Estratégia
Militares

AULA 02

Números Complexos

EsPCEx - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1- Palavras Iniciais

O primeiro dos assuntos é: **a origem dos Complexos, bem como sua forma de representação**. Por mais que este tema não caia todo ano, é um tópico basilar para outras questões trabalhadas em sua prova. Diante disso, vamos passar por todos os pontos necessários para que faça uma excelente prova!

Preparado, futuro "CADETE"?! Sigamos em frente!

Vamos à nossa aula!

Fale comigo!

@profismael_santos *Ismael Santos* *@IsmaelSantos*

"O segredo do sucesso é a constância no objetivo"

2 – Números Complexos

2.1 - Introdução

Podemos dizer que o Conjunto Numérico dos Complexos surgiu na necessidade vista pelos matemáticos em ampliar o campo numérico por eles trabalhado. Um dos principais significados foi dar sentido às raízes quadradas de números negativos.

Os questionamentos à época foram feitos da seguinte forma:

$$(Qual\ número?)^2 = -16$$
$$(Qual\ número?)^2 = \frac{-1}{81}$$

Perceba que você pode ficar a vida toda escolhendo algum número real que satisfaça as equações acima, que nunca irá encontrar. Por outro lado, se recorremos aos números complexos, as equações acima não só terão raízes, como também farão todo sentido!

Lembra das equações quadráticas (as equações do 2 º grau)? Pois bem! Algumas delas, por possuírem um discriminante negativo (Δ), acabam possuindo raízes complexas. Veja a seguir:

Imagine a equação do 2º grau abaixo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando as técnicas de fatoração, chegamos a seguinte equação:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sabendo que o denominador $4a^2$ terá sempre sinal positivo, imagine agora que o discriminante seja negativo, ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, assim, sendo menor que zero, ao extrairmos a raiz quadrada do lado direito da equação acima, encontraremos um x que não pertence aos reais. Veja:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}\ ;\ \nexists\, x \in \mathbb{R}$$

Veja que em diversas situações faz-se necessária a utilização do conjunto dos complexos par que determinado problema tenha solução.

Destaco abaixo, apenas a título de curiosidade, duas equações históricas que despertaram a atenção de duas grandes lendas: Diofanto de Alexandria (cerca de 250 d.C) e o médico italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576).

Diofanto de Alexandria $\Longrightarrow 6x^2 - 43x + 84 = 0$

Girolamo Cardano $\Longrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$

Em ambas as equações o discriminante possui sinal negativo.

Cardano, mais tarde, teve a inspiração de analisar as equações da forma: $x^3 = ax + b$. Como exemplo, destaco a seguinte:

$$x^3 = 15x + 4$$

Utilizando o método de Cardano, não abordado nesta aula, podemos escrever a raiz desta equação da forma:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

Perceba que a própria raiz da equação está escrita em função de números complexos, no entanto, se testarmos um valor específico para x , tal como 4 , na equação original, veremos que esse é solução da equação. Observe:

$$x^3 = 15x + 4$$
$$4^3 = 15.4 + 4$$
$$64 = 60 + 4$$
$$64 = 64$$

Cardano então se questionou: “como pode uma equação possuir raiz real, sendo que esta pode ser escrita em função de números que ainda não fazem sentido (complexos).” A partir deste momento, foi resolvido, de forma acertada, inventar um número que ao quadrado resulta o -1. Você pode estar se questionando o motivo pelo qual foi escolhido o -1 , eu respondo: pelo simples fato de todo número negativo poder ser escrito pelo produto de seu oposto e o -1.

O número imaginado foi o i , que, ao ser elevado ao quadrado, resulta o -1. Veja:

$$i^2 = -1$$
$$i : obedece\ as\ prinipais\ propriedades\ operacionais\ algébricas.$$

Partindo desta nova ideia, podemos reescrever as equações exemplificadas lá no início da nossa aula.

$$(Qual\ número?)^2 = -16 \Longrightarrow -1.16 \Longrightarrow i^2.16$$
$$(Qual\ número?)^2 = \frac{-1}{81} \Longrightarrow -1.\frac{1}{81} \Longrightarrow i^2.\frac{1}{81}$$

Até aqui, meu querido! Sem crise?? A penas mostrei a motivação da criação dos números compleos!

Vou apresentar um exemplo de questões que envolve um trinômio do 2º grau com raízes complexas para que possa colocar essa primeira parte teórica em prática.

Simbora??

(Exercício de Fixação)

Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ encontramos as seguintes raízes:

a) $2 + i \; e \; 2 - i$

b) $2 \; e - 2$

c) $-2 + i \; e - 2 - i$

d) não tem raízes

Comentário:

Aplicando a fórmula de Bháskara, calculemos o Δ dessa equação:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4.1.5$$

$$= 16 - 20$$

$$= 4$$

Em geral, essa equação não tem uma solução real, mas ela possui solução complexa. Veja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2.1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Pelas propriedades da radiciação:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)}$$

$$= \sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

Como $i = \sqrt{-1},\ logo = 2i$

Então, concluímos que:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$= 2 \pm i$$

As duas raízes são: $x = 2 + i \; e \; x = 2 - i$

Gabarito: A

2.2 - Número Complexo

Ainda que haja outras formas de se definir, podemos destacar como um conceito formal do número complexo a seguinte afirmação: chama-se número complexo todo e qualquer par ordenado $(x; y)$ de números reais. ***Já adianto: NÃO HÁ RELAÇÃO DE ORDEM ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS QUE NÃO SEJAM REAIS TAMBÉM.***

Normalmente, indicamos o número complexo pela letra z , com seu respectivo índice subscrito, caso estejamos tratando de mais de um número complexo. Veja alguns exemplos de números complexos:

$$z_1 = (3; 2)$$

$$z_2 = (-3; 0)$$

$$z_3 = (-1; 2)$$

$$z_4 = (2\,; 4)$$

$$z_5 = \left(\sqrt[3]{7}; 2\right)$$

Sabendo que um número complexo é representado por um par ordenado de números reais, faço questão de destacar algumas estruturas operatórias entre eles. Imaginemos os seguintes números reais $a, b, c \; e \; d$, formadores de pares ordenados. Assim, temos:

➢ $Igualdade\ de\ Números\ Complexos$:

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d}) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \;\; \boldsymbol{e} \;\; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$$

➢ *Adição de Números Complexos*:

$$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c};\boldsymbol{d})\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c};\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\Rightarrow\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\boldsymbol{i}$$

➢ *Multiplicação de Números Complexos*:

$$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c};\boldsymbol{d})\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}.\boldsymbol{d};\ \boldsymbol{a}.\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})\Rightarrow\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}.\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})\boldsymbol{i}$$

2.2 – Definição do Conjunto dos Números Complexos

Podemos definir o Conjunto dos Números Complexos $(\mathbb{C})$ como o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(x;y)$, tal que $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$. Ou seja:

$$\mathbb{C}=\{\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}\}$$

Ressalto também, algumas propriedades existentes neste conjunto:

➢ ***Comutativa da Adição***: a ordem das parcelas não altera a soma, ainda que a operação adição seja formada por quaisquer números complexos. Veja:

$$\boldsymbol{z_1}+\boldsymbol{z_2}=\boldsymbol{z_2}+\boldsymbol{z_1}\ ;\ \forall\boldsymbol{z_1}\in\mathbb{C}\ \boldsymbol{e}\ \forall\boldsymbol{z_2}\in\mathbb{C}$$

➢ ***Associativa da Adição***: é possível associar quaisquer dois ou mais números complexos, a partir da operação adição, sem que haja alteração no resultado. Veja:

$$\boldsymbol{z_1}+(\boldsymbol{z_2}+\boldsymbol{z_3})=(\boldsymbol{z_1}+\boldsymbol{z_2})+\boldsymbol{z_3}\ ;\ \forall\boldsymbol{z_1}\in\mathbb{C},\forall\boldsymbol{z_2}\in\mathbb{C}\ \boldsymbol{e}\ \forall\boldsymbol{z_3}\in\mathbb{C}$$

➢ ***Existência do Elemento Neutro da Adição***: existe um número complexo k , tal que não altera o resultado quando adicionado a outro número complexo.

$$\exists\boldsymbol{k}\in\mathbb{C}/\boldsymbol{k}+\boldsymbol{z_1}=\boldsymbol{z_1},\forall\boldsymbol{z_1}\in\ \mathbb{C}$$

- ***Existência do Elemento Simétrico***: existe um número complexo z', tal que, ao adicionar um outro complexo z, resulta no elemento zero. Cuidado para não confundir elemento simétrico de um complexo com conjugado de um complexo. Esses conceitos, veremos mais a frente, são totalmente diferentes.

$$\exists\, \boldsymbol{z'} \in \mathbb{C}/\boldsymbol{z'} + \boldsymbol{z_1} = (\mathbf{0};\ \mathbf{0})\,, \forall \boldsymbol{z_1} \in\ \mathbb{C}$$

- ***Comutativa da Multiplicação***: a ordens dos fatores (números complexos quaisquer) não alteram o produto.

$$\boldsymbol{z_1}.\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{z_2}.\boldsymbol{z_1}\ \ ;\ \ \forall \boldsymbol{z_1} \in \mathbb{C}\ \boldsymbol{e}\ \forall \boldsymbol{z_2} \in \mathbb{C}$$

- ***Associativa da Multiplicação***: é possível associar quaisquer dois ou mais números complexos, a partir da operação multiplicação, sem que haja alteração no resultado. Veja:

$$\boldsymbol{z_1}.(\boldsymbol{z_2}.\boldsymbol{z_3}) = (\boldsymbol{z_1}.\boldsymbol{z_2}).\boldsymbol{z_3}\ \ ;\ \ \forall \boldsymbol{z_1} \in \mathbb{C}\,, \forall \boldsymbol{z_2} \in \mathbb{C}\ \boldsymbol{e}\ \forall \boldsymbol{z_3} \in \mathbb{C}$$

- ***Existência do Elemento Neutro da Multiplicação***: existe um número complexo k, tal que não altera o resultado quando multiplicado a outro número complexo.

$$\exists \boldsymbol{k} \in \mathbb{C}/\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{z_1}\,, \forall \boldsymbol{z_1} \in\ \mathbb{C}$$

- ***Existência do Elemento Inverso***: existe um número complexo z^{-1}, tal que, ao multiplicar um outro complexo z, resulta na unidade. Cuidado para não confundir elemento inverso de um complexo com conjugado de um complexo. Esses conceitos, veremos mais a frente, são totalmente diferentes.

$$\exists\, \boldsymbol{z^{-1}} \in \mathbb{C}/\boldsymbol{z^{-1}}.\,\boldsymbol{z_1} = (\mathbf{1};\ \mathbf{0})\,, \forall \boldsymbol{z_1} \in\ \mathbb{C}$$

- ***Distributiva***: similar à propriedade da distributiva estudada lá atrás. A principal diferença é que, neste ponto, os números trabalhados são complexos.

$$z_1.(z_2+z_3)=z_1.z_2+z_1.z_3\ ;\ \forall z_1\in\mathbb{C},\forall z_2\in\mathbb{C}\ e\ \forall z_3\in\mathbb{C}$$

3 – Forma Algébrica

Antes mesmo de passar os detalhes da forma algébrica de um número complexo, vou me preocupar em explicar o motivo pelo qual todo número real é complexo (cuidado que a recíproca não é verdadeira), em outras palavras, todo número real pode ser escrito na forma de um número complexo. Vamos nessa?! “Simbora!”

Já sabemos que todo número complexo pode ser escrito da forma $(x;y)$. Podemos ainda pegar subconjuntos dos números complexos que possuam como elementos os complexos da forma $(a;0)\ e\ (c;0)$, ou seja, pares ordenados com o segundo elemento igual a zero. A partir disso, conseguiremos efetuar as operações adição e multiplicação, com base no estudo de tópicos anteriores. Veja como fica:

$$(a;0)+(c;0)=(a+c;0+0)=(a+c;0)$$
$$(a;0).(c;0)=(a.c-0.0;a.0+0.c)=(a.c;0)$$

Observe que os primeiros componentes (x) de cada resultado são encontrados a partir de operações básicas entre os reais. Desta forma, concluímos que esses elementos possuem o mesmo comportamento de um número real. Assim:

$$(x;0)=x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$$

Logo, podemos escrever qualquer número real na forma de um par ordenado, cuja parte imaginária seja nula, veja:

$$(0;0)=0$$
$$(-1;0)=-1$$
$$\left(-\sqrt[3]{4};0\right)=-\sqrt[3]{4}$$

Agora vamos aprender como é a forma de representação algébrica de um número complexo.

$$(a,b)\in\ \mathbb{C}\ \Longrightarrow z=a+bi$$

Em outras palavras, se o par ordenado (a, b) representa um número complexo, então este número pode ser escrito da forma $z = a + bi$, em que a é a parte real - $Re(z)$ - do complexo z e bi , a parte imaginária - $Im(z)$ - de coeficiente real.

Destaco ainda que, se o número complexo for um número classificado como imaginário puro, sua parte real deverá ser nula. Por outro lado, se o número complexo for considerado real puro, daí a parte imaginária deverá ser nula. Veja:

(Exercício de Fixação)

(EEAR-2001) Sejam $m \in \mathbb{R}$. Para que o produto $(2 + mi).(3 + i)$ seja um número imaginário puro, o valor de m deve ser:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

Comentário:

Efetuando a multiplicação:

$$(2 + mi).(3 + i) = 6 + 2i + 3mi + mi^2$$
$$= 6 + 2i + 3mi - m$$
$$= (6 - m) + (2 + 3m)i$$

Para que seja imaginário puro, bastará que $6 - m$ seja nulo, isto é, $m = 6$.

Gabarito: B

(Exercício de Fixação)

Acerca do número $(2 + 3i)(7 - 4i) - 26$, podemos afirmar que se trata de um:

a) número imaginário puro

b) número real puro

c) número complexo de módulo $\sqrt{13}$

d) número complexo de módulo nulo

Comentário:

Efetuando o cálculo:

$$(2+3i)(7-4i)-26 = 14-8i+21i-12.i^2-26$$
$$= 14+13i+12-26$$
$$= 13i$$

Logo, como a parte real é nula, trata-se de um número imaginário puro.

Gabarito: A

3.1 – Unidade Imaginária

Por definição, temos como unidade real o número complexo $(1;0)$. Por outro lado, temos como unidade imaginária o número complexo $(0;1)$. O símbolo dado a esta parte imaginária é o i. Assim: $i=(0;1)$.

Neste momento, quero fazer uma pergunta: lembra como operar números complexos a partir da operação multiplicação? Blz. Agora você vai ver algum sentido naquela forma de representação. Veja:

$$i^2=-1 \Longrightarrow i.i$$
$$\Longrightarrow (0;1).(0;1)=(0.0-1.1\,;0.1+1.0)$$
$$\Longrightarrow (-1;0)=i^2 \;\; ;Propriedade\ Fundamnetal\ da\ Unidade\ Imaginária$$

Logo:

$$\boldsymbol{i^2=(-1;0)=-1}$$

3.2 – Conjugado de um Número Complexo

Dado um número complexo $Z = a + bi \ \ (a \ e \ b \ \in \mathbb{R})$, chama-se conjugado de Z, representado por $\bar{Z}$, o número da forma $\bar{Z} = a - bi$

Assim:

$$\boldsymbol{Z = a + bi \ \ \Longrightarrow \ \ \bar{Z} = a - bi}$$

Algumas conclusões imediatas:

- Para conjugar um polinômio, basta trocar o sinal da parte imaginária, se houver.
- Se $Z = a + bi$, com $b \neq 0$, temos que $Z + \bar{Z} = 2a$.
- Se $Z = \bar{Z}$, então a arte imaginária é nula.
- Se $Z = a + bi$, com $b \neq 0$, então $Z - \bar{Z} = 2bi$.
- Não confunda conjugado de um número complexo com simétrico de um número complexo.

Vamos aprender agora algumas propriedades

✓ O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados.

$$\boldsymbol{\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

✓ O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

$$\boldsymbol{\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{Z_1} . \overline{Z_2}}$$

✓ O produto de um número complexo com seu conjugado sempre pertencerá ao conjunto dos números reais.

$$\boldsymbol{Z . \bar{Z}} \in \mathbb{R}$$

✓ O conjugado do conjugado de um número complexo será sempre igual a ele mesmo.

$$\boldsymbol{(\bar{\bar{Z}}) = Z}$$

- ✓ A parte real de um complexo pode ser encontrada a partir da média aritmética entre o número complexo e seu conjugado.

$$\boldsymbol{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}}$$

- ✓ A parte imaginária de um complexo pode ser encontrada a partir da média aritmética entre o número complexo e o oposto de seu conjugado.

$$\boldsymbol{Im(z) = \frac{z+(-\bar{z})}{2}}$$

3.3 – Divisão de Números Complexos

Este tópico se assemelha muito à racionalização. Lá estudamos que o número irracional não pode ficar no denominador. Aqui, em complexo, não é diferente: o número complexo Z não pode figurar no denominador, havendo assim, a necessidade de fazer uma espécie de “racionalização”.

Essa “racionalização” tem a finalidade de transformar o denominador complexo em um número real. Aprendemos no tópico anterior que $Z.\bar{Z} \in \mathbb{R}$, logo, faz-se necessário a multiplicação da fração de complexos pelo conjugado do denominador. Veja:

$$\boldsymbol{\frac{Z_1}{Z_2} \Longrightarrow \frac{Z_1}{Z_2}.\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}}\text{ , }assim\text{: } \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}.\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2i}{a^2+b^2}$$

- $Parte\ Real, com\ denominador\ real: destacado\ em\ verde.$
- $Parte\ Imaginária\ com\ deominador\ real: destacada\ em\ vermelho.$

Exemplo:

Calcule o valor simplificado de:

$$Z = \frac{5-10i}{3+4i}$$

Comentário:

Já sabemos que é necessário multiplicar Z pelo conjugado de seu denominador em ambos os termos, então:

$$\frac{5-10i}{3+4i}\cdot\frac{(3-4i)}{(3-4i)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{(5.3-10.4)}{3^2+4^2}+\frac{[(-10).3+5-(-4)]i}{3^2+4^2}$$

$$\Longrightarrow\frac{-25-50i}{25}=-1-2i$$

(Exercício de Fixação)

A parte real do complexo $z=\frac{2+3i}{1-5i}$ é o número real:

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 2

d) -2

Comentário:

Efetuaremos a fração complexa e multiplicaremos pelo conjugado do seu denominador.

$$z=\frac{2+3i}{1-5i}$$

$$=\frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$

$$=\frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2+5^2}$$

$$= \frac{2 + 10i + 3i - 15}{1 + 25}$$

$$= \frac{-13 + 13i}{26}$$

$$= \frac{-13}{26} + \frac{13}{26}i$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Logo, $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$

Gabarito: B

3.4 – Potências de i

Ponto importante desta matéria, pois é a base para o todo. Observe as seguintes potências:

i^0	1
i^1	i
i^2	-1
i^3	$(i)^2.i = -i$
i^4	$(i)^2.(i)^2 = 1.1 = 1$
i^5	$(i)^4.i = i$
i^6	$(i)^4.i^2 = -1$
i^7	$(i)^4.i^3 = -i$
i^8	$(i)^4.(i)^4 = 1.1 = 1$

Já é possível notar que, a cada sequência de 4 potências, temos um resultado que é periódico. Podemos, então, generalizar da seguinte forma:

i^{4k}	$i^{0} = 1$	Se o expoente deixar resto zero na divisão por 4.
i^{4k+1}	$i^{1} = i$	Se o expoente deixar resto 1 na divisão por 4.
i^{4k+2}	$i^{-2} = -1$	Se o expoente deixar resto dois na divisão por 4.
i^{4k+3}	$i^{-3} = -i$	Se o expoente deixar resto três na divisão por 4.

(Exercícios de Fixação)

(ESA – 2014) O Número complexo i^{102}, onde i representa a unidade imaginária,

a) é positivo

b) é imaginário puro

c) é real

d) está na forma trigonométrica

e) está na forma algébrica

Comentário:

Basta dividirmos o expoente por 4 e substituirmos o expoente pelo resto da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 102 & 4 \\ \cline{2-2} 22 & 25 \\ 2 & \end{array}$$

Então:

$i^{102} = i^2$

$= -1$

Logo, trata-se de um número real.

