Permutações

INTRODUÇÃO

Considere o seguinte problema:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 3 e 7?

Observe que o total de dígitos à disposição é igual à quantidade de elementos (algarismos) de cada número formado. Os números formados são 137, 173, 317, 371, 713 e 731. Tais números diferem entre si somente pela **ordem** na qual os elementos estão dispostos.

Esses agrupamentos são chamados **permutações simples** dos dígitos 1, 3 e 7.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com **n** elementos distintos. Vamos considerar o problema de formar grupos com **n** elementos distintos, de modo que a ordem dos elementos dentro de cada um desses grupos seja importante.

Posição 1	Posição 2	Posição 3	...	Posição **n**
↓	↓	↓		↓
n	n – 1	n – 2	...	1

Observe que há **n** posições a serem preenchidas. Assim, temos:

A primeira posição pode ser preenchida de **n** modos.

A segunda posição pode ser preenchida de (n – 1) modos.

A terceira posição pode ser preenchida de (n – 2) modos.

⋮

A n-ésima posição pode ser preenchida de 1 modo.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de grupos é igual a:

$n.(n - 1).(n - 2).(n - 3). ... .1$, ou seja, $n!$

Esses grupos formados são chamados **permutações simples** dos **n** elementos, e são indicados por P_n.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo:

Determinar o número de anagramas obtidos a partir das letras da palavra DOCE.

Cada anagrama é obtido mediante a troca da posição das letras fornecidas. Portanto, trata-se de um problema de permutações simples. Assim, temos:

$P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$ anagramas

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Considere o seguinte problema:

Quantos são os anagramas da palavra AMANHECE?

Devemos, inicialmente, distribuir as 8 letras em 8 posições.

i) A distribuição das letras **A** e **A** pode ser feita de $\frac{A_{8,2}}{2!}$ modos. Observe que dividimos o resultado por 2!, porque as permutações das letras **A** e **A** são idênticas.

ii) Após definirmos as posições das letras **A** e **A**, restam 6 posições. A distribuição das letras **E** e **E** pode ser feita de $\frac{A_{6,2}}{2!}$ modos.

iii) Após distribuirmos as letras **A**, **A**, **E** e **E**, restam 4 posições. As letras restantes podem ser distribuídas de 4! modos.

O número de anagramas é dado por:

$$\frac{A_{8,2}}{2!}.\frac{A_{6,2}}{2!}.4! = \frac{8!}{6!.2!}.\frac{6!}{4!.2!}.4! = \frac{8!}{2!.2!}$$

Generalizando, temos:

$$\boxed{P_n^{\alpha, \beta, ..., \theta} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!. ... .\theta!}}$$

Em que $\alpha, \beta, ..., \theta$ indicam o número de repetições de cada elemento do conjunto.

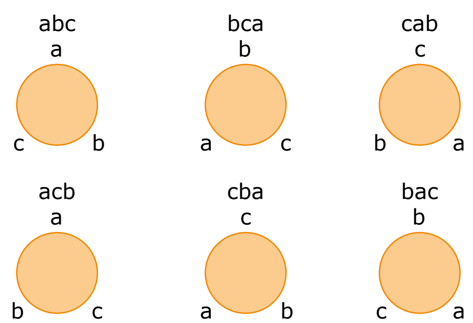
No exemplo, temos $P_8^{2,2} = \frac{8!}{2!.2!} = 10\,080$ anagramas.

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Chamamos de permutações circulares as permutações de elementos dispostos em torno de um círculo. Duas distribuições são consideradas idênticas quando uma delas pode ser obtida a partir da outra, mediante uma rotação simples. Observe o problema a seguir:

De quantos modos podemos distribuir três objetos **a**, **b** e **c** em torno de um círculo?

Considere as seguintes configurações:



A princípio, podemos pensar que temos $P_3 = 3! = 6$ modos de distribuir **a**, **b** e **c**. No entanto, em cada uma das linhas do esquema anterior há três configurações idênticas. Cada uma das figuras de uma linha pode ser obtida a partir das demais figuras da mesma linha com uma rotação simples. Porém, cada configuração em uma linha não pode ser obtida a partir de uma rotação simples de uma configuração da outra linha.

Desse modo, temos apenas $\frac{P_3}{3} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$ permutações circulares. Observe que dividimos o total de permutações por 3, pois cada uma das permutações consideradas gera 3 configurações idênticas, que devem contar como uma.

De maneira geral, podemos considerar que, ao permutar circularmente **n** objetos distintos, cada uma das n! permutações gera **n** configurações idênticas, que devem ser "descontadas" do total. Fazemos isso dividindo n! por **n**.

