANTA CASA-SP) O número complexo $z = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right)$ é uma das raízes quartas do número complexo:

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ d) $1 - \frac{1}{2}i$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

48) (F. M. SANTA CASA-SP) Considere o produto $(x - z) \cdot (x - \bar{z})$, onde $z = \alpha + \beta i$, com α e β pertencentes ao conjunto dos números reais e $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Então podemos afirmar que:

$$[(x - z) \cdot (x - \bar{z})]^m, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) é negativo caso **m** seja ímpar
b) é sempre um número par
c) é positivo para qualquer **m** real
d) vale 3
e) não satisfaz a nenhuma das alternativas anteriores

49) (ITA-SP) Sejam **a** e **k** constantes reais, $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos **z** que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o de menor argumento?

a) $z = ak\sqrt{1 - k^2} + ia(1 - k^2)$
b) $z = k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$
c) $z = k\sqrt{1 - k^2} - i\sqrt{1 - k^2}$
d) $z = -k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$
e) $z = a + ik$

50) (MACKENZIE-SP) O número de soluções da equação $z^2 + |z| = 0$, onde $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

POLINÔMIOS

51) (ESAN-SP) Sendo $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$ e sabendo que 2 é raiz de $P(x)$ e que 1 é raiz de $Q(x)$, então $P(1) - Q(2)$ vale:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 6 e) 10

52) (MACKENZIE-SP) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio; $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ é a soma dos coeficientes do polinômio $P(x)$. A soma dos coeficientes do polinômio $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36}$ é:

a) 0
b) -36
c) 1
d) -1
e) impossível de calcular no tempo disponível

53) (ITA-SP) O coeficiente da maior potência de um polinômio $P(x)$ do 3.º grau é 1. Sabendo-se que $P(1) = P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, então $P(-1)$ vale:

a) 48 b) 66 c) 18 d) -2 e) 68

54) (CESESP-PE) Considere o polinômio:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Assinale a alternativa *falsa*.

a) $P(-1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual à soma dos coeficientes de ordem ímpar.

b) $P(1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual ao simétrico da soma dos coeficientes de ordem ímpar.

c) $P(-2) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for o dobro da soma dos coeficientes de ordem ímpar.

d) $P(0) = 0$, se e somente se $a_0 = 0$.

e) $P(1) = P(-1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual à soma dos coeficientes de ordem ímpar e igual a zero.

55) (CESGRANRIO) O polinômio $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ se anula para 4 valores distintos de **x**. Podemos concluir que:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$

b) $a_0a_1a_2a_3 = 4$

c) $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$

d) $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$

e) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

56) (MACKENZIE-SP) Os valores de **m**, **n** e **l** para os quais

$$p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2\ell)$$

é um polinômio nulo são, respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}$ c) $-1, -3, 1$ d) $-2, -5, 2$ e) $0, 0, 0$

57) (PUC-SP) Os valores de **m**, **n** e **p** de modo que sejam idênticos os polinômios:

$$P_1(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p), + n$$

e

$$P_2(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$$

são, respectivamente:

a) 1, 2, −3 b) 2, 3, 1 c) −1, 2, 2 d) 2, 1, −3 e) 1, −3, 2

58) (U. F.RS) Se $r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$, com $r(x) = 4x^2 + kx - 8$, $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $a + b + k$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

59) (OSEC-SP) Escolha o termo que se deve acrescentar ao binômio $\frac{x^2}{4} + \frac{b^3x}{3}$ de maneira a obter trinômio que seja quadrado perfeito, entre as alternativas abaixo:

a) $\frac{b^6}{3}$ b) $\frac{b^6}{9}$ c) $\frac{b^3}{3}$ d) $\frac{b^6}{2}$ e) $\frac{b^3}{6}$

60) (ITA-SP) Considere o conjunto **C** dos polinômios P(x) de grau 3, tais que $P(x) = P(-x)$ para todo **x** real. Temos, então, que:

a) **C** tem apenas dois elementos

b) **C** é o conjunto de todos os polinômios da forma $P(x) = a_0x^3 + bx$

c) **C** tem apenas um elemento

d) **C** tem uma infinidade de elementos

e) n.r.a.

61) (EPUSP) Seja a_n o coeficiente de x^n num polinômio de coeficientes complexos de grau 30. Sendo $a_0 = -1$ e $a_{n+1} = 1 + ia_n (n \geqslant 0)$, então a_{30} é igual a:

a) $-i$ b) $1 - i$ c) i d) $2i$ e) n.r.a.

62) (ITA-SP) Os coeficientes A, B, C e D do polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ devem satisfazer certas relações para que P(x) seja um cubo perfeito. Assinale a opção correta para que isto se verifique:

a) $D = \dfrac{C^2A}{3B}$

b) $C = \dfrac{B}{3A^3}$ e $D = \dfrac{B^2}{27A^3}$

c) $BC = 3A$ e $CD^2 = B^2A^2$

d) $C = \dfrac{B^2}{3A}$ e $D = \dfrac{B^3}{27A^2}$

e) n.r.a.

63) (PUC-SP) Se $\dfrac{5 - 3x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{C}{x - 3}$, então os valores de A, B e C são, respectivamente:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{3}$

c) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{2}$

64) (U. F.SE) Se $\dfrac{2x - 3}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{A}{x - 5} + \dfrac{B}{x - 1}$, então:

a) $B - A = 6$ b) $B = 2A$ c) $A = \dfrac{1}{3} B$ d) $A + B = 2$ e) $\dfrac{B}{A} = 7$

65) (CEUB-DF) A condição para que o polinômio $f = (ax + b)^2 + (cx + d)^2$, onde **a**, **b** e **c** são reais e não nulos seja um quadrado perfeito é:

a) $ad = bc$ b) $cd = ab$ c) $abc = d$ d) $ad = b^2c + a$

66) (ITA-SP) Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes (L. I.) se a relação $a_1 pp_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, onde a_1, a_2, a_3 são números reais. Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes (L. D.). Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:

a) L. I.
b) nem L. I. nem L. D.
c) L. I. se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem as raízes reais.
d) L. D.
e) n.r.a.

67) (MACKENZIE-SP) O valor de

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots \text{ é:}$$

Sugestão: determine duas constantes **A** e **B** tais que $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{A}{2n-1} + \dfrac{B}{2n+1}$

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) não sei

68) (CESCEA-SP) Determine **a** e **b** de modo que a expressão:

$$\frac{3x^2 + 5x - 8}{ax^2 - 10x + b}$$

não dependa de **x**. Então $a + b$ é igual a:

a) -10 b) 10 c) 8 d) não sei

69) (CESCEM-SP) Seja $r(x)$ uma função racional. Ela pode ser representada de forma única como o quociente de dois polinômios primos entre si, $\dfrac{P(x)}{q(x)}$, onde $q(x)$ tem o coeficiente do termo de maior grau, unitário. Nestas condições, definimos **ordem** K de $r(x)$ como:

$$K = \begin{cases} 2 \times \text{grau}\,(q(x)) & \text{se grau}\,(p(x)) \text{ é grau}\,(q(x)) \\ 2 \times \text{grau de}\,(p(x)) - 1 & \text{se grau}\,(p(x)) > \text{grau}\,(q(x)) \end{cases}$$

Assim, dado o polinômio $r(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x - 4}$ a ordem de $r(x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

70) (CESCEM-SP) $P_1(x)$ é um polinômio de grau **n** tal que:

$$P_1(0) \neq 0, \text{ isto é, } P_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots \; (a_0 \neq 0)$$

$$\text{e} \qquad P_2(x) = \begin{cases} x^n \cdot P_1\left(\dfrac{1}{x}\right); \; x \neq 0 \\ a_0; \; x = 0 \end{cases}$$

então $P_2(x)$ é:

a) um polinômio de grau **n**
b) uma função racional não inteira
c) uma função irracional
d) uma função transcendente
e) n.r.a.

71) (MACKENZIE-SP) O polinômio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ é de grau 2:

a) se e somente se $m = 4$ ou $m = -4$
b) se e somente se $m \neq 4$
c) se e somente se $m \neq -4$
d) se e somente se $m \neq 4$ e $m \neq -4$
e) para nenhum valor de **m**

72) (U. F.AL) Se os graus dos polinômios **f** e **g** são, respectivamente, 2 e 3, o grau do polinômio $h = f^2 - 4g$ é:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

73) (FUVEST-SP) O grau dos polinômios **f**, **g** e **h** é 3. O número natural **n** pode ser o grau do polinômio não nulo $f \cdot (g + h)$ se e somente se:

a) $n = 6$ b) $n = 9$ c) $0 \leqslant n \leqslant 6$ d) $3 \leqslant n \leqslant 9$ e) $3 \leqslant n \leqslant 6$

74) (MACKENZIE-SP) Dados três polinômios de graus 3, 5 e 5, respectivamente:

a) pode-se somar esses polinômios e o grau da soma é necessariamente 5
b) pode-se somar esses polinômios e o grau da soma pode ser menor que 5
c) não se pode somar esses polinômios, porque seus graus são diferentes
d) não se pode multiplicar esses polinômios, porque seus graus são diferentes
e) o produto desses polinômios tem grau 75

75) (CESESP-PE) Sejam **f** e **g** dois polinômios não nulos de coeficientes reais. Assinale a alternativa correta.

a) grau $(f \cdot g)$ = grau $(f) \cdot$ grau (g)
b) grau $(f) \geqslant$ grau $(f \cdot g)$
c) grau $(f \cdot g)$ = grau (f) + grau (g)
d) grau $(f + g)$ = grau (f) + grau (g)
e) grau $(f + g)$ = máx. {grau (f), grau (g)}

76) (F. M. SANTA CASA-SP) Indica-se o grau do polinômio **f** por ∂f. Sejam **f** e **g** dois polinômios tais que $\partial f = 2n$ e $\partial g = n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.
Se na divisão de **f** por **g** obtém-se quociente **q** e resto **r**, $r \neq 0$, podemos afirmar que:

a) $\partial q = \partial r = n - 1$
b) $\partial q = \partial r = n + 1$
c) $\partial q = n - 1$ e $\partial r = n - 2$
d) $\partial q = n - 1$ e $\partial r < n - 1$
e) $\partial q = n + 1$ e $\partial r < n - 1$

77) (CESCEM-SP) Dividindo $(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$ por um certo polinômio $p(x)$ obtemos quociente $(x - 1)$ e resto $(2x - 1)$. O polinômio $p(x)$ é igual a:

a) $2x^2 - 3x + 2$
b) $x^2 - 3x + 2$
c) $x^2 - x + 1$
d) $2x^2 - 3x + 1$
e) n.r.a.

78) (ENG. S. CARLOS-USP) Seja Q o quociente e R o resto da divisão de um polinômio A por um polinômio B. Então, quando A é dividido por 2B:

a) o quociente é 2Q e o resto 2R

b) o quociente é $\frac{Q}{2}$ e o resto $\frac{R}{2}$

c) o quociente é $\frac{Q}{2}$ e o resto é R

d) o quociente é 2Q e o resto R

e) o quociente é 2Q e o resto $\frac{R}{2}$

79) (U. F.PR) Determine **m** e **n** de modo que o resto da divisão do polinômio $y^5 - my^3 + n$ por $y^3 + 3y^2$ seja 5.

a) $m = 9$ e $n = -5$

b) $m = 9$ e $n = 5$

c) $m = -4$ e $n = -5$

d) $m = 4$ e $n = 5$

e) $m = -9$ e $n = -5$

80) (MACKENZIE-SP) Se $A(x) = 3(x - 2)(x^2 - 1) - (2x - 4)(x^2 + 3)$

$$B(x) = -2x - 6 + (3 - x)(x - 4)$$

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

então, para todo **x** do domínio de **F** tem-se:

a) $F(x) = x + 3$

b) $F(x) = -x - 3$

c) $F(x) = -x + 3$

d) $F(x) = x - 3$

e) n.r.a.

81) (PUC-SP) Para que valores de **m** o resto da divisão de $P_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + mx + 1$ por $P_2(x) = 2x^2 - x + 1$ é independente de **x**?

a) $m = \frac{2}{5}$ b) $m = \frac{1}{5}$ c) $m = \frac{3}{5}$ d) $m = \frac{5}{2}$ e) n.r.a.

82) (U. F.GO) Se o polinômio $x^3 + kx^2 - 2x + 3$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x + 1$, então o quociente é:

a) $x - 3$ b) $x + 3$ c) $x - 1$ d) $x + 1$ e) $x + 2$

83) (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Os valores de **p** e **q** são, respectivamente:

a) 2 e 5 b) 5 e 2 c) 1 e 5 d) 1 e −10 e) 3 e 6

84) (F. M. SANTA CASA-SP) O polinômio $P_1(x) = x^3 + px + q$ é divisível por $P_2(x) = x^2 + mx - 1$ se: (Obs.: **m**, **p** e **q** são reais.)

a) $p = -q^2 - 1$ e $m = q$

b) $m^2 - 1 = p$ e $m - q = 0$

c) $q + p \doteq 1$ e $m = 0$

d) $m = -q$ e $p = 1 + q^3$

e) n.r.a.

85) (U. F.SC) A divisão de $(x^3 - 6x - 1)$ por $(mx^2 + nx + p)$ apresenta como quociente $(x - 3)$ e como resto $(x + 5)$. Os valores de **m**, **n** e **p** são, respectivamente:

a) (3; 2; 1) b) (2; 1; 3) c) (1; 3; 2) d) (2; 3; 1) e) (1; 2; 3)

86) (F. M. SANTA CASA-SP) Um polinômio P(x) dividido por $x - 2$ dá resto 3 e dividido por $x^2 - 2$ dá resto $3x - 1$. O resto da divisão de P(x) por $(x - 2)(x^2 - 2)$ é:

a) $-x^2 + 3x + 1$ b) $9x - 3$ c) $x^2 - 3x - 1$ d) $4x^2 + 2x - 3$ e) n.r.a.

87) (PUC-SP) O resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 - 3x + 1$ por $g(x) = 2x - 1$, é:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{5}$

88) (F. G. V.-SP) O resto da divisão do polinômio:

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$$

pelo binômio $x + 1$ é:

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) 2

89) (CESGRANRIO) O resto da divisão do polinômio x^{100} por $x + 1$ é:

a) $x - 1$ b) x c) -1 d) 0 e) 1

90) (CESCEA-SP) Se $n > 1$ é um número natural, então o polinômio $P(x) = 5x^n - 4x^{n-1} - 1$ é tal que:

a) P(x) é divisível por $x - n$
b) P(x) é divisível por $x + 1$
c) P(x) é divisível por $x - 1$
d) P(x) é divisível por $x^2 - 1$
e) P(x) é divisível por $x + 2$

91) (CESESP-PE) Seja p(x) o polinômio definido por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{100} ix^i$$

Assinale a alternativa que corresponde ao resto da divisão de p(x) por $x - 1$.

a) i^2 b) $i!$ c) 0 d) 1 e) 5.050

92) (F. E. E. QUEIROZ-CE) Sabendo que $x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$ é divisível por $x - a$, $a \neq 0$, então **m** vale:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7

93) (CESCEA-SP) Os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ do polinômio:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

formam, nesta ordem, uma PG de razão $\frac{1}{2}$. Então, o resto da divisão de P(x) por $x + 2$ é:

a) **0** se **n** é ímpar
b) **0** se **n** é par
c) **0** se $a_0 = 1$
d) não sei

94) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão de $p(x) = x^{2n} + 1$ (**n**, número natural não nulo) por $q(x) = x + 1$ é:

a) sempre 0
b) sempre 2
c) 0 se e somente se **n** for ímpar
d) 2 se e somente se **n** for par
e) n.r.a.

95) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão de $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ por $x + 2$ é 1. Então, **m** é igual a:

a) 22 b) -20 c) 20 d) 10 e) -10

96) (FACESP) Dados os polinômios $f = x^3 + (p - q)x + 2p$ e $g = x^2 - (p + q)$ com **p** e **q** reais, para que ambos os polinômios sejam divisíveis por $3 - x$, devemos ter:

a) $p = q = 0$ b) $p = q = 3$ c) $p = 3$, $q = 0$ d) $p = 0$, $q = 3$ e) n.r.a.

97) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão por $x - b$ do polinômio:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ se $abcd \neq 0$
b) em geral, um polinômio não nulo de grau 3
c) o polinômio nulo, se e somente se $a = b = c = d$
d) sempre o polinômio nulo
e) não sei

98) (FATEC-SP) Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, $p \in \mathbb{R}[x]$, $p = ax^2 - 3x + b$. Se os coeficientes **a**, -3, **b**, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, então o resto da divisão de **p** por $x + 1$, em $\mathbb{R}[x]$, é:

a) -3 b) -6 c) 0 d) -1 e) 1

99) (CESCEM-SP) Se $P(x)$ é um polinômio divisível por $x - a$ e por $x - b$, podemos concluir que $(x - a)(x - b)$ divide $P(x)$:

a) sempre
b) desde que $P'(a) = P'(b) = 0$
c) desde que $P(a + b) = P(ab) = 0$
d) desde que $a \neq b$
e) n.r.a.

100) (U. F.CE) Sejam **a**, **b** e **c** números reais distintos, não nulos, tais que o polinômio $p(x) = x^2 + x + c$ é dividido exatamente por $x - a$ e por $x - b$. Então $a + b$ é igual a:

a) -1 b) 2 c) -2 d) 1

101) (U. F.BA) Na divisão de um polinômio pelo binômio $ax + b$, usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & p & -3 & 4 & -5 \\ \hline -2 & q & -4 & 5 & r & 7 \end{array}$$

Os valores de **a**, **b**, **p**, **q** e **r** são, respectivamente:

a) 1, -2, 1, -6, 6
b) 1, -2, 1, 1, 4
c) 1, 2, -2, -2, -6
d) 1, 2, 1, -4, 4
e) 1, 2, -2, 1, -6

102) (CESCEA-SP) O quadro

1,32	1	0	−0,52	−1,626
		1,32	1,7424	1,613568
	1	1,32	1,2224	−0,012432

é o dispositivo prático de Briot-Ruffini, da divisão de determinado polinômio P(x) por determinado binômio linear D(x). Então, o valor de P(x) + D(x) no ponto x = 1 é:

a) −1,466 b) −0,826 c) 1 d) −0,332432 e) 0,854

103) (MACKENZIE-SP) Na divisão do polinômio $5x^5 + ax^3 + bx^2 + 3x + 1$ por $x - 2$, encontrou-se o quociente $5x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 115$. O resto é:

a) −229
b) 229
c) −231
d) 231
e) impossível de determinar sem conhecer **a**, **b**, **c**, **d**, **e**

104) (CONSART-RJ) O polinômio P(x) que satisfaz a igualdade

$$(3x + 2) \cdot P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2 + P(x)$$

é:

a) $x^3 - 2x - 2$
b) $x^2 - 2$
c) $x^3 + 3$
d) $x^3 - 6x - 2$
e) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

105) (ITA-SP) Os valores reais **a** e **b** tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$, são:

a) dois números inteiros positivos
b) dois números inteiros negativos
c) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo
d) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional
e) n.r.a.

106) (F. M. SANTA CASA-SP) O polinômio $f = x^3 + ax^2 + (a - 18)x + 1$ é divisível por $x - 1$. O polinômio $g = ax^3 + bx^2 + bx + a$ é um cubo perfeito se **b** for igual:

a) 24 b) 18 c) 12 d) 8 e) 6

107) (PUC-SP) A divisão do polinômio P(x) por $x - a$ fornece o quociente $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e o resto $P(a) = 1$. Sabendo que $P(0) = -15$, o valor de **a** é:

a) 13 b) −13 c) 14 d) −16 e) 16

108) (CESCEA-SP) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ são 1, 2 e 3. O quociente de P(x) por $x - 3$ é:

a) $x^2 + 2$ b) $x^2 - 3x + 2$ c) $x^2 + 3x - 2$ d) $x^2 - 2x + 1$ e) $x^2 - 2$

109) (U. F.GO) **Observação**: um polinômio é chamado **mônico** quando o coeficiente do termo de maior grau é 1.

Seja P(x) um polinômio mônico de grau 2, divisível por $x - 1$ e assumindo valor 2 em $x = 3$. Seja Q(x) um polinômio mônico de grau 3, divisível por $x - 1$, divisível por $x - 2$ e assumindo valor 6 em $x = 3$.

O quociente de P(x) por Q(x) é:

a) $\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{1}{x+1}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x-2}$ e) $\frac{2}{6(x-2)}$

110) (FACESP) Para que o polinômio $x^3 + 2x^2 + (a + 5b)x + (a + 2b)$ seja divisível por $x^2 - x$, os valores de **a** e **b** devem ser, respectivamente:

a) -2 e 1 b) 1 e 2 c) 2 e -1 d) -1 e -2 e) n.r.a.