Gabarito: C

Calcule o valor do módulo do complexo:

$$z = \frac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentário:

Primeiro, observe o que podemos fazer com o numerador da expressão dada, colocando o 4 em evidência:

$$(4+4i)^{100} = [4.(1+i)]^{100}$$

$$= 4^{100}.(1+i)^{100}$$

$$= (2^2)^{100}.(1+i)^{2.50}$$

$$= 2^{200}.(1+i)^{2.50}$$

$$= 2^{200}.[(1+i)^2]^{50}$$

$$= 2^{200}.(2i)^{50}$$

$$= 2^{200}.2^{50}.i^{50}$$

$$= 2^{250}.i^{50}$$

Veja que 50 dividido por 4 deixa resto 2, logo, pela regra dos restos, temos:

$$(4+4i)^{100} = 2^{250}.i^2$$

$$= 2^{250}.(-1)$$

$$z = \frac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$$

$$z = \frac{2^{250}.(-1)}{2^{250}}$$

$$= -1$$

Assim:

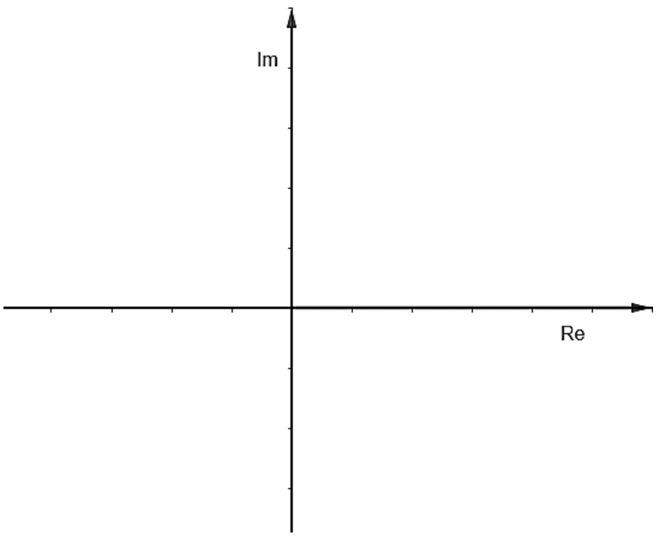
$|z| = |-1| = 1$

Gabarito: B

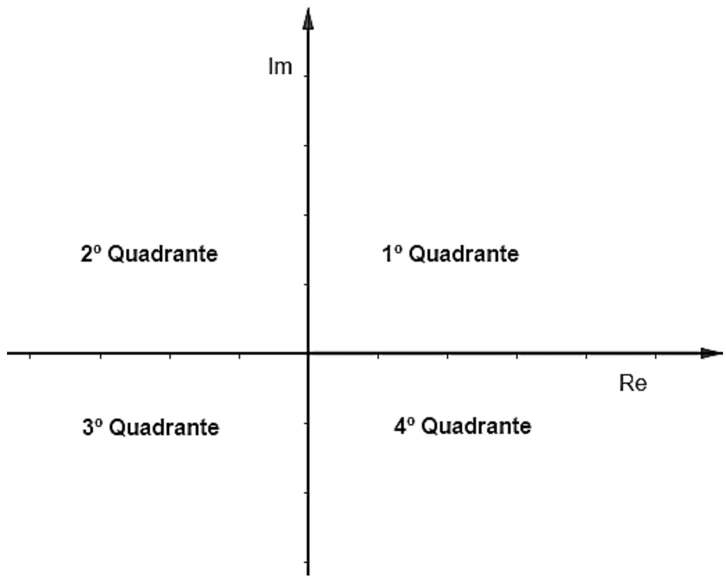
3.5 – Plano de Argand-Gauss

Já sabemos que todo número complexo pode ser representado na forma de um par ordenado da forma $(a; b)$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Por ser um par ordenado, podemos também representar no plano. Este plano é chamado de Plano de Argand-Gauss. Por analogia, o eixo das abcissas é denominado eixo real, onde marcamos a posição da parte real do número complexo. Por outro lado, o eixo das ordenadas é denominada eixo imaginário, onde marcamos a parte imaginária do número complexo. Assim:



Uma outra novidade deste tópico é o nome que damos ao ponto pertencente ao plano complexo: **AFIXO**. Assim, podemos dizer que a origem do plano complexo é o afixo correspondente ao complexo $Z = 0$. Podemos também deduzir que os eixos (real e imaginário) divide o plano complexo em quatro quadrantes. Veja:



Conclusões a partir dos quadrantes delimitados pelos eixos do plano complexo:

- **1° quadrante:** $\boldsymbol{Z = a + bi \Rightarrow a > 0 \text{ e } b > 0}$
- **2° quadrante:** $\boldsymbol{Z = a + bi \Rightarrow a < 0 \text{ e } b > 0}$
- **3° quadrante:** $\boldsymbol{Z = a + bi \Rightarrow a < 0 \text{ e } b < 0}$
- **4° quadrante:** $\boldsymbol{Z = a + bi \Rightarrow a > 0 \text{ e } b < 0}$

Caso a parte imaginária ou a parte real seja nula, o número complexo não pertencerá a nenhum quadrante, mas sim a algum semieixo. Esse conceito será muito importante no momento de determinarmos o argumento de um número complexo.

$Z = a + bi \Rightarrow a = 0 \text{ e } b > 0 \Rightarrow Z$ pertencerá ao semieixo imaginário positivo.

$Z = a + bi \Rightarrow a = 0 \text{ e } b < 0 \Rightarrow Z$ pertencerá ao semieixo imaginário negativo.

$Z = a + bi \Rightarrow a > 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow Z$ pertencerá ao semieixo real positivo.

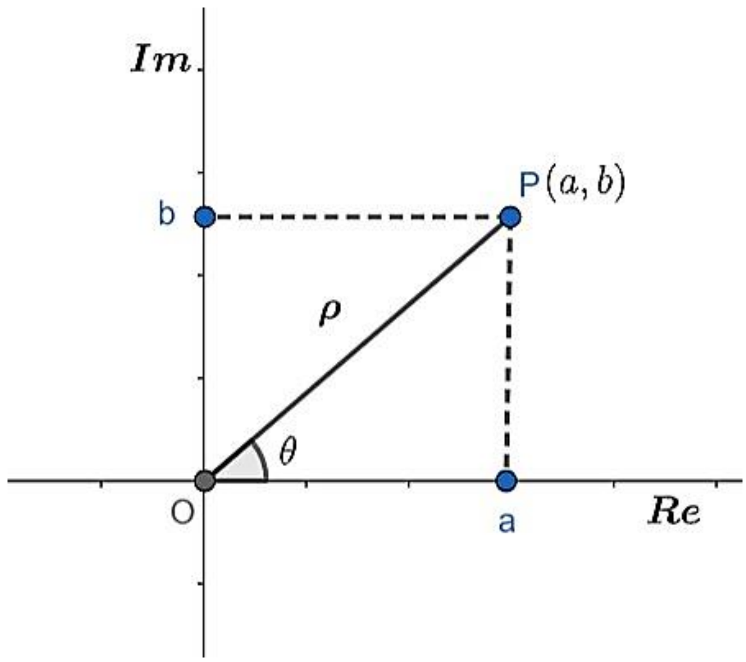
$Z = a + bi \Rightarrow a < 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow Z$ pertencerá ao semieixo real negativo.

$Z = a + bi \Longrightarrow a = 0$ e $b = 0 \Longrightarrow Z$ origem do plano complexo.

3.5 – Módulo de um Número Complexo

Módulo (ou Norma) nada mais é que a distância entre a origem do plano complexo ao afixo de um número complexo. Sua forma de representação é $|Z|$, também representado pela letra grega ρ , (lê-se "Rhô").

Veja como fica sua representação no plano.



Perceba que $|Z|$ (ou simplesmente ρ) representa a diagonal de um quadrado. Assim, aplicando Pitágoras, fica fácil notar que:

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Perceba ainda que, exceto $Z = 0$, qualquer outro número complexo possuirá o módulo positivo. Assim:

$$|Z| > 0 \Leftrightarrow Z \neq 0$$

Vamos apresentar agora algumas propriedades do módulo de um número complexo.

- $|\boldsymbol{Z}| = |\overline{\boldsymbol{Z}}|$
- $\boldsymbol{Z}.\overline{\boldsymbol{Z}} = |\boldsymbol{Z}|^2$
- $|\boldsymbol{Z}_1.\boldsymbol{Z}_2| = |\boldsymbol{Z}_1|.|\boldsymbol{Z}_2|$
- $|\boldsymbol{Z}_1.\boldsymbol{Z}_2 \dots \boldsymbol{Z}_n| = |\boldsymbol{Z}_1|.|\boldsymbol{Z}_2| \dots |\boldsymbol{Z}_n|$
- $|\boldsymbol{Z}^n| = |\boldsymbol{z}|^n$
- $|\boldsymbol{Z}_1| - |\boldsymbol{Z}_2| \leq |\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2| \leq |\boldsymbol{Z}_1| + |\boldsymbol{Z}_2|$

Podemos colocar $a\ e\ b$ em função de $\theta\ \ e\ \rho$. Usando um pouco dos conceitos trigonométricos, podemos afirmar que:

$$(Cateto\ adjacente\ sobre\ a\ hipotenusa)\ cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho.cos\theta$$

$$(Cateto\ oposto\ sobre\ a\ hipotenusa)\ sen\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho.sen\theta$$

Essa forma utilizando o seno e cosseno é de suma importância para o bom entendimento da forma Trigonométrica ou Polar de um número complexo.

Vamos praticar com alguns exercícios de fixação!

(Exercícios de Fixação)

Considere os seguintes números complexos: $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 5 - 12i\ e\ z_3 = -8 + 15i$. Podemos afirmar que:

a) $|z_1| < |z_2| < |z_3|$

b) $|z_1| > |z_2| > |z_3|$

c) $|z_1| < |z_2|\ e\ |z_2| > |z_3|$

d) $|z_1| > |z_2|\ e\ |z_2| < |z_3|$

Comentário:

Basta aplicarmos diretamente a fórmula apresentada para o cálculo do módulo. Calculando $|z_1|$:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Calculando $|z_2|$

$$|z_2| = \sqrt{5^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

Calculando $|z_3|$:

$$|z_3| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2}$$

$$= \sqrt{64 + 225}$$

$$= \sqrt{289}$$

$$= 17$$

Como $5 < 13 < 17$, temos que $|z_1| < |z_2| < |z_3|$

Gabarito: A

Considere os complexos $z_1 = 3 + 24i, z_2 = 7 + 26i$ e $z_3 = 1 + 10i$. Podemos afirmar que $|z_1 + z_2 - z_3|$ vale:

a) 41

b) 46

c) 49

d) 51

Comentário:

Façamos primeiro o cálculo do complexo:

$$z_1 + z_2 - z_3 = 3 + 24i + 7 + 26i - (1 + 10i)$$

$$= 10 + 50i - 1 - 10i$$

$$= 9 + 40i$$

Calculando o módulo:

$$|z_1 + z_2 - z_3| = \sqrt{9^2 + 40^2}$$

$$= \sqrt{81 + 1600}$$

$$= \sqrt{1681}$$

$$= 41$$

Gabarito: A

(Exercícios de Fixação)

(ESA – 2013) Com relação aos números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 - i$,onde i é a unidade imaginária, é correto afirmar:

a) $z_1 . z_2 = -3 + i$

b) $|z_1| = \sqrt{2}$

c) $|z_2| = \sqrt{5}$

d) $|z_1 . z_2| = \sqrt{10}$

e) $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$

Comentário:

Vamos analisar cada alternativa:

a)

$$z_1 . z_2 = (2 + i).(1 - i)$$

$$2.1 - 2.i + i.1 - i.i$$

$$2 - 2i + i + 1$$

$$3 - i$$

Logo, alternativa incorreta, pois não se trata da resposta que foi o cálculo.

b) Falsa.

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1}$$

$$= \sqrt{5}$$

c) Falsa

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1}$$

$$= \sqrt{2}$$

d) Verdadeira

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

$$= \sqrt{5} . \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{10}$$

e) Falsa.

$$|z_1 + z_2| = |1 + i + 1 - i|$$

$$= |3|$$

$$= 3$$

13. O valor de m para que o módulo complexo $Z = (m + 2i)(1 + i)$ seja igual a 4, é:

a) ± 1

b) ± 2

c) ± 3

d) zero

Comentário:

Fazendo as propriedades dos módulos:

$$|Z| = |(m + 2i)(1 + i)| = 4$$

$$|(m + 2i)|.|(1 + i)| = 4$$

$$\sqrt{m^2 + 4}\,.\sqrt{1^2 + 1^2} = 4$$

$$\sqrt{(m^2 + 4).2} = 4$$

$$(m^2 + 4).2 = 16$$

$$m^2 + 4 = 8$$

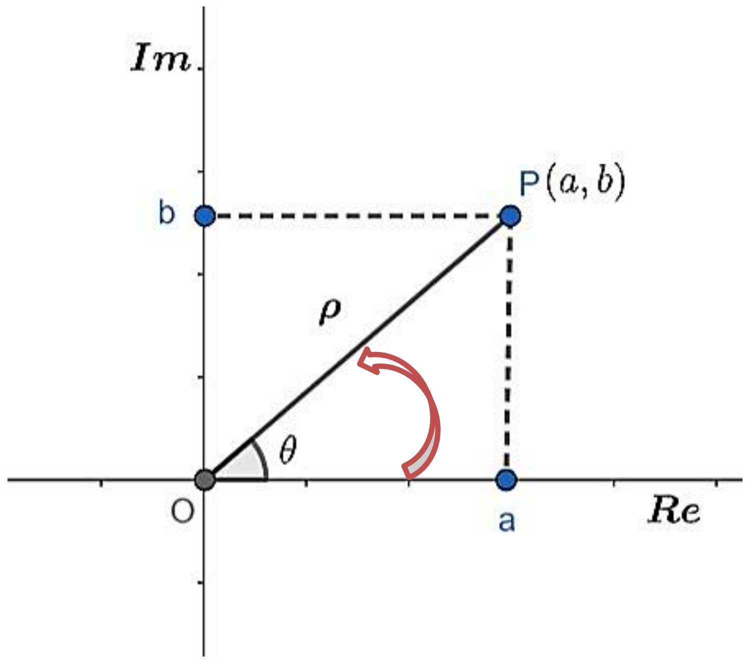
$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2$$

Gabarito: B

3.6 – Argumento de um Número Complexo

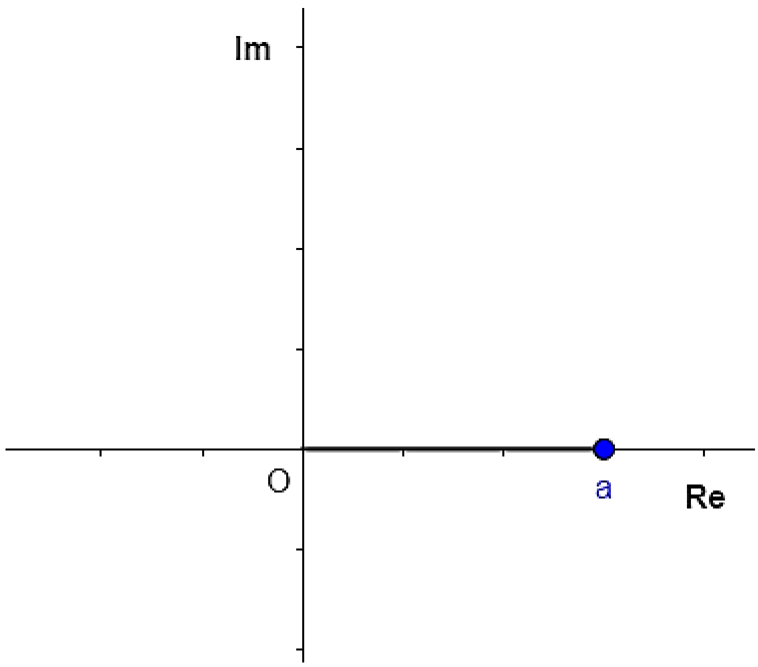
Dado um número complexo não nulo, sabemos que este complexo possui um afixo e que, a distância deste afixo à origem, é denominado módulo. Assim, chama-se argumento, o ângulo traçado no sentido anti-horário a partir do semieixo real positivo até o segmento que representa o módulo do número complexo. Veja:



Assim, o argumento do complexo $z = a + bi$, acima, é igual a θ. Usando a notação, temos:

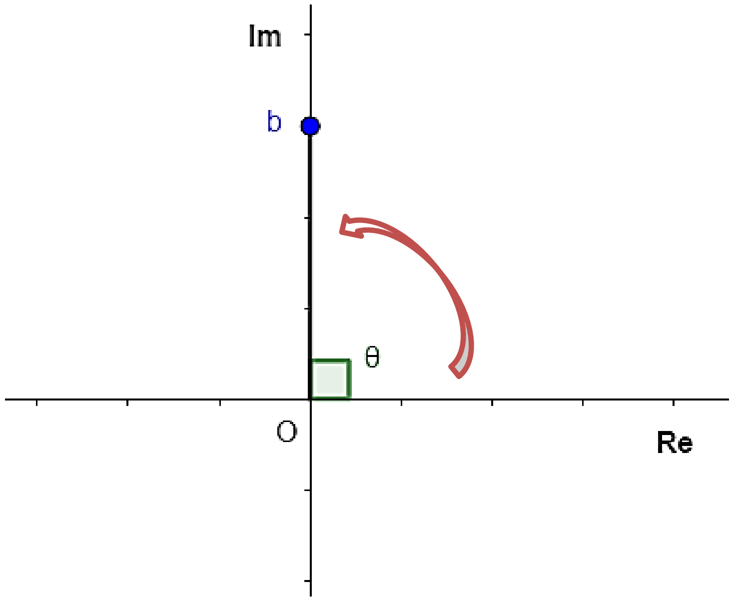
$$\arg(z) = \theta$$

Você deve estar pensando: “e se o número complexo for da forma $Z = a + bi$, com $b = 0$, ou seja, Z pertencendo ao semieixo real positivo? Eu respondo: o argumento será nulo, pois não existe ângulo formado. Veja:

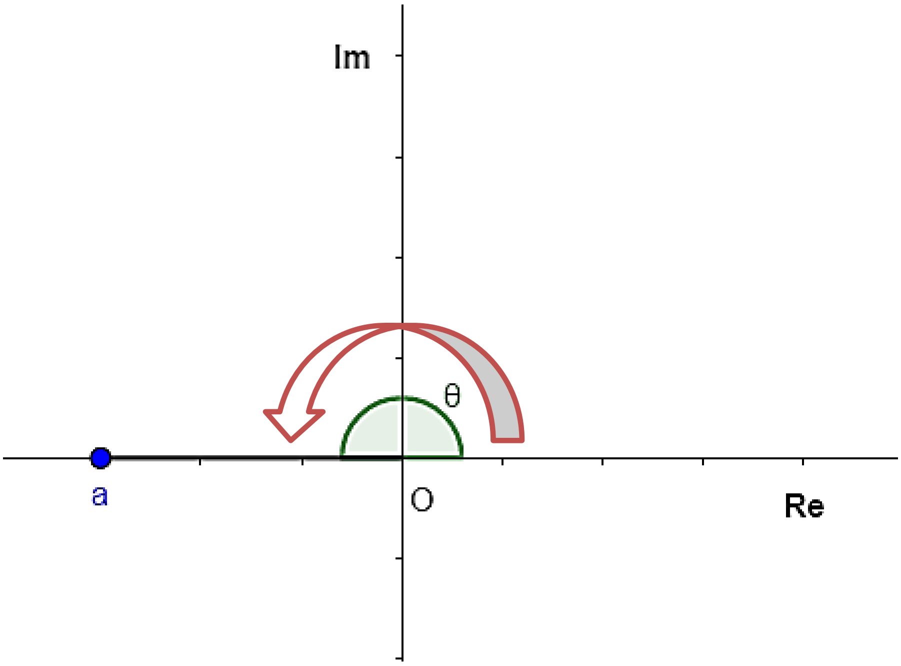


Por analogia, temos que:

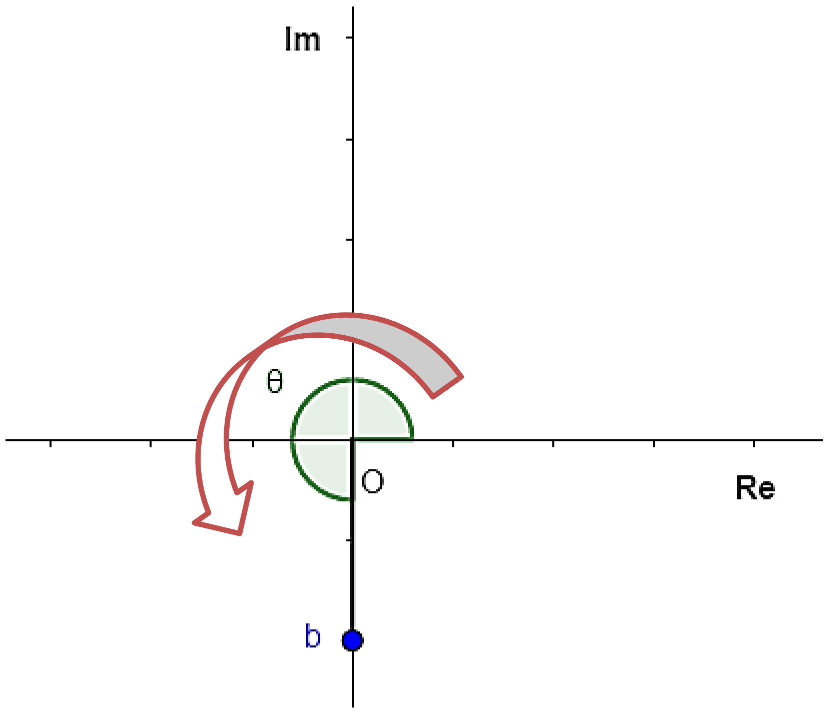
○ $\boldsymbol{z = 0 + bi, com\ b > 0\ ;\ \theta = 90° \ ou\ \theta = \frac{\pi}{2}, veja}$:



○ $\boldsymbol{z = 0 + bi, com\ b > 0\ ;\ \theta = 180° \ ou\ \theta = \pi\ , veja}$:



- $z = 0 + bi, com\ b < 0\ ;\ \theta = 270°\ ou\ \theta = \frac{3\pi}{2}, veja$:



E aí, meu querido! Até aqui, sem crise?

Vamos aprender agora como identificar o argumento de um complexo em que seu afixo não pertença aos semieixos do plano complexo.

Para aprendermos este ponto, vou utilizar um exemplo motivacional.