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1).(n-2). \dots .2 . 1}{n} \Rightarrow$$

$$PC_n = (n - 1).(n - 2). \dots . 2 . 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{PC_n = (n - 1)!}$$

Em que PC_n é o número de permutações circulares de **n** objetos distintos.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) A quantidade de anagramas da palavra CONCURSO é:

A) 2 520
B) 5 040
C) 10 080
D) 20 160
E) 40 320

02. C19I (IFPE–2018) Os alunos do curso de Computação Gráfica do campus Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura

A) menos de 1 minuto.
B) menos de 1 hora.
C) menos de meia hora.
D) menos de 10 minutos.
E) mais de 1 hora.

03. K31Z (UESPI) De quantas maneiras podemos enfileirar 5 mulheres e 3 homens, de tal modo que os 3 homens permaneçam juntos?

A) 8!
B) 6!
C) 6! . 3!
D) 7!
E) 9!

04. QJMF (IFSP) Um banco está testando um novo produto e disponibilizou a alguns dos seus clientes acesso via Internet para esse produto, por meio de senhas compostas por cinco vogais distintas e dois números pares distintos, de 2 a 8, nessa ordem, ou seja, primeiro as vogais e depois os números. O número de clientes que podem acessar esse novo produto, via Internet, é:

A) 22
B) 3 520
C) 1 440
D) 180
E) 920

05. B4MØ (UFSM-RS) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

A) 12
B) 30
C) 42
D) 240
E) 5 040

06. 1A5C (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco podem se posicionar na fila única dos caixas de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?

A) 4! . 7!
B) 5! . 6!
C) 6 . 6!
D) 10 . 6!
E) 4! + 10!

07. H2TN (UERJ) Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras **B**, **M** e **C**. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

A) 6
B) 90
C) 180
D) 720

08. (Mackenzie-SP–2018) Se somarmos todos os números obtidos permutando-se os algarismos em 1234, o resultado obtido é igual a:

A) 54 320
B) 55 990
C) 59 660
D) 66 660
E) 69 960

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS–2017) A capital dos gaúchos, oficialmente fundada em 26 de março de 1772, já foi chamada de Porto de Viamão. Atualmente, a também capital dos Pampas recebe o nome de PORTO ALEGRE.

Adicionando o número de anagramas formados com as letras da palavra ALEGRE ao de anagramas formados com as letras da palavra PORTO em que as consoantes aparecem juntas, obtemos ___________ anagramas.

A) 378
B) 396
C) 738
D) 756
E) 840

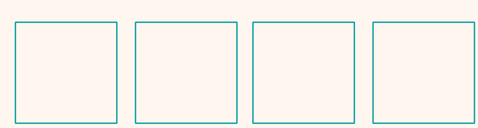
02. W6GW (PUC RS) Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mãe e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais. Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é:

A) 4
B) 6
C) 24
D) 36
E) 48

03. WI7T (Mackenzie-SP) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é:

A) 9(9!)
B) 8(9!)
C) 9(8!)
D) $\frac{10!}{2}$
E) $\frac{10!}{4}$

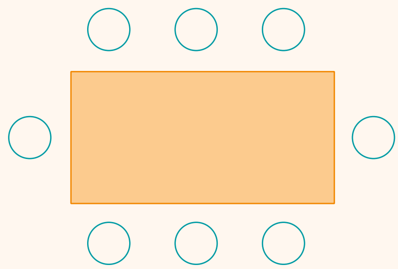
04. (UEPA) Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração a seguir, é:



A) $24 . 120^4$
B) 120^4
C) 24 . 120
D) 4 . 120
E) 120

05. Ø97G

(UPE) Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

A) 1 440
B) 1 920
C) 2 016
D) 4 032
E) 5 760

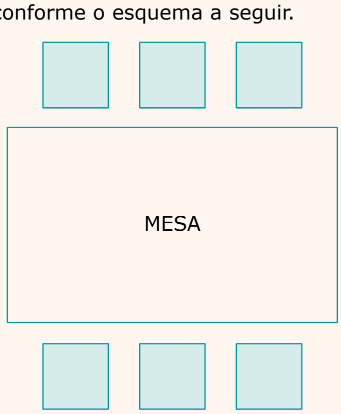
06. RF8G

(UEMA) Uma professora de educação infantil de uma escola, durante a recreação de seus 6 alunos, organiza-os em círculos para brincar. Considere a seguinte forma de organização dos alunos pela professora: são três meninas e três meninos e cada menina ficará ao lado de um menino, de modo alternado. As possibilidades de organização dos seus alunos são

A) 4.
B) 6.
C) 9.
D) 12.
E) 16.

