Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

Física

AULA 08
Colisões e centro de massa

Prof. Toni Burgatto

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Nesta aula vamos trabalhar os conceitos de impulso, quantidade de movimento e centro de massa. Este tema costuma ser cobrado junto com energia mecânica e, em algumas ocasiões, com análise de dinâmica.

É muito importante você guardar todos os conceitos e fazer muito exercícios para pôr em prática tudo aquilo que você aprendeu desse assunto.

Como esse assunto é muito cobrado, existem muitas questões de elevado nível nos nossos vestibulares de interesse.

As questões da OBF no início da lista servirão para te dar uma base, antes de entrar nas questões do nosso concurso em si.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Colisões

Uma colisão (ou um choque) entre dois corpos ocorre quando eles se aproximam e durante um ***curto intervalo de tempo*** interagem fortemente, de tal forma que as forças de interação entre eles são consideradas desprezíveis.

Como exemplos podemos mencionar a batida de um taco na bola de beisebol, o choque entre duas bolas de bilhar, o chute numa bola de futebol, o saque de um jogador de vôlei. Nesses casos, dizemos que as colisões ocorreram entre corpos macroscópicos, havendo contato entre os corpos durante a colisão.

Por outro lado, quando se trata de corpos microscópicos como partículas ou cargas, não é necessário haver contato entre os corpos. Como por exemplo, um próton A que se move com grande rapidez $\vec{v}_A$, bem distante de outro próton B inicialmente em repouso. Lembrando da eletrostática, sabemos que o módulo da força de repulsão é diretamente proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as cargas:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

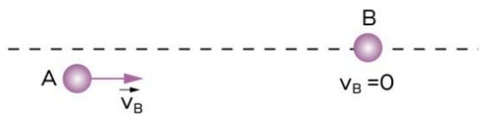


Figura 1: Próton se aproximando de outro próton parado.

Dessa forma, a medida em que a distância vai diminuindo, a força de repulsão se torna muito intensa, de tal forma que quando A está bem próximo de B, para um intervalo de tempo bem pequeno, há uma intensa repulsão entre eles, acarretando o desvio da trajetória de A e o deslocamento de B de sua posição inicial, como mostra a figura abaixo.

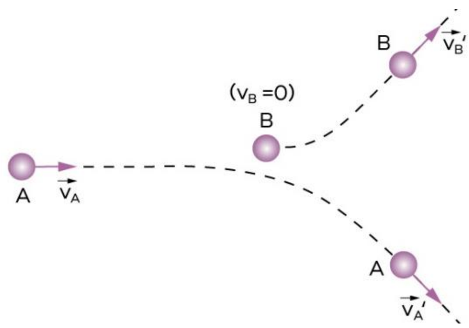


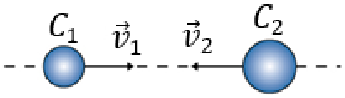
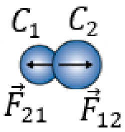
Figura 2: Devido à repulsão eletrostática, o próton, que estava em repouso, entra em movimento segundo a direção indicada, caracterizando uma colisão sem a necessidade de haver contato entre os corpos.

Na verdade, também não ocorre contato entre corpos macroscópicos se colidindo. De fato, quando os corpos estão bem próximos, a força de repulsão de origem elétrica se torna muito intensa. Entretanto, para nossos olhos limitados, tudo se passa como se ocorresse o contato.

Essas forças que atuam durante uma colisão são muito mais intensas que as outras forças externas que atuam no sistema e, além disso, o intervalo de tempo em que elas ocorrem são da ordem de milésimos de segundos e, portanto, as chamamos de ***forças impulsivas***.

Vamos tomar a colisão entre dois corpos macroscópicos, de tal forma que eles não se quebrem e não mudam de natureza durante o impacto. Vamos supor que após o choque, os corpos se separam. Podemos ilustrar o que ocorre durante a colisão pelo seguinte esquema:

Antes da colisão	Durante a colisão	Depois da colisão

		
Os corpos C_1 e C_2 estão se aproximando.	Durante o choque, os corpos exercem forças opostos $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$, que obedecem à 3ª lei de Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e $\lvert\vec{F}_{12}\rvert = \lvert\vec{F}_{21}\rvert$	Corpos se afastando após o choque.

Durante o pequeno intervalo de tempo em que acontece a colisão, o corpo C_1 exerce no corpo C_2 uma força variável $\vec{F}_{1,2}$ e, simultaneamente, o corpo C_2 exerce em C_1 uma força $\vec{F}_{2,1}$. Pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_{1,2}$ e $\vec{F}_{2,1}$ formam um par ação e reação, tendo em cada instante os mesmos módulos, as mesmas direções e sentidos opostos:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \text{ e } |\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = F$$

Na verdade, é muito difícil obter o gráfico da força impulsiva $F(t)$. Tais forças são muito intensas e ocorrem em intervalos de tempo muito curtos, por isso, sabemos que o gráfico $F \times t$ é algo semelhante a figura abaixo:

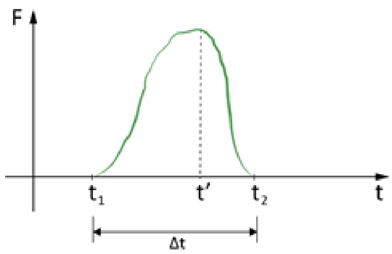


Figura 3: Gráfico da força impulsiva em função do tempo. De t_1 a t' constitui a fase de deformação e de t' a t_2 a fase de restituição.

No decorrer do choque podemos identificar duas etapas: a deformação e a restituição. A fase de deformação começa no instante em que começam o contato (t_1) e encerra no instante em que a velocidade relativa entre os corpos é nula (t_2). A partir de t_2, inicia-se a etapa de restituição, que finaliza em t_3, momento em que os corpos se separam.

Na colisão, podemos dizer que cada corpo é semelhante a uma mola que comprime (fase de deformação) e depois se distende (fase de restituição), sendo capaz (ou não) voltar à sua forma inicial. No geral, após o choque as partículas ficam deformadas, ainda que seja pequena.

Se os corpos ficam unidos após a colisão, então não há fase de restituição e o gráfico da força impulsiva é semelhante a ilustração abaixo:

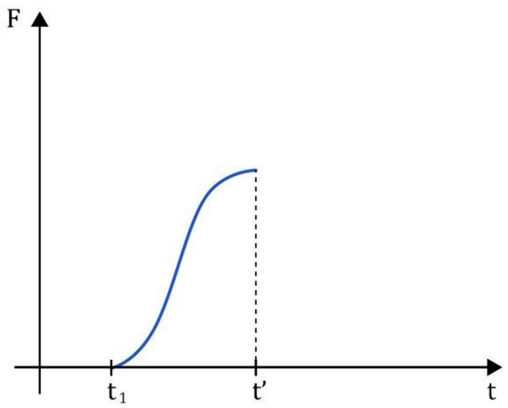


Figura 4: Gráfico da força impulsiva em função do tempo apenas para a fase de deformação, característica de colisões inelásticas, isto é, corpos grudam após o choque.

De um modo geral, não estamos interessados em conhecer a forma exata do gráfico da força impulsiva pelo tempo. Quando estudamos colisões, não nos interessa saber detalhadamente o que ocorreu durante o impacto. Geralmente, desejamos saber o estado do sistema imediatamente após a colisão, dado que já possuímos as informações do sistema antes do choque.

1.1. A aplicação de quantidade de movimento do sistema em colisões

Vamos tomar um sistema constituído por dois corpos que se colidem. Como já mencionamos, a colisão acontece em um intervalo de tempo muito curto e, nesse intervalo de tempo, as forças impulsivas são muito mais intensas do que as forças externas.

Com isso, podemos desprezar a variação da quantidade de movimento produzida pelas forças externas, ou seja, a quantidade de movimento do sistema permanece inalterado.

Dessa forma, as forças internas que atuam no decorrer do impacto servem apenas para fazer uma transferência interna de quantidade de movimento entre os corpos. Assim, essas transferências internas não modificam a soma das quantidades de movimento do sistema.

Dessa forma, podemos dizer que:

Mesmo que o **sistema não esteja isolado das forças externas** em uma colisão, podemos admitir que a quantidade de movimento do sistema ($\vec{Q}_{sis}$) não se altera durante o intervalo de tempo muito pequeno ($\Delta t \cong 0$). Em outras palavras:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

Para um sistema isolado, podemos dizer que a quantidade de movimento permanece inalterada antes, durante e depois de uma colisão interna:

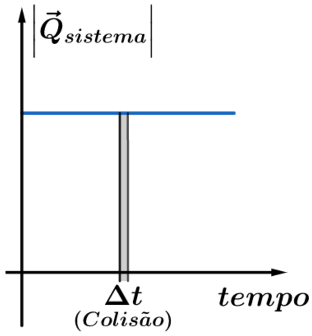


Figura 5: Módulo da quantidade de movimento de um sistema isolado em função do tempo.

Por outro lado, a quantidade de movimento em um sistema não isolado varia com o tempo. Entretanto, uma colisão interna não altera esse comportamento. Sem perda de generalidade, para um sistema no qual aumenta a quantidade de movimento, caso ocorra uma colisão temos o seguinte gráfico:

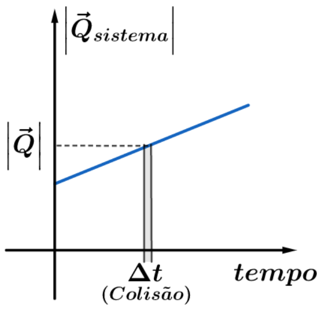


Figura 6: Módulo da quantidade de movimento de um sistema não isolado que cresce com o tempo.

Um exemplo clássico de um sistema não isolado que aumenta o módulo da quantidade de movimento com o tempo consiste na queda de duas bolinhas que se chocam em algum ponto da queda. Note que a força peso é externa as duas bolinhas mas na colisão interna não é alterada a quantidade de movimento do sistema, nem a velocidade do seu centro de massa ($\vec{Q}_{sis} = m_{total} \cdot \vec{v}_{cm}$), que obedece à lei de formação da figura 6.

Outro exemplo clássico de um sistema que a quantidade de movimento vai decrescendo com o tempo é o deslocamento de dois blocos em uma superfície áspera.

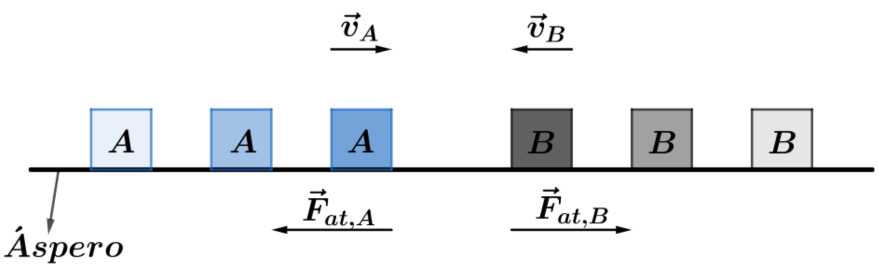


Figura 7: Dois corpos se aproximando, em uma superfície com atrito.

Devido à ação da força de atrito externo, quantidade de movimento do sistema vai diminuindo gradativamente, como ilustra a figura abaixo.

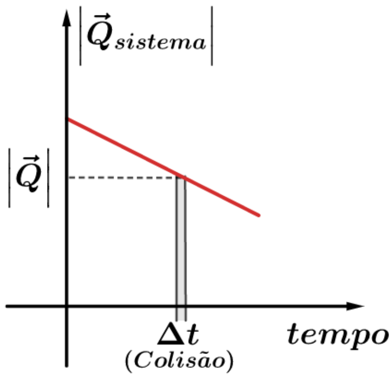


Figura 8: Módulo da quantidade de movimento de um sistema não isolado que decresce com o tempo.

Na colisão entre os dois blocos, não há perturbação no comportamento da quantidade de movimento decrescente desse sistema, já que o intervalo de tempo do choque é muito pequeno e, assim, continua válida a equação $(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$.

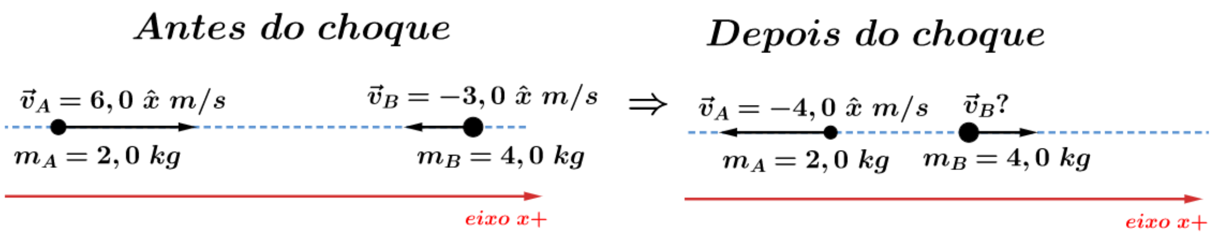
01)

Dois corpos de massas $m_A = 2{,}0\ kg$ e $m_B = 4{,}0\ kg$, movem-se sobre uma reta, alinhados os sentidos e os módulos das velocidades, conforme figura abaixo.

Após a colisão unidimensional dos corpos, a partícula A move-se para a esquerda com velocidade de $4,0\ m/s$. Calcule o módulo e o sentido da velocidade do corpo B.

Comentários:

Inicialmente, devemos adotar um eixo para orientarmos a direção e o sentido das velocidades e das quantidades de movimento. Dessa forma, podemos representar nosso problema da seguinte forma:



Pela conservação da quantidade de movimento na colisão, temos:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow m_A \cdot \vec{v}'_A + m_B \cdot \vec{v}'_B = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B$$

$$2{,}0 \cdot (-4{,}0\ \hat{x}) + 4{,}0 \cdot \vec{v}'_B = 2{,}0 \cdot (6{,}0\ \hat{x}) + 4{,}0 \cdot (-3{,}0\ \hat{x})$$

$$4{,}0 \cdot \vec{v}_B' = 2{,}0 \cdot (6{,}0\,\hat{x}) + 4{,}0 \cdot (-3{,}0\,\hat{x}) - 2{,}0 \cdot (-4{,}0\,\hat{x})$$

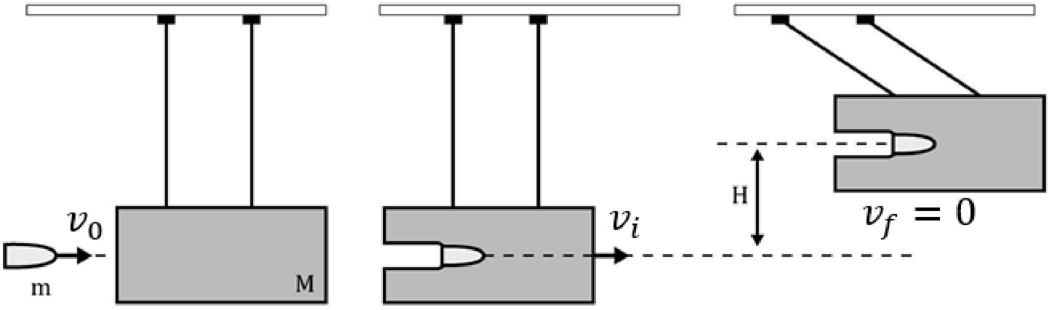
$$4{,}0 \cdot \vec{v}_B' = 8{,}0\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B' = 2{,}0\,\hat{x}\ (m/s)}$$

Portanto, o corpo B move-se no sentido do eixo adotado com módulo igual à 2,0 m/s.

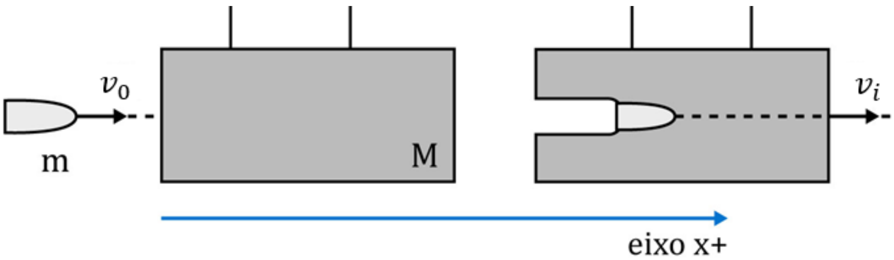
02) (Pêndulo balístico)

Um pêndulo balístico é um dispositivo muito utilizado para medir a intensidade da velocidade de uma munição de revolver. O sistema é composto de um grande bloco de madeira de massa M pendurado por fios a uma superfície horizontal. Os fios são inextensíveis, flexíveis e tem massa desprezível. Assim, um projétil de massa m e velocidade v_0 é disparado horizontalmente contra o bloco e nele fica incrustada. Em seguida, o conjunto $(projétil + bloco)$ atinge a altura máxima H em relação à posição de repouso inicial. Calcule a velocidade v_0 neste problema.



Comentários:

Considerando que o intervalo de tempo do choque é muito pequeno, então logo após a colisão o conjunto $projétil + bloco$ ainda não começou a subir. Dessa forma, podemos trabalhar a conservação da quantidade de movimento como sendo unidimensional.



$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow (m + M) \cdot v_i\,\hat{x} = m \cdot v_0\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = \frac{m}{m + M} \cdot v_0}$$

Conhecido o módulo da velocidade do conjunto logo após a colisão, podemos aplicar a conservação da energia mecânica entre o início da subida e o ponto mais alto que o conjunto alcança:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$\Rightarrow (m+M)\cdot g\cdot H=\frac{1}{2}(m+M)\cdot v_i^2$$

$$\Rightarrow v_i=\sqrt{2\cdot g\cdot H}\Rightarrow \frac{m}{m+M}\cdot v_0=\sqrt{2\cdot g\cdot H}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0=\left(\frac{m+M}{m}\right)\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot H}}$$

1.2. Energia cinética em colisões

De um modo geral, em uma colisão de dois corpos macroscópicos uma parte da energia cinética total é perdida. Certa quantidade de energia é perdida no trabalho de deformação dos corpos. Além disso, uma fração de energia cinética é transformada em outras energias como a térmica e vibratória, a qual produz o som que ouvimos no momento da colisão.

Em alguns casos, a perda de energia cinética é tão pequena que podemos admitir que a energia cinética se conserva no choque. Neste caso, dizemos que os choques são ***elásticos***. Um bom exemplo de choques totalmente elásticos são alguns choques entre partículas subatômicas.

Em relação à conservação ou não da energia cinética, as colisões são classificadas em:

- ***Choques elásticos***: a energia cinética do sistema se conserva e os corpos se separam após o choque.

$$\left(\sum E_{cin}\right)_{antes}=\left(\sum E_{cin}\right)_{depois}$$

- ***Choques parcialmente elásticos***: há separação dos corpos após o choque, mas a energia cinética total logo após o choque é menor que a energia cinética total logo antes do impacto.

$$\left(\sum E_{cin}\right)_{antes}>\left(\sum E_{cin}\right)_{depois}$$

- ***Choques inelásticos***: os corpos grudam na colisão e a energia total após o choque é menor que antes do choque.

Curiosidade!

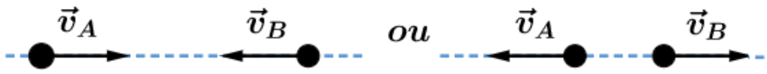
Existem ainda os choques superelásticos, que podem ter energia cinética total após o choque maior que a de antes da colisão. Isso ocorre se, no decorrer do choque, alguma energia potencial é liberada, transformando-se em energia cinética. Tal fato ocorre em colisões que envolve núcleos atômicos. Neste curso não trabalharemos com os choques superelásticos.

1.3. Velocidade relativa

Antes de continuar nossos estudos dos choques, vamos relembrar alguns conceitos da Cinemática os conceitos de ***velocidade relativa***, para duas partículas que se deslocam em uma mesma reta.

Para isso, vamos dividir em alguns possíveis casos para o deslocamento relativo das partículas:

- Partículas em sentidos opostos:



Nesse caso, o módulo da velocidade relativa de aproximação ou de aproximação ($\vec{v}_r$) entre os corpos é dado pela soma dos módulos das velocidades:

$$\boxed{|\vec{v}_r| = |\vec{v}_A| + |\vec{v}_B|}$$

- Partículas no mesmo sentido:

Nesse caso, o módulo da velocidade relativa ($\vec{v}_r$) é dado pela diferença dos módulos das velocidades dos corpos. Assim, temos duas possibilidades:

- Se $|\vec{v}_A| > |\vec{v}_B|$, então $|\vec{v}_r| = |\vec{v}_A| - |\vec{v}_B|$.
- Se $|\vec{v}_B| > |\vec{v}_A|$, então $|\vec{v}_r| = |\vec{v}_B| - |\vec{v}_A|$.

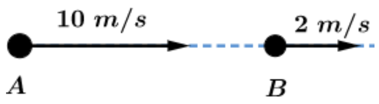
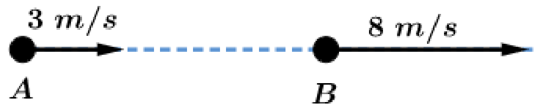
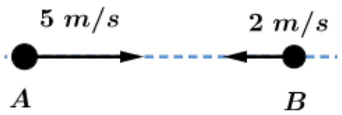
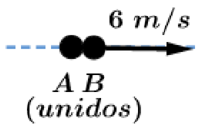
1.4. Coeficiente de restituição

Quando vamos resolver um problema de colisão, a conservação da quantidade de movimento não é suficiente para a resolução, já que temos mais incógnitas do que equações. Por isso, são necessárias mais informações.

Em choques unidimensionais de dois corpos macroscópicos A e B, experimentalmente, Isaac Newton verificou uma interessante relação entre as velocidades dos corpos. Tal relação depende apenas da natureza dos materiais. Chamamos essa relação de coeficiente de restituição e representamos pela letra e. Matematicamente, ele é calculado da seguinte forma:

$$e = \frac{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ logo após o choque}|}{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ logo antes do choque}|}$$

Note que pela definição, o coeficiente de restituição é adimensional. Alguns exemplos de cálculo do coeficiente de restituição.

Logo **antes** do choque	Logo **depois** do choque	Coeficiente de restituição (e)
		$e = \frac{8-3}{10-2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$
		$e = \frac{2+4}{5+2} = \frac{6}{7} = 0{,}86$
		$e = \frac{6-6}{5-4} = \frac{0}{1} = 0$

Observação: outra forma de ver o coeficiente de restituição é escrever assim:

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai} - v_{Bi}}$$

Tomando o devido cuidado de colocar as velocidades com sinais de + ou – de acordo com o eixo de referência adotado. Por exemplo, vamos pegar o caso da segunda linha da tabela logo acima e adotar o referencial para a direita. Então:

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai} - v_{Bi}} = \frac{4-(-2)}{5-(-2)} = \frac{6}{7}$$

Para cada tipo de choque, o coeficiente de restituição pode ter os seguintes valores:

- ***Choque inelástico***: como os corpos ficam grudados após o choque inelástico, então a velocidade relativa após o choque é nula. Portanto:

$$e = 0$$

- ***Choque elástico:*** o módulo da velocidade relativa após o choque é igual ao módulo da velocidade relativa antes do choque. Em outras palavras:

$$e = 1$$

- Sem perda de generalidade, vamos demonstrar esse resultado para o caso de um choque unidimensional elástico como mostra a figura abaixo.

- Pela conservação da quantidade de movimento, temos:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$$

$$m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$$

$$m_A \cdot (v_A - v'_A) = m_B \cdot (v'_B - v_B)\ (eq. 1)$$

Dado que o choque é elástico, então a energia cinética do sistema se conserva:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A {v'}_A^2 + \frac{1}{2}m_B {v'}^2$$

$$m_A\left(v_A^2 - {v'_A}^2\right) = m_B\left({v'_B}^2 - v_B^2\right)\ (eq. 2)$$

Dividindo as equações 1 e 2, temos:

$$\frac{m_A\left(v_A^2 - {v'_A}^2\right)}{m_A \cdot (v_A - v'_A)} = \frac{m_B\left({v'_B}^2 - v_B^2\right)}{m_B \cdot (v'_B - v_B)} \Rightarrow \frac{(v_A + v'_A) \cdot (v_A - v'_A)}{(v_A - v'_A)} = \frac{(v'_B + v_B)(v'_B - v_B)}{(v'_B - v_B)}$$

$$v'_A + v_A = v'_B + v_B \Rightarrow v'_A - v'_B = v_B - v_A\ (eq. 3)$$

Da definição de coeficiente de restituição, temos que:

$$e = \frac{|v'_A - v'_B|}{|v_A - v_B|}$$

Então, pela equação 3 vemos que:

$$e = \frac{|v'_A - v'_B|}{|v_A - v_B|} = \frac{|v_B - v_A|}{|v_A - v_B|} = \frac{|v_A - v_B|}{|v_A - v_B|} = 1$$

- ***Choques parcialmente elásticos***: a energia cinética total logo após a colisão é menor que a energia cinética total logo antes da colisão. Por isso, a velocidade relativa imediatamente após o impacto é menor que a velocidade relativa logo antes do choque (trabalhando em módulo) e, portanto:

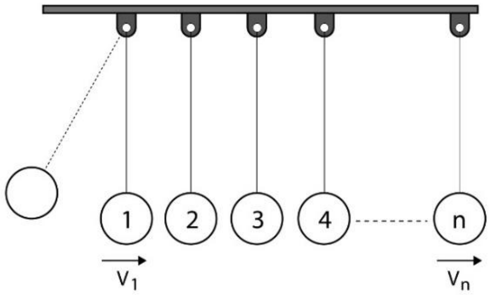
$$\boxed{0 < e < 1}$$

Observações:

- ✓ Na verdade, o coeficiente de restituição (e) não depende apenas do material. Ele depende das velocidades e das formas dos corpos.
- ✓ Mais à frente vamos estudar choques oblíquos e mostraremos como calcular o coeficiente de restituição para estes casos.
- ✓ Para choques superelásticos $e > 1$.

03)

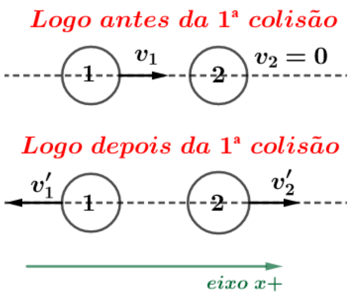
Considere n esferas de mesma massa m suspensas por fios de comprimentos iguais, com as esferas bem próximas umas das outras, quase se tocando, como ilustra a figura abaixo.



A esfera 1 é levemente erguida e solta, de tal forma que acerta a esfera 2 com velocidade $\vec{v}_1$. Após sucessivos choques, determine o módulo da velocidade da n-ésima esfera logo após o choque com a antecessora, pela primeira vez. Adote que o coeficiente de restituição entre os choques é igual à e.

Comentários:

Note que as pequenas esferas não se tocam. Primeiramente, vamos analisar a colisão entre a primeira e a segunda esfera e notar que existe uma lei de recorrência para as velocidades. Para as duas primeiras esferas, temos:



Pela definição de coeficiente de restituição, temos que:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v_1' + v_2'}{v_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1' = e \cdot v_1 - v_2'}\ (eq. 1)$$

Fazendo a conservação da quantidade de movimento, temos:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow m \cdot (-v_1') + m \cdot v_2' = m \cdot v_1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2' = v_1 + v_1'}(eq. 2)$$

Substituindo a equação 1 em 2, vem:

$$v_2' = v_1 + e \cdot v_1 - v_2'$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1}\ (eq. 3)$$

Com esse resultado vemos que após o choque entre 1 e 2, esta última sai com velocidade v'_2 calculada acima. Agora, para o choque entre 2 e 3 vamos repetir os mesmos cálculos já feitos para 1 e 2. Por isso, podemos dizer sem riscos que:

$$v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v'_2$$

Mas, $v_2' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1$. Portanto:

$$v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1 \Rightarrow \boxed{v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 \cdot v_1} \text{ ou } \boxed{v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{3-1} \cdot v_1}$$

Para a quarta esfera, temos:

$$v_4' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v'_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+e}{2}\right)^{3-1} \cdot v_1 \Rightarrow \boxed{v_4' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{4-1} \cdot v_1}$$

Não é difícil de perceber que após $n-1$ colisões, a n-ésima esfera terá velocidade v_n expressa por:

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} \cdot v_1}$$

1.5. Aplicação de progressões geométricas em colisões

Considere uma bola caindo verticalmente do repouso e realiza sucessivas colisões com o solo, subindo e descendo como mostra a figura abaixo.

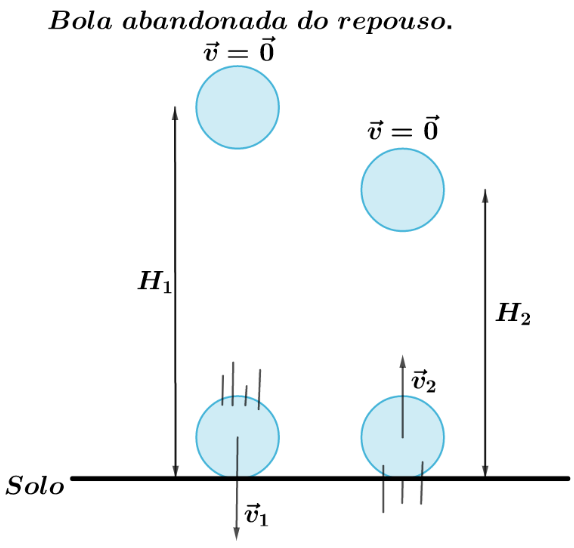


Figura 9: Esquema representativo de uma bola caindo de uma altura H_1 verticalmente. Apenas por questões didáticas, colocamos a bola, após o primeiro, retornando para cima um pouco mais a direita, mas tenha em mente que todo o movimento ocorre em uma única reta vertical.

Abandonada da altura H_1, a bola colide com o solo e sobe até a altura H_2, de onde cai novamente, efetuando o segundo choque com o solo e elevando-se até a altura H_3 e assim por diante.

Vamos determinar uma relação entre duas alturas consecutivas (H_{n-1} e H_n) e o coeficiente de restituição e.

No primeiro choque, a bola chega ao solo com velocidade v_1 dada por:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot H_1 \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1}}$$

Após o primeiro choque, utilizando a conservação da energia mecânica podemos relacionar v_2 com H_2:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial} \Rightarrow m \cdot g \cdot H_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}}$$

Da definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v_2 - 0}{v_1 - 0} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_2 = e \cdot v_1}$$

Para as alturas, vem:

$$v_2 = e \cdot v_1 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot H_2} = e \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1} \Rightarrow \boxed{H_2 = H_1 \cdot e^2}$$

Ou seja, a relação entre duas alturas consecutivas é dada por:

$$\boxed{H_n = H_{n-1} \cdot e^2}$$

Esse resultado nos permite dizer que as alturas sucessivas $(H_1, H_2, H_3, \dots, H_n)$ formam uma progressão geométrica de razão e^2.

Além das alturas, podemos relacionar o tempo de queda da bola para cada altura correspondente. Para isso, basta calcular o tempo de queda para duas alturas sucessivas e dividir os tempos encontrados:

$$\begin{cases} t_n = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H_n}{g}} \\ t_{n-1} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H_{n-1}}{g}} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}}$$

Como $H_n = H_{n-1} \cdot e^2$, então:

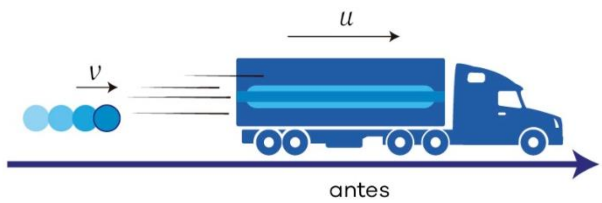
$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}} = \sqrt{e^2} \Rightarrow \boxed{t_n = t_{n-1} \cdot e}$$

Esse resultado nos mostra que os tempos de quedas sucessivos $t_1, t_2, \dots, t_n$ formam uma progressão geométrica de razão e.

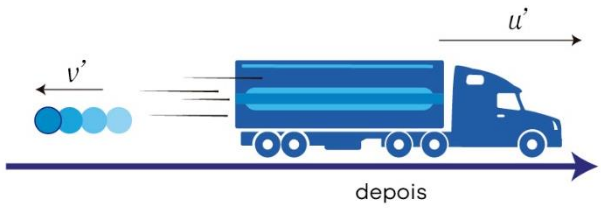
1.6. Caso especial: colisão unidimensional com $\boldsymbol{M} \gg \boldsymbol{m}$

Já imaginou uma colisão entre dois corpos com massas M e m, sendo $M \gg m$, por exemplo, uma bolinha de pingue-pongue se chocando com um caminhão. Para isso, vamos dividir em dois choques possíveis:

1. ***Bolinha e caminhão se movendo em um mesmo sentido***: vamos considerar a velocidade da bolinha (v) maior que a velocidade do caminhão (u). Dessa forma, temos a seguinte configuração:



Após a colisão da bolinha com o caminhão, temos a seguinte configuração:



Pela conservação da quantidade de movimento podemos escrever que:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot (-v') + M \cdot u' = m \cdot v + M \cdot u} (eq. 2.6.1)$$

Considerando que o choque é perfeitamente elástico ($e = 1$), temos:

$$e = \frac{\left|v_{relativa\ logo\ após}\right|}{\left|v_{relativa\ logo\ antes}\right|} = \frac{v' + u'}{v - u} = 1 \Rightarrow \boxed{u' = v - v' - u}\ (eq. 2.6.2)$$

Substituindo 2.6.2 em 2.6.1, vem:

$$m \cdot (-v') + M \cdot (v - v' - u) = m \cdot v + M \cdot u$$

$$v' = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cdot v - \left(\frac{2M}{M + m}\right) \cdot u$$

Dado que $M \gg m$, por exemplo, a massa de um caminhão é da ordem de $10^4\ kg$ e a massa da bolinha é da ordem de $10^{-3}\ kg$, dessa forma, podemos dizer que $M \pm m \cong M$. Portanto:

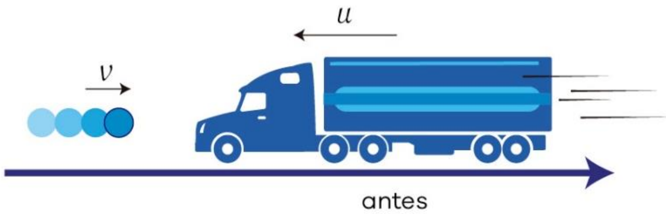
$$v' \cong v - 2 \cdot u$$

Com esse resultado, vemos que a velocidade do caminhão é praticamente a mesma:

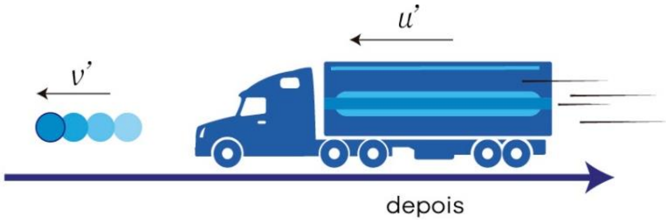
$$u' = v - v' - u \cong v - (v - 2 \cdot u) - u \Rightarrow \boxed{u' \cong u}$$

Portanto, nesse tipo especial de colisão o corpo com massa muito maior que o outro não tem a sua velocidade alterada após o impacto.

2. ***Bolinha e caminhão se movendo em sentido opostos***: neste caso, temos a seguinte configuração:



Após a colisão da bolinha com o caminhão, temos a seguinte configuração:



Pela conservação da quantidade de movimento podemos escrever que:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot (-v') + M \cdot (-u') = m \cdot v + M \cdot (-u)}\ (eq. 2.6.3)$$

Considerando que o choque é perfeitamente elástico ($e = 1$), temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v' - u'}{v + u} = 1 \Rightarrow \boxed{u' = v' - v - u}\ (eq. 2.6.4)$$

Substituindo a equação 2.6.4 em 2.6.3, temos:

$$-m \cdot v' - M \cdot (v' - v - u) = m \cdot v - M \cdot u$$

$$\Rightarrow v' = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cdot v + \left(\frac{2M}{M + m}\right) \cdot u$$

Novamente, como $M \gg m$, então podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\boxed{v' \cong v + 2u}$$

Com esse resultado, vemos novamente que a velocidade do caminho é praticamente a mesma:

$$u' = v' - v - u \cong v + 2u - v - u \Rightarrow \boxed{u' \cong u}$$

04)

Por transportar uma carga extremamente pesada, um certo caminhão trafega a uma velocidade de 10 m/s. Um rapaz à beira da estrada brinca com uma bola de tênis. Quando o caminhão passa, ele resolve jogar a bola na traseira do mesmo. Sabendo-se que a bola atinge a traseira do caminhão perpendicularmente, com velocidade de 20m/s, em reação ao solo, qual a velocidade horizontal final da bola após o choque? Considere um choque perfeitamente elástico.

A) 10 m/s B) 20 m/s C) 30 m/s D) Zero

Comentários:

Inicialmente, devemos perceber que a massa do caminhão é muito maior que a massa da bola e que antes da colisão eles se deslocam no mesmo sentido. Como acabamos de ver em teoria, a velocidade do caminhão permanece praticamente inalterada. Portanto, pelo coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v' + 10}{20 - 10} = 1$$

$$\Rightarrow v' + 10 = 10$$

$$\therefore \boxed{v' = 0}$$

Gabarito D.

1.7. Colisões bidimensionais

Vamos estudar as colisões bidimensionais. Por razões didáticas, trabalharemos os casos em ordem de dificuldade.

1.7.1. Colisão com um anteparo fixo

Considere uma pequena esfera de massa m que colide com uma superfície plana perfeitamente lisa, conforme a figura abaixo:

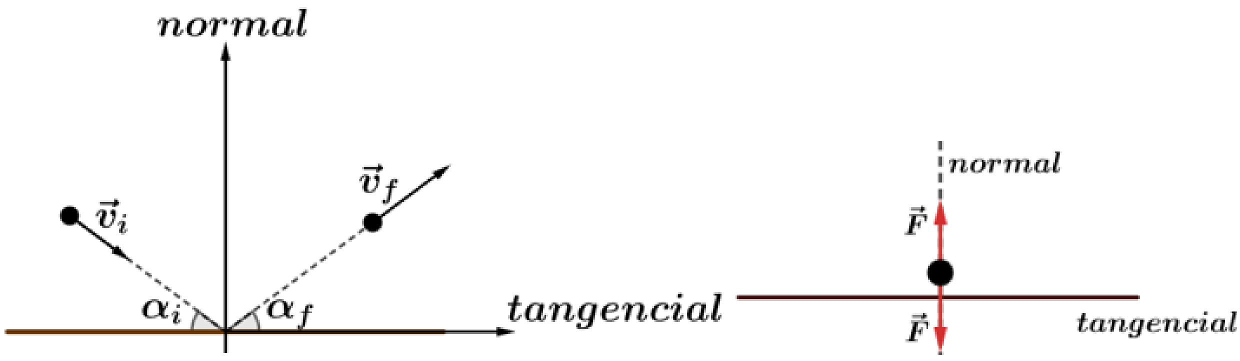


Figura 10: Desenho esquemático de um choque bidimensional em um anteparo fixo.

Quando a bola toca a superfície, ele troca um par de forças impulsivas $\vec{F}$ que atuam na direção normal e, por isso, há uma variação da quantidade de movimento nesta direção. Como não existem forças impulsivas e nem forças externas atuando na direção tangencial, haverá conservação da quantidade de movimento na direção tangencial.

Fazendo a conservação da quantidade de movimento na direção tangencial, temos:

$$(Q_{depois})_{tangencial} = (Q_{antes})_{tangencial} \Rightarrow m \cdot v_f \cdot \cos \alpha_f = m \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$\boxed{v_f \cdot \cos \alpha_f = v_i \cdot \cos \alpha_i} \quad (eq. 2.7.1)$$

Em colisões bidimensionais, o coeficiente de restituição e deve relacionar as velocidades relativas entre o corpo e o anteparo apenas na direção normal. Então, o coeficiente de restituição é expresso por:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|_{normal}}{|v_{relativa\ logo\ antes}|_{normal}} = \frac{v_{f_{normal}}}{v_{i_{normal}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{v_f \cdot sen\ \alpha_f}{v_i \cdot sen\ \alpha_i}} \quad (eq. 2.7.2)$$

Substituindo v_f da equação 2.7.1 em 2.7.2, vem:

$$e = \frac{\frac{v_i \cdot \cos \alpha_f}{\cos \alpha_f} \cdot sen\ \alpha_f}{v_i \cdot sen\ \alpha_i}$$

$$\Rightarrow e = \frac{sen\ \alpha_f}{\cos \alpha_f} \cdot \frac{\cos \alpha_i}{sen\ \alpha_i}$$

$$\therefore \boxed{tg\ \alpha_f = e \cdot tg\ \alpha_i}$$

Observe que para o caso da colisão elástica, $e = 1$, implica $\alpha_f = \alpha_i$, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Baseado nessa ideia e adotando o modelo corpuscular da luz, Newton provava que a reflexão da luz é meramente uma colisão elástica entre as partículas e a superfície refletora.