Mas antes, lembre-se que:

$$cos\theta = \frac{a}{|Z|}\ e\ sen\theta = \frac{b}{|Z|}, 0 < \theta < 2\pi$$

Exemplo:

Calcule o argumento θ do complexo $Z = 1 - i$

Comentário:

O primeiro passo é encontrar o módulo do número complexo. Veja:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{2}$$

O Segundo passo é reescrever o cosseno e o seno em função da parte real e imaginária, respectivamente, sobre o módulo do número complexo original. Observe:

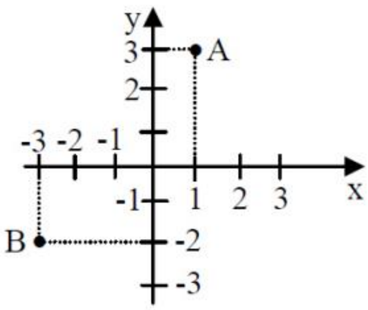
$$cos\theta = \frac{Re(Z)}{|Z|} \Rightarrow cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\theta = \frac{Im(Z)}{|Z|} \Rightarrow sen\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Sabendo que Z ∈ ao 4° quadrante, então o único ângulo que possui cosseno $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e seno $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\theta = \frac{7\pi}{4}$

(Exercícios de Fixação)

(EEAR – 2003) Os números complexos que correspondem aos pontos A e B do gráfico são, respectivamente:



a) $(1 + 3i); (-3 - 2i)$

b) $(3 + i); (-2 - 3i)$

c) $(-3 - 2i); (1 + 3i)$

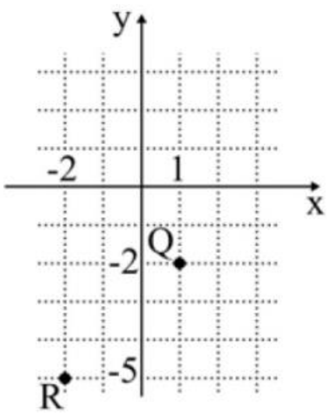
d) $(-2 - 3i);(3 + i)$

Comentário:

Veja que o complexo representado por A tem parte real 1 e parte imaginária 3; logo, trata-se do complexo $1+3i$ (perceba que isso já resolve a questão por eliminação). O complexo B possui parte real -3 e parte imaginária -2; logo, trata-se do complexo $-3-2i$.

Gabarito: A

(EEAR – 2019) Sejam $z_1 = 3+3i$, $Q\ e\ R$ são as representações, no plano Argand-Gauss, dos números complexos z_2 e z_3



Assim, é correto afirmar que z_1=

a) $z_2 - z_3$

b) $z_2 + z_3$

c) $-z_2 + z_3$

d) $-z_2 - z_3$

Comentário:

Vamos achar z_2. O problema diz que z_2 é representado por Q. O afixo Q tem parte real 1 e parte imaginária -2; logo $z_2 = 1-2i$. O afixo R tem parte real -2 e parte imaginária -5; logo, $z_3 = -2-5i$. Veja também que, lembrando que $z_1 = 3+3i$

$$z_2 - z_3 = (1 - 2i) - (-2 - 5i)$$
$$= 1 - 2i + 2 + 5i$$
$$= 3 + 3i$$
$$= z_1$$

Logo, $z_1 = z_2 - z_3$

Gabarito: A

Calcule o argumento do complexo $\sqrt{3} - i$

a) $\frac{5\pi}{6}$

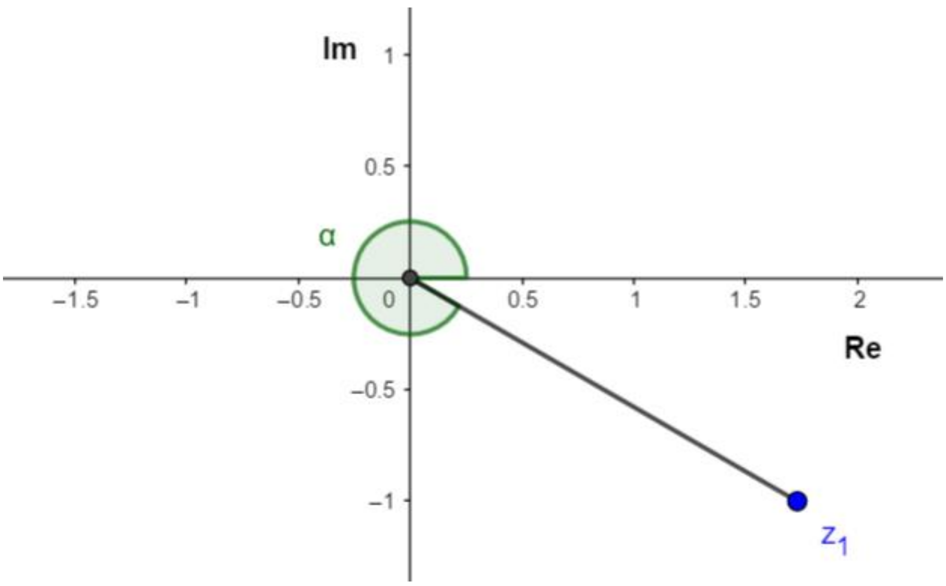
b) $\frac{7\pi}{6}$

c) $\frac{9\pi}{6}$

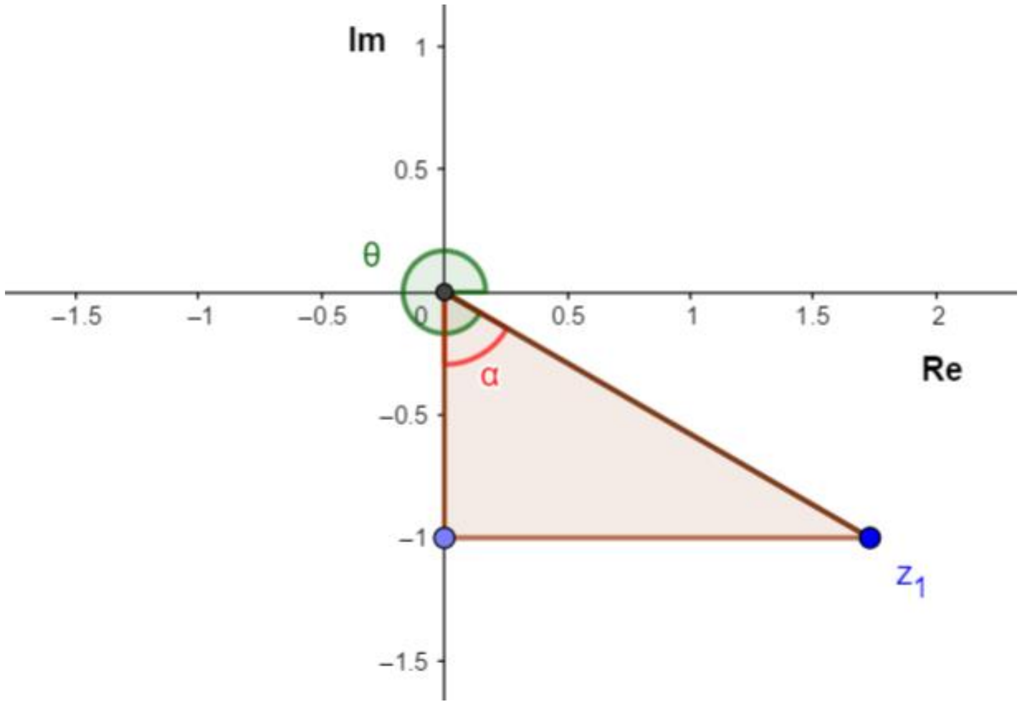
d) $\frac{11\pi}{6}$

Comentário:

Primeiro, devemos marcar esse complexo no plano de Argand-Gauss



Veja que no triângulo retângulo formado embaixo, podemos usar de trigonometria para calcularmos o ângulo α. Veja:



$$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$tg\alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60°$$

O argumento desse complexo é: $90° + 90° + 90° + 60° = 330°$. Porém, devemos passar esse argumento para radianos (lembrando que, para isso, basta multiplicar por $\frac{\pi}{180°}$

$$330°.\frac{\pi}{180°} = \frac{330°.\pi}{180°}$$

$$= \frac{33\pi}{18}$$

$$\theta = \frac{11\pi}{6}$$

3.7 – Forma Trigonométrica

Observe agora como o algebrismo é lindo! No item anterior aprendemos que: se $Z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, o argumento de $Z \neq 0$ poderá ser encontrado da forma:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{a}{|Z|} \\ sen\theta = \dfrac{b}{|Z|} \end{cases}$$

Assim, isolando o a e o b, das expressões acima, temos que:

$$a = cos\theta.|Z| \text{ e } b = sen\theta.|Z|$$

Desta forma, fazendo-se a substituição na forma algébrica do complexo original, temos que:

$$Z = a + bi \Longrightarrow Z = |Z|.cos\theta + |Z|.sen\theta.i$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow Z = |Z|.[cos\theta + isen\theta] \text{ ou } Z = \rho.cis\theta}$$

Essa é a forma polar (ou trigonométrica) do número complexo Z. Vamos ver essa teoria na prática? Simbora!

Exemplo:

Escreva o número complexo $Z = \sqrt{3} + i$ sob a forma trigonométrica.

Comentário:

O primeiro passo é encontrar o Módulo do número complexo. Veja:

$$|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \Longrightarrow |Z| = \sqrt{4} \Longrightarrow |Z| = 2$$

Logo, reescrevendo $cos\theta$ e $sen\theta$, em função dos termos anteriores, temos:

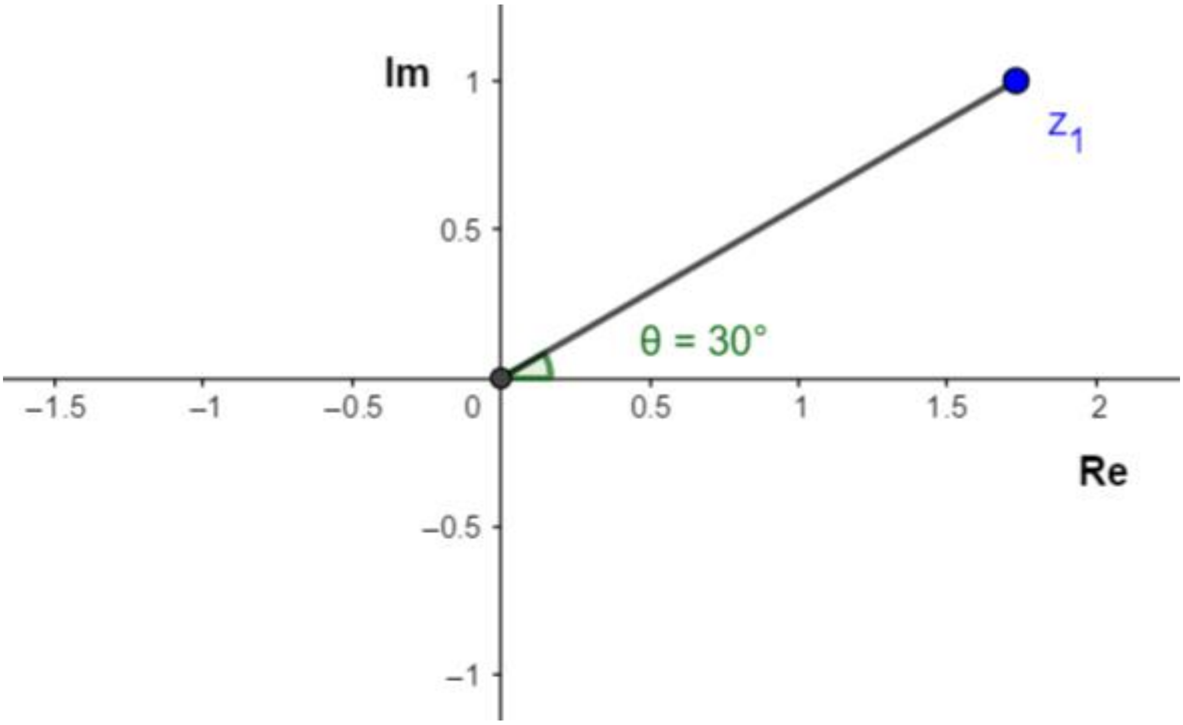
$$cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } sen\theta = \frac{1}{2}$$

O ângulo que satisfaz as condições acima é $\theta = \frac{\pi}{6}$

Com isso, temos:

$$Z = |Z|.[cos\theta + isen\theta] \Longrightarrow Z = 2.(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$$

Graficamente, temos:



Passemos agora a algumas propriedades da forma Polar de um número complexo.

- Se $Z_1 = p_1(cos\theta_1 + sen\theta_1)$ e $Z_2 = p_2(cos\theta_2 + sen\theta_2)$, então:

$$Z_1.Z_2 = p_1.p_2.[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

- Se $Z_1 = p_1(cos\theta_1 + sen\theta_1)$ e $Z_2 = p_2(cos\theta_2 + sen\theta_2)$, então:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{p_1}{p_2}.[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]$$

- Se $Z = p(cos\theta + isen\theta)$, então:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{p}.[\cos(-\theta) + isen(-\theta)]$$

Podemos inferir que:

$$arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)$$

Porém, como um argumento não pode ser negativo, temos que, se $x = arg\left(\frac{1}{Z}\right)$, então:

$$\arg(Z) = 2\pi - x$$

- Se $Z = p(cos\theta + isen\theta)$, então:

$$\bar{Z} = p.[\cos(-\theta) + isen(-\theta)]$$

- Se $\arg(Z_1) = \theta_1$ e $\arg(Z_2) = \theta_2$, então:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2.|Z_1|.|Z_2|.\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

3.8 – Leis de Moivre

Agora o caldo começa a engrossar! Não tenhamos medo. Será mais fácil que passar manteiga em beiço de bode, rsrsrs. Vamos nessa!

- **1ª Lei de Moivre:** Potenciação de um número complexo.

A primeira lei diz que: seja $Z = p.(cos\theta + isen\theta)$ e n é um número inteiro positivo, então:

$$Z^n = p^n.[\cos(n.\theta) + isen(n.\theta)]$$

Podemos concluir que:

$$\arg(Z^n) = n.\arg(Z)$$

Exemplo:

Utilizando a Lei de Moivre, calcule o valor de $(-1+i)^{26}$.

Comentário:

$$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \Longrightarrow |Z| = \sqrt{2}$$

Assim:

$$\begin{cases} cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Com isso:

$$Z = \sqrt{2}.\left(cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4}\right)$$

Do enunciado, aplicando a 1ª Lei, temos:

$$Z^{26} = (\sqrt{2})^{26}.\left[\cos\left(26.\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(26.\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$(-1+i)^{26} = 2^{13}\left[cos\left(\frac{39\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{39\pi}{2}\right)\right]$$

Da trigonometria, temos que:

$$\frac{39\pi}{2} = 9.(2\pi) + \frac{3\pi}{2}$$

Logo, a 1ª determinação positiva de $\frac{39\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2}$.

Finalmente, com base na trigonometria, os termos destacados valem respectivamente:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow 0$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -1$$

Assim:

$$(-1+i)^{26} = 2^{13}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \underbrace{i.sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right] = -2^{13}i$$

➢ **2ª Lei de Moivre:** Radiciação de um número complexo.

A segunda lei diz que: seja $Z = p.(cos\theta + isen\theta)$ e n um número natural maior que 2, então há n raízes enésimas de Z que são da forma:

$$Z_k = \sqrt[n]{p}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right], com\ \sqrt[n]{p} \in \mathbb{R}_+\ e\ k \in \mathbb{Z}$$

Aqui vai uma dica bastante útil, quando falamos de raízes de ordem n na unidade, ou seja, $Z^n = 1$

Podemos dizer que

$$\frac{Z^n - 1}{Z - 1} = Z^{n-1} + Z^{n-2} + Z^{n-3} + \cdots Z^2 + Z^1 + 1$$

Assim, veja:

Se $Z^7 = 1;\ Z \neq 1$, então $Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1$ é?

Comentário:

Usando a definição acima, podemos dizer que:

$$\frac{Z^Z - 1}{Z - 1} = Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1\text{ , mas } Z^Z = 1\text{, logo:}$$

$$\frac{1-1}{Z-1} = Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

4.2 – Equações Binômias e Trinômias

Chama-se equação binômia toda equação redutível à forma:

$$ax^n + b = 0 \;;\; a \text{ e } b \in \mathbb{C} \;; a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Para solucionar equações dessa forma, temos que isolar o x, assim:

$$ax^n + b = 0$$
$$ax^n = -b$$
$$x^n = -\frac{b}{a}$$
$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

Logo, a equação $ax^n + b = 0$ admite n raízes da forma $\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Por sua vez, a equação trinômia é toda equação redutível à forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \;;\; a, b, c \in \mathbb{C} \;;\; a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Para sua solução, usamos a técnica da troca de variável $y = x^n$, assim:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Fique tranquilo que esta parte não é tão evidente em prova, porém, é importante que saiba como se resolver. Para isso trarei questões sobre este tema no decorrer das nossas aulas.

Agora, meu querido, vou passar um pulo do gato que, se aparecer em prova, você vai levantar a mão para o céu. Veja a famosa Fórmula de Euler, que trata da representação exponencial de um número complexo.

Um número complexo pode ser escrito sob a forma exponencial, para isso, vamos usar a fórmula de Euller:

$$\boldsymbol{Z = cos\theta + isen\theta \Longrightarrow e^{i\theta}}$$

Assim, se $Z = a + bi \ \ (a \ \text{ e } \ b \in \mathbb{R})$, temos:

$$\boldsymbol{e^{a+bi} = e^{a}.e^{bi} \Longrightarrow e^{a}.(cosb + isenb)}$$

Chegou a hora da prática incansável!!!!

Vamos que vamos!

4 – Lista de Questões

QUESTÃO 01

Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ encontramos as seguintes raízes:

a) $2+i$ e $2-i$.

b) 2 e −2.

c) $-2+i$ e $-2-i$.

d) Não há raízes.

(EEAR-2001) QUESTÃO 02

Seja $m \in R$. Para que o produto $(2+mi)\cdot(3+i)$ seja um número imaginário puro, o valor de m deve ser:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

QUESTÃO 03

Considere os seguintes números complexos: $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-12i$ e $z_3 = -8+15i$. Podemos afirmar que:

a) $|z_1| < |z_2| < |z_3|$

b) $|z_1| > |z_2| > |z_3|$

c) $|z_1| < |z_2|$ e $|z_2| > |z_3|$

d) $|z_1| > |z_2|$ e $|z_2| < |z_3|$

QUESTÃO 04

Considere os complexos $z_1 = 3+24i$, $z_2 = 7+26i$ e $z_3 = 1+10i$. Podemos afirmar que $|z_1 + z_2 - z_3|$ vale:

a) 41

b) 46

c) 49

d) 51

QUESTÃO 05

Acerca do número $(2+3i)(7-4i)-26$, podemos afirmar que se trata de um:

a) número imaginário puro

b) número real puro

c) número complexo de módulo $\sqrt{13}$

d) número complexo de módulo nulo

(ESSA-2014) QUESTÃO 06

O número complexo i^{102}, onde i representa a unidade imaginária,

a) é positivo.

b) é imaginário puro.

c) é real.

d) está na forma trigonométrica.

e) está na forma algébrica.

QUESTÃO 07

Calcule o valor do módulo do complexo $z=\frac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

QUESTÃO 08

A parte real do complexo $z=\frac{2+3i}{1-5i}$ é o número real:

a) $\frac{1}{2}$

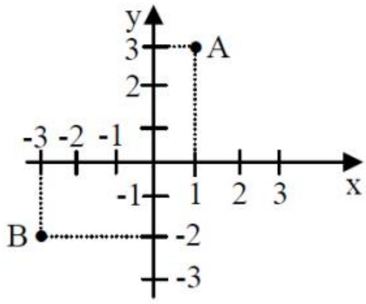
b) $-\frac{1}{2}$

c) 2

d) -2

QUESTÃO 09

Os números complexos que correspondem aos pontos A e B do gráfico são, respectivamente,



a) $(1+3i);(-3-2i)$

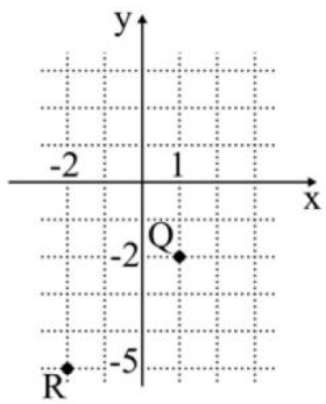
b) $(3+i);(-2-3i)$

c) $(-3-2i);(1+3i)$

d) $(-2-3i);(3+i)$

(EEAR-2019) QUESTÃO 10

Sejam $z_1 = 3+3i$, Q e R as respectivas representações, no plano de Argand-Gauss, dos números complexos z_2 e z_3.



Assim, é correto afirmar que z_1 é igual a:

a) $z_2 - z_3$

b) $z_2 + z_3$

c) $-z_2 + z_3$

d) $-z_2 - z_3$

QUESTÃO 11

Calcule o argumento do complexo $\sqrt{3}-i$.

a) $\frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{7\pi}{6}$

c) $\frac{9\pi}{6}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

(ESSA-2013) QUESTÃO 12

Com relação aos números complexos $z_1=2+i$ e $z_2=1-i$, onde i é a unidade imaginária, é correto afirmar:

a) $z_1 \cdot z_2 = -3+i$

b) $|z_1| = \sqrt{2}$

c) $|z_2| = \sqrt{5}$

d) $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{10}$

e) $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

O valor de m, para que o módulo do número complexo $Z=(m+2i)(1+i)$ seja igual a 4, é:

a) ± 1

b) ± 2

c) ± 3

d) zero

(EEAR-2001) QUESTÃO 14

Seja o número complexo $z=\begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ i^3 & 1 & -i \end{vmatrix}$. A forma trigonométrica de z é:

a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

(EEAR-2002) QUESTÃO 15

Um quadrado ABCD está inscrito num círculo com centro na origem do plano de Gauss. O vértice A é imagem do complexo $3+4i$. Os afixos dos outros três vértices são os complexos:

a) $-3+4i; -3-4i; 3-4i$.

b) $-4+3i; -3-4i; 4-3i$.

c) $-4+3i; -3-4i; 3-4i$.

d) $-3+4i; -3-4i; 4-3i$.