07. KY6X

(Insper-SP) Em cada ingresso vendido para um *show* de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir.

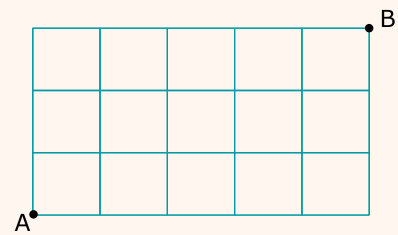


O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é:

A) 96
B) 120
C) 192
D) 384
E) 720

08. WD2B

(UPF-RS) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando **A** a **B** é:



A) 40 320
B) 6 720
C) 256
D) 120
E) 56

09. ØI1F

(UERJ–2017) Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor. Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.

10. 8ZTA

(UFPB) A prefeitura de certo município solicitou ao Governo Federal uma verba para a execução das seguintes obras:

- Saneamento básico;
- Calçamento de ruas;
- Construção de uma escola;
- Construção de uma creche;
- Construção de casas populares.

O Governo Federal aprovou a concessão da verba solicitada, na condição de que fosse estabelecida uma ordem na execução das obras, de modo que, tendo sido liberada a verba para a primeira obra, a verba para a segunda só seria liberada após a conclusão da primeira, e assim sucessivamente até a execução da última obra. Nesse contexto, considere o planejamento feito pela prefeitura:

- A primeira obra escolhida foi a construção das casas populares;
- O calçamento das ruas só poderá ser executado com o saneamento básico concluído.

Atendendo às condições estabelecidas pelo Governo Federal e ao planejamento da prefeitura, é correto afirmar que o número de maneiras possíveis e distintas para a realização dessas 5 obras é:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

11. (UNIFESP) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

A) PROVA.

B) VAPOR.

C) RAPOV.

D) ROVAP.

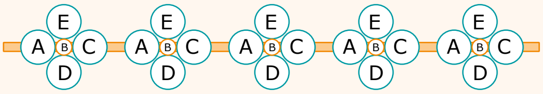
E) RAOPV.

12. II13

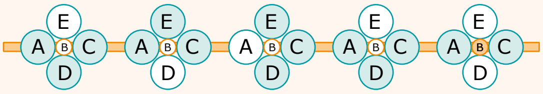
(AFA-SP–2020) Um pisca-pisca usado em árvores de natal é formado por um fio com lâmpadas acopladas, que acendem e apagam sequencialmente.

Uma pessoa comprou um pisca-pisca, formado por vários blocos, com lâmpadas em formato de flores, com o seguinte padrão:

- Cada bloco é composto por 5 flores, cada uma com 5 lâmpadas circulares, de cores distintas (A, B, C, D, E), como na figura:



- Em cada flor, apenas 3 lâmpadas quaisquer acendem e apagam juntas, por vez, ficando as outras duas apagadas.
- Todas as 5 flores do bloco acendem e apagam juntas.
- Em duas flores consecutivas, nunca acendem e apagam as mesmas 3 cores da anterior. Assim, considere que uma composição possível para um bloco acender e apagar corresponde à figura a seguir:



O número de maneiras, distintas entre si, de contar as possibilidades de composição para um bloco desse pisca-pisca é

A) 10^5.

B) $9^4 . 10$.

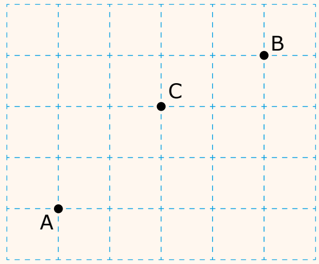
C) 9^5.

D) $9^5 . 10$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2020) Três amigos, André, Bernardo e Carlos moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos **A**, **B** e **C** estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa do Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio. Fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

A) 4.

B) 14.

C) 17.

D) 35.

E) 48.

02. FG02

(Enem) Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: <www.infowester.com>. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por:

A) $10^2 . 26^2$

B) $10^2 . 52^2$

C) $10^2 . 5^2 . \frac{4!}{2!}$

D) $10^2 . 26^2 . \frac{4!}{2! . 2!}$

E) $10^2 . 52^2 . \frac{4!}{2! . 2!}$

MATEMÁTICA

03. (Enem) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

A) $20 \cdot 8! + (3!)^2$

B) $8! \cdot 5! \cdot 3!$

C) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

D) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

E) $\dfrac{16!}{2^8}$

04. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A) 24.

B) 31.

C) 32.

D) 88.

E) 89.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. C
- 04. C
- 05. C
- 06. A
- 07. B
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. D
- 07. C
- 08. E
- 09. 91 formas distintas
- 10. C
- 11. E
- 12. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. E
- 03. B
- 04. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %