DISCUSSÃO DE SISTEMAS E SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

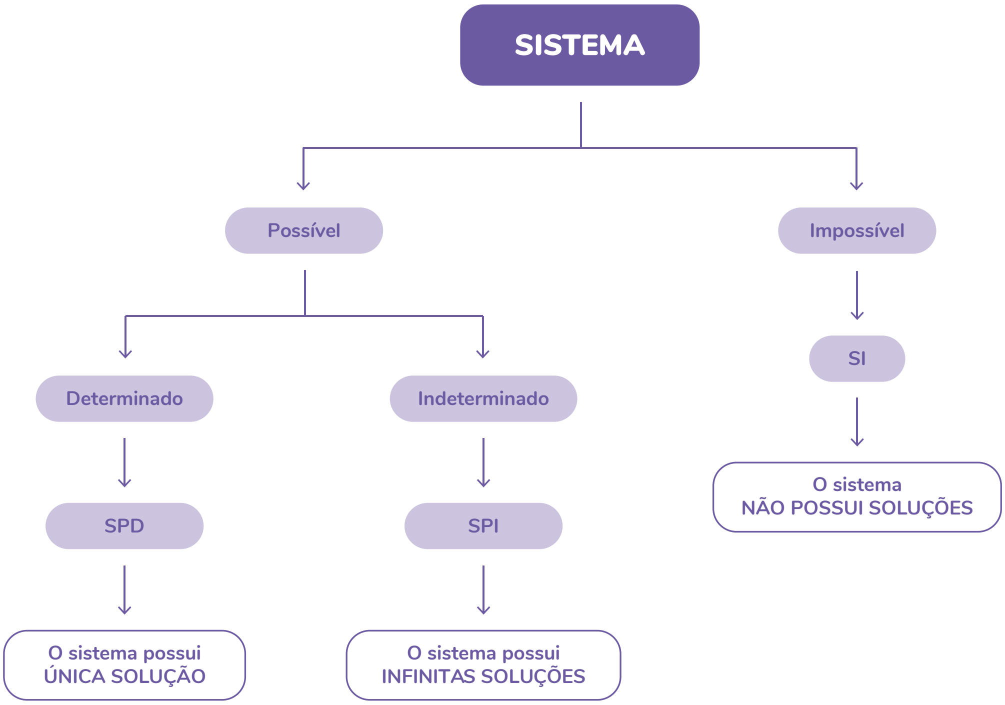
DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES

Você sabia que antes de começarmos a resolver um sistema linear já é possível sabermos se ele terá solução e até o número de soluções que ele possui? Isso ocorre graças a discussão de sistemas lineares, que é justamente o que vamos aprender nessa apostila.

Um sistema linear pode ser classificado em:

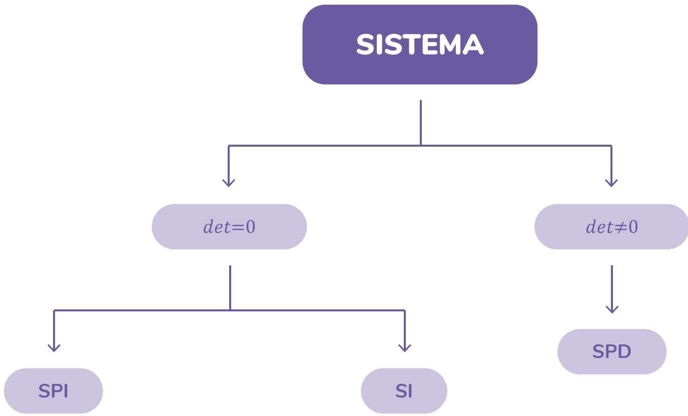
- **SPD: Sistema Possível e Determinado:** o sistema possui uma única solução.
- **SPI: Sistema Possível e Indeterminado:** o sistema possui infinitas soluções.
- **SI: Sistema Impossível:** o sistema não possui solução.

Conforme o esquema abaixo:



Você pode estar se perguntando... Como saber em qual classificação ele se enquadra?

Uma forma de descobrir é através do determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Se o determinante for **igual a zero**, teremos um **Sistema Impossível ou um Sistema Possível e Indeterminado**. Agora, se o determinante for **diferente de zero** teremos um **Sistema Possível e Determinado**. Ou seja:



Vamos acompanhar o exemplo para entender melhor.

Exemplo 1: Classifique o sistema $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x-y+3z=3 \\ -x+y-2z=-1 \end{cases}$.

Resolução: Escrevemos o sistema na forma matricial e calculamos o determinante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Det = 2 - 6 - 2 - (-1 - 8 + 3) = -6 + 6 = 0$$

Com $Det{=}0$, teremos duas possibilidades SPI ou SI.