111) (FUMEC-MG) Para que o polinômio $2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$, devemos ter:

a) $m = 1$ e $n = -6$
b) $m = -6$ e $n = -1$
c) $m = 6$ e $n = 1$
d) $m = -6$ e $n = 1$
e) $m = 6$ e $n = -1$

112) (F. G. V.-SP) Determinando-se **m** e **n** de forma que $x^4 - x^3 - 22x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 5x - 6$, o quociente dessa divisão será:

a) $x^2 + 4x + 4$
b) $x^2 - 4$
c) $x^2 + 4x - 10$
d) $x^3 - 3x + 1$
e) $(x - 3)(x + 4)$

113) (MACKENZIE-SP) O polinômio $P(x) = (\cos\theta + x \operatorname{sen}\theta)^n - \cos n\theta - x \operatorname{sen} n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, é divisível por $P_1(x) = x^2 + 1$:

a) somente se $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
b) somente se $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$
c) somente se $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$
d) somente se $n\theta \neq k\pi$
e) sempre

114) (MACKENZIE-SP) Um polinômio desconhecido, ao ser dividido por $x - 1$, deixa resto 2 e, ao ser dividido por $x - 2$, deixa resto 1. Então, o resto da divisão desse polinômio por $(x - 1)(x - 2)$ é:

a) $x - 3$ b) $-x + 3$ c) $x + 3$ d) $x - 5$ e) $-x + 5$

115) (CESCEA-SP) O coeficiente de x^3 no polinômio P(x) do terceiro grau que se anula para $x = -1$ e tal que dividido separadamente por $x - 1$, $x + 2$ e $x + 3$ deixa sempre resto 10, é:

a) 5 b) 10 c) 1 d) $\frac{5}{2}$ e) não sei

116) (PUC-SP) Os restos das divisões de um polinômio P(x) pelos binômios $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$ são, respectivamente, $5, -1, -1$. Então o resto da divisão de P(x) por $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ é:

a) $x^2 + 3x - 1$
b) $x^2 + 3x + 2$
c) $x^2 - 3x + 2$
d) $x^2 - 3x + 1$
e) $x^2 + 3x + 3$

117) (ITA-SP) Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfazem as seguintes condições:

$$P(x) \cdot p(x) + Q(x) \cdot q(x) = 1 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ complexo}$$
$$P(q(1)) = 0, \ Q(0) = 0$$

Assinale a afirmação correta:

a) P(x) é divisível por $S(x) = x$
b) P(x) e Q(x) não são primos entre si
c) $Q(p(1)) = 0$
d) p(x) não é divisível por $R(x) = x - 1$
e) $p(0) = 0$

118) (ITA-SP) Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições temos:

a) $a_2 = 50 \cdot 99 \cdot 9^{98}$
b) $a_2 = \dfrac{100!}{2!\ 98!}$
c) $a_2 = \dfrac{99!}{2!\ 98!}$
d) $a_2 = \dfrac{100!\ 9^2}{2!\,98!}$
e) n.r.a.

119) (UnB-DF) $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são polinômios do 2.º grau que se anulam quando $x = 0$. O resto da divisão de $P_1(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$ é $3x + 1$. O resto da divisão de $P_2(x)$ por $(x + 1)(x + 2)$ é $2x - 1$.
Então, o quociente da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ é:

a) 1
b) 0
c) $x + 1$
d) n.r.a.

120) (PUC-SP) Os valores de **a** e **b** de modo que o polinômio $P_1(x) = x^3 + ax + b$ seja divisível pelo polinômio $P_2(x) = (x - 1)^2$ são:

a) $a = 2$ e $b = -3$
b) $a = 3$ e $b = -2$
c) $a = 1$ e $b = 3$
d) $a = 3$ e $b = -1$
e) $a = -3$ e $b = 2$

121) (U.F.RS) O máximo divisor comum dos polinômios $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ é:

a) $(x + 2)(x - 2)$
b) $(x + 1)(x - 1)$
c) $(x - 1)(x - 2)$
d) $(x + 1)(x - 2)$
e) $(x - 1)(x + 2)$

122) (F.G.V-SP) O máximo divisor comum entre os polinômios

$$A(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$B(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$
$$C(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$$

é:

a) 1
b) $x - 3$
c) $x + 3$
d) $(x + 3)(2x - 1)(x^2 - 3x + 9)(x - 3)$
e) $(x + 3)(2x - 1)$

123) (CESCEM-SP) Se $p(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$ e $q(x) = x^2 - 4$, então $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é:

a) $2x + 1$
b) $2x + 5$
c) $2x + 1 + \dfrac{4}{x^2 - 4}$
d) $2x + 1 - \dfrac{4}{x^2 - 4}$
e) $2x + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

124) (CESCEM-SP) Um polinômio de coeficientes inteiros na variável **x** tem grau par, seu termo independente é ímpar e o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Assinale a resposta *falsa*:

a) o valor do polinômio para $x = 0$ é um número ímpar
b) o zero não é raiz desse polinômio
c) o polinômio derivado tem grau ímpar
d) o coeficiente do termo de maior grau do polinômio derivado é um número ímpar
e) nenhum número par pode ser raiz desse polinômio

125) (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor de $m + n$ é:

a) -3 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

126) (EPUSP) Sejam **u** e **v** dois números complexos tais que $u^2 - v^2 = 6$ e $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$ ($\bar{u}$ e $\bar{v}$ conjugados de **u** e **v**). Então $u - v$ é igual a:

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) $3 - 3i$ d) $3 + 3i$ e) n.r.a.

127) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 9x + 3$ é divisível por:

a) $x - 2$ b) $x + 1$ c) x d) $x + 2$ e) $x - 1$

128) (FACESP) Se $A(x - 1) + (Bx + C)(x + 1) \equiv 3x(x + 3)$ é uma identidade, então o valor de $A + B + C$ é:

a) 9 b) 12 c) 3 d) 6 e) n.r.a.

129) (CICE-RJ) Seja $z = x + iy$, $x^2 + y^2 \neq 0$ ($i^2 = -1$, **x** e **y** reais); $z + \dfrac{1}{z}$ é real se e somente se:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
c) $y = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$
d) $x = 0$ e $|z| = 1$
e) $y = 0$ e $|z| = 1$

130) (F.C. CHAGAS-SP) O módulo do número complexo $z = \dfrac{a + bi}{a - bi}$, onde **a** e **b** são números reais, é:

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ e) $\dfrac{a + b}{a^2 + b^2}$

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

131) (PUC-RJ) Sobre as raízes da equação $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ podemos afirmar:

a) nenhuma raiz é real
b) há uma raiz real e duas imaginárias conjugadas
c) há três raízes reais cuja soma é 3
d) há três raízes reais cuja soma é 1
e) há três raízes reais cuja soma é -3

132) (F.G.V-SP) Sabendo que $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$ tem uma raiz dupla $x = 2$, o domínio de definição da função $f(x) = \log[P(x)]$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 7\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 6\}$

133) (MACKENZIE-SP) Sabe-se que o número complexo **i** é solução da equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Então:

a) essa equação tem uma solução de multiplicidade 2
b) as soluções dessa equação formam uma progressão
c) a equação tem 2 soluções reais irracionais
d) a equação tem 2 soluções reais racionais
e) a equação não tem soluções reais

134) (U.F.RS) O maior número real, cuja soma com o próprio quadrado é igual ao seu cubo, é:

a) 0

b) $\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

e) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

135) (U.F.RS) Se $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\}$ é:

a) $(0; 1)$

b) $(1; 2)$

c) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

d) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$

e) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$

136) (CESGRANRIO) Uma das raízes do polinômio $x^3 + 4x^2 + x - 6$ é 1. Com relação às outras raízes do polinômio podemos afirmar que:

a) ambas são negativas

b) uma é negativa e a outra é positiva

c) ambas são positivas

d) uma delas é nula

e) são complexas com a mesma parte real

137) (PUC-SP) O produto das raízes da equação $x(x + 1)(x + 2)\ldots(x + 9) = 0$ é:

a) 9^9

b) $9!$

c) -9

d) 45

e) 0

138) (FATEC-SP) O número 2 é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + m$, onde $m \in \mathbb{R}$. Quanto às raízes reais de $P(x)$, podemos afirmar que:

a) sua soma é -4
b) o quadrado da sua soma é 30
c) a soma de seus quadrados é 36
d) formam uma progressão geométrica
e) formam uma progressão aritmética

139) (CESGRANRIO) Dada a equação $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$, tem-se que:

a) admite 4 raízes reais irracionais
b) admite 8 raízes reais
c) não admite raízes reais
d) admite 4 raízes reais inteiras
e) as 4 afirmativas anteriores são falsas

140) (ITA-SP) Se $\dfrac{6 - 5x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{A}{x - a} + \dfrac{B}{x - b} + \dfrac{C}{x - c}$, onde A, B e C são reais e **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:

a) $A = -2$, $B = -1$ e $C = 0$
b) $A = 2$, $B = 4$ e $C = 1$
c) $A = 1$, $B = -3$ e $C = 2$
d) $A = 5$, $B = 2$ e $C = 1$
e) n.r.a.

141) (EPUSP) O polinômio

$$x^{180} + (\text{sen } 1° + \cos 1°)x^{179} + (\text{sen } 1° + \cos 1°)(\text{sen } 2° + \cos 2°)x^{178} +$$
$$+ (\text{sen } 1° + \cos 1°)(\text{sen } 2° + \cos 2°)(\text{sen } 3° + \cos 3°)x^{177} + \ldots$$

a) tem o produto das raízes igual a 1
b) admite zero como raiz simples
c) admite zero como raiz de multiplicidade 46
d) não admite raízes reais
e) n.r.a.

142) (CESCEM-SP) Os valores de **m** e **n** a fim de que a equação

$$x^7 - 5x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + (m - 5n)x^2 + \left(\frac{3}{5}m - n + 2\right)x + (5 - m \cdot n) = 0$$ admita

duas, e apenas duas raízes nulas, são, respectivamente:

a) $\dfrac{5}{3}$ e -5 b) -5 e 3 c) $\dfrac{5}{3}$ e 3 d) -5 e -1 e) $\dfrac{5}{3}$ e -1

143) (CESCEA-SP) Sabendo-se que um polinômio P(x) do 4.º grau é divisível por $(x - 2)^3$ e que $P(0) = -8$ e $P(1) = -3$, o valor de $P(3)$ é:

a) 10 b) -8 c) 6 d) 7 e) 3

144) (EPUSP) Qual é o coeficiente de x^{n+1} no polinômio $x^{n+3} + ax^{n+2} + \ldots$ cujos zeros são 0 com multiplicidade 3, 2 com multiplicidade **n**?

a) 0 b) $2n$ c) $2n(n + 1)$ d) $2n(n - 1)$ e) n.r.a.

145) (ITA-SP) A equação $x^n - 1 = 0$, onde **n** é um número natural maior do que 5, tem:

a) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raízes imaginárias quando **n** é par
b) 1 raiz positiva, $(n - 1)$ raízes não reais quando **n** é par
c) 1 raiz negativa, $(n - 1)$ raízes imaginárias quando **n** é ímpar
d) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raízes imaginárias quando **n** é um número natural qualquer
e) n.r.a.

146) (MACKENZIE-SP) Dado o polinômio $P(x) = x^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$, cujas raízes são $1, a, b, c, \ldots, t$, então $(1 - a)(1 - b)(1 - c)\ldots(1 - t)$ vale:

a) **n**, somente se o grau do polinômio for par
b) **n**, somente se o grau do polinômio for ímpar
c) 2n, somente se o grau do polinômio for ímpar
d) 3n, somente se o grau do polinômio for ímpar
e) **n**, qualquer que seja o grau do polinômio

147) (PUC-SP) Sobre um polinômio na indeterminada **x** de coeficientes inteiros e de grau no máximo **n** que se anula para $n + 1$ valores distintos de **x**, pode-se afirmar:

a) é constante
b) é de grau ímpar
c) é de grau par
d) é identicamente nulo
e) n.r.a.

148) (ITA-SP) Seja z_k um número complexo, solução da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos afirmar que:

a) todos os z_k (para $k = 0, 1, 2, 3, 4$) estão sobre uma circunferência
b) todos os z_k estão sobre uma reta paralela ao eixo real
c) todos os z_k estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário
d) a equação não admite solução
e) n.r.a.

149) (FATEC-SP) O polinômio $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$:

a) tem uma raiz real com multiplicidade 3
b) tem três raízes reais distintas entre si
c) tem duas raízes complexas e não reais
d) tem exatamente uma raiz complexa e não real
e) não tem raízes reais

150) (MOJI-SP) A equação $x^4 + px^3 + 3x^2 + qx - 4 = 0$ admite a raiz 2 com multiplicidade superior a 1. Então:

a) $p = 4$ e $q = 4$
b) $p = -4$ e $q = -4$
c) $p = -4$ e $q = 4$
d) $p = -2$ e $q = -2$
e) $p = 2$ e $q = -2$

151) (F.F.C.L.-USP) **Para que a equação $x^3 - (4 + m)x^2 + (4 + 4m)x - 4m = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$, tenha uma raiz dupla igual a 2, devemos ter:**

a) $m \neq 2$
b) $m = 2$
c) $m > 0$
d) $m < 3$
e) n.r.a.

152) (F.M. SANTA CASA-SP) Os valores de **p** e **q** para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3 são, respectivamente:

a) 3 e 4 b) $\frac{4}{3}$ e -8 c) 4 e $-\frac{8}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e 4 e) n.r.a.

153) (MACKENZIE-SP) Os números complexos $1 + i$, $1 + i^2$ e $2 - i$ são raízes do polinômio **P** de coeficientes reais. Podemos afirmar que o grau de **P** é, necessariamente:

a) par
b) ímpar
c) maior ou igual a seis
d) maior ou igual a quatro
e) igual a três

154) (F.C. CHAGAS-SP) Se o número complexo $2 + i$ é uma das raízes da equação $x^2 + kx + t = 0$, onde **k** e **t** são reais, o valor de $k + t$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 2 e) 1

155) (MACKENZIE-SP) Uma das raízes da equação $x^2 + ax + 2b = 0$, **a** e **b** reais, é $1 - \sqrt{2}\,i$. Os valores de **a** e **b** são, respectivamente:

a) -2 e $\frac{3}{2}$
b) -2 e $-\frac{3}{2}$
c) 2 e $-\frac{3}{2}$
d) 2 e $\frac{2}{3}$
e) 2 e $\frac{3}{2}$

156) (FUVEST-SP) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, onde **m** e **n** são números reais, admite $1 + i$ (sendo **i** a unidade imaginária) como raiz. Então **m** e **n** valem, respectivamente:

a) 2 e 2
b) 2 e 0
c) 0 e 2
d) 2 e -2
e) -2 e 0

157) (CESCEM-SP) O número $2 + 3i$ é raiz da equação $x^2 + bx + c = 0$, com **b** e **c** reais. Podemos então afirmar que:

a) **c** é um número ímpar
b) **b** é um número irracional
c) **c** é um número irracional
d) **b** e **c** não estão univocamente determinados
e) **b** é um número ímpar

158) (U.F.RS) Se os números **−3**, **a** e **b** são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, o valor de $a + b$ é:

a) -6 b) -2 c) -1 d) 2 e) 6

159) (MACKENZIE-SP) A equação $x^3 - 5x + 4 = 0$ admite a raiz 1. Se **a** e **b** correspondem às outras raízes, o valor de $a + b$ é:

a) $+1$ b) -1 c) -5 d) 5 e) -4

160) (U.F.MG) A média aritmética das raízes da equação $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ é:

a) -1 b) $-\frac{2}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

161) (PUC-SP) Qual é a raiz real de $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$, se uma de suas raízes é $1 - i$?

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) -3 e) -1

162) (CESGRANRIO) O produto de duas das raízes da equação $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 19/2 e) 19

163) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O número $2 + 3i$ é raiz da equação $x^2 + bx + c = 0$, com **b** e **c** reais. Podemos, então, afirmar que:

a) **b** é um número irracional
b) **c** é um número imaginário puro
c) **c** é um número irracional
d) **c** é um número ímpar
e) **c** é um número par

164) (CESGRANRIO) As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Podemos afirmar que:

a) a diferença entre as duas raízes tem módulo 46
b) a soma das duas raízes tem módulo 2
c) **b** é positivo
d) o módulo da soma das duas raízes é igual a 94
e) **b** é negativo

165) (MACKENZIE-SP) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $x^2 - 3kx + k^2 = 0$, tais que $a^2 + b^2 = 1,75$. O valor de k^2 é:

a) $(1,75)^2$ b) 17,5 c) 175 d) 0,5 e) 0,25

166) (MACKENZIE-SP) Um valor de **k** para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3kx + 5k = 0$ é o dobro da outra é:

a) $\frac{5}{2}$ b) 2 c) -5 d) -2 e) $-\frac{5}{2}$

167) (F.M. SANTA CASA-SP) Seja a equação $x^3 + x^2 + kx + t = 0$, onde **k** e **t** são coeficientes reais. Se o complexo $1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, o produto das três raízes é:

a) -15 b) -12 c) -9 d) 9 e) 15

168) (CESGRANRIO) Se $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ é um polinômio com coeficientes complexos, cujas raízes são todas de módulo menor do que 1, podemos afirmar que:

a) $|a_n| = 1$ b) $|a_n| < 1$ c) $|a_n| > 1$ d) $|a_n| = 0$ e) $|a_n| \neq 0$

169) (UNESP) As três raízes da equação $x^3 - 12x^2 + mx - 8 = 0$ estão em progressão aritmética. Então:

a) $m = 26$ b) $m = 28$ c) $m = 30$ d) $m = 32$ e) $m = 34$

170) (ITA-SP) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?

a) $p^2 = rq$ b) $2p + r = q$ c) $3p^2 = r^2q$ d) $p^3 = rq^3$ e) $q^3 = rp^3$

171) (ITA-SP) Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, o valor real de **m** para o qual a equação

$$x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$$

tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:

a) $m = \log_e a - 8$ ou $m = -9a$

b) $m = \log_e a - 9$

c) $m = 15/\log_e a$

d) $m = -\dfrac{9}{8}\log_e a$

e) n.r.a.

172) (FEI-SP) **Sendo a, b e c as raízes da equação** $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$, o valor da expressão $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ é:

a) 19 b) 31 c) $\dfrac{19}{4}$ d) $\dfrac{31}{4}$ e) n.r.a.

173) (MACKENZIE-SP) O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & -c \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

174) (ITA-SP) Se **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde **r** é um número real, o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

a) -60 b) $62 + r$ c) $62 + r^2$ d) $62 + r^3$ e) $62 - r$

175) (ITA-SP) Seja $M = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$, onde **a, b e c** são as raízes da equação $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + 54 = 0$. Então:

a) $\log_3 M$ é um número irracional

b) $\log_3 M$ é um número primo

c) $\log_3 M = \dfrac{5}{3}$

d) $\log_3 M = -\dfrac{5}{2}$

e) n.r.a.

176) (FATEC-SP) Sabe-se que x_1, x_2 e -2 são as raízes da equação

$$2x^3 + (4 - m)x^2 + x + 4m + 2 = 0$$

onde $m \in \mathbb{R}$. Se $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -1$, então:

a) $m = -1$ b) $m = \dfrac{1}{3}$ c) $m = 1$ d) $m = -\dfrac{1}{3}$ e) n.r.a.

177) **(ITA-SP) Se as dimensões, em centímetro, de um paralelepípedo reto-retangular são dadas** pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da diagonal é igual a:

a) 7/12 cm b) 9/24 cm c) $\sqrt{24}/12$ cm d) $\sqrt{61}/12$ cm e) $\sqrt{73}/12$ cm

178) (U.F.MG) **Se a, b e c** são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$, então $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) n.r.a.

179) **(ITA)-SP) Sendo a, b, c e d as raízes da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, podemos** afirmar que:

a) a, b, c e d são reais positivas

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a $\frac{13}{5}$

c) a, b, c e d não são reais

d) $\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$ é a soma das raízes

e) n.r.a.

180) (F.M. SANTA CASA-SP) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Uma outra equação do terceiro grau, cujas raízes são $y_1 = x_2 \cdot x_3$, $y_2 = x_3x_1$ e $y_3 = x_1x_2$, é:

a) $y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$
b) $y^3 + y^2 + 2y - 1 = 0$
c) $-2y^3 - y^2 + y + 1 = 0$
d) $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$
e) n.r.a.

181) (CESCEM-SP) Dentre as frações $\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{10}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}, \frac{9}{15}, \frac{13}{16}$ podem ser raízes da equação $16x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 45 = 0$ (**a, b, c, d e e** inteiros)

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$ b) $\frac{9}{15}$ e $\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{7}$ e $\frac{11}{13}$ d) $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{12}$ e) $\frac{13}{16}$ e $\frac{5}{11}$

182) (PUC-SP) Qual dos números abaixo é raiz da equação $15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$?