(ESSA-2018) QUESTÃO 16

Considere o número complexo $z=2+2i$. Dessa forma, z^{100} :

a) é um número real negativo.

b) tem argumento $\frac{\pi}{4}$.

c) é um número real positivo.

d) tem módulo igual a 1.

e) é um número imaginário puro.

(ESSA-2009) QUESTÃO 17

O valor da expressão $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ quando $x=i$ é:

a) $\frac{i+1}{2}$

b) $1-i$

c) $-(1-i)$

d) $\frac{-(1-i)}{2}$

e) $\frac{1-i}{2}$

(ADAPTADA ESSA-2011) QUESTÃO 18

Seja uma função o $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $f(x)=2(\cos 2x+i\cdot \operatorname{sen} 2x)$. Calcule o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

a) $\sqrt{3}+i$

b) $1+i\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}-i$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

(ESSA-2015) QUESTÃO 19

A parte real do número complexo $\frac{1}{(2i)^2}$ é:

a) $-\frac{1}{4}$

b) -2

c) 0

d) $\frac{1}{4}$

e) 2

(EEAR-2000) QUESTÃO 20

Sejam A, Z_1 e Z_2 as representações gráficas dos complexos $0+0i$, $2+3i$ e $-5-i$, respectivamente. A menor determinação positiva do ângulo Z_1AZ_2 é:

a) 135°

b) 150°

c) 210°

d) 225°

(EEAR-2002) QUESTÃO 21

Seja z um número complexo, cujo módulo é 2 e cujo argumento é $\frac{\pi}{3}$. A forma algébrica do conjugado de z é:

a) $1-\sqrt{3}i$

b) $\sqrt{3}-i$

c) $\sqrt{3}+i$

d) $1+\sqrt{3}i$

(EEAR-2002) QUESTÃO 22

Sejam x e y os números reais que satisfazem a igualdade $i(x-2i)+(1-yi)=(x+y)-i$, onde i é a unidade imaginária. O módulo do número complexo $z=(x+yi)^2$ é igual a:

a) $\sqrt{5}$

b) 5

c) $2\sqrt{5}$

d) 2

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

Sendo i a unidade imaginária, a potência de $\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3$ é igual a:

a) 64

b) −64

c) 64i

d) −64i

(EEAR-2003) QUESTÃO 24

Sendo i a unidade imaginária, o resultado de $\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$ é:

a) $-1-3i$

b) $-13-39i$

c) $-\frac{13}{5}-\frac{39i}{5}$

d) $\frac{13}{5}+\frac{39i}{5}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 25

Sendo $\frac{1+i}{i}$ um número complexo, seu conjugado vale:

a) $\frac{1-i}{i}$

b) $-\frac{-1+i}{i}$

c) $1+i$

d) $\frac{i}{1+i}$

(EEAR-2004) QUESTÃO 26

A equação $x^2-4x+5=0$, no campo complexo, tem como conjunto verdade:

a) $\{2-i, 2+i\}$.

b) $\{2-2i, 2+2i\}$.

c) $\{1-i, 1+i\}$.

d) $\{4-i, 4+i\}$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 27

A soma dos possíveis números complexos z_1 e z_2, tais que $z_2 = 5+12i$, é:

a) 6.

b) 0.

c) 4i.

d) $3+2i$

(EEAR-2005) QUESTÃO 28

Sendo i a unidade imaginária, a potência $\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3$ é igual a:

a) 64.

b) −64.

c) 64i.

d) −64i.

(EEAR-2005) QUESTÃO 29

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\dfrac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos x - i \operatorname{sen} x}$ obtém-se:

a) $i(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$.

b) $i(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$.

c) $\cos 2x - i \operatorname{sen} 2x$.

d) $\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 30

Se $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}=i\cdot \text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$, então z^7 é igual ao produto de $8\sqrt{2}$ por:

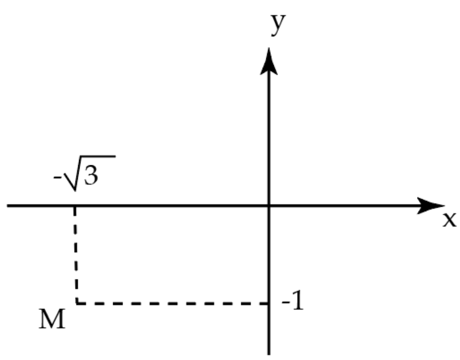
a) $\cos\frac{\pi}{4}=i\text{sen}\frac{\pi}{4}$

b) $\cos\frac{5\pi}{4}=i\text{sen}\frac{5\pi}{4}$

c) $\cos\frac{7\pi}{4}=i\text{sen}\frac{7\pi}{4}$

d) $\cos\frac{3\pi}{4}=i\text{sen}\frac{3\pi}{4}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 31



Seja M o afixo de um número complexo z. A forma polar de z é:

a) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\text{sen}\frac{4\pi}{3}$

c) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

d) $\cos\frac{7\pi}{6}+i\text{sen}\frac{7\pi}{6}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 32

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\frac{(3+i)^{71}\cdot(3-i)^{30}}{(i-3)^{29}\cdot(-3-i)^{70}}$, obtém-se:

a) −10.

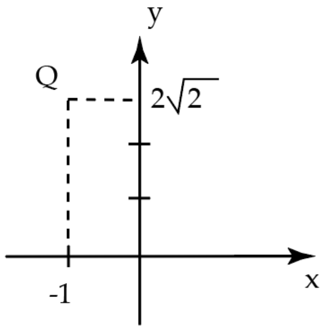
b) −8.

c) 8.

d) 10.

(EEAR-2006) QUESTÃO 33

Seja Q a imagem geométrica de um número complexo. O argumento desse número é:



a) $\text{arcsen}\frac{1}{3}$

b) $\text{arcsen}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\text{arccos}\frac{1}{3}$

d) $\text{arccos}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(EEAR-2006) QUESTÃO 34

Sendo $m-ni=i$ e $mi-n=1+3i$, os números complexos m e n são tais, que sua soma é igual a:

a) $-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}i$

b) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

c) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

(EEAR-2006) QUESTÃO 35

O produto $z \cdot z'$, sendo $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ e $z'=a\left(\cos\frac{3\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, pode ser expresso por:

a) $2a(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)$

b) $2a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

c) $a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

d) $a(\cos 2\pi+i\operatorname{sen} 2\pi)$

(EEAR-2007) QUESTÃO 36

O quadrante em que se representa, no plano de Argand-Gauss, o número complexo $z=1+i^3$ é o:

a) 1º.

b) 2º.

c) 3º.

d) 4º.

(EEAR-2007) QUESTÃO 37

A forma algébrica do número complexo $z=\frac{3}{3-i}+\frac{3+2i}{i-2}$ é:

a) $0,1-3i$.

b) $0,1-1,1i$.

c) $1,7+11i$.

d) $1-1,7i$.

(EEAR-2008) QUESTÃO 38

Dado $x \in \mathbb{R}$, para que o número $z = (2 - xi)(x + 2i)$ seja real, o valor de x pode ser:

a) 4.

b) 0.

c) −1.

d) −2.

(EEAR-2008) QUESTÃO 39

O módulo do complexo $z = -3 + 4i$ é:

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

(EEAR-2008) QUESTÃO 40

Calculando i^{2053} obtém-se:

a) 1.

b) i.

c) −i.

d) −1.

(EEAR-2009) QUESTÃO 41

Sejam dois números complexos z_1 e z_2. Se z_1 tem imagem $P(4, -1)$ e $z_2 = -1 + 3i$, então $z_1 - z_2$ é igual a:

a) $3 + 4i$.

b) $1 - 5i$.

c) $5 - 4i$.

d) $2 + 2i$.

(EEAR-2009) QUESTÃO 42

Se a forma algébrica de um número complexo é $-1+i$, então sua forma trigonométrica tem argumento igual a:

a) $\frac{5\pi}{6}$

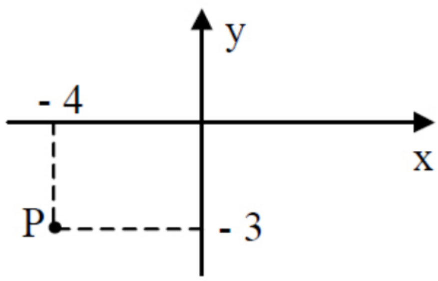
b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{4}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 43

Na figura, o ponto P representa um número complexo, cujo conjugado é:



a) $-3+4i$.

b) $-4+3i$.

c) $4-3i$.

d) $3-4i$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 44

O inverso do número complexo $z=-2i$ é $z'=$:

a) $\frac{i}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) -2

d) $2i$

(EEAR-2010) QUESTÃO 45

Seja o número complexo $z=1+i$. Se z' é o conjugado de z, então o produto $|z|\cdot|z'|$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) $\sqrt{3}$.

d) $2\sqrt{3}$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 46

O valor de $i^{11}-i^{21}-i^{38}$ é:

a) $1-2i$.

b) $2-i$.

c) −2.

d) 1.

(EEAR-2010) QUESTÃO 47

Multiplicando-se o número complexo $2-3i$ pelo seu conjugado, obtém-se:

a) 0.

b) −1.

c) 11.

d) 13.

(EEAR-2011) QUESTÃO 48

Seja z' o conjugado do número complexo $z = 1 - 3i$. O valor de $2z + z'$ é:

a) $3 - 3i$.

b) $1 - 3i$.

c) $3 + i$.

d) $1 + i$.

(EEAR-2011) QUESTÃO 49

O número complexo $z = (a - 4) + (b - 5)i$ será um número imaginário puro se:

a) $a = 4$ e $b = 5$.

b) $a = 4$ e $b \neq 5$.

c) $a \neq 4$ e $b = 5$.

d) $a \neq 4$ e $b \neq 5$.

(EEAR-2012) QUESTÃO 50

O módulo do número complexo $z = -1 + 3i$ é:

a) 1

b) 2

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{10}$

(EEAR-2013) QUESTÃO 51

Sejam ρ_1 e ρ_2, respectivamente, os módulos dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 - 2i$. Assim, $\rho_1 + \rho_2$ é igual a:

a) 5

b) $\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{5}$

(EEAR-2013) QUESTÃO 52

Se $z=3+2i$ é um número complexo, então z_2 é igual a:

a) $5+12i$.

b) $9+12i$.

c) $13+4i$.

d) $9+4i$.

(EEAR-2013) QUESTÃO 53

Seja z' o conjugado de um número complexo z. Sabendo que $z=a+bi$ e que $2z+z'=9+2i$, o valor de $a+b$ é:

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

(EEAR-2014) QUESTÃO 54

Se i é a unidade imaginária, pode-se afirmar que i^7 é igual a:

a) i.

b) i^2.

c) i^3.

d) i^4.

(EEAR-2015) QUESTÃO 55

Sejam z um número complexo e z' o conjugado de z. Se $z^1=z+z'$ e $z^2=z-z'$, pode-se garantir que:

a) z_1 é um número real e z_2 é um imaginário puro.

b) z_1 é um imaginário puro e z_2 é um número real.

c) z_1 e z_2 são imaginários puros.

d) z_1 e z_2 são números reais.

(EEAR-2015) QUESTÃO 56

Seja $z=\sqrt{3}\cdot(\cos 20^\circ + i\cdot \text{sen}\, 20^\circ)$ um número complexo na forma trigonométrica. Assim, z^2 é igual a:

a) $3\cdot(\cos 20^\circ + i\cdot \text{sen}\, 20^\circ)$

b) $3\cdot(\cos 40^\circ + i\cdot \text{sen}\, 40^\circ)$

c) $2\sqrt{3}\cdot(\cos 20^\circ + i\cdot \text{sen}\, 20^\circ)$

d) $2\sqrt{3}\cdot(\cos 40^\circ + i\cdot \text{sen}\, 40^\circ)$

(EEAR-2016) QUESTÃO 57

Sejam Z_1 e Z_2 dois números complexos. Sabe-se que o produto de Z_1 e Z_2 é $-10+10i$. Se $Z_1 = 1+2i$, então o valor de Z_2 é igual a:

a) $5+6i$

b) $2+6i$

c) $2+15i$

d) $-6+6i$

(EEAR-2016) QUESTÃO 58

Sabe-se que os números complexos $Z_1 = [2m(3+m)] + (3n+5)i$ e $Z_2 = (2m^2+12) + [4(n+1)]i$ são iguais. Então, os valores de m e n são, respectivamente:

a) 3 e 1

b) 2 e 1

c) 2 e −1

d) 3 e −1

(EEAR-2017) QUESTÃO 59

Considere $z_1 = (2+x) + (x^2 - 1)i$ e $z_2 = (m-1) + (m^2 - 9)i$. Se z_1 é um número imaginário puro e z_2 é um número real, é correto afirmar que $x+m$ pode ser igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

(EEAR-2017) QUESTÃO 60

Se i é a unidade imaginária, então $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand- Gauss no _____________ quadrante.

a) primeiro

b) segundo

c) terceiro

d) quarto

(EEAR-2018) QUESTÃO 61

Sejam os números complexos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 5i$ e $z_3 = z_1 + z_2$. O módulo de z_3 é igual a:

a) $4\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

(EEAR-2018) QUESTÃO 62

Dado o número complexo $z = a + bi$, se $z + z = 10$ e $z - z = -16i$, então $a+b$ é:

a) −6

b) −3

c) 2

d) 8

(EEAR-2019) QUESTÃO 63

A parte real das raízes complexas da equação $x^2 - 4x + 13 = 0$, é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

(EEAR-2019) QUESTÃO 64

Se i é a unidade imaginária dos números complexos, o valor de $i^{15} + i^{17}$ é:

a) −i

b) −1

c) 0

d) 1

(EFOMM-2005) QUESTÃO 65

Determine o valor de x para que o produto $(12 - 2i)\left[18 + (x - 2)i\right]$ seja um número real.

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

(EFOMM-2006) QUESTÃO 66

O inverso do complexo $2i$ é:

a) $\frac{1}{2}-i$

b) $\frac{1}{2}+i$

c) $\frac{i}{2}$

d) $\frac{-i}{2}$

e) -2

(EFOMM-2006) QUESTÃO 67

Qual o valor de e, que é um escalar real, em que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{e+2i}$ nula?

a) −4

b) −2

c) 1

d) 2

e) 4

(EFOMM-2007) QUESTÃO 68

O argumento do número complexo $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ é:

a) 45◦

b) 60◦

c) 90◦

d) 135◦

e) 225◦

(EFOMM-2008) QUESTÃO 69

Analise as afirmativas abaixo, sendo $z \in \mathbb{C}$:

I – Se $W = \dfrac{3i + 6\bar{z} - iz^2}{2 + 2z^2 + 3iz + 3|z|^2 + |z|}$ então podemos afirmar que $\overline{W} = \dfrac{-3i + 6z + i\bar{z}^2}{2 + 2z^2 - 3i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + |\bar{z}|}$.

II – Dado $|z - 3i| = 2$ podemos afirmar que é uma circunferência de centro (0, 3) e raio 2.

III – A forma trigonométrica de $w = 6i$ é $w = 6\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + i\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$.

IV – Sabe-se que −1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$. Logo, as outras raízes são números inteiros.

a) As afirmativas I e IV são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) As afirmativas II e IV são falsas.

d) As afirmativas I e II são verdadeiras.

e) Apenas a afirmativa II é falsa.

(EFOMM-2008) QUESTÃO 70

É bem conhecida a relação $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, onde θ é um ângulo em radianos e $i = \sqrt{-1}$. Dada a relação, podemos concluir que se θ é um número imaginário puro da forma bi, onde $b \in \mathbb{R}0$, $\cos\theta$ é um número:

a) entre −1 e 1

b) maior que −1 e menor que 0

c) maior que 1

d) igual a 1

e) imaginário puro.

(EFOMM-2009) QUESTÃO 71

Qual é o menor valor do número natural positivo n para que $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$, onde i é a unidade imaginária, seja um número real?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

(EFOMM-2010) QUESTÃO 72

Considere o conjunto dos números complexos z com a propriedade $|z+169i| \leq 65$, admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é igual a:

a) $60-144i$

b) $65-169i$

c) $-104i$

d) $-65-169i$

e) $65-156i$

(EFOMM-2011) QUESTÃO 73

Sejam os números complexos z tais que $\frac{1}{3}|z| = |z+1|$. O lugar geométrico das imagens desses números complexos é uma:

a) parábola

b) reta

c) circunferência de raio $\frac{3}{8}$

d) circunferência de raio $\frac{3}{2}$

e) hipérbole

(EFOMM-2012) QUESTÃO 74

A solução da equação $|z| + z = 1+3i$ é um número complexo de módulo:

a) $\frac{5}{4}$

b) 5

c) $\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{5}{2}$

(EFOMM-2013) QUESTÃO 75

Se os números reais x e y são soluções da equação $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\frac{1}{x+iy}=1+i$, então $5x+15y$ é igual a:

a) 0

b) −1

c) 1

d) $\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2}$

(EFOMM-2014) QUESTÃO 76

Sabendo-se que a raiz quadrada do número complexo $-16+30i$ é $(a+bi)$ ou $(c+di)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a>0$, pode-se afirmar que o valor de $a+d$ é:

a) +2.

b) +1.

c) 0.

d) −1.

e) −2.

(EFOMM-2015) QUESTÃO 77

Considere o número complexo $z_1 \neq 1$, tal que z_1 seja solução da equação $z^6=1$, com menor argumento positivo. A solução z_2 da mesma equação, cujo argumento é o triplo do argumento de z_1, é igual a:

a) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) -1

d) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(EFOMM-2016) QUESTÃO 78

Seja o número complexo $z=-1-\sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z=256\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z=256\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z=256\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z=256\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z=256(\cos 2\pi+i\operatorname{sen} 2\pi)$

(EFOMM-2016) QUESTÃO 79

O número complexo, $z=|z|\cdot(\cos\theta+i\cdot\operatorname{sen}\theta)$, sendo i a unidade imaginária e $0\leq\theta\leq 2\pi$, que satisfaz a inequação $|z+3i|\leq 2$ e que possui o menor argumento θ, é:

a) $z=-\frac{5}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{3}i$

b) $z=-\frac{5}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{3}i$

c) $z=-\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{5}{3}i$

d) $z=-\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{5}{3}i$

e) $z=-2\sqrt{5}-5i$

(EFOMM-2018) QUESTÃO 80

Resolvendo $1+i+i^2+\ldots+i^n$, com $n=4k+1$ e $k\in\mathbb{Z}$ (números inteiros), obtemos:

a) i^n

b) $1+i^n$

c) 1

d) $1+i^2$

e) $1+i$

(EFOMM-2018) QUESTÃO 81

Resolvendo o sistema $\begin{cases}|z-2|=|z+4|\\|z-3|+|z+3|=10\end{cases}$, para z complexo, encontramos como solução:

a) $-1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i;-1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

b) $+1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i;+1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

c) $-1+\frac{6\sqrt{8}}{5}i;-1-\frac{6\sqrt{8}}{5}$

d) $+1+\frac{6\sqrt{8}}{5}i;+1-\frac{6\sqrt{8}}{5}$

e) $+1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i;-1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

---

5 – Questões Comentadas

QUESTÃO 01

Resolvendo a equação $x^2-4x+5=0$ encontramos as seguintes raízes:

a) $2+i$ e $2-i$.

b) 2 e −2.

c) $-2+i$ e $-2-i$.

d) Não há raízes.

Comentário:

Aplicando a fórmula de Bháskara, calculemos o Δ dessa equação:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(-4)^2-4\cdot1\cdot5\\ &=16-20\\ &=-4\end{aligned}$$

Veja que, em geral, diríamos que essa equação não tem solução. Mas não é bem isso, é que ela não tem solução real! Mas ela tem sim solução complexa. Veja:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{-4}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$

Agora veja que, pelas propriedades de radiciação:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}$$

$$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$$

Mas veja que, como vimos há pouco, $i=\sqrt{-1}$, logo:

$$=2i$$

Então, podemos concluir que:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 2i}{2}$$

$$=2\pm i$$

Logo, há duas raízes: $x=2+i$ e $x=2-i$.

Gabarito: A

(EEAR-2001) QUESTÃO 02

Seja $m\in R$. Para que o produto $(2+mi)\cdot(3+i)$ seja um número imaginário puro, o valor de m deve ser:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

Comentário:

Efetuando a multiplicação:

$$(2+mi)\cdot(3+i)=6+2i+3mi+mi^2$$

$$=6+2i+3mi-m$$

$$=(6-m)+(2+3m)i$$

Para que seja imaginário puro, bastará que $6-m$ seja nulo, isto é, $m=6$.

Gabarito: B

QUESTÃO 03

Considere os seguintes números complexos: $z_1=3+4i$, $z_2=5-12i$ e $z_3=-8+15i$. Podemos afirmar que:

a) $|z_1|<|z_2|<|z_3|$

b) $|z_1|>|z_2|>|z_3|$

c) $|z_1|<|z_2|$ e $|z_2|>|z_3|$

d) $|z_1|>|z_2|$ e $|z_2|<|z_3|$

Comentário:

Basta aplicarmos diretamente a fórmula apresentada para o cálculo do módulo. Calculando $|z_1|$:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

Calculando $|z_2|$:

$$|z_2| = \sqrt{5^2 + (-12)^2}$$
$$= \sqrt{25+144}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13$$

Por fim, calculando $|z_3|$:

$$|z_3| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2}$$
$$= \sqrt{64+255}$$
$$= \sqrt{289}$$
$$= 17$$

Visto que $5 < 13 < 17$, temos $|z_1| < |z_2| < |z_3|$.