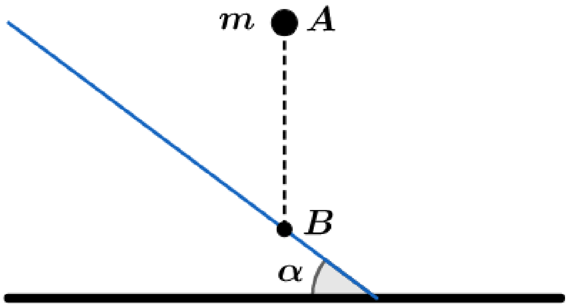
Em qualquer superfície plana, independente da direção, sempre consideraremos uma direção tangente e uma direção normal a ela e aplicaremos dois princípios fundamentais:

1) ***Na direção normal***: aplica-se a definição de coeficiente de restituição, calculando as velocidades relativas apenas com as projeções das velocidades na direção normal.

2) ***Na direção tangencial***: aplica-se a conservação da quantidade de movimento, já que não existem forças impulsivas nessa direção.

05)

Abandona-se uma pequena esfera de massa $m = 0{,}200\ kg$ no ponto A. Após cair $4{,}0\ m$ ela atinge um ponto B de um plano inclinado de um ângulo α em relação ao horizonte. O choque é perfeitamente elástico. Adote para a aceleração da gravidade o valor numérico $g = 10\ m/s^2$.



a) Calcule o impulso da força peso até o instante do choque.

b) No choque há conservação de energia? E da quantidade de movimento? Justifique.

C) Qual o valor do ângulo o para que a esfera inicie seu movimento, após o choque, na direção horizontal?

d) Calcule a menor velocidade adquirida pela esfera, após o choque, quando $\alpha = 30°$.

e) Ainda para $\alpha = 30°$, calcule a máxima cota atingida pela esfera, após o choque.

Comentários:

a) Durante a queda do corpo, a força peso é a única força que atua no corpo, logo, ela é a resultante na direção vertical. Dessa forma, podemos utilizar o teorema do impulso para determinar o impulso da força peso (força resultante), conhecendo a variação da quantidade de movimento. Então:

$$\vec{I}_{\vec{F}_R} = \Delta\vec{Q}$$

$$\Rightarrow I_P = \Delta Q_{vertical}$$

$$\Rightarrow I_P = m \cdot v - m \cdot v_A$$

$$\Rightarrow I_P = m \cdot v$$

Para determinar a velocidade em B (v) antes do choque, podemos utilizar a conservação da energia mecânica:

$$(E_{mec})_B = (E_{mec})_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 4}$$

$$\boxed{v = 4\sqrt{5}\, m/s}$$

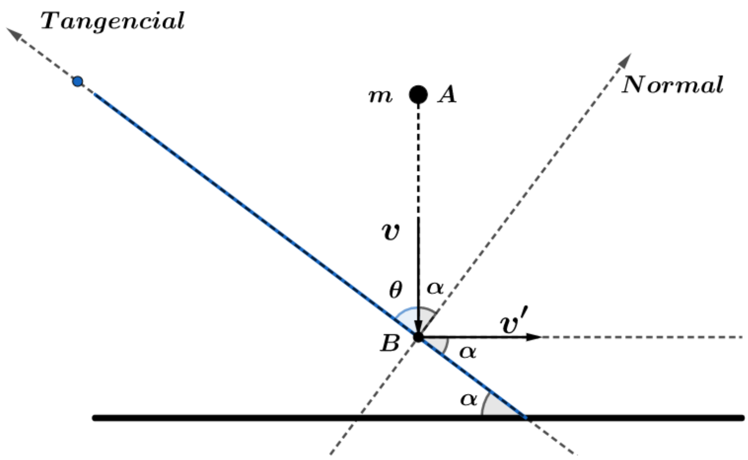
Portanto:

$$I_P = 0{,}200 \cdot 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_P = \frac{4\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{N \cdot s}}$$

b) O choque é elástico ($e = 1$), portanto, há conservação da energia cinética do sistema. Por outro lado, a quantidade de movimento varia em direção, mas como existe conservação da energia cinética, então o módulo da velocidade não se altera. Portanto, a quantidade de movimento muda pois altera a direção da esfera.

c) Considerando que a bolinha vai sair na direção horizontal, temos a seguinte configuração:



Como visto nesta seção, temos que:

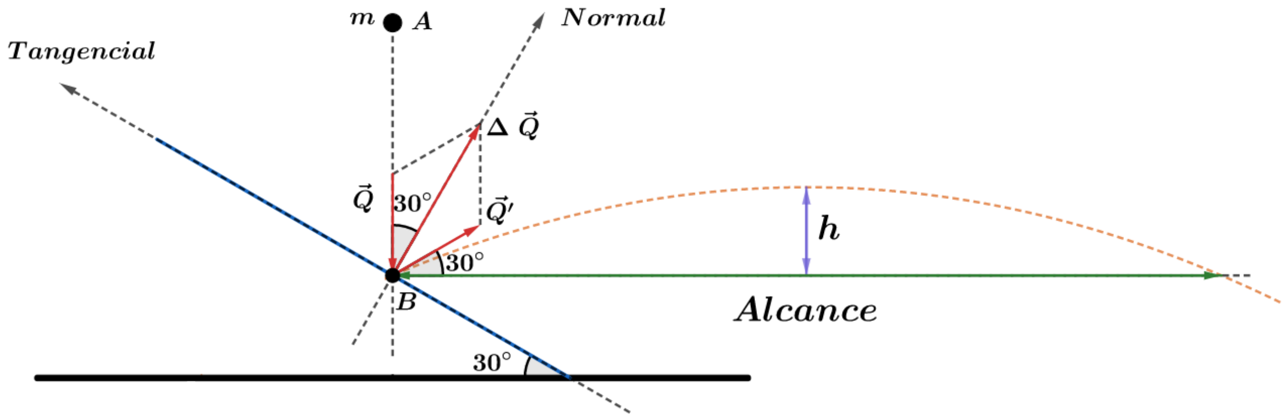
$$tg\ \alpha = e \cdot tg\ \theta \Rightarrow tg\ \alpha = 1 \cdot tg\ \theta \Rightarrow \boxed{tg\ \alpha = tg\ \theta}$$

Pela construção, vemos que $\alpha + \theta = 90°$, então:

$$\boxed{\alpha = \theta = 45\ °}$$

d) Como o choque é perfeitamente elástico, o módulo da velocidade não muda. Portanto $v_{min} = 4\sqrt{5}\, m/s$.

e) Para $\alpha = 30°$, temos a seguinte configuração:



No estudo do lançamento oblíquo, vimos que o alcance é dado por:

$$A = \frac{v_0^2 sen\, 2\theta}{g}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\left(4\sqrt{5}\right)^2 \cdot sen(2 \cdot 30°)}{10} \Rightarrow A = \frac{16 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10}$$

$$\therefore \boxed{A = 4\sqrt{3}\, m}$$

1.7.2. Colisão elástica com um anteparo fixo vertical – espelhamento da trajetória

Considere uma bola de tênis sendo arremessada contra uma parede vertical, conforme a figura abaixo:

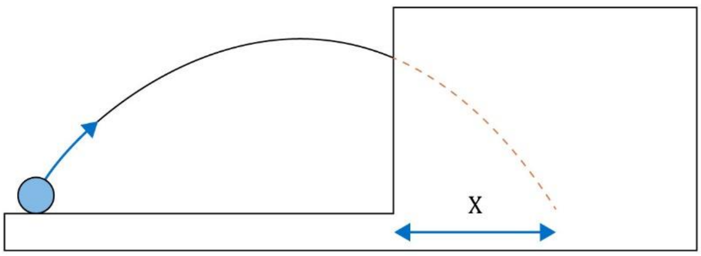


Figura 11: Colisão elástica de uma pequena esfera com um anteparo fixo vertical. A linha tracejada representa a trajetória da bolinha caso não existisse a parede.

Vimos na aula 02 que a bolinha realizaria uma trajetória parabólica caso não existisse uma parede no caminho dela, desprezando a resistência do ar.

Como vimos na seção anterior, quando o corpo realiza uma colisão perfeitamente elástica com um anteparo fixo, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão ($\alpha_i = \alpha_f$). Dado que $e = 1$ e $\alpha_i = \alpha_f$, então $v_i = v_f$ (em módulo). Vetorialmente, a velocidade na direção tangencial conserva sua direção e sentido, ao passo que na direção normal conserva apenas a direção, mas inverte o sentido.

Assim, temos a seguinte configuração dos vetores que representam a velocidade do corpo antes e depois do choque perfeitamente elástico.

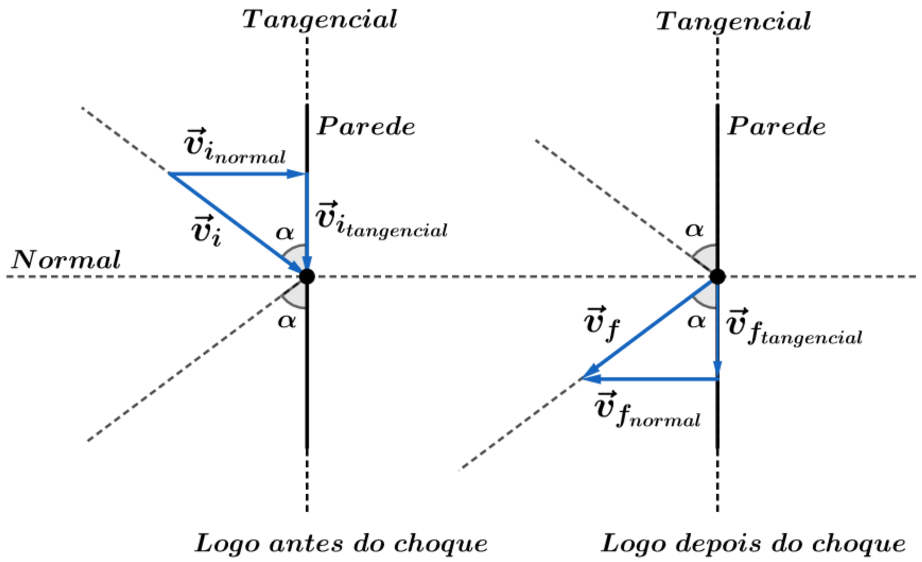


Figura 12: Choque perfeitamente elástico de partícula em anteparo fixo vertical.

Dessa forma, devido à simetria das velocidades, para determinar a trajetória do corpo, basta rebater o trecho fictício em relação à parede vertical, como na figura abaixo:

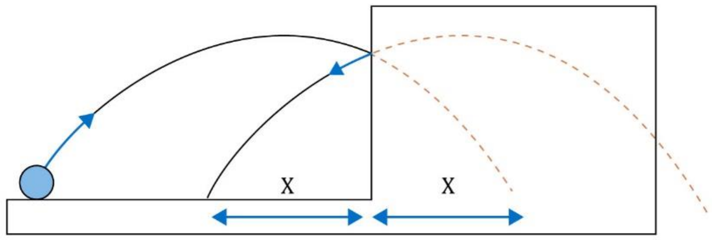


Figura 13: Rebatimento das trajetórias da bolinha, onde as linhas tracejadas representam as trajetórias caso não existisse parede vertical. Note que a parede funciona como um espelho das trajetórias.

Com isso, a trajetória final da bolinha será semelhante à figura a seguir:

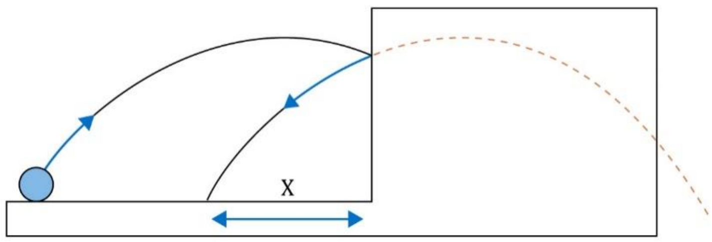


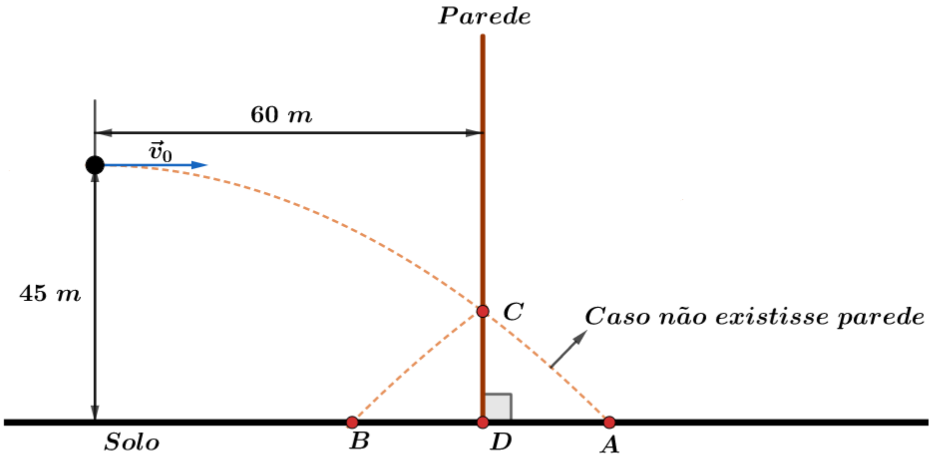
Figura 14: Trajetória final da bolinha.

Essa ideia ainda não apareceu nas nossas provas, mas pode vir a aparecer.

ESCLARECENDO!

06)

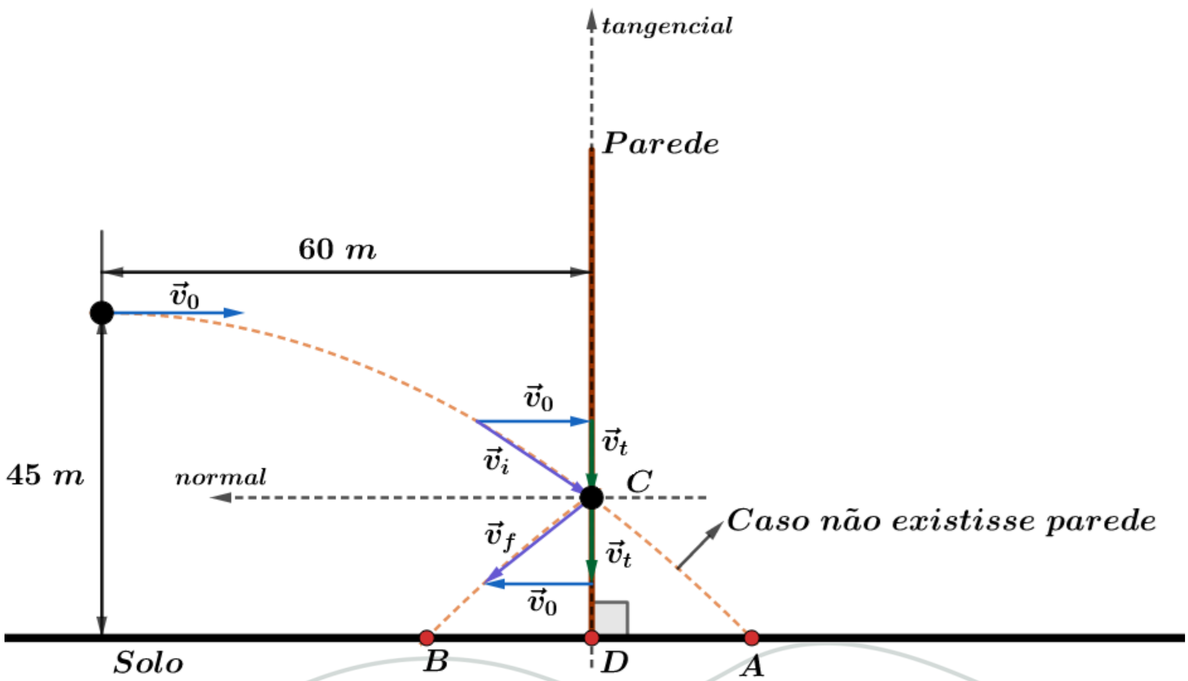
Um pequeno objeto é lançado horizontalmente, com velocidade $\vec{v}_0$ e módulo $v_0 = 30\ m/s$, em um local onde a aceleração da gravidade é de $10\ m/s^2$, como mostra a figura.



Se não existisse a parede vertical, o objeto atingiria o solo em A. Entretanto, ao colidir com a parede no ponto C, o objeto atinge o solo no ponto B. Considerando o choque perfeitamente elástico e desprezando a resistência do ar, determine os tamanhos $\overline{DA}$ e $\overline{CD}$.

Comentários:

Devido ao fato de o choque ser elástico, sabemos que as velocidades serão rebatidas e que $\overline{DA} = \overline{BD}$. O tempo de queda caso não houvesse a parede é dado por:



$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

$$\Rightarrow t_{queda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \Rightarrow \boxed{t_{queda} = 3\ s}$$

Assim, a distância que ele percorreria na horizontal é de:

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t_{queda}$$

$$\Rightarrow \Delta x = 30 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 90\ m}$$

Como a parede está a 60 metros do lançamento horizontal do corpo, então $\overline{DA} = 30\ m$.

Para determinar a altura $\overline{CD}$, basta saber o tempo que o objeto leva para chegar em C e utilizar a equação de lançamento oblíquo na vertical. O tempo que o objeto leva para chegar em C pode ser determinado pelo deslocamento em x:

$$\Delta s_x = v_0 \cdot t$$

$$\Rightarrow t = \frac{60}{30} \Rightarrow \boxed{t = 2\ s}$$

A equação horária do espaço na direção vertical é dada por:

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Portanto:

$$y = 45 - 5 \cdot 2^2 \Rightarrow y = 25\ m \Rightarrow \overline{CD} = 25\ m$$

1.7.3. Colisão com uma parede móvel

Para ficar mais claro esse problema vamos resolver um exercício.

Considere uma cunha de massa M apoiada sobre rodas em uma superfície horizontal perfeitamente lisa. Uma bola de tênis de massa m é solta de uma altura H e colide com a cunha como mostra a figura abaixo:

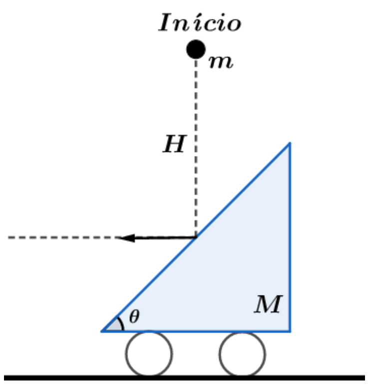


Figura 15: A cunha de massa M tem liberdade para se mover ao longo do eixo horizontal.

Se após a colisão a bola sai na direção horizontal, qual será o coeficiente de restituição e a velocidade da cunha para alguém que está em repouso no solo?

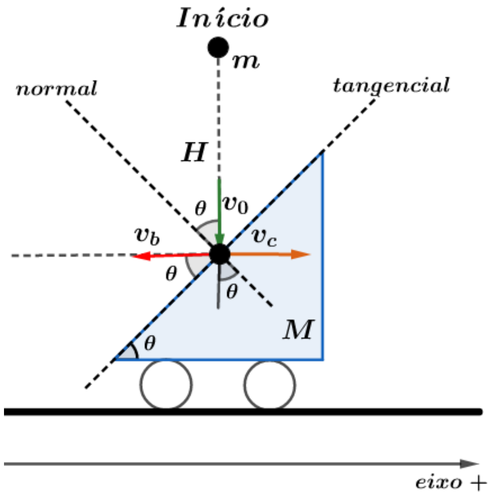
Inicialmente, devemos conhecer a velocidade da bola logo antes de colidir com a parede da cunha. Para isso, vamos utilizar o conceito de energia mecânica, tomando como referencial para a energia potencial gravitacional nível onde a bola toca a cunha:

$$(E_{mec})_{antes\ choque} = (E_{mec})_{início}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot H$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}\ (eq. 2.7.3)$$

Vamos tomar todas as velocidades em relação à Terra. Além disso, vamos denominar a o módulo da velocidade da bola após o choque por v_b e a velocidade da cunha por v_c. Na colisão, as forças impulsivas têm direção normal e, assim, há conservação da quantidade de movimento na direção tangencial. Esquematicamente, temos:



Pela conservação da quantidade de movimento na direção tangencial durante o choque, temos:

$$m \cdot v_0 \cdot sen\ \theta = m \cdot v_b \cdot \cos\theta \Rightarrow \boxed{v_0 \cdot sen\ \theta = v_b \cdot \cos\theta}\ (eq. 2.7.4)$$

Além disso, o sistema constituído pela bola e pela cunha não possui forças externas atuando na direção horizontal. Por isso, a quantidade de movimento se conserva nessa direção:

$$(Q_{horizontal})_{final} = (Q_{horizontal})_{inicial}$$

$$\Rightarrow M \cdot v_c + m \cdot (-v_b) = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M \cdot v_c = m \cdot v_b}\ (2.7.5)$$

De acordo com a definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{\left|v_{relativa\ logo\ após}\right|_{normal}}{\left|v_{relativa\ logo\ antes}\right|_{normal}} = \frac{v_b \cdot sen\,\theta + v_C \cdot sen\,\theta}{v_0 \cdot \cos\theta}$$

$$\Rightarrow e = \frac{v_b \cdot sen\,\theta + v_C \cdot sen\,\theta}{v_0 \cdot \cos\theta}$$

Substituindo v_0 da equação 2.7.4 e v_c da equação 2.7.5 na expressão de e, temos:

$$e = \frac{v_b \cdot sen\,\theta + \frac{m \cdot v_b}{M} \cdot sen\,\theta}{\frac{v_b \cdot \cos\theta}{sen\,\theta} \cdot \cos\theta}$$

$$\Rightarrow e = \frac{sen^2\,\theta}{\cos^2\theta} + \frac{m}{M} \cdot \frac{sen^2\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \boxed{e = tg^2\theta \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Dividindo a equação 2.7.5 por 2.7.4, temos:

$$\frac{M \cdot v_c}{v_0 \cdot sen\,\theta} = \frac{m \cdot v_b}{v_b \cdot \cos\theta}$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$$

Caso seja conhecido o coeficiente de restituição e não o ângulo da cunha, temos que:

$$v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{m}{M} \cdot \sqrt{\frac{e}{1 + \frac{m}{M}}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

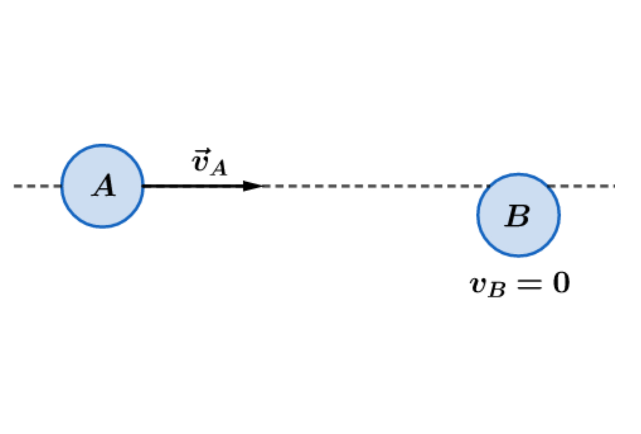
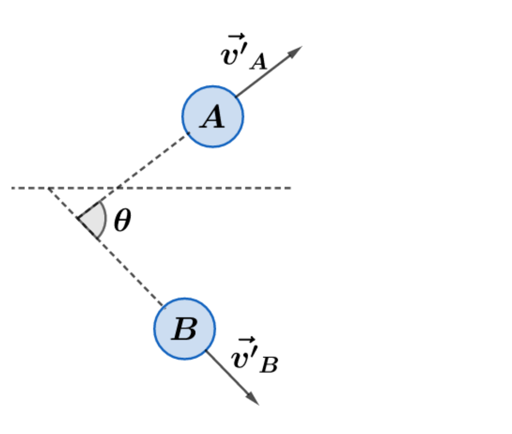
$$\therefore \boxed{v_c = \frac{m}{M} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H \cdot e}{1 + \frac{m}{M}}}}$$

1.7.4. Choque oblíquo e elástico ($\boldsymbol{e = 1}$) entre partículas de mesma massa, com uma delas inicialmente em repouso.

Esse tipo de colisão é muito empregado nas experiências de física nuclear. Por exemplo, a colisão elástica entre um próton e outro próton inicialmente parado.

Vamos demonstrar que após o choque as partículas se movem em direções perpendiculares.

Para isso, vamos representar as situações das partículas logo antes e logo depois da colisão.

Imediatamente antes do choque	Imediatamente depois do choque
	

Provaremos que $\theta = 90°$. Para isso, vamos calcular a quantidade de movimento de cada partícula de forma vetorial:

$$\text{Antes} \begin{cases} \vec{Q}_A = m \cdot \vec{v}_A \\ \vec{Q}_B = \vec{0} \end{cases} \text{e Depois} \begin{cases} \vec{Q'}_A = m \cdot \vec{v'}_A \\ \vec{Q'}_B = m \cdot \vec{v}'_B \end{cases}$$

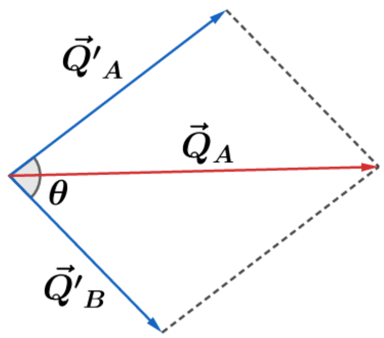
Pela conservação da quantidade de movimento vetorial do sistema, vem:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{Q'}_A + \vec{Q'}_B \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{0} = \vec{Q'}_A + \vec{Q'}_B$$

$$\boxed{\vec{Q}_A = \vec{Q'}_A + \vec{Q'}_B}$$

Podemos representar esses vetores da seguinte forma:



Devido ao fato de o choque ser perfeitamente elástico, sabemos que há conservação da energia cinética do sistema. Portanto:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_A^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2$$

Como $m_A = m_B = m$, vamos multiplicar a equação acima por $2m$. Então:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2 (\times 2m)$$

$$\Rightarrow m^2 \cdot v_A^2 = m^2 \cdot {v'_A}^2 + m^2 \cdot {v'_B}^2$$

$$(m \cdot v_A)^2 = (m \cdot v'_A)^2 + (m \cdot v'_B)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\vec{Q}_A\right|^2 = \left|\vec{Q}'_A\right|^2 + \left|\vec{Q}'_B\right|^2}$$

Com esse resultado, a soma vetorial $\vec{Q}_A = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B$, possui a soma dos módulos dada por $\left|\vec{Q}_A\right|^2 = \left|\vec{Q}'_A\right|^2 + \left|\vec{Q}'_B\right|^2$, portanto:

$$\boxed{\theta = 90\,°}$$

1.7.5. Choque central oblíquo entre duas partículas

Considere duas partículas A e B que se aproximam com velocidades v_A e v_B, como ilustra a figura abaixo:

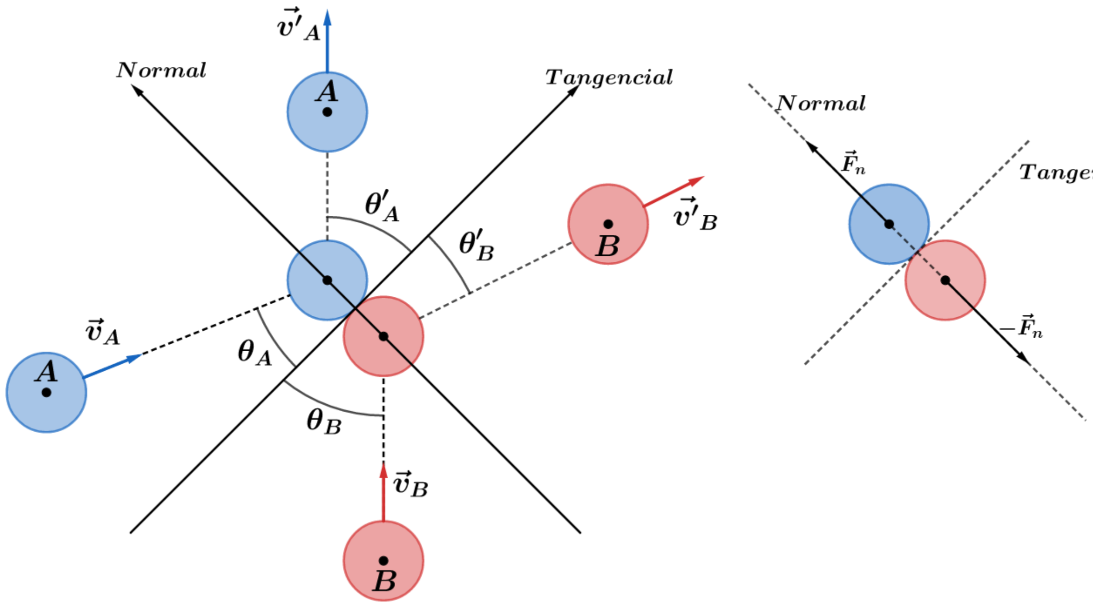


Figura 16: Colisão central oblíqua entre duas partículas.

Nesse tipo de choque, o eixo normal passa pelos centros das partículas. Além disso, o eixo tangencial é perpendicular ao eixo normal, tangenciando as partículas no ponto de contato entre elas, conforme a figura 12.

Na direção tangencial, não forças impulsivas atuando durante a colisão e, assim, a velocidade de cada partícula nessa direção permanece inalterada:

$$\boxed{\begin{cases} v_A \cdot \cos\theta_A = v'_A \cdot \cos\theta'_A \\ v_B \cdot \cos\theta_B = v'_B \cdot \cos\theta'_B \end{cases}}$$

Impondo a conservação da quantidade de movimento na direção normal, temos:

$$\boxed{m_A \cdot (v'_A \cdot sen\ \theta'_A) + m_B \cdot (-v'_B \cdot sen\ \theta'_B) = m_A \cdot (-v_A \cdot sen\ \theta_A) + m_B \cdot (v_B \cdot sen\ \theta_B)}$$

Por fim, podemos relacionar as velocidades na direção normal utilizando o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{\left|v_{relativa\ logo\ após}\right|_{normal}}{\left|v_{relativa\ logo\ antes}\right|_{normal}}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{v'_A \cdot \cos\theta'_A + v'_B \cdot \cos\theta'_B}{v_A \cdot \cos\theta_A + v_B \cdot \cos\theta_B}}$$

Assim, conhecendo as informações necessárias fornecidas pelo enunciado da questão, podemos determinar qualquer resultado por intermédio das equações aqui desenvolvidas. Nosso objetivo aqui não é você decorar os resultados prontos, mas entender como chegamos neles. É muito importante a compreensão de todo o processo que nos levou a esses resultados.

2. Centro de massa

Neste capítulo, introduziremos o conceito de centro de massa, um assunto de extrema importância para o vestibular do ITA e do IME. Nossos vestibulares adoram esse tema e cobram questões dos mais variados estilos, questões que aparentemente parecem ser de outro assunto, mas são rapidamente resolvidas pelo conceito de centro de massa.

Um sistema mecânico é formado por um conjunto de partículas ou ainda um único corpo extenso.

Veremos neste capítulo que o movimento de um sistema mecânico pode ser estudado analisando apenas um único ponto: o seu centro de massa.

2.1. Propriedades do centro de massa em um sistema de 2 partículas

Por motivos didáticos, inicialmente estudaremos o sistema simples constituído por duas partículas de massas m_1 e m_2. Podemos representar esse sistema da seguinte forma:

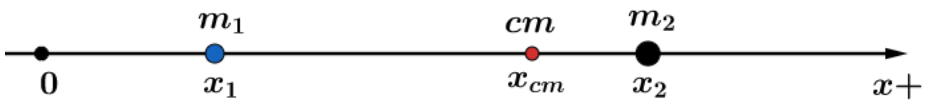


Figura 17: Centro de massa (cm) para um sistema de duas partículas.

2.1.1. Localização do centro de massa

Para um sistema de apenas duas partículas, basta um eixo orientado ligando as duas partículas, como na figura 13.

Por definição, dizemos que o centro de massa desse sistema (cm) é aquele cuja abscissa $\vec{x}_{cm}$ é expressa por:

$$\boxed{\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}}$$

Assim, vimos que o centro de massa para um sistema de partículas é a média aritmética ponderada, tendo como pesos as massas dos corpos. Logo, o centro de massa estará mais próximo daquela partícula que possui maior massa.

2.1.2. Velocidade do centro de massa

Para o nosso sistema de duas partículas, que é unidimensional, podemos representar pelas velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

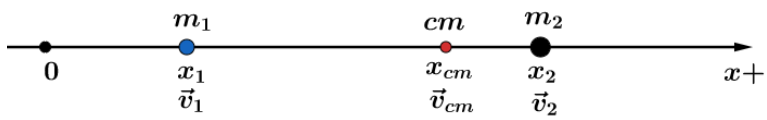


Figura 18: Representação das velocidades no sistema de partículas.

A posição do centro de massa é dada por:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Como $m_1 + m_2 = M$ é a massa total do sistema, podemos reescrever a posição do centro de massa:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \cdot \vec{x}_{cm} = m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2} \ (eq. 1)$$

Derivando a equação (1) em relação ao tempo, teremos a velocidade do centro de massa em relação às velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$M \cdot \frac{d\vec{x}_{cm}}{dt} = m_1 \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt}$$

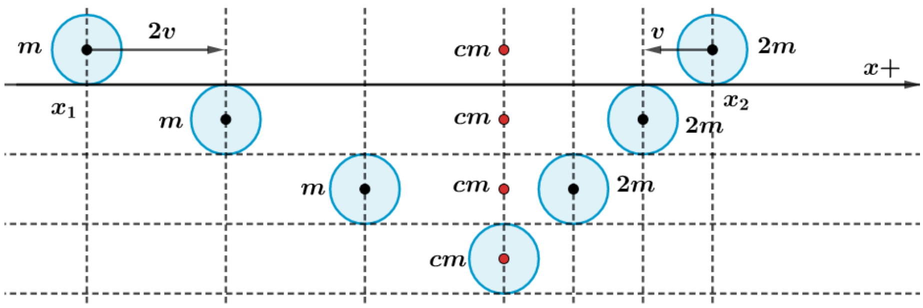
$$\Rightarrow \boxed{M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2} \; (eq. 2)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{M}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

Note que a velocidade do centro de massa é dada pela média aritmética ponderada das velocidades das partículas, tendo como peso as respectivas massas.

Exemplo 1: considere duas partículas se movendo com velocidades v e $2v$, como mostra a figura logo abaixo:



Observe que a posição do centro de massa é dada por:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{m \cdot \vec{x}_1 + 2m\vec{x}_2}{m + 2m}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{1}{3}\vec{x}_1 + \frac{2}{3}\vec{x}_2$$

Mas a velocidade do centro de massa é nula:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m \cdot 2v \cdot \hat{x} + 2m \cdot v \cdot (-\hat{x})}{m + 2m} = \frac{0}{3m} \cdot \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = \vec{0}}$$

Esse resultado mostra que o centro de massa fica parado, quando os dois corpos se aproximam.

Exemplo 2: um corpo de massa $3m$ viaja com velocidade $2v$ para a direita e outro corpo de massa m viaja com velocidade $2v$ para a esquerda. Portanto a velocidade do centro de massa é de:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{3m \cdot 2v \cdot \hat{x} + m \cdot 2v \cdot (-\hat{x})}{3m + m}$$

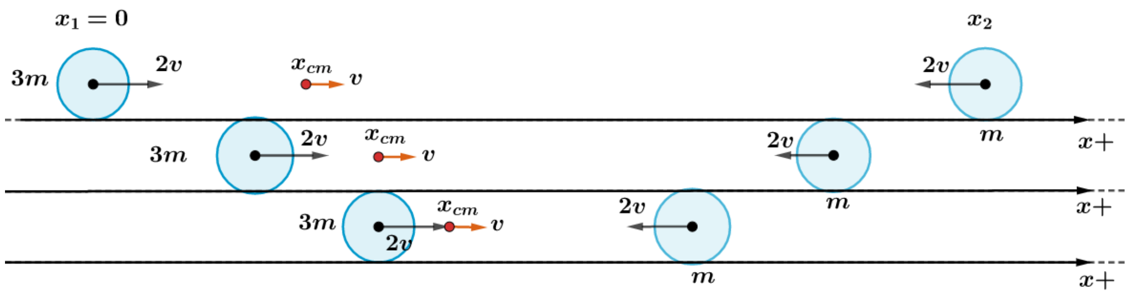
$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{4m \cdot v \cdot \hat{x}}{4m}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v}_{cm} = v \cdot \hat{x}}$$

A posição do centro de massa, tomando a origem do eixo x a massa $3m$, é de:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{3m \cdot 0 \cdot \hat{x} + m \cdot x_2 \cdot \hat{x}}{3m + m} \Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{x_2}{4}\,\hat{x}$$

Assim, temos a seguinte configuração das velocidades para esse sistema:



2.1.3. Aceleração do centro de massa

Em um sistema unidimensional, formado por duas partículas, a aceleração do centro de massa pode ser obtida derivando a velocidade do centro de massa em relação ao tempo, a partir da equação (2). Isto é:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$M \cdot \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2} \; (eq. 3)$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2}{M}}$$

Novamente, observe que a aceleração do centro de massa é dada pela média aritmética ponderada das acelerações das partículas, tendo como peso as respectivas massas.

2.1.4. Quantidade de movimento do centro de massa

Analisando a equação, podemos dizer que:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{sis}$$

$$\boxed{\vec{Q}_{sis} = M \cdot \vec{v}_{cm}}$$

Esse resultado mostra que para calcular a quantidade de movimento do sistema, basta supor que toda sua massa esteja concentrada no centro de massa.

2.1.5. Forças externas e forças internas ao sistema

Analisando a equação (3), vemos que os termos $m_1 \cdot \vec{a}_1$ e $m_2 \cdot \vec{a}_2$ representam as resultantes das forças sobre cada partícula. Dessa forma, temos:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res}}$$

Como vimos anteriormente no capítulo 1 dessa aula, quando estudamos sistema isolado, em um sistema podem agir dois tipos de forças: internas ou externas.

Denotamos por ***forças internas*** aquelas que são trocadas entre os elementos do sistema. Dessa forma, tais forças respeitam o Princípio da Ação e Reação, ou seja, a cada força interna $\vec{F}_i$ associa-se uma outra $-\vec{F}_i$. Note que a soma dos impulsos por causa dessas forças é nula.

Por outro lado, chamamos de ***forças externas*** aquelas que são trocadas pelos elementos do sistema com outros corpos fora dele, denominados agentes externos.

Como as forças externas são exercidas sobre cada partícula independentemente das interações internas entre as partículas, podemos concluir que a força resultante que age no sistema é a resultante das forças externas. Matematicamente:

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res}\ (externas)}$$

Diante disso, concluímos que:

1) A aceleração do centro de massa não depende das forças internas ao sistema. Depende apenas da resultante das forças externas.

2) O centro de massa se move como se fosse um ponto material de massa igual à massa total do sistema ($M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$) e conforme a ação da resultante das forças externas que atuam no sistema.

3) Para determinar a aceleração do centro de massa do sistema, consideramos que toda massa está concentrada em um único ponto (o centro de massa) e nesse ponto colocamos a resultante das forças externas que atuam no sistema.

2.2. Propriedades do centro de massa em um sistema de $\boldsymbol{n}$ partículas

Didaticamente, primeiro estudamos os conceitos de centro de massa para um sistema unidimensional, composto de duas partículas. Entretanto, todos os resultados obtidos são facilmente expandidos para um sistema com n partículas em três dimensões, como o da figura abaixo:

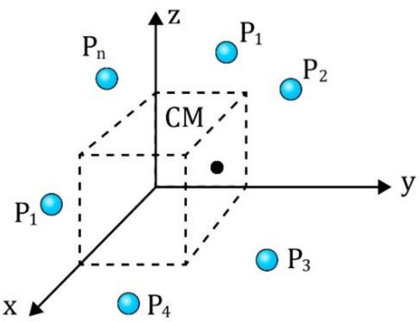


Figura 19: Sistema com n partículas distribuídas no espaço.

Para o nosso sistema com n partículas, a massa total é dada por:

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_n$$

Dessa forma, as coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$\boxed{x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}} \text{ ou } \boxed{x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}}$$

Para as outras coordenadas, podemos fazer de forma análoga:

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}} \text{ e } \boxed{z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}}$$

Podemos ainda escrever o centro de massa a partir do vetor posição de cada partícula:

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

2.2.1. Localização do centro de massa para figuras simétricas

1) Para um sistema formado por partículas de massas iguais e distribuídas nos **vértices** de uma figura **geométrica regular**, o centro de massa estará localizado no centro geométrico da figura. Por exemplo, em um triângulo equilátero, o centro de massa estará no seu baricentro (geométrico).