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$

183) (ITA-SP) Calculando as raízes simples e múltiplas da equação

$$x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

podemos afirmar que esta equação tem:

a) uma raiz simples, duas duplas e uma tripla
b) uma raiz simples, uma dupla e uma tripla
c) duas raízes simples, uma dupla e uma tripla
d) duas raízes simples e duas duplas
e) duas raízes simples e uma tripla

184) (F.M. ABC-SP) A equação algébrica do terceiro grau, a coeficientes inteiros, da qual -1 e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ são raízes é:

a) $x^3 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^3 - 2x - 1 = 0$
d) $x^3 + 2x - 1 = 0$
e) $x^3 - x^2 + x = 0$

185) (CESCEM-SP) Um polinômio de coeficientes inteiros tem uma raiz dupla igual a $a + \sqrt{b}$, onde **a** e **b** são números primos. Podemos concluir que este polinômio:

a) tem grau 2
b) tem grau pelo menos 4
c) tem uma única raiz complexa dupla
d) admite pelo menos uma raiz complexa
e) não existe

186) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

(I) Qualquer raiz racional da equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ é inteira.
(II) O menor grau da equação polinomial de coeficientes reais, que admite as raízes 3, $2 + i$ e $-i$, é 5.
(III) Toda equação polinomial da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, de coeficientes reais e $a \neq 0$, necessariamente possui raiz real.

Então:

a) todas as afirmações são verdadeiras
b) somente as afirmações I e II são verdadeiras
c) somente I e III são verdadeiras
d) somente II e III são verdadeiras
e) nenhuma afirmação é verdadeira

187) (PUC-SP) Os valores de **a**, **b** e **c**, de modo que a equação:

$$x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2a)x - 1 = 0$$

seja recíproca, são:

a) $a = 1;\ b = 3;\ c = -\dfrac{1}{2}$
b) $a = 1;\ b = 2;\ c = 1$
c) $a = \dfrac{1}{2};\ b = 1;\ c = -1$
d) $a = -\dfrac{1}{2};\ b = 1;\ c = 3$
e) $a = -\dfrac{1}{2};\ b = 3;\ c = -1$

188) (ITA-SP) O valor absoluto da soma das duas menores raízes da equação:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$$

é:

a) 2
b) 3
c) $\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}$
d) 4
e) n.r.a.

189) (ITA-SP) Os valores reais de **a** e **b**, para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ tem duas raízes comuns, são:

a) $a = 1;\ b = 2$
b) $a = -1;\ b = 4$
c) $a = 5;\ b = 3$
d) $a = -4;\ b = 1$
e) n.r.a.

190) (MACKENZIE-SP) As equações $kx^3 - x^2 - x - (k + 1) = 0$ e $kx^2 - x - (k + 1) = 0$, ($k \in \mathbb{R}^*$), possuem uma raiz comum:

a) somente se $k = -1$
b) somente se $k = 3$
c) somente se $k = 4$
d) qualquer que seja $k \neq 0$
e) n.r.a.

191) (F.C. CHAGAS-SP) Se as equações $x^3 + ax + b = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm duas soluções comuns, os números **a** e **b** são tais que:

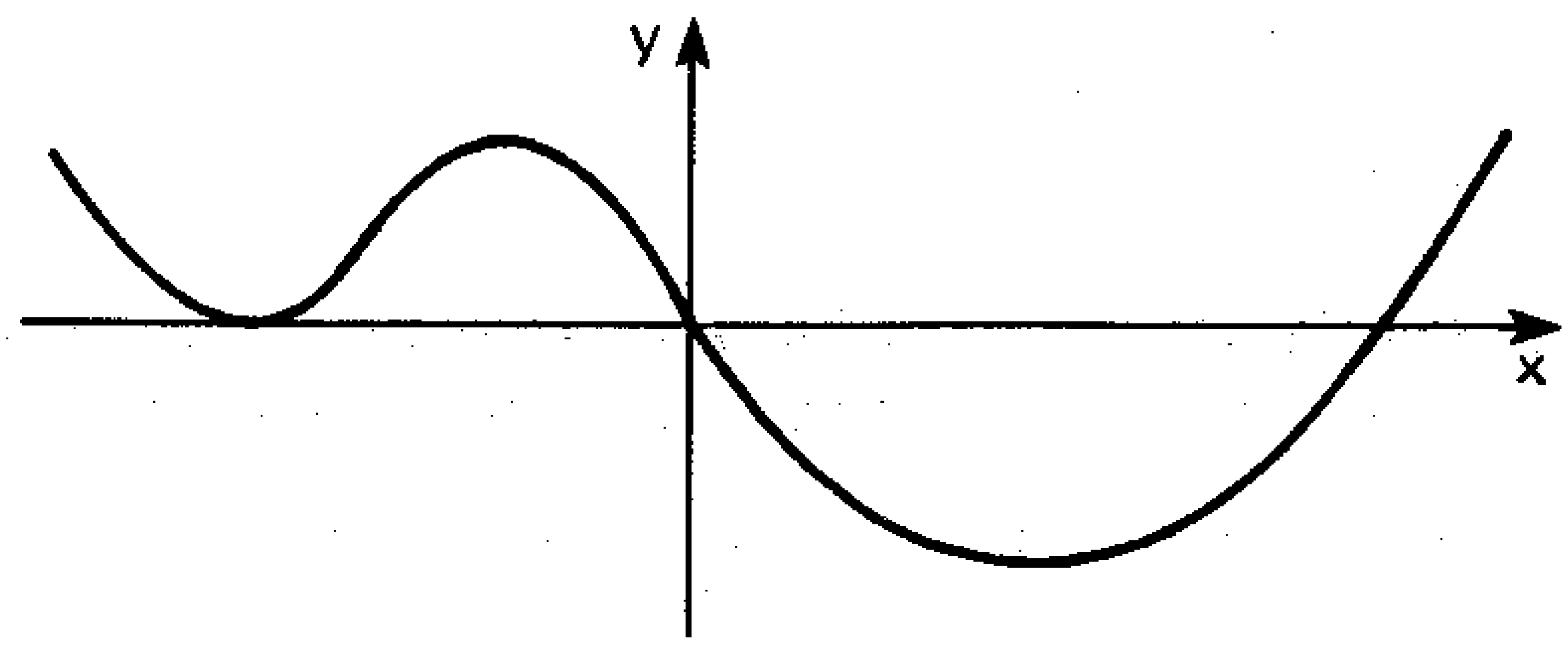
a) $a + b = 1$ b) $a \cdot b > 4$ c) $\frac{a}{b} < -1$ d) $(a - b)^{-1} = 5$ e) $\log b^a > 0$

192) (F.F.C.L.-USP) Se $(x - \alpha)$ é mdc de $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ e de $Q(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, então:

a) α é raiz simples de P(x)
b) α é raiz dupla de P(x)
c) α é raiz tripla de P(x)
d) α não é raiz de P(x)
e) n.r.a.

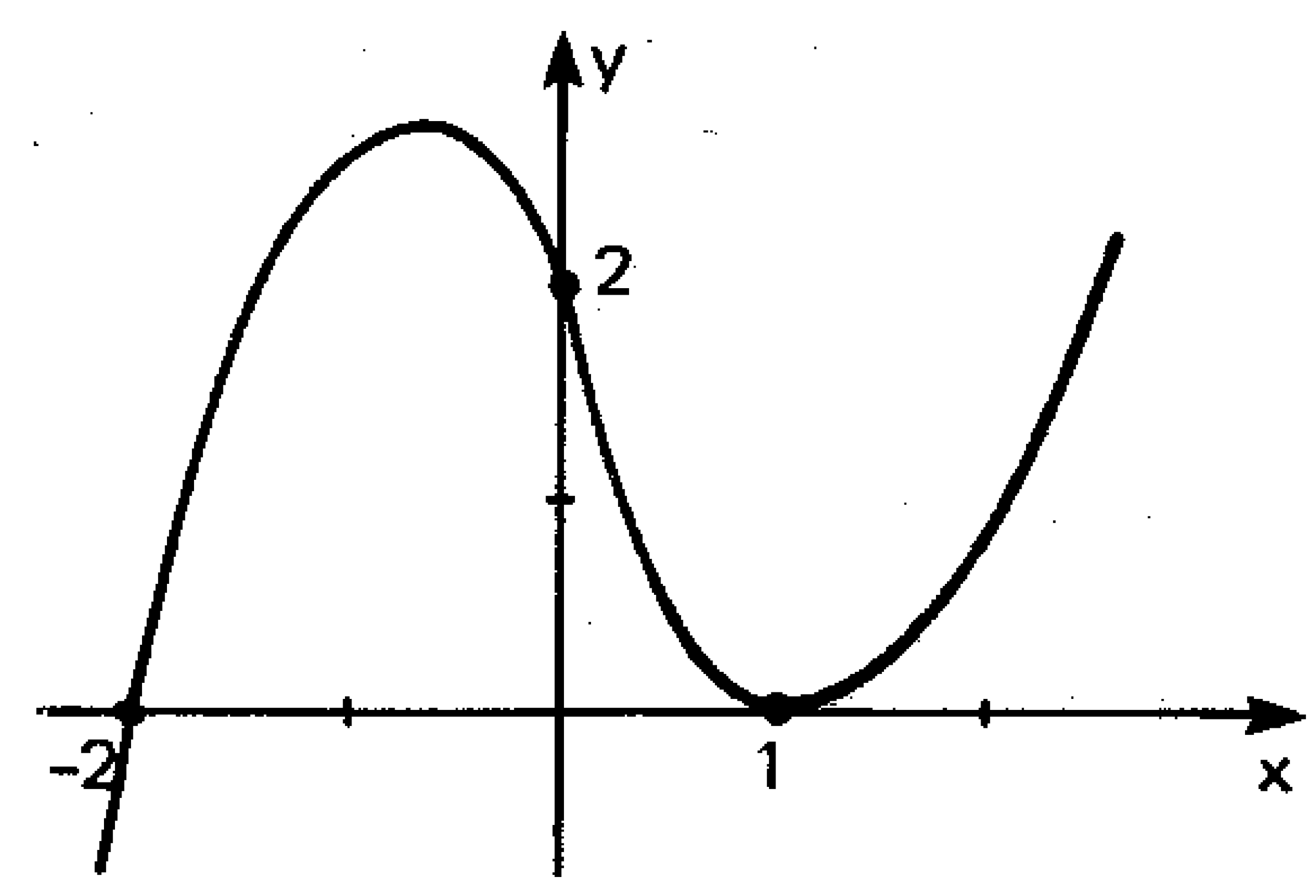
193) (CESCEM-SP) O gráfico abaixo é o de um polinômio cujas raízes reais estão todas no trecho desenhado. Esse polinômio:

a) pode ser do 3.º grau
b) pode ser do 5.º grau
c) pode ser do 6.º grau
d) pode ser quadrado perfeito
e) n.r.a.



194) (PUC-RS) O gráfico da figura é de uma função f: IR → IR, em que f(x) é um polinômio do terceiro grau. Para f(x), afirmamos:

(I) O termo independente é igual a 2.
(II) Suas raízes são −2, 2 e 1.
(III) Suas raízes são −2, −2 e 1.
(IV) Suas raízes são −2, 1 e 1.



Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

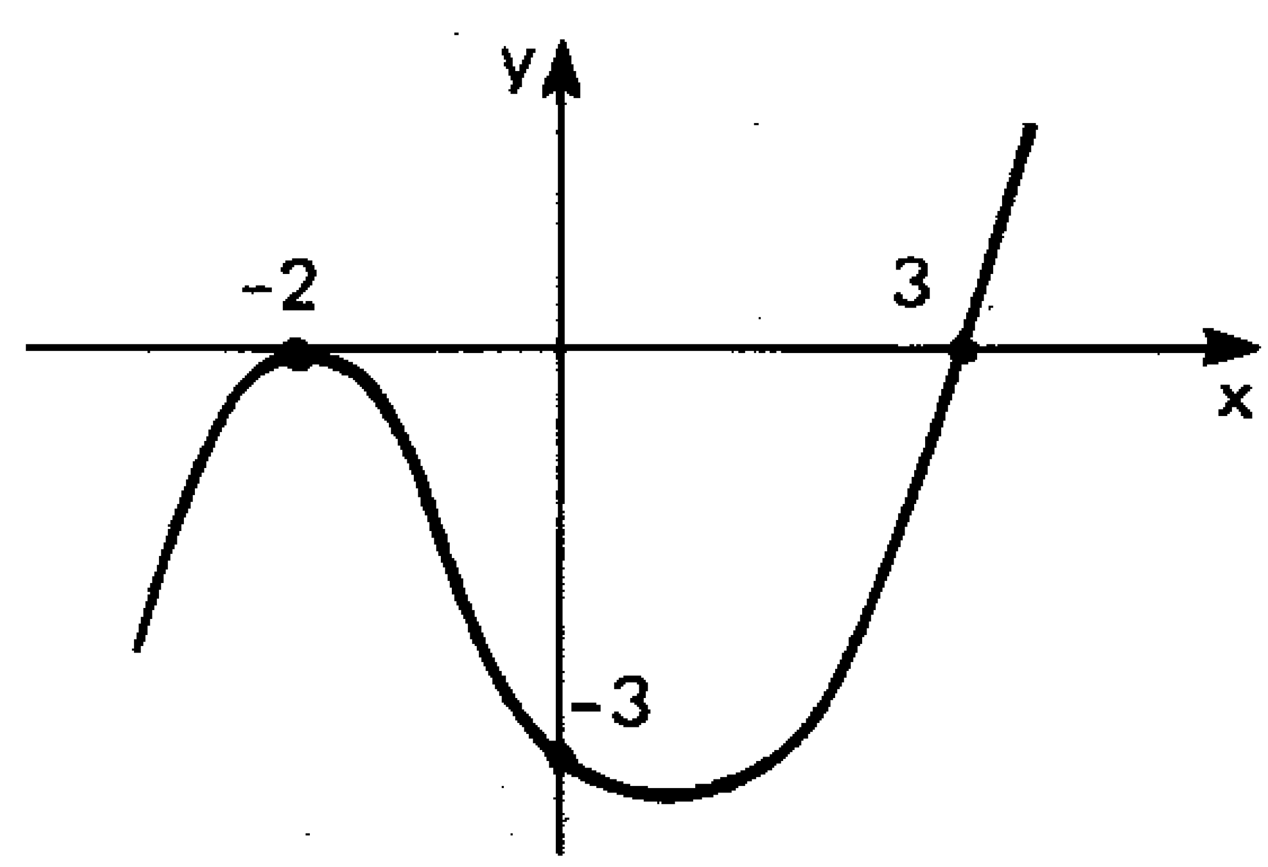
a) II b) III c) I e II d) I e III e) I e IV

195) (CESCEM-SP) Sobre o polinômio P(x), de grau 3, cujo gráfico está esboçado na figura, fazemos as afirmações:

(I) P(x) tem uma raiz igual a −2, uma raiz igual a 3 e uma raiz imaginária.
(II) P(x) tem termo independente igual a −3.
(III) P(x) tem uma raiz real e duas imaginárias.

Podemos dizer que:

a) somente I é correta
b) somente II é correta
c) somente III é correta
d) apenas I e II são corretas
e) apenas II e III são corretas



196) (PUC-CAMPINAS-SP) O polinômio $P(x) = x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$ tem:

a) duas raízes reais no intervalo fechado $[1; 3]$
b) duas raízes reais no intervalo fechado $[-1; 0]$
c) pelo menos uma raiz real no intervalo aberto $\left]0; \frac{2}{3}\right[$
d) pelo menos uma raiz real no intervalo aberto $]2; 3[$
e) n.r.a.

197) (ITA-SP) A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possui:

a) três raízes imaginárias e duas reais
b) pelo menos uma raiz real positiva
c) todas as raízes inteiras
d) uma raiz imaginária
e) n.r.a.

198) (CEUB-DF) Determine **m** de modo que a equação $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + (m - 3) = 0$ tenha ao menos uma raiz real compreendida entre 0 e 2:

a) $-1 \leqslant m \leqslant 4$ b) $-5 \leqslant m \leqslant 5$ c) $-2 \leqslant m \leqslant 2$ d) $-3 < m < 3$

199) (F.M. SANTA CASA-SP) Admitamos $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ um polinômio de coeficientes reais que tem apenas raízes imaginárias. Então, para um intervalo aberto qualquer $]a; b[$, onde **a** e **b** são reais, temos:

a) $P(a) + P(b) = 0$
b) $P(a) \cdot P(b) < 0$
c) $P(a) \cdot P(b) > 0$
d) $\frac{P(a)}{P(b)} = 1$
e) n.r.a.

200) (ITA-SP) O conjunto dos valores de **k** para os quais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tem uma ou três raízes reais entre 1 e 2 é:

a) $k < 2$ b) $1 < k < 2$ c) $2 > k$ ou $k > 6$ d) $k > 7$ e) n.r.a.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 1

1.7) a) $S = \{-3i;\ 3i\}$
b) $S = \{-i\sqrt{5};\ i\sqrt{5}\}$
c) $S = \{-1;\ 1;\ -i;\ i\}$
d) $S = \{-4;\ 4;\ -4i;\ 4i\}$

1.8) a) $S = \{1 + i;\ 1 - i\}$
b) $S = \left\{2 + \frac{1}{2}i;\ 2 - \frac{1}{2}i\right\}$
c) $S = \{3 + 2i\sqrt{2};\ 3 - 2i\sqrt{2}\}$
d) $S = \{5 + i\sqrt{15};\ 5 - i\sqrt{15}\}$

1.9) $S = \left\{-1;\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

1.10) Faça as substituições.

1.14) a) $(-1;\ 2)$
b) $(-1;\ 5)$
c) $(6;\ -10)$
d) $(30;\ 18)$
e) $(12;\ -16)$
f) $(-24;\ 8)$
g) $(-3;\ -4)$

1.15) a) $x = 0;\ y = \frac{5}{2}$
b) $x = 5;\ y = -2$

1.16) a) $z = (-5;\ 5)$
b) $z = \left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$
c) $z = \left(\frac{21}{5};\ -\frac{27}{5}\right)$
d) $z = \left(\frac{1}{25};\ \frac{3}{25}\right)$

1.17) $S = \{(2;\ -2);\ (-2;\ 2)\}$

1.19) a) $\left(\frac{12}{13};\ \frac{-5}{13}\right)$ b) $\left(\frac{1}{5};\ 0\right)$ c) $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$

1.20) a) $\left(\frac{17}{13};\ \frac{7}{13}\right)$ b) $(0;\ -1)$ c) $(0;\ 1)$

1.21) O inverso de $z = (a; b)$ é $z^{-1} = (c; d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Da definição de igualdade, vem que $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Então:

$$[a^2+b^2]\cdot[c^2+d^2] = [a^2+b^2]\cdot\left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2\right] =$$

$$= [a^2+b^2]\left[\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}\right] = \frac{[a^2+b^2]^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

1.22) $z = (-6; 6)$

CAPÍTULO 2

2.11) a) $4 + 4i$ b) $-4 - 18i$ c) $-27 + 5i$ d) -5 e) $16 + 28i$ f) $28 - 30i$

2.12) a) $-243i$ b) -4 c) $-8i$ d) $-32i$

2.13) a) $x = \pm 2$ b) $x \neq 2$ e $x \neq -2$ c) $x = \frac{3}{4}$

2.14) $x^2 + y^2 \neq 0$

2.15) a) $a \geqslant 5$ b) $-3 < a < 3$ c) $a \leqslant -3$ ou $3 \leqslant a < 5$

2.16) a) $x = 11$ e $y = -1$ b) $\left(x = \frac{1}{2} \text{ e } y = 1\right)$ ou $\left(x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = -1\right)$

2.17) a) $x = -3$ b) Não existe x.

2.18) a) $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$ b) $z = -3$ ou $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

2.19) a) $z = 1 + i\sqrt{2}$ ou $z = 1 - i\sqrt{2}$ b) $z = -7 + i$ ou $z = -7 - i$

2.20) Seja $x = yi$, $(y \neq 0)$, o imaginário puro raiz da equação. Então:

$$(yi)^2 + (a + bi)\,yi + c + di = 0$$
$$-y^2 + ayi - by + c + di = 0$$
$$(-y^2 - by + c) + (ay + d)\,i = 0 + 0i$$

Portanto:

$$\begin{cases} -y^2 - by + c = 0 & \text{(I)} \\ ay + d = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), $y = -\frac{d}{a}$; substituindo em (I):

$$-\left(-\frac{d}{a}\right)^2 - b\left(-\frac{d}{a}\right) + c = 0 \Rightarrow -d^2 + abd + a^2c = 0$$

Logo: $abd = d^2 - a^2c$.

2.21) a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ b) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

2.22) $a + bi = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha - i\,\text{sen}^2\alpha + i\cos^2\alpha - i^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
$a + bi = (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\,i$
$a + bi = \text{sen}\,2\alpha + i\cos 2\alpha$
Então: $a = \text{sen}\,2\alpha$ e $b = \cos 2\alpha$;
logo: $a^2 + b^2 = \text{sen}^2\,2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

2.23) $z = (1 + i\,\text{tg}\,\alpha)(1 - i\,\text{tg}\,\alpha) = 1 - i^2\,\text{tg}^2\,\alpha$
$z = (1 + \text{tg}^2\,\alpha) + 0i = \sec^2\alpha + 0i$
Então: $\text{Im}(z) = 0$ e $\text{Re}(z) = \sec^2\alpha$.
Como, na Trigonometria, $\sec\alpha \leqslant -1$ ou $\sec\alpha \geqslant 1$, temos $\sec^2\alpha \geqslant 1$, isto é, $\text{Re}(z) \geqslant 1$.