Gabarito: A

QUESTÃO 04

Considere os complexos $z_1 = 3 + 24i$, $z_2 = 7 + 26i$ e $z_3 = 1 + 10i$. Podemos afirmar que $|z_1 + z_2 - z_3|$ vale:

a) 41

b) 46

c) 49

d) 51

Comentário:

Façamos primeiro o cálculo do complexo proposto:

$$z_1 + z_2 - z_3 = 3 + 24i + 7 + 26i - (1 + 10i)$$
$$= 10 + 50i - 1 - 10i$$
$$= 9 + 40i$$

Calculando o módulo:

$$|z_1+z_2-z_3|=\sqrt{9^2+40^2}$$
$$=\sqrt{81-1600}$$
$$=\sqrt{1681}$$
$$=41$$

Gabarito: A

QUESTÃO 05

Acerca do número $(2+3i)(7-4i)-26$, podemos afirmar que se trata de um:

a) número imaginário puro

b) número real puro

c) número complexo de módulo $\sqrt{13}$

d) número complexo de módulo nulo

Comentário:

Efetuando a conta:

$$(2+3i)(7-4i)-26=14-8i+21i-12\cdot i^2-26$$
$$=14+13i+12-26$$
$$=13i$$

Logo, como a parte real é nula, trata-se de um número imaginário puro.

Gabarito: A

(ESSA-2014) QUESTÃO 06

O número complexo i^{102}, onde i representa a unidade imaginária,

a) é positivo.

b) é imaginário puro.

c) é real.

d) está na forma trigonométrica.

e) está na forma algébrica.

Comentário:

Basta dividirmos o expoente por 4 e substituirmos o expoente pelo resto da divisão, como acabamos de ver:

$$\begin{array}{r|l} 102 & 4 \\ \hline 22 & 25 \\ 2 & \end{array}$$

Então:

$$i^{102} = i^2$$
$$= -1$$

Trata-se, portanto, de um número real.

Gabarito: C

QUESTÃO 07

Calcule o valor do módulo do complexo $z = \dfrac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentário:

Primeiro, observe o que podemos fazer com o numerador da expressão dada, inicialmente colocando o 4 em evidência:

$$(4+4i)^{100} = \left[4\cdot(1+i)\right]^{100}$$
$$= 4^{100}\cdot(1+i)^{100}$$
$$= (22)^{100}\cdot(1+i)^{2\cdot 50}$$
$$= 2^{200}\cdot(1+i)^{2\cdot 50}$$
$$= 2^{200}\cdot\left[(1+i)^2\right]^{50}$$
$$= 2^{200}\cdot(2i)^{50}$$
$$= 2^{200}\cdot 2^{50}\cdot i^{50}$$
$$= 2^{250}\cdot i^{50}$$

Veja que 50 dividido por 4 deixa resto 2, logo:

$$(4+4i)^{100}=2^{250}\cdot i^2$$
$$=2^{250}\cdot(-1)$$

Substituindo na expressão apresentada:

$$z=\frac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$$
$$=\frac{2^{250}\cdot(-1)}{2^{250}}$$
$$=-1$$

Assim, temos: $|z|=|-1|=1$.

Gabarito: B

QUESTÃO 08

A parte real do complexo $z=\frac{2+3i}{1-5i}$ é o número real:

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 2

d) -2

Comentário:

Façamos o que foi sugerido, isto é, efetuemos o produto do numerados e pelo denominador pelo conjugado de $1-5i$:

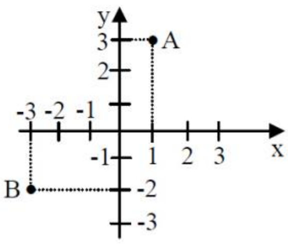
$$z=\frac{2+3i}{1-5i}$$
$$=\frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$
$$=\frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2+5^2}$$
$$=\frac{-13-13i}{26}$$
$$=\frac{-13}{26}+\frac{13}{26}i$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Logo, $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

Gabarito: B

QUESTÃO 09

Os números complexos que correspondem aos pontos A e B do gráfico são, respectivamente,



a) $(1+3i);(-3-2i)$

b) $(3+i);(-2-3i)$

c) $(-3-2i);(1+3i)$

d) $(-2-3i);(3+i)$

Comentário:

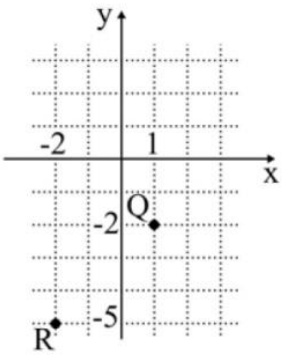
Veja que o complexo representado por A tem parte real 1 e parte imaginária 3; logo, trata-se do complexo $1+3i$ (perceba que isso já resolve a questão por eliminação).

O complexo B possui parte real −3 e parte imaginária −2; logo, trata-se do complexo $-3-2i$.

Gabarito: A

(EEAR-2019) QUESTÃO 10

Sejam $Z_1 = 3+3i$, Q e R as respectivas representações, no plano de Argand-Gauss, dos números complexos Z_2 e Z_3.



Assim, é correto afirmar que z_1 é igual a:

a) $z_2 - z_3$

b) $z_2 + z_3$

c) $-z_2 + z_3$

d) $-z_2 - z_3$

Comentário:

Sem mistérios, vamos achar z_2. O problema diz que z_2 é representado por Q. O afixo Q tem parte real 1 e parte imaginária −2; logo $z_2 = 1 - 2i$. O afixo R tem parte real −2 e parte imaginária −5; logo, $z_3 = -2 - 5i$. Veja também que, lembrando que $z_1 = 3 + 3i$:

$$z_2 - z_3 = (1 - 2i) - (-2 - 5i)$$
$$= 1 - 2i + 2 + 5i$$
$$= 3 + 3i$$
$$= z_1$$

Logo, $z_1 = z_2 - z_3$.

Gabarito: A

QUESTÃO 11

Calcule o argumento do complexo $\sqrt{3} - i$.

a) $\frac{5\pi}{6}$

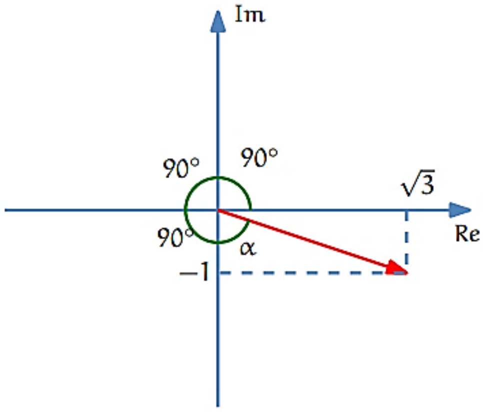
b) $\frac{7\pi}{6}$

c) $\frac{9\pi}{6}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

Comentário:

Primeiro, marquemos esse complexo no plano de Argand-Gauss:



Veja que no triângulo retângulo formado embaixo, podemos usar de trigonometria para calcularmos o ângulo α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Daí, portanto, o argumento desse complexo é:

$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 330^\circ$.

Porém, devemos passar esse argumento para radianos (lembrando que, para isso, basta multiplica por $\frac{\pi}{180^\circ}$, basta efetuar essa multiplicação):

$$330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{330^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$= \frac{33\pi}{18}$$

$$= \frac{11\pi}{6}$$

Não se preocupe quanto ao entendimento que possa vir a estar defasado no momento. Reveremos todo esse conteúdo na forma de exercícios. Agora, estudaremos a famosa e um pouco mais complicada segunda forma dos números complexos: a forma trigonométrica. Vamos lá, então!

Propriedades algébricas do módulo.

Seguem as principais propriedades algébricas:

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\text{Im}(z)| \leq |z|$;
- $|z| \geq 0$.

Vejamos uma aplicação direta dessas propriedades:

Gabarito: D

(ESSA-2013) QUESTÃO 12

Com relação aos números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 - i$, onde i é a unidade imaginária, é correto afirmar:

a) $z_1 \cdot z_2 = -3 + i$

b) $|z_1| = \sqrt{2}$

c) $|z_2| = \sqrt{5}$

d) $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{10}$

e) $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$

Comentário:

Comentemos alternativa por alternativa:

a) Façamos os cálculos:

$$\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = (2+i) \cdot (1-i) \\
&= 2 \cdot 1 - 2 \cdot i + i \cdot 1 - i \cdot i \\
&= 2 - 2i + i + 1 \\
&= 3 - i
\end{aligned}$$

Vemos que não foi o que a alternativa disse que daria o cálculo, portanto, não se trata dessa alternativa.

b) Lembrando da definição de módulo:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{4+1}$$
$$= \sqrt{5}$$

Alternativa falsa.

(c) Novamente, utilizando a definição de módulo:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1}$$
$$= \sqrt{2}$$

Alternativa falsa.

d) Utilizando-nos das duas alternativas anteriores das propriedades que estudamos sobre módulos:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{10}$$

Alternativa verdadeira.

e) Façamos os cálculos:

$$|z_1 + z_2| = |2 + i + 1 - i|$$
$$= |3|$$
$$= 3$$

Alternativa falsa.

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

O valor de m, para que o módulo do número complexo $z = (m+2i)(1+i)$ seja igual a 4, é:

a) ± 1

b) ± 2

c) ± 3

d) zero

Comentário:

Façamos os cálculos utilizando as propriedades de módulos:

$$|Z| = |(m+2i)(1+i)| = 4$$
$$|(m+2i)| \cdot |(1+i)| = 4$$
$$\sqrt{m^2+4} \cdot \sqrt{1^2+1^2} = 4$$
$$\sqrt{(m^2+4)\cdot 2} = 4$$
$$(m^2+4)\cdot 2 = 16$$
$$m^2+4 = 8$$
$$m^2 = 4$$
$$m = \pm 2$$

Gabarito: B

(EEAR-2001) QUESTÃO 14

Seja o número complexo $z = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ i^3 & 1 & -i \end{vmatrix}$. A forma trigonométrica de z é:

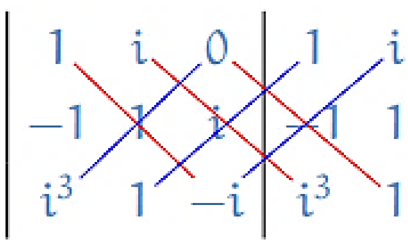
a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

Comentário:

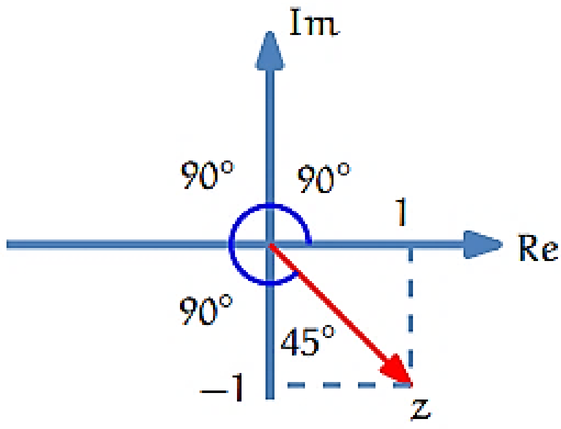


$$= -i + i^5 + 0 - 0 - i - i^2$$
$$= -i + i - i - (-1)$$
$$= 1 - i.$$

Calculando o módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$|z| = \sqrt{1+1}$$
$$|z| = \sqrt{2}$$

Agora, achando o argumento. Desenhando esse complexo no plano de Argand-Gauss:



O argumento desse complexo é, portanto:

$$\varphi = 90° + 90° + 90° + 45°$$
$$= 315°$$

Passando esse ângulo para sua forma em radianos:

$$315° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{315°\pi}{180°} = \frac{7\pi}{4}.$$

Esse número complexo, na forma trigonométrica será, então:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right).$$

Gabarito: A

(EEAR-2002) QUESTÃO 15

Um quadrado ABCD está inscrito num círculo com centro na origem do plano de Gauss. O vértice A é imagem do complexo $3+4i$. Os afixos dos outros três vértices são os complexos:

a) $-3+4i; -3-4i; 3-4i$.

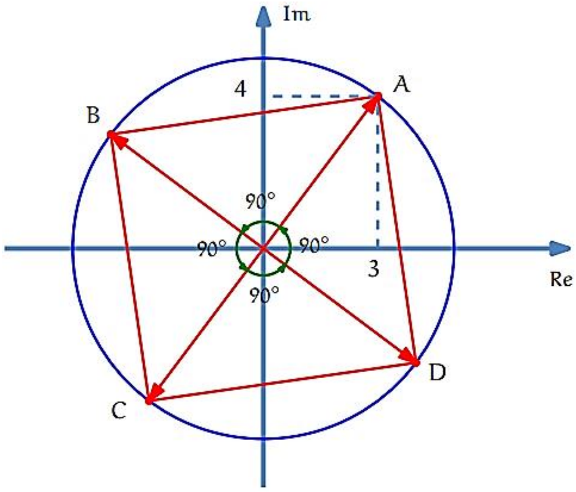
b) $-4+3i; -3-4i; 4-3i$.

c) $-4+3i; -3-4i; 3-4i$.

d) $-3+4i; -3-4i; 4-3i$.

Comentário:

Observe a figura proposta:



Como já dito, quando multiplicamos um complexo qualquer pelo fator $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, nós rotacionamos esse complexo no plano num ângulo anti-horário α. Veja que cada vértice dista do anterior num ângulo de 90°, então, cada vértice pode ser alcançada multiplicando seu vértice anterior por:

$$\cos 90^\circ + i\operatorname{sen} 90^\circ = 0 + i\cdot 1 = i$$

Isso significa que, rotacionar um complexo em 90° anti-horários no plano é o mesmo que multiplicar por i.

Então, para alcançarmos o vértice B, basta multiplicarmos o complexo do vértice A da seguinte forma:

$$B = A\cdot i$$
$$= (3+4i)\cdot i$$
$$= 3i + 4i^2$$
$$= 3i - 4$$
$$= -4 + 3i$$

Chegando ao vértice C:

$$C = B\cdot i$$
$$= (-4+3i)\cdot i$$
$$= -4i + 3i^2$$
$$= -4i - 3$$
$$= -3 - 4i$$

E finalmente, para chegarmos ao vértice D:

$$\begin{aligned} D &= C \cdot i \\ &= (-3-4i)\cdot i \\ &= -3i-4i^2 \\ &= -3i+4 \\ &= 4-3i. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(ESSA-2018) QUESTÃO 16

Considere o número complexo $z = 2+2i$. Dessa forma, z^{100} :

a) é um número real negativo.

b) tem argumento $\frac{\pi}{4}$.

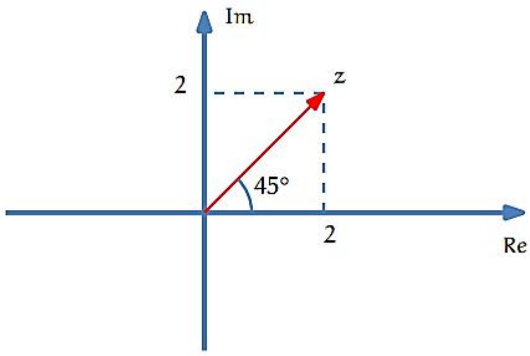
c) é um número real positivo.

d) tem módulo igual a 1.

e) é um número imaginário puro.

Comentário:

Há duas formas de resolvermos esse exercício. Façamos das duas formas. A primeira é passarmos z para a forma trigonométrica e utilizarmos a primeira Lei de De Moivre. Como acabamos de vê-la, comecemos fazendo por ela. Vejamos:



O módulo desse complexo é: $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. O argumento desse complexo é $\varphi = 45°$. Logo, na forma trigonométrica, esse complexo se torna:

$$z = 2\sqrt{2}\cdot(\cos 45° + i \cdot \text{sen}\, 45°)$$

Daí, pela primeira lei de De Moivre:

$$=2\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot \text{sen}\, 45^\circ)$$
$$z^{100}=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cdot(\cos 4500^\circ + i\cdot \text{sen}\, 4500^\circ)$$

Para calcularmos seno e cosseno de ângulos maiores que 360°, basta dividimo-los por 360° e considerarmos apenas o resto:

$$\begin{array}{l|l} 4500 & 360 \\ \hline \;\;900 & 12 \\ \;\;180 & \end{array}$$

Daí então:

$$z^{100}=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cdot(\cos 4500^\circ + i\cdot \text{sen}\, 4500^\circ)$$
$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot \text{sen}\, 180^\circ)$$
$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cdot(-1+i\cdot 0)$$
$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cdot(-1)$$

Não precisamos nem continuar a conta, porque a parte imaginária i sumiu, o que faz desse número um número real. O −1 que multiplica a expressão faz desse número um número real negativo, que caracteriza o dito na alternativa A. Um outro modo de fazermos esse exercício é utilizarmos o seguinte truque algébrico (que só funciona para potências pares de $1+i$):

$$z=2+2i$$
$$z=2(1+i)$$
$$z^{100}=\left[2(1+i)\right]^{100}$$
$$=2^{100}\cdot(1+i)^{100}$$
$$=2^{100}\cdot(1+i)^{2\cdot 50}$$
$$=2^{100}\cdot\left[(1+i)^2\right]^{50}$$
$$=2^{100}\cdot\left(1+2i+i^2\right)^{50}$$
$$=2^{100}\cdot(1+2i-1)^{50}$$
$$=2^{100}\cdot(2i)^{50}$$
$$=2^{100}\cdot 2^{50}\cdot i^{50}$$

Veja que:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 4 \\ \hline 10 & 12 \\ \;\;2 & \end{array}$$

Logo:

$$z^{100} = 2^{100} \cdot 2^{50} \cdot i^2$$
$$= 2^{100} \cdot 2^{50} \cdot (-1)$$

Trata-se de um número real negativo, como encontrado antes.

Gabarito: A

(ESSA-2009) QUESTÃO 17

O valor da expressão $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ quando $x = i$ é:

a) $\frac{i+1}{2}$

b) $1-i$

c) $-(1-i)$

d) $\frac{-(1-i)}{2}$

e) $\frac{1-i}{2}$

Comentário:

Basta fazermos as contas, jovem:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{i^2-1}{i^3-1}$$

Como $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, temos:

$$= \frac{-1-1}{-i-1}$$
$$= \frac{-2}{-i-1}$$
$$= \frac{2}{1+i}$$

Multiplicando a expressão em cima e embaixo por $1-i$ conseguimos racionalizar a expressão:

$$= \frac{2 \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)}$$
$$= \frac{2 \cdot (1-i)}{1^2 - i^2}$$

$$=\frac{2\cdot(1-i)}{1-(-1)}$$

$$=\frac{2\cdot(1-i)}{1+1}$$

$$=\frac{2\cdot(2-i)}{2}$$

$$=1-i$$

Gabarito: B

(ADAPTADA ESSA-2011) QUESTÃO 18

Seja uma função o $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $f(x)=2(\cos 2x+i\cdot \text{sen}\, 2x)$. Calcule o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

a) $\sqrt{3}+i$

b) $1+i\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}-i$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Comentário:

Substitua o valor de x pelo que a questão pede e faça as contas:

$$f(x)=2(\cos 2x+i\cdot \text{sen}2x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot \text{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Aqui devemos nos lembrar de que π radianos equivale a um arco de 180°, portanto $\frac{\pi}{3}$ equivale a um arco de $\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$, daí:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2(\cos 60^\circ+i\cdot \text{sen}\, 60^\circ)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1+i\cdot\sqrt{3}$$

Gabarito: B

(ESSA-2015) QUESTÃO 19

A parte real do número complexo $\frac{1}{(2i)^2}$ é:

a) $-\frac{1}{4}$

b) -2

c) 0

d) $\frac{1}{4}$

e) 2

Comentário:

Fazendo as contas:

$$\frac{1}{(2i)^2}=\frac{1}{4\cdot i^2}$$

$$=\frac{1}{4\cdot(-1)}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

Daí, a parte real de $-\frac{1}{4}$ é o próprio $-\frac{1}{4}$.

Gabarito: A

(EEAR-2000) QUESTÃO 20

Sejam A, z_1 e z_2 as representações gráficas dos complexos $0+0i$, $2+3i$ e $-5-i$, respectivamente. A menor determinação positiva do ângulo $z_1 A z_2$ é:

a) 135°

b) 150°

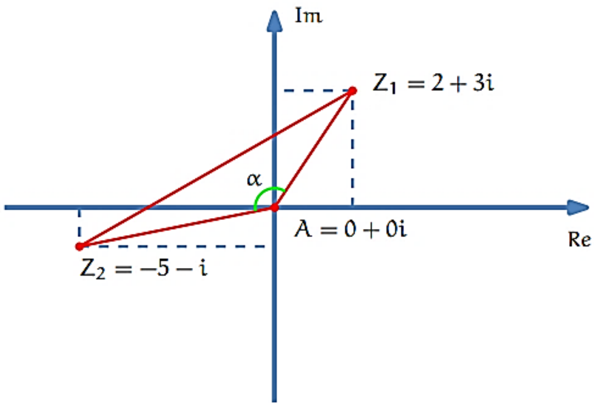
c) 210°

d) 225°

Comentário:

Há duas formas de fazermos esse exercício, e ambas utilizam conteúdos de geometria analítica. Para não haver desespero pela falta de entendimento, aconselhamos o estudante a pular esse específico exercício caso ainda não tenha estudado tal conteúdo.