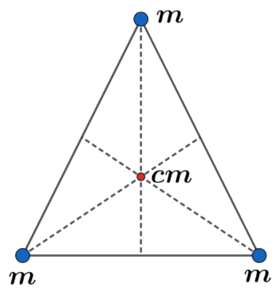


Figura 20: Se as massas iguais estão dispostas em um triângulo equilátero, o centro de massa está em seu centro geométrico.

2) Em um sistema de n partículas de massas iguais que possua um ponto de simetria, o centro de massa coincide com esse ponto. Um exemplo claro dessa propriedade ocorre em um sistema composto de 4 partículas nos vértices de um retângulo. O centro de massa está no centro geométrico do retângulo.

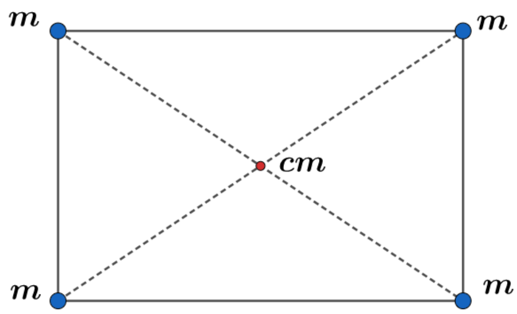


Figura 21: Se as massas iguais estão dispostas nos vértices de um retângulo, o centro de massa está em seu centro geométrico.

3) Se um corpo homogêneo admite um ponto de simetria, então o seu centro de massa coincidirá com o seu centro geométrico. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera está no centro geométrico da esfera.

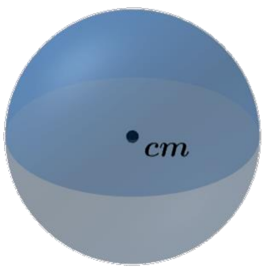


Figura 22: Em uma esfera homogênea, o centro de massa está no centro da esfera.

4) Para uma chapa homogênea de forma retangular, o centro de massa da chapa estará no centro geométrico dessa chapa.

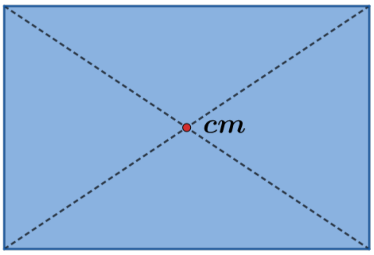
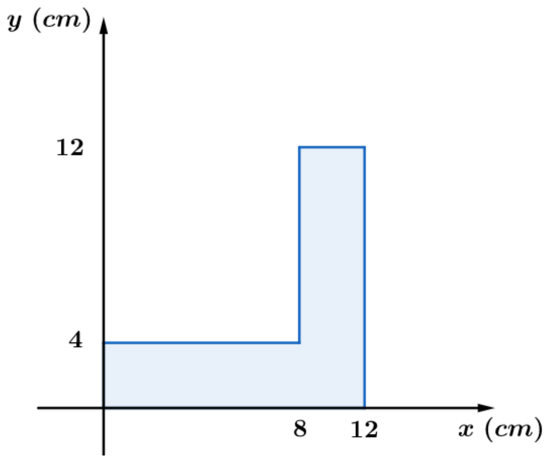


Figura 23: Em uma chapa homogênea, o centro de massa está no centro geométrico dessa chapa.

07)

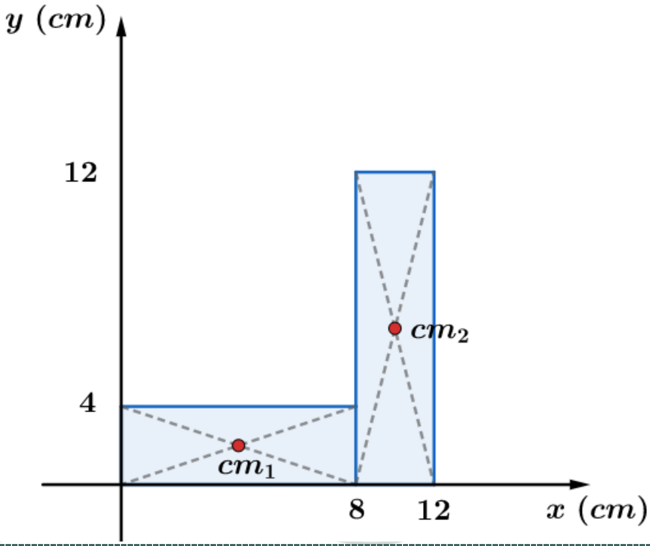
Considere uma chapa homogênea de espessura uniforme, conforme a figura abaixo:



Determine as coordenadas do centro de massa da chapa.

Comentários:

Uma boa forma de atacar esse problema é dividir a chapa em duas partes:



Os centros de massa cm_1 e cm_2 de cada parte são dados por:

$$\begin{cases} cm_1 \rightarrow x_{cm_1} = 4\ cm; y_{cm_1} = 2\ cm \\ cm_2 \rightarrow x_{cm_2} = 10\ cm; y_{cm_2} = 6\ cm \end{cases}$$

As áreas de cada parte valem:

$$\begin{cases} S_1 = 8 \cdot 4 = 32\ cm^2 \\ S_2 = (12 - 8) \cdot 12 = 48\ cm^2 \end{cases}$$

No enunciado da questão, foi mencionado que a chapa era homogênea e de espessura uniforme, ou seja, sua densidade superficial μ é constante:

$$\mu = \frac{m_1}{S_1} = \frac{m_2}{S_2}$$

Portanto, a posição do centro de massa é dada por:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_{cm_1} + m_2 \cdot x_{cm_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{cm} = \frac{\mu \cdot S_1 \cdot x_{cm_1} + \mu \cdot S_2 \cdot x_{cm_2}}{\mu \cdot S_1 + \mu \cdot S_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{cm} = \frac{S_1 \cdot x_{cm_1} + S_2 \cdot x_{cm_2}}{S_1 + S_2}}$$

Analogamente, para as y_{cm}, temos:

$$\boxed{y_{cm} = \frac{S_1 \cdot y_{cm_1} + S_2 \cdot y_{cm_2}}{S_1 + S_2}}$$

Substituindo valores, temos:

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{S_1 \cdot x_{cm_1} + S_2 \cdot x_{cm_2}}{S_1 + S_2} \\ y_{cm} = \dfrac{S_1 \cdot y_{cm_1} + S_2 \cdot y_{cm_2}}{S_1 + S_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cm} = \dfrac{32 \cdot 4 + 48 \cdot 10}{32 + 48} \\ y_{cm} = \dfrac{32 \cdot 2 + 48 \cdot 6}{32 + 48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cm} = 7{,}6\ cm \\ y_{cm} = 4{,}4\ cm \end{cases}$$

2.2.2. Velocidade do centro de massa do sistema

Vimos para um sistema unidimensional com duas partículas que a velocidade vetorial do centro de massa é dada por:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

Para um sistema de n partículas, temos:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n \ (eq. 4)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n}{M}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

Como trabalhamos com a velocidade na forma vetorial, podemos ver que esse resultado é aplicado para qualquer sistema bi ou tridimensional.

2.2.3. Quantidade de movimento do centro de massa do sistema

A partir da equação (4) da velocidade do centro de massa é dada por:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n$$

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \cdots + \vec{Q}_n = \vec{Q}_{sis}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{Q}_{sis} = M \cdot \vec{v}_{cm}}$$

2.2.4. Aceleração do centro de massa do sistema

Para o caso de n partículas, a equação da aceleração do centro de massa pode ser escrita como:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

2.2.5. Resultante das forças externas

Como vimos a aceleração do centro de massa do sistema de n partículas é dada por:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n$$

Cada termo $m_i \cdot \vec{a}_i$ do segundo membro da equação representa a força resultante na respectiva partícula, isto é:

$$m \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

Portanto:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n$$

$$\Rightarrow M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

Como já vimos, as forças internas ao sistema surgem aos pares, segundo a terceira lei de Newton entre cada par de partículas. Dessa forma, ao somar vetorialmente as forças internas elas se anulam duas a duas.

Portanto, ao somar vetorialmente as forças externas ao sistema, temos que:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{res}\ (externas)$$

$$\boxed{\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}}$$

Com esse resultado, podemos ver que o centro de massa de um sistema de n partículas move-se como se fosse um único ponto material de massa $M_{total} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, por efeito da ação da resultante das forças externas $\vec{F}_{res}\ (externas)$, de acordo com a segunda lei de Newton.

2.2.6. Trajetória do centro de massa

Aplicando o resultado que acabamos de ver ($\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$) é possível determinar a trajetória do centro de massa de um sistema de n partículas. Embora as partículas do sistema tenham trajetórias complicadas, o seu centro de massa se comporta como se fosse uma única partícula que está sujeita a uma resultante das forças externas ao sistema.

Um exemplo clássico é a detonação de uma granada. Vamos supor que uma granada é lançada horizontalmente, em um local onde $\vec{g}$ é uniforme e a resistência do ar é desprezível. Caso não houvesse a detonação, a trajetória da granada seria uma parábola para um observado na Terra. Mas, vamos supor que a granada explode em dois fragmentos idênticos (claramente, uma granada explode em diversos fragmentos e em todas as direções).

De um modo geral, determinar a trajetória de cada fragmento é muito difícil. Entretanto, o centro de massa do sistema continuará a descrever uma trajetória parabólica. Isso ocorre porque a única força externa que atua na granada é a força peso na direção vertical. Então, podemos dizer que:

$$\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow M_{total} \cdot \vec{g} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\therefore \boxed{\vec{a}_{cm} = \vec{g}}$$

Como podemos ver, a aceleração do centro de massa é a própria aceleração da gravidade. Por isso, devemos ter a seguinte trajetória para a granada, fragmentos e centro de massa:

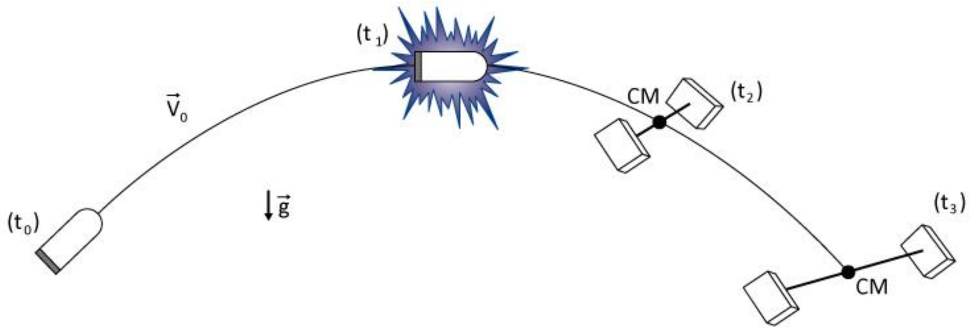


Figura 24: Trajetória do centro de massa de uma granada após a explosão.

Note que na explosão da granada surgem forças internas ao sistema que não podem alterar a trajetória do centro de massa.

2.3. Sistema isolado de forças externas

Se ao somar vetorialmente as forças externas e a resultante destas forças for nula, então dizemos que o sistema está isolado de forças externas. Em consequência disso, teremos que:

1) A aceleração do centro de massa é nula e a sua velocidade vetorial se mantém constante, pois:

$$\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{cm} = \vec{0}$$

Como $\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{0}$, temos que:

$$\boxed{\vec{v}_{cm} \text{ é constante}}$$

2) O centro de massa poderá estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Este resultado vem diretamente da primeira consequência.

3) A quantidade de movimento do sistema se mantém constante, pois pelo teorema do impulso, temos que:

$$\vec{I}_{F_{res}}(externas) = \Delta\vec{Q}_{sis}$$

Como $\vec{F}_{res}(externas) = \vec{0}$, então $\vec{I}_{F_{res}}(externas) = \vec{0}$. Com isso, temos que:

$$\boxed{(\vec{Q}_{sis})_{antes} = (\vec{Q}_{sis})_{depois}}$$

Além disso, podemos ver a consequência 1 da seguinte forma:

$$(\vec{Q}_{sis})_{antes} = (\vec{Q}_{sis})_{depois}$$

$$\Rightarrow M_{total} \cdot (\vec{v}_{cm})_{antes} = M_{total} \cdot (\vec{v}_{cm})_{depois}$$

$$\boxed{(\vec{v}_{cm})_{antes} = (\vec{v}_{cm})_{depois}}$$

Ou seja, a velocidade do centro de massa permanece constante.

Diante disso, podemos enunciar o seguinte teorema da conservação da quantidade de movimento:

Se o sistema estiver isolado, a quantidade de movimento total dele não varia com o tempo.

Por exemplo, considere duas esferas estão se aproximando com velocidades constantes, em uma superfície horizontal perfeitamente lisa, como mostra a figura abaixo:

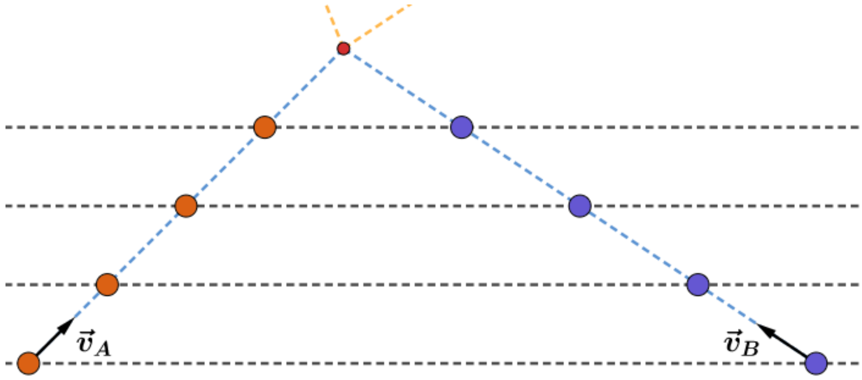


Figura 25: Dois corpos se aproximando e se chocando.

Devido ao fato de não existirem forças externas na direção horizontal, já que não há atrito (superfície perfeitamente lisa), o impulso da resultante das forças externas é nulo nessa direção. Dessa forma, podemos afirmar que a velocidade do centro de massa é constante, pois o sistema é isolado. Com isso, a velocidade do centro de massa não se altera. Uma possível configuração para as velocidades após a colisão é dada pela figura logo abaixo:

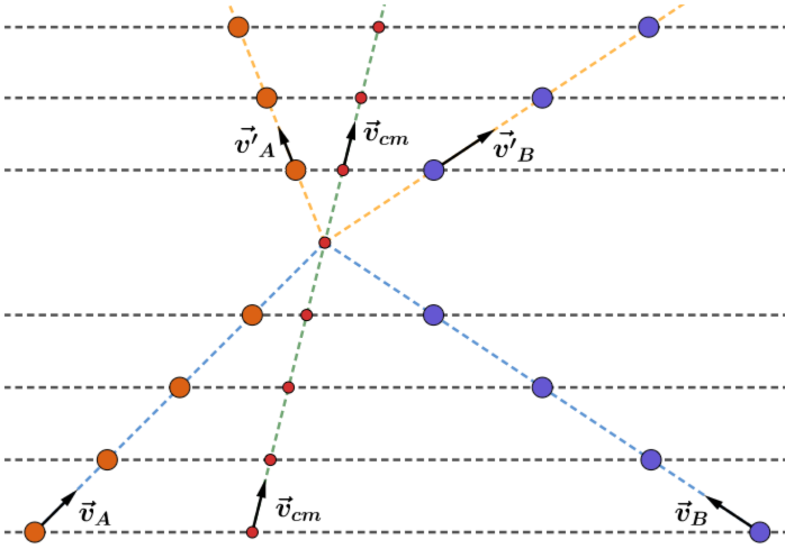
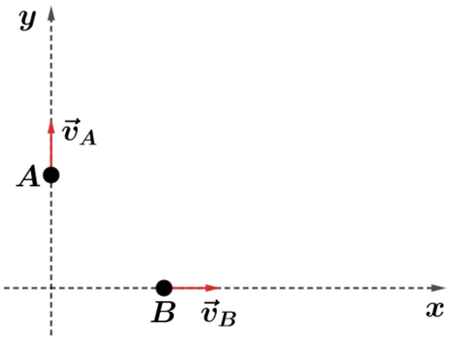


Figura 26: Trajetória do centro de massa antes e depois da colisão. Note que após o choque, a trajetória do centro de massa não se altera.

Note que na direção vertical, existe a força peso e a força de contato da superfície com as esferas. Assim, o sistema não é isolado na direção vertical, mas todo movimento ocorre na direção horizontal.

08)

Dois corpos A e B, de massas iguais a 2,0 kg e 3,0 kg, respectivamente, possuem velocidades de mesmo módulo, 2,0 m/s e direções perpendiculares. Qual a velocidade do centro de massa?



Comentários:

De acordo com o enunciado, temos que:

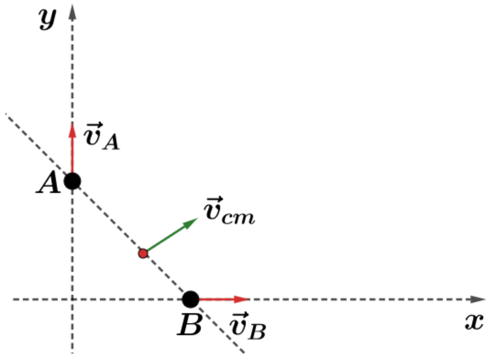
$$\vec{v}_{x,cm} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_{x,A} + m_B \cdot \vec{v}_{x,B}}{m_A + m_B}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{x,cm} = \frac{2,0 \cdot 0\,\hat{x} + 3,0 \cdot 2,0\,\hat{x}}{2,0 + 3,0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{x,cm} = 1,2\,\hat{x}\ \ (m/s)}$$

$$\vec{v}_{y,cm} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_{y,A} + m_B \cdot \vec{v}_{y,B}}{m_A + m_B}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{y,cm} = \frac{2{,}0 \cdot 2{,}0\,\hat{y} + 3{,}0 \cdot 0\,\hat{y}}{2{,}0 + 3{,}0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{y,cm} = 0{,}8\,\hat{y}\ \ (m/s)}$$

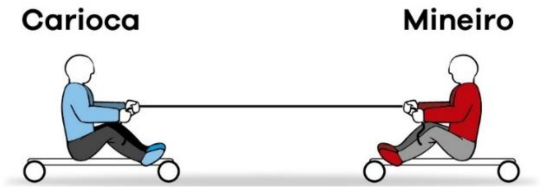
$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{x,cm} + \vec{v}_{y,cm} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = 1{,}2\,\hat{x} + 0{,}8\,\hat{y}\ \ (m/s)}$$



A questão poderia trabalhar com quantidade de movimento, o que seria obtido fazendo o produto das massas com as respectivas velocidades.

09)

Um carioca e um mineiro estão sentados cada um em carrinho de rolimã e cada conjunto (homem e carrinho) possui massas iguais a 80 kg e 120 kg, respectivamente. No início, ambos estão parados e a distância entre eles é de 1,0 m. Tracionando a corda que liga os dois amigos, eles se aproximam mutuamente. Desprezando quaisquer forças dissipativas.



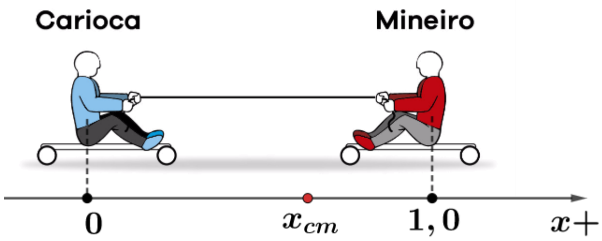
a) Descreva o que acontecerá com o centro de massa do sistema (carioca, mineiro, carrinhos e corda).

b) Quanto cada um deles irá percorrer até se encontrarem?

Comentários:

a) O sistema (carioca, mineiro, carrinhos e corda) não está isolado de forças externas, pois há forças externas na direção vertical. Entretanto, na direção horizontal, não existem forças externas atuando. A força que cada operador faz na corda é interna ao sistema considerado. Portanto, a quantidade de movimento do centro de massa permanecerá constante. Como inicialmente os amigos estão em repouso, então o centro de massa está parado no início e assim permanecerá.

b) Como o centro de massa permanece parado durante todo o movimento deles, então o encontro ocorrerá no centro de massa. Colocando a origem do eixo x no carioca, temos a seguinte posição do centro de massa:

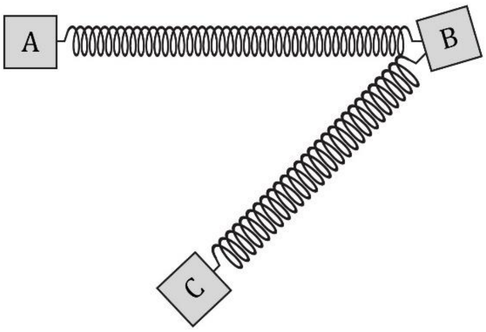


$$x_{cm} = \frac{80 \cdot 0 + 120 \cdot 1}{80 + 120} \Rightarrow \boxed{x_{cm} = 0{,}6\,m}$$

Portanto, o carioca andará 0,6 metros e o mineiro 0,4 metros.

10)

Considere três corpos A, B e C, com massas respectivamente iguais a $8{,}0\,kg$, $12{,}0\,kg$ e $8{,}0\,kg$, inicialmente apoiados sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa. Liga-se AB e BC por molas de massas desprezíveis. Em um certo momento, os corpos são abandonados e experimentam as forças iguais à $20\,N$ e $30\,N$ nas molas AB e BC, respectivamente. No momento em que os corpos são soltos, calcule os módulos das acelerações dos centros de massa dos seguintes sistemas:

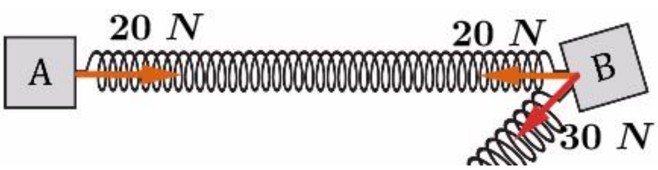


a) $A + B$.

b) $A + B + C$.

Comentários:

a) Para o sistema $A + B$, as forças na mola que liga AB são internas, apenas a força de 15 N no corpo B, devido a outra mola (BC) é externa ao sistema considerado:



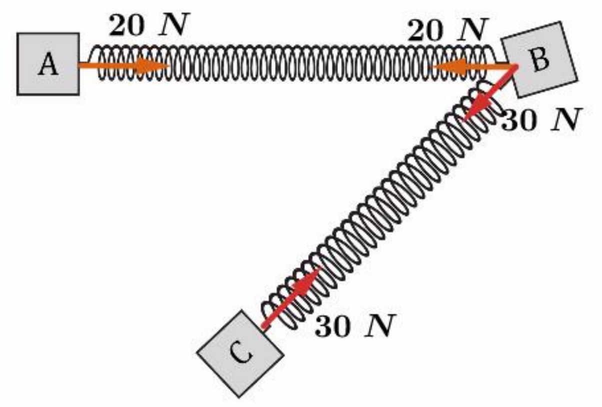
Pelo teorema do centro de massa, temos:

$$(m_A + m_B) \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

Em módulos, temos:

$$(m_A + m_B) \cdot a_{cm} = F_{ext} \Rightarrow (8{,}0 + 12{,}0) \cdot a_{cm} = 30 \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 1{,}5\,m/s^2}$$

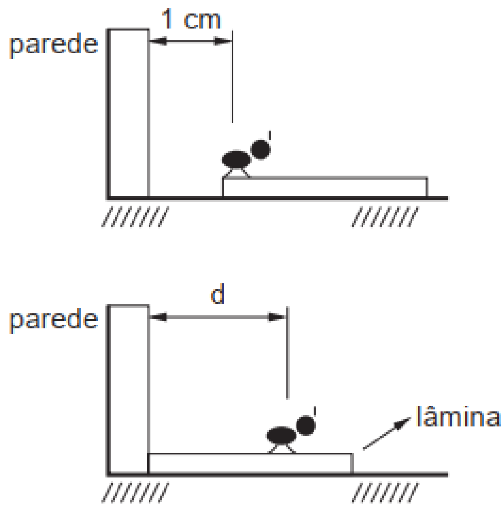
b) Para o sistema constituído pelos três corpos, todas as forças serão internas e não há forças externas atuando no sistema. Portanto, a resultante das forças externas é nula. Logo, a aceleração do centro de massa desse sistema deve ser nula.



$$(m_A + m_B + m_C) \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 0}$$

11) (ITA – 2000)

Uma lâmina de material muito leve de massa m está em repouso sobre uma superfície sem atrito. A extremidade esquerda da lâmina está a 1 cm de uma parede. Uma formiga considerada como um ponto, de massa está 5 inicialmente em repouso sobre essa extremidade, como mostra a figura. A seguir, a formiga caminha para frente muito lentamente, sobre a lâmina. A que distância d da parede estará a formiga no momento em que a lâmina tocar a parede?



a) 2 cm. b) 3 cm. c) 4cm. d) 5 cm. e) 6 cm.

Comentários:

Novamente, o sistema formiga-lâmina não é isolado, pois existem forças externas (peso e normal do solo) atuando no sistema. Mas, na direção horizontal, não há atrito e nenhuma outra força externa ao sistema. Portanto, na direção horizontal, a quantidade de movimento do centro de massa do sistema se conserva. Como inicialmente o sistema está em repouso, então o centro de massa do sistema permanecerá parado.

Portanto:

$$(x_{cm})_{antes} = (x_{cm})_{depois}$$

Se adotarmos a parede como a origem do nosso eixo x, temos:

$$\frac{m_{formiga} \cdot x_{c1} + m_{lâmina} \cdot x_{c2}}{m_{formiga} + m_{lâmina}} = \frac{m_{formiga} \cdot x'_{c1} + m_{lâmina} \cdot x'_{c2}}{m_{formiga} + m_{lâmina}}$$

Considerando que a lâmina tem comprimento L (não foi mencionado no enunciado, mas não será necessário para resolver a questão), substituindo os valores, temos:

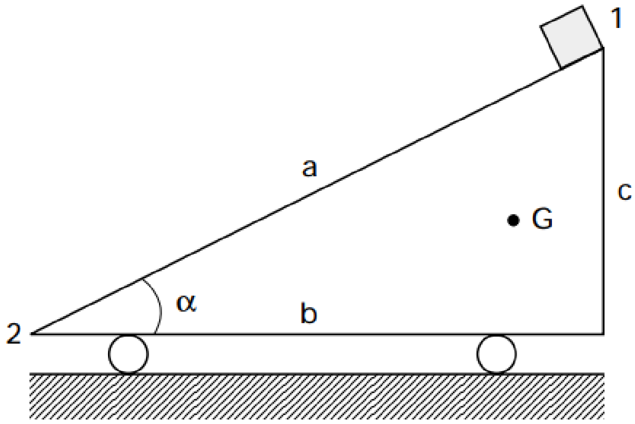
$$\frac{\frac{m}{5} \cdot 1 + m \cdot \left(\frac{L}{2} + 1\right)}{\frac{m}{5} + m} = \frac{\frac{m}{5} \cdot d + m \cdot \frac{L}{2}}{\frac{m}{5} + m}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{L}{2} + 1 = \frac{d}{5} + \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{d = 6\ cm}$$

12) (ITA – 2002)

Uma rampa rolante pesa $120N$ e se encontra inicialmente em repouso, como mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$, também em repouso, é abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$.

Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no solo, até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é



A) 16.0 m B) 30.0 m C) 4.8 m D) 24.0 m E) 9.6 m

Comentários:

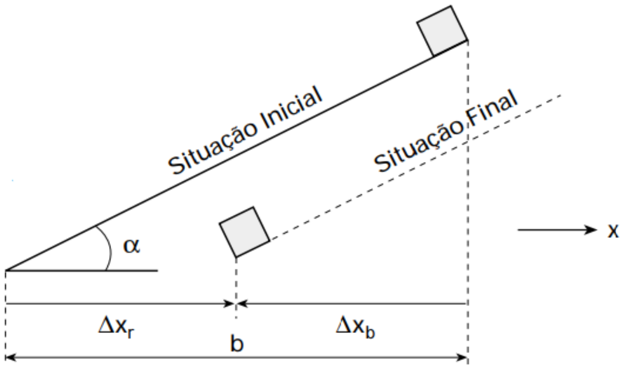
Novamente, só existem forças externas na vertical, sendo nulas as forças externas na horizontal agindo no sistema formado por bloco (m_b) e pela rampa rolante (m_r).

Portanto, o sistema é isolado na direção horizontal e o deslocamento do centro de massa nessa direção é nulo, pois inicialmente o sistema está em repouso.

Assim, o deslocamento do centro de massa é nulo:

$$\Delta x_{cm} = \frac{m_b \cdot \Delta x_b + m_r \cdot \Delta x_r}{m_b + m_r} = 0 \Rightarrow \Delta x_b = -\frac{m_r}{m_b} \cdot \Delta x_r$$

Quando o bloco estiver saindo pelo ponto 2, a diferença algébrica entre o deslocamento da rampa e o do bloco é igual ao lado b, como na figura ao lado:



Portanto:

$$\Delta x_r - \Delta x_b = b = a \cdot \cos\alpha$$

Logo:

$$\Delta x_r - \Delta x_b = a \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \Delta x_r - \left(-\frac{m_r}{m_b} \cdot \Delta x_r\right) = a \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x_r = \frac{a \cdot \cos\alpha}{1 + \frac{m_r}{m_b}}}$$

Substituindo valores, lembrando que se o $sen\,\alpha = 0{,}6$, então $\cos\alpha = 0{,}8$ para o $0 < \alpha < 90°$, temos:

$$\Delta x_r = \frac{15 \cdot 0{,}8}{1 + \frac{120/g}{80/g}} \Rightarrow \boxed{\Delta x_r = 4{,}8\,m}$$

2.3.1 Baricentro ou centro de gravidade

Chamamos de centro de gravidade (CG) ou baricentro (G) o ponto no qual aplicamos a resultante das forças de gravidade que agem em cada partícula do sistema, como mostra a figura abaixo:

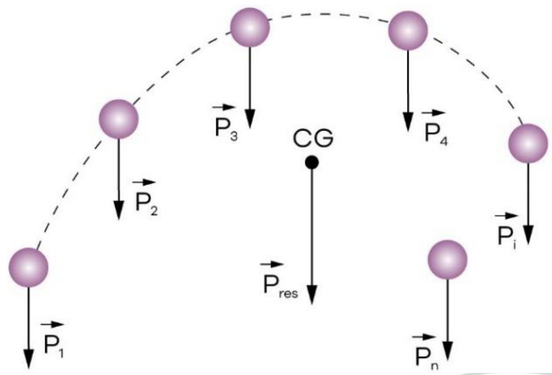


Figura 27: Localização do baricentro de um sistema, onde o campo gravitacional é não uniforme.

Quando um sistema está imerso em um campo gravitacional uniforme, o seu centro de massa (CM) coincidirá com o seu centro de gravidade (CG).

A determinação do centro de gravidade de um corpo, homogêneo ou não, é feita de forma experimental: coloca-se o corpo suspenso por dois pontos diferentes em duas situações distintas. Primeiramente, suspendemos o corpo por um ponto A e traçamos uma reta vertical AX. Repetimos o processo por um outro ponto B. Podemos aplicar esse método para um cabide:

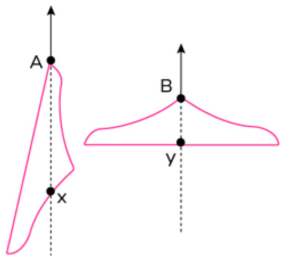


Figura 28: Processo para determinação do baricentro de um corpo não homogêneo.

O centro de gravidade CG é a intersecção das retas AX e BY:

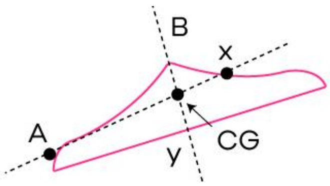


Figura 29: Posição do centro de gravidade de um cabide.

Em suma, podemos dizer que o centro de gravidade de um corpo sólido é aquele pelo qual podemos suspender um corpo de tal forma que ele permaneça em equilíbrio indiferente.

2.4. Massa reduzida e colisão unidimensional

Para entender o conceito de massa reduzida, vamos tomar dois corpos m_1 e m_2, viajando na mesma direção e no mesmo sentido, mas com velocidades v_1 e v_2, respectivamente.

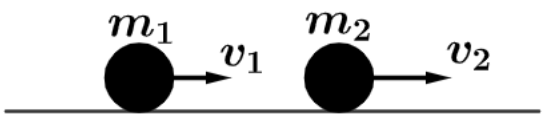


Figura 30: Corpos viajando ao longo de trajetórias retilíneas.

Vamos encontrar a energia que esse sistema possui, mas de uma forma diferente. Vamos escrever a energia cinética desse sistema.

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Supondo que v_1 seja maior que v_2, então a velocidade relativa é dada por:

$$v_r = v_1 - v_2$$

E a velocidade do centro de massa? Ela é dada pela média ponderada das velocidades, tendo como peso as massas. Matematicamente:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Vamos isolar v_1 em função de v_r e substituir em v_{cm} para isolar v_2:

$$v_1 = v_r + v_2$$

Portanto:

$$(m_1 + m_2) \cdot v_{cm} = m_1(v_r + v_2) + m_2 v_2$$

$$(m_1 + m_2) v_{cm} = m_1 v_r + (m_1 + m_2) v_2$$

$$v_2 = v_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r$$

Substituindo v_2 em v_1, temos:

$$v_1 = v_r + v_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r$$

$$v_1 = v_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_r$$

Agora, podemos substituir v_1 e v_2 na equação da energia cinética do sistema:

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_r \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r \right)^2$$

Expandindo as partes, temos:

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 v_{cm}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{cm} v_r + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_r^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} m_2 v_{cm} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_r + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_r^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right) (m_1 + m_2) v_r^2$$

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) v_r^2}$$

O termo na frente da velocidade do centro de massa corresponde a massa total do sistema ($M = m_1 + m_2$) e o termo na frente da velocidade relativa nós chamamos de massa reduzida ($\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$). Massa reduzida, pois, sempre que pegamos dois números reais positivos e fazemos produto deles pela soma, o resultado é um número menor que o menor dos números.

Assim, a energia cinética do sistema é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{1}{2}M v_{cm}^2$$

Em que $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ e $M = m_1 + m_2$. Essa equação traz consequências interessantes. Por exemplo, se um sistema é isolado, então a aceleração do centro de massa é nula. Consequentemente, a velocidade do centro de massa é constante. Então a parcela da energia que corresponde a energia do centro de massa permanece inalterada.

Exemplo: calcule a perda de energia após a colisão frontal entre duas esferas de massas m_1 e m_2, com velocidades v_1 e v_2, respectivamente, se aproximando em sentidos opostos. Sabe-se que o coeficiente de restituição é e. Considere movimento horizontal das partículas e a superfície perfeitamente lisa.

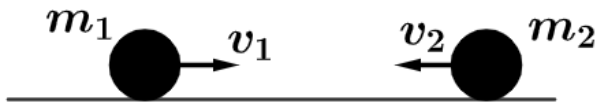


Figura 31: Dois corpos se aproximando.

Como a velocidade do centro de massa não se altera, pois, o sistema é isolado na horizontal, temos:

$$E_C^{antes} = \frac{1}{2}\mu {v_r}_1^2 + \frac{1}{2}M v_{cm}^2$$

Depois da colisão, temos:

$$E_C^{depois} = \frac{1}{2}\mu {v_r}_2^2 + \frac{1}{2}M v_{cm}^2$$

Fazendo a diferença de energia, temos:

$$\Delta E = E_c^{antes} - E_c^{depois}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu {v_r}_1^2 + \frac{1}{2}M v_{cm}^2 - \left[\frac{1}{2}\mu {v_r}_2^2 + \frac{1}{2}M v_{cm}^2\right]$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\left(v_{r_1}^2 - v_{r_2}^2\right)$$

Em que $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. Pela definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{v_{r_2}}{v_{r_1}}$$

$$v_{r_2} = e \cdot v_{r_1}$$

Substituindo na equação de energia, temos:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\left(v_{r_1}^2 - e^2 v_{r_1}^2\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu {v_{r_1}}^2(1 - e^2)$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot (v_1 + v_2)^2(1 - e^2)}$$

Note que se $e = 1$, $\Delta E = 0$, como já esperávamos da teoria, pois $e = 1$ é uma colisão perfeitamente elástica, onde temos conservação da energia cinética. Por outro lado, se $e = 0$, então nós temos a máxima perda de energia cinética e ela é dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot (v_1 + v_2)^2$$

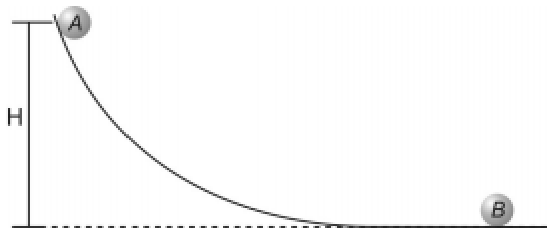
3. Lista de questões nível 1

1. (3ª fase OBF – 2005)

Uma bala, de massa $10\ g$, atinge e se encrava em um bloco de chumbo de massa igual a $990\ g$ que se encontra em repouso sobre uma superfície sem atrito. Após a penetração da bala no bloco, este se move com velocidade constante igual a $2\ m/s$. Qual era a velocidade da bala antes de penetrar no bloco?

2. (AFA – 2012)

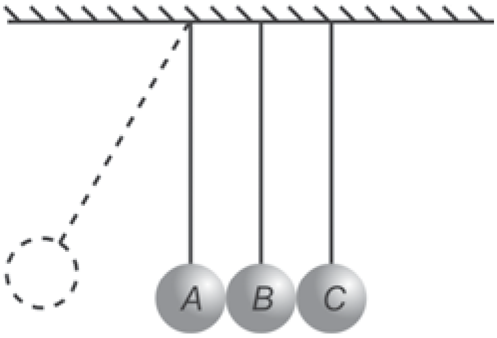
De acordo com a figura abaixo, a partícula A, ao ser abandonada de uma altura H, desce a rampa sem atritos ou resistência do ar até sofrer uma colisão, perfeitamente elástica, com a partícula B que possui o dobro da massa de A e que se encontra inicialmente em repouso. Após essa colisão, B entra em movimento e A retorna, subindo a rampa e atingindo uma altura igual a



a) H b) $\frac{H}{2}$ c) $\frac{H}{3}$ d) $\frac{H}{9}$

3. (AFA – 2007)

Três esferas idênticas estão suspensas por fios ideais conforme a figura. Se a esfera A for deslocada da posição inicial e solta, ela atingirá uma velocidade v e colidirá frontalmente com as outras duas esferas estacionadas. Considerando o choque entre as esferas perfeitamente elástico, pode-se afirmar que as velocidades v_A , v_B e v_C de A, B e C, imediatamente após as colisões, serão



a) $v_A = v_B = v_C = v$

b) $v_A = v_B = 0\ e\ v_C = v$

c) $v_A = 0\ v_B = v_C = \frac{v}{2}$

d) $v_A = v_B = v_C = \frac{v}{3}$

4. (AFA – 2005)

Um atirador utiliza alvos móveis. Em um treinamento, deixa cair um bloco de massa M, a partir de uma altura h. Ao final do primeiro segundo de queda, o bloco é atingido horizontalmente por uma bala de massa m e velocidade v. A bala se aloja no bloco e observa-se um desvio horizontal x na sua trajetória em relação ao ponto que tocaria o chão, caso não houvesse acontecido a colisão. O valor de x é dado por

a) $(\frac{2h}{g})^{\frac{1}{2}}\ (\frac{m}{(M+m)})v$

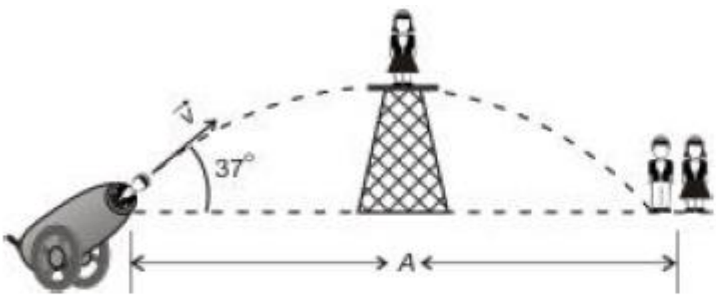
b) $((\frac{2h}{g})^{\frac{1}{2}} - 1)\ (\frac{m}{(M+m)})v$

c) $((\frac{2h}{g})^{\frac{1}{2}} - 1)\ (\frac{(M+m)}{m})v$

d) $(\frac{2h}{g})^{\frac{1}{2}}\ (M + m)v$

5. (AFA – 2004)

Num circo, um homem-bala, de massa 60 kg, é disparado por um canhão com a velocidade de 25 m/s, sob um ângulo de 37^0 com a horizontal. Sua parceira, cuja massa é 40 kg, está numa plataforma localizada no topo da trajetória. Ao passar pela plataforma, o homem-bala e a parceira se reúnem e vão cair numa rede de segurança, na mesma altura que o canhão. Veja figura abaixo. Desprezando a resistência do ar e considerando sen $37^o\ =\ 0{,}6$ e cos $37^o\ =\ 0{,}8$, pode-se afirmar que o alcance A atingido pelo homem é



a) 60 m

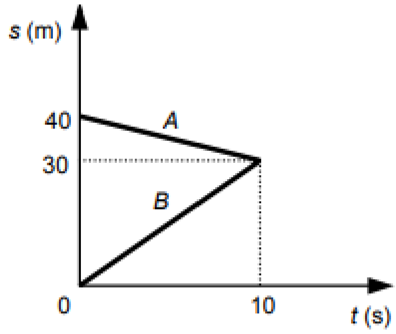
b) 48 m

c) 36 m

d) 24 m

6. (AFA – 2003)

Dois carrinhos A e B, de massa 2 kg cada, movem-se sobre trilhos retilíneos horizontais e sem atrito. Eles se chocam e passam a se mover grudados. O gráfico representa a posição de cada carrinho em função do tempo, até o instante da colisão.