2.26) a) -1
b) $-i$
c) 1
d) i
e) $2 - 3i$
f) -16384

2.27) a) $A = \pm 1$
b) $A = 1 + i;\ -1 + i;\ -1 - i;\ 1 - i$
c) $A = \pm i$

2.28) um só valor ($A = 0$)

2.29) a) $m + n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $m - n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$

2.37) a) $\dfrac{7}{13} + \dfrac{4}{13}i$
b) $\dfrac{7}{10} - \dfrac{31}{10}i$
c) $-\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$
d) i
e) $(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)\,i$
f) $-3 + 3i$

2.38) a) $\dfrac{i}{3}$ b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ c) $-\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$ d) $\cos x - i\,\text{sen}\,x$

2.39) a) $x = \pm 2\sqrt{2}$ b) $x \neq -5,\ x \neq 2\sqrt{2}$ e $x \neq -2\sqrt{2}$

2.40) $ac = -bd$ e $bc \neq ad$

2.41) $w = -i$ ou $w = 4i$

2.42) $\dfrac{z^2 + 1}{z} = \dfrac{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 + 1}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} =$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha \overbrace{- \text{sen}^2\alpha + 1}^{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{(2\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^3\alpha - 2i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 2i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha} =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + 0i = 2\cos\alpha \in \mathbb{R}$$

2.43) $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}} = \dfrac{1 + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha - i\cos\alpha} \cdot \dfrac{1 + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha} = \dfrac{[(1 + \text{sen}\,\alpha) + i\cos\alpha]^2}{(1 + \text{sen}\,\alpha)^2 + \cos^2\alpha} =$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}^2\,\alpha + 2\,(1 + \text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \underbrace{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha}_{1}} =$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}^2\,\alpha - (1 - \text{sen}^2\,\alpha) + 2\,(1 + \text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha}{2 + 2\,\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} + \frac{2\,(1 + \text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha}{2\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = z$$

2.44) a) $z = -4 - i$

b) $z = 5 + 10i$

c) $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = a(1 + i),\ \forall a \in \mathbb{R}$

2.45) a) $z = 4 - i$ b) $z = -\dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$ c) $z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

2.46) a) $4 - 2i$ b) $4 - 2i$ c) $5 - 5i$ d) $5 - 5i$ e) i f) i

2.47) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, **a**, **b**, **c** e **d** reais.

1.º) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)\,i} =$
$= (a + c) - (b + d)\,i = a + c - bi - di =$
$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2.º) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} =$
$= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\,i} = (ac - bd) - (ad + bc)\,i$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} = (a - bi)(c - di) =$
$= ac - adi - bci - bd = (ac - bd) - (ad + bc)\,i$

Logo: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3.º) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{a + bi}{c + di}\right)} = \overline{\left[\dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}\right]} = \overline{\left[\dfrac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}\right]} =$

$= \overline{\left[\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i\right]} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$

$\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{\overline{a + bi}}{\overline{c + di}} = \dfrac{a - bi}{c - di} = \dfrac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} =$

$= \dfrac{ac + adi - bci + bd}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$

Logo: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$

2.48) Utilizando o **Princípio da Indução Matemática**, temos:

Teorema 1: a igualdade se verifica para $n = 0$, pois:

$$\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1 \text{ e } (\overline{z})^0 = 1$$

Teorema 2: admitindo que a igualdade é verdadeira para **n**, vamos provar que é verdadeira para $n + 1$, isto é:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \Rightarrow \overline{(z^{n+1})} = (\bar{z})^{n+1}$$

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{z^n \cdot z^1} = \overline{(z^n)} \cdot \overline{(z^1)} = (\bar{z})^n \cdot (\bar{z})^1 = (\bar{z})^{n+1}$$

Está então provado que $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

2.49) $2\,(\bar{z})^3 + 3\,(\bar{z})^2 = 2\,\overline{(z^3)} + 3\,\overline{(z^2)} = \overline{2z^3} + \overline{3z^2} = \overline{2z^3 + 3z^2} = \overline{a + bi} = a - bi$

2.50) Como **z** é raiz, temos $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$. Substituindo no primeiro membro da equação dada **x** por **z**, temos:

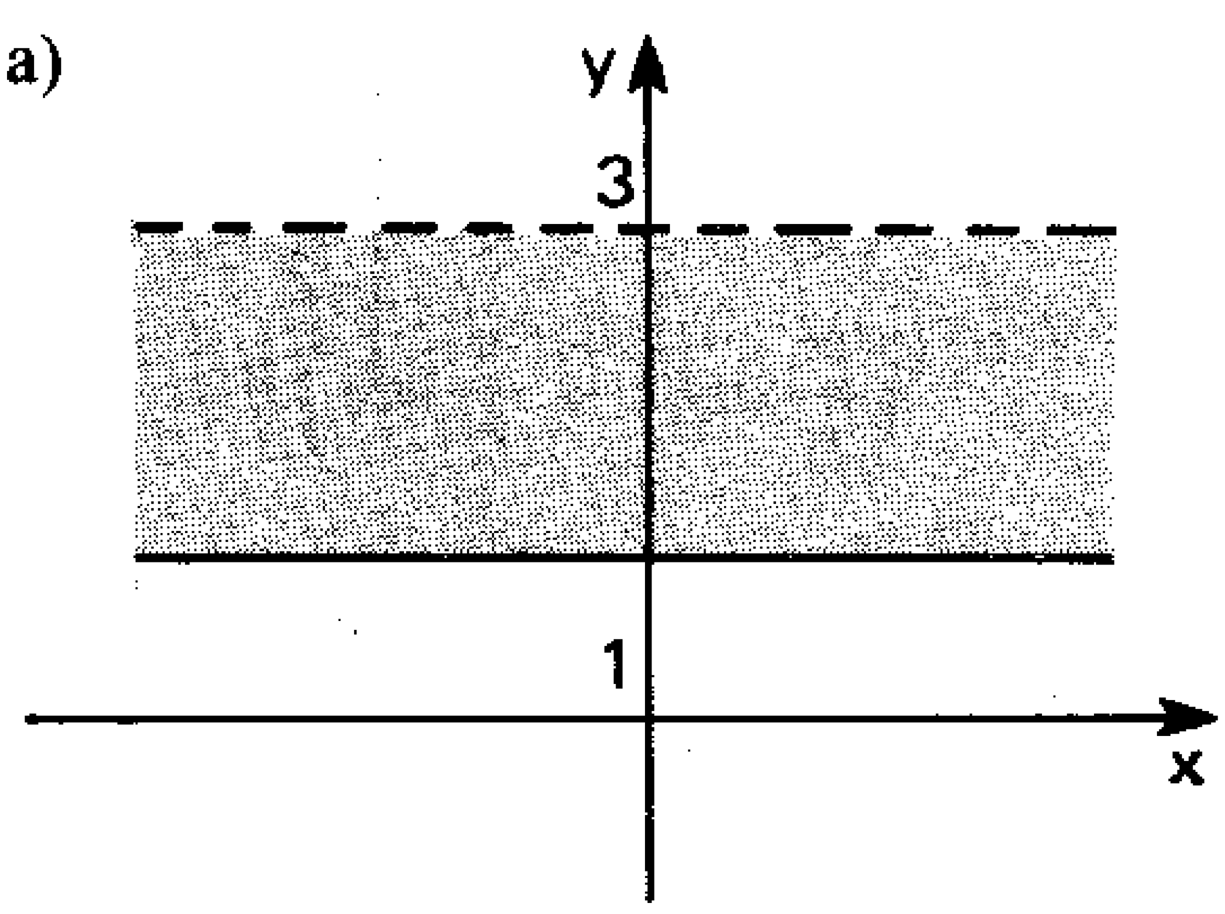
$$\alpha(\bar{z})^2 + \beta\bar{z} + \gamma = \alpha\overline{(z^2)} + \beta\bar{z} + \gamma = \overline{\alpha z^2} + \overline{\beta z} + \overline{\gamma} = \overline{\alpha z^2 + \beta z + \gamma} = \overline{0} = 0$$

Logo: $\bar{z}$ é raiz de (E).

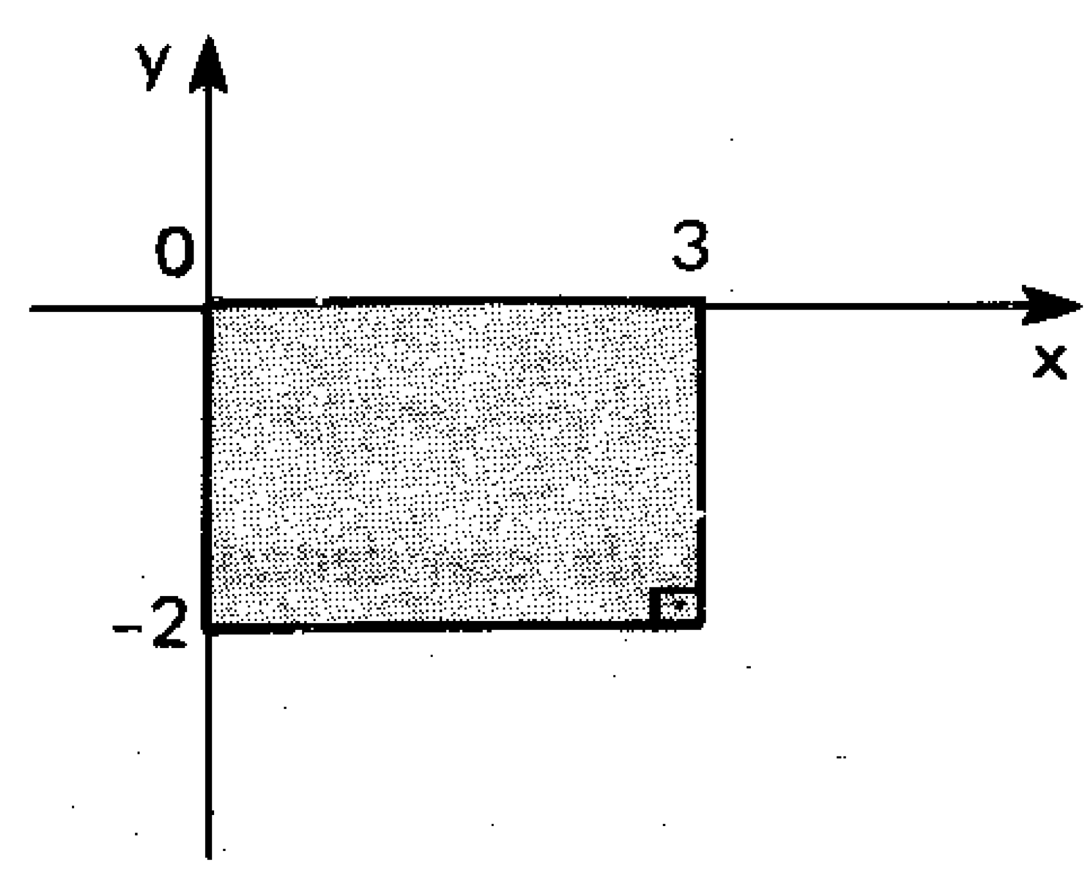
CAPÍTULO 3

3.2)

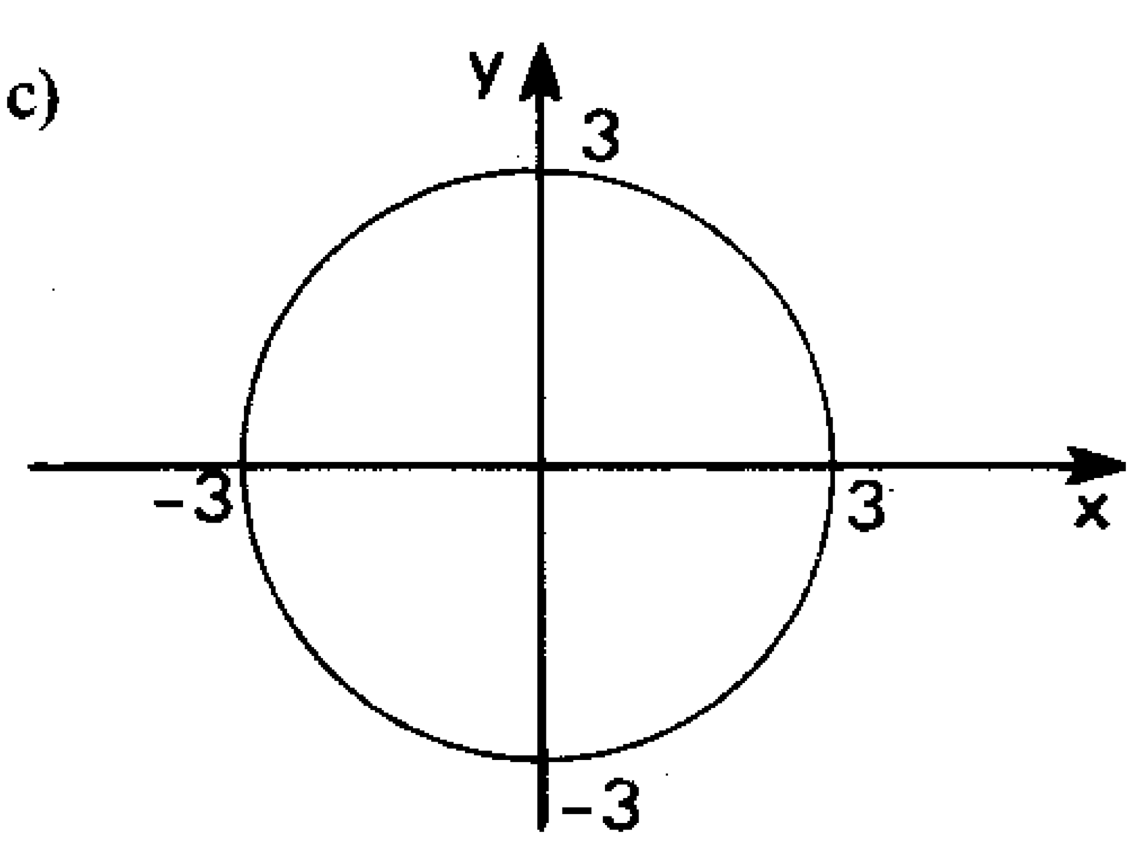
a)



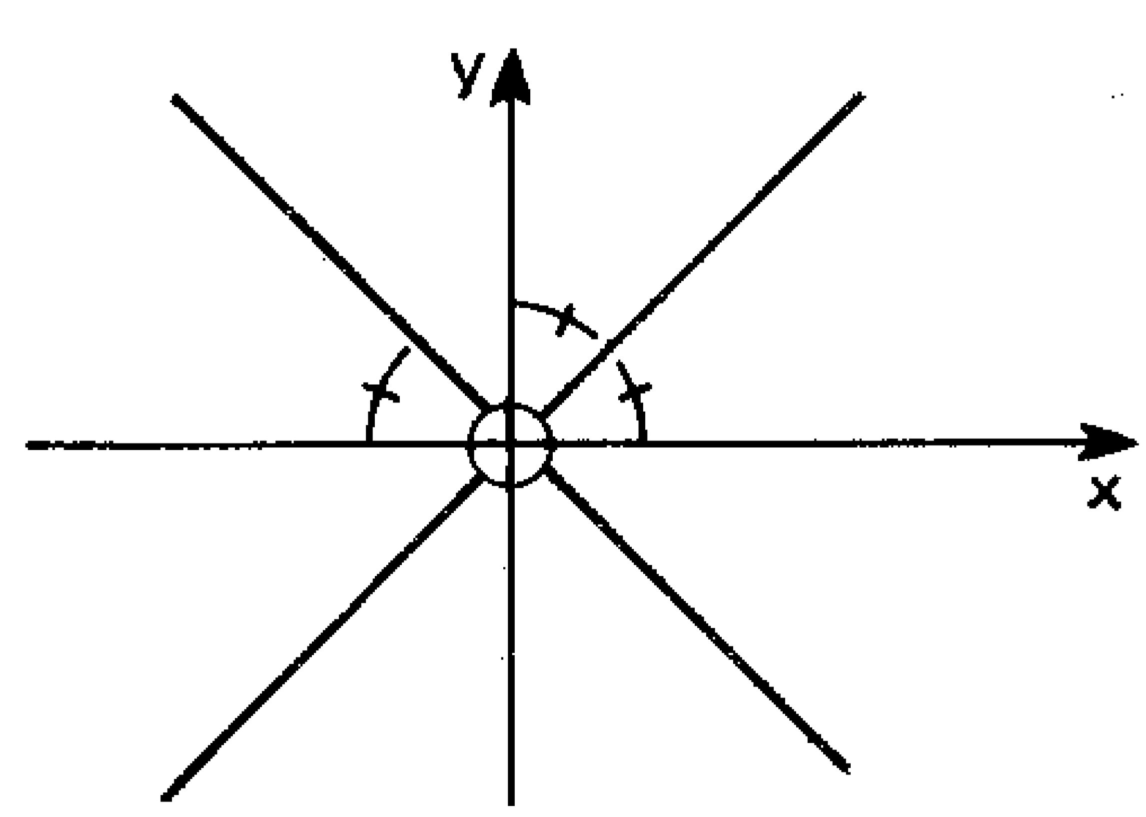
b)



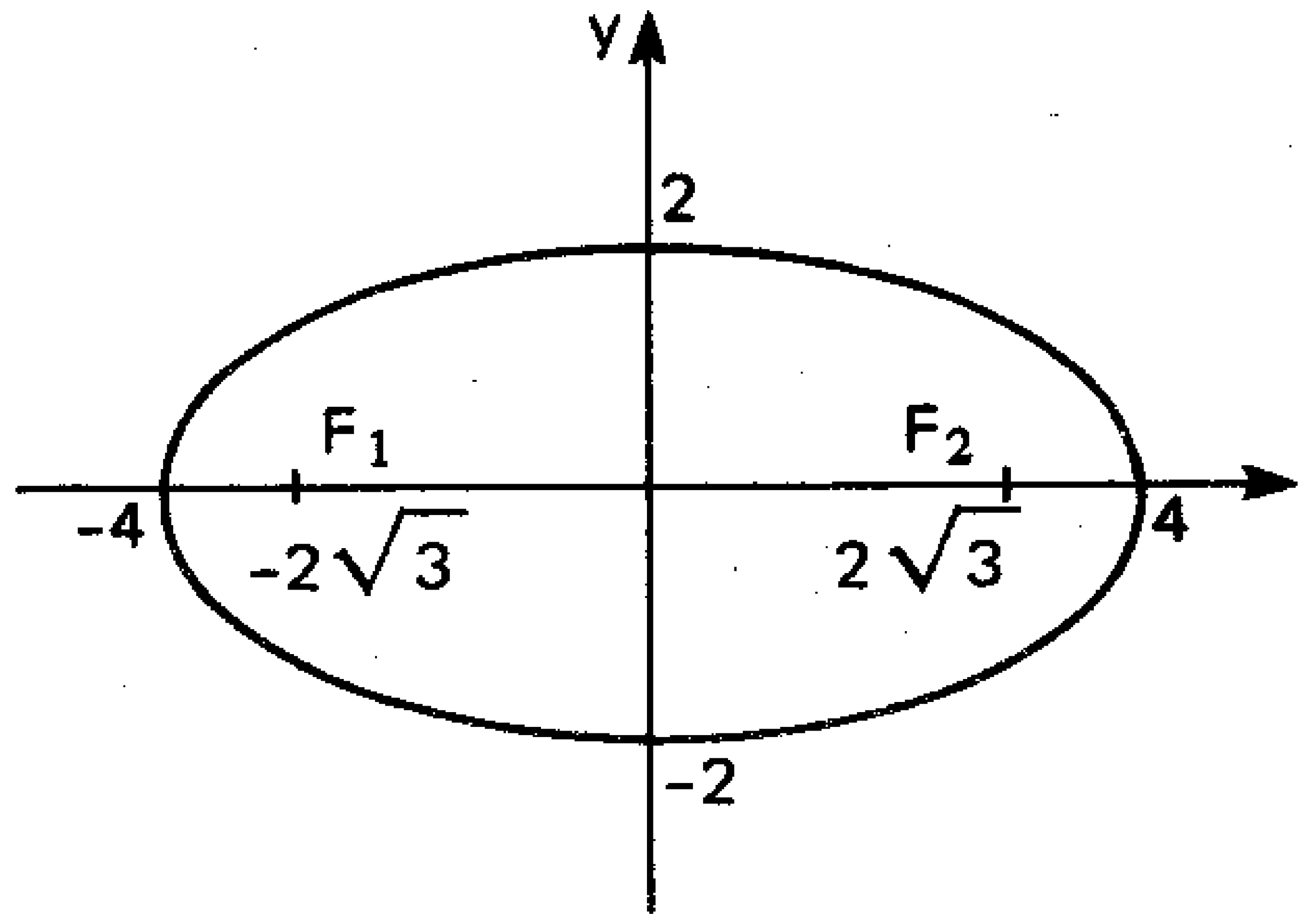
c)



3.3) O lugar é a reunião das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, excetuando-se a origem **O**.