Façamos primeiro utilizando a lei dos cossenos. Depois utilizaremos a teoria de vetores, ambos assuntos de geometria analítica. Marquemos os três complexos nos planos e evidenciemos os seus afixos:



Veja que formamos um triângulo. Um de seus lados mede exatamente o módulo de z_1, que é:

$$|z_1| = \sqrt{2^2+3^2}$$

$$= \sqrt{4+9}$$

$$= \sqrt{13}$$

Outro lado desse triângulo mede $|z_2|$:

$$|z_2| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{25+1}$$

$$= \sqrt{26}$$

O terceiro e último lado medirá a distância entre os pontos (2, 3) e (−5, −1), que pode ser calculada pela seguinte fórmula (da matéria de geometria analítica):

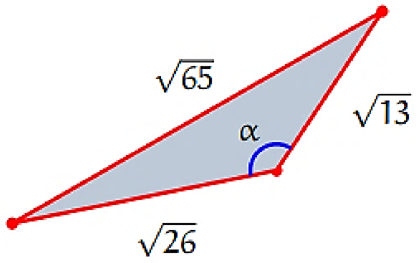
$$d=\sqrt{(-5-2)^2+(-1-3)^2}$$

$$=\sqrt{(-7)^2+(-4)^2}$$

$$=\sqrt{49+16}$$

$$=\sqrt{65}$$

Nosso triângulo fica assim:



Aplicando a lei dos cossenos:

$$\left(\sqrt{65}\right)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\alpha$$

$$65=26+13-2\cdot\sqrt{13\cdot 26}\cdot\cos\alpha$$

$$65=39-2\cdot\sqrt{13\cdot 13\cdot 2}\cdot\cos\alpha$$

$$65-39=-2\cdot 13\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$

$$26=-26\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$

$$1=-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=135^\circ$$

Uma outra forma de fazermos é utilizarmos a teoria de vetores. O ângulo α formado entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser calculado por:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u\cdot v}$$

Os vetores são $\vec{u}=(2,3)$ e $\vec{v}=(-5,-1)$, logo:

$$\cos\alpha=\frac{(2,3)\cdot(-5,-1)}{|(2,3)|\cdot|-5,-1|}$$

$$=\frac{2\cdot(-5)+3\cdot(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-10-3}{\sqrt{13 \cdot 26}}$$

$$= \frac{-13}{\sqrt{13 \cdot 13 \cdot 2}}$$

$$= \frac{-13}{13\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

E daí $\alpha = 135°$, como concluído antes.

Gabarito: A

(EEAR-2002) QUESTÃO 21

Seja z um número complexo, cujo módulo é 2 e cujo argumento é $\frac{\pi}{3}$. A forma algébrica do conjugado de z é:

a) $1-\sqrt{3}i$

b) $\sqrt{3}-i$

c) $\sqrt{3}+i$

d) $1+\sqrt{3}i$

Comentário:

É só montarmos e efetuarmos a conta:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \cdot (\cos 60° + i\,\mathrm{sen}\, 60°)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{3}i.$$

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 22

Sejam x e y os números reais que satisfazem a igualdade $i(x-2i)+(1-yi)=(x+y)-i$, onde i é a unidade imaginária. O módulo do número complexo $z=(x+yi)^2$ é igual a:

a) $\sqrt{5}$

b) 5

c) $2\sqrt{5}$

d) 2

Comentário:

Vamos desenvolver a equação dada:

$$i(x-2i)+(1-yi)=(x+y)-i$$

$$xi-2i^2+1-yi=x+y-i$$

$$xi+2+1-yi-x-y+i=0$$

$$(3-x-y)+(x-y+1)i=0.$$

Logo, temos que $3-x-y=0$ e $x-y+1=0$, isto é:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$2x=2$$
$$x=1$$

Substituindo na primeira equação:

$$x+y=3$$
$$1+y=3$$
$$y=2$$

Desejamos calcular o módulo de $z=(x+yi)^2$, isto é, o módulo de $z=(1+2i)^2$. Veja que $|1+2i|=-1^2+2^2=\sqrt{5}$. Logo:

$$|z| = \left|(1+2i)^2\right|$$
$$|z| = |1+2i|^2$$
$$|z| = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$|z| = 5$$

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

Sendo i a unidade imaginária, a potência de $\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3$ é igual a:

a) 64

b) −64

c) 64i

d) −64i

Comentário:

Basta efetuarmos as contas:

$$\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3 = \left[1-2i+i^2-\left(1+2i+i^2\right)\right]^3$$
$$=\left(1-2i+i^2-1-2i-i^2\right)^3$$
$$=(4i)^3$$
$$=(-4)^3\cdot i^3$$
$$=-64\cdot(-i)$$
$$=64i$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 24

Sendo i a unidade imaginária, o resultado de $\dfrac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$ é:

a) $-1-3i$

b) $-13-39i$

c) $-\frac{13}{5}-\frac{39i}{5}$

d) $\frac{13}{5}+\frac{39i}{5}$

Comentário:

Comecemos a fazer os cálculos:

$$\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}=\frac{18-12i+12i-8i^2}{-1+3i}$$

$$=\frac{18+8}{-1+3i}$$

$$=\frac{26}{-1+3i}$$

$$=\frac{26\cdot(-1-3i)}{(-1+3i)\cdot(-1-3i)}$$

$$=\frac{-26-78i}{(-1)^2+(-3)^2}$$

$$=\frac{-26-78i}{1+9}$$

$$=\frac{-26-78i}{10}$$

$$=\frac{-13-39i}{5}$$

$$=-\frac{13}{5}-\frac{39i}{5}$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 25

Sendo $\frac{1+i}{i}$ um número complexo, seu conjugado vale:

a) $\frac{1-i}{i}$

b) $-\frac{-1+i}{i}$

c) $1+i$

d) $\frac{i}{1+i}$

Comentário:

Façamos os cálculos, racionalizando a expressão dada:

$$\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)\cdot i}{i\cdot i}$$

$$=\frac{i+i^2}{i^2}$$

$$=\frac{i-1}{-1}$$

$$=1-i$$

O conjugado de $1-i$ é $1+i$.

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 26

A equação $x^2-4x+5=0$, no campo complexo, tem como conjunto verdade:

a) $\{2-i,2+i\}$.

b) $\{2-2i,2+2i\}$.

c) $\{1-i,1+i\}$.

d) $\{4-i,4+i\}$.

Comentário:

Aplicando a fórmula de Báskara para achar o Delta na equação x^2 -4x + 5 = 0, temos:

$\Delta = 4^2 - 4x1x5 = 16 - 20 = -4$

Sabemos que $\sqrt{-1}$ = i. Então, podemos dizer:

$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)x(4)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$

Assim, da fórmula de Báskara:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2x1} = \frac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$

Temos, assim, duas raízes complexas: 2+i e 2-i. O conjunto solução é, portanto:

x = {2-i, 2+i}

Gabarito: A

(EEAR-2004) QUESTÃO 27

A soma dos possíveis números complexos z_1 e z_2, tais que $z_2 = 5 + 12\mathrm{i}$, é:

a) 6.

b) 0.

c) 4i.

d) $3 + 2\mathrm{i}$

Comentário:

Temos que $z^2 = 5 + 12i$. Se z é um número complexo, ele pode ser escrito da forma $z = a + bi$, em que a e b são *números reais*. Substituindo:

$z^2 = 5 + 12i \rightarrow (a + bi)^2 = 5 + 12i \rightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 \rightarrow$

$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$

Como a e b são reais, podemos igualar a parte real da esquerda da equação acima à parte real da direita, e a parte imaginária da esquerda à parte imaginária da direita. Caímos, assim, no sistema:

$$\begin{cases} 2abi = 12i \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{a} \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda:

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$$

Multiplicando tudo por a^2:

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

Caímos, assim, em uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que $x = a^2$. Aplicando Báskara:

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4x1x36 = 169$

Continuando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \rightarrow x = 9\ ou\ x = -4$$

Como $x = a^2$ e a é real, temos que $a^2 = -4$ não é uma solução válida, pois implicaria em a pertencente ao corpo dos complexos. Então, temos:

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3\ ou\ a = -3$

Substituindo os valores acima na equação obtida $b = \frac{6}{a}$:

$$b = \frac{6}{3}\ ou\ b = \frac{6}{-3} \rightarrow b = 2\ ou\ b = -2$$

Assim, temos as soluções:

$$\begin{cases} a = 3\ e\ b = 2 \\ a = -3\ e\ b = -2 \end{cases}$$

Se z é do tipo $a + bi$, temos:

$$\begin{cases} z_1 = 3 + 2i \\ z_2 = -3 - 2i \end{cases}$$

Por fim, a soma dos possíveis números complexos z_1 e z_2 é:

$z_1 + z_2 = 3 + 2i + (-3 - 2i) = 0$

Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 28

Sendo i a unidade imaginária, a potência $\left[(1-i)^2 - (1+i)^2\right]^3$ é igual a:

a) 64.

b) −64.

c) 64i.

d) −64i.

Comentário:

Seja $a = (1 - i)\ e\ b = (1 + i)$. Procura-se o valor de $[(1 - i)^2 - (1 + i)^2]^3$, ou seja, de $[a^2 - b^2]^3$. Contudo, $a^2 - b^2$ é uma diferença de quadrados que pode ser fatorada para:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Caindo em:

$(a+b)(a-b) = (1-i+1+i)(1-i-1-i) = (2)(-2i) = -4i$

Assim, o valor pedido é:

$[(1-i)^2 - (1+i)^2]^3 = [-4i]^3 = -64(-i) = 64i$

Gabarito: C

(EEAR-2005) QUESTÃO 29

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\frac{\cos x + i\,\text{sen}\,x}{\cos x - i\,\text{sen}\,x}$ obtém-se:

a) $i(\cos 2x - \text{sen}\,2x)$.

b) $i(\cos 2x + \text{sen}\,2x)$.

c) $\cos 2x - i\,\text{sen}\,2x$.

d) $\cos 2x + i\,\text{sen}2x$.

Comentário:

Primeiramente, devemos saber das propriedades da função seno e cosseno.

Por ser uma função par, vale a seguinte propriedade do cosseno:

$\cos(x) = \cos(-x)$

Por ser uma função ímpar, vale a seguinte propriedade do seno:

$sen(-x) = -sen(x)$

Com as propriedades acima em mente, a fração dada pode ser transformada em:

$$\frac{cosx + isenx}{cosx - isenx} = \frac{cosx + isenx}{\cos(-x) + isen(-x)}$$

Sabemos, também, que a expressão $cosx + isenx$ pode ser abreviada para $cis(x)$. Assim, a fração dada fica:

$$\frac{cosx + isenx}{\cos(-x) + isen(-x)} = \frac{cisx}{cis(-x)}$$

Sabemos, ainda, da propriedade trigonométrica dos números complexos. Na divisão de dois números complexos na forma $cosx + isenx$, mantemos o cis e subtraímos os argumentos:

$$\frac{cisx}{cis(-x)} = cis(x-(-x)) = cis(2x) = cos2x + isen2x$$

Gabarito: D

(EEAR-2005) QUESTÃO 30

Se $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}=i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$, então z^7 é igual ao produto de $8\sqrt{2}$ por:

a) $\cos\frac{\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

b) $\cos\frac{5\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$

c) $\cos\frac{7\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

d) $\cos\frac{3\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$

Comentário:

Temos $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Da fórmula de Moivre, temos:

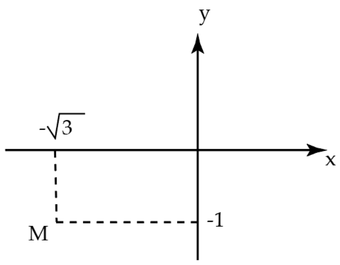
$$z^7 = (\sqrt{2})^7\left(cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^7 = 8\sqrt{2}cis\left(7x\frac{5\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}cis\left(\frac{35\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4} + 8\pi)$$

O argumento de z^7 é igual a $\frac{3\pi}{4}$ somado de um múltiplo inteiro de 2π. Assim, temos:

$$z^7 = 8\sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\ [\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\right) + \boldsymbol{isen}\left(\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\right)]$$

Gabarito: D

(EEAR-2005) QUESTÃO 31



Seja M o afixo de um número complexo z. A forma polar de z é:

a) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

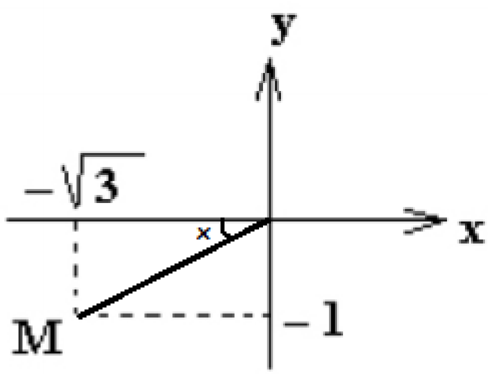
b) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$

c) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

d) $\cos\frac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$

Comentário:

Perceba a imagem:



O afixo do número complexo z será dado por $z = |z|\text{cis}(x + 180^0)$, em que:

$|z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 \rightarrow |z| = 2$

Achemos, agora, o ângulo x:

$\tan(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30^o$

Por fim, achamos z:

$$z = |z|\text{cis}(x + 180^0) = 2cis(30^o + 180^o) = 2cis(210^o) = 2cis(\frac{7\pi}{6})$$

$$z = 2(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{6}\right))$$

Gabarito: C

(EEAR-2005) QUESTÃO 32

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\frac{(3+i)^{71}\cdot(3-i)^{30}}{(i-3)^{29}\cdot(-3-i)^{70}}$, obtém-se:

a) −10.

b) −8.

c) 8.

d) 10.

Comentário:

Temos a expressão:

$$\frac{(3+i)^{71}(3-i)^{30}}{(i-3)^{29}(-3-i)^{70}} = \frac{(3+i)^{71}(3-i)^{30}}{(-1)^{29}(3-i)^{29}(-1)^{70}(3+i)^{70}}$$

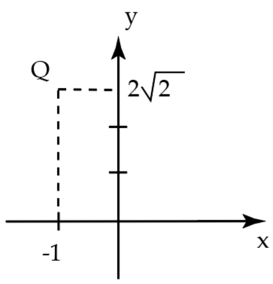
O -1 foi posto em evidência nos parênteses do denominador. Cortando, assim, os termos repetidos no numerador e denominador, temos:

$$\frac{(3+i)^1(3-i)^1}{(-1)^{29}} = \frac{(3^2 - i^2)}{-1} = \frac{10}{-1} = -10$$

Gabarito: A

(EEAR-2006) QUESTÃO 33

Seja Q a imagem geométrica de um número complexo. O argumento desse número é:



a) $\text{arcsen}\dfrac{1}{3}$

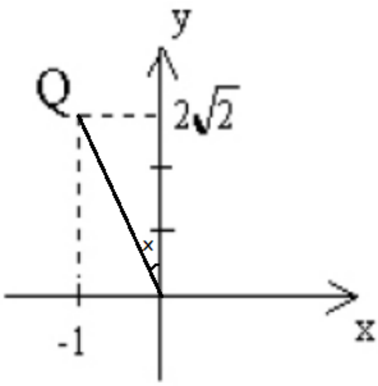
b) $\text{arcsen}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\text{arccos}\dfrac{1}{3}$

d) $\text{arccos}\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Comentário:

Perceba a imagem:



O argumento da imagem geométrica em Q é igual a 90º somado de x. Temos que x é o ângulo do triângulo retângulo formado pelos catetos 1 e $2\sqrt{2}$, com hipotenusa 3.

Temos:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Disso, temos que o argumento em Q é y, tal que:

$$seny = sen(90^o + x) = sen90^o cosx + senxcos90^o = cosx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$seny = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow y = arcsen(\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

Gabarito: B

(EEAR-2006) QUESTÃO 34

Sendo $m-ni=i$ e $mi-n=1+3i$, os números complexos m e n são tais, que sua soma é igual a:

a) $-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}i$

b) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

c) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

Comentário:

Temos o sistema:

$$\begin{cases} m - ni = i \\ mi - n = 1 + 3i \end{cases}$$

Multiplicando a equação de cima por -i:

$$\begin{cases} -mi - n = 1 \\ mi - n = 1 + 3i \end{cases}$$

Somando as 2 equações, caímos em:

$$-2n = 2 + 3i \rightarrow n = \ -1 - \frac{3}{2}i$$

Substituindo o valor de n na segunda equação:

$$mi - n = 1 + 3i \rightarrow mi = 1 + 3i + n = 1 + 3i - 1 - \frac{3}{2}i \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

Com $n = \ -1 - \frac{3}{2}i\ e\ m = \ \frac{3}{2}$, achamos a soma m+n:

$$m+n=-1-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}\rightarrow m+n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

Gabarito: C

(EEAR-2006) QUESTÃO 35

O produto $z\cdot z'$, sendo $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ e $z'=a\left(\cos\frac{3\pi}{4}=i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, pode ser expresso por:

a) $2a(\cos 0+i\operatorname{sen}0)$

b) $2a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

c) $a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

d) $a(\cos 2\pi+i\operatorname{sen}2\pi)$

Comentário:

Temos:

$$z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z'=a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=a\ cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Da fórmula de Moivre, ao multiplicar-se dois cis – número completo na fórmula trigonométrica – , o resultado é um cis com o argumento igual a soma dos argumentos anteriores. Assim:

$z.z'=2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right).a\ cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2a.cis\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=2a.cis(2\pi)=2a.cis(0)$, pois 0 rad é o equivalente a 2π rad (uma volta completa). Por fim:

$$z.z'=2a.cis(0)$$

Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 36

O quadrante em que se representa, no plano de Argand-Gauss, o número complexo $z=1+i^3$ é o:

a) 1º.

b) 2º.

c) 3º.

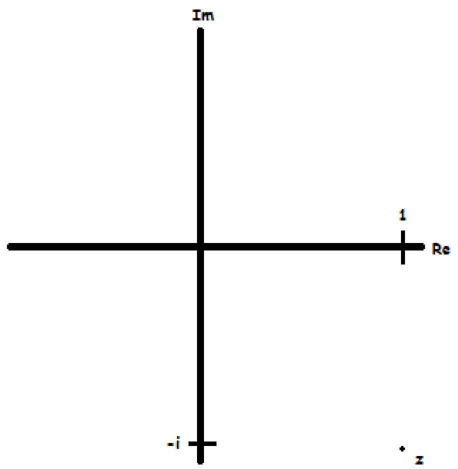
d) 4º.

Comentário:

Temos:

$z = 1 + i^3 = 1 - i$, pois $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

Assim, $z = 1 - i$, um número complexo com a parte real (1) maior do que zero e a parte imaginária (-i) acompanhada de -1, um número menor do que zero. Como o eixo horizontal representa a parte real e o eixo vertical representa a parte imaginária, temos o complexo z pertencente ao 4º quadrante:



Gabarito: D

(EEAR-2007) QUESTÃO 37

A forma algébrica do número complexo $z=\frac{3}{3-i}+\frac{3+2i}{i-2}$ é:

a) $0,1-3i$.

b) $0,1-1,1i$.

c) $1,7+11i$.

d) $1-1,7i$.

Comentário:

Temos a expressão:

$$z = \frac{3}{3-i} + \frac{3+2i}{i-2}$$

Multipliquemos pelo conjugado do denominador em cima e em baixo nas duas frações:

$$z = \frac{3(3+i)}{(3-i)(3+i)} + \frac{(3+2i)(-i-2)}{(i-2)(-i-2)} = \frac{9+3i}{3^2-i^2} + \frac{(-3i-6+2-4i)}{((-2)^2-(-i)^2)} \rightarrow$$

Continuando:

$$z = \frac{9+3i}{10} + \frac{(-4-7i)}{5} = \frac{9+3i}{10} + \frac{(-8-14i)}{10} \rightarrow$$

Por fim:

$$z = \frac{9+3i-8-14i}{10} \rightarrow z = \frac{1-11i}{10} \rightarrow z = 0{,}1 - 1{,}1i$$

Gabarito: B

(EEAR-2008) QUESTÃO 38

Dado $x \in \mathbb{R}$, para que o número $z=(2-xi)(x+2i)$ seja real, o valor de x pode ser:

a) 4.

b) 0.

c) −1.

d) −2.

Comentário:

Queremos x real para que o número $z=(2-xi)(x+2i)$ seja também real. Multiplicando:

$$z = (2-xi)(x+2i) = 2x + 4i - x^2 i + 2x = 4x + i(4-x^2)$$

Para que z seja real, basta que a parte imaginária de $z = 4x + i(4-x^2)$ seja zero. Então:

$i(4 - x^2) = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \; ou \; x = -2$

Gabarito: D

(EEAR-2008) QUESTÃO 39

O módulo do complexo $z = -3 + 4i$ é:

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

Comentário:

Temos $z = -3 + 4i$. Para achar-se o módulo de um número complexo do tipo $x = a + bi$, fazemos $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$. No caso da questão, $a = -3 \; e \; b = 4$. Assim:

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 =} \sqrt{25} = 5$

Gabarito: C

(EEAR-2008) QUESTÃO 40

Calculando i^{2053} obtém-se:

a) 1.

b) i.

c) −i.

d) −1.

Comentário:

O método para se encontrar qualquer potência de i é simples: i^x é equivalente a i^y, em que y é o resto da divisão de x por 4. Pede-se:

i^{2053}

2053 dividido por 4 resulta em 513 com resto 1, pois $2053 = 4x513 + 1$. Nesse caso, $y = 1$. Então: $i^{2053} = i^1 = i$

Gabarito: B

(EEAR-2009) QUESTÃO 41

Sejam dois números complexos z_1 e z_2. Se z_1 tem imagem $P(4,-1)$ e $z_2 = -1+3i$, então $z_1 - z_2$ é igual a:

a) $3+4i$.

b) $1-5i$.

c) $5-4i$.

d) $2+2i$.