A energia dissipada com o choque, em joules, é igual a

a) 8. b) 32. c) 0. d) 40.

7. (AFA – 2003)

Um projétil de chumbo ($c = 120\ J/kg.°C$) se movimenta horizontalmente com velocidade de 100 m/s e colide com uma parede ficando nela alojado. Durante o choque, 60% da energia cinética se transforma em calor e 80% desse calor é absorvido pelo projétil. A temperatura correspondente ao ponto de fusão do chumbo é 327 °C e o projétil se encontra inicialmente à temperatura de 25 °C. Nessas condições, pode-se afirmar que o projétil

a) se funde, pois o calor que ele absorve é mais que o necessário para ele atingir 327 °C.

b) não se funde, pois sua temperatura não varia.

c) não se funde, mas sua temperatura atinge 327 °C.

d) não se funde, pois sua temperatura aumenta apenas 20 °C.

8. (AFA – 2002)

Uma bola abandonada de uma altura H, no vácuo, chega ao solo e atinge, agora, altura máxima h. A razão entre a velocidade com que a bola chega ao solo e aquela com que ela deixa o solo é

a) $\left(\frac{H}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\frac{H}{h}$ c) $\left(\frac{H}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$ d) $\left(\frac{H}{h}\right)^{2}$

9. (AFA – 2002)

Uma partícula de massa m e velocidade v, colide com outra de massa 3m inicialmente em repouso. Após a colisão elas permanecem juntas, movendo-se com velocidade V. Então, pode-se afirmar que

a) $V = v$. b) $2V = v$. c) $3V = v$. d) $4V = v$.

10. (AFA – 2000)

Uma bola de borracha é lançada verticalmente para baixo com energia cinética K_1, a partir de uma altura h. Após colidir elasticamente com o solo, a bola desloca-se para cima atingindo um ponto cuja altura é 25% maior que a da posição inicial. Considere K_2 a energia cinética da bola imediatamente antes de chocar-se com o solo e calcule a razão K_1/K_2 . Despreze a resistência do ar.

a) 0,25 b) 0,20 c) 0,75 d) 1,25

11. (AFA – 1999)

Uma série de n projéteis, de 10 gramas cada um, é disparada com velocidade $v = 503\ m/s$ sobre um bloco amortecedor, de massa $M = 15\ kg$, que os absorve integralmente. Imediatamente após, o bloco desliza sobre um plano horizontal com velocidade $V = 3\ m/s$. Qual o valor de n?

a) 4 b) 6 c) 7 d) 9

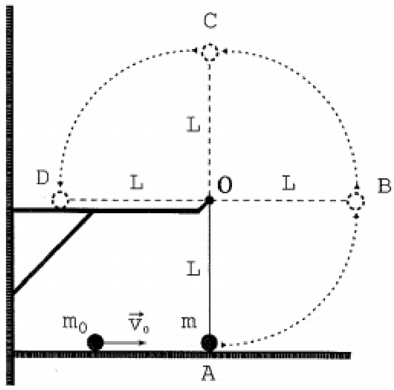
12. (EN – 2012)

Um bloco A, de massa $m_A = 1{,}0\ kg$, colide frontalmente com outro bloco, B, de massa $m_B = 3{,}0\ kg$, que se encontrava inicialmente em repouso. Para que os blocos sigam grudados com velocidade $2{,}0\ m/s$, a energia total dissipada durante a colisão, em joules, deve ser

a) 24 b) 32 c) 36 d) 48 e) 64

13. (EN – 2011)

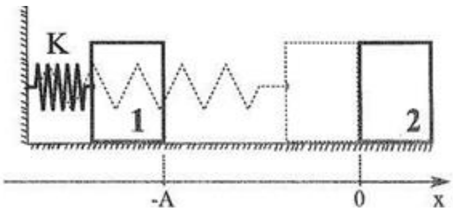
A esfera de massa mo tem o módulo da sua velocidade reduzida a zero na colisão frontal e inelástica (ou parcialmente elástica) com a esfera de massa $m = 2m_0$. Por sua vez, a esfera de massa m encontra-se inicialmente em repouso na posição A, suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível. Após a colisão, percorre a trajetória circular ABCD de raio igual ao comprimento L do fio. Despreze o atrito no pivô O e a resistência do ar. Para que a esfera de massa m percorra a trajetória circular, o valor mínimo do módulo da velocidade $\vec{V_0}$, antes da colisão, é Dado: g é a aceleração da gravidade.



a) $\sqrt{gL}$ b) $\sqrt{5gL}$ c) $\sqrt{10gL}$ d) $2\sqrt{5gL}$ e) $2\sqrt{10gL}$

14. (EN – 2010)

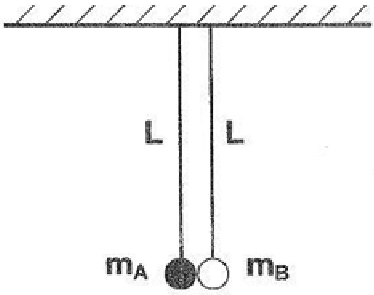
Fixada ao bloco 1, a mola ideal de constante elástica K exerce sobre este uma força Fx responsável por acelerá-lo do repouso ($x = -A$) até o choque perfeitamente elástico com o bloco 2, em repouso. O choque ocorre em $x = 0$, coordenada na qual F_x se anula. Imediatamente após a colisão, os blocos se afastam com velocidades iguais em módulo e o sistema mola-bloco 1 inicia um movimento harmônico simples com amplitude de oscilação igual a $A/2$. Despreze os atritos. A razão entre as massas m_1/m_2 dos blocos vale



a) 1/ 3 b) 2/ 3 c) 1 d) 3/ 2 e) 3

15. (EN – 2010)

Dois pêndulos constituídos por fios de massas desprezíveis e de comprimento $L = 2{,}0\ m$ estão pendurados em um teto em dois pontos próximos de tal modo que as esferas A e B, de raios desprezíveis, estejam muito próximas, sem se tocarem. As massas das esferas valem $m_A = 0{,}10\ kg$ e $m_B = 0{,}15\ kg$. Abandona-se a esfera A quando o fio forma um ângulo de 60° com a vertical, estando a esfera B do outro pêndulo na posição de equilíbrio. Sabendo que, após a colisão frontal, a altura máxima alcançada pelo centro de massa do sistema, em relação à posição de equilíbrio, é de $0{,}40\ \mathrm{m}$, o coeficiente de restituição da colisão é Dado: $|\,g\,| = 10{,}0\ \mathrm{m/\ s}^{2}$

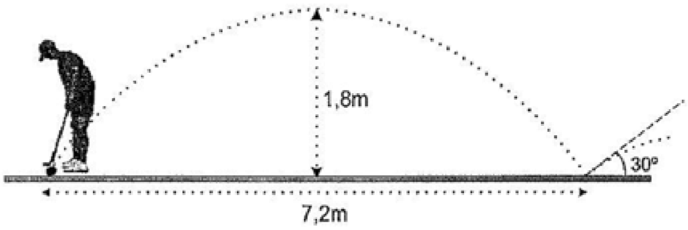


a) zero b) 0,25 c) 0,50 d) 0,75 e) 1,00

16. (EN – 2009)

Uma bola de golfe percorre $7,2\mathrm{m}$ horizontalmente e atinge uma altura máxima de $1,8\mathrm{m}$ antes de colidir com o solo. Durante o choque com o solo, a bola sofre um impulso na vertical e imediatamente após o choque sua velocidade forma um ângulo de 30° com a horizontal, conforme indica a figura. Quanto vale o coeficiente de restituição da colisão?

Dados: $g = 10\mathrm{m/s^2}$; $\mathrm{sen}30° = 1\ /\ 2$; $\mathrm{sen}60° = \sqrt{3}\ /\ 2$



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) 1

17. (EN – 2009)

O centro de massa de um sistema de duas partículas se desloca no espaço com uma aceleração constante $\vec{a} = 4{,}0\hat{I} + 3{,}0\hat{j}\ (\mathrm{m/\ s^2})$. Num dado instante t, o centro de massa desse sistema está sobre a reta y=5,0m com uma velocidade $\vec{V} = 4{,}0\hat{\imath}\ (\mathrm{m/\ s})$, sendo que uma das partículas está sobre a origem e a outra, que possui massa de $1{,}5\mathrm{kg}$, encontra-se na posição $\vec{r} = 3{,}0\hat{\imath} + 8{,}0\hat{j}\ (\mathrm{m})$. Quanto valem, respectivamente, o módulo da quantidade de movimento do sistema no instante t, e o módulo da resultante das forças externas que atuam no sistema?

A) 7, 6 kgm/s e 10 N B) 7, 6 kgm/s e 12 N C) 9, 6 kgm/s e 20 N

D) 9, 6 kgm/s e 12 N E) 11, 6 kgm/s e 10 N

18. (EN – 2013)

Uma granada, que estava inicialmente com velocidade nula, explode, partindo-se em três pedaços. O primeiro pedaço, de massa $M_1 = 0{,}20\ \mathrm{kg}$, é projetado com uma velocidade de módulo igual a $10\ \mathrm{m/s}$. O segundo pedaço, de massa $M_2 = 0{,}10\ \mathrm{kg}$, é projetado em uma direção perpendicular à direção do primeiro pedaço, com uma velocidade de módulo igual a $15\ \mathrm{m/s}$. Sabendo-se que o módulo da velocidade do terceiro pedaço é igual a $5{,}0\ \mathrm{m/s}$, a massa da granada, em kg, vale

a) 0,30 b) 0,60 c) 0,80 d) 1,0 e) 1,2

19. (EN – 2008)

Uma esfera de madeira, de massa igual a $4{,}00\ kg$, é solta de uma altura igual a 1,80 m de um piso horizontal (massa infinita). No choque, o piso exerce uma força média de módulo igual a $12 \cdot 10^3 N$, atuando no intervalo de tempo de $3{,}00\ ms$. Desprezando-se a resistência do ar, o coeficiente de restituição do choque vale:

Dado: $|\bar{g}| = 10{,}0 m/s^2$

a) 0,30 b) 0,40 c) 0,45 d) 0,50 e) 0,60

20. (EN – 2008)

Um projétil de chumbo, de massa igual a 10,0 gramas, está na temperatura de $27{,}0°C$ e se desloca horizontalmente com velocidade de $400\ m/s$ quando se choca com um bloco de massa $5{,}00\ kg$, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície horizontal valem $0{,}300$ e $0{,}200$. O projétil penetra no bloco e o conjunto passa a se mover com uma velocidade de $2{,}00\ m/s$. Admitindo-se que a energia cinética perdida pelo projétil seja transformada em calor e que 40% deste calor foi absorvido pelo próprio projétil, a variação de entropia (em J/K) do projétil é, aproximadamente, igual a

Dados:

calor específico do chumbo sólido = $1{,}30\ x\ 10^2\ J/kg°C$

calor latente de fusão do chumbo = $2{,}50\ x\ 10^4 J/kg$

temperatura de fusão do chumbo = 327 °C ;

conversão: 0°C = 273K

$ln 10 = 2{,}30; \ln 3{,}62 = 1{,}29; \ln 1{,}81 = 0{,}59$

a) 0,500 b) 0,740 c) 0,767 d) 0,800 e) 0,830

21. (EFOMM – 2017)

Dois móveis P e T com massas de 15,0 kg e 13,0 kg, respectivamente, movem-se em sentidos opostos com velocidades VP = 5,0 m/s e VT = 3,0 m/s, até sofrerem uma colisão unidimensional, parcialmente elástica de coeficiente de restituição e = 3/4. Determine a intensidade de suas velocidades após o choque.

a) VT = 5 m/s e VP = 3,0 m/s

b) VT = 4,5 m/s e VP = 1,5 m/s

c) VT = 3,0 m/s e VP = 1,5 m/s

d) VT = 1,5 m/s e VP = 4,5 m/s

e) VT = 1,5 m/s e VP = 3,0 m/s

22. (EFOMM – 2015)

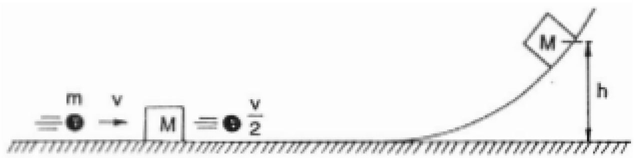
Uma partícula viaja com velocidade constante de módulo v no sentido positivo do eixo x, enquanto outra partícula idêntica viaja com velocidade constante de módulo 2v no sentido positivo do eixo y. Ao passarem pela origem, as partículas colidem e passam a mover-se juntas, como uma única partícula composta. Sobre o módulo da velocidade da partícula composta e o ângulo que ela faz com o eixo x, pode-se afirmar que são, respectivamente,

a) $3v, 45^o$ b) $3v, 63^o$ c) $v\sqrt{3}, 45^o$

d) $v\sqrt{5}, 45^o$ e) $v\sqrt{5}, 63^o$

23. (ITA – 1990)

Um projétil de massa m e velocidade v atingo um objeto do massa M, inicialmente Imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa M e sai dele com velocidade $v/2$. O corpo que foi atingido desliza por uma superfície som atrito, subindo uma rampa até a altura h. Nestas condiçóos podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil ora de:



a) $v = \frac{2M}{m}\sqrt{2gh}$ b) $v = 2\sqrt{2\frac{M}{m}\,gh}$ c) $v = 2\sqrt{\frac{M}{m}\,gh}$

d) $v = \sqrt{8gh}$ e) $v = 2\sqrt{gh}$

24. (ITA – 1995)

Todo caçador ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é $95{,}0\ kg$. A massa do rifle é $5{,}00\ kg$, e a massa do projétil é $15{,}0\ g$ o qual é disparada a uma velocidade de $3{,}00 \cdot 10^4\ cm/s$. Nestas condição, a velocidade de recuo do rifle (v_r) quando se segura muito frouxamente a arma e a velocidade de recuo do atirador (v_a) quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro serão respectivamente:

a) $0{,}90\ m/s;\ 4{,}7 \cdot 10^2\ m/s$ b) $90{,}0\ m/s;\ 4{,}7\ m/s$ c) $90{,}0\ m/s;\ 4{,}5\ m/s$

d) $0{,}90\ m/s;\ 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$ e) $0{,}10\ m/s;\ 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

4. Gabarito sem comentários nível 1

1) 200 m/s
2) D
3) B
4) B
5) B
6) A

7) D
8) A
9) D
10) B
11) D
12) A
13) D
14) A
15) E
16) C
17) D
18) C
19) D
20) C
21) B
22) S/A
23) A
24) D

5. Lista de questões nível 1 comentada

1. (3ª fase OBF – 2005)

Uma bala, de massa $10\ g$, atinge e se encrava em um bloco de chumbo de massa igual a $990\ g$ que se encontra em repouso sobre uma superfície sem atrito. Após a penetração da bala no bloco, este se move com velocidade constante igual a $2\ m/s$. Qual era a velocidade da bala antes de penetrar no bloco?

Comentários:

A quantidade de movimento se conserva, pois não há forças externas. Então:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_f v_f$$

$$\Rightarrow 10 \cdot v + 990 \cdot 0 = 1000 \cdot 2$$

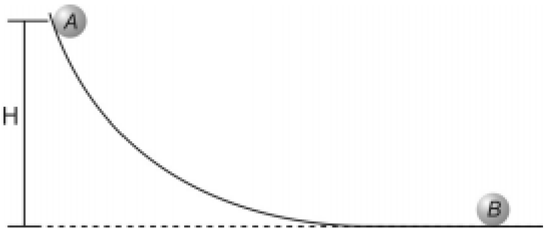
$$\Rightarrow v = 200\ m/s$$

Gabarito: 200 m/s

---

2. (AFA – 2012)

De acordo com a figura abaixo, a partícula A, ao ser abandonada de uma altura H, desce a rampa sem atritos ou resistência do ar até sofrer uma colisão, perfeitamente elástica, com a partícula B que possui o dobro da massa de A e que se encontra inicialmente em repouso. Após essa colisão, B entra em movimento e A retorna, subindo a rampa e atingindo uma altura igual a



a) H b) $\frac{H}{2}$ c) $\frac{H}{3}$ d) $\frac{H}{9}$

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_a v_a = m_b v_b' - m_a v_a'$$

Pela definição de coeficiente de restituição:

$$1 = \frac{v_b' + v_a'}{v_a} \rightarrow {v_b}' = v_a - {v_a}'$$

Logo:

$$m_a v_a = m_b(v_a - v_a') - m_a v_a'$$

$$v_a' = \frac{v_a(m_b - m_a)}{m_b + m_a} = \frac{v_a}{3}$$

Dessa forma:

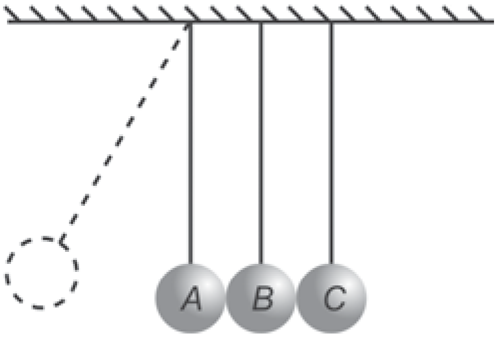
$$\sqrt{2gH'} = \frac{\sqrt{2gH}}{3}$$

$$H' = \frac{H}{9}$$

Gabarito: D

3. (AFA – 2007)

Três esferas idênticas estão suspensas por fios ideais conforme a figura. Se a esfera A for deslocada da posição inicial e solta, ela atingirá uma velocidade v e colidirá frontalmente com as outras duas esferas estacionadas. Considerando o choque entre as esferas perfeitamente elástico, pode-se afirmar que as velocidades v_A , v_B e v_C de A, B e C, imediatamente após as colisões, serão



a) $v_A = v_B = v_C = v$

b) $v_A = v_B = 0 \ e \ v_C = v$

c) $v_A = 0 \ v_B = v_C = \frac{v}{2}$

d) $v_A = v_B = v_C = \frac{v}{3}$

Comentários:

Conhecemos esse brinquedo né gente? Sabemos que todas as esferas param com exceção da última. Mas vamos à prova:

Na primeira colisão (A com B):

$$mv_a = mv_a' + mv_b'$$

$$1 = \frac{(v_b' - v_a')}{v_a} \rightarrow v_b' = v_a' + v_a$$

$$v_a = v_a' + v_a' + v_a \rightarrow v_a' = 0 \rightarrow v_b' = v_a$$

Na segunda colisão (B com C) acontece a mesma coisa que a anterior:

$$v_b'' = 0$$

$$v_c'' = v_a$$

Gabarito: B

4. (AFA – 2005)

Um atirador utiliza alvos móveis. Em um treinamento, deixa cair um bloco de massa M, a partir de uma altura h. Ao final do primeiro segundo de queda, o bloco é atingido horizontalmente por uma bala de massa m e velocidade v. A bala se aloja no bloco e observa-se um desvio horizontal x na sua trajetória em relação ao ponto que tocaria o chão, caso não houvesse acontecido a colisão. O valor de x é dado por

a) $\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{(M+m)}\right) v$

b) $\left(\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(\frac{m}{(M+m)}\right) v$

c) $\left(\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(\frac{(M+m)}{m}\right) v$

d) $\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} (M+m) v$

Comentários:

O bloco demora $\sqrt{\frac{2h}{g}}\ s$ para tocar o chão.

A velocidade horizontal do bloco após colisão pode ser determinada por conservação da quantidade de movimento:

$$mv = (m+M)v' \rightarrow v' = \frac{mv}{M+m}$$

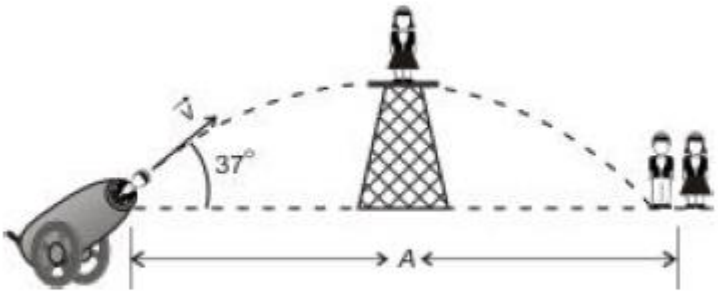
Logo:

$$\Delta x = \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)v' = \frac{\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)mv}{M+m}$$

Gabarito: B

5. (AFA – 2004)

Num circo, um homem-bala, de massa 60 kg, é disparado por um canhão com a velocidade de 25 m/s, sob um ângulo de 37^0 com a horizontal. Sua parceira, cuja massa é 40 kg, está numa plataforma localizada no topo da trajetória. Ao passar pela plataforma, o homem-bala e a parceira se reúnem e vão cair numa rede de segurança, na mesma altura que o canhão. Veja figura abaixo. Desprezando a resistência do ar e considerando sen $37^o = 0{,}6$ e cos $37^o = 0{,}8$, pode-se afirmar que o alcance A atingido pelo homem é



a) 60 m b) 48 m c) 36 m d) 24 m

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento no momento da reunião:

$$m_1 \cdot V_0 \cos\theta = (m_1 + m_2)v'$$

$$v' = 12\ m/s$$

O tempo de subida e o de descida são iguais e valem:

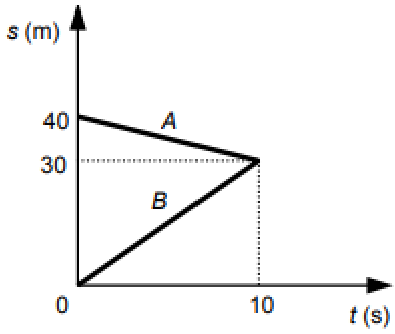
$$t = \frac{V_0 \sin 37°}{g} = 1{,}5s$$

$$A = V_0 \cos\theta\, t + v't = 48\ m$$

Gabarito: B

6. (AFA – 2003)

Dois carrinhos A e B, de massa 2 kg cada, movem-se sobre trilhos retilíneos horizontais e sem atrito. Eles se chocam e passam a se mover grudados. O gráfico representa a posição de cada carrinho em função do tempo, até o instante da colisão.



A energia dissipada com o choque, em joules, é igual a

a) 8. b) 32. c) 0. d) 40.

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v$$

$$2 \cdot \left(-\frac{10}{10}\right) + 2 \cdot \left(\frac{30}{10}\right) = 4 \cdot v$$

$$v = 1m/s$$

A energia dissipada vale:

$$\Delta E = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} - \frac{(m_A + m_B)v^2}{2} = 2 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot \frac{3^2}{2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2} == 1 + 9 - 2 = 8J$$

Gabarito: A

7. (AFA – 2003)

Um projétil de chumbo ($c = 120\ J/kg.°C$) se movimenta horizontalmente com velocidade de 100 m/s e colide com uma parede ficando nela alojado. Durante o choque, 60% da energia cinética se transforma em calor e 80% desse calor é absorvido pelo projétil. A temperatura correspondente ao ponto de fusão do chumbo é 327 °C e o projétil se encontra inicialmente à temperatura de 25 °C. Nessas condições, pode-se afirmar que o projétil

a) se funde, pois o calor que ele absorve é mais que o necessário para ele atingir 327 °C.

b) não se funde, pois sua temperatura não varia.

c) não se funde, mas sua temperatura atinge 327 °C.

d) não se funde, pois sua temperatura aumenta apenas 20 °C.

Comentários:

$$\Delta E=\frac{mv^2}{2}=5000m$$

O calor absorvido vale:

$$Q=0{,}8\cdot 0{,}6\cdot \Delta E=2400m$$

A energia necessária para o projétil alcançar 327°C é:

$$Q_1=mc\Delta T=m\cdot 120\cdot (327-25)=36240m$$

Logo o projétil não se funde e sua temperatura aumenta:

$$2400m=m\cdot 120\cdot \Delta T\rightarrow \Delta T=20°C$$

Gabarito: D

---

8. (AFA – 2002)

Uma bola abandonada de uma altura H, no vácuo, chega ao solo e atinge, agora, altura máxima h. A razão entre a velocidade com que a bola chega ao solo e aquela com que ela deixa o solo é

a) $\left(\frac{H}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\frac{H}{h}$ c) $\left(\frac{H}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$ d) $\left(\frac{H}{h}\right)^{2}$

Comentários:

A velocidade que a bola chega ao solo é:

$$v_1=\sqrt{2gH}$$

A velocidade com que ela deixa o solo é:

$$v_2=\sqrt{2gh}$$

Logo a razão entre as velocidades é:

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{H}{h}}$$

Gabarito: A

---

9. (AFA – 2002)

Uma partícula de massa m e velocidade v, colide com outra de massa 3m inicialmente em repouso. Após a colisão elas permanecem juntas, movendo-se com velocidade V. Então, pode-se afirmar que

a) $V=v$. b) $2V=v$. c) $3V=v$. d) $4V=v$.

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$mv = (m + 3m)V \to v = 4V$$

Gabarito: D

10. (AFA – 2000)

Uma bola de borracha é lançada verticalmente para baixo com energia cinética K_1, a partir de uma altura h. Após colidir elasticamente com o solo, a bola desloca-se para cima atingindo um ponto cuja altura é 25% maior que a da posição inicial. Considere K_2 a energia cinética da bola imediatamente antes de chocar-se com o solo e calcule a razão K_1/K_2 . Despreze a resistência do ar.

a) 0,25 b) 0,20 c) 0,75 d) 1,25

Comentários:

Pela conservação das energias:

$$mgh + K_1 = 1{,}25mgh \to K_1 = 0{,}25mgh$$

$$K_2 = 1{,}25mgh \therefore \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: B

11. (AFA – 1999)

Uma série de n projéteis, de 10 gramas cada um, é disparada com velocidade $\mathrm{v} = 503\ \mathrm{m/s}$ sobre um bloco amortecedor, de massa $\mathrm{M} = 15\ \mathrm{kg}$, que os absorve integralmente. Imediatamente após, o bloco desliza sobre um plano horizontal com velocidade $\mathrm{V} = 3\ \mathrm{m/s}$. Qual o valor de n?

a) 4 b) 6 c) 7 d) 9

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$nmv = (M + nm)V \to nmv - nmV = MV \to n = \frac{MV}{m(v - V)}$$

$$n = \frac{15 \cdot 3}{0{,}01 \cdot 500} = 9$$

Gabarito: D

12. (EN – 2012)

Um bloco A, de massa $\mathrm{m_A} = 1{,}0\ \mathrm{kg}$, colide frontalmente com outro bloco, B, de massa $\mathrm{m_B} = 3{,}0\ \mathrm{kg}$, que se encontrava inicialmente em repouso. Para que os blocos sigam grudados com velocidade $2{,}0\ \mathrm{m/s}$, a energia total dissipada durante a colisão, em joules, deve ser

a) 24 b) 32 c) 36 d) 48 e) 64

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A = (m_A + m_B)v$$

$$v_A = 4 \cdot 2 = 8\, m/s$$

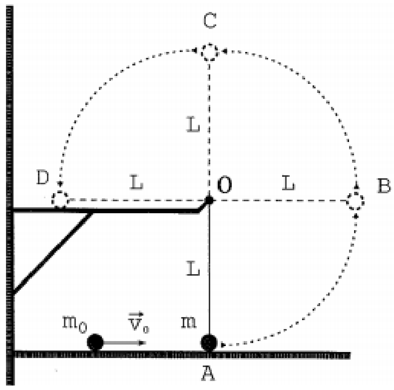
A variação da energia cinética é:

$$\frac{m_A v_A^2}{2} - \frac{(m_A + m_B)v^2}{2} = \frac{8^2}{2} - 4 \cdot \frac{2^2}{2} = 24J$$

Gabarito: A

13. (EN – 2011)

A esfera de massa mo tem o módulo da sua velocidade reduzida a zero na colisão frontal e inelástica (ou parcialmente elástica) com a esfera de massa $\mathrm{m} = 2\mathrm{m}_0$. Por sua vez, a esfera de massa m encontra-se inicialmente em repouso na posição A, suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível. Após a colisão, percorre a trajetória circular ABCD de raio igual ao comprimento L do fio. Despreze o atrito no pivô O e a resistência do ar. Para que a esfera de massa m percorra a trajetória circular, o valor mínimo do módulo da velocidade $\overrightarrow{V_0}$, antes da colisão, é Dado: g é a aceleração da gravidade.



a) $\sqrt{\mathrm{gL}}$ b) $\sqrt{5\mathrm{gL}}$ c) $\sqrt{10\mathrm{gL}}$ d) $2\sqrt{5\mathrm{gL}}$ e) $2\sqrt{10\mathrm{gL}}$

Comentários:

A velocidade mínima para o lançamento ocorre quando a tração do fio no ponto máximo é nula:

$$N = 0 \rightarrow mg = \frac{m\, v_{topo}^2}{L} \rightarrow v_{topo} = \sqrt{gL}$$

Por conservação de energia mecânica:

$$\frac{m v_{chão}^2}{2} = \frac{m v_{topo}^2}{2} + 2mgL$$

$$v_{chão} = \sqrt{5gL}$$

Por conservação da quantidade de movimento:

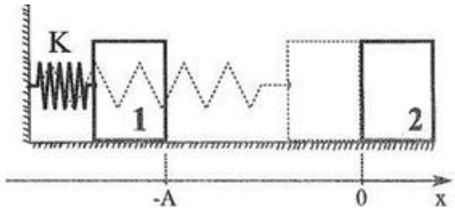
$$m_0 v_0 = 2m_0 v_{chão}$$

$$v_0 = 2\sqrt{5gL}$$

Gabarito: D

14. (EN – 2010)

Fixada ao bloco 1, a mola ideal de constante elástica K exerce sobre este uma força Fx responsável por acelerá-lo do repouso $(\mathrm{x} = -\mathrm{A})$ até o choque perfeitamente elástico com o bloco 2, em repouso. O choque ocorre em $x = 0$, coordenada na qual F_x se anula. Imediatamente após a colisão, os blocos se afastam com velocidades iguais em módulo e o sistema mola-bloco 1 inicia um movimento harmônico simples com amplitude de oscilação igual a $A/2$. Despreze os atritos. A razão entre as massas m_1/m_2 dos blocos vale



a) 1/ 3 b) 2/ 3 c) 1 d) 3/ 2 e) 3

Comentários:

A velocidade do bloco 1 no ponto x=0 pode ser calculada por:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{m_1 v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{kA^2}{m_1}}$$

Depois da colisão temos:

$$\frac{k\left(\frac{A}{2}\right)^2}{2} = \frac{m_1 v'^2}{2} \rightarrow v' = \sqrt{\frac{kA^2}{4m_1}} = \frac{v}{2}$$

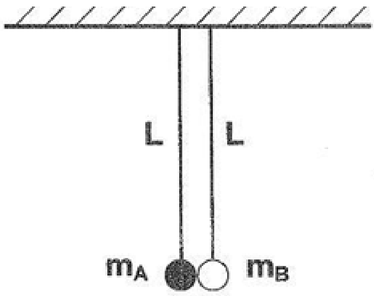
Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 v = -\frac{m_1 v}{2} + \frac{m_2 v}{2} \rightarrow m_2 = 3m_1$$

Gabarito: A

15. (EN – 2010)

Dois pêndulos constituídos por fios de massas desprezíveis e de comprimento $L = 2{,}0\ m$ estão pendurados em um teto em dois pontos próximos de tal modo que as esferas A e B, de raios desprezíveis, estejam muito próximas, sem se tocarem. As massas das esferas valem $m_A = 0{,}10\ kg$ e $m_B = 0{,}15\ kg$. Abandona-se a esfera A quando o fio forma um ângulo de 60° com a vertical, estando a esfera B do outro pêndulo na posição de equilíbrio. Sabendo que, após a colisão frontal, a altura máxima alcançada pelo centro de massa do sistema, em relação à posição de equilíbrio, é de $0{,}40\ m$, o coeficiente de restituição da colisão é Dado: $|g| = 10{,}0\ m/s^2$



a) zero b) 0,25 c) 0,50 d) 0,75 e) 1,00

Comentários:

Sendo e o coeficiente de restituição. Por conservação da energia mecânica:

$$v_A = \sqrt{2gH} = \sqrt{2gL(1-\cos 60°)} = \sqrt{gL} = \sqrt{20} m/s$$

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \rightarrow v'_A = v_A - \frac{3}{2} v'_B$$

Por conservação de energia pós-choque:

$$\frac{m_A v_A'^2}{2} + \frac{m_B v_B'^2}{2} = (m_A + m_B) gH$$

$$0{,}1 v_A'^2 + 0{,}15 v_B'^2 = 0{,}5 gH$$

$$2 v_A'^2 + 3 v_B'^2 = 10 gH$$

$$2\left(v_A - \frac{3}{2} v'_B\right)^2 + 3 v_B'^2 = 10 gH$$

$$2 v_A^2 - 6 v_A v'_B + \frac{9}{2} v_B'^2 + 3 v_B'^2 = 40$$

$$40 - 6\sqrt{20} v'_B + \frac{15}{2} v_B'^2 = 40 \rightarrow v'_B = \frac{4\sqrt{20}}{5} m/s$$

$$v'_A = -\frac{\sqrt{20}}{5} m/s$$

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A} = 1$$

Outra forma mais rápida de resolver o exercício é ver que:

$$m_A g L(1 - \cos 60°) = 1 = (m_A + m_B) gH$$

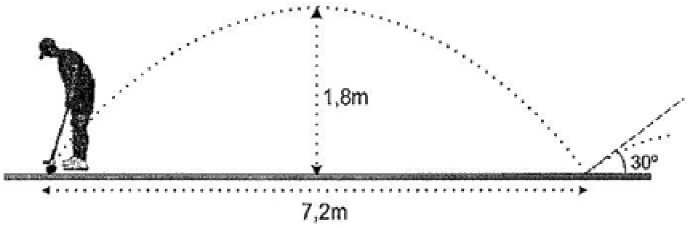
Como não houve variação de energia, a colisão é totalmente elásttica.

Gabarito: E

16. (EN – 2009)

Uma bola de golfe percorre $7,2\text{m}$ horizontalmente e atinge uma altura máxima de $1,8\text{m}$ antes de colidir com o solo. Durante o choque com o solo, a bola sofre um impulso na vertical e imediatamente após o choque sua velocidade forma um ângulo de 30° com a horizontal, conforme indica a figura. Quanto vale o coeficiente de restituição da colisão?

Dados: $g = 10 m/s^2$; $sen30° = 1/2$; $sen60° = \sqrt{3}/2$



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) 1

Comentários:

Pela equação da altura máxima, temos:

$$\frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g} = 1{,}8 \rightarrow V_0 \sin\theta = 6 \rightarrow V_0 = 6/\sin\ \theta$$

$$\frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} = 7{,}2 \rightarrow V_0^2 \sin\theta\cos\theta = 36$$

$$\left(\frac{36}{\sin^2\theta}\right)\sin\theta\cos\theta = 36 \rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = 45°$$

Logo, no momento da colisão:

$$V_x = -V_y = \frac{V_0\sqrt{2}}{2}$$

Como a colisão ocorre no plano horizontal, somente V_y muda. Pelo ângulo falado pelo exercício:

$$\frac{V_y'}{V_x} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow V_y' = \frac{V_0\sqrt{6}}{6}$$

O coeficiente de restituição vale:

$$e = \frac{V_y'}{V_y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: C

---

17. (EN – 2009)

O centro de massa de um sistema de duas partículas se desloca no espaço com uma aceleração constante $\vec{a} = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j}\ (m/s^2)$. Num dado instante t, o centro de massa desse sistema está sobre a reta y=5,0m com uma velocidade $\vec{V} = 4{,}0\hat{i}\ (m/s)$, sendo que uma das partículas está sobre a origem e a outra, que possui massa de 1,5kg, encontra-se na posição $\vec{r} = 3{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j}\ (m)$. Quanto valem, respectivamente, o módulo da quantidade de movimento do sistema no instante t, e o módulo da resultante das forças externas que atuam no sistema?

A) 7, 6 kgm/s e 10 N B) 7, 6 kgm/s e 12 N C) 9, 6 kgm/s e 20 N

D) 9, 6 kgm/s e 12 N E) 11, 6 kgm/s e 10 N

Comentários:

Pela equação da posição vertical do centro de massa:

$$m_1y_1 + m_2y_2 = (m_1 + m_2)y$$

$$1{,}5 \cdot 8 = (m_1 + 1{,}5) \cdot 5$$

$$m_1 = 0{,}9\ kg$$

Como o módulo da aceleração vale 5m/s podemos calcular o momento linear e a força resultante no sistema:

$$P = (m_1 + m_2)V = 2{,}4 \cdot 4 = 9{,}6\ kg.m/s$$

$$F = (m_1 + m_2)a = 2{,}4 \cdot 5 = 12N$$

Gabarito: D

---

18. (EN – 2013)

Uma granada, que estava inicialmente com velocidade nula, explode, partindo-se em três pedaços. O primeiro pedaço, de massa $\mathrm{M_1 = 0{,}20\ kg}$, é projetado com uma velocidade de módulo igual a $10\ \mathrm{m/s}$. O segundo pedaço, de massa $\mathrm{M_2 = 0{,}10\ kg}$, é projetado em uma direção perpendicular à direção do primeiro pedaço, com uma velocidade de módulo igual a $15\ \mathrm{m/s}$. Sabendo-se que o módulo da velocidade do terceiro pedaço é igual a $5{,}0\ \mathrm{m/s}$, a massa da granada, em kg, vale

a) 0,30 b) 0,60 c) 0,80 d) 1,0 e) 1,2

Comentários:

Sendo V_x e V_y as componentes em dois eixos ortogonais da velocidade do terceiro pedaço. No eixo x:

$$M_1V_1 + M_3V_x = 0 \rightarrow V_x = \frac{M_1V_1}{M_3}$$

No eixo y:

$$M_2V_2 + M_3V_y = 0 \rightarrow V_y = \frac{M_2V_2}{M_3}$$

$$V_3^2 = V_x^2 + V_y^2 \rightarrow M_3^2V_3^2 = M_2^2V_2^2 + M_1^2V_1^2$$

$$25M_3^2 = 0{,}2^2 \cdot 100 + 0{,}1^2 \cdot 225 \rightarrow M_3 = 0{,}5\ kg$$

$$M = 0{,}8\ kg$$

Gabarito: C

19. (EN – 2008)

Uma esfera de madeira, de massa igual a $4{,}00\ kg$, é solta de uma altura igual a 1,80 m de um piso horizontal (massa infinita). No choque, o piso exerce uma força média de módulo igual a $12 \cdot 10^3 N$, atuando no intervalo de tempo de $3{,}00\ ms$. Desprezando-se a resistência do ar, o coeficiente de restituição do choque vale:

Dado: $|\bar{g}| = 10{,}0 m/s^2$

a) 0,30 b) 0,40 c) 0,45 d) 0,50 e) 0,60

Comentários:

A velocidade com que a esfera chega no piso é:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} = 6\ m/s$$

O impulso dado pela força F é:

$$I = F \cdot t = 12 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 36 N.s$$

A velocidade final da esfera pode ser calculada por (veja que o sentido das velocidades é oposto):

$$-mv + I = mv' \rightarrow -4 \cdot 6 + 36 = 4 \cdot v' \rightarrow v' = 3\ m/s$$

O coeficiente da restituição vale:

$$e = \frac{v'}{v} = 0{,}5$$

Gabarito: D

20. (EN – 2008)

Um projétil de chumbo, de massa igual a 10,0 gramas, está na temperatura de $27{,}0°C$ e se desloca horizontalmente com velocidade de $400\ m/s$ quando se choca com um bloco de massa $5{,}00\ kg$, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície horizontal valem $0{,}300$ e $0{,}200$. O projétil penetra no bloco e o conjunto passa a se mover com uma velocidade de $2{,}00\ m/s$. Admitindo-se que a energia cinética perdida pelo projétil seja transformada em calor e que 40% deste calor foi absorvido pelo próprio projétil, a variação de entropia (em J/K) do projétil é, aproximadamente, igual a

Dados:

calor específico do chumbo sólido = $1{,}30\ x\ 10^2\ J/kg°C$

calor latente de fusão do chumbo = $2{,}50\ x\ 10^4 J/kg$

temperatura de fusão do chumbo = 327 °C ;

conversão: 0°C = 273K

$ln10 = 2{,}30; \ln 3{,}62 = 1{,}29; \ln 1{,}81 = 0{,}59$

a) 0,500 b) 0,740 c) 0,767 d) 0,800 e) 0,830

Comentários:

Gente, por que não houve conservação da quantidade de movimento?