3.4)



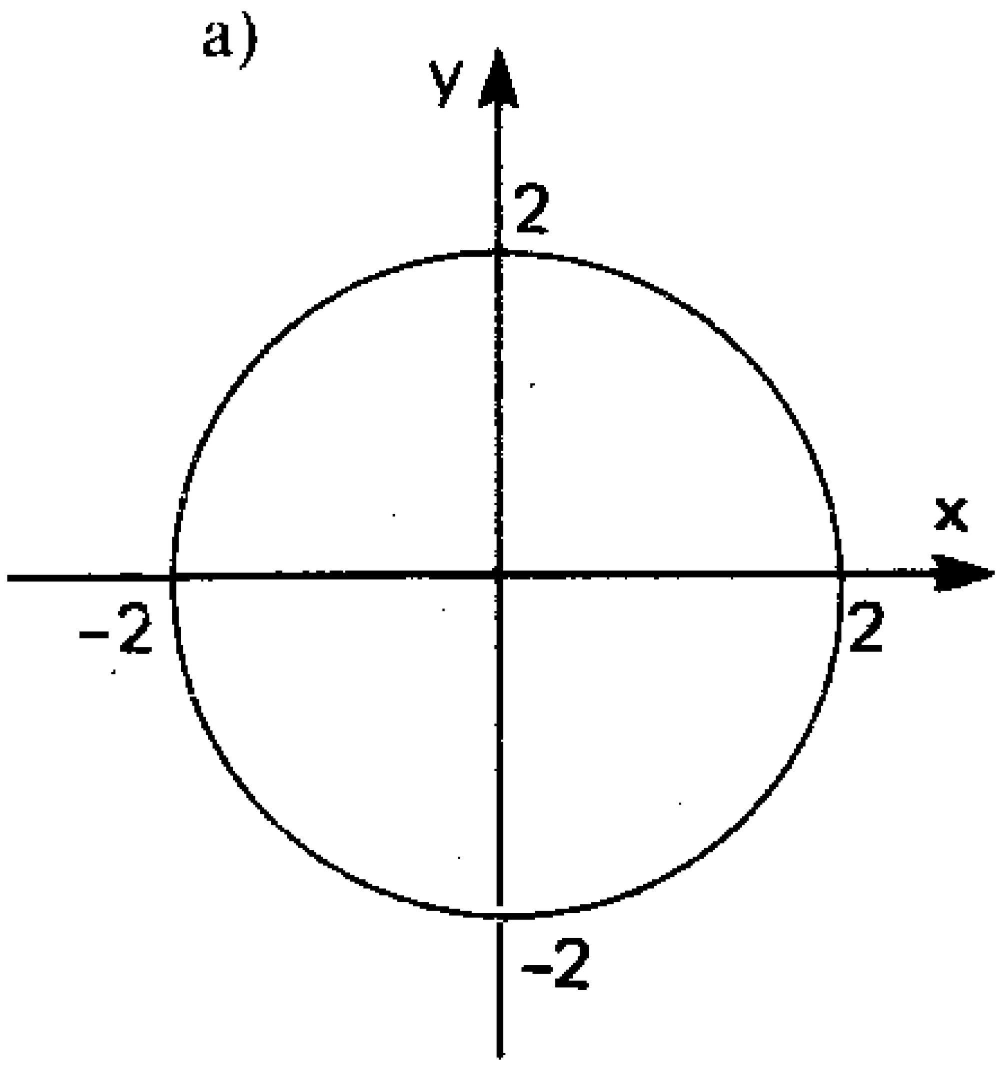
Elipse da equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

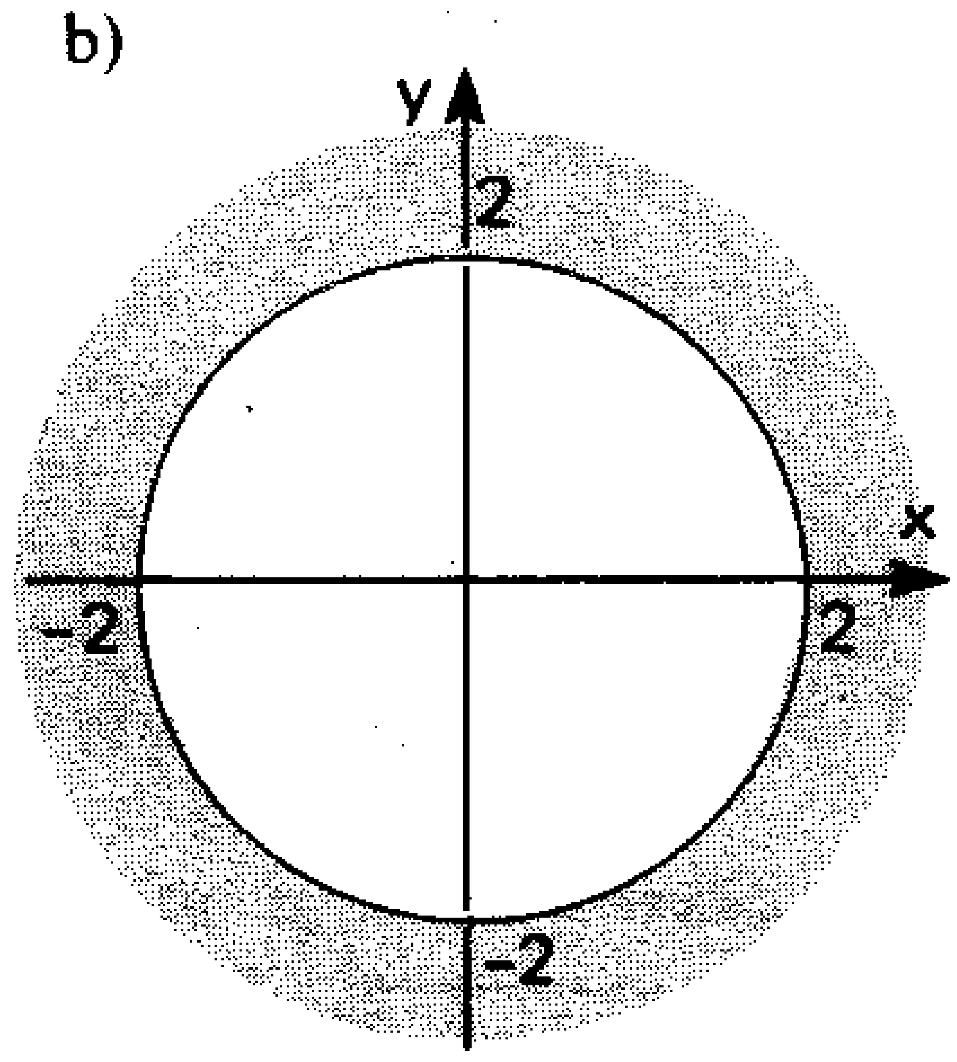
3.12) a) 25 b) $\sqrt{26}$ c) 10 d) 16

3.13)

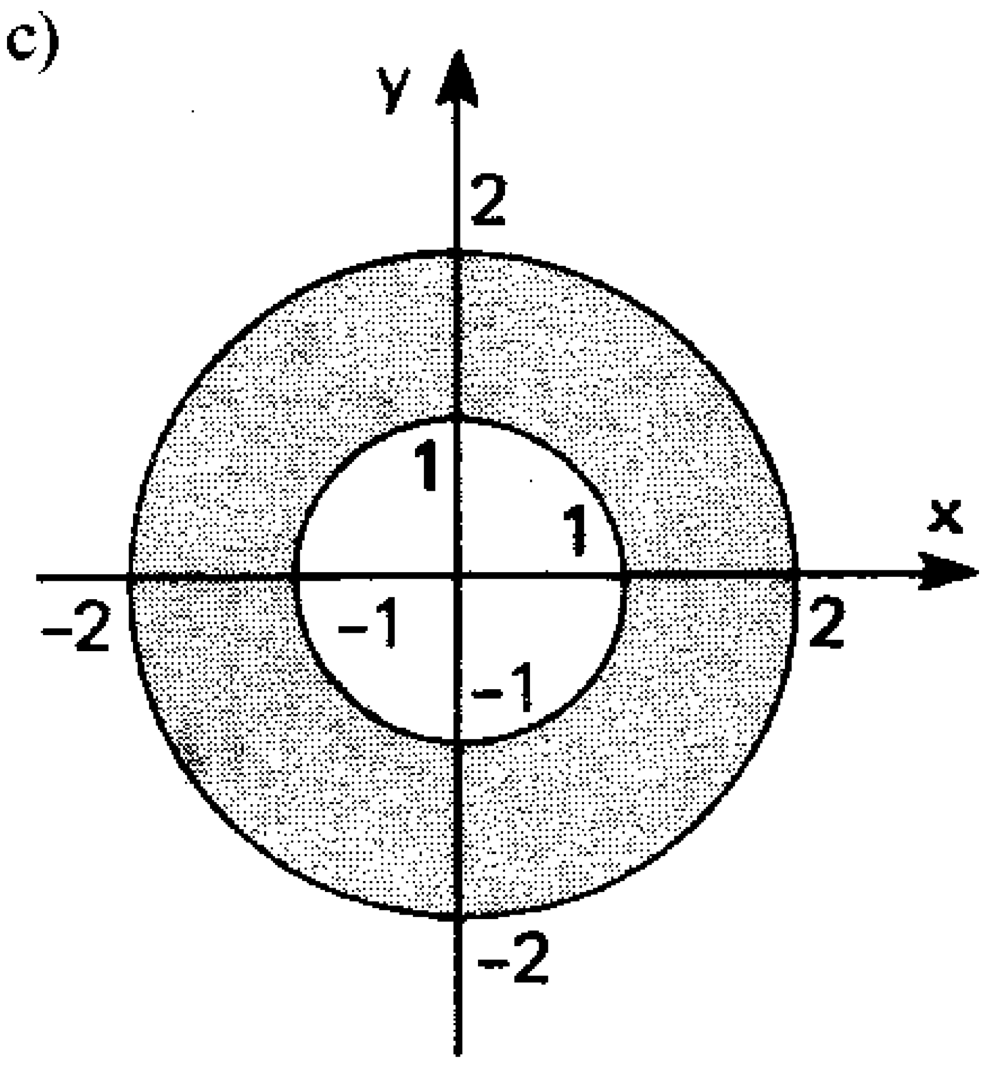
a)



b)



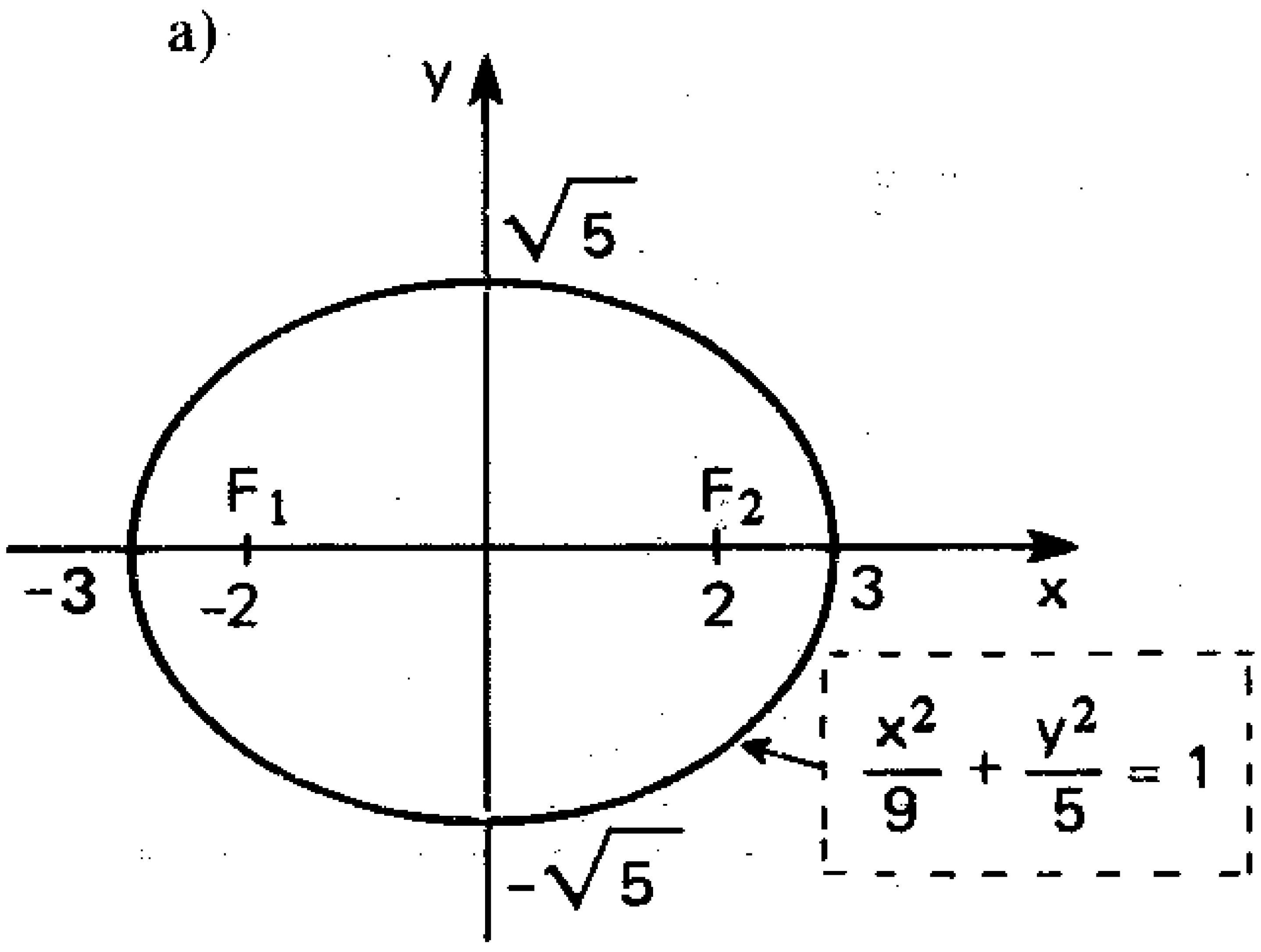
c)



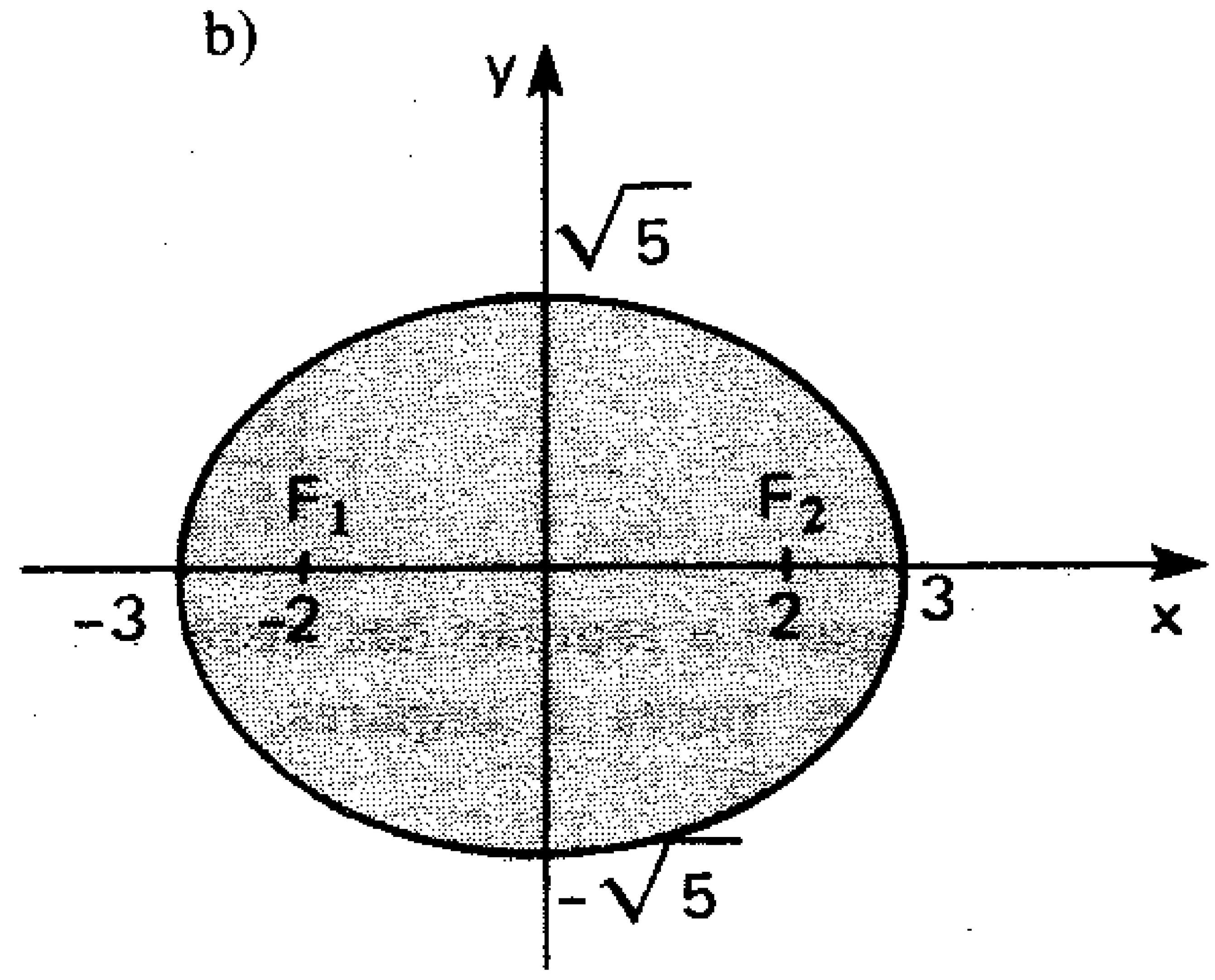
3.14) a) o ponto de coordenadas $(-3; 4)$
b) reta de equação $4x + 6y - 5 = 0$
c) circunferência de centro $\mathbf{C}(1; -2)$ e raio $r = 2$
d) círculo de centro $\mathbf{C}(1; -2)$ e raio $r = 2$

3.15)

a)



b)



3.16) $|z| = 2\sqrt{2}$

3.17) $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 4$

3.20) Escrevendo $|z - w|$ como $|z + (-w)|$ e utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$|z - w| = |z + (-w)| \leqslant |z| + |-w|$$

Assim,

$$|z - w| \leqslant |z| + |(-1) \cdot w|$$
$$|z - w| \leqslant |z| + |-1| \cdot |w|$$

Logo: $|z - w| \leqslant |z| + |w|$

3.21) Pela desigualdade triangular, podemos escrever:

$$|z_1 + (z_2 + z_3)| \leqslant |z_1| + |z_2 + z_3| \qquad \text{(I)}$$

e

$$|z_2 + z_3| \leqslant |z_2| + |z_3| \qquad \text{(II)}$$

Somando membro a membro (I) e (II), temos:

$$|z_1 + (z_2 + z_3)| + |z_1 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2 + z_3| + |z_2| + |z_3|$$

Logo: $|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$

CAPÍTULO 4

4.1) a) $z = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

c) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

d) $z = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$

f) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

g) $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

h) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

4.2) a) $z = 3 + 3\sqrt{3}i$

b) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $z = -\sqrt{3} - i$

4.3) Escrevendo $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, temos: $x^2 = \rho^2(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + i \cdot 2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta)$.

Como $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$ e $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$, vem:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Logo: o argumento de z^2 é 2θ.

4.4) Sejam $z_1 = \rho(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$.
Como $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, podemos escrever:

$$z_2 = \rho[\cos(2\pi - \theta_1) + i \operatorname{sen}(2\pi - \theta_1)]$$

Mas, $\cos(2\pi - \theta_1) = \cos\theta_1$ e $\operatorname{sen}(2\pi - \theta_1) = -\operatorname{sen}\theta_1$.

Então: $z_2 = \rho[\cos\theta_1 + i(-\operatorname{sen}\theta_1)] = \rho\cos\theta_1 - i\rho\operatorname{sen}\theta_1 = \overline{z_1}$

5.5) a) $2^{15} \cdot i$ b) 1 c) $-\dfrac{i}{2^{27}}$ d) $-\dfrac{1}{2^{11}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2^{11}} i$

5.6) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

5.7) a) Sendo $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, temos $z^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$ e, também:

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + 3\,i^2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + i^3 \operatorname{sen}^3\theta = \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}^3\theta &= 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen} 4\theta = 4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$; $\cos 4\theta = \cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$

5.8) Sendo $(1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$, temos:

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Para que $(1 + i)^n$ seja imaginário puro, devemos ter $\cos\dfrac{n\pi}{4} = 0$; logo, $\dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, donde $\dfrac{n}{4} = \dfrac{1}{2} + k$ e, assim, $n = 2 + 4k$, expressão que representa termos de uma PA de razão $r = 4$.