Comentário:

Se z_1 tem imagem P(4,-1), então $z_1 = 4 - i$, enquanto $z_2 = -1 + 3i$. Então:

$z_1 - z_2 = 4 - i - (-1 + 3i) = 4 - i + 1 - 3i \rightarrow$

$z_1 - z_2 = 5 - 4i$

Gabarito: C

(EEAR-2009) QUESTÃO 42

Se a forma algébrica de um número complexo é $-1+i$, então sua forma trigonométrica tem argumento igual a:

a) $\frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{4}$

Comentário:

Para encontrar o argumento de $z = -1 + i$, basta multiplicar e dividir pelo módulo:

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Assim:

$z = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \rightarrow$

$z = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

Mas:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Então:

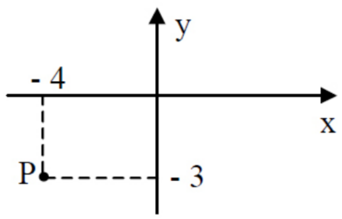
$z = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{3\pi}{4}\right))$

E, assim, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

Gabarito: B

(EEAR-2009) QUESTÃO 43

Na figura, o ponto P representa um número complexo, cujo conjugado é:



a) $-3+4i$.

b) $-4+3i$.

c) $4-3i$.

d) $3-4i$.

Comentário:

Na figura, temos representado o número complexo $z = -4 - 3i$, pois o eixo horizontal representa a parte real e o eixo vertical representa a parte imaginária no plano de Argand-Gauss. Para acharmos o conjugado de z, trocamos o sinal da parte imaginária de z no caso em que o denominador (neste caso igual a 1) é real:

$\bar{z} = -4 + 3i$

Gabarito: B

(EEAR-2010) QUESTÃO 44

O inverso do número complexo $z=-2i$ é $z'=$:

a) $\frac{i}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) –2

d) 2i

Comentário:

Invertendo $z = -2i$:

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2i}$$

Multiplicando por i em cima e embaixo:

$$z' = \frac{i}{-2i^2} = \frac{i}{-2(-1)} = \frac{i}{2}$$

Gabarito: A

(EEAR-2010) QUESTÃO 45

Seja o número complexo $z=1+i$. Se z' é o conjugado de z, então o produto $|z|\cdot|z'|$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) $\sqrt{3}$.

d) $2\sqrt{3}$.

Comentário:

Seja $z = 1 + i$. Então $z' = 1 - i$. Achando o módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|z'| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Por fim:

$$|z||z'| = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$$

Gabarito: B

(EEAR-2010) QUESTÃO 46

O valor de $i^{11} - i^{21} - i^{38}$ é:

a) $1-2i$.

b) $2-i$.

c) −2.

d) 1.

Comentário:

Para encontrar uma potência de i do tipo i^x, basta encontrar i^y, em que y é o resto da divisão de x por 4. i^x é equivalente a i^y. Assim, queremos:

$$i^{11} - i^{21} - i^{38}$$

$11 = 4x2 + 3 \rightarrow$ o resto é 3 $\rightarrow i^{11} = i^3 = i^2 i = -i$

$21 = 4x5 + 1 \rightarrow$ o resto é 1$\rightarrow i^{21} = i^1 = i$

$38 = 4x9 + 2 \rightarrow$ o resto é 2$\rightarrow i^{38} = i^2 = -1$

Por fim, temos a expressão:

$i^{11} - i^{21} - i^{38} = i^3 - i^1 - i^2 = -i - i + 1 = 1 - 2i$

Gabarito: A

(EEAR-2010) QUESTÃO 47

Multiplicando-se o número complexo $2-3i$ pelo seu conjugado, obtém-se:

a) 0.

b) −1.

c) 11.

d) 13.

Comentário:

Se $z = 2 - 3i$, seu conjugado $\overline{z} = 2 + 3i$. Assim:

$z.\bar{z} = (2-3i)(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 13$

Gabarito: D

(EEAR-2011) QUESTÃO 48

Seja z' o conjugado do número complexo $z=1-3i$. O valor de $2z+z'$ é:

a) $3-3i$.

b) $1-3i$.

c) $3+i$.

d) $1+i$.

Comentário:

Se $z = 1 - 3i$, seu conjugado $z' = 1 + 3i$. Procura-se a expressão $2z + z'$:

$2z + z' = 2(1-3i) + (1+3i) = 2 - 6i + 1 + 3i$

$2z + z' = 3 - 3i$

Gabarito: A

(EEAR-2011) QUESTÃO 49

O número complexo $z=(a-4)+(b-5)i$ será um número imaginário puro se:

a) $a=4$ e $b=5$.

b) $a=4$ e $b\neq 5$.

c) $a\neq 4$ e $b=5$.

d) $a\neq 4$ e $b\neq 5$.

Comentário:

Para que o complexo $z=(a-4)+(b-5)i$ seja um imaginário puro, devemos ter sua parte real nula e sua parte imaginária não nula. Assim, caímos em:

$$\begin{cases} b-5\neq 0 \\ a-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b\neq 5 \\ a=4 \end{cases}$$

Gabarito: B

(EEAR-2012) QUESTÃO 50

O módulo do número complexo $z=-1+3i$ é:

a) 1

b) 2

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{10}$

Comentário:

O módulo de um número complexo do tipo $x=a+bi$, a e b reais, é:

$$|x|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Para $z=-1+3i$, temos:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Gabarito: D

(EEAR-2013) QUESTÃO 51

Sejam ρ_1 e ρ_2, respectivamente, os módulos dos números complexos $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = 4-2i$. Assim, $\rho_1 + \rho_2$ é igual a:

a) 5

b) $\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{5}$

Comentário:

Se $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 - 2i$, e $p_1 e\ p_2$ são, respectivamente, os módulos de $z_1 e\ z_2$, então:

$$p_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$p_2 = |z_2| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4^2 x 5} = 2\sqrt{5}$$

Por fim:

$$p_1 + p_2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Gabarito: D

(EEAR-2013) QUESTÃO 52

Se $z = 3+2i$ é um número complexo, então z^2 é igual a:

a) $5+12i$.

b) $9+12i$.

c) $13+4i$.

d) $9+4i$.

Comentário:

Se $z = 3 + 2i$, então:

$z^2 = (3 + 2i)^2 = 3^2 + 2x3x2i + (2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4$

$z^2 = 5 + 12i$

Gabarito: A

(EEAR-2013) QUESTÃO 53

Seja z' o conjugado de um número complexo z. Sabendo que $z = a + bi$ e que $2z + z' = 9 + 2i$, o valor de $a + b$ é:

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

Comentário:

Se $z = a + bi$, a e b reais, então seu conjugado $z' = a - bi$. Usando o dado:

$2z + z' = 9 + 2i \to 2(a + bi) + a - bi = 9 + 2i \to$

$2a + 2bi + a - bi = 9 + 2i \to 3a + bi = 9 + 2i$

Igualando parte real à parte real e parte imaginária à parte imaginária, caímos em:

$\begin{cases} 3a = 9 \\ bi = 2i \end{cases} \to \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Pede-se $a + b = 3 + 2 = 5$

Gabarito: A

(EEAR-2014) QUESTÃO 54

Se i é a unidade imaginária, pode-se afirmar que i^7 é igual a:

a) i.

b) i^2.

c) i^3.

d) i^4.

Comentário:

O método para se encontrar qualquer potência de i é simples: i^x é equivalente a i^y, em que y é o resto da divisão de x por 4. Pede-se:

i^7

7 dividido por 4 é igual a 1 com resto 3, pois $7 = 4x1 + 3$. Neste caso, x vale 7 e y vale 3. Por fim:

$i^7 = i^3$

Gabarito: C

(EEAR-2015) QUESTÃO 55

Sejam z um número complexo e z' o conjugado de z. Se $z^1 = z + z'$ e $z^2 = z - z'$, pode-se garantir que:

a) z_1 é um número real e z_2 é um imaginário puro.

b) z_1 é um imaginário puro e z_2 é um número real.

c) z_1 e z_2 são imaginários puros.

d) z_1 e z_2 são números reais.

Comentário:

Seja $z = a + bi$ e $z' = a - bi$, a e b reais. Então:

$$\begin{cases} z_1 = z + z' \\ z_2 = z - z' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 = a + bi + a - bi \\ z_2 = a + bi - a + bi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2a \\ z_2 = 2bi \end{cases}$$

Como a e b são reais, temos que z_1 é um número real e $z_2$um imaginário puro.

Gabarito: A

(EEAR-2015) QUESTÃO 56

Seja $z=\sqrt{3}\cdot(\cos 20°+i\cdot \text{sen}\, 20°)$ um número complexo na forma trigonométrica. Assim, z^2 é igual a:

a) $3\cdot(\cos 20°+i\cdot \text{sen}\, 20°)$

b) $3\cdot(\cos 40°+i\cdot \text{sen}\, 40°)$

c) $2\sqrt{3}\cdot(\cos 20°+i\cdot \text{sen}\, 20°)$

d) $2\sqrt{3}\cdot(\cos 40°+i\cdot \text{sen}\, 40°)$

Comentário:

Seja $z = \sqrt{3}(cos20^0 + isen20^o)$, ou seja, $z = \sqrt{3}cis(20^o)$ – nomenclatura utilizada para a forma trigonométrica de um número complexo.

Utilizando a fórmula de Moivre, sabemos que um número complexo z do tipo $z = p.cis(\emptyset)$, quando elevado a uma potência n qualquer, obedece:

$z^n = p^n.cis(n.\emptyset)$

Assim, busca-se z^2:

$z^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 cis(2.20^o)$

$z^2 = 3cis(40^o)$

$z^2 = 3(cos40^o + isen40^o)$

Gabarito: B

(EEAR-2016) QUESTÃO 57

Sejam Z_1 e Z_2 dois números complexos. Sabe-se que o produto de Z_1 e Z_2 é $-10+10i$. Se $Z_1=1+2i$, então o valor de Z_2 é igual a:

a) $5+6i$

b) $2+6i$

c) $2+15i$

d) $-6+6i$

Comentário:

Temos $Z_1 = 1 + 2i$ e $Z_1.Z_2 = -10 + 10i$. Então:

$$Z_1.Z_2 = -10+10i \rightarrow (1+2i)Z_2 = -10+10i \rightarrow Z_2 = \frac{-10+10i}{1+2i}$$

Agora, multipliquemos pelo conjugado de $1+2i$ em cima e embaixo da fração, para que a parte imaginária no denominador fique real:

$$Z_2 = \frac{(-10+10i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-10+20i+10i+20}{(1^2-(2i)^2)}$$

$$Z_2 = \frac{10+30i}{1-4i^2}$$

$$Z_2 = \frac{10+30i}{5} = 2+6i$$

Gabarito: B

(EEAR-2016) QUESTÃO 58

Sabe-se que os números complexos $Z_1 = [2m(3+m)] + (3n+5)i$ e $Z_2 = (2m^2+12) + [4(n+1)]i$ são iguais. Então, os valores de m e n são, respectivamente:

a) 3 e 1

b) 2 e 1

c) 2 e −1

d) 3 e −1

Comentário:

Se $Z_1 = [2m(3+m) + i(3n+5)]\ e\ Z_2 = (2m^2+12) + 4(n+1)i$ são iguais, então basta igualar a parte real à parte real e a parte imaginária à parte imaginária:

$$Z_1 = Z_2 \rightarrow \begin{cases} 2m(3+m) = 2m^2+12 \\ 3n+5 = 4(n+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6m+2m^2 = 2m^2+12 \\ 3n+5 = 4n+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6m = 12 \\ n = 1 \end{cases}$$

Assim, $m = 2\ e\ n = 1$

Gabarito: B

(EEAR-2017) QUESTÃO 59

Considere $z_1 = (2+x) + (x^2 - 1)i$ e $z_2 = (m-1) + (m^2 - 9)i$. Se z_1 é um número imaginário puro e z_2 é um número real, é correto afirmar que $x+m$ pode ser igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentário:

Se $z_1 = (2+x) + (x^2-1)i$ é um número imaginário puro, então sua parte real – a que não acompanha i – é zero: $2+x=0$

Se $z_2 = (m-1) + (m^2-9)i$ é um número real, então sua parte imaginário – a que acompanha i – é zero: $m^2 - 9 = 0$

Então:

$$\begin{cases} 2+x=0 \\ m^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ m^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ m=3 \text{ } ou \text{ } m=-3 \end{cases}$$

Assim, $x+m$ pode ser igual a:

$x+m=-2+3=1$

Ou

$x+m=-2-3=-5$

Como só há a opção “1”, temos a resposta marcada.

Gabarito: A

(EEAR-2017) QUESTÃO 60

Se i é a unidade imaginária, então $2i^3+3i^2+3i+2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand- Gauss no ______________ quadrante.

a) primeiro

b) segundo

c) terceiro

d) quarto

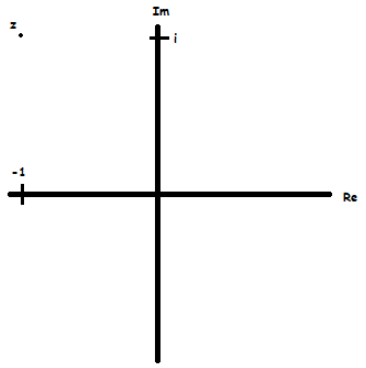
Comentário:

Busca-se o valor de $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$. Então:

$2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 = 2i^2 i + 3x(-1) + 3i + 2 = -2i - 3 + 3i + 2$

$2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 = \ -1 + i$

Basta saber em que quadrante se encontra o número complexo $z = -1 + i$. Perceba a imagem:



A parte real é representada pelo eixo horizontal e a parte imaginária pelo eixo vertical no plano de Argand-Gauss. Assim, temos a expressão dada localizada no segundo quadrante.

Gabarito: B

(EEAR-2018) QUESTÃO 61

Sejam os números complexos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 5i$ e $z_3 = z_1 + z_2$. O módulo de z_3 é igual a:

a) $4\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

Comentário:

Temos $z_1 = 1 - i \ e \ z_2 = 3 + 5i$. Se $z_3 = z_1 + z_2$, então $z_3 = 1 - i + 3 + 5i$

$z_3 = 4 + 4i$

Basta, agora, calcularmos o módulo de z_3:

$|z_3| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{4^2 x 2} = 4\sqrt{2}$

Gabarito: B

(EEAR-2018) QUESTÃO 62

Dado o número complexo $z = a + bi$, se $z + z = 10$ e $z - z = -16i$, então $a + b$ é:

a) −6

b) −3

c) 2

d) 8

Comentário:

Se $z = a + bi, a\ e\ b$ reais, então $\bar{z}$, o conjugado de z, é tal que $\bar{z} = a - bi$. Utilizando os dados, temos:

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 10 \\ z - \bar{z} = -16i \end{cases}$$

Somando as 2 equações, caímos em:

$z + \bar{z} + z - \bar{z} = 10 - 16i \rightarrow 2z = 10 - 16i \rightarrow z = 5 - 8i$

Se $z = 5 - 8i$ e $z = a + bi, a\ e\ b$ reais, então podemos igualar a parte real à parte real e a parte imaginária à parte imaginária:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -8 \end{cases}$$

Assim, $a + b = 5 - 8 = -3$

Gabarito: B

(EEAR-2019) QUESTÃO 63

A parte real das raízes complexas da equação $x^2 - 4x + 13 = 0$, é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentário:

Tem-se a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$. Aplicando a fórmula de Báskara, achemos o delta:

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4x1x13 = 16 - 52 = -36$

Continuando a Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2x1} = \frac{4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \rightarrow$$

$x = 2 + i \ ou \ x = 2 - i$

Assim, a parte real das raízes complexas da equação é igual a 2.

Gabarito: B

(EEAR-2019) QUESTÃO 64

Se i é a unidade imaginária dos números complexos, o valor de $i^{15} + i^{17}$ é:

a) −i

b) −1

c) 0

d) 1

Comentário:

O método para se encontrar qualquer potência de i é simples: i^x é equivalente a i^y, em que y é o resto da divisão de x por 4. Pede-se:

$i^{15} + i^{17}$

15 dividido por 4 é igual a 3 e deixa resto 3, pois $15 = 4x3 + 3$

17 dividido por 4 é igual a 4 e deixa resto 1, pois $17 = 4x4 + 1$

Assim, temos a equivalência:

$i^{15} = i^3$

$i^{17} = i^1$

Por fim:

$i^{15} + i^{17} = i^3 + i^1 = i^2 i + i = -i + i = 0$

Gabarito: C

(EFOMM-2005) QUESTÃO 65

Determine o valor de x para que o produto $(12-2i)\left[18+(x-2)i\right]$ seja um número real.

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Comentário:

Temos a expressão $(12-2i)[(18+(x-2)i]$, e queremos que ela seja um número real. Desenvolvendo a expressão:

$(12-2i)[(18+(x-2)i]=216+12(x-2)i-36i+2(x-2)$

Nos compete interesse apenas a parte imaginária: se o enunciado pede x para que a expressão seja um número real, então a parte imaginária – acompanhada de i – deve ser nula:

$12(x-2)i-36i=0$

$12x-24-36=0 \rightarrow 12x=60 \rightarrow x=5$

Gabarito: B

(EFOMM-2006) QUESTÃO 66

O inverso do complexo $2i$ é:

a) $\frac{1}{2}-i$

b) $\frac{1}{2}+i$

c) $\frac{i}{2}$

d) $\frac{-i}{2}$

e) -2

Comentário:

Invertendo $z = 2i$:

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{2i}$$

Multiplicando por i em cima e embaixo:

$$z' = \frac{i}{2i^2} = \frac{i}{2(-1)} = -\frac{i}{2}$$

Gabarito: D

(EFOMM-2006) QUESTÃO 67

Qual o valor de e, que é um escalar real, em que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{e+2i}$ nula?

a) -4

b) -2

c) 1

d) 2

e) 4

Comentário:

Temos o complexo $\frac{2+i}{e+2i}$, e busca-se e real para que a parte imaginária seja nula.

Multiplicando em cima e embaixo pelo conjugado de $e + 2i$ para eliminar a parte imaginária do denominador:

$$\frac{(2+i)(e-2i)}{(e+2i)(e-2i)} = \frac{2e - 4i + ei + 2}{e^2 - (2i)^2} = \frac{2e + 2 + i(e-4)}{e^2 - 4i^2}$$

$$\rightarrow \frac{2e+2}{e^2+4} + i\frac{e-4}{e^2+4}$$

Se a parte imaginária é nula, então:

$$\frac{e-4}{e^2+4}=0 \rightarrow e-4=0 \rightarrow e=4$$

Gabarito: E

(EFOMM-2007) QUESTÃO 68

O argumento do número complexo $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ é:

a) 45◦

b) 60◦

c) 90◦

d) 135◦

e) 225◦

Comentário:

Para encontrar o argumento de ara encontrar o argumento de $z=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ devemos, primeiro, encontrar seu módulo:

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Agora, multiplicamos e dividimos por $|z|$:

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1/2}{1/\sqrt{2}}-i\frac{1/2}{1/\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

Contudo, perceba:

$$\begin{cases} sen(225^o)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(225^o)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Reescrevemos, assim, z:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos225^o + isen225^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}cis(225^o)$$

Assim, o argumento do número complexo dado é igual a 225^o

Gabarito: E

(EFOMM-2008) QUESTÃO 69

Analise as afirmativas abaixo, sendo $z \in \mathbb{C}$:

I – Se $W = \frac{3i + 6\bar{z} - iz^2}{2 + 2z^2 + 3iz + 3|z|^2 + |z|}$ então podemos afirmar que $\overline{W} = \frac{-3i + 6z + i\bar{z}^2}{2 + 2z^2 - 3i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + |\bar{z}|}$.

II – Dado $|z - 3i| = 2$ podemos afirmar que é uma circunferência de centro (0, 3) e raio 2.

III – A forma trigonométrica de $w = 6i$ é $w = 6\left(sen\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)$.

IV – Sabe-se que −1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$. Logo, as outras raízes são números inteiros.

a) As afirmativas I e IV são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) As afirmativas II e IV são falsas.

d) As afirmativas I e II são verdadeiras.

e) Apenas a afirmativa II é falsa.

Comentário:

I.

$$W = \frac{3i + 6\bar{z} - iz^2}{2 + 2\bar{z}^2 + 3iz + 3|z|}$$

Para achar $\overline{W}$ – isto é, o conjugado de W, basta aplicar o conjugado em cada termo separadamente:

$$\overline{W} = \overline{\frac{3\imath + 6\bar{z} - \imath z^2}{2 + 2\bar{z}^2 + 3\imath z + 3|z|}} = \frac{\overline{3\imath + 6\bar{z} - \imath z^2}}{\overline{2 + 2\bar{z}^2 + 3\imath z + 3|z|}}$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{3\imath} + \overline{6\bar{z}} - \overline{\imath z^2}}{\overline{2} + \overline{2\bar{z}^2} + \overline{3\imath z} + \overline{3|z|}}$$

Ressalta-se que o conjugado de um número complexo $a + bi$ equivale a este mesmo número com a parte imaginária oposta, ou seja, $a - bi$ – ou seja, conjugado de números reais, como é o caso de $|z|$, são iguais ao próprio número Assim:

$$\overline{W} = \frac{-3i + 6z + i\bar{z}^2}{2 + 2 - +3i\bar{z} + 3|z|}$$

Afirmação I verdadeira.

II.

Temos $|z - 3i| = 2$. Se $z = x + yi$, substituindo:

$$|z - 3i| = |x + yi - 3i| = |x + i(y - 3)| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2 \rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 4$$

Temos, então, que $|z - 3i| = 2$ equivale à equação:

$$x^2 + (y-3)^2 = 4$$

Que, de fato, representa uma circunferência de centro (0,3) e raio 2.