Resposta: Porque existe atrito. No tempo que demora a colisão existe força externa (atrito), e portanto não há conservação da quantidade de movimento. O atrito, entretanto, é muito menor que a força de restituição do choque, e geralmente não altera tanto a quantidade de movimento quando os corpos têm a mesma massa, mas quando um corpo é muito menor que o outro, ele pode ser bem importante.

A variação da energia cinética é:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)v'^2}{2} = 10^{-2} \cdot \frac{400^2}{2} - 5{,}01 \cdot \frac{2^2}{2} = 790J$$

$$Q = 0{,}4\Delta E = 316J$$

Para esquentar o projétil até a temperatura de fusão precisamos:

$$Q_s = mc\Delta T = 10^{-2} \cdot 130 \cdot 300 = 390J$$

Portanto a temperatura final vale:

$$Q = mc\Delta T \to \Delta T = \frac{316}{1{,}3} = 243°C \to T_f = 270°C$$

A variação de entropia vale:

$$\Delta S = \mathrm{mc} \ln \frac{T_f}{T_i} = 10^{-2} \cdot 130 \cdot \ln\left(\frac{543}{300}\right) = 1{,}3 \cdot \ln(1{,}81) = 0{,}767\ J/K$$

Gabarito: C

---

21. (EFOMM – 2017)

Dois móveis P e T com massas de 15,0 kg e 13,0 kg, respectivamente, movem-se em sentidos opostos com velocidades VP = 5,0 m/s e VT = 3,0 m/s, até sofrerem uma colisão unidimensional, parcialmente elástica de coeficiente de restituição e = 3/4. Determine a intensidade de suas velocidades após o choque.

a) VT = 5 m/s e VP = 3,0 m/s

b) VT = 4,5 m/s e VP = 1,5 m/s

c) VT = 3,0 m/s e VP = 1,5 m/s

d) VT = 1,5 m/s e VP = 4,5 m/s

e) VT = 1,5 m/s e VP = 3,0 m/s

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_P v_P + m_T v_T = m_P v_P' + m_T v_T'$$

$$15 \cdot 5 - 13 \cdot 3 = 15 \cdot v_P' + 13 \cdot v_T' = 36$$

$$\frac{3}{4} = \frac{v_T' - v_P'}{5 + 3} \rightarrow v_T' = 6 + v_P'$$

$$15v_P' + 78 + 13v_P' = 36$$

$$v_P' = -1{,}5\ m/s$$

$$v_T' = 4{,}5 m/s$$

Gabarito: B

22. (EFOMM – 2015)

Uma partícula viaja com velocidade constante de módulo v no sentido positivo do eixo x, enquanto outra partícula idêntica viaja com velocidade constante de módulo 2v no sentido positivo do eixo y. Ao passarem pela origem, as partículas colidem e passam a mover-se juntas, como uma única partícula composta. Sobre o módulo da velocidade da partícula composta e o ângulo que ela faz com o eixo x, pode-se afirmar que são, respectivamente,

a) $3\text{v}, 45^{\text{o}}$ b) $3\text{v}, 63^{\text{o}}$ c) $\text{v}\sqrt{3}, 45^{\text{o}}$

d) $\text{v}\sqrt{5}, 45^{\text{o}}$ e) $\text{v}\sqrt{5}, 63^{\text{o}}$

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento em cada eixo, temos:

$$mv = 2mV_x \rightarrow V_x = \frac{v}{2}$$

$$2mv = 2mV_y \rightarrow V_y = v$$

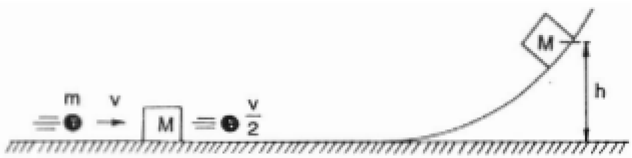
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{v\sqrt{5}}{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \arctan(2) = 63°$$

Gabarito: S/A

23. (ITA – 1990)

Um projétil de massa m e velocidade v atingo um objeto do massa M, inicialmente Imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa M e sai dele com velocidade $v/2$. O corpo que foi atingido desliza por uma superfície som atrito, subindo uma rampa até a altura h. Nestas condiçóos podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil ora de:



a) $v = \frac{2M}{m}\sqrt{2gh}$ b) $v = 2\sqrt{2\frac{M}{m}\,gh}$ c) $v = 2\sqrt{\frac{M}{m}\,gh}$

d) $v = \sqrt{8gh}$ e) $v = 2\sqrt{gh}$

Comentários:

Conservação da quantidade de movimento na colisão:

$$m \cdot v = m \cdot \frac{v}{2} + M \cdot \vartheta$$

$$\vartheta = \frac{m}{M} \cdot \frac{v}{2}$$

Conservação de energia para o bloco de massa M:

$$\frac{m \cdot \vartheta^{\,2}}{2} = m \cdot g \cdot h$$

A partir de (i) e (ii), chegamos que:

$$v = \frac{2M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Gabarito: A

24. (ITA – 1995)

Todo caçador ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é 95,0 kg. A massa do rifle é 5,00 kg, e a massa do projétil é 15,0 g o qual é disparada a uma velocidade de $3{,}00 \cdot 10^4\ cm/s$. Nestas condição, a velocidade de recuo do rifle (v_r) quando se segura muito frouxamente a arma e a velocidade de recuo do atirador (v_a) quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro serão respectivamente:

a) $0{,}90\ m/s$; $4{,}7 \cdot 10^2\ m/s$ b) $90{,}0\ m/s$; $4{,}7\ m/s$ c) $90{,}0\ m/s$; $4{,}5\ m/s$

d) $0{,}90\ m/s$; $4{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$ e) $0{,}10\ m/s$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

Comentários:

Conservação da quantidade de movimento no caso em que o fuzil está frouxo:

$$m_r \cdot v_r = m_{proj} \cdot v_{proj}$$

$$5{,}00 \cdot v_R = 15{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}00 \cdot 10^2 \Rightarrow \boxed{v_r = 0{,}90\ m/s}$$

Conservação da quantidade de movimento no caso em que o fuzil está preso:

$$(m_r + m_H) \cdot v_a = m_{proj} \cdot v_{proj}$$

$$100 \cdot v_a = 15{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}00 \cdot 10^2$$

$$\boxed{v_a = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\, m/s}$$

Gabarito: D

6. Lista de questões nível 2

1. (AFA – 2000)

Duas esferas A e B, de massas respectivamente iguais a 4 kg e 2 kg, percorrem a mesma trajetória retilínea, apoiadas num plano horizontal, com velocidades de 10 m/s e 8 m/s, respectivamente, conforme a figura. Após a ocorrência de um choque frontal entre elas, as esferas movem-se separadamente e a energia dissipada na colisão vale 162 J. Os módulos das velocidades de A e de B, após a colisão, em m/s, valem, respectivamente,

a) 8 e 6   b) 2 e 7   c) 1 e 8   d) 1 e 10

2. (AFA – 2018)

Um corpo M de dimensões desprezíveis e massa 10 kg movimentando-se em uma dimensão, inicialmente com velocidade $\vec{V}$, vai sucessivamente colidindo inelasticamente com N partículas m, todas de mesma massa 1 kg, e com velocidades de módulo $v = 20\, m/s$, que também se movimentam em uma dimensão de acordo com a Figura 1, a seguir.

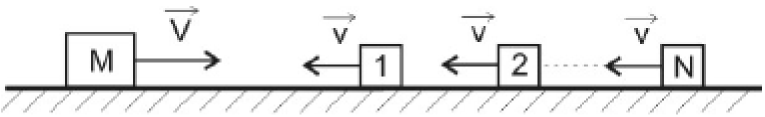


Figura 1

O gráfico que representa a velocidade final do conjunto V_f após cada colisão em função do número de partículas N é apresentado na Figura 2, a seguir.

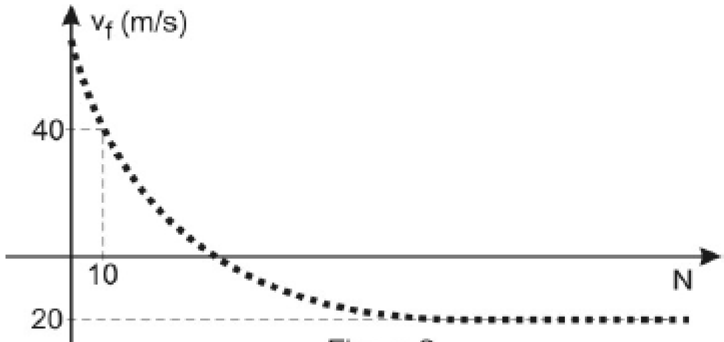


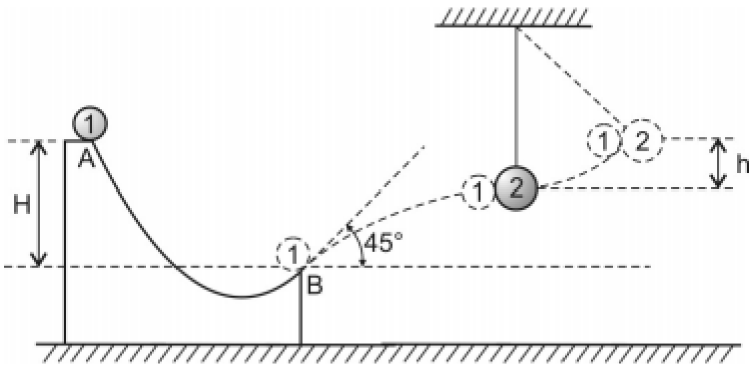
Figura 2

Desconsiderando as forças de atrito e a resistência do ar sobre o corpo e as partículas, a colisão de ordem N_0 na qual a velocidade do corpo resultante (corpo $M + N_0$ partículas m) se anula, é,

$a)$ 25 $b)$ 50 $c)$ 100 $d)$ 200

3. (AFA – 2019)

A montagem da figura a seguir ilustra a descida de uma partícula 1 ao longo de um trilho curvilíneo. Partindo do repouso em A, a partícula chega ao ponto B, que está a uma distância vertical H abaixo do ponto A, de onde, então, é lançada obliquamente, com um ângulo de 45^0 com a horizontal.

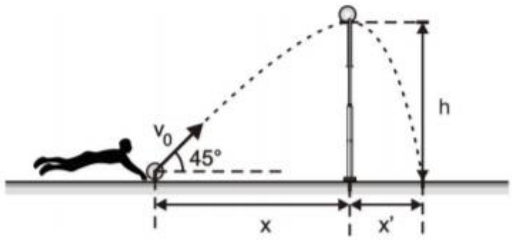


A partícula, agora, descreve uma trajetória parabólica e, ao atingir seu ponto de altura máxima, nessa trajetória, ela se acopla a uma partícula 2, sofrendo, portanto, uma colisão inelástica. Essa segunda partícula possui o dobro de massa da primeira, está em repouso antes da colisão e está presa ao teto por um fio ideal, de comprimento maior que H, constituindo, assim, um pêndulo. Considerando que apenas na colisão atuaram forças dissipativas, e que o campo gravitacional local é constante. O sistema formado pelas partículas 1 e 2 atinge uma altura máxima h igual a

a) $\frac{H}{3}$ b) $\frac{H}{9}$ c) $\frac{H}{16}$ d) $\frac{H}{18}$

4. (AFA – 2021)

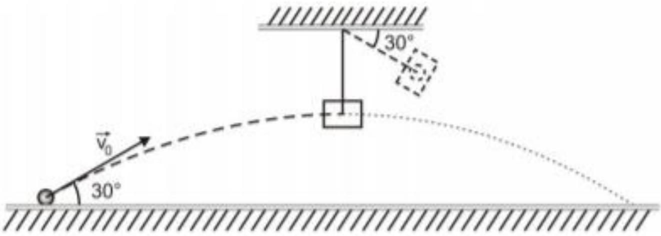
Numa partida de vôlei, certo atleta dá um mergulho na quadra, a uma distância x = 2,5 m da rede, defendendo um ataque adversário, conforme figura a seguir. Após essa defesa, considere que a bola é lançada de uma altura desprezível em relação ao chão, de forma que sua velocidade faz um ângulo de 45º com a direção horizontal. Ao longo de sua trajetória, essa bola toca a fita da rede caindo, posteriormente, do outro lado da quadra. Imediatamente antes e imediatamente após tocar a fita, a velocidade da bola tem direção horizontal. A distância x’, onde a bola cai na quadra, é igual à metade da altura h da fita. Despreze a resistência do ar e considere a bola uma partícula de massa 200 g, cujo movimento se dá no plano da figura. O módulo do impulso, aplicado pela fita sobre a bola, em N·s, vale



a) 0,50 b) 0,75 c) 1,00 d) 1,25

5. (AFA – 2021)

Uma partícula de massa M é lançada obliquamente com sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ fazendo um ângulo de 30º com a direção horizontal, conforme indica figura a seguir. Ao atingir a altura máxima de sua trajetória parabólica, essa partícula colide inelasticamente com um bloco de massa 5M. Esse bloco, de dimensões desprezíveis, está preso ao teto por um fio ideal, de comprimento 1,2 m, formando um pêndulo balístico. Inicialmente o fio do pêndulo está na vertical. Após a colisão, o pêndulo atinge uma altura máxima, na qual o fio tem uma inclinação de 30º em relação à direção horizontal. Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade inicial da partícula, v_0, em m/s, é igual a



a) 5,0 b) 10 c) 15 d) 24

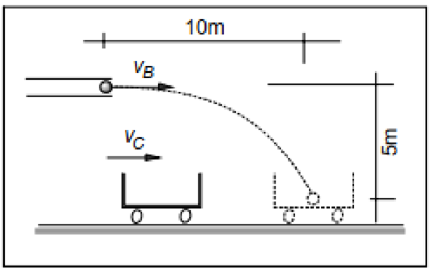
6. (2ª fase OBF – 2006)

Uma bola de chumbo de massa m_B igual a $5\ kg$ é lançada com uma velocidade v_B que faz com que ela caia e fique imobilizada dentro de um carrinho, conforme mostrado no desenho. O carrinho tem massa m_c igual a $10\ kg$ e se move com velocidade constante $v_c = 5\ m/s$.

De posse desses dados:

a) calcule o valor da velocidade v_B com que a bola colide com o carrinho;

b) calcule a velocidade v com que o carrinho se movimentará após ter recebido a bola de chumbo.



7. (2ª fase OBF – 2009)

Uma esfera de massa $m = 4kg$ presa a uma haste de massa desprezível atinge, numa colisào perfeitamente elástica, um bloco inicialmente em repouso, de massa $m = 6kg$. A haste encontra-se inicialmente na posição horizontal e possui um comprimento igual a $45\ cm$. com mostrado na figura 3. Logo após a colisão, o bloco desliza sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}4$, percorrendo uma distância de $50\ cm$. Depois que o bloco passa pela superfície com atrito, ele passa a deslizar sobre uma superfície de coeficiente de atrito cinético desprezível como mostra a figura abaixo. Calcule a altura máxima atingida pelo bloco quando este entra na elevação da pista (á direita).

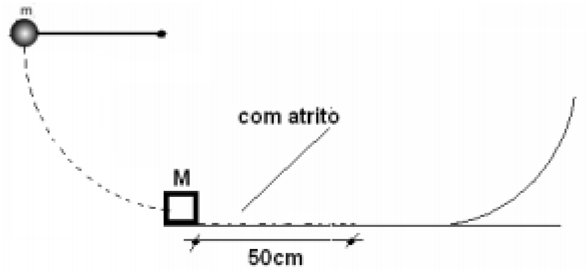


Fig. 3

8. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 5 representa duas partículas de massas $m_1 = 4\ kg$ e $m_2 = 6\ kg$ movendo-se em direções opostas, sobre uma superfície plana sem atrito. Elas têm velocidades constantes, cujos módulos são $v_{1i} = 20\ m/s$ e $v_{2i} = 10\ m/s$ e colidem. A colisão é frontal e perfeitamente elástica. Calcule as velocidades finais das partículas.

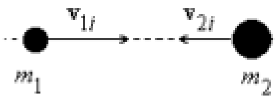
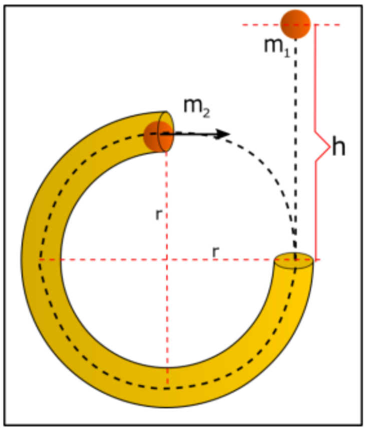


Fig. 5

9. (2ª fase OBF – 2017)

Uma esfera de massa m_1 é abandonada de uma altura h, conforme ilustra figura. A esfera m_1 entra em um tubo circular e percorrendo o trajeto do tubo, até colidir elasticamente com outra esfera de massa m_2 em repouso.

Desprezando todos os atritos bem como as dimensões das esferas, pede-se

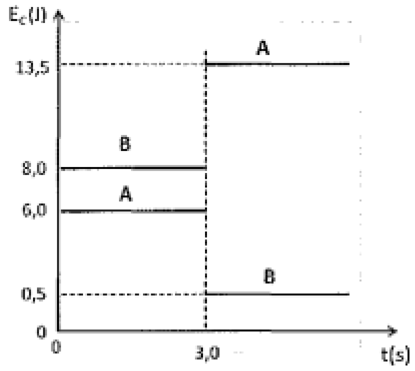


a) justificar os princípios físicos das leis da conservação presentes nesta situação

b) determinar o valor de h tal que na colisão, a massa m_1 entre em repouso e a massa m_2 atinja o outro extremo do tubo.

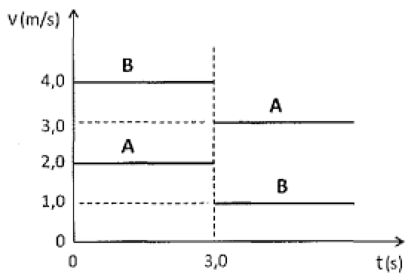
10. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.

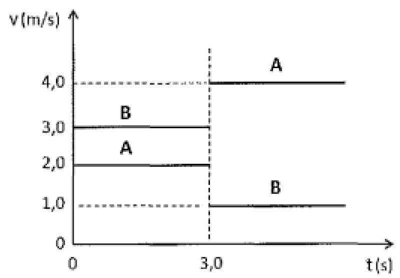


A figura acima mostra o gráfico das energias cinéticas de dois carrinhos, A e B respectivamente, que deslizam sem atrito ao longo de um trilho horizontal retilíneo. No instante $t = 3$s ocorre uma colisão entre os carrinhos. Sendo assim, assinale a opção que pode representar um gráfico para as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão.

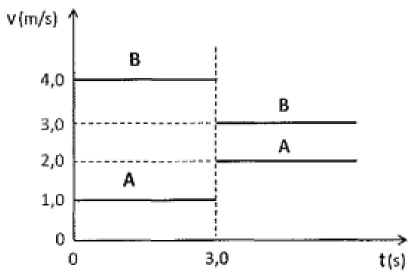
a)



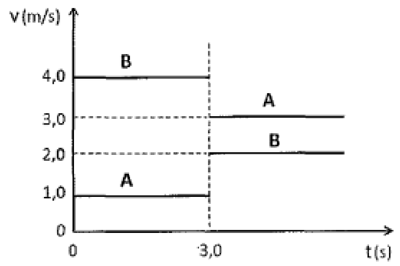
b)



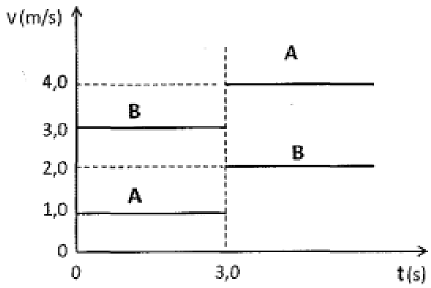
c)



d)

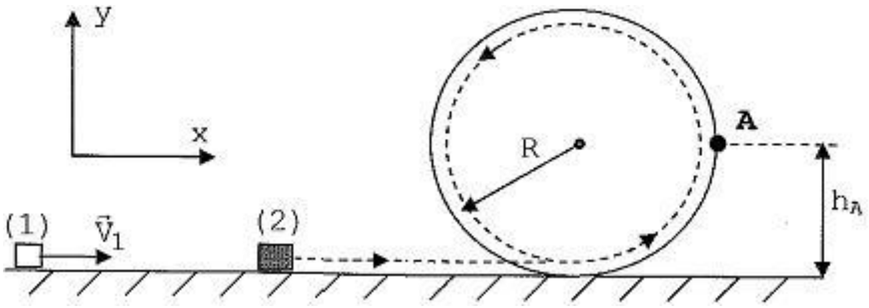


e)



11. (EN – 2011)

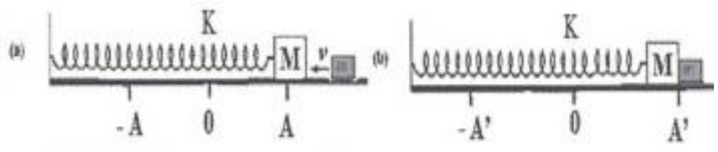
Uma pista é composta por um trecho retilíneo longo horizontal seguido do trecho circular vertical de raio R (conforme a figura abaixo). O carrinho (1) (partícula), de massa $m_1 = 1{,}0\ \text{kg}$ e velocidade $\vec{v_1} = 5{,}0.\hat{\imath}\ (\text{m/ s})$, colide com o carrinho (2) (partícula), de massa $m_2 = 2{,}0\text{kg}$, em repouso no trecho retilíneo. Despreze os atritos. O coeficiente de restituição do choque vale 0,80. Após a colisão, o carrinho (2) sobe o trecho circular vertical e, num certo instante, passa pela primeira vez na posição A, de altura $h_a = R$, com velocidade tal que o módulo da força normal da pista sobre o carrinho é igual ao módulo do seu peso. Nesse instante, o módulo da velocidade (em m/ s) do carrinho (2) em relação ao carrinho (1) é



a) 1,0 b) 1,2 c) 2,5 d) 2,0 e) 3,0

12. (EFOMM – 2019)

Na figura (a) é apresentada uma mola de constante K, que tem presa em sua extremidade um bloco de massa M. Esse sistema oscila em uma superfície lisa sem atrito com amplitude A, e a mola se encontra relaxada no ponto 0. Em um certo instante, quando a massa M se encontra na posição A, um bloco de massa m e velocidade v se choca com ela, permanecendo grudadas (figura (b)). Determine a nova amplitude de oscilação A’ do sistema massa-mola.

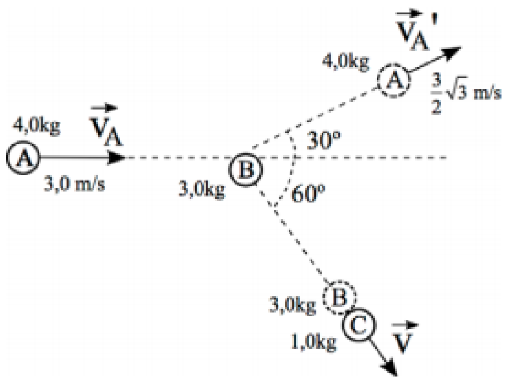


a) $A' = \sqrt{\frac{m^2v^2}{(m+M)K} + A^2}$ b) $A' = \sqrt{\frac{mv^2}{K} + A^2}$ c) $A' = \sqrt{\frac{(M+m)v^2}{K} + A^2}$

d) $A' = \sqrt{\frac{(M+m)}{K}}v$ e) $A' = A$

13. (EFOMM – 2013 - ADAPTADA)

A bola A (mA = 4,0 kg) se move em uma superfície plana e horizontal com velocidade de módulo 3,0 m/s, estando as bolas B (mB = 3,0 kg) e C (mC = 1,0 kg) inicialmente em repouso. Após colidir com a bola B, a bola A sofre um desvio de 30o em sua trajetória, conforme figura abaixo. Já a bola B sofre nova colisão, agora frontal, com a bola C, ambas prosseguindo juntas com velocidade de módulo v. Considerando a superfície sem atrito, a velocidade v, em m/s, vale



a) 1,5 b) 2,5 c) 3,5 d) 4,5 e) 5,5

14. (EFOMM – 2010)

Observe a figura a seguir.

Dois blocos deslizam sobre uma superfície horizontal com atrito desprezível. Inicialmente, o bloco de massa $m_1 = 1{,}0kg$ tem velocidade $v_1 = 4{,}0m/s$ e o bloco de massa $m_2 = 2{,}0kg$ tem velocidade $v_2 = 1{,}0m/s$, conforme indica a figura acima. Após um curto intervalo de tempo, os dois blocos colidirão, dissipando a máxima energia mecânica possível, que é, em joules,

a) $\frac{29}{3}$ b) $\frac{25}{3}$ c) $\frac{21}{3}$ d) $\frac{17}{3}$ e) $\frac{14}{3}$

15. (ITA – 1991)

Segundo um observador acoplado a um referencial inercial duas partículas de massa m_A e m_B possuem velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente. Qual a quantidade de movimento $\vec{p}_A$ que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula A?

a) $\vec{p}_A = m_A\vec{v}_A$

b) $\vec{p}_A = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

c) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right)\vec{v}_A$

d) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right)(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

e) Nenhuma das anteriores.

16. (ITA – 1992)

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1° segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

a) $\sqrt{2h/g} \cdot (M+m) \cdot v$

b) $\sqrt{2h/g} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

c) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

d) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{M+m}{M} \cdot v$

e) $(1 - \sqrt{2h/g}) \cdot (M+m) \cdot v$

17. (ITA – 1996)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de $100\ kg$ por segundo, a uma velocidade de $600\ m/s$ em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a $60\ kN$.

c) se a massa do avião é de $7 \cdot 10^3\ kg$ o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de $0{,}2$.

d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.

e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

18. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm. b) 8.2 cm. c) 8.8 cm. d) 9.2 cm. e) 9.6 cm.

19. (ITA – 1998)

Uma massa m em repouso drvide-se em duas partes, uma com massa $2m/3$ e outra com massa $m/3$. Após a divisão, a parte com massa $m/3$ move-se para a direita com uma velocidade de módulo v_1. Se a massa m estivesse se movendo para a esquerda com velocidade de módulo v antes da divisão, a velocidade da parte $m/3$ depois da divisão seria:

a) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a esquerda. b) $(v_1 - v)$ para a esquerda.

c) $(v_1 - v)$ para a direita. d) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a direita.

e) $(v_1 + v)$ para a direita.

20. (ITA – 2004)

Atualmente, vários laboratórios. utilizando várias feixes de laser, são capazes de resfriar gases a temperaturas muito próximas do zero absoluto, obtendo moléculas e átomos ultrafrios. Considere três átomos ultrafrios de massa M, que se aproximam com velocidades desprezíveis. Da colisão tripla resultante, observada de um referencial situado no centro de massa do sistema, forma-se uma molécula diatômica com liberação de certa quantidade de energia B. Obtenha a velocidade final do átomo remanescente em função de B e M.

21. (ITA – 2005)

Um vagão-caçamba de massa M se desprende da locomotiva e corre sobre trilhos horizontais com velocidade constante $v = 72{,}0\ km/h$ (portanto, sem resistência de qualquer espécie ao movimento). Em dado instante, a caçamba é preenchida com uma carga de grãos de massa igual a $4M$, despejada verticalmente a partir do repouso de uma altura de $6{,}00m$ (veja figura).

Supondo que toda a energia liberada no processo seja integralmente convertida em calor para o aquecimento exclusivo dos grãos, então, a quantidade de calor por unidade de massa recebido pelos grãos é

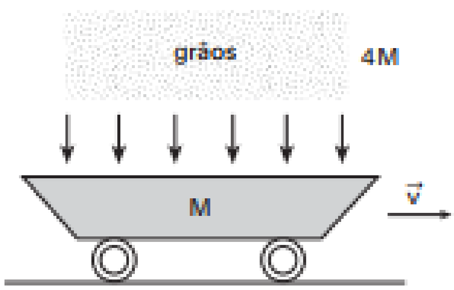
a) $15\ J/kg$.

b) $80\ J/kg$.

c) $100\ J/kg$.

d) $463\ J/kg$.

e) $578\ J/kg$.



22. (ITA – 2005)

Dois corpos esféricos de massa M e $5M$ e raios R e $2R$, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitadonal mútua, e que seja de $12R$ a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de

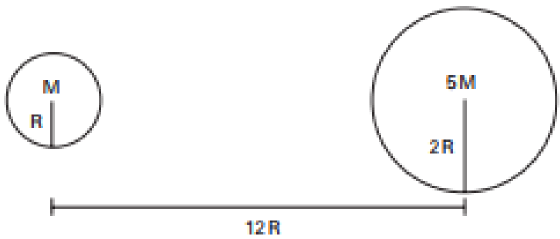
a) $1,5R$.

b) $2,5R$.

c) $4,5R$.

d) $7,5R$.

e) $10,0R$.



23. (ITA – 2006)

Animado com velocidade inicial v_0, o objeto X, de massa m, desliza sobre um piso horizontal ao longo de uma distância d, ao fim da qual colide com o objeto Y, de mesma massa, que se encontra inicialmente parado na beira de uma escada de altura h.

Com o choque, o objeto Y atinge o solo no ponto P. Chamando μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o objeto X e o piso, g a aceleração da gravidade e desprezando a resistência do ar, assinale a expressão que dá a distância d.

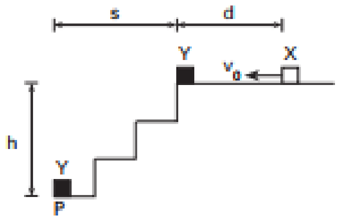
a) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

b) $d = \frac{-1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

c) $d = \frac{-v_0}{2\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

d) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(2v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

e) $d = \frac{-v_0}{\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$



24. (ITA – 2007)

Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada contra um bloco de massa M, que inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h, conforme mostra a figura.

A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no solo. Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência de qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o solo vale

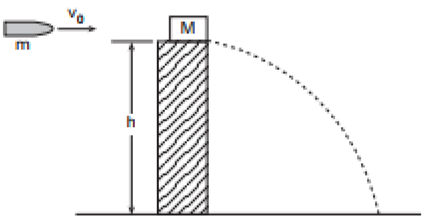
a) $\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

b) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

c) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{M}}$

d) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

e) $\sqrt{\frac{mv_0^2}{m+M} + 2gh}$



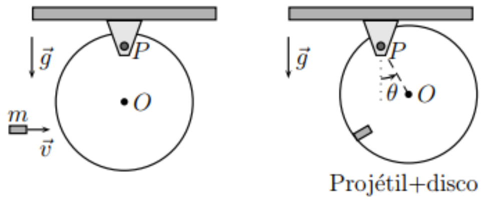
25. (ITA – 2009)

Considere uma bola de basquete de $600\ g$ a $5\ m$ de altura e, logo acima dela, uma de tênis de $60\ g$. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

a) 5 m   b) 10 m   c) 15 m   d) 25 m   e) 35 m

26. (ITA – 2014)

Um disco rígido de massa M e centro O pode oscilar sem atrito num plano vertical em torno de uma articulação P. O disco é atingido por um projétil de massa $m \ll M$ que se move horizontalmente com velocidade v no plano do disco. Após a colisão, o projétil se incrusta no disco e o conjunto gira em torno de P até o ângulo θ. Nestas condições, afirmam-se:



I. A quantidade de movimento do conjunto $projétil + disco$ se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

II. A energia cinética do conjunto $projétil + disco$ se mantem a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

III. A energia mecânica do conjunto $projétil + disco$ imediatamente após a colisão é igual à da posição de ângulo $\theta/2$.

É (são) verdadeira(s) apenas a(s) assertiva(s)

a) I.   b) I e II.   c) I e III.   d) II e III.   e) III.

27. (ITA – 2015)

Uma chapa metálica homogênea quadrada de $100\ cm^2$ de área, situada no plano xy de um sistema de referência, com um dos lados no eixo x, tem o vértice inferior esquerdo na origem. Dela, retira-se uma porção circular de $5{,}00\ cm$ de diâmetro com o centro posicionado em $x = 2{,}50\ cm$ e $y = 5{,}00\ cm$. Determine as coordenadas do centro de massa da chapa restante.

a) $(x_C, y_C) = (6{,}51, 5{,}00)\ cm$ b) $(x_C, y_C) = (5{,}61, 5{,}00)\ cm$

c) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 5{,}61)\ cm$ d) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 6{,}51)\ cm$

e) $(x_C, y_C) = (5{,}00,\ 5{,}00)\ cm$

28. (ITA – 2015)

Nêutrons podem atravessar uma fina camada de chumbo, mas têm sua energia cinética absorvida com alta eficiência na água ou em materiais com elevada concentração de hidrogênio. Explique este efeito considerando um nêutron de massa m e velocidade v_0 que efetua uma colisão elástica e central com um átomo qualquer de massa M inicialmente em repouso.

29. (ITA – 2016)

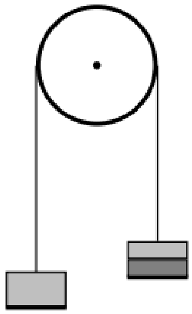
Dois garotos com patins de rodinhas idênticos encontram-se numa superfície horizontal com atrito e, graças a uma interação, conseguem obter a razão entre seus respectivos pesos valendo-se apenas de uma fita métrica. Como é resolvida essa questão e quais os conceitos físicos envolvidos?

30. (ITA – 2016)

Na ausência da gravidade e no vácuo, encontram-se três esferas condutoras alinhadas, A, B e C, de mesmo raio e de massas respectivamente iguais a m, m e $2m$. Inicialmente B e C encontram-se descarregadas e em repouso, e a esfera A, com carga elétrica Q, é lançaria contra a intermediária B com uma certa velocidade v. Supondo que todos movimentos ocorram ao longo de uma mesma reta, que as massas sejam grandes o suficiente para se desprezar as forças coulombianas e ainda que todas as colisões sejam elásticas, determine a carga elétrica de cada esfera após todas as colisões possíveis.

31. (ITA – 2017)

Mediante um fio inextensível e de peso desprezível, a polia da figura suporta à esquerda uma massa de $60\ kg$, e à direita, uma massa de $55\ kg$ tendo em cima outra de $5\ kg$, de formato anelar, estando este conjunto a $1\ m$ acima da massa da esquerda. Num dado instante, por um dispositivo interno, a massa de $5\ kg$ é lançada para cima com velocidade $v = 10\ m/s$, após o que, cai e se choca inelasticamente com a de $55\ kg$. Determine a altura entre a posição do centro de massa de todo o sistema antes do lançamento e a deste centro logo após o choque.



32. (ITA – 2018)

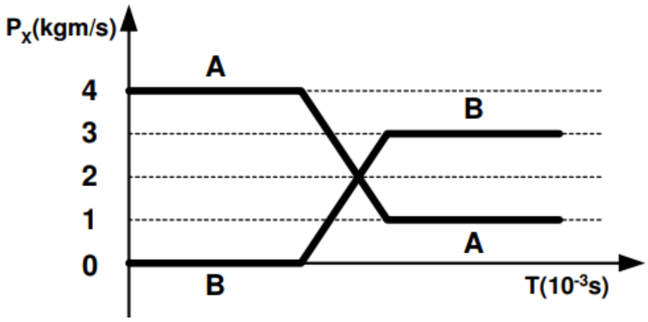
Num plano horizontal liso, presas cada qual a uma corda de massa desprezível, as massas m_1 e m_2 giram em órbitas circulares de mesma frequência angular uniforme, respectivamente com raios r_1 e $r_2 = r_1/2$. Em certo instante essas massas colidem-se frontal e elasticamente e cada qual volta a perfazer jum movimento circular uniforme. Sendo iguais os módulos das velocidades de m_1 e m_2 após o choque, assinale a relação m_2/m_1.

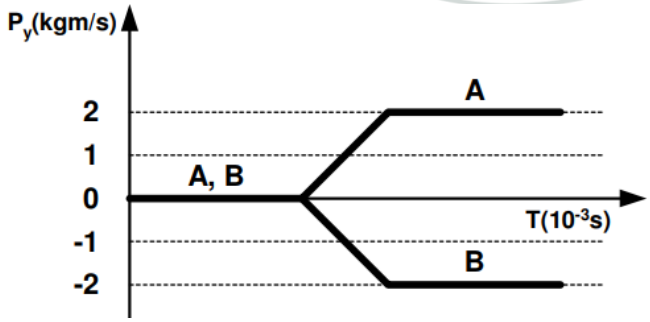
a) 1 b) 3/2 c) 4/3 d) 5/4 e) 7/5

33. (IME – 2005)

Um canhão de massa $M = 200\ kg$ em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e carregado com um projétil de massa $m = 1\ kg$, permanecendo ambos neste estado até o projétil ser disparado na direção horizontal. Sabe-se que este canhão pode ser considerado tuna maquina térmica com 20% o de rendimento, porcentagem essa utilizada no movimento do projétil, e que o calor fornecido a esta máquina térmica é igual a $100.000\ J$. Suponha que a velocidade do projétil após o disparo é constante no interior do canhão e que o atrito e a resistência do ar podem ser desprezados. Determine a velocidade de recuo do canhão após o disparo.

34. (IME – 2009)





Duas partículas A e B de massas $m_A = 0{,}1\ kg$ e $m_B = 0{,}2\ kg$ sofrem colisão não frontal. As componentes x e y do vetor quantidade de movimento em função do tempo são apresentadas nos gráficos acima.

Considere as seguintes afirmativas:

I. A energia cinética total é conservada.

II. A quantidade de movimento total é conservada.

III. O impulso correspondente à partícula B é $2i + 4j$.

IV. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

As afirmativas corretas são apenas:

a) I e II b) I e III c) II e III d) II e IV e) III e IV

35. (IME – 2009)

Dois corpos A e B encontram-se sobre um plano horizontal sem atrito. Um observador inercial O está na origem do eixo x. Os corpos A e B sofrem colisão frontal perfeitamente elástica, sendo que, inicialmente, o corpo A tem velocidade $v_A = 2\ m/s$ (na direção x com sentido positivo) e o coipo B está parado na posição $x = 2\ m$. Considere um outro observador inercial O' que no instante da colisão tem a sua posição coincidente com a do observador O. Se a velocidade relativa de O' em relação a O é $v_{0'} = 2\ m/s$ (na direção x com sentido positivo), determine em relação a O

a) as velocidades dos corpos A e B após a colisào;

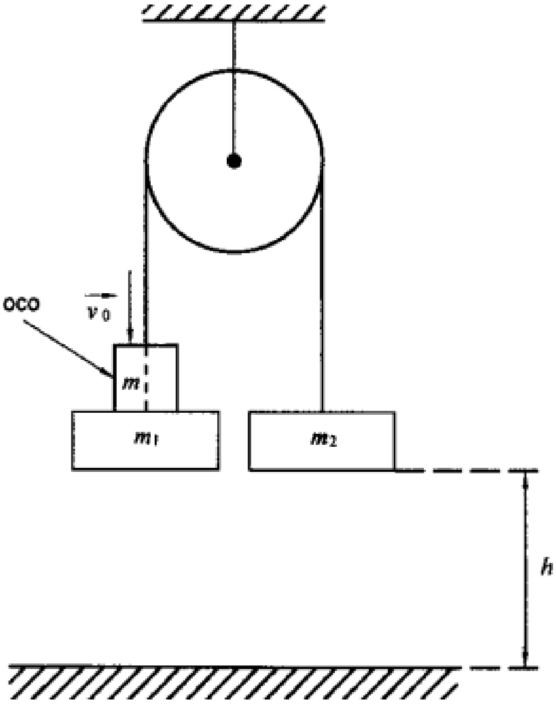
b) a posição do corpo A dois segundos após a colisào.

Dados:

• massa de A $=\ 100\ g$;

• massa de B $=\ 200\ g$.

36. (IME – 2011)



A figura acima apresenta duas massas $m_1 = 5\,kg$ e $m_2 = 20\,kg$ presas por um fio que passa por uma roldana. As massas são abandonadas a partir do repouso, ambas a uma altura h do solo, no exato instante em que um cilindro oco de massa $m = 5\,kg$ atinge m_1 com velocidade $v = 36\,m/s$, ficando ambas coladas. Determine a altura h, em metros, para que m_1 chegue ao solo com velocidade nula.

Dado:

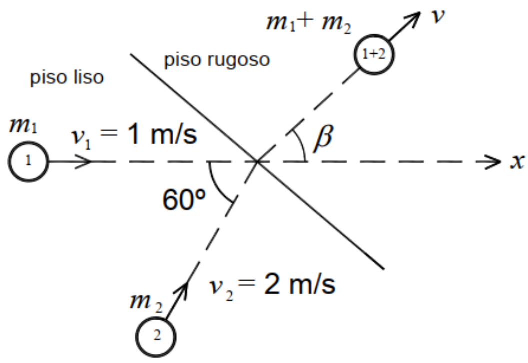
• Aceleração da gravidade: $g = 10\,m/s^2$

Observação:

• A roldana e o fio são ideais.

a) 5,4 b) 2,7 c) 3,6 d) 10,8 e) 1,8

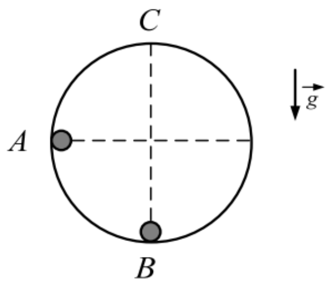
37. (IME – 2012)



Duas bolas, 1 e 2. movem-se em um piso perfeitamente liso. A bola 1, de massa $m_1 = 2\,kg$, move-se no sentido da esquerda para direita com velocidade $v_1 = 1\,m/s$. A bola 2. de massa $m_2 = 1\,kg$, move-se com ângulo de 60° com o eixo x, com velocidade $v_2 = 2\,m/s$. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre as bolas e o piso rugoso é $0{,}10 \sec^2 \beta$ e a aceleração gravitacional é $10\,m/s^2$. Ao colidirem, permanecem unidas após o choque e movimentam-se em um outro piso rugoso, conforme mostra a figura. A distância percorrida, em metros, pelo conjunto bola 1 e bola 2 até parar é igual a

a) 0,2 b) 0,5 c) 0,7 d) 0,9 e) 1,2

38. (IME – 2015)



Um corpo puntiforme de massa m_A parte de ponto A, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto B. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto C , ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto A, em m/s, é

Dados:

- raio da rampa circular: $2m$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- massa a/m: $1\ kg$; e
- massa m_A: $1\ kg$.

a) 10 b) 20 c) $4\sqrt{15}$ d) $10\sqrt{5}$ e) $8\sqrt{5}$

39. (IME – 2016)

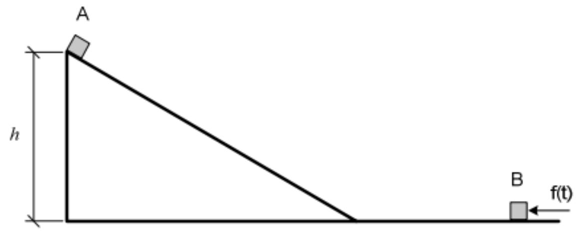


Figura 1

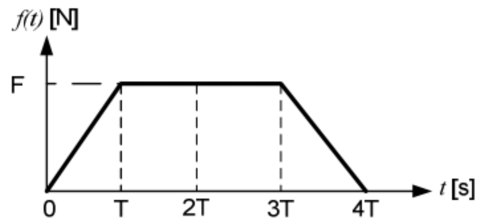


Figura 2

Na Figura 1, o corpo A, constituído de gelo. possui massa m e é solto em uma rampa a uma altura h. Enquanto desliza pela rampa, ele derrete e alcança o plano horizontal com metade da energia mecânica e metade da massa iniciais. Após atingir o plano horizontal, o corpo A se choca, no instante $4T$, com o corpo B, de massa m, que foi retirado do repouso através da aplicação da força $f(t)$, cujo gráfico é exibido na Figura 2.

Para que os corpos parem no momento do choque, F deve ser dado por

Dado:

- aceleração da gravidade: g.

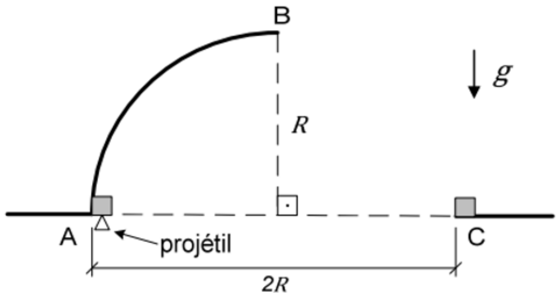
Observações:

- o choque entre os corpos é perfeitamente inelástico:

- o corpo não perde massa ao longo de seu movimento no plano horizontal.

a) $\frac{m\sqrt{2gh}}{8T}$ b) $\frac{m\sqrt{2gh}}{6T}$ c) $\frac{m\sqrt{2gh}}{4T}$ d) $\frac{m\sqrt{2gh}}{3T}$ e) $\frac{m\sqrt{2gh}}{2T}$

40. (IME – 2019)



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R, é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

- Massa do projétil: m;
- Massa do corpo: $9m$; e
- Aceleração da gravidade: g.

a) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$ b) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$ c) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$ d) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$ e) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

7. Gabarito sem comentários nível 2

1) D
2) B
3) D
4) B
5) D
6) a) $10\sqrt{2}\ m/s$ b) 6,67 m/s
7) 0,088 m
8) $v_{2f} = 14\ m/s \quad v_{1f} = -16\ m/s$
9) Ver comentários
10) A
11) D
12) B

13) A

14) B

15) D

16) C

17) B

18) D

19) C

20) $\sqrt{\frac{4B}{3M}}$

21) C

22) D

23) A

24) A

25) E

26) E

27) B

28) $E_C = \frac{m}{2}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 v_0^2$

29) Ver comentários

30) $Q'_A = \frac{3Q}{8}, Q'_B = \frac{3Q}{8}, Q'_C = \frac{Q}{4}$

31) $\Delta y_{cm} = 0$

32) E

33) 1 m/s

34) D

35) a) $-\frac{8}{3}\ m/s$ e $-\frac{2}{3}\ m/s$ b) $-\frac{10}{3}\ m$

36) A

37) B

38) S/A

39) B

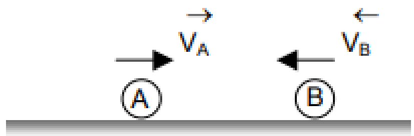
40) A

ESCLARECENDO!

8. Lista de questões nível 2 comentada

1. (AFA – 2000)

Duas esferas A e B, de massas respectivamente iguais a 4 kg e 2 kg, percorrem a mesma trajetória retilínea, apoiadas num plano horizontal, com velocidades de 10 m/s e 8 m/s, respectivamente, conforme a figura. Após a ocorrência de um choque frontal entre elas, as esferas movem-se separadamente e a energia dissipada na colisão vale 162 J. Os módulos das velocidades de A e de B, após a colisão, em m/s, valem, respectivamente,



a) 8 e 6 b) 2 e 7 c) 1 e 8 d) 1 e 10

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$4 \cdot 10 - 2 \cdot 8 = 4v'_A + 2v'_B$$

$$v'_B = 12 - 2v'_A$$

Por conservação de energia:

$$\frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} - \frac{m_A v_A'^2}{2} - \frac{m_B v_B'^2}{2} = 162$$

$$4 \cdot \frac{10^2}{2} + 2 \cdot \frac{8^2}{2} - 4 \cdot \frac{v_A'^2}{2} - 2 \cdot \frac{(12 - 2v'_A)^2}{2} = 162$$

$$200 + 64 - 2v_A'^2 - 144 + 48v'_A - 4v_A'^2 = 162$$

$$6v_A'^2 - 48v'_A + 42 = 0$$

$${v'_A}^2 - 8v'_A - 7 = 0 \rightarrow v'_A = 1 \; ou \; 7m/s$$

Logo:

$$v'_B = 10 \; ou - 2m/s$$

Ambas são possíveis

Gabarito: D

2. (AFA – 2018)

Um corpo M de dimensões desprezíveis e massa 10 kg movimentando-se em uma dimensão, inicialmente com velocidade $\vec{V}$, vai sucessivamente colidindo inelasticamente com N partículas m, todas de mesma massa 1 kg, e com velocidades de módulo $v = 20\, m/s$, que também se movimentam em uma dimensão de acordo com a Figura 1, a seguir.

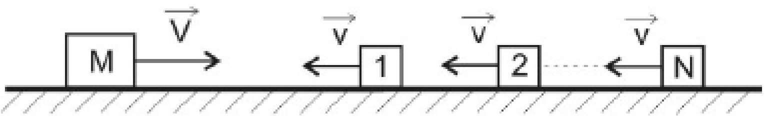


Figura 1

O gráfico que representa a velocidade final do conjunto V_f após cada colisão em função do número de partículas N é apresentado na Figura 2, a seguir.

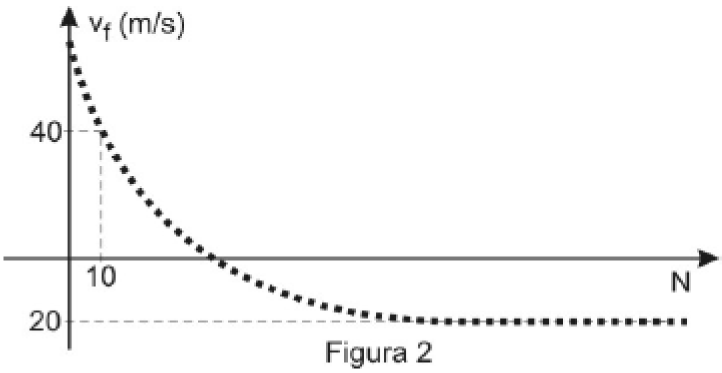


Figura 2

Desconsiderando as forças de atrito e a resistência do ar sobre o corpo e as partículas, a colisão de ordem N_0 na qual a velocidade do corpo resultante (corpo $M + N_0$ partículas m) se anula, é,

$a)$ 25 $b)$ 50 $c)$ 100 $d)$ 200

Comentários:

Pela conservação de momento linear/quantidade de movimento:

$$MV - N_0 mv = 0$$

$$10V = N_0 .1.20$$

$$N_0 = \frac{V}{2}$$

Além disso, pelo gráfico, quando N=10, temos $v_f = 40m/s$. Pela conservação de momento linear:

$$MV - Nmv = (M + Nm)v_f$$

$$10V - 10.1.20 = (10 + 10.1).40$$

$$10V - 200 = 800$$

$$V = 100m/s$$

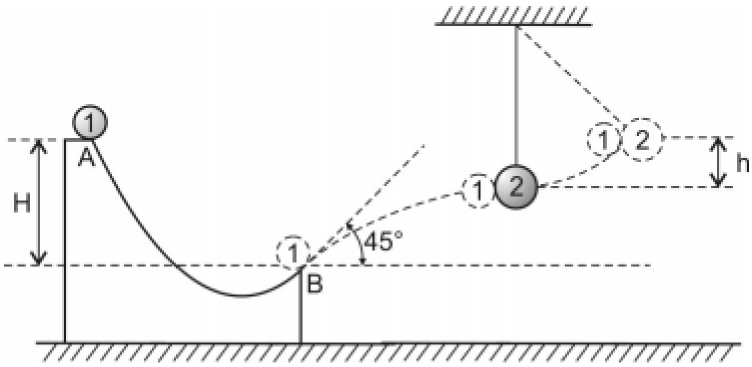
Logo

$$N_0 = 50$$

Gabarito: B

3. (AFA – 2019)

A montagem da figura a seguir ilustra a descida de uma partícula 1 ao longo de um trilho curvilíneo. Partindo do repouso em A, a partícula chega ao ponto B, que está a uma distância vertical H abaixo do ponto A, de onde, então, é lançada obliquamente, com um ângulo de 45^0 com a horizontal.



A partícula, agora, descreve uma trajetória parabólica e, ao atingir seu ponto de altura máxima, nessa trajetória, ela se acopla a uma partícula 2, sofrendo, portanto, uma colisão inelástica. Essa segunda partícula possui o dobro de massa da primeira, está em repouso antes da colisão e está presa ao teto por um fio ideal, de comprimento maior que H, constituindo, assim, um pêndulo. Considerando que apenas na colisão atuaram forças dissipativas, e que o campo gravitacional local é constante. O sistema formado pelas partículas 1 e 2 atinge uma altura máxima h igual a

a) $\frac{H}{3}$ b) $\frac{H}{9}$ c) $\frac{H}{16}$ d) $\frac{H}{18}$

Comentários:

Pela conservação de energia mecânica temos que, em B:

$$mgH = \frac{mv_b^2}{2}$$

$$v_b = \sqrt{2\ g\ H}$$

Como o ângulo é de 45 graus:

$$v_{bx} = v_{by} = \sqrt{gH}$$

Na altura máxima da partícula, temos que $v_y = 0$. Além disso $v_x = \sqrt{gH}$.

A velocidade do conjunto pós colisão pode ser calculado pela conversação da quantidade de movimento/momento linear:

$$m * \sqrt{gH} = 3m * v$$

$$v = \frac{\sqrt{gH}}{3}$$

A altura máxima pode ser calculada pela conservação de energia mecânica:

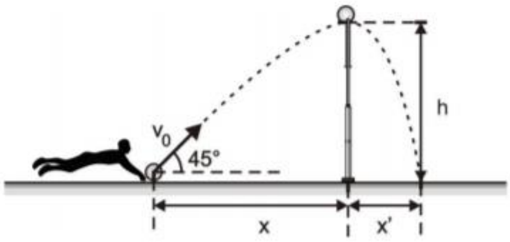
$$mgh = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgH}{18}$$

$$h = \frac{H}{18}$$

Gabarito: D

4. (AFA – 2021)

Numa partida de vôlei, certo atleta dá um mergulho na quadra, a uma distância x = 2,5 m da rede, defendendo um ataque adversário, conforme figura a seguir. Após essa defesa, considere que a bola é lançada de uma altura desprezível em relação ao chão, de forma que sua velocidade faz um ângulo de 45º com a direção horizontal. Ao longo de sua trajetória, essa bola toca a fita da rede caindo, posteriormente, do outro lado da quadra. Imediatamente antes e imediatamente após tocar a fita, a velocidade da bola tem direção horizontal. A distância x', onde a bola cai na quadra, é igual à metade da altura h da fita. Despreze a resistência do ar e considere a bola uma partícula de massa 200 g, cujo movimento se dá no plano da figura. O módulo do impulso, aplicado pela fita sobre a bola, em N·s, vale



a) 0,50 b) 0,75 c) 1,00 d) 1,25

Comentários:

O tempo de subida e descida vale:

$$t_s = \frac{v_0 \sin 45°}{g}$$

A distância x vale:

$$x = v_0 \cos 45° \, t_s = \frac{v_0^2}{20} = 2{,}5 \to v_0 = \sqrt{50}\, m/s$$

Dessa forma:

$$t_s = \frac{1}{2}\, s$$

A altura h vale:

$$h = \frac{v_0 \sin 45° \, t_s}{2} = \frac{5}{4}\, m$$

A distância x' vale:

$$x' = \frac{H}{2} = \frac{5}{8}\, m$$

A velocidade imediatamente depois de colidir é:

$$x' = v'_{0x} t_s \rightarrow v'_{0x} = \frac{5}{4} m/s$$

A velocidade imediatamente antes da colisão é:

$$v_{0x} = v_0 \cos 45° = 5\ m/s$$

A variação de velocidade é:

$$\Delta v = \frac{15}{4}\ m/s$$

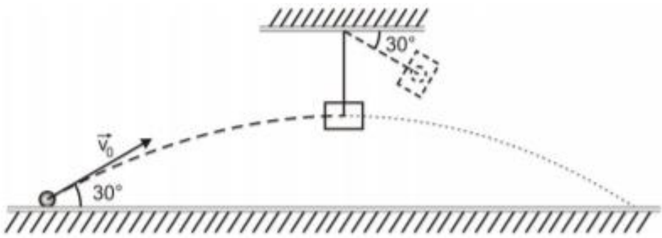
O impulso vale:

$$I = m\Delta v = 0{,}75\ \ N \cdot s$$

Gabarito: B

5. (AFA – 2021)

Uma partícula de massa M é lançada obliquamente com sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ fazendo um ângulo de 30º com a direção horizontal, conforme indica figura a seguir. Ao atingir a altura máxima de sua trajetória parabólica, essa partícula colide inelasticamente com um bloco de massa 5M. Esse bloco, de dimensões desprezíveis, está preso ao teto por um fio ideal, de comprimento 1,2 m, formando um pêndulo balístico. Inicialmente o fio do pêndulo está na vertical. Após a colisão, o pêndulo atinge uma altura máxima, na qual o fio tem uma inclinação de 30º em relação à direção horizontal. Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade inicial da partícula, v_0, em m/s, é igual a



a) 5,0 b) 10 c) 15 d) 24

Comentários:

A velocidade imediatamente antes de colidir é:

$$v_x = v_0 \cos 30°$$

Por conservação da quantidade de movimento:

$$6Mv'_x = Mv_x$$

$$v'_x = \frac{v_0 \cos 30°}{6}$$

Por conservação de energia:

$$\frac{6Mv_x'^2}{2} = 6MgR(1-\sin 30°)$$

$$v_x' = \sqrt{gR}$$

$$v_0 = \frac{6\sqrt{gR}}{\cos 30°} = 24\, m/s$$

Gabarito: D

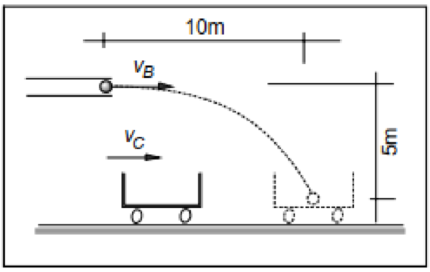
6. (2ª fase OBF – 2006)

Uma bola de chumbo de massa m_B igual a $5\ kg$ é lançada com uma velocidade v_B que faz com que ela caia e fique imobilizada dentro de um carrinho, conforme mostrado no desenho. O carrinho tem massa m_c igual a $10\ kg$ e se move com velocidade constante $v_c = 5\ m/s$.

De posse desses dados:

a) calcule o valor da velocidade v_B com que a bola colide com o carrinho;

b) calcule a velocidade v com que o carrinho se movimentará após ter recebido a bola de chumbo.



Comentários:

a) O que ocorre é um lançamento horizontal. Sabemos que a velocidade em x é constante. E a velocidade em y é dada por:

$$v_y{}^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta S \Rightarrow v_y = 10\, m/s$$

O tempo de queda é dado por:

$$v_y = at \Rightarrow t = 1s$$

A velocidade em x é dada por:

$$S = v_B t \Rightarrow v_B = 10\, m/s$$

b) Assim a velocidade com que a bola colide com o carrinho é de:

$$v^2 = v_B^2 + v_y^2 \Rightarrow v = 10\sqrt{2}\, m/s$$

A quantidade de movimento se conserva no eixo x:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_B v_B + m_C v_C = (m_B + m_C) v_F$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10 + 10 \cdot 5 = 15 \cdot v_F \Rightarrow v_F = \frac{20}{3}\ m/s$$

Gabarito: a) $10\sqrt{2}\ m/s$ b) 6,67 m/s

7. (2ª fase OBF – 2009)

Uma esfera de massa $m = 4kg$ presa a uma haste de massa desprezível atinge, numa colisào perfeitamente elástica, um bloco inicialmente em repouso, de massa $m = 6kg$. A haste encontra-se inicialmente na posição horizontal e possui um comprimento igual a $45\ cm$. com mostrado na figura 3. Logo após a colisão, o bloco desliza sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}4$, percorrendo uma distância de $50\ cm$. Depois que o bloco passa pela superfície com atrito, ele passa a deslizar sobre uma superfície de coeficiente de atrito cinético desprezível como mostra a figura abaixo. Calcule a altura máxima atingida pelo bloco quando este entra na elevação da pista (á direita).

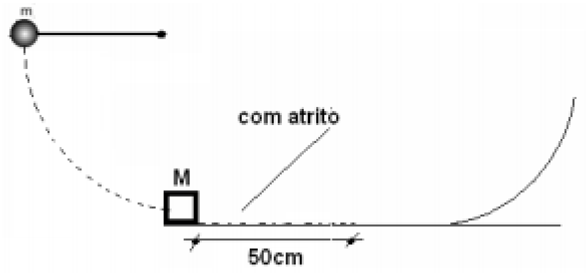


Fig. 3

Comentários:

Pela conservação da energia, encontramos a velocidade com que a esfera atinge o nosso bloco:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \ v = \sqrt{2gh} = \ 3\,{}^{m}/_{s}$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$m \cdot v = -m \cdot u + M \cdot \vartheta$$

Na colisão elástica o coeficiente de restituição $e = 1$:

$$\frac{u + \vartheta}{v} = 1$$

Das equações (iii) e (iv), temos um sistema de duas equações e duas incógnitas cuja solução nos dá:

$$\vartheta \ = \ 2{,}4\ {}^{m}/_{s}$$

A energia da bolinha após passar pela zona de atrito será totalmente convertida em energia potencial gravitacional para que seja atingida assim a altura máxima:

$$\frac{M \cdot \vartheta^2}{2} - \mu M g d \ = \ M g h \ \Rightarrow h \ = \ \left[\frac{\vartheta^2}{2} - \mu g d\right] \cdot \frac{1}{g} = 0{,}088\ m$$

Gabarito: $h = 0,088\ m$

8. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 5 representa duas partículas de massas $m_1 = 4\ kg$ e $m_2 = 6\ kg$ movendo-se em direções opostas, sobre uma superfície plana sem atrito. Elas têm velocidades constantes, cujos módulos são $v_{1i} = 20\ m/s$ e $v_{2i} = 10\ m/s$ e colidem. A colisão é frontal e perfeitamente elástica. Calcule as velocidades finais das partículas.

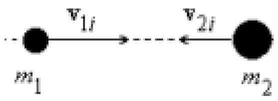


Fig. 5

Comentários:

Vamos assumir por hipótese que as duas partículas vão para a direita da figura após a colisão:

$$m_1 \cdot v_{1i} - m_2 v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 v_{2f} \Rightarrow 4 \cdot v_{1f} + 6 v_{2f} = 20$$

Como a colisão é elástica, temos que o coeficiente de restituição é igual a i.

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} + v_{2i}} \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = 30$$

De “a” e “b” temos um sistema de duas equações e duas incógnitas, resolvendo:

$$v_{2f} = 14\ m/s \text{ e } v_{1f} = -16\ m/s$$

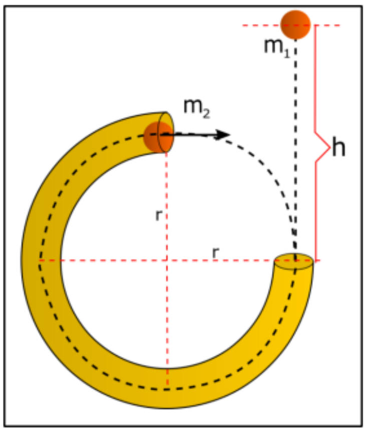
Como assumimos o referencial positivo para a direita, concluímos que a bolinha 2 passa a ir para a direita e a bolinha 1 passa a ir para a esquerda.

Gabarito: $v_{2f} = 14\ m/s \quad v_{1f} = -16\ m/s$

9. (2ª fase OBF – 2017)

Uma esfera de massa m_1 é abandonada de uma altura h, conforme ilustra figura. A esfera m_1 entra em um tubo circular e percorrendo o trajeto do tubo, até colidir elasticamente com outra esfera de massa m_2 em repouso.

Desprezando todos os atritos bem como as dimensões das esferas, pede-se



a) justificar os princípios físicos das leis da conservação presentes nesta situação

b) determinar o valor de h tal que na colisão, a massa m_1 entre em repouso e a massa m_2 atinja o outro extremo do tubo.

Comentários:

a) Devido à ausência de forças externas e pelo fato de não haver forças dissipativas, podemos dizer que nosso sistema é conservativo, isto é, a energia mecânica do sistema se conserva. Além disso, quando m_1 se choca com m_2, o tempo de colisão é muito pequeno de tal forma que podemos conversar a quantidade de movimento na colisão.

b) Desprezando os atritos, todas as forças que agem no corpo 1 antes da colisão são conservativas. Assim, podemos encontrar a velocidade do corpo 1 imediatamente antes da colisão, usando o fato de que a energia se conserva:

$$m_1gh = m_1gr + \frac{m_1v_1^2}{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2g(h-r)}$$

Na colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$m_1v_1 = m_1 \cdot 0 + m_2v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2}$$

Depois da colisão, ocorre um lançamento horizontal. Podemos escrever:

$$r = 0 + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow r = v_2 \cdot t$$

$$2r = g\left(\frac{r}{v_2}\right)^2$$

Substituindo, temos:

$$2{v_2}^2 = rg \Rightarrow 2\left(\frac{m_1v_1}{m_2}\right)^2 = rg$$

$$2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cdot 2(h-r) = r$$

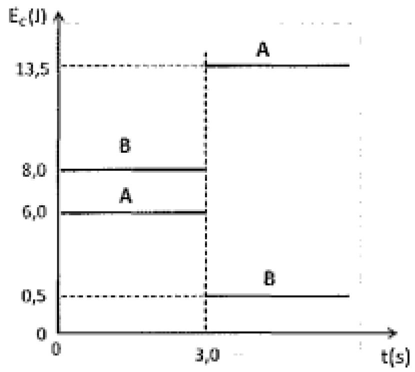
$$h = r\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right]$$

Gabarito: a) vide comentários. b) $h = r\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right]$

---

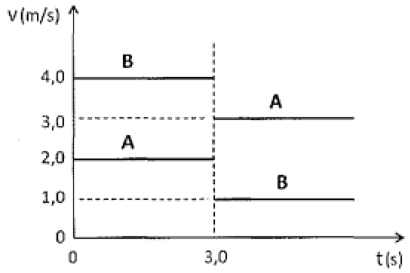
10. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.

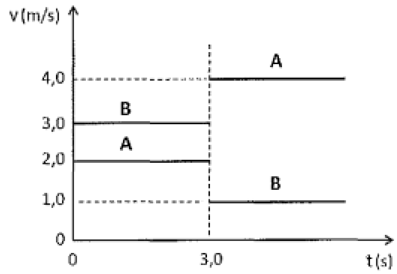


A figura acima mostra o gráfico das energias cinéticas de dois carrinhos, A e B respectivamente, que deslizam sem atrito ao longo de um trilho horizontal retilíneo. No instante $t = 3s$ ocorre uma colisão entre os carrinhos. Sendo assim, assinale a opção que pode representar um gráfico para as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão.

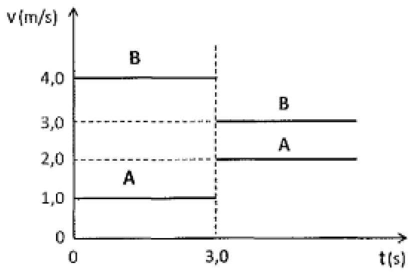
a)



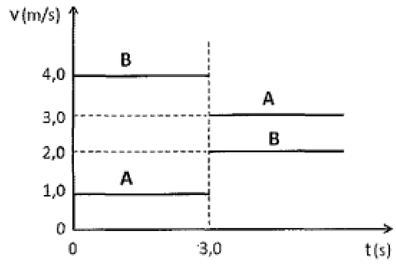
b)



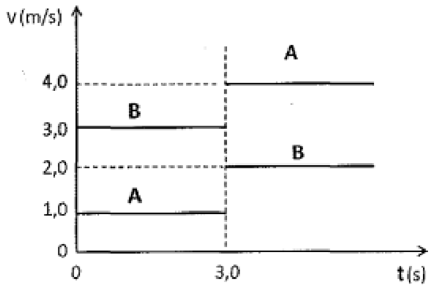
c)



d)



e)



Comentários:

Pela definição de energia cinética:

$$\frac{m_A v_A^2}{2} = 6 \rightarrow |v_A| = \sqrt{\frac{12}{m_A}}$$

Da mesma forma:

$$|v_B| = \sqrt{\frac{16}{m_B}} \text{ e } |v_A'| = \sqrt{\frac{27}{m_A}} \text{ e } |\ v_B'| = \sqrt{\frac{1}{m_B}}$$

Assim:

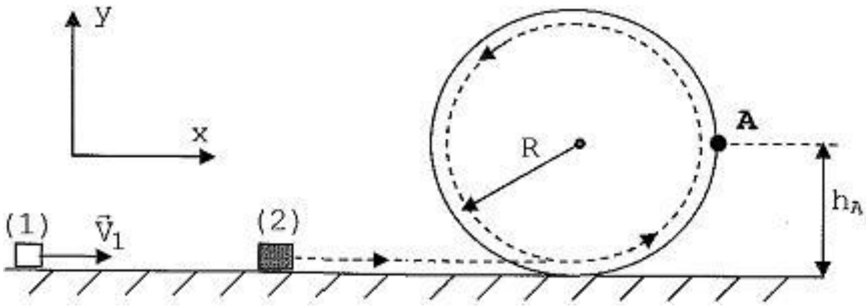
$$\left|\frac{v_B'}{v_B}\right| = \frac{1}{4} \text{ e } \left|\frac{v_A'}{v_A}\right| = \frac{3}{2}$$

A única alternativa que contempla isso é A.

Gabarito: A

11. (EN – 2011)

Uma pista é composta por um trecho retilíneo longo horizontal seguido do trecho circular vertical de raio R (conforme a figura abaixo). O carrinho (1) (partícula), de massa $m_1 = 1{,}0$ kg e velocidade $\vec{v_1} = 5{,}0.\hat{\imath}$ (m/ s), colide com o carrinho (2) (partícula), de massa $m_2 = 2{,}0$kg, em repouso no trecho retilíneo. Despreze os atritos. O coeficiente de restituição do choque vale 0,80. Após a colisão, o carrinho (2) sobe o trecho circular vertical e, num certo instante, passa pela primeira vez na posição A, de altura $h_a = R$, com velocidade tal que o módulo da força normal da pista sobre o carrinho é igual ao módulo do seu peso. Nesse instante, o módulo da velocidade (em m/ s) do carrinho (2) em relação ao carrinho (1) é



a) 1,0 b) 1,2 c) 2,5 d) 2,0 e) 3,0

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$v_1 = v_1' + 2v_2'$$

Pela definição de índice de restituição:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1} = 0{,}8$$

$$v_2' - v_1' = 0{,}8 v_1$$

Logo:

$$v_2' = 0{,}6v_1 = \frac{3m}{s}$$

$$v_1' = -0{,}2v_1 = -\frac{1m}{s}$$

Em A:

$$N = \frac{m_2 v_A^2}{R} = m_2 g \rightarrow \frac{m_2 v_A^2}{2} = \frac{m_2 gR}{2}$$

$$\frac{m_2 v_A^2}{2} + m_2 gR = \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$\frac{m_2 gR}{2} + m_2 gR = \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$\frac{3}{2} gR = \frac{v_2'^2}{2} \rightarrow R = 0{,}3m$$

$$v_A = \sqrt{gR} = \frac{\sqrt{3}m}{s}$$

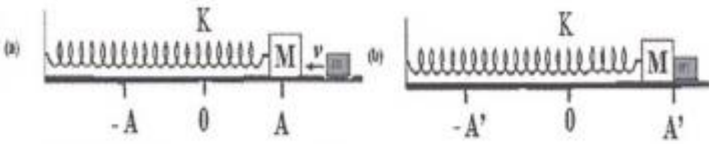
Como as velocidades são ortogonais:

$$v_{12} = \sqrt{3+1} = \frac{2m}{s}$$

Gabarito: D

12. (EFOMM – 2019)

Na figura (a) é apresentada uma mola de constante K, que tem presa em sua extremidade um bloco de massa M. Esse sistema oscila em uma superfície lisa sem atrito com amplitude A, e a mola se encontra relaxada no ponto 0. Em um certo instante, quando a massa M se encontra na posição A, um bloco de massa m e velocidade v se choca com ela, permanecendo grudadas (figura (b)). Determine a nova amplitude de oscilação A' do sistema massa-mola.



a) $A' = \sqrt{\frac{m^2v^2}{(m+M)K} + A^2}$

b) $A' = \sqrt{\frac{mv^2}{K} + A^2}$

c) $A' = \sqrt{\frac{(M+m)v^2}{K} + A^2}$

d) $A' = \sqrt{\frac{(M+m)}{K}}v$

e) $A' = A$

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento:

$$mv = (M+m)v'$$

$$v' = \left(\frac{m}{M+m}\right) v$$

A energia dissipada foi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)v'^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{mM}{(M+m)}\frac{v^2}{2}$$

Logo:

$$\frac{kA \cdot A}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{mMv^2}{2(M+m)} = \frac{kA'^2}{2}$$

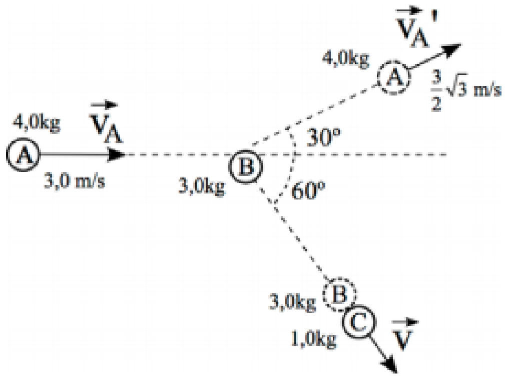
$$\frac{kA^2}{2} - \frac{m^2v^2}{2(M+m)} = \frac{kA'^2}{2}$$

$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{m^2v^2}{k(M+m)}}$$

Gabarito: B

13. (EFOMM – 2013 - ADAPTADA)

A bola A (mA = 4,0 kg) se move em uma superfície plana e horizontal com velocidade de módulo 3,0 m/s, estando as bolas B (mB = 3,0 kg) e C (mC = 1,0 kg) inicialmente em repouso. Após colidir com a bola B, a bola A sofre um desvio de 30o em sua trajetória, conforme figura abaixo. Já a bola B sofre nova colisão, agora frontal, com a bola C, ambas prosseguindo juntas com velocidade de módulo v. Considerando a superfície sem atrito, a velocidade v, em m/s, vale



a) 1,5 b) 2,5 c) 3,5 d) 4,5 e) 5,5

Comentários:

No eixo X:

$$m_A v_A = m_A v_A' \cos 30° + m_B v_B' \cos 60°$$

$$12 = 2\sqrt{3}v_A' + \frac{3v_B'}{2} \to v_B' = 8 - \frac{4\sqrt{3}}{3}v_A'$$

No eixo Y:

$$m_A {v_A}' \sin 30° = m_B v_B \sin 60$$

$$2v_A' = \frac{3v_B\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2v_A = 12\sqrt{3} - 6v_A' \rightarrow v_A' = \frac{3\sqrt{3}}{2} m/s$$

$$v_B' = 2m/s$$

Na segunda colisão:

$$m_B v_B = (m_B + m_C)v$$

$$6 = 4v \rightarrow v = 1{,}5\, m/s$$

Gabarito: A

14. (EFOMM – 2010)

Observe a figura a seguir.

Dois blocos deslizam sobre uma superfície horizontal com atrito desprezível. Inicialmente, o bloco de massa $m_1 = 1{,}0kg$ tem velocidade $v_1 = 4{,}0m/s$ e o bloco de massa $m_2 = 2{,}0kg$ tem velocidade $v_2 = 1{,}0m/s$, conforme indica a figura acima. Após um curto intervalo de tempo, os dois blocos colidirão, dissipando a máxima energia mecânica possível, que é, em joules,

a) $\frac{29}{3}$ b) $\frac{25}{3}$ c) $\frac{21}{3}$ d) $\frac{17}{3}$ e) $\frac{14}{3}$

Comentários:

A colisão que dissipa a máxima energia mecânica é a completamente inelástica.

Logo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 3v \rightarrow v = \frac{2}{3} m/s$$

A variação da energia mecânica vale:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = 1 \cdot \frac{4^2}{2} + 2 \cdot \frac{1^2}{2} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = 8 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3} J$$

Gabarito: B

15. (ITA – 1991)

Segundo um observador acoplado a um referencial inercial duas partículas de massa m_A e m_B possuem velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente. Qual a quantidade de movimento $\vec{p}_A$ que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula A?

a) $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$

b) $\vec{p}_A = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

c) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right) \vec{v}_A$

d) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right)(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

e) Nenhuma das anteriores.

Comentários:

Calculando a velocidade do centro de massa, temos:

$$\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_A \overrightarrow{v_A} + m_B \overrightarrow{v_B}}{m_A + m_B}$$

No referencial do centro de massa, a velocidade da partícula A é dada por:

$$\overrightarrow{v_{A`}} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_{cm}}$$

Portanto:

$$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_{A`} = m_A \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_{cm})$$

$$\vec{p}_A = \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

Gabarito: D

16. (ITA – 1992)

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1° segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

a) $\sqrt{2h/g} \cdot (M+m) \cdot v$

b) $\sqrt{2h/g} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

c) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

d) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{M+m}{M} \cdot v$

e) $(1 - \sqrt{2h/g}) \cdot (M+m) \cdot v$

Comentários:

Velocidade do bloco que está caindo após um segundo de queda:

$$\vartheta_y = gt = 10\, m/s$$

Como a colisão não altera a velocidade em y, temos que o tempo de queda é mantido, e se contássemos o tempo para cair, dado que já se passou 1 segundo, teríamos que:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g} - 1}$$

Conservação da quantidade de movimento na horizontal:

$$m \cdot v = (M+m)v' \Rightarrow v' = \frac{m \cdot v}{(M+m)}$$

Assim, a distância horizontal percorrida será dada por:

$$\Delta x = v' \cdot t$$

$$\Delta x = \frac{m \cdot v}{(M+m)}\left[\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right]$$

Gabarito: C

17. (ITA – 1996)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de $100\ kg$ por segundo, a uma velocidade de $600\ m/s$ em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a $60\ kN$.

c) se a massa do avião é de $7 \cdot 10^3\ kg$ o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de $0{,}2$.

d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.

e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

Comentários:

Para o sistema de massa variável, podemos escrever que:

$$F_R = \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel} + m \cdot a$$

Como a aceleração é nula, temos que a forca gerada pela turbina é igual a:

$$F = 100 \cdot 600\ N = 60kN$$

Para que o avião não se movimente, as rodas devem suportar uma força de atrito com módulo igual à forca da turbina. Assim temos que a letra B é a correta.

Gabarito: B

18. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm. b) 8.2 cm. c) 8.8 cm. d) 9.2 cm. e) 9.6 cm.

Comentários:

No primeiro tiro, o trabalho da força resistiva é igual a variação da energia cinética:

$$W_{F_{res}} = F_{res} \cdot d = \Delta E_{cin}$$

$$F_{res} \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}01 \cdot v_0^2}{2}$$

$$F_{res} = 0{,}05 v_0^2$$

No segundo tiro, as velocidades finais podem ser encontradas pela conservação da quantidade de movimento:

$$0{,}01 \cdot v_0 = (0{,}11 + 0{,}01)v` \Rightarrow v` = \frac{1}{12} v_0$$

Para o bloco:

$$F_{res} \cdot d_1 = \Delta E_{cin}$$

$$0{,}05 v_0^2 \cdot d_1 = \frac{0{,}11}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - 0$$

$$d_1 = \frac{1{,}1}{144}\ m$$

Para o projétil:

$$F_{res} \cdot d_2 = \Delta E_{cin}$$

$$0{,}05 v_0^2 \cdot d_2 = \frac{0{,}01}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - \frac{0{,}01}{2} \cdot (v_0)^2$$

$$d_2 = \frac{14{,}3}{144}\ m$$

A distância que a bala penetrou é dada por:

$$D = d_2 - d_1 \cong 9{,}2\ cm$$

Gabarito: D

19. (ITA – 1998)

Uma massa m em repouso drvide-se em duas partes, uma com massa $2m/3$ e outra com massa $m/3$. Após a divisão, a parte com massa $m/3$ move-se para a direita com uma velocidade de módulo

v_1. Se a massa m estivesse se movendo para a esquerda com velocidade de módulo v antes da divisão, a velocidade da parte $m/3$ depois da divisão seria:

a) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a esquerda.

b) $(v_1 - v)$ para a esquerda.

c) $(v_1 - v)$ para a direita.

d) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a direita.

e) $(v_1 + v)$ para a direita.

Comentários:

Pela definição da velocidade do centro de massa, temos:

$$\overrightarrow{v_{c_m}} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

Suponha agora que a velocidade do centro de massa seja alterada de um valor $\vec{v}$; assim:

$$\overrightarrow{v_{c_m}} - \vec{v} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{v_{c_m}} - \vec{v} = \frac{m_1(\overrightarrow{v_1 -} \ \vec{v}) + m_2(\overrightarrow{v_2} - \ \vec{v})}{m_1 + m_2}$$

Assim como demonstrado acima, o centro de massa do sistema apresentado muda de $-\vec{v}$ de uma situação para a outra, dessa forma, pode-se calcular a nossa velocidade que uma das partes integrantes terá apenas subtraindo também o vetor $-\vec{v}$.

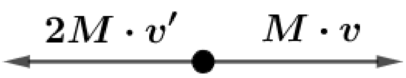
Gabarito: C

20. (ITA – 2004)

Atualmente, vários laboratórios. utilizando várias feixes de laser, são capazes de resfriar gases a temperaturas muito próximas do zero absoluto, obtendo moléculas e átomos ultrafrios. Considere três átomos ultrafrios de massa M, que se aproximam com velocidades desprezíveis. Da colisão tripla resultante, observada de um referencial situado no centro de massa do sistema, forma-se uma molécula diatômica com liberação de certa quantidade de energia B. Obtenha a velocidade final do átomo remanescente em função de B e M.

Comentários:

Como mencionado no enunciado, as velocidades são desprezíveis, isto é, a energia cinética do sistema é nula. Dessa forma, o centro de massa do sistema está em repouso. Portanto, após a colisão, temos:



$$2M \cdot \vec{v}' + M \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v}{2}}$$

A energia cinética do sistema formado pela molécula diatômica e pelo átomo é de:

$$B=\frac{1}{2}2M\cdot v'^2+\frac{1}{2}Mv^2$$

$$B=M\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^2+\frac{1}{2}Mv^2\therefore v=\sqrt{\frac{4B}{3M}}$$

Gabarito: $\sqrt{\frac{4B}{3M}}$

---

21. (ITA – 2005)

Um vagão-caçamba de massa M se desprende da locomotiva e corre sobre trilhos horizontais com velocidade constante $v=72{,}0\ km/h$ (portanto, sem resistência de qualquer espécie ao movimento). Em dado instante, a caçamba é preenchida com uma carga de grãos de massa igual a $4M$, despejada verticalmente a partir do repouso de uma altura de $6{,}00m$ (veja figura).

Supondo que toda a energia liberada no processo seja integralmente convertida em calor para o aquecimento exclusivo dos grãos, então, a quantidade de calor por unidade de massa recebido pelos grãos é

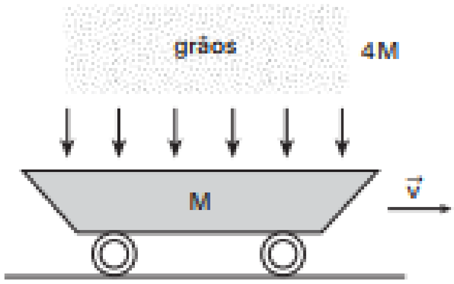
a) $15\ J/kg$.

b) $80\ J/kg$.

c) $100\ J/kg$.

d) $463\ J/kg$.

e) $578\ J/kg$.



Comentários:

A quantidade de movimento se conserva no eixo horizontal. Assim podemos descobrir a velocidade da caçamba após receber a carga:

$$Q_0=Q_f\Rightarrow Mv=5Mv'$$

Passando a velocidade inicial do carrinho para m/s,$v=72\frac{km}{h}=\frac{20m}{s}$, temos:

$$v'=4\ m/s$$

A energia inicial do sistema é dada por:

$$E_0=4Mgh+\frac{Mv^2}{2}$$

A energia final do sistema é dada por:

$$E_f=\frac{5Mv'^2}{2}$$

A energia liberada é dada pela diferença entre a energia final e a inicial:

$$E_{lib} = E_f - E_0 \therefore E_{lib} = 400M$$

Assim a quantidade de energia por unidade de massa é:

$$\frac{Q}{4M} = 100\ J/kg$$

Gabarito: C

22. (ITA – 2005)

Dois corpos esféricos de massa M e $5M$ e raios R e $2R$, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitadonal mútua, e que seja de $12R$ a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de

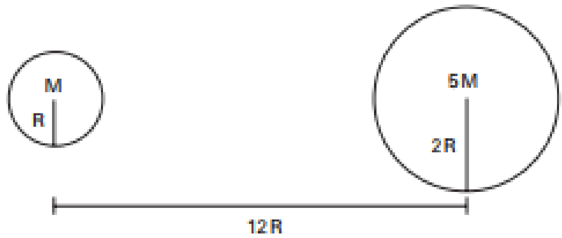
a) $1{,}5R$.

b) $2{,}5R$.

c) $4{,}5R$.

d) $7{,}5R$.

e) $10{,}0R$.



Comentários:

Como todas as forças que agem no sistema constituído pelos corpos são internas, sabemos que a posição do centro de massa não varia. Portanto:

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

$$\frac{M \cdot 0 + 5M \cdot 12R}{6M} = \frac{M \cdot d + 5M(d + 3R)}{6M}$$

$$\boxed{d = 7{,}5R}$$

Gabarito: D

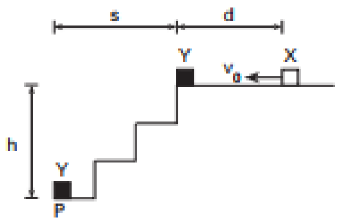
23. (ITA – 2006)

Animado com velocidade inicial v_0, o objeto X, de massa m, desliza sobre um piso horizontal ao longo de uma distância d, ao fim da qual colide com o objeto Y, de mesma massa, que se encontra inicialmente parado na beira de uma escada de altura h.

Com o choque, o objeto Y atinge o solo no ponto P. Chamando μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o objeto X e o piso, g a aceleração da gravidade e desprezando a resistência do ar, assinale a expressão que dá a distância d.

a) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

b) $d = \frac{-1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$



c) $d = \frac{-v_0}{2\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

d) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(2v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

e) $d = \frac{-v_0}{\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

Comentários:

Admitindo colisão elástica entre X e Y, a velocidade de lançamento de Y logo após o choque é igual a velocidade de X após percorrer a distância d.

O tempo de queda de Y é dado por:

$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Portanto, a velocidade de lançamento de Y é expressa por:

$$v = \frac{s}{t_{queda}} = s \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Pela equação de Torricelli, podemos determinar o deslocamento de X antes da colisão:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-\mu_k \cdot g) \cdot d \Rightarrow \left(s \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}\right)^2 = v_0^2 - 2 \cdot \mu_k \cdot g \cdot d$$

$$\boxed{d = \frac{1}{2 \cdot \mu_k \cdot g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 \cdot g}{2h}\right)}$$

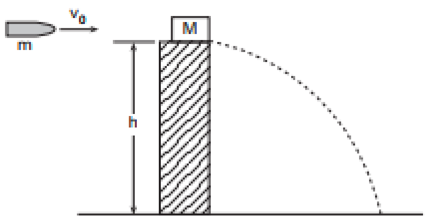
Gabarito: A

---

24. (ITA – 2007)

Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada contra um bloco de massa M, que inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h, conforme mostra a figura.

A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no solo. Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência de qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o solo vale



a) $\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

b) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

c) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{M}}$

d) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

e) $\sqrt{\frac{mv_0^2}{m+M} + 2gh}$

Comentários:

Durante a colisão, podemos conservar a quantidade de movimento:

$$m \cdot v_0 = (m+M) \cdot v \Rightarrow \boxed{v = \frac{m \cdot v_0}{m+M}}$$

Após a colisão, o conjunto $(m+M)$ sai, horizontalmente, com velocidade v. Portanto, pela conservação da energia mecânica, temos:

$$E_{mec}^{antes} = E_{mec}^{final}$$

$$\frac{1}{2}(m+M) \cdot v^2 + (m+M) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(m+M) \cdot u^2$$

$$u = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h} \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\left(\frac{m \cdot v_0}{m+M}\right)^2 + 2 \cdot g \cdot h}}$$

Gabarito: A

---

25. (ITA – 2009)

Considere uma bola de basquete de $600\ g$ a $5\ m$ de altura e, logo acima dela, uma de tênis de $60\ g$. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 25 m e) 35 m

Comentários:

Pela conservação da quantidade de movimento do choque da bola de basquete com a bola de tênis logo após a bola de basquete se chocar com o solo, temos:

$$Q_0 = Q_f$$

$$Mv - mv = Mw + mu \quad (i)$$

Adotamos o eixo de referência do solo para cima. Além disso, note que ao tocar o solo, a velocidade da bola de basquete apenas inverte de sentido, já que todas das colisões são consideradas perfeitamente elásticas.

Como todas as colisões são elásticas, usaremos que $e = 1$:

$$u - w = v - (-v)$$

$$u - w = 2v \quad (ii)$$

Assim ficamos com um sistema e resolvendo, temos:

$$u = \frac{3M - m}{M + m} v$$

Como $M = 10m$, então $u = \frac{29}{11} v$. Podemos encontrar v usando Torriceli:

$$v^2 = 0 + 2gh = 100$$

Para encontrar a altura máxima H basta conservar a energia mecânica entre o ponto logo após as colisões e o ponto mais alto atingido pela bola de tênis:

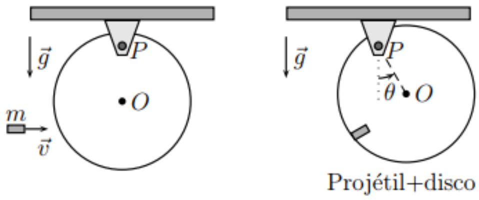
$$\frac{mu^2}{2} = mgH \Rightarrow \left(\frac{29}{11} v\right)^2 = 2gH$$

$$\boxed{H \cong 35\ m}$$

Gabarito: E

26. (ITA – 2014)

Um disco rígido de massa M e centro O pode oscilar sem atrito num plano vertical em torno de uma articulação P. O disco é atingido por um projétil de massa $m \ll M$ que se move horizontalmente com velocidade v no plano do disco. Após a colisão, o projétil se incrusta no disco e o conjunto gira em torno de P até o ângulo θ. Nestas condições, afirmam-se:



I. A quantidade de movimento do conjunto $projétil + disco$ se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

II. A energia cinética do conjunto $projétil + disco$ se mantem a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

III. A energia mecânica do conjunto $projétil + disco$ imediatamente após a colisão é igual à da posição de ângulo $\theta/2$.

É (são) verdadeira(s) apenas a(s) assertiva(s)

a) I. b) I e II. c) I e III. d) II e III. e) III.

Comentários:

I. FALSA. A articulação P realiza sobre o sistema um impulso e, por isso, a quantidade de movimento não se conserva.

II. FALSA. Na colisão inelástica não há conservação de energia.

III. VERDADEIRA. Após a colisão, a única força realizando trabalho é a força Peso. Assim a energia se conserva.

Gabarito: E

27. (ITA – 2015)

Uma chapa metálica homogênea quadrada de $100\ cm^2$ de área, situada no plano xy de um sistema de referência, com um dos lados no eixo x, tem o vértice inferior esquerdo na origem. Dela, retira-se uma porção circular de $5{,}00\ cm$ de diâmetro com o centro posicionado em $x = 2{,}50\ cm$ e $y = 5{,}00\ cm$. Determine as coordenadas do centro de massa da chapa restante.

a) $(x_C, y_C) = (6{,}51, 5{,}00)\ cm$

b) $(x_C, y_C) = (5{,}61, 5{,}00)\ cm$

c) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 5{,}61)\ cm$

d) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 6{,}51)\ cm$

e) $(x_C, y_C) = (5{,}00,\ 5{,}00)\ cm$

Comentários:

Pela definição do centro de massa, sabemos que:

$$y_c = \frac{\sum my}{\sum m};\ x_c = \frac{\sum mx}{\sum m}$$

Como a chapa é homogênea, então podemos escrever a massa em função da área e da densidade superficial de massa:

$$m_i = \mu \cdot A_i$$

Com isso, podemos escrever a posição do centro de massa em função das áreas.

$$y_c = \frac{\sum \mu \cdot A_i \cdot y_i}{\sum \mu \cdot A_i};\ x_c = \frac{\sum \mu \cdot A_i \cdot x_i}{\sum \mu \cdot A_i}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i};\ x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}$$

Pelo princípio da superposição, podemos dizer que:

$$x_{cm} = \frac{A_{total} \cdot x_{total} - A_{círculo} \cdot x_{círculo}}{A_{total} - A_{círculo}} \Rightarrow x_{cm} = \frac{100 \cdot 5 - (3{,}14 \cdot 2{,}5^2) \cdot 2{,}5}{100 - (3{,}14 \cdot 2{,}5^2)}$$

$$\boxed{x_{cm} = 5{,}61\ cm}$$

Devido à simetria do problema, a posição vertical do centro de massa deve permanecer a mesma:

$$\boxed{y_{cm} = 5{,}00\ cm}$$

Gabarito: B

28. (ITA – 2015)

Nêutrons podem atravessar uma fina camada de chumbo, mas têm sua energia cinética absorvida com alta eficiência na água ou em materiais com elevada concentração de hidrogênio. Explique este efeito considerando um nêutron de massa m e velocidade v_0 que efetua uma colisão elástica e central com um átomo qualquer de massa M inicialmente em repouso.

Comentários:

Considerando a colisão elástica e central, temos:

$$e = 1 \Rightarrow \frac{v' - v}{v_0} = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = v' - v}\ (eq.1)$$

Aplicando a conservação da quantidade de movimento, vem:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{Q}_{final} \Rightarrow m \cdot v_0 = m \cdot v + M \cdot v' \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} \cdot v_0 = \frac{m}{M} \cdot v + v'}\ (eq.2)$$

Fazendo (2) – (1), temos que:

$$\left(\frac{m}{M} - 1\right) \cdot v_0 = \left(\frac{m}{M} + 1\right) \cdot v \Rightarrow \boxed{v = v_0 \cdot \left(\frac{m - M}{m + M}\right)}$$

Dessa forma, a energia cinética do nêutron logo após o choque é de:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_C = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m - M}{m + M}\right)^2 \cdot v_0^2}$$

Com esse resultado, como $m < M$, a energia cinética do nêutron deve ser menor após a colisão com algum átomo. Por outro lado, em colisões com átomos de hidrogênio, em que $m \approx M$, a energia cinética do nêutron tende a zero após o choque, pois $m - M \approx 0$.

Gabarito: $E_C = \frac{m}{2}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 v_0^2$

29. (ITA – 2016)

Dois garotos com patins de rodinhas idênticos encontram-se numa superfície horizontal com atrito e, graças a uma interação, conseguem obter a razão entre seus respectivos pesos valendo-se apenas de uma fita métrica. Como é resolvida essa questão e quais os conceitos físicos envolvidos?

Comentários:

Como não atuam forças externas, a posição do CM é constante.

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

Adotando o $X_{CM_{inicial}}$ como a origem dos eixos cartesianos, temos:

$$0 = \frac{-m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Podemos multiplicar por g e encontramos:

$$0 = \frac{-P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} \Rightarrow P_1 x_1 = P_2 x_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Então, para qualquer instante, os garotos conseguem a razão entre seus respectivos pesos medindo o deslocamento de cada um com a fita métrica.

O conceito físico envolvido é a conservação da quantidade de movimento e centro de massa.

Gabarito: O conceito físico envolvido é a conservação da quantidade de movimento e centro de massa.

30. (ITA – 2016)

Na ausência da gravidade e no vácuo, encontram-se três esferas condutoras alinhadas, A, B e C, de mesmo raio e de massas respectivamente iguais a m, m e $2m$. Inicialmente B e C encontram-se descarregadas e em repouso, e a esfera A, com carga elétrica Q, é lançaria contra a intermediária B com uma certa velocidade v. Supondo que todos movimentos ocorram ao longo de uma mesma reta, que as massas sejam grandes o suficiente para se desprezar as forças coulombianas e ainda que todas as colisões sejam elásticas, determine a carga elétrica de cada esfera após todas as colisões possíveis.

Comentários:

A primeira colisão ocorre entre as bolas A e B. Como todas as colisões são elásticas usaremos que $e = 1$.

Numa colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow mv = mv'_A + mv'_B$$

$$e = 1 \Rightarrow \ v = v'_B - v'_A$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$v'_B = v \ \ e \ v'_A = 0$$

Resultado que já esperávamos, pois numa colisão elástica entre corpos de mesma massa, eles trocam de velocidade.

Como todas têm o mesmo raio, a carga se distribui igualmente. Assim, após a primeira colisão:

$$Q_A = \frac{Q}{2} \ e \ Q_B = \frac{Q}{2} \ e \ Q_C = 0$$

Para a segunda colisão, aplicando os mesmos passos, temos:

$$v_B'' = v/3 \ e \ v_C' = 2v/3$$

E:

$$Q_A = \frac{Q}{2} \ e \ Q_B = \frac{Q}{4} \ e \ Q_C = \frac{Q}{4}$$

Para a terceira colisão, A e B trocam de velocidades e, assim, não haverá mais colisões. Assim, após todas as colisões:

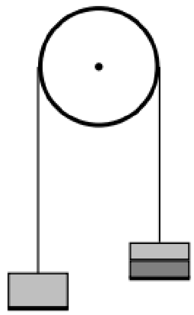
$$Q'_A = \frac{3Q}{8} \ e \ Q'_B = \frac{3Q}{8} \ e \ Q'_C = \frac{Q}{4}$$

Gabarito: $Q_A' = \frac{3Q}{8}, Q_B' = \frac{3Q}{8}, Q_C' = \frac{Q}{4}$

---

31. (ITA – 2017)

Mediante um fio inextensível e de peso desprezível, a polia da figura suporta à esquerda uma massa de 60 kg, e à direita, uma massa de 55 kg tendo em cima outra de 5 kg, de formato anelar, estando este conjunto a 1 m acima da massa da esquerda. Num dado instante, por um dispositivo interno, a massa de 5 kg é lançada para cima com velocidade $v = 10\ m/s$, após o que, cai e se choca inelasticamente com a de 55 kg. Determine a altura entre a posição do centro de massa de todo o sistema antes do lançamento e a deste centro logo após o choque.



Comentários:

Inicialmente, devemos determinar a aceleração dos corpos de 60 kg e de 55 kg, pela segunda lei de Newton:

$$60 \cdot g - 55 \cdot g = (60 + 55) \cdot a \Rightarrow \boxed{a = \frac{50}{115}\ m/s^2}$$

Da conservação da quantidade de movimento, podemos determinar a velocidade dos corpos logo após o lançamento do bloco de 5,0 kg:

$$5{,}0 \cdot 10 = (60 + 55) \cdot u \Rightarrow \boxed{u = \frac{50}{115}\ m/s^2}$$

O tempo de encontro do corpo de massa 5,0 kg com o de 55 kg é dado por:

$$s_5 = s_{55} \Rightarrow 10 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2} = -\frac{50}{115} \cdot t + \frac{\frac{50}{115} \cdot t^2}{2} \Rightarrow \frac{t}{2}\left(\frac{50}{115} + 10\right) = \frac{55}{115} + 10 \Rightarrow \boxed{t = 2\ s}$$

Sendo assim, o ponto de encontro é dado por:

$$s_5 = s_{55} = 10 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 0$$

Portanto, eles se encontram na mesma posição inicial. Assim, o centro de massa se encontra também na mesma posição de antes do lançamento, isto é:

$$\Delta y_{cm} = 0$$

Gabarito: $\boldsymbol{\Delta y_{cm} = 0}$

---

32. (ITA – 2018)

Num plano horizontal liso, presas cada qual a uma corda de massa desprezível, as massas m_1 e m_2 giram em órbitas circulares de mesma frequência angular uniforme, respectivamente com raios r_1 e $r_2 = r_1/2$. Em certo instante essas massas colidem-se frontal e elasticamente e cada qual volta a perfazer jum movimento circular uniforme. Sendo iguais os módulos das velocidades de m_1 e m_2 após o choque, assinale a relação m_2/m_1.

a) 1 b) 3/2 c) 4/3 d) 5/4 e) 7/5

Comentários:

Antes da colisão, sabemos que as frequências angulares das massas são iguais, mas que $r_1 = 2r_2$. Portanto:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

$$\therefore v_1 = 2v_2$$

Na colisão, se conserva a quantidade de movimento:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_2 - m_1)u$$

A colisão é elástica:

$$e = 1 \Rightarrow v_1 + v_2 = 2u$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_2 - m_1)u \\ v_1 + v_2 = 2u \end{cases}$$

$$\therefore \frac{m_2}{m_1} = \frac{7}{5}$$

Gabarito: E

---

33. (IME – 2005)

Um canhão de massa $M = 200\ kg$ em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e carregado com um projétil de massa $m = 1\ kg$, permanecendo ambos neste estado até o projétil ser disparado na direção horizontal. Sabe-se que este canhão pode ser considerado tuna maquina térmica com 20% o de rendimento, porcentagem essa utilizada no movimento do projétil, e que o calor fornecido a esta máquina térmica é igual a $100.000\ J$. Suponha que a velocidade do projétil após o disparo é constante no interior do canhão e que o atrito e a resistência do ar podem ser desprezados. Determine a velocidade de recuo do canhão após o disparo.

Comentários:

Do enunciado vemos que a energia cinética que é transferido ao projétil é dada por:

$$E_c = \eta \cdot Q = 20\% \cdot 100.000 = 20.000\ J$$

Denotando por u a velocidade de recuo do canhão e por v a velocidade do projétil, podemos aplicar a conservação da quantidade de movimento do sistema na horizontal, tomando como eixo de referência orientado no sentido do deslocamento do projétil. Então:

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$0 = m \cdot v - M \cdot u \Rightarrow v = \frac{M}{m} \cdot u \Rightarrow \boxed{v = 200 \cdot u}$$

A energia cinética final do projétil é de:

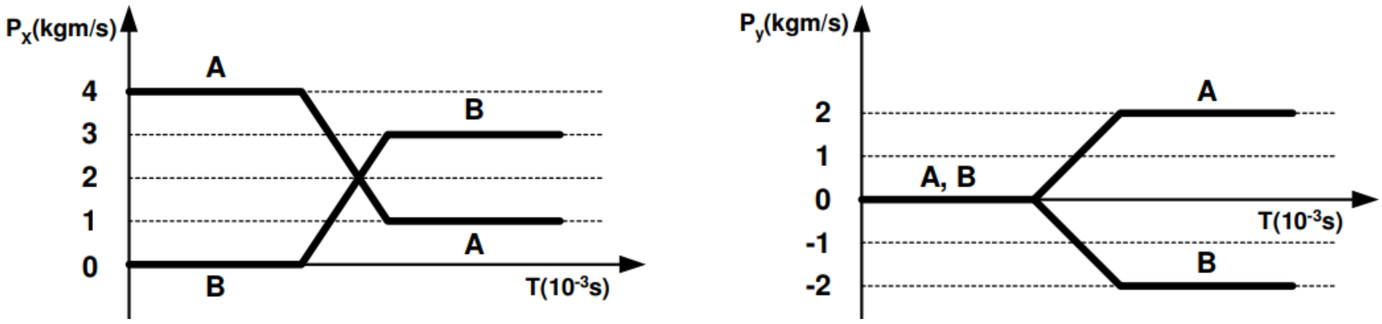
$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow 20.000 = \frac{1 \cdot v^2}{2} \Rightarrow \boxed{v = 200\ m/s}$$

Portanto:

$$200 = 200 \cdot u \Rightarrow \boxed{u = 1\ m/s}$$

Gabarito: 1 m/s

34. (IME – 2009)



Duas partículas A e B de massas $m_A = 0{,}1\ kg$ e $m_B = 0{,}2\ kg$ sofrem colisão não frontal. As componentes x e y do vetor quantidade de movimento em função do tempo são apresentadas nos gráficos acima.

Considere as seguintes afirmativas:

I. A energia cinética total é conservada.

II. A quantidade de movimento total é conservada.

III. O impulso correspondente à partícula B é $2i + 4j$.

IV. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

As afirmativas corretas são apenas:

a) I e II b) I e III c) II e III d) II e IV e) III e IV

Comentários:

I.FALSA. $E_0 = \frac{m_A v_A^2}{2} = 80\,J$ e $E_f = 57{,}5$ J.

II.VERDADEIRA. Em x, a quantidade de movimento do sistema inicialmente é $4\,kg \cdot m/s$ e, após a colisão, esse valor se conserva. Em y, a quantidade de movimento do sistema se conserva sendo constante igual a 0.

III.FALSA. O impulso correspondente à partícula B é $3i - 2j$.

IV.FALSA. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

Gabarito: D

35. (IME – 2009)

Dois corpos A e B encontram-se sobre um plano horizontal sem atrito. Um observador inercial O está na origem do eixo x. Os corpos A e B sofrem colisão frontal perfeitamente elástica, sendo que, inicialmente, o corpo A tem velocidade $v_A = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo) e o coipo B está parado na posição $x = 2\,m$. Considere um outro observador inercial O' que no instante da colisão tem a sua posição coincidente com a do observador O. Se a velocidade relativa de O' em relação a O é $v_{0'} = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo), determine em relação a O

a) as velocidades dos corpos A e B após a colisào;

b) a posição do corpo A dois segundos após a colisào.

Dados:

- massa de A $=\ 100\,g$;
- massa de B $=\ 200\,g$.

Comentários:

a) Em relação à O', o corpo A está inicialmente parado e o corpo B tem velocidade $v_B = 2\,m/s$ (na direção de x com sentido negativo).

Dado que a colisão foi perfeitamente elástica, temos que velocidade relativa de afastamento é igual a velocidade relativa de aproximação:

$$v'_A - v'_B = 2$$

A quantidade de movimento se conserva:

$$m_B \cdot 2 = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$$

$$4 = v'_A + 2v'_B$$

Assim:

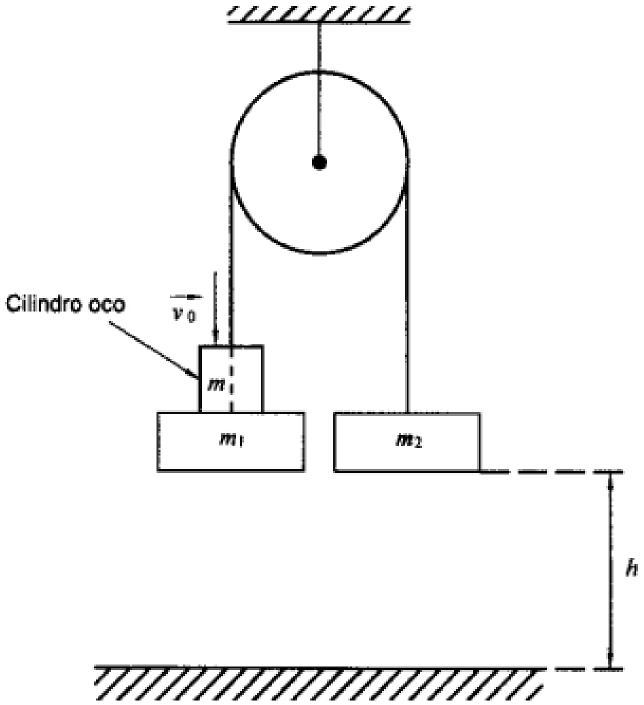
$$v'_B = -\frac{2}{3}\frac{m}{s} \;\; e \; v'_A = -\frac{8}{3}\frac{m}{s}$$

b) Posição do corpo A:

$$S = 2 - \frac{8}{3} \cdot 2 = -\frac{10}{3}\; m$$

Gabarito: a) $-\frac{8}{3}\ m/s$ e $-\frac{2}{3}\ m/s$ b) $-\frac{10}{3}\ m$

36. (IME – 2011)



A figura acima apresenta duas massas $m_1 = 5\ kg$ e $m_2 = 20\ kg$ presas por um fio que passa por uma roldana. As massas são abandonadas a partir do repouso, ambas a uma altura h do solo, no exato instante em que um cilindro oco de massa $m = 5\ kg$ atinge m_1 com velocidade $v = 36\ m/s$, ficando ambas coladas. Determine a altura h, em metros, para que m_1 chegue ao solo com velocidade nula.

Dado:

• Aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$

Observação:

• A roldana e o fio são ideais.

a) 5,4 b) 2,7 c) 3,6 d) 10,8 e) 1,8

Comentários:

Na colisão a quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow mv_0 = (m + m_1 + m_2)v$$

$$\Rightarrow v = 6\ m/s$$

A aceleração do sistema é dada por:

$$F_R = m_{total} \cdot a \Rightarrow a = \frac{10}{3} m/s^2$$

Para que o corpo 1 chegue ao solo com velocidade nula:

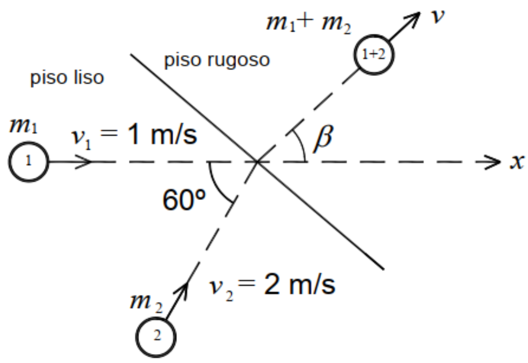
$$v^2 = v_0^2 + 2ah \Rightarrow 0 = 36 + 2\left(-\frac{10}{3}\right)h$$

$$\Rightarrow h = 5{,}4\ m$$

Gabarito: A

---

37. (IME – 2012)



Duas bolas, 1 e 2. movem-se em um piso perfeitamente liso. A bola 1, de massa $m_1 = 2\ kg$, move-se no sentido da esquerda para direita com velocidade $v_1 = 1\ m/s$. A bola 2. de massa $m_2 = 1\ kg$, move-se com ângulo de $60°$ com o eixo x, com velocidade $v_2 = 2\ m/s$. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre as bolas e o piso rugoso é $0{,}10 \sec^2 \beta$ e a aceleração gravitacional é $10\ m/s^2$. Ao colidirem, permanecem unidas após o choque e movimentam-se em um outro piso rugoso, conforme mostra a figura. A distância percorrida, em metros, pelo conjunto bola 1 e bola 2 até parar é igual a

a) 0,2 b) 0,5 c) 0,7 d) 0,9 e) 1,2

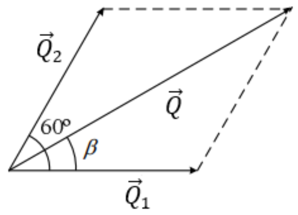
Comentários:

Inicialmente, devemos calcular o módulo da quantidade de movimento inicial para cada corpo:

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot 1 = 2\ kg \cdot m/s \\ Q_2 = m_2 \cdot v_2 = 1 \cdot 2 = 2\ kg \cdot m/s \end{cases}$$

Como na colisão existe conservação da quantidade de movimento, então:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{Q}_{final} = \vec{Q} \text{ e } \vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$$



O módulo de $\vec{Q}$ é dado por:

$$Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \cos 60° \Rightarrow \boxed{Q = 2\sqrt{3}\, kg \cdot m/s}$$

Em que $Q = (m_1 + m_2) \cdot v$, então:

$$\boxed{v = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, m/s}$$

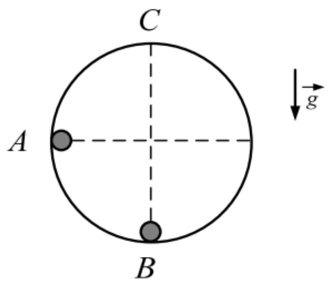
Devido ao fato de $Q_1 = Q_2$, pela geometria vemos que $\beta = 30°$. Podemos determinar a distância percorrida no piso rugoso por Torricelli:

$$v_f^2 = v_i^2 - 2 \cdot a \cdot \Delta s \Rightarrow 0 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot (0{,}1 \cdot \sec^2 \beta) \cdot 10 \cdot \Delta s$$

$$\boxed{d = 0{,}5\, m}$$

Gabarito: B

38. (IME – 2015)



Um corpo puntiforme de massa m_A parte de ponto A, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto B. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto C , ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto A, em m/s, é

Dados:

- raio da rampa circular: $2m$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- massa a/m: $1\ kg$; e
- massa m_A: $1\ kg$.

a) 10 b) 20 c) $4\sqrt{15}$ d) $10\sqrt{5}$ e) $8\sqrt{5}$

Comentários:

Conservação da energia do ponto A até o ponto B:

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{m_A v_A^2}{2} + m_A g R = \frac{m_A v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_A^2 + 40 = v_B^2$$

Colisão inelástica no ponto B:

$$Q_0 = Q_F \Rightarrow m_A v_B + m_B \cdot 0 = (m_A + m_B) v'$$

$$\therefore v' = \frac{v_B}{2}$$

Conservação de energia do ponto B até o ponto C:

$$E_B = E_C$$

$$\frac{(m_A + m_B) v'^2}{2} = \frac{(m_A + m_B) v_C^2}{2} + (m_A + m_B) g (2R)$$

$$v'^2 = v_C^2 + 80$$

Como v_C é a velocidade mínima, devemos assumir que $N = 0$.

No ponto C, podemos escrever:

$$F_{cp} = P + N$$

$$N = 0 \Rightarrow F_{cp} = P$$

$$\frac{(m_A + m_B) v_C^2}{R} = (m_A + m_B) g$$

$$\therefore v_C = 2\sqrt{5}\, m/s$$

Assim:

$$v' = 10\, m/s \text{ e } v_B = 20\, m/s$$

Portanto:

$$\boxed{v_A = 6\sqrt{10}\, m/s}$$

Gabarito: sem alternativa

39. (IME – 2016)

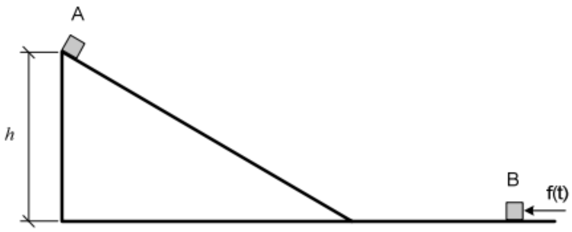


Figura 1

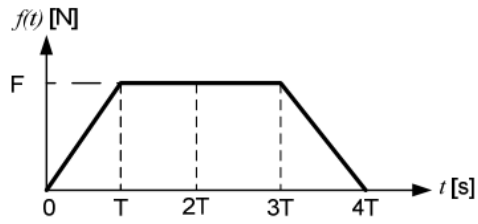


Figura 2

Na Figura 1, o corpo A, constituído de gelo. possui massa m e é solto em uma rampa a uma altura h. Enquanto desliza pela rampa, ele derrete e alcança o plano horizontal com metade da energia mecânica e metade da massa iniciais. Após atingir o plano horizontal, o corpo A se choca, no instante $4T$, com o corpo B, de massa m, que foi retirado do repouso através da aplicação da força $f(t)$, cujo gráfico é exibido na Figura 2.

Para que os corpos parem no momento do choque, F deve ser dado por

Dado:

- aceleração da gravidade: g.

Observações:

- o choque entre os corpos é perfeitamente inelástico:
- o corpo não perde massa ao longo de seu movimento no plano horizontal.

a) $\frac{m\sqrt{2gh}}{8T}$ b) $\frac{m\sqrt{2gh}}{6T}$ c) $\frac{m\sqrt{2gh}}{4T}$ d) $\frac{m\sqrt{2gh}}{3T}$ e) $\frac{m\sqrt{2gh}}{2T}$

Comentários:

Para o corpo B, o impulso da resultante pode ser calculado pela área sob a curva:

$$I_B = \frac{(4T + 2T) \cdot F}{2} \Rightarrow \boxed{I_B = 3 \cdot T \cdot F}$$

Pelo teorema do Impulso, podemos determinar a quantidade de movimento final do corpo B:

$$I_B = \Delta Q_B = Q_B^{final} - Q_B^{inicial} \Rightarrow \boxed{3 \cdot T \cdot F = Q_B}$$

Para o movimento do corpo, podemos admitir que não há perdas de energia por atrito e, assim, podemos determinar a velocidade antes da colisão com o corpo B utilizando a o balanço energético:

$$E_{mec}^{final} = \frac{1}{2} \cdot E_{mec}^{inicial} \Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

Dessa forma, logo antes da colisão, a quantidade de movimento de A é de:

$$Q_A = \frac{m}{2} \cdot v = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

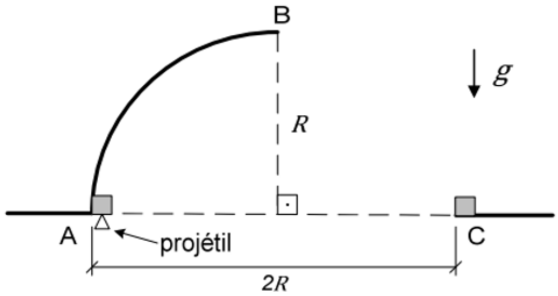
Para que os corpos parem no momento da colisão, a quantidade de movimento de cada corpo deve ter a mesma intensidade e sentido opostos. Portanto:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 3 \cdot T \cdot F$$

$$\therefore \boxed{F = \frac{m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{6 \cdot T}}$$

Gabarito: B

40. (IME – 2019)



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R, é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

- Massa do projétil: m;
- Massa do corpo: $9m$; e
- Aceleração da gravidade: g.

a) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$ b) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$ c) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$ d) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$ e) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

Comentários:

Incialmente, o projétil (com velocidade v_0) se choca com o corpo em A e fica alojado nele. Dessa forma, o conjunto (corpo + projétil) saem do ponto A com velocidade v. Pela conservação da quantidade de movimento na direção vertical, temos que:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{depois} \Rightarrow m \cdot v_0 = 10 \cdot m \cdot v \Rightarrow \boxed{v_0 = 10v}\ (eq\ 1)$$

Considerando o sistema constituído pela Terra, pelo conjunto corpo + projétil, temos que a força normal de contato do plano semicircular é perpendicular ao deslocamento. Dessa forma, podemos aplicar o teorema de trabalho e energia entre A e B. Vamos tomar como referência o nível do ponto A para o cálculo da energia potencial gravitacional. Lembrando que não existe atrito nesse trecho.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$

$$\Delta E_{mec} = 0$$

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$mgR + \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\boxed{v_B^2 = v^2 - 2 \cdot g \cdot R}\ (eq\ 2)$$

Do trecho B para C, temos um lançamento horizontal, onde a altura de queda é R e a distância percorrida na horizontal também é R.

$$\begin{cases} x = v_B \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g}{2v_B^2} \cdot x^2$$

No ponto C, temos que:

$$R = \frac{g}{2v_B^2} \cdot R^2 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = \frac{g \cdot R}{2}}\ (eq\ 3)$$

Substituindo 3 em 2, temos:

$$\frac{g \cdot R}{2} = v^2 - 2 \cdot g \cdot R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5Rg}{2}}$$

Portanto, encontramos que a velocidade inicial do projétil é de:

$$\boxed{v_0 = 10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}}$$

Gabarito: A

9. Lista de questões nível 3

1. (ITA – 2002)

Uma tampa rolante pesa $120\ N$ e se encontra Inicialmente em tepousa conto mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$ também em repousa e abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$. Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no sola até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é

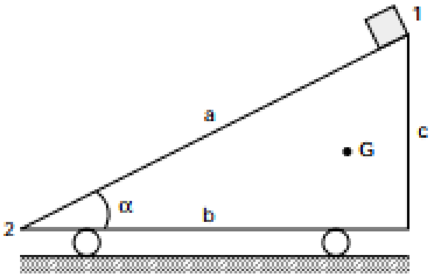
a) 16,0 m

b) 30,0 m

c) 4,8 m

d) 24,0 m

e) 9,6 m

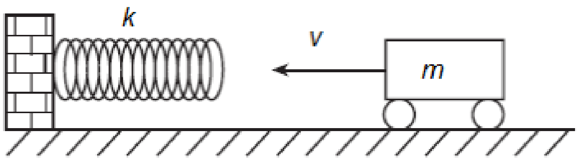


2. (2ª fase OBF – 2008)

Na superfície de um lago de águas paradas encontra-se em movimento um tronco, de massa $400\ kg$ e comprimento $18\ m$, com uma velocidade constante igual a $4{,}0\ m/s$ em relação às margens do lago. Em um determinado instante, um homem de massa $80\ Kg$ começa a correr sobre ele, saindo de uma extremidade a outra, com uma velocidade igual a $3{,}0\ m/s$ em relação ao tronco e no mesmo sentido de seu movimento. Qual a distância percorrida pelo tronco sobre a água, do instante que o homem deixa uma de suas extremidades e alcança a outra extremidade? Considere desprezível a resistência produzida pela água ao movimento do tronco.

3. (3ª fase OBF – 2010)

Um carrinho de massa m com velocidade v movimenta-se sobre uma superfície horizontal conforme a figura abaixo. Este carrinho choca-se com uma mola de constante elástica k (desconsidere todos os efeitos de quaisquer tipos de atrito neste sistema).



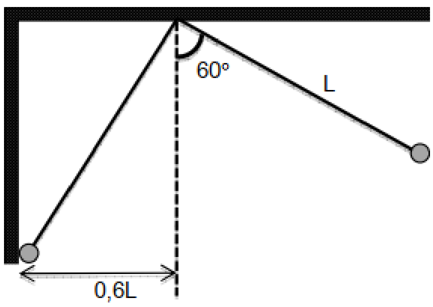
a) Qual o tempo total de colisão entre o carrinho e a mola (tempo em que ambos ficarão em contato)?

b) Faça uma estimativa razoável do impulso total fornecido pela mola após o choque.

4. (3ª fase OBF – 2014)

Um pêndulo simples de comprimento L é posto a oscilar com uma abertura angular de 60°. A massa pendular colide com uma parede onde perde 10,0% de sua energia. Quantas colisões o pêndulo realiza com a parede?

Dados $log\ (0{,}4) = -\ 0{,}40$ e $log\ (0{,}90) = -\ 0{,}046$.