5.9) a) 6 b) 3

5.10) a) 3 b) 9

5.15) a) $\pm(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$

b) $3i$; $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

c) $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,i$

5.16) a) $2i$; $\pm\sqrt{3} - i$

b) 1; -1; $\pm\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

5.17) a) $S = \left\{3;\ -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i;\ -2;\ 1 \pm \sqrt{3}\,i\right\}$

b) $S = \left\{\dfrac{3}{2} + 2i;\ -\dfrac{3}{2}\right\}$

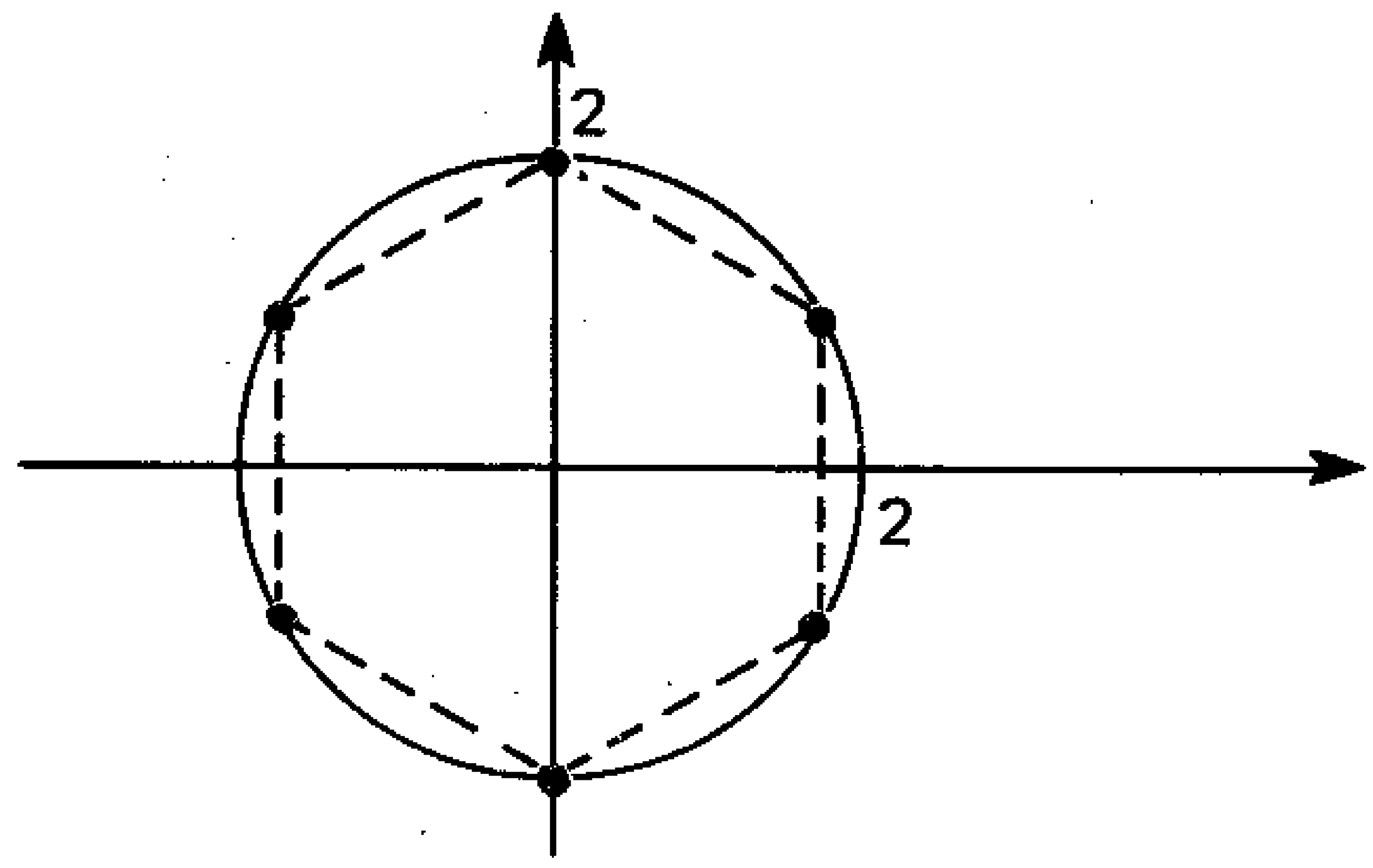
5.18) $-4 \pm 4\sqrt{3}\,i$

5.19) $3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

5.20)



CAPÍTULO 6

6.6) $f(2) = 18$

6.7) $f(1 + 2i) = -12 - 2i$

6.8) 2 é raiz

6.9) $a = 2$, $b = -1$ e $c = -3$

6.10) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

6.11) zero

6.12) $a = -1$ e $b = 0$

6.13) Temos, sucessivamente:

$$\frac{b}{2}x_1^2 + \frac{a}{3}x_1^3 + \frac{b}{2}x_2^2 + \frac{a}{3}x_2^3 = 2\left[\frac{b}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \frac{a}{3}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3\right]$$

$$\frac{b}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{a}{3}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{b}{2}\,\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + \frac{a}{3}\,\frac{(x_1 + x_2)^3}{4}$$

$$\frac{a}{3}\left[x_1^3 + x_2^3 - \frac{(x_1 + x_2)^3}{4}\right] + \frac{b}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}\right] = 0$$

$$a[x_1(x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 - x_2^2)] + b(x_1 - x_2)^2 = 0$$

e, sendo $x_1 \neq x_2$:

$$a[x_1(x_1 + x_2) - x_2(x_1 + x_2)] + b(x_1 - x_2) = 0$$
$$a[(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)] + b(x_1 - x_2) = 0$$
$$a(x_1 + x_2) + b = 0, \text{ etc.}$$

7.8) $a = 8$, $b = -9$ e $c = 8$

7.9) a) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$
b) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$

7.10) a) $P(0) = 3$, $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$
b) $\partial[P(x)] = \partial[P(2 - x)]$

$$\left.\begin{array}{l} \partial[P(x) + x_1 \cdot P(2 - x)] = 2 \\ \partial[x \cdot P(2 - x)] < \partial[P(x)] \end{array}\right\} \Rightarrow \partial[x_1 \cdot P(x)] = 2 \Rightarrow \partial[P(2 - x)] = 1$$

e daí: $\partial[P(x)] = 1$

7.11) $3 \leqslant n \leqslant 6$

7.12) $b = 3$, $c = d = 2$

7.13) Efetue as operações.

7.14) $a = \dfrac{16}{3}$ e $b = \dfrac{16}{9}$

7.15) 1.°) Desenvolva os quadrados e aplique o resultado do exercício 7.4: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$.

2.°) Aplique o item 1.°.

7.16) Observe que a soma S_n dos **n** primeiros termos de uma PA é um polinômio em **n**; identifique-o com $\dfrac{1}{2}n^2$. Daí: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $r = 1$.

7.17) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x$; veja exercício 7.3.

7.18) $P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}x$; veja exercício 7.3.

7.19) $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = \dfrac{1}{k}, c = \dfrac{1}{k}\right)$ ou $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = -\dfrac{2}{k}, c = \dfrac{1}{k}\right)$ ou
$\left(a = \dfrac{1}{k}, b = 0, c = 0\right)$ ou $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = -\dfrac{1}{k}, c = 0\right)$

7.20) $(p = 0$ e $q = 0)$ ou $(p = 1$ e $q = -2)$

7.21) Substitua **x** por 1, 2, 3 e 4; daí $A = 1$, $B = 6$, $C = 7$ e $D = 1$.

7.22) $A = -\dfrac{1}{3}$ e $B = C = \dfrac{1}{3}$

7.23) $A = \dfrac{1}{2}$ e $B = -\dfrac{1}{2}$

7.24) Sejam: $p(x) = a_m x^m + \dots$ e $q(x) = b_n x^n + \dots$

Como $p(x)$ e $q(x)$ não são nulos, tem-se $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$.

O coeficiente de x^{m+n} em $p(x) \cdot q(x)$ é $a_m \cdot b_n$ e $a_m \cdot b_n \neq 0$, pois $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$. Então, $p(x) \cdot q(x)$ não é nulo.

7.25) Sejam: $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_i x^i + \dots$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_i x^i + \dots$ e $h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_i x^i + \dots$

O coeficiente de x^i em $p(x) \cdot q(x)$ é $u_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$.

O coeficiente de x^i em $[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x)$ é:

$$\sum_{i=0}^{n} u_i c_{n-i} = u_0 c_n + u_1 c_{n-1} + \dots + u_n c_0 =$$
$$= a_0 b_0 c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) c_0$$

Obtém-se, assim, uma soma da forma $\sum\limits_{j_1 + j_2 + j_3 = n} a_{j_1} \cdot b_{j_2} \cdot c_{j_3}$

Se calcularmos o coeficiente de x^i no produto $p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$, chegaremos ao mesmo resultado.

7.26) Sejam $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots$ e $h(x) = c_0 + c_1 x + \dots$

O coeficiente de x^i em:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ})\ p(x) \cdot h(x) \text{ é } \sum\limits_{k=0}^{i} a_k c_{i-k} \\[2ex] 2.^{\circ})\ q(x) \cdot h(x) \text{ é } \sum\limits_{k=0}^{i} b_k c_{i-k} \\[2ex] 3.^{\circ})\ p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x) \text{ é } \sum\limits_{k=0}^{i} (a_k c_{i-k} + b_k c_{i-k}) \\[2ex] 4.^{\circ})\ [p(x) + q(x)] \cdot h(x) \text{ é } \sum\limits_{k=0}^{i} (a_k + b_k) c_{i-k} \end{array}\right\} \text{iguais, pois em } \mathbb{C} \text{ vale a distributividade}$$

7.27) Substitua **x** por 1 e -1: $\dfrac{3^n + 1}{2}$.

CAPÍTULO 8

8.9) a) $Q(x) = x - 4$ e $R(x) = 3x + 2$

b) $Q(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$ e $R(x) = 11x - 10$

c) $Q(x) = 2x^2 + 3x + 11$ e $R(x) = 25x - 5$

d) $Q(x) = x^2 + x - 2$ e $R(x) \equiv 0$

8.10) $a = 4$ e $b = 6$

8.11) $a = -2$ e $b = 4$

8.12) $m = 5$ e $q = 0$

8.13) a) $x^2 - ax + (a^2 - a - 2)$ b) $b = -a^2 + 3a + 2$ e $c = -2a^2 + 2a + 4$

8.14) Efetue a divisão; $R(x) \equiv 0 \Rightarrow c = b^2$ e $d = b^3$, e daí a tese.

8.15) $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $a(x) = x \cdot b(x)q'(x) + r(x)$, e então:

$$b(x) \cdot q(x) + r(x) = x \cdot b(x)\, q'(x) + r(x)$$

e daí a tese.

8.16) $\frac{1}{2} \cdot Q(x)$; o resto é o mesmo.

8.17) $m = -23$, $n = 9$ e $p = 21$

8.18) $2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

8.19) Efetue a divisão e $R(x) \equiv 0$.

8.20) $p = \pm\sqrt{2}$ e $q = 1$

8.21) Efetue a divisão de $A(x)$ por $C(x)$ e $R(x) \equiv 0$; em seguida, efetue a divisão de $B(x)$ por $C(x)$ e compare os restos.

8.22) $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

8.23) Observe que $x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Ache o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $x^3 + 1$, usando o exercício 8.6; $f(x) \equiv (x^3 + 1) \cdot (x + 2) + r(x)$, e daí $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1$.

8.24) $a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$

CAPÍTULO 9

9.18) a) $q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ e $r = 5$
b) $q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$ e $r = -327$
c) $q(x) = 4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)$ e $r = 8 - 6i$
d) $q(x) = x^2 - 2ix - 5 - 2i$ e $r = -9 + 8i$
e) $q(x) = 2x^2 + 4x + 19$ e $r = 162$
f) $q(x) = 2x - 5$ e $r = 28$

9.19) $f(x)$ é da forma $ax^2 + bx + c$; $f(1) = 1$, $f(2) = 8$ e $f(3) = 27$; daí $f(x) = 6x^2 - 11x + 6$

9.20) $f(-2) = 0$ e $m = -73$

9.21) $4x^4 + 13x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

9.22) $\begin{cases} \textbf{n par}: & q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-1} \text{ e } r = 0 \\ \textbf{n ímpar}: & q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-1} \text{ e } r = -2a^n \end{cases}$

9.23) $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}$ e $r = 2a^n$

9.24) $a = 2$ e $b = -5$

9.25) **p** par e **q** ímpar

9.26) a) Verifique que $f(1) = f(2) = 0$.

b) Verifique que $f(0) = f(-1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

9.27) Verifique que $f(-a) = f(-b) = 0$.

9.28) $q(x) = 2x^2 - 1$

9.29) Veja exercício 9.12; $r(x) = x + 2$.

9.30) Veja exercício 9.12; $r(x) = i \cdot \frac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot x + \frac{A(i) + A(-i)}{2}$

9.31) Veja exercício 9.15; $r(x) = -6x + 13$.

9.32) $-\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

9.33) $x^2 - 3x + 1$

9.34) 7; 1

9.35) $(ax - b) \cdot q_1(x) \equiv (bx - a) \cdot q_2(x)$; substituindo x por $\frac{b}{a}$, vem $q_2\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ e, substituindo x por 1, vem $q_1(1) + q_2(1) = 0$.

9.36) a) r b) $\frac{-br}{a}$ c) $\frac{b^2r}{a^2}$

9.37) $b - a$

9.38) Veja exercício 9.16: $-(x-1)(x-2)(x-3) + 6$.

9.39) $a = 3$ e $b = -4$

9.40) $q(x) = x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3$

9.41) Aplique Briot-Ruffini: $q(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + n$.

9.42) Aplique Briot-Ruffini: $q(x) = x^{n-2} + 2ax^{n-3} + 3a^2x^{n-4} + \ldots + (n-1)a^{n-2}$.

9.43) Aplique Briot-Ruffini: $a = 2$, $b = 1$ e $m = 3$.

9.44) O desenvolvimento do determinante nos dá $-2(x-1)^3$.

9.45) $p = 2$ e $a = 10$

9.46) $2x^3 + x^2 - 8x + 15$

9.47) Note que $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1) = (x+1)(x+i)(x-i)$; verifique que $p(-1) = p(i) = p(-i) = 0$.

9.48) $x^n(x^2 + ax + b) \equiv (x-2)^2q(x) + 2^n(x-2)$; substituindo **x** por 2: $2^n(4 + 2a + b) = 0$ e daí $b = -2a - 4$; então:

$$\begin{aligned} x^n(x^2 + ax - 2a - 4) &\equiv (x-2)^2q(x) + 2^n(x-2) \\ x^n[(x^2 - 4) + a(x-2)] &\equiv (x-2)^2q(x) + 2^n(x-2) \\ x^n(x-2)(x + 2 + a) &\equiv (x-2)^2q(x) + 2^n(x-2) \\ x^n(x + 2 + a) &\equiv (x-2)q(x) + 2^n \end{aligned}$$

Substituindo **x** por 2: $a + 4 = 1$ e $a = -3$ e $b = 2$.

9.49) Note que $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$; calcule $f(i)$ e $f(-i)$ usando a fórmula de **De Moivre**.

CAPÍTULO 10

10.6) a) $15x^2 - 6x + 1$
b) $x^2 - 6x^3 + 13x^4 - 12x^5 + 4x^6$
c) $3x^2 + 10x + 5$
d) $30x(5x^2 + 7)^2$
e) $5(1 + 5x - 8x^2)^4 \cdot (5 - 16x)$
f) $bm(a + bx)^{m-1}$

10.7) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

10.8) $a = 21$, $b = 51$ e $c = -77$ $\left(k = -\frac{7}{3}\right)$

10.9) $x^2 + 2x + 3$ ou $-x^2 - 2x - 3$

10.10) a) $20x^3$, $60x^2$, $120x$ b) 72

10.11) Derive termo a termo, usando o exercício 10.4.

10.12) Propriedade III

a) Demonstramos que a propriedade vale para $p(x) = x^h$ e $q(x) = x^k$
Temos, $p'(x) = h \cdot x^{h-1}$ e $q'(x) = k \cdot x^{k-1}$
Também $p(x) \cdot q(x) = x^{h+k}$ e $[p(x) \cdot q(x)]' = (h + k)x^{h+k-1}$
Temos, então: $p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x) = hx^{h-1} \cdot x^k + kx^{k-1} \cdot x^h =$
$= (h + k)x^{h+k-1} = [p(x) \cdot q(x)]'$

b) Suponhamos agora os polinômios: $p(x) = \sum\limits_{h=0}^{n} a_hx^h$ e $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_kx^k$

Então: $p(x) \cdot q(x) = \sum\limits_h \sum\limits_k a_hb_kx^hx^k$ e daí:

$$[p(x) \cdot q(x)]' = \sum_h \sum_k a_hb_k(x_hb_k)' \overset{1.^\circ}{=} \sum_h \sum_k a_hb_k[(x^h)'x^k + x^h(x^k)'] =$$

$$= \sum_h a_h(x^h)' \sum_k b_kx^k + \sum_h a_hx^h \sum_k b_k(x^k)' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

Propriedade IV

Inicialmente, demonstramos pelo **Método da Indução Matemática** que se:
$p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot q_3(x) \dots q_n(x)$

tem-se: $p'(x) = q_1'(x) \cdot q_2(x) \dots q_n(x) + q_1(x) \cdot q_2'(x) \cdot q_3(x) \dots q_n(x) +$
$+ q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot q_3'(x) \dots q_n(x) + \dots + q_1(x) \cdot q_2(x) \dots q_n'(x)$

Fazendo $q_1(x) = q_2(x) = \dots = q_n(x) = q(x)$ vem a tese.

10.13) a) $x^2 - 2x + 3$

b) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2$

c) $x + 3$

d) $2x + 7$

e) $x^2 - 2x + 5$

10.14) $(x + 1)(x - 1)$

10.15) $(x - 1)^2 \cdot x$

10.16) 1; 3

10.17) $m = 21$ e $n \neq -8$

10.18) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

10.19) $x^{15} - x^{14} - x^{13} + x^{12}$; $x - 1$

CAPÍTULO 11

11.14) $P(x) = (2 + i)(x - 1)(x + i)$

11.15) a) 13

b) 13

c) 4

d) 5 (simples); -6 (tripla); $\sqrt{2} - 4$ (dupla) e $\frac{3}{4} + \frac{2i}{5}$ (multiplicidade 7)

e) $\sqrt{3}$

11.16) $S = \{-4; 2; 3\}$

11.17) $P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

11.18) $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

11.19) $A(x) = (x + 2)^2(x - 3i)(x + 3i)$

11.20) $B(x) = 3(x - 2 + i)(x - i)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

11.21) $P(x) = (x - 4)^2(x + 3)$

11.22) raiz tripla

11.23) $p = 10$ e $q = -25$

11.24) $t = 9$; $s = \frac{2}{3}$; $r \neq 6$

11.25) $k = -\frac{3}{2}$

11.26) $k \leqslant 6 - 2\sqrt{6}$ ou $k \geqslant 6 + 2\sqrt{6}$

11.27) $P(x) = 5x^4 + (10 - 10i)x^3 - (20i + 5)x^2 - 10x$

11.28) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 8$

11.29) $S = \{4;\ -2;\ 3\}$

11.30) $S = \{0;\ 2;\ 3;\ 4\}$

11.31) $S = \{2;\ 3\}$

11.32) $S = \{2;\ -1 + i;\ -1 - i\}$

11.44) $P(x) = (x + 3)^2 (x - 3)(x + 2i)(x - 2i)$

11.45) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -3\}$

11.46) $S = \{\sqrt{3};\ -2\}$

11.47) $S = \{1;\ w;\ w^2;\ w^4;\ w^5\}$; onde $w = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

11.48) $S = \left\{\frac{3}{1-w};\ \frac{3}{1-w^2};\ \frac{3}{1-w^3};\ \frac{3}{1-w^4}\right\}$, onde $w = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$

11.49) $S = \{2i;\ -2i;\ 2;\ 3\}$

11.50) a) $\frac{3^n - 1}{2}$ b) n

11.51) $P(x) = (x - 3)(x - 2 + i)(x - 1 + i)$

11.52) α, β e γ

11.53) 20

11.54) Sendo $P(x) = A(x) - B(x)$, $P(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a **n** que se anula para os valores distintos $r_1, r_2, \dots r_n$. Portanto:

$$P(x) = k(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) \qquad (I)$$

onde **k** é uma constante. Temos, ainda, $P(r_0) = 0$. Mas, como o valor $x = r_0$ não anula nenhum dos fatores $x - r_j$ em (I), concluímos que $k = 0$ e, portanto, $P(x) \equiv 0$. Assim:

$$P(x) \equiv A(x) - B(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A(x) \equiv B(x)$$