Afirmação II verdadeira.

III.

Perceba que:

$$6\left(sen\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right) = 6(1 + i.0) = 6(1) = 6 \neq 6i$$

Afirmação III falsa.

IV.

-1 é raiz dupla de:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$$

Assim, $P(x)$ possui as raízes -1, -1, a e b. Usando as fórmulas de Girrard, caímos em:

$$\begin{cases} a + b - 1 - 1 = -\dfrac{1}{2} \\ a.b.(-1).(-1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{3}{2} \\ a.b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que $b = \frac{1}{2a}$. Substituindo na primeira equação:

$$a + b = \frac{3}{2} \rightarrow a + \frac{1}{2a} = \frac{3}{2}$$

Multiplicando tudo por $2a$:

$$2a^2 + 1 = 3a \rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0$$

Utilizando a fórmula de Báskara:

$\Delta = 3^2 - 4x2x1 = 9 - 8 = 1$

Continuando a Báskara:

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2x2} = \frac{3 \pm 1}{2x2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Assim, $a = 1\ ou\ a = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2}$ não é inteiro, nem todas as raízes são inteiras.

Afirmação IV falsa.

Gabarito: D

(EFOMM-2008) QUESTÃO 70

É bem conhecida a relação $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, onde θ é um ângulo em radianos e $i = \sqrt{-1}$. Dada a relação, podemos concluir que se θ é um número imaginário puro da forma bi, onde $b \in \mathbb{R}0$, $\cos\theta$ é um número:

a) entre −1 e 1

b) maior que −1 e menor que 0

c) maior que 1

d) igual a 1

e) imaginário puro.

Comentário:

Temos a expressão:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Contudo, foi dado que $\theta = \mathrm{bi}, \mathrm{b}$ real. Substituindo:

$$cos\theta = \frac{e^{ibi} + e^{-ibi}}{2} = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}$$

Multiplicando em cima e embaixo por e^b:

$$cos\theta = \frac{e^{2b} + 1}{2e^b}$$

Contudo, sabemos que, se $b \neq 0$:

$$(e^b - 1) > 0 \to e^{2b} - 2e^b + 1 > 0 \to e^{2b} + 1 > 2e^b \to \boldsymbol{\frac{e^{2b} + 1}{2e^b} > 1}$$

Contudo, $\frac{e^{2b}+1}{2e^{b}} = cos\theta$. Então:

$$\frac{e^{2b}+1}{2e^{b}} = \ cos\theta > 1$$

Gabarito: C

(EFOMM-2009) QUESTÃO 71

Qual é o menor valor do número natural positivo n para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}$, onde i é a unidade imaginária, seja um número real?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentário:

Temos $\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}$. Transformemos a expressão$z = \left(\sqrt{3}+i\right)$ na forma trigonométrica. Para isso, achemos o módulo de z:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^{2} + 1^{2}} = 2$$

Agora, multiplica-se e divide-se z por |z|:

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

Contudo:

$$\begin{cases} cos30^{o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen30^{o} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, caímos em:

$$z = 2(cos30^{o} + isen30^{o}) = 2cis(30^{o})$$

Quer-se o menor natural positivo n tal que z^n seja um número real. Utilizando a fórmula de Moivre, sabemos que:

$z = 2cis(30^o) \rightarrow z^n = 2^n cis(nx30^0) = 2^n(n.30^o) + 2^n isen(n.30^o)$

Para que z^n seja um número real, devemos ter que sua parte imaginária é nula:

$2^n isen(n.30^o) = 0 \rightarrow sen(n.30^o) = 0$

O ângulo $n.30^o$deve ter seno nulo, isto é:

$n.30^o = 180^0 + 180k$, em que k é um número inteiro. Dividindo ambos os lados por 30º:

$n = 6 + 6k$

Assim, o menor inteiro n vale quando k=0, ou seja, $n = 6$

Gabarito: E

(EFOMM-2010) QUESTÃO 72

Considere o conjunto dos números complexos z com a propriedade $|z+169i| \leq 65$, admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é igual a:

a) $60 - 144i$

b) $65 - 169i$

c) $-104i$

d) $-65 - 169i$

e) $65 - 156i$

Comentário:

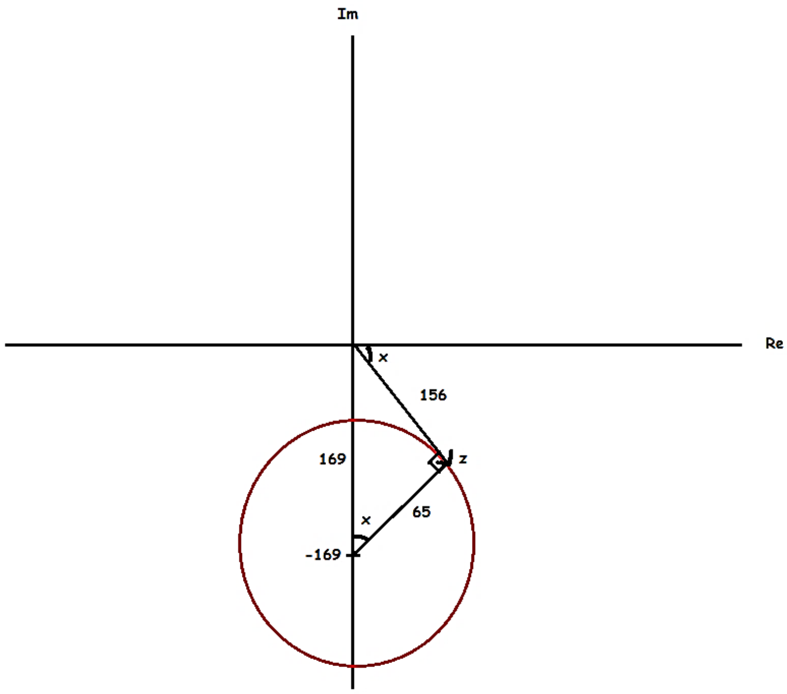
Temos que $|z + 169i| \leq 65$. Se $z = x + yi$, então:

$|x + yi + 169i| \leq 65 \rightarrow\ |x + i(y + 169)| \leq 65 \rightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y + 169)^2} \leq 65 \rightarrow$

$x^2 + (y + 169)^2 \leq 65^2$

Perceba que a equação obtida é a de uma circunferência (bem como seu interior) de centro (0,-169) e raio 65. O elemento de maior argumento pertencente a esse conjunto é tal como:



A linha que liga z à origem do plano Argand-Gauss é tangente à circunferência obtida e, assim, forma-se o triângulo retângulo com catetos 65 e 156, e hipotenusa 169. Perceba as propriedades do ângulo x:

$$\begin{cases} senx = \dfrac{156}{169} = \dfrac{12}{13} \\ cosx = \dfrac{65}{169} = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Como a linha que liga z à origem tem tamanho 156, sabemos que o módulo de z é igual a 156. Por fim:

$$\begin{cases} \mathrm{Re(z)} = |\mathrm{z}|cosx \\ Im(z) = -|\mathrm{z}|senx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(z) = 156\dfrac{5}{13} \\ Im(z) = -156\dfrac{12}{13} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(z) = 60 \\ Im(z) = -144 \end{cases}$$

Assim:

$z = 60 - 144i$

Gabarito: A

(EFOMM-2011) QUESTÃO 73

Sejam os números complexos z tais que $\frac{1}{3}|z| = |\overline{z+1}|$. O lugar geométrico das imagens desses números complexos é uma:

a) parábola

b) reta

c) circunferência de raio $\frac{3}{8}$

d) circunferência de raio $\frac{3}{2}$

e) hipérbole

Comentário:

Temos a igualdade:

$$\frac{|z|}{3} = |\overline{z+1}|$$

Substituindo z por $x + yi, x\ e\ y$ reais:

$$\frac{|x + yi|}{3} = |\overline{x + yi + 1}|$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} = |x + 1 + yi|$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 9((x + 1)^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 9(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2$$

$$8x^2 + 18x + 8y^2 + 9 = 0$$

Dividindo tudo por 8:

$$x^2 + \frac{9}{4}x + y^2 + \frac{9}{8} = 0$$

$$\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + y^2 - \frac{81}{64} + \frac{9}{8} = 0$$

$$\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{64}$$

Caímos em uma equação de uma circunferência de centro $(\frac{9}{8}, 0)$ e raio $\frac{3}{8}$.

Gabarito: C

(EFOMM-2012) QUESTÃO 74

A solução da equação $|z|+z=1+3i$ é um número complexo de módulo:

a) $\frac{5}{4}$

b) 5

c) $\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{5}{2}$

Comentário:

Temos a equação $|z| + z = 1 + 3i$. Tome $z = a + bi, a\ e\ b$ reais. Substituindo:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 1 + 3i$$

Agora, iguala-se parte real à parte real e parte imaginária à parte imaginária:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + 9} + a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação:

$$\sqrt{a^2 + 9} + a = 1 \rightarrow \sqrt{a^2 + 9} = 1 - a$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$a^2 + 9 = 1 - 2a + a^2 \rightarrow 9 = 1 - 2a \rightarrow 8 = -2a \rightarrow a = -4$$

Temos, então $a = -4\ e\ b = 3$, resultando em $z = -4 + 3i$. Por fim:

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Gabarito: B

(EFOMM-2013) QUESTÃO 75

Se os números reais x e y são soluções da equação $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\frac{1}{x+iy}=1+i$, então $5x+15y$ é igual a:

a) 0

b) −1

c) 1

d) $\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2}$

Comentário:

Temos a equação:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+yi}=1+i$$

Multipliquemos pelos conjugados dos denominadores em cima e embaixo das frações para eliminar as partes imaginárias no denominador:

$$\left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^2+\frac{1}{(x+yi)}=1+i$$

Continuando:

$$\left[\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right]^2+\frac{1}{x+yi}=1+i$$

$$\left[\frac{2i}{2}\right]^2+\frac{1}{x+yi}=1+i \rightarrow i^2+\frac{1}{x+yi}=1+i$$

$$\frac{1}{x+yi}=2+i$$

$$x+yi=\frac{1}{2+i}$$

Multiplicando novamente pelo conjugado:

$$x+yi=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2}{5}-i\frac{1}{5}$$

Agora, basta igualar a parte real à parte real e a parte imaginária à parte imaginária:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Por fim:

$$5x + 15y = 5x\frac{2}{5} + 15x\left(-\frac{1}{5}\right) = 2 - 3 = -1$$

Gabarito: B

(EFOMM-2014) QUESTÃO 76

Sabendo-se que a raiz quadrada do número complexo $-16+30i$ é $(a+bi)$ ou $(c+di)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, pode-se afirmar que o valor de $a+d$ é:

a) +2.

b) +1.

c) 0.

d) −1.

e) −2.

Comentário:

Seja $x + yi$ o número complexo z tal que $z^2 = -16 + 30i$. Então $z = \sqrt{-16 + 30i} = a + bi\ ou\ z = c + di$. Desenvolvendo:

$(x + yi)^2 = -16 + 30i \rightarrow x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = -16 + 30i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = -16 + 30i$

Igualando a parte real à parte real e a parte imaginária à parte imaginária, temos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ y = \frac{15}{x} \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$x^2 - \left(\frac{15}{x}\right)^2 = -16$$

$$x^2 - \frac{225}{x^2} + 16 = 0$$

Multiplicando ambos os lados por x^2:

$x^4 + 16x^2 - 225 = 0$

Caímos em uma equação do segundo grau em que x^2 é a incógnita. Aplicando Báskara:

$\Delta = 16^2 - 4x1x(-225) = 1156$

Continuando:

$$x^2 = \frac{-16 \pm \sqrt{1156}}{2x1} = \frac{-16 \pm 34}{2}$$

Donde:

$x^2 = 9 \; ou \; x^2 = -25$

Como $x \; e \; y$ são reais, a solução $x^2 = -25$ não é válida. Temos, então:

$x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \; ou \; x = -3$

Substituindo na equação obtida em y:

$$Se \; x = 3 \rightarrow y = \frac{15}{3} = 5 \rightarrow z = 3 + 5i$$

$$Se \; x = -3 \rightarrow y = \frac{15}{-3} = -5 \rightarrow z = -3 - 5i$$

Com isso, se $a > 0$, temos que:

$a + di = 3 + 5i$

$c + di = -3 - 5i$

Então:

$a + d = 3 - 5 = -2$

Gabarito: E

(EFOMM-2015) QUESTÃO 77

Considere o número complexo $z_1 \neq 1$, tal que z_1 seja solução da equação $z^6 = 1$, com menor argumento positivo. A solução z_2 da mesma equação, cujo argumento é o triplo do argumento de z_1, é igual a:

a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) -1

d) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentário:

Temos a equação $z^6 = 1$

z pode ser escrito na forma trigonométrico, do tipo:

$z = |z|(cosx + isenx) = |z|cisx$, em que x é o argumento de z.

Utilizando a fórmula de Moivre, sabemos:

$z^6 = |z|^6 cis(6x)$

Assim:

$z^6 = 1 \rightarrow |z|^6 cis(6x) = 1$

Sabemos que:

$1 = 1cis(0) = 1(cos0 + isen0) = 1(1 + 0) = 1$

Então:

$z^6 = |z|^6 cis(6x) = 1cis(0)$

Basta, agora fazer as igualdades:

$$\begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6x = 0^o + 360k, k\ inteiro \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ x = 60k \end{cases}$$

Temos, então, os possíveis argumentos x de z:

$x = 0^o, 60^o, 120^o, 180^o, 240^o, 300^o$

Se z_1 é a solução com o menor argumento positivo, então:

$z_1 = 1cis(60^o)$, pois 60^o é o menor argumento positivo.

Se z_2 possui argumento igual ao triplo de z_1, então o $\arg(z_2) = 3x60 = 180^o$

Portanto:

$z_2 = 1cis(180^o) = -1$

Gabarito: C

(EFOMM-2016) QUESTÃO 78

Seja o número complexo $z=-1-\sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z=256\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z=256\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z=256\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z=256\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z=256(\cos 2\pi+i\operatorname{sen}2\pi)$

Comentário:

Se $z=-1-\sqrt{3}i$, achemos o módulo de z para escrevê-lo na forma trigonométrica:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Multiplicando e dividindo z por seu módulo:

$$z = 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Mas, perceba:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Assim, z é reescrito:

$$z = 2\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Usando a fórmula de Moivre, sabemos que:

$$z^8 = 2^8 cis\left(8x\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 256cis\left(\frac{32\pi}{3}\right)$$

$$z^8 = 256cis\left(\frac{2\pi}{3}+10\pi\right)$$

Sabemos que $cis\left(\frac{2\pi}{3}+10\pi\right) = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, pois 10π é um múltiplo inteiro de 2π. Então:

$$z^8 = 256cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 256(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right))$$

Gabarito: D

(EFOMM-2016) QUESTÃO 79

O número complexo, $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, sendo i a unidade imaginária e $0 \le \theta \le 2\pi$, que satisfaz a inequação $|z+3i| \le 2$ e que possui o menor argumento θ, é:

a) $z = -\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

b) $z = -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

c) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{5}{3}i$

d) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{5}{3}i$

e) $z = -2\sqrt{5} - 5i$

Comentário:

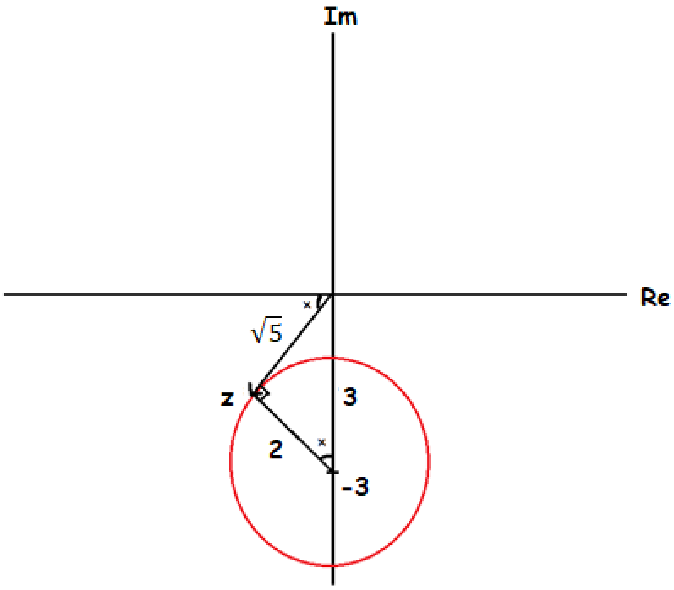
Temos que $|z + 3i| \le 2$. Se $z = x + yi$, então:

$|x + yi + 3i| \le 2 \rightarrow \ |x + i(y + 3)| \le 2 \rightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} \le 2 \rightarrow$

$x^2 + (y + 3)^2 \le 2^2$

Perceba que a equação obtida é a de uma circunferência (bem como seu interior) de centro (0,-3) e raio 2. O elemento de menor argumento pertencente a esse conjunto é tal como:



A linha que liga z à origem do plano Argand-Gauss é tangente à circunferência obtida e, assim, forma-se o triângulo retângulo com catetos 2 e $\sqrt{5}$, e hipotenusa 3. Perceba as propriedades do ângulo x:

$$\begin{cases} senx = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ cosx = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Como a linha que liga z à origem tem tamanho $\sqrt{5}$, sabemos que o módulo de z é igual a $\sqrt{5}$. Por fim:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = -|z|cosx \\ Im(z) = -|z|senx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(z) = -\sqrt{5}\dfrac{2}{3} \\ Im(z) = -\sqrt{5}\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(z) = \dfrac{-2\sqrt{5}}{3} \\ Im(z) = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Assim:

$$z = \frac{-2\sqrt{5}}{3} - i\frac{5}{3}$$

Gabarito: C

(EFOMM-2018) QUESTÃO 80

Resolvendo $1+i+i^2+\ldots+i^n$, com $n=4k+1$ e $k \in \mathbb{Z}$ (números inteiros), obtemos:

a) i^n

b) $1-i^n$

c) 1

d) $1+i^2$

e) $1+i$

Comentário:

Temos a P.G. $1+i+i^2+\cdots+i^n$, com $n=4k+1$, ou seja, n deixa resto 1 na divisão por 4. Disso temos que:

$i^n = i^1 = i$

Aplicando a fórmula de soma de uma Progressão Geométrica:

$$S_N = \frac{a_1(q^N-1)}{q-1}$$

Em que:

$a_1 = primeiro\ termo = 1$

$q = razão\ da\ P.G. = i$

$N = número\ de\ termos = n+1$

Utilizando os valores dados:

$$S_N = \frac{1(i^{n+1}-1)}{i-1} = \frac{(i^n i-1)}{i-1} = \frac{(-1-1)}{i-1} = \frac{2}{1-i}$$

Multiplicando em cima e embaixo pelo conjugado:

$$S_N = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{1-i^2} = 1+i$$

Gabarito: C

(EFOMM-2018) QUESTÃO 81

Resolvendo o sistema $\begin{cases}|z-2|=|z+4| \\ |z-3|+|z+3|=10\end{cases}$, para z complexo, encontramos como solução:

a) $-1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i; -1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

b) $+1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i; +1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

c) $-1+\frac{6\sqrt{8}}{5}i; -1-\frac{6\sqrt{8}}{5}$

d) $+1+\frac{6\sqrt{8}}{5}i; +1-\frac{6\sqrt{8}}{5}$

e) $+1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i; -1-\frac{8\sqrt{6}}{5}$

Comentário:

Seja $z = a + bi$. Temos o sistema:

$$\begin{cases} |z-2| = |z+4| \\ |z-3| + |z+3| = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |(a-2)+bi| = |(a+4)+bi| \\ |z-3| + |z+3| = 10 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação:

$$|(a-2)+bi| = |(a+4)+bi| \rightarrow (a-2)^2 + b^2 = (a+4)^2 + b^2 \rightarrow$$

$$a^2 - 4a + 4 = a^2 + 8a + 16$$

$$12a = -12$$

$$a = -1$$

Substituindo o valor de a na segunda equação:

$$|z-3| + |z+3| = 10 \rightarrow |(a-3)+bi| + |(a+3)+bi| = 10$$

$$|-4+bi| + |2+bi| = 10$$

$$\sqrt{(-4)^2 + b^2} + \sqrt{2^2 + b^2} = 10$$

$$\sqrt{b^2 + 16} = 10 - \sqrt{b^2 + 4}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$b^2 + 16 = 100 - 20\sqrt{b^2 + 4} + b^2 + 4$$

$$20\sqrt{b^2 + 4} = 88$$

$$\sqrt{b^2 + 4} = \frac{88}{20} = \frac{22}{5}$$

Elevando ao quadrado:

$$b^2 + 4 = \frac{484}{25}$$

$$b^2 = \frac{484}{25} - 4 = \frac{384}{25} = \frac{64x6}{25}$$

$$b = \pm\frac{8\sqrt{6}}{5}$$

Assim, temos as soluções:

$$z = -1 + \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

$$z = -1 - \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

Gabarito: A

É isso, meu querido! Finalizamos a nossa Aula 02. Espero que tenham gostado!

Restando qualquer dúvida, estou à disposição no fórum de dúvidas. Pode usar sem moderação!!

Mantenham a pegada, a sua aprovação está mais perto que imagina!

Qualquer crítica, sugestão ou elogio, só entrar em contato pelas redes sociais abaixo:

Fale comigo!

@profismael_santos ***Ismael Santos*** ***@IsmaelSantos***

Vamos que vamos! Fé na missão, FUTURO ALUNO DA PREP!