Exemplo2:

Para quais valores de a o sistema $\begin{cases} ax+3y-2z=4 \\ 2x-y+3z=2 \\ -3x+2y-2z=-1 \end{cases}$ admite solução única?

Resolução: Para ter uma única solução o $det \neq 0$ então calcularemos através do determinante:

$$\begin{bmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2a - 27 - 8 - (-6 - 12 + 6a) \neq 0$$

$$2a - 35 + 18 - 6a \neq 0$$

$$-4a \neq 17$$

$$a \neq -\frac{17}{4}$$

Para termos uma única solução a deve ser diferente de $-\frac{17}{4}$.

Sistema Não Normal

Quando tivermos sistemas cujo número de equações for diferente do número de incógnitas devemos avaliar o grau de indeterminação do sistema.

Se o sistema possuir **mais equações que variáveis** e não houver grau de indeterminação, então ele poderá ser um Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) ou um Sistema Impossível (SI). Porém, quando o grau de indeterminação for **maior ou igual a um** e o sistema tiver **mais variáveis que equações**, então o sistema **nunca será Possível e Determinado** (SPD), só poderá se SPI ou SI.

Interpretação Geométrica de um Sistema Linear

Na apostila de sistemas lineares já falamos sobre representar a solução de um sistema de forma geométrica. Cujo par ordenado (x, y) era representado através de um ponto P no plano cartesiano, onde x representava a coordenada do ponto no eixo das abscissas e y a coordenada do ponto no eixo das ordenadas. Entenderemos agora porque isso ocorre.

Num sistema linear com duas incógnitas cada equação representa uma reta no plano cartesiano e a solução do sistema representa o ponto de intersecção entre todas as retas.

Acompanhe o exemplo abaixo:

Exemplo: Represente o seguinte Sistema Linear geometricamente:

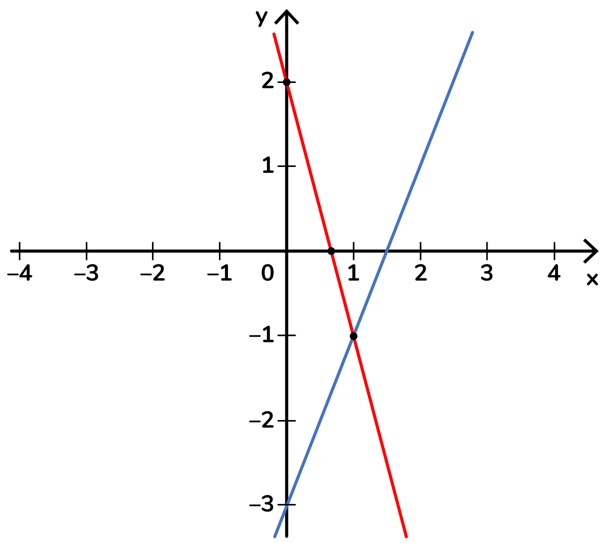
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Resolução: Primeiro vamos calcular o valor das incógnitas, como temos um sistema com 2 equações e 2 variáveis, vamos fazer pelo método mais simples, da substituição.

$$\begin{gathered} 2x - y = 3 \\ -y = 3 - 2x \\ y = -3 + 2x \\ y = -3 + 2 \cdot 1 \\ y = -1 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 3x + y = 2 \\ 3x + (-3 + 2x) = 2 \\ 3x - 3 + 2x = 2 \\ 5x = 5 \\ x = 1 \end{gathered}$$

Aqui encontramos a solução $S = \{(1, -1)\}$. Agora vamos representar esse ponto no plano cartesiano.



Observe que cada equação forma uma reta e elas se encontram no ponto de intersecção (1,-1). Essa é a representação geométrica desse sistema. Podemos classificar ainda esse sistema, como ele possui uma única solução, podemos dizer que ele é Sistema Possível e Determinado (SPD).

Observações:

- O **número de retas no plano cartesiano dependerá do número de equações que houver no sistema**, ou seja, se houver 3 equações no sistema haverá 3 retas no plano cartesiano, se houver 4 equações haverá 4 retas e assim sucessivamente.

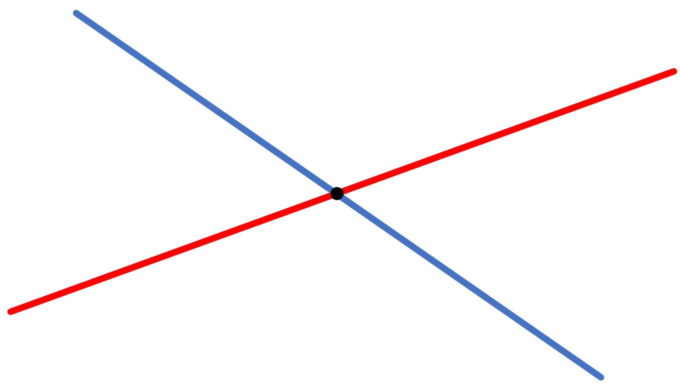
- **O número de dimensões da representação geométrica dependerá do número de variáveis do sistema**. Se o sistema tiver duas equações então a representação será dada em duas dimensões (no plano), como no exemplo anterior.
Se o sistema tiver três equações então a representação será dada em três dimensões (no espaço) e cada equação representará um plano no espaço.

Número de Soluções e Posicionamento das Retas no Plano

Quando temos duas equações no sistema, o número de soluções está diretamente relacionado com o posicionamento das retas no plano. Vejamos os três casos possíveis:

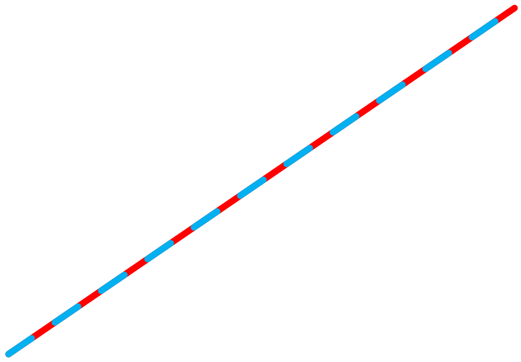
- **SPD: Sistema Possível e Determinado:**

Como só há uma solução, consequentemente as retas só se interceptarão em um ponto. Portanto teremos retas **concorrentes**.



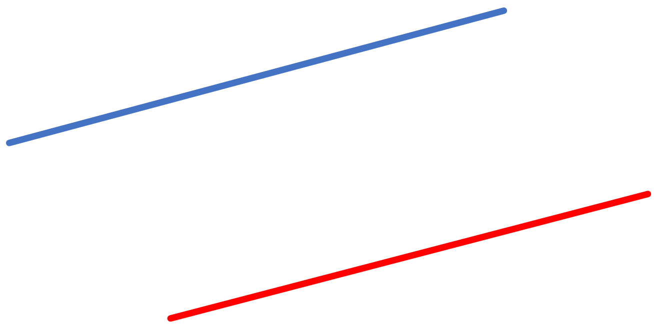
- **SPI: Sistema Possível e Indeterminado:**

Nestes casos, como há infinitas soluções, as retas terão infinitos pontos em comum e, portanto, serão retas **coincidentes**.



- **SI: Sistema Impossível:**

Como o sistema impossível não possui solução, as retas não terão nenhum ponto em comum. As retas serão, portanto, **paralelas e distintas**.



SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Temos um Sistema Linear Homogêneo quando todos os termos independentes das equações são iguais a zero. Veja algumas equações homogêneas abaixo:

$$\begin{matrix} 2x - 3y = 0 \\ 5x + 7y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 5x + 7y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5z - 3w = 0 \\ 5x + 7y - z + 2w = 0 \\ x - 3y + 2z + 5w = 0 \\ 3x - y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$$

O sistema homogêneo possui uma solução pré-definida: todas as variáveis são iguais à zero. Ela é chamada de solução trivial e dada por $S=\{(0, 0, 0)\}$. Sendo assim ele nunca será um SI, sempre será ou SPD ou SPI.

Exemplo 1: Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Primeiro vamos calcular o determinante para saber qual tipo de sistema temos aqui.

$$det = 2 + 3 - 2 - (-3 - 4 - 1)$$
$$det = 3 + 8$$
$$det = 11$$
$$det \neq 0$$

Logo, o sistema será SPD, então a única solução será a trivial S={(0, 0, 0)}.

Exemplo 2: Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Primeiro vamos calcular o determinante para saber qual tipo de sistema temos aqui.

$$det = 5 - 6 + 9 - (-9 - 10 - 3)$$
$$det = 30$$
$$det \neq 0$$

Logo, o sistema será SPD, então a única solução será a trivial $S = \{(0, 0, 0)\}$.

Exemplo 3: Discuta o sistema linear $\begin{cases} ax + y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Primeiro vamos calcular o valor de a para podermos saber para quais valores será SPD, ou seja, $det \neq 0$ e para SPI o $det = 0$.

$$-4a + 3 + 2 - (-12 + 2 + a) \neq 0$$
$$-5a \neq -15$$
$$a \neq 3$$

Para termos um sistema SPD e termos uma única solução, a trivial o $a \neq 3$.

Agora se tivermos $a = 3$ teremos um SPI.

ANOTAÇÕES