CAPÍTULO 12

12.7) $S = \{-2;\ -3\}$

12.8) $S = \{1 - i;\ 3\}$

12.9) $S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

12.10) $k = 20$ ou $k = 16$

12.11) $k = 20$; $S = \{-2; -1\}$

12.12) $(k = 5 \text{ e } t = 8)$ ou $\left(k = \frac{7}{4} \text{ e } t = -\frac{5}{16}\right)$

12.13) $k = \frac{40}{3}$

12.14) $k \neq -2$

CAPÍTULO 13

13.10) a) 4 b) 3

13.11) 13

13.12) a) V b) V c) F d) V e) F f) V

13.13) a) V b) F c) F d) V

13.14) $P(x) = -2x^5 + 14x^4 - 36x^3 + 44x^2 - 34x + 30$

13.15) $A(x) = \frac{1}{2}x^9 - x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 32x^5 - 16x^4 + 48x^3$

13.16) $S = \{3 + i; 3 - i; -1; 4\}$

13.17) $S = \{0; 1; 2; 4i; -4i\}$

13.18) $S = \{-1; 2; i; -i\}$

13.19) $S = \{1; -2; 5; 2i; -2i\}$

13.20) $S = \{-1; 2; 1; 2i; -2i\}$

13.21) não

13.22) a) $m = 30$ b) $-\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$; $-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$; -3

13.23) $m = 30$ ou $m = 24$ ou $m = -240$

13.24) $S = \left\{1 - \sqrt{2}\,i; 1 + \sqrt{2}\,i; -3; -\frac{1}{2}\right\}$

13.25) $S = \{0; 2 + i; 2 - i; 2i; -2i; 3; -1\}$

14.27) a) $S = \{3;\ 1 + i;\ 2 - i\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{3};\ 2;\ -2\right\}$

c) $S = \{3;\ -2\}$

d) $S = \{5 + 2i;\ 5 - 2i;\ 4\}$

e) $S = \left\{2i;\ -2i;\ -\frac{3}{2}\right\}$

f) $S = \{-3;\ 4;\ -4\}$

g) $S = \left\{3;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$

h) $S = \left\{1;\ -1;\ \frac{5}{2}\right\}$

i) $S = \{4;\ -2;\ -3\}$

j) $S = \left\{-4;\ -\frac{1}{2}\right\}$

k) $S = \left\{6;\ 3;\ \frac{1}{2}\right\}$

l) $S = \{8;\ 6;\ -2\}$

14.28) a) $k = 12$ b) $S = \left\{\frac{3}{2};\ -1;\ 4\right\}$

14.29) $3x^3 - (10 + 3i)x^2 + (9 + 7i)x - (2 + 2i) = 0$

14.30) $x^3 - (12 - i)x^2 + (45 - 10i)x - (50 - 25i) = 0$

14.31) $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

14.32) $k = 0$

14.33) $k = \frac{1}{2}$

14.34) a) $-\frac{4}{5}$

b) $-\frac{14}{9}$

c) $-\frac{14}{25}$

d) $-\frac{254}{81}$

e) $\frac{116}{27}$

14.35) $\frac{12 + 8i}{9}$

14.36) $k = \frac{9}{2}$

14.37) a) $-\frac{1}{4}$

b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $-\frac{3}{8}$

e) $\frac{7}{8}$

f) $-\frac{1\,743}{256}$

g) $\frac{339}{64}$

h) $\frac{7}{32}$

14.38) $\dfrac{-23-8i}{16}$

14.39) a) $x^3 - 2x^2 + \dfrac{9}{2}x - 9$

b) $x^3 + 2x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{64}{9}$

c) $x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}$

14.40) $x^2 - 8x - 20$

14.41) 0

14.42) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes, temos:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{t} + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{k} = 0 \Rightarrow k = -\frac{t}{2}$$

mas, como as raízes são reais, $t > 0$ e, portanto, $k < 0$.

14.43) $-2;\ \dfrac{6}{5} + \dfrac{8}{5}i;\ \dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i$

14.44) a) $S = \{-3;\ 1;\ 5\}$

b) $S = \left\{\dfrac{1}{2};\ 2;\ 8\right\}$

c) $S = \{-1;\ 3;\ 7\}$

d) $S = \{-4;\ -2;\ -1\}$

e) $S = \left\{-4;\ 4;\ \dfrac{4}{3}\right\}$

f) $S = \{-1;\ 3;\ 5;\ 9\}$

14.45) $k = -4$

14.46) $S = \{2;\ -2;\ 3 + i;\ 3 - i\}$

14.47) $S = \left\{3;\ \dfrac{1}{3};\ -1;\ -3\right\}$

14.48) $S = \left\{1;\ -1;\ 6;\ \dfrac{1}{2}\right\}$

14.49) a) $S = \left\{\dfrac{1}{2};\ -1;\ 2;\ 4\right\}$

b) $k = -11$ e $m = 9$

14.50) $4;\ 3;\ \sqrt{7}$

14.51) $S = 2\sqrt{4k + m - 64}$

14.52) a) 4 b) -1 c) 16

14.53) Imaginemos uma equação do terceiro grau cujas raízes são **a**, **b** e **c**. Como $a + b + c = 0$ e $ab + ac + bc = 0$, essa equação é do tipo $x^3 - m = 0$ (onde $m = abc$), isto é, $x^3 = m$. Portanto, **a**, **b** e **c** são as raízes cúbicas do número **m** e, assim, $|a| = |b| = |c|$.

14.54) a) $k^3 - 4mk + 8t = 0$
b) $mk - t = 0$
c) $4k^3 + 27m^2 = 0$
d) $27t^2 - 9mkt + 2m^3 = 0$
e) $k^2n - t = 0$
f) $k^3 - 4km + 8t = 0$

14.55) $a = -1$; $b = -1$; $c = 1$

14.56) -1

14.57) a) -1 b) $+1$

14.58) a) -1 b) $+1$

14.59) $S = \dfrac{n}{w - 1}$

CAPÍTULO 15

15.8) a) ± 1; ± 2; ± 4 b) $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{1}{6}$; $\pm \frac{2}{3}$; $\pm \frac{4}{3}$

15.9) não

15.10) não

15.11) a) $S = \{3; 4; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$
b) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2 + i; 2 - i\right\}$
c) $S = \{0; 1; -2; 4\}$
d) $S = \left\{-2; 3; \frac{4}{3}\right\}$

15.12) $P(x) = (x - 5)(x + 1)(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$

15.13) $x = \sqrt[3]{2} + 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - 1)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$

Os únicos números racionais que poderiam ser raízes desta última equação são ± 1 e ± 3; no entanto, nenhum destes números satisfaz a equação. Portanto, o número dado é irracional.

15.14) Fazendo $a = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ e $b = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$, temos:

$$x = a + b \Rightarrow x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\underbrace{(a + b)}_{x} = a^3 + b^3 + 3abx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} + 3x = 52 + 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - 52 = 0$$

A única raiz real desta equação é o número 4.

15.15) $x = \sqrt[3]{2} + i \Rightarrow x - i = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - i)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 3x^2i + 3xi^2 - i^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = i(3x^2 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^3 - 3x - 2)^2 = [i(3x^2 + 1)]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = -(9x^4 + 6x^2 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 15x^2 + 12x + 5 = 0$

O número $\sqrt[3]{2} + i$ é uma das raízes desta última equação, a qual tem todos os coeficientes inteiros.

15.16) $S = \{2 + i;\ 2 - i;\ -2;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\}$

15.17) $S = \{-2;\ 3i;\ -3i\}$

15.18) $S = \left\{2;\ \frac{1}{2};\ i;\ -i\right\}$

15.19) $S = \{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}\}$

15.20) $S = \left\{-1;\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};\ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2};\ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

15.21) não

15.24) $S = \{2 + \sqrt{3};\ 2 - \sqrt{3};\ i;\ -i\}$

15.25) $S = \{\sqrt{2} + \sqrt{5};\ \sqrt{2} - \sqrt{5};\ -\sqrt{2} + \sqrt{5};\ -\sqrt{2} - \sqrt{5};\ -1\}$

15.26) $S = \{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 2;\ 3\}$

15.27) $2 + \sqrt{5};\ 2 - \sqrt{5};\ i;\ -i$

CAPÍTULO 16

16.5) $a = 2$ e $b = 3$

16.6) $(a = 7$ e $b = 4)$ ou $(a = -7$ e $b = -4)$

16.7) a) $S = \left\{3;\ \frac{1}{3};\ i;\ -i\right\}$

b) $S = \left\{1;\ -1;\ 1 + i;\ 1 - i;\ \frac{1 + i}{2};\ \frac{1 - i}{2}\right\}$

c) $S = \left\{1;\ -1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \left\{2;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{3}\right\}$

16.8) $a = 9$ e $b = -7$

CAPÍTULO 17

17.4) 2

17.5) 1 e 2

17.6) $k = -\frac{3}{2}$ ou $k = -\frac{13}{2}$

17.7) $m = k = -4$

17.8) $\frac{-k - 2}{k}$

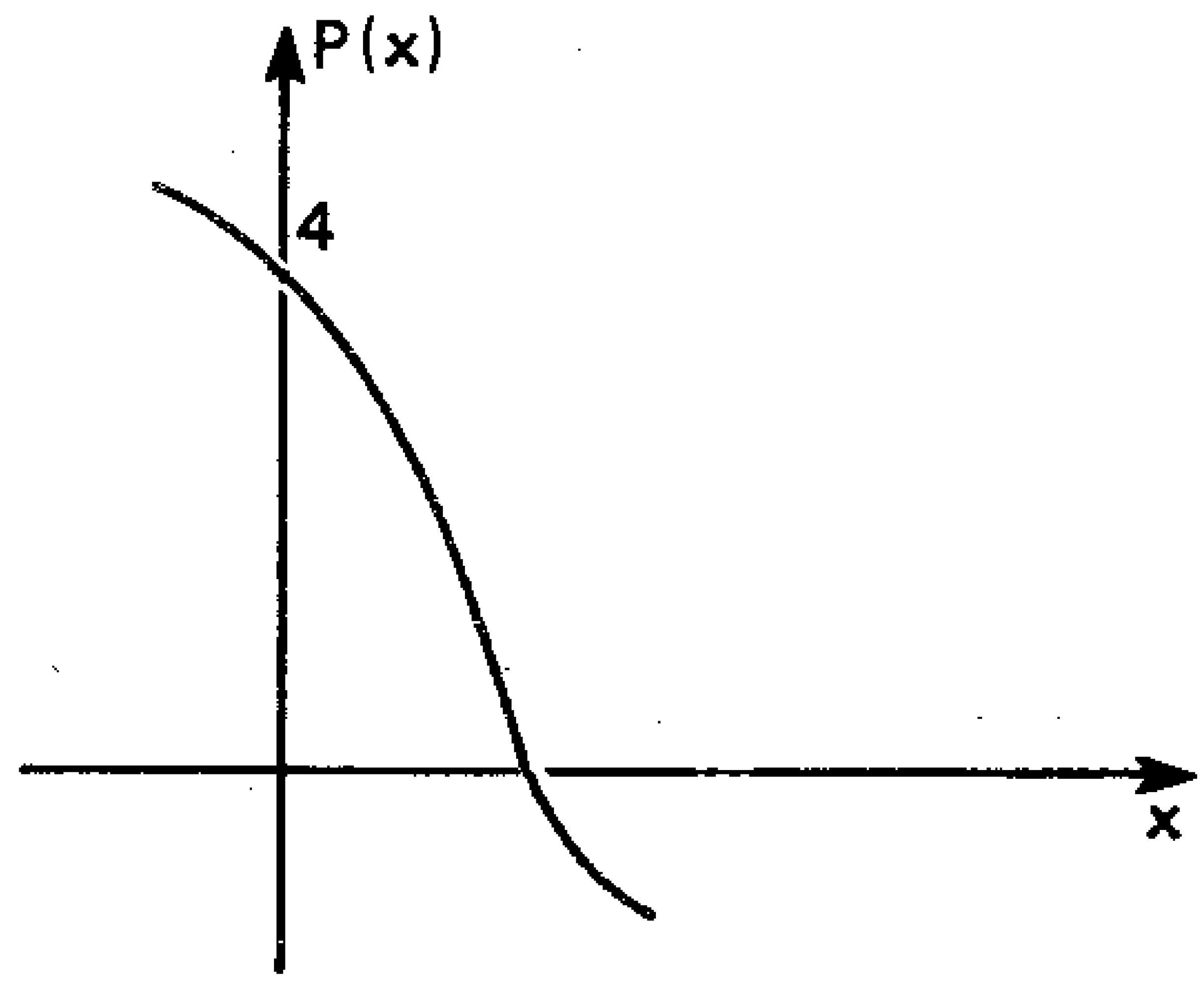
17.11) $S = \{-1;\ 2\}$; -1 é raiz tripla.

17.12) $S = \left\{2;\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$; 2 é raiz tripla.

18.7) $P^{(1)}(x) = 15x^2 - 8x + 2$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto P(x) é sempre crescente.

18.8) $P^{(1)}(x) = -3x^2 + 2x + 3$ é negativo para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, P(x) é sempre decrescente.

18.9) P(x) é de grau ímpar e tem coeficiente do termo de mais alto grau negativo. Além disso, o termo independente é positivo. Assim, seu gráfico é "algo parecido" com:



18.10) a) F	d) F	g) F	j) V
b) V	e) V	h) V	k) V
c) V	f) F	i) F	l) F

18.11) a) $P(x) = 3x^3 - 9x - 6$ b) $P(x) = 3x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 21x - 6$

18.12) $P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 25x - 10$

18.13) a) $k = 7$ ou $k = -20$ b) $-20 < k < 7$ c) $k < -20$ ou $k > 7$

18.18) duas ou nenhuma

18.19) P(1) e P(3) têm sinais contrários, portanto há pelo menos uma raiz real **r** no intervalo dado. O único número racional que pertence ao intervalo dado e poderia ser raiz de P(x) é o número 2, que no entanto não é raiz. Portanto, **r** é irracional.

18.20) $-12 < k < 6$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $\pm\sqrt{23}$

I.2) $R_e(z) = 0$; $I_m(z) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$

I.3) $z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

I.4) Se α e βi fossem raízes (α e β reais), então $\alpha \cdot \beta i = c + di$, donde $c = 0$, contra a hipótese de que **c** é não nulo.

I.5) **Teorema 1**: para $n = 1$ temos:

$$i^{5^n} = i^{5^1} = i^5 = i$$

Teorema 2:

Hipótese: $i^{5^k} = i$

Tese: $i^{5^{k+1}} = i$

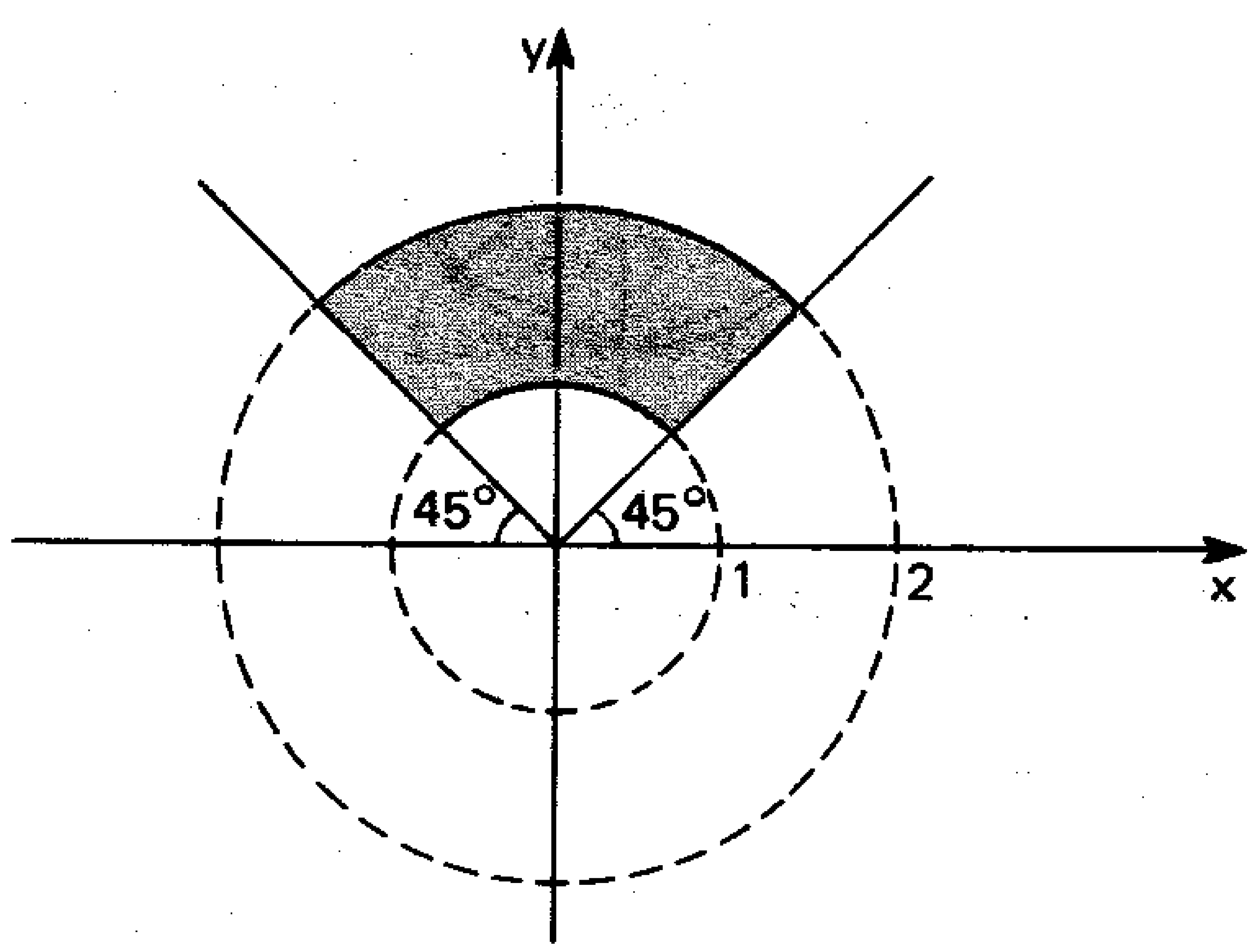
Temos:

$$i^{5^{k+1}} = i^{5^k \cdot 5} = (i^{5^k})^5 = (i)^5 = i$$

I.6) $3 - 3i$

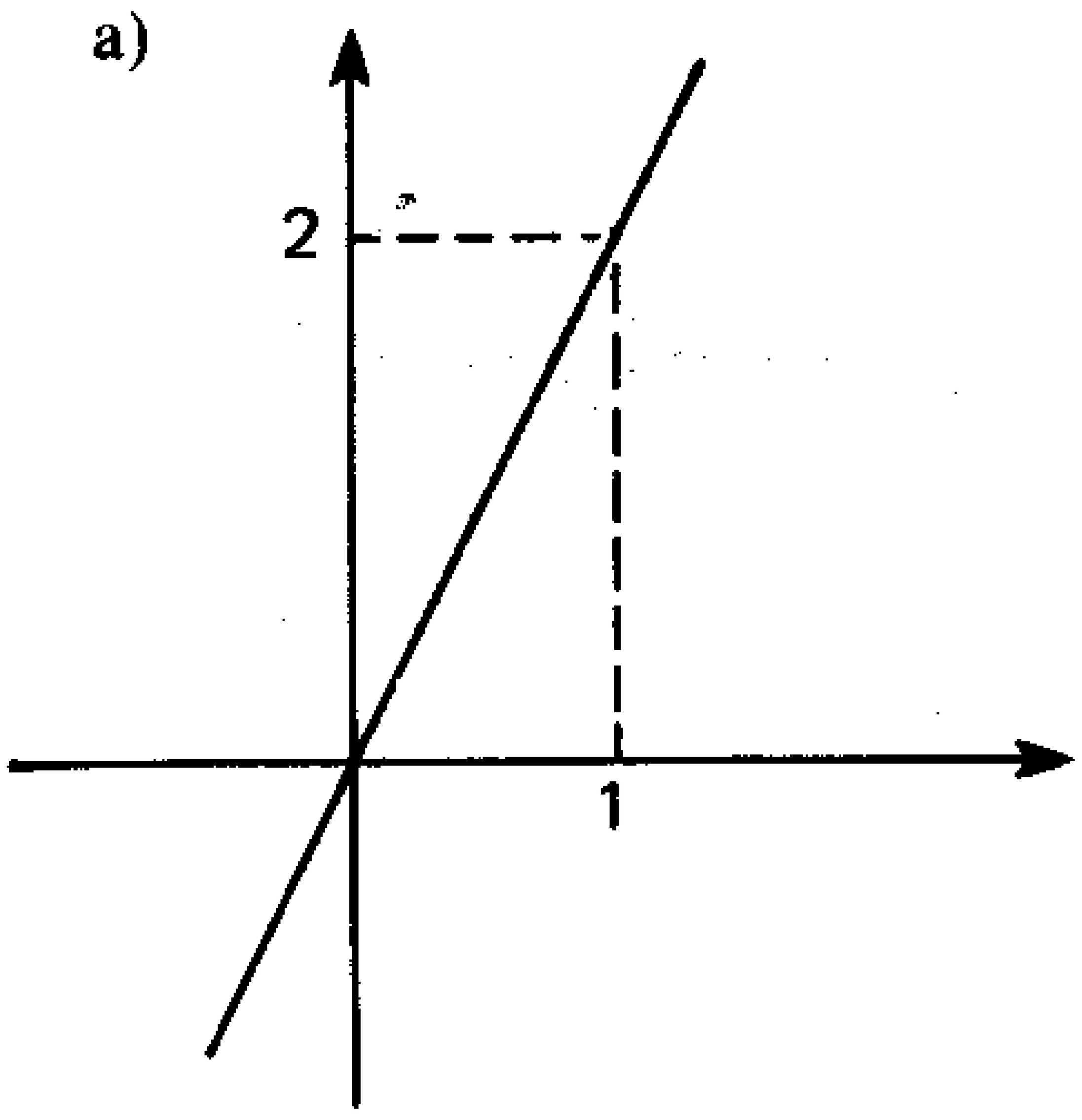
I.7) $2b - a + bi$

I.8)

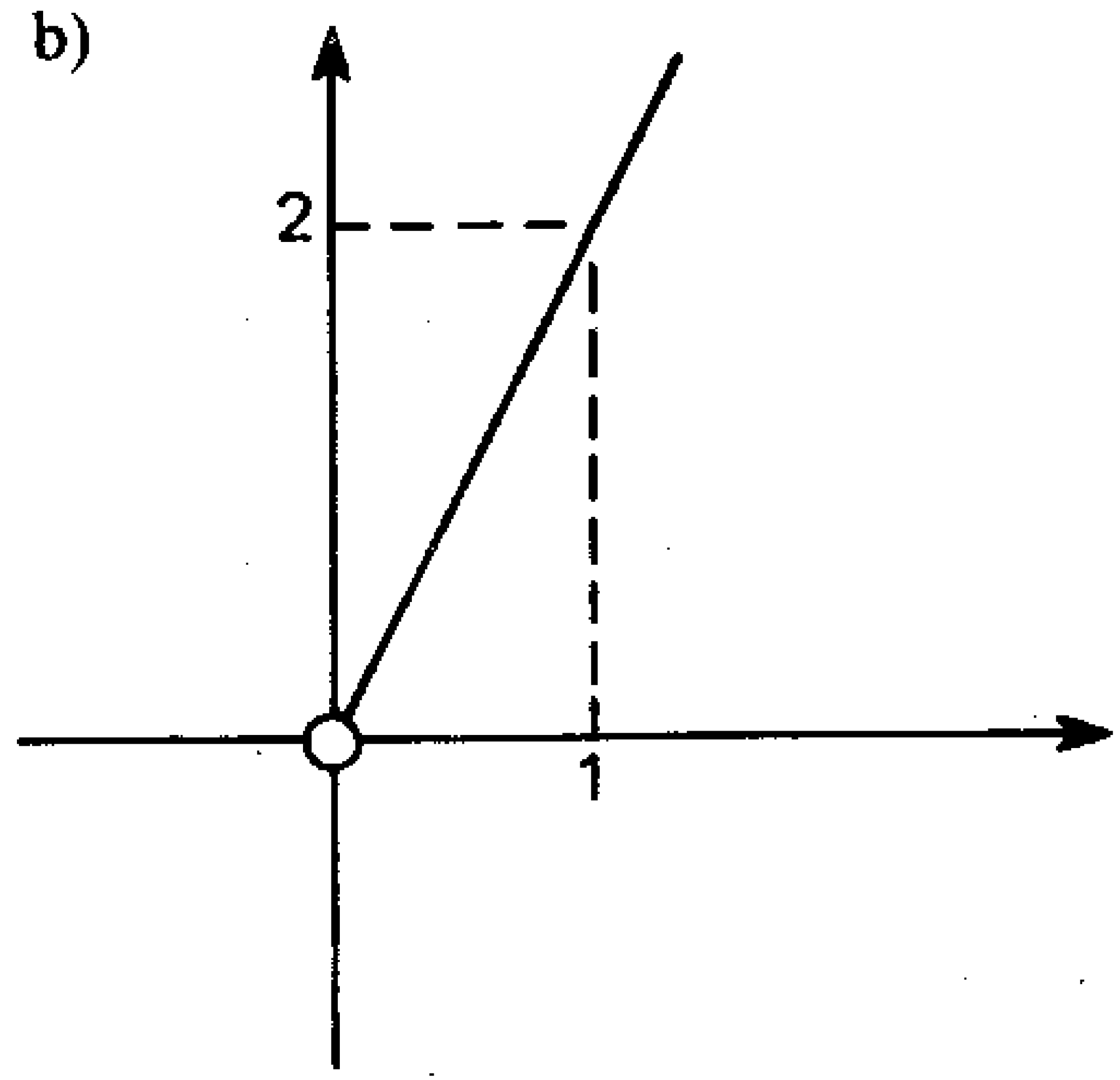


I.9)

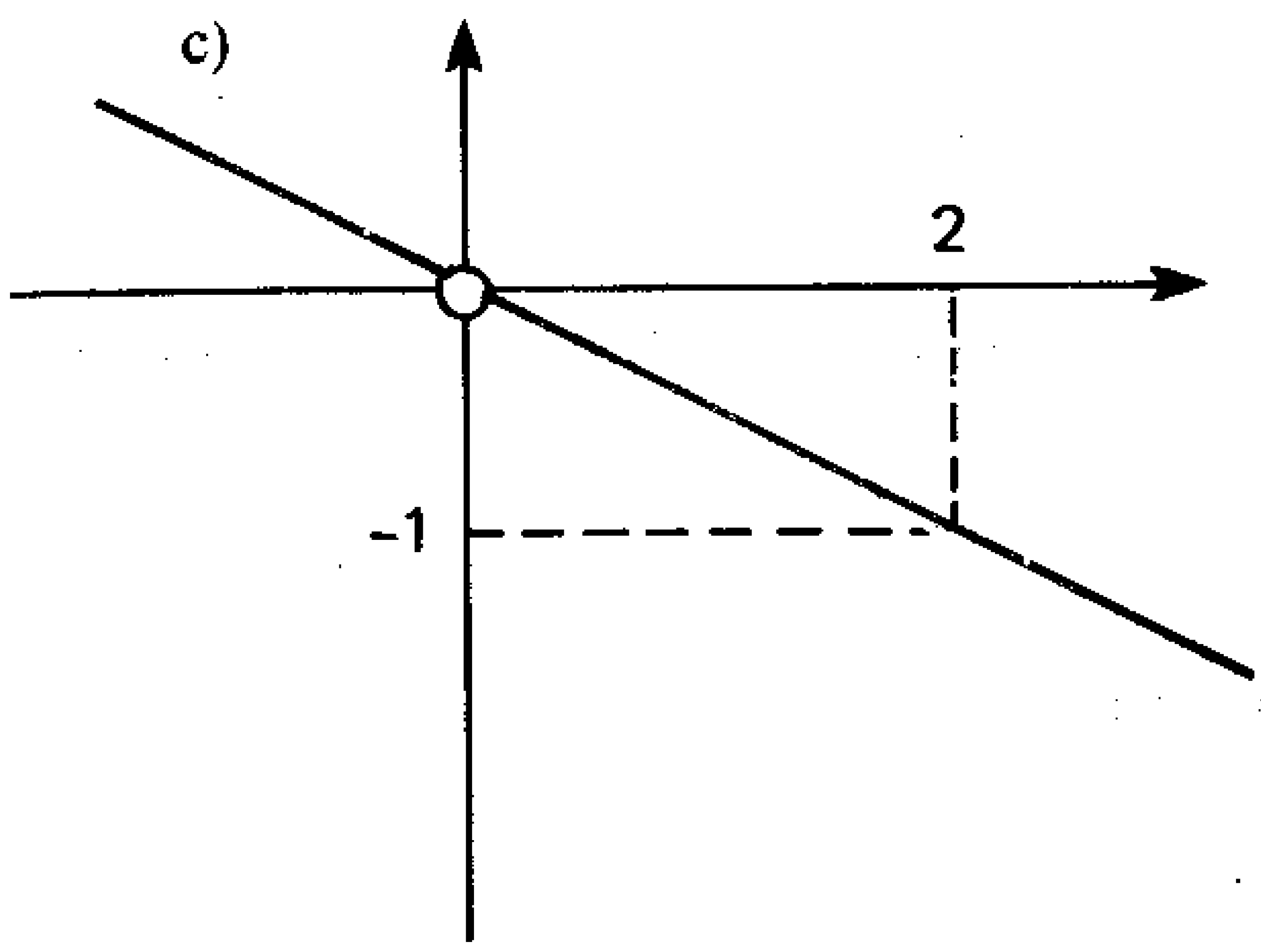
a)



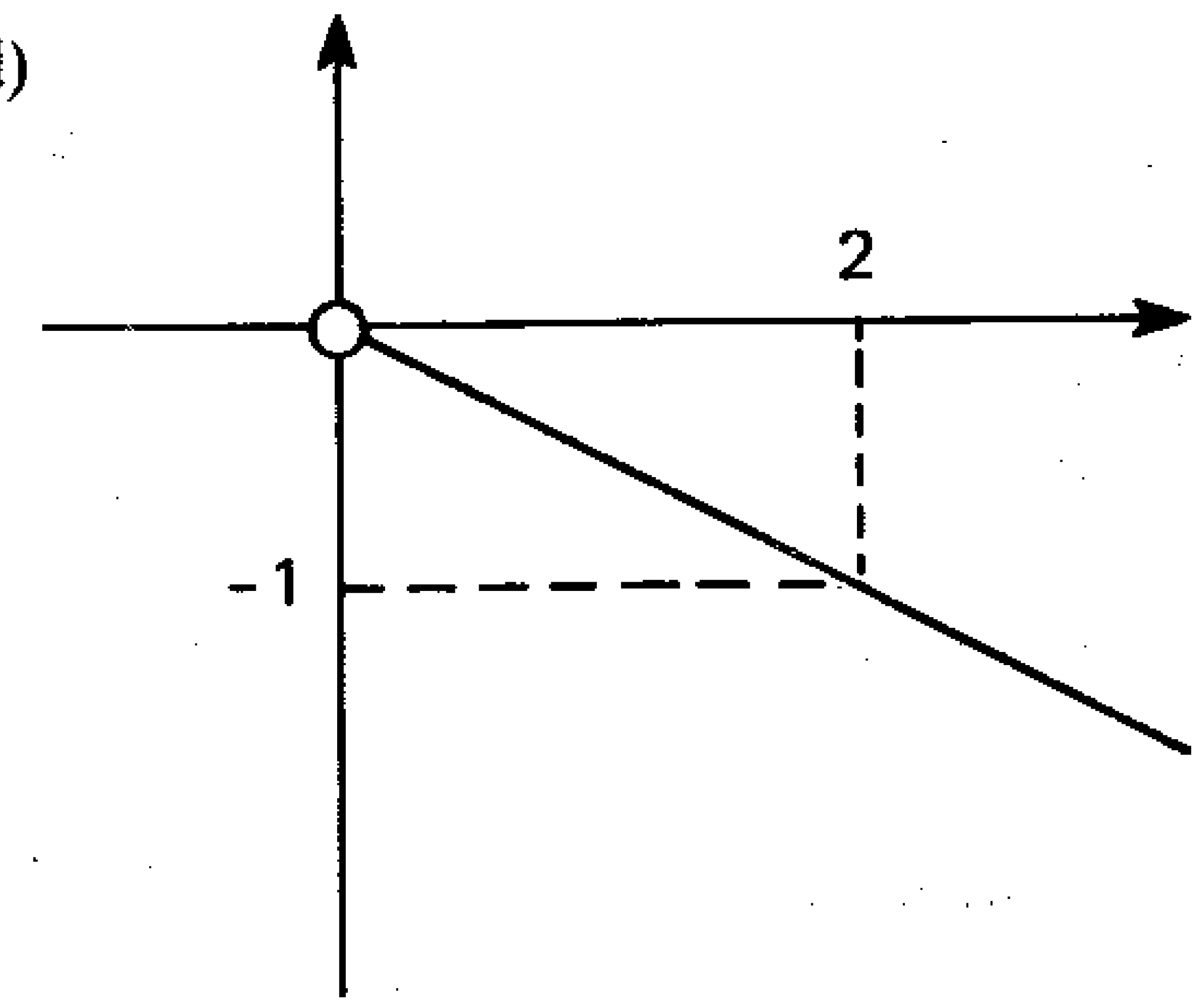
b)



c)



d)

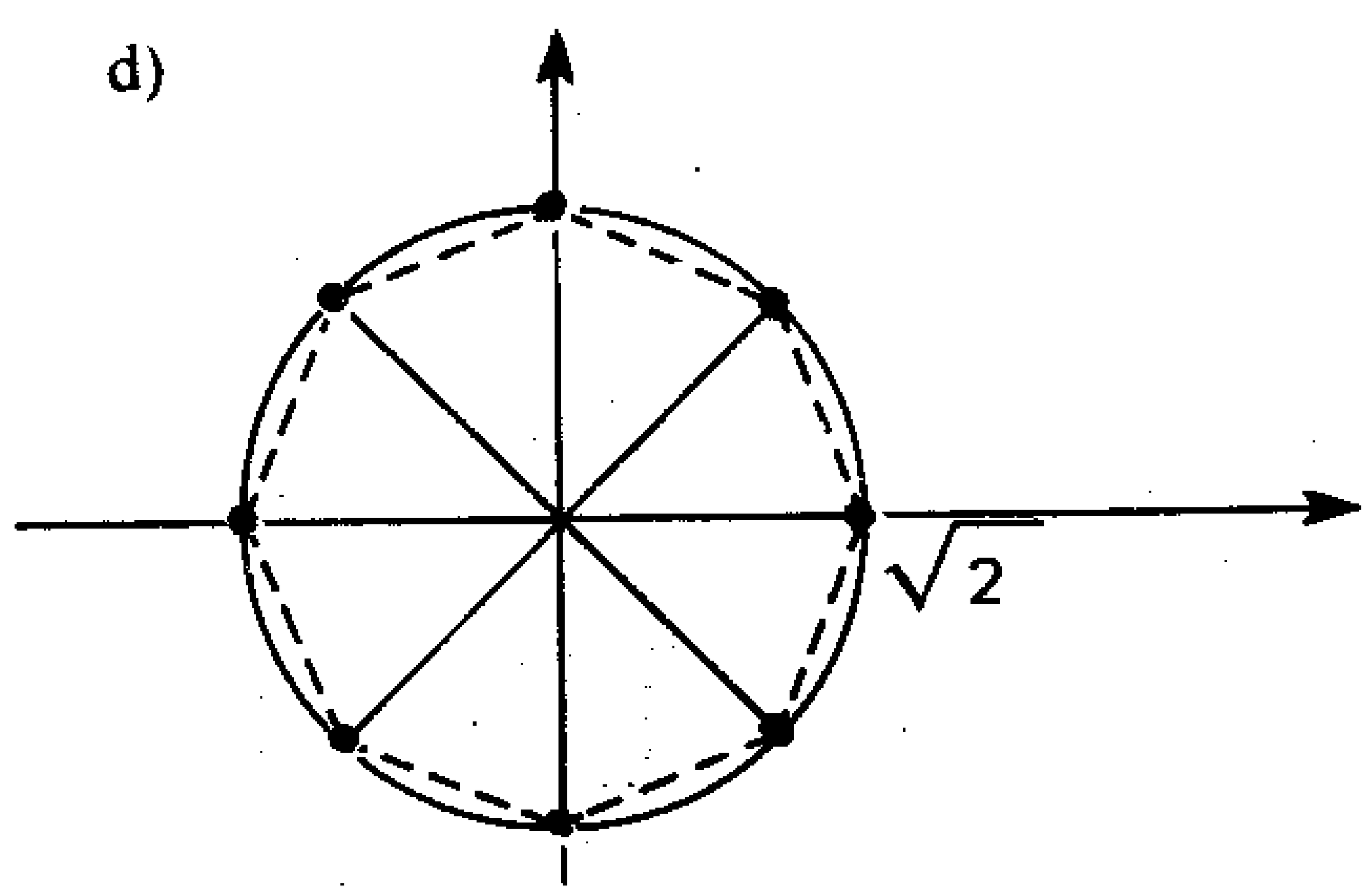


I.10) a) $z = -1 + i$

b) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

c) 2^8

d)



II.1) A é divisor de P; $A < P$ e P é primo; daí $A = 1$.

II.2) $a = 1$ e $b = -1$; $\dfrac{n}{n + 1}$

II.3) Faça $u = x$ e $v = 0$.

II.4) $a = \dfrac{5}{3}$ e $b = \dfrac{1}{3}$

II.5) $(A + B + C) \operatorname{sen} x \cos x + B \operatorname{sen}^2 x + A \cos^2 x - 1 \equiv 0$
Dividindo por $\cos^2 x$:

$$(B - 1) \operatorname{tg}^2 x + (A + B + C) \operatorname{tg} x + (A - 1) \equiv 0$$

e daí: $A = 1$, $B = 1$ e $C = -2$.

II.6) $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{6}$; substitua **n** por 1, 2 e 3.

II.7) 1

II.8) $4x + 7$

II.9) ($p = 0$ e $q = 0$) ou ($p = 0$ e $q = -1$) ou ($p = -1$ e $q = 0$) ou ($p = 1$ e $q = 1$) ou ($p = -2$ e $q = 1$)

II.10) $3x^3 + x^2 + 7x + 1$

II.11) Faça $x - 2 = y$ e divida $y^n - 1$ por $y - 1$ pelo Briot-Ruffini.

II.12) a) $m = \dfrac{P(a) - P(b)}{a - b}$ e $n = \dfrac{a\,P(b) - b\,P(a)}{a - b}$

b) $m = \dfrac{2^{200} - 1}{3}$ e $n = \dfrac{2^{200} + 2}{3}$

c) Demonstre, pelo **Método da Indução Matemática**, que os números da forma $2^{2s} - 1$ são múltiplos de 3; observe que $n = m + 1$.

II.13) a) $a = -2$, $b = 4$ e $c = 1$ b) $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$

II.14) $2x - 7$

II.15) $a(x) \equiv b(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $a(a) = b(a) = 0$; então, $r(a) = 0$

II.16) a) $x^3 + x^2 - 2 \equiv (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ e então, $\alpha + \beta = -2$ e $\alpha\beta = 2$

$$g(\alpha) + \alpha = \beta + \alpha = -2$$
$$g(\beta) + \beta = \alpha + \beta = -2$$

Então, o polinômio $g(x) + x + 2$ tem raízes α e β:

$$g(x) + x \equiv \lambda (x - \alpha)(x - \beta)$$
$$g(x) + x \equiv \lambda (x^2 + 2x + 2)$$
$$g(1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{5}(4x^2 + 3x - 2)$$

b) $g[g(x)] = \dfrac{1}{125}[64x^4 + 96x^3 + 32x^2 - 3x - 64]$
c) $g[g(1)] - 1 = 1 - 1 = 0$
d) verifique que $h(1) = h(\alpha) = h(\beta) = 0$

II.17) As raízes **w** do polinômio $x^2 + x + 1$ são tais que $w^3 = 1$

$$[x^3 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Então, $w^{3m} + w^{2n+1} + w^{3p+2} = 1 + w + w^2 = 0$

II.18) **m** não é divisível por 3

II.19) a) 6 b) 6x

II.20) **Teorema 1**: a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Teorema 2:

Hipótese: todo polinômio de grau $n - 1$ admite no máximo $n - 1$ raízes.
Seja então $p(x)$ um polinômio de grau **n**; se $p(x)$ não admite raízes, o teorema é válido para $p(x)$. Caso contrário, seja **a** uma raiz de $p(x)$:

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

onde $\partial[q(x)] = n - 1$; então $q(x)$ admite no máximo $n - 1$ raízes e, daí, $p(x)$ admite no máximo **n** raízes.

II.21) $p = 1$

II.22) $a = -3$ e $b = 2$ b) $p = 2$

II.23) Lembre que:
a) $[P_1(x) + P_2(x)]' = P_1'(x) + P_2'(x)$

e que

b) $[kP(x)]' = k \cdot P'(x)$

II.24) ($t = 3$ e $u = -2$) ou ($t = 2$ e $u = 0$)

III.1) $S = \left\{-2;\ -\frac{1}{2};\ 1 + i;\ 1 - i\right\}$

III.2) $S = \left\{2i;\ -2i;\ 1;\ -\frac{3}{2}\right\}$

III.3) $S = \{-4;\ -1;\ +2\}$

III.4) a) $S = \{-2 + i;\ -2 - i;\ -3\}$
b) $S = \left\{4 + 2i;\ 4 - 2i;\ \frac{1}{2}\right\}$

III.5) $S = \{-5;\ 2\}$

III.6) É inteiro, e $x = 6$.

III.7) irracional

III.8) a) V b) V c) V d) V

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000 0		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 2	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

EDITORA
MODERNA

EDITORA MODERNA

NÚMEROS COMPLEXOS POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE

7