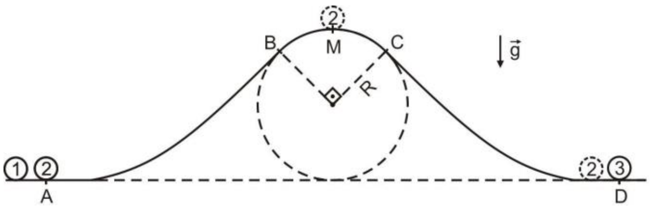


5. (AFA – 2020)

A partícula 1, no ponto A, sofre uma colisão perfeitamente elástica e faz com que a partícula 2, inicialmente em repouso, percorra, sobre uma superfície, a trajetória ABMCD, conforme figura a seguir.

O trecho BMC é um arco de 90° de uma circunferência de raio R = 1,0 m.

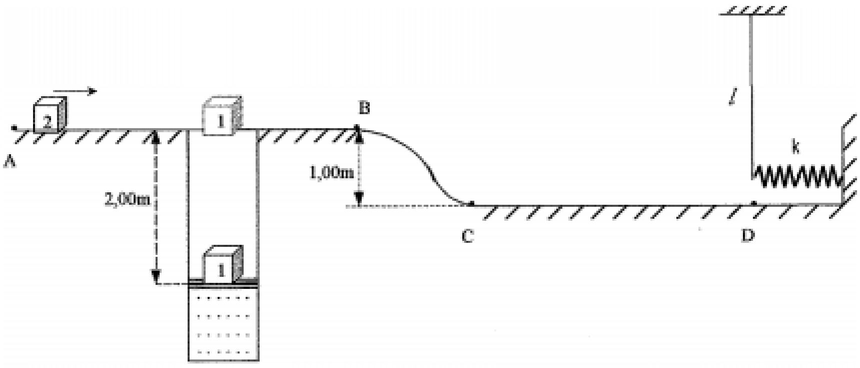
Ao passar sobre o ponto M, a partícula 2 está na iminência de perder o contato com a superfície. A energia mecânica perdida, devido ao atrito, pela partícula 2 ao longo do trecho ABM é exatamente igual à que ela perde no trecho MCD. No ponto D, a partícula 2 sofre outra colisão, perfeitamente elástica, com a partícula 3, que está em repouso. As partículas 1 e 3 possuem mesma massa, sendo a massa de cada uma delas o dobro da massa da partícula 2. A velocidade da partícula 1, imediatamente antes da colisão no ponto A, era de 6,0 m/s. A aceleração da gravidade é constante e igual a g. Desprezando a resistência do ar, a velocidade da partícula 3, imediatamente após a colisão no ponto D, em m/s, será igual a



a) 3,0 b) 4,0 c) 5,0 d) 6,0

6. (EN – 2005)

Três mols de um certo gás ideal, cujo calor molar a pressão constante vale $5{,}00\ \mathrm{cal/mol.k}$, está no interior do cilindro da figura abaixo. O gás recebe calor de uma fonte térmica (não indicada na figura) de tal maneira que a sua temperatura aumenta de $10{,}0°\mathrm{C}$. Ao absorver calor verifica-se que o pistão, adiabático e de massa desprezível, se eleva de 2,00 metros. Sobre o pistão temos o bloco 1 de massa $m_1 = 20{,}0\ \mathrm{kg}$. Considere: $|\vec{g}| = 10\ \mathrm{m/s^2}$ e $1{,}00\ \mathrm{cal} = 4{,}18\ \mathrm{J}$.

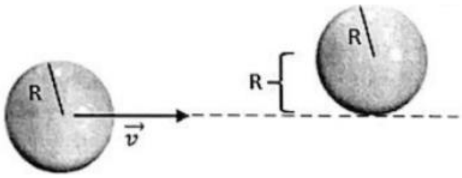


a) Calcule a variação da energia interna (em joules) do gás. (4 pontos)

b) No final da expansão do gás, o bloco 1 em repouso sobre a superfície horizontal AB, de atrito desprezível, é atingido pelo bloco 2 de massa $m_2 = 10{,}0\ \mathrm{kg}$ e velocidade igual a $5{,}00\ \mathrm{m/s}$. Calcule a velocidade de recuo do bloco 2, sabendo-se que o coeficiente de restituição vale $0{,}800$.(7 pontos)

7. (EFOMM – 2021)

Uma bola de bilhar de raio R tem velocidade de módulo v, enquanto se desloca em linha reta sobre uma mesa horizontal sem atrito. Em algum momento, esse objeto atinge um segunda bola em repouso, com mesmo raio e massa muito maior, cujo centro se localiza a uma distância R da reta que descreve a trajetória. A situação é representada na figura abaixo:



Após o impacto, a primeira esfera retorna para a esquerda em um linha reta que faz 75° (para baixo) com relação à trajetória horizontal inicial. Suponha que a força que atua em cada esfera durante a colisão é perpendicular à sua superfície e pode ser considerada constante, durante o curto intervalo de tempo em que age. A razão entre os módulos da velocidade final e da velocidade inicial da primeira esfera vale:

(A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. (ITA – 2008)

Numa brincadeira de aventura, o garoto (de massa M) lança-se por uma corda amarrada num galho de árvore num ponto de altura L acima do gatinho (de massa m) da figura, que pretende resgatar. Sendo g a aceleração da gravidade e H a altura da plataforma de onde se lança, indique o valor da tensão na corda, imediatamente após o garoto apanhar o gato para aterrisá-lo na outra margem do lago.

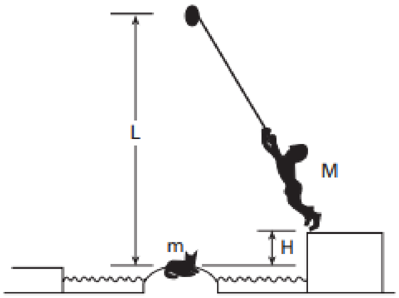
a) $M \cdot g \cdot \left(1 + \frac{2H}{L}\right)$

b) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 - \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

c) $M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{2H}{L}\right)$

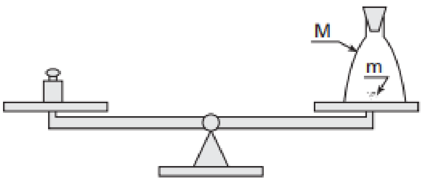
d) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

e) $(m + M) \cdot g \cdot \left(\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L} - 1\right)$

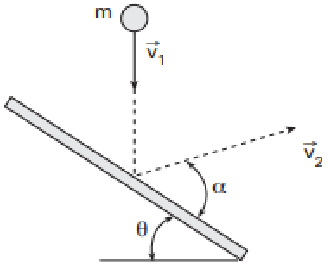


9. (ITA – 2008)

Num dos pratos de uma balança que se encontra em equilíbrio estático, uma mosca de massa m está em repouso no fundo de um frasco de massa M. Mostrar em que condições a mosca poderá voar dentro do frasco sem que o equilíbrio seja afetado.



10. (ITA – 2008)



A figura mostra uma bola de massa m que que cai com velocidade $\vec{v}_1$ sobre a superfície de um suporte rígido, inclinada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal. Sendo e o coeficiente de restituição para esse impacto, calcule o módulo da velocidade $\vec{v}_2$ com que a bola é ricocheteada, em função de $\vec{v}_1$, θ e e. Calcule também o ângulo a.

11. (3ª fase OBF – 2009)

Uma pequena esfera metálica de massa m foi abandonada juntamente com uma bola de borracha de massa M. esférica, de raio R. conforme a figura 4.

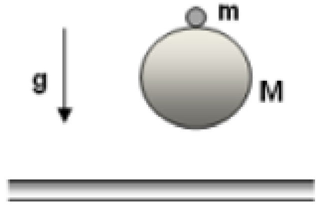


Fig. 4

A massa M é muito menor que m e o volume da esfera metálica é desprezível quando comparado ao da bola de borracha. Considerando que: os movimentos dos centros de massa da esferinha e da bola estão sempre na mesma vertical; o sistema se choca contra o solo e todos os choques envolvidos são perfeitamente elásticos; a distância na vertical percorrida pela esferinha é muito maior que a deformação da bola de borracha; é desprezível a resistência do ar em questão, determine:

a) A velocidade aproximada com que a esferinha se separa da bola na subida.

b) A distância vertical percorrida pela esferinha na subida em função da distância percorrida pela mesma, na descida.

12. (ITA – 2012)

Apoiado sobre patins niuna superfície horizontal sem atrito, um atirador dispara um projétil de massa m com velocidade v contra um alvo a uma distância d. Antes do disparo, a massa total do atirador e seus equipamentos é M. Sendo v_s a velocidade do som no ar e desprezando a perda de energia em todo o processo, quanto tempo após o disparo o atirador ouviria o ruído do impacto do projétil no alvo?

a) $$\frac{d(v_s+v)(M-m)}{v\left(M\cdot v_s-m(v_s+v)\right)}$$

b) $$\frac{d(v_s+v)(M+m)}{v\left(M\cdot v_s+m(v_s+v)\right)}$$

c) $\dfrac{d(v_s - v)(M + m)}{v\big(M \cdot v_s + m(v_s + v)\big)}$

d) $\dfrac{d(v_s + v)(M - m)}{v\big(M \cdot v_s - m(v_s - v)\big)}$

e) $\dfrac{d(v_s - v)(M - m)}{v\big(M \cdot v_s + m(v_s + v)\big)}$

13. (ITA – 2013)

Uma rampa maciça de $120\ kg$ inicialmente em repouso, apoiada sobre um piso horizontal, tem sua declividade dada por $tg(\theta) = 3/4$. Um corpo de $80\ kg$ desliza nessa rampa a partir do repouso, nela percorrendo $15\ m$ até alcançar o piso. No final desse percurso, e desconsiderando qualquer tipo de atrito, a velocidade da rança em relação ao piso é de aproximadamente

a) 1 m/s. b) 3 m/s. c) 5 m/s. d) 2 m/s. e) 4 m/s.

14. (ITA - 2021)

Uma bola de gude de raio r e uma bola de basquete de raio R são lançadas contra uma parede com velocidade horizontal v e com seus centros a uma altura h. A bola de gude e a bola de basquete estão na iminência de contato entre si, assim como ambas contra a parede. Desprezando a duração de todas as colisões e quaisquer perdas de energia, calcule o deslocamento horizontal ΔS da bolinha de gude ao atingir o solo.

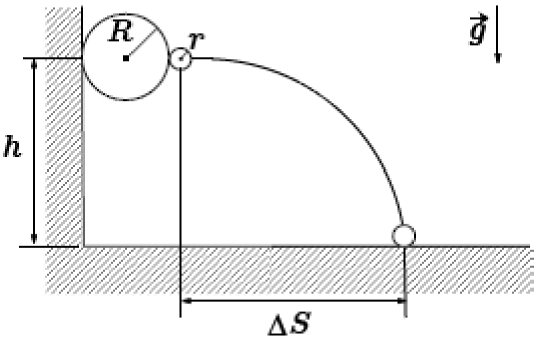
a) $3v\sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$

b) $3v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$

c) $v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$

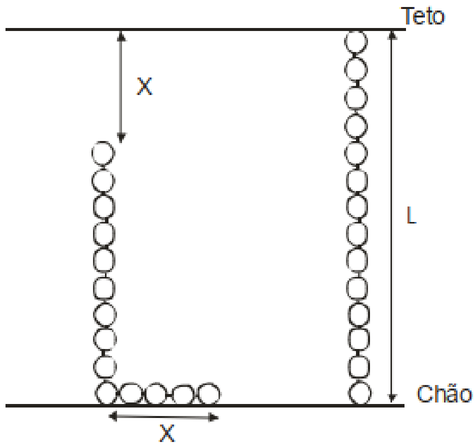
d) $v\sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$

e) $3v\sqrt{\frac{2(h-R-r)}{g}}$

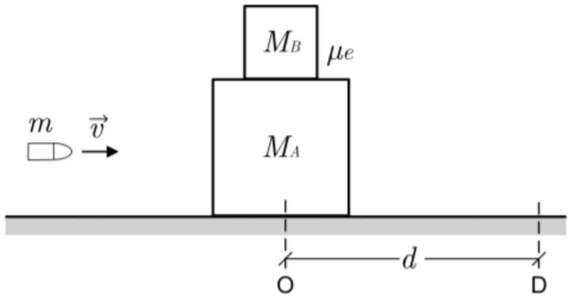


15. (3ª fase OBF – 2010)

Uma corrente de aço de massa M e comprimento L é feita de pequenas argolas entrelaçadas. A corrente esta pendurada na vertical e a parte de baixo toca o chão conforme indicado na figura abaixo. A corrente é então solta e cai na vertical. Considerando x a distância do topo da corrente ao teto, qual será a força (exercida pelo chão) aplicada na corrente durante toda a sua queda. Expresse seu valor como função de M, L, x e g (aceleração gravitacional local).



16. (IME – 2021)



Um projétil de massa m é disparado com velocidade v contra dois blocos A e B, de massas M_A = 800m e M_B = 199m, que estão inicialmente em repouso, um sobre o outro, conforme mostra a figura. O projétil atinge o bloco A, fazendo o conjunto se movimentar de uma distância d, da posição O até a posição D. Considerando g a aceleração da gravidade local, o coeficiente de atrito estático mínimo μ_e entre os blocos, de modo que o bloco B não deslize sobre o bloco A, é

a) $\frac{v^2}{2 \cdot 10^6 gd}$ b) $\frac{v}{2 \cdot 10^6 gd}$ c) $\frac{v^2}{10^6 gd}$ d) $\frac{v}{3 \cdot 10^6 gd}$ e) $\frac{v^2}{3 \cdot 10^6 gd}$

GABARITO

10. Gabarito sem comentários nível 3

1) C
2) 21 m
3) a) $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$; b) $I = 2m \cdot v$
4) 9 colisões

5) B

6) A) 378 J B) 2 m/s

7) E

8) D

9) Ver comentários

10) $v_2 = v_1\sqrt{sen^2(\theta) + e^2 \cdot \cos^2(\theta)}$ e $\alpha = arctg[e \cdot cotg(\theta)]$

11) a) $v_M + v_m$ b) $9H$

12) A

13) C

14) B

15) $\frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}$

16) A

11. Lista de questões nível 3 comentada

1. (ITA – 2002)

Uma tampa rolante pesa $120\ N$ e se encontra Inicialmente em tepousa conto mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$ também em repousa e abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$. Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no sola até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é

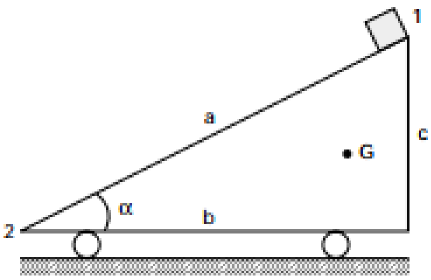
a) 16,0 m

b) 30,0 m

c) 4,8 m

d) 24,0 m

e) 9,6 m



Comentários:

Como não existem forças externas no eixo das abcissas, o X_{CM} se conserva.

Inicialmente:

$$X_{CM} = \frac{X_1 m_1 + X_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{b \cdot m_1 + \frac{2b}{3} m_2}{m_{total}}$$

Depois da rampa ter percorrido uma distância d no solo e o bloco ter deslizado até o chão:

$$X_{CM} = \frac{d \cdot m_1 + (d + \frac{2b}{3}) m_2}{m_{total}}$$

Igualando as equações e usando que $b = a \cdot cos\alpha = 0{,}8$, temos:

$$d = 4{,}8\ m$$

Gabarito: C

2. (2ª fase OBF – 2008)

Na superfície de um lago de águas paradas encontra-se em movimento um tronco, de massa $400\ kg$ e comprimento $18\ m$, com uma velocidade constante igual a $4{,}0\ m/s$ em relação às margens do lago. Em um determinado instante, um homem de massa $80\ Kg$ começa a correr sobre ele, saindo de uma extremidade a outra, com uma velocidade igual a $3{,}0\ m/s$ em relação ao tronco e no mesmo sentido de seu movimento. Qual a distância percorrida pelo tronco sobre a água, do instante que o homem deixa uma de suas extremidades e alcança a outra extremidade? Considere desprezível a resistência produzida pela água ao movimento do tronco.

Comentários:

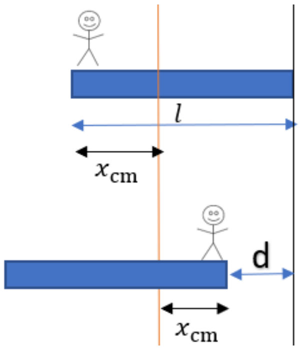
Como a velocidade do homem é constante em relação ao tronco, temos que:

$$3 = \frac{18}{t_{travessia}} \Rightarrow t_{travessia} = 6\ s$$

Deslocamento que o tronco teria nesse intervalo de tempo caso o homem não estivesse deslocando em sua superfície:

$$d_{hipotético} = 4 \cdot 6 = 24\ m$$

Entretanto, a relação entre o homem e o tronco se dá por forças internas, dessa forma, para que o centro de massa seja mantido numa posição constante no referencial do tronco, devemos ter um pequeno deslocamento do tronco para trás:



A posição inicial do centro de massa (considerando a origem a posição em que o homem se encontra inicialmente):

$$\frac{400 \cdot \frac{l}{2}}{400 + 80} = x_{\text{cm}} = 7{,}5m$$

Deslocamento de recuo do tronco:

$$x_{cm} + d = l - x_{cm} \Rightarrow d = 3m$$

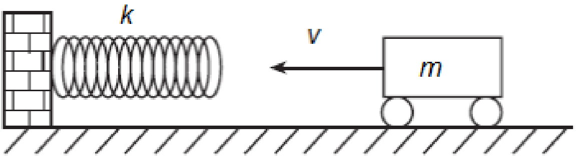
Assim:

$$\mathrm{d}_{efetivo} = \mathrm{d}_{hipotético} - d = 21\ m$$

Gabarito: 21 m

3. (3ª fase OBF – 2010)

Um carrinho de massa m com velocidade v movimenta-se sobre uma superfície horizontal conforme a figura abaixo. Este carrinho choca-se com uma mola de constante elástica k (desconsidere todos os efeitos de quaisquer tipos de atrito neste sistema).



a) Qual o tempo total de colisão entre o carrinho e a mola (tempo em que ambos ficarão em contato)?

b) Faça uma estimativa razoável do impulso total fornecido pela mola após o choque.

Comentários:

a) Caso a mola estivesse presa ao corpo, o período de oscilação do sistema seria dado por:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Entretanto, podemos observar que o movimento que o corpo equivale à metade de um período de oscilação completo, e, portanto, eles ficarão em contato o tempo total de:

$$\frac{T}{2} = t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

b) O impulso é dado pela variação da quantidade de movimento do corpo, como a velocidade não muda de direção, somente de sentido, podemos escrever:

$$I = m \cdot v - (-m \cdot v) = 2m \cdot v$$

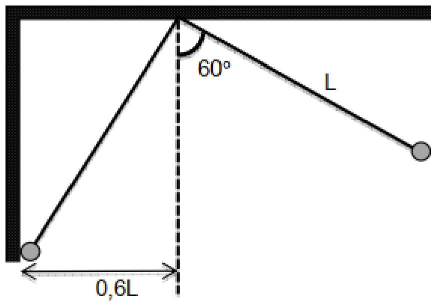
Gabarito: a) $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$; b) $I = 2m \cdot v$

---

4. (3ª fase OBF – 2014)

Um pêndulo simples de comprimento L é posto a oscilar com uma abertura angular de 60°. A massa pendular colide com uma parede onde perde 10,0% de sua energia. Quantas colisões o pêndulo realiza com a parede?

Dados $log\ (0{,}4) = -\ 0{,}40$ e $log\ (0{,}90) = -\ 0{,}046$.



Comentários:

A energia inicial do pêndulo é dada por:

$$E_0 = mgL(1 - cos60°) = 0{,}5mgL$$

Pela geometria, quando o pêndulo colide com a parede, ele está na altura de:

$$h = 0{,}2L$$

As colisões vão parar quando o pêndulo chegar na parede com velocidade zero, neste momento sua energia vai ser:

$$E_f = mgh = 0{,}2mgL$$

A cada colisão o pêndulo perde 10% de sua energia, portanto:

$$E_f = E_0 \cdot (0{,}9)^n$$

Em que n é o número de colisões. Substituindo as expressões encontradas, temos:

$$0{,}2mgL = 0{,}5mgL \cdot (0{,}9)^n$$

$$0{,}4 = (0{,}9)^n \Rightarrow \text{n} = \log_{0,9}(0{,}4) = \frac{\log 0{,}4}{\log 0{,}9}$$

$$n \cong 8{,}7$$

Ocorreram 9 colisões no total.

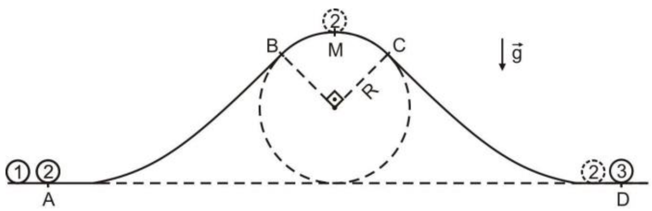
Gabarito: 9 colisões

5. (AFA – 2020)

A partícula 1, no ponto A, sofre uma colisão perfeitamente elástica e faz com que a partícula 2, inicialmente em repouso, percorra, sobre uma superfície, a trajetória ABMCD, conforme figura a seguir.

O trecho BMC é um arco de 90° de uma circunferência de raio R = 1,0 m.

Ao passar sobre o ponto M, a partícula 2 está na iminência de perder o contato com a superfície. A energia mecânica perdida, devido ao atrito, pela partícula 2 ao longo do trecho ABM é exatamente igual à que ela perde no trecho MCD. No ponto D, a partícula 2 sofre outra colisão, perfeitamente elástica, com a partícula 3, que está em repouso. As partículas 1 e 3 possuem mesma massa, sendo a massa de cada uma delas o dobro da massa da partícula 2. A velocidade da partícula 1, imediatamente antes da colisão no ponto A, era de 6,0 m/s. A aceleração da gravidade é constante e igual a g. Desprezando a resistência do ar, a velocidade da partícula 3, imediatamente após a colisão no ponto D, em m/s, será igual a



a) 3,0 b) 4,0 c) 5,0 d) 6,0

Comentários:

Colisão em A:

$$2m \cdot v_1 = 2m \cdot v_1' + m \cdot v_2'$$

$$1 = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - 0} \to v_2' = v_1' + v_1$$

$$2v_1 = 2v_1' + v_1' + v_1 \to v_1' = \frac{v_1}{3} = 2m/s$$

$$v_2' = 8m/s$$

Em M:

$$N = 0 \to mg = \frac{mv_M^2}{R} \to v_M = \sqrt{gR} = \sqrt{10}m/s$$

$$\frac{mv_M^2}{2} + mg(2R) = \frac{mv_A^2}{2} - \tau \rightarrow 5m + 20m = 32m - \tau$$

$$\tau = 7m$$

Antes da colisão em D:

$$\frac{mv_M^2}{2} + mg(2R) - \tau = \frac{mv_D^2}{2}$$

$$5m + 20m - 7m = \frac{mv_D^2}{2}$$

$$v_D = \frac{6m}{s}$$

Depois da colisão em D:

$$m \cdot v_2 = m \cdot v_2' + 2mv_3'$$

$$1 = \frac{v_3' - v_2'}{v_2 - 0} \rightarrow v_3' = v_2' + v_2$$

$$v_2 = v_2' + 2v_2' + 2v_2$$

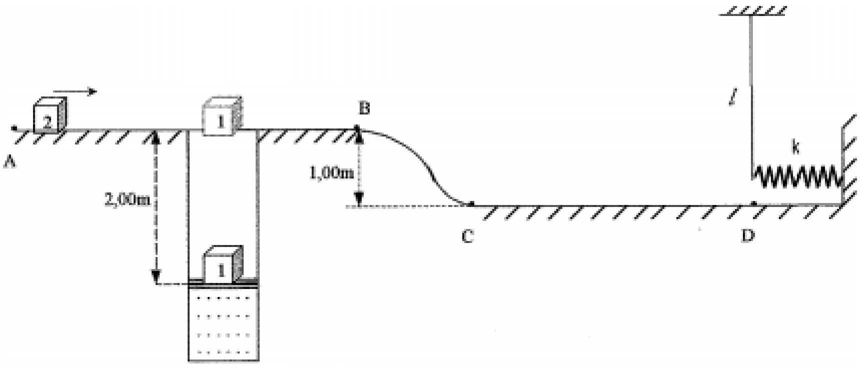
$$v_2' = -\frac{v_2}{3} = -2m/s$$

$$v_3' = \frac{2v_2}{3} = 4\,m/s$$

Gabarito: B

6. (EN – 2005)

Três mols de um certo gás ideal, cujo calor molar a pressão constante vale $5{,}00\ \mathrm{cal/mol.k}$, está no interior do cilindro da figura abaixo. O gás recebe calor de uma fonte térmica (não indicada na figura) de tal maneira que a sua temperatura aumenta de $10{,}0°\mathrm{C}$. Ao absorver calor verifica-se que o pistão, adiabático e de massa desprezível, se eleva de 2,00 metros. Sobre o pistão temos o bloco 1 de massa $\mathrm{m_1} = 20{,}0\ \mathrm{kg}$. Considere: $|\vec{\mathrm{g}}| = 10\ \mathrm{m/s^2}$ e $1{,}00\ \mathrm{cal} = 4{,}18\ \mathrm{J}$.



a) Calcule a variação da energia interna (em joules) do gás. (4 pontos)

b) No final da expansão do gás, o bloco 1 em repouso sobre a superfície horizontal AB, de atrito desprezível, é atingido pelo bloco 2 de massa $\mathrm{m}_2 = 10{,}0\ \mathrm{kg}$ e velocidade igual a $5{,}00\ \mathrm{m/s}$. Calcule a velocidade de recuo do bloco 2, sabendo-se que o coeficiente de restituição vale $0{,}800$.(7 pontos)

Comentários:

Galera, esse exercício é incoerente, por que? Veremos a seguir:

a. Como o cilindro é adiabático e a transformação ocorre à pressão constante:

$$W = P\Delta V = 3 \cdot 8{,}31 \cdot 10 = 249{,}3\ J$$

$$Q = nC_p\Delta T = 3 \cdot 5 \cdot 4{,}18 \cdot 10 = 627\ J$$

$$\Delta U = Q - W = 378\ J$$

Logo $\gamma_{gás} = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{5}{3}$: O gás é monoatômico. Entretanto, sabemos que:

$$P_{gás} = P_{atm} + \frac{mg}{A} \rightarrow P_{gás}\Delta V = P_a\Delta V + mgH = P_a\Delta V + 400 = 249{,}3$$

$$P_a\Delta V = -150{,}7J$$

Como foi dito que o volume aumentou, a pressão atmosférica deveria ser negativa, o que é um absurdo. Também não foi dado o valor de R, fazendo com que o aluno usasse mgH e Pa. Não foi dito qual a pressão atmosférica, e mesmo se o aluno considerasse zero, vemos que isso faz com que o exercício ainda sim seja incoerente.

b. Por conservação da quantidade de movimento:

$$m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$10 \cdot 5 = 20v_1' + 10v_2' \therefore v_2' = 5 - 2v_1'$$

$$0{,}8 = \frac{v_1' - v_2'}{v_2} \rightarrow v_1' - v_2' = 0{,}8v_2$$

$$v_1' - 5 + 2v_1' = 4$$

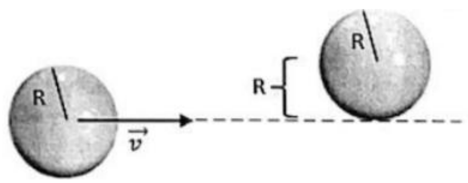
$$v_1' = 3m/s\ e\ v_2' = 2\ m/s$$

Gabarito: A. 378J B. 2m/s

---

7. (EFOMM – 2021)

Uma bola de bilhar de raio R tem velocidade de módulo v, enquanto se desloca em linha reta sobre uma mesa horizontal sem atrito. Em algum momento, esse objeto atinge um segunda bola em repouso, com mesmo raio e massa muito maior, cujo centro se localiza a uma distância R da reta que descreve a trajetória. A situação é representada na figura abaixo:

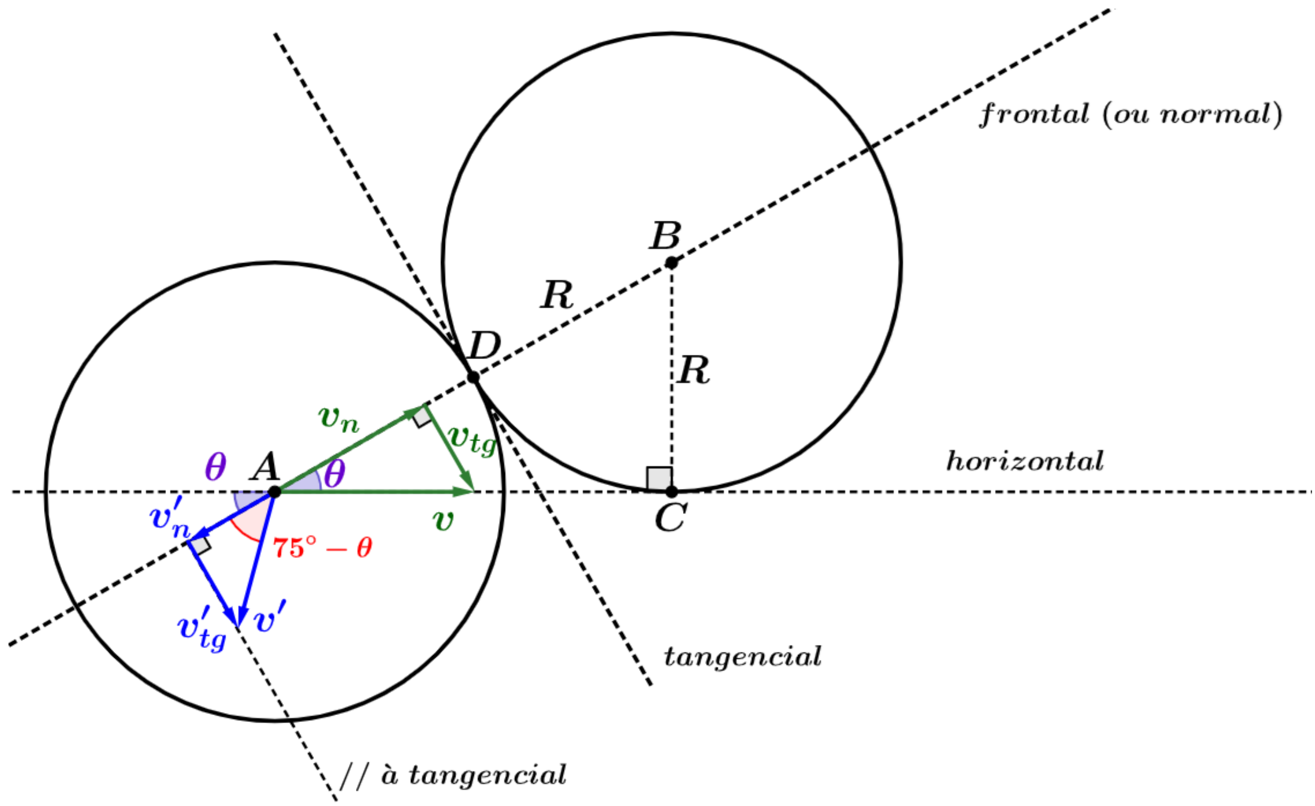


Após o impacto, a primeira esfera retorna para a esquerda em um linha reta que faz 75° (para baixo) com relação à trajetória horizontal inicial. Suponha que a força que atua em cada esfera durante a colisão é perpendicular à sua superfície e pode ser considerada constante, durante o curto intervalo de tempo em que age. A razão entre os módulos da velocidade final e da velocidade inicial da primeira esfera vale:

(A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentários:

No momento do choque, a esfera está se aproximando horizontalmente, então sua velocidade em relação aos eixos tangencial e frontal são dadas por:



$$sen(\theta) = \frac{BC}{AB} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30°$$

$$v_{tg} = v \cdot sen(30°) \text{ e } v_{normal} = v \cdot \cos(30°)$$

$$v'_n = v' \cdot \cos(75° - \theta) = v' \cdot \cos(45°)$$

$$v'_{tg} = v' \cdot sen(75° - \theta) = v' \cdot sen(45°)$$

Logo após o choque, a velocidade da esfera forma o ângulo de 75°, com a horizontal. Como a massa da esfera que está parada é muito maior que a massa da esfera que se move, a esfera deve sair conforme mostrado na figura. Além disso, o enunciado diz que a esfera retorna com velocidade para a esquerda.

Como a velocidade na direção tangencial não muda, já que o choque é frontal, então:

$$v' \cdot sen(45°) = v \cdot sen(30°)$$

$$v' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = v \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Gabarito: E

8. (ITA – 2008)

Numa brincadeira de aventura, o garoto (de massa M) lança-se por uma corda amarrada num galho de árvore num ponto de altura L acima do gatinho (de massa m) da figura, que pretende resgatar. Sendo g a aceleração da gravidade e H a altura da plataforma de onde se lança, indique o valor da tensão na corda, imediatamente após o garoto apanhar o gato para aterrisá-lo na outra margem do lago.

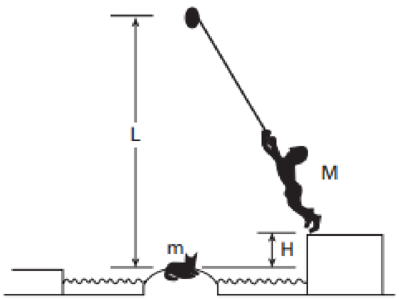
a) $M \cdot g \cdot \left(1 + \frac{2H}{L}\right)$

b) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 - \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

c) $M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{2H}{L}\right)$

d) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

e) $(m + M) \cdot g \cdot \left(\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L} - 1\right)$



Comentários:

A velocidade do garoto logo antes dele pegar o gato vem da expressão da conservação da energia:

$$E_0 = E_f \Rightarrow MgH = \frac{Mv^2}{2} \therefore\ v = \sqrt{2gH}$$

Para encontrarmos a velocidade do conjunto imediatamente após a colisão inelástica iremos conservar a quantidade de movimento:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow M\sqrt{2gH} + 0 = (M + m)u$$

$$u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M + m}$$

Numa trajetória circular, temos que:

$$R_{cp} = (M+m)\frac{u^2}{L} = T - P$$

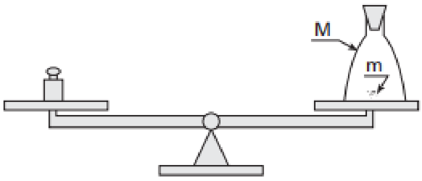
$$T = (M+m)\frac{M^2 \cdot (2gH)}{(M+m)^2 \cdot L} + (M+m)g$$

$$\therefore T = (M+m)g(1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L})$$

Gabarito: D

9. (ITA – 2008)

Num dos pratos de uma balança que se encontra em equilíbrio estático, uma mosca de massa m está em repouso no fundo de um frasco de massa M. Mostrar em que condições a mosca poderá voar dentro do frasco sem que o equilíbrio seja afetado.



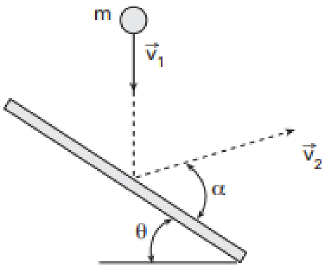
Comentários:

A força que a balança indica é a força vertical que o frasco atua sobre ela. Assim, para que a mosca consiga se locomover no interior do frasco sem afetar o equilíbrio, basta que a aceleração vertical do animal seja sempre nula. Pois, caso contrário, ela estaria gerando força vertical sobre o frasco e consequentemente mudando a leitura da balança.

Além disso, o centro de massa da porção direita da balança deve sempre permanecer à uma mesma distância do pino central. Dessa forma, o movimento da mosca deve se restringir apenas ao plano vertical, perpendicular ao braço da balança, tal que contenha a posição inicial da mosca.

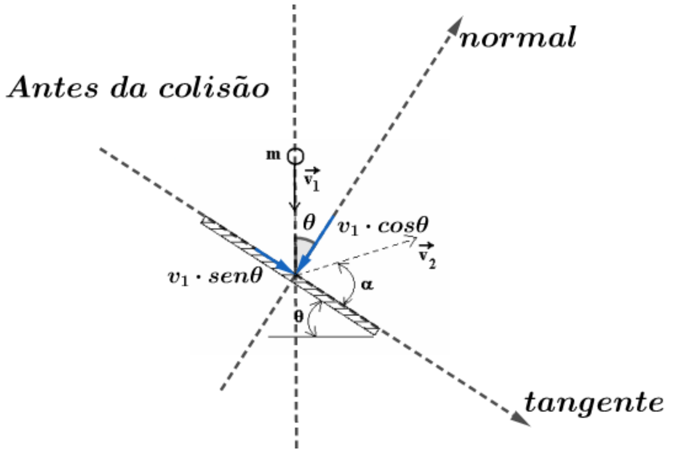
Gabarito: vide comentários.

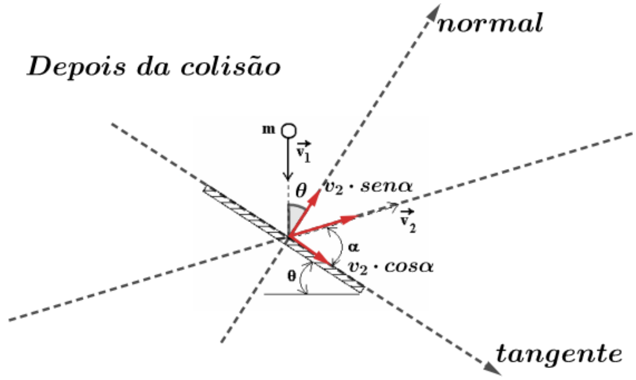
10. (ITA – 2008)



A figura mostra uma bola de massa m que que cai com velocidade $\vec{v}_1$ sobre a superfície de um suporte rígido, inclinada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal. Sendo e o coeficiente de restituição para esse impacto, calcule o módulo da velocidade $\vec{v}_2$ com que a bola é ricocheteada, em função de $\vec{v}_1$, θ e e. Calcule também o ângulo a.

Comentários:





Na direção tangencial, o módulo da velocidade não se altera:

$$v_2 \cdot \cos(\alpha) = v_1 \cdot sen(\theta)\ (eq. 1)$$

Pela definição do coeficiente de restituição bidimensional, temos:

$$e = \frac{v_2 \cdot sen(\alpha)}{v_1 \cdot \cos(\theta)} \Rightarrow v_2 \cdot sen(\alpha) = e \cdot v_1 \cdot \cos(\theta)\ \ (eq. 2)$$

Fazendo $(1)^2 + (2)^2$, temos:

$$(v_2 \cdot \cos(\alpha))^2 + \big(v_2 \cdot sen(\alpha)\big)^2 = \big(v_1 \cdot sen(\theta)\big)^2 + (e \cdot v_1 \cdot \cos(\theta))^2$$

$$v_2^2\big(\cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\big) = v_1^2[sen^2(\theta) + e^2 \cdot \cos^2(\theta)]$$

$$\boxed{v_2 = v_1\sqrt{sen^2(\theta) + e^2 \cdot \cos^2(\theta)}}\ (eq. 3)$$

Dividindo (2) por (1), temos:

$$tg(\alpha) = e \cdot cotg(\theta)$$

$$\therefore \alpha = arctg[e \cdot cotg(\theta)]$$

Gabarito: $\boldsymbol{v_2 = v_1\sqrt{sen^2(\theta) + e^2 \cdot \cos^2(\theta)}}$ **e** $\boldsymbol{\alpha = arctg[e \cdot cotg(\theta)]}$

11. (3ª fase OBF – 2009)

Uma pequena esfera metálica de massa m foi abandonada juntamente com uma bola de borracha de massa M. esférica, de raio R. conforme a figura 4.

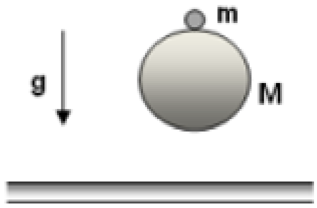


Fig. 4

A massa M é muito menor que m e o volume da esfera metálica é desprezível quando comparado ao da bola de borracha. Considerando que: os movimentos dos centros de massa da esferinha e da bola estão sempre na mesma vertical; o sistema se choca contra o solo e todos os choques envolvidos são perfeitamente elásticos; a distância na vertical percorrida pela esferinha é muito maior que a deformação da bola de borracha; é desprezível a resistência do ar em questão, determine:

a) A velocidade aproximada com que a esferinha se separa da bola na subida.

b) A distância vertical percorrida pela esferinha na subida em função da distância percorrida pela mesma, na descida.

Comentários:

a) Velocidade com que a bola chega ao chão:

$$MgH = \frac{Mv_M^2}{2}$$

$$mgH = \frac{mv_m^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_M^2 = v_m^2 = 2gH$$

Na colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$Mv_M - mv_m = mv`_m + Mv`_M$$

A colisão é elástica:

$$e = 1 \;\Rightarrow\; v_M + v_m = v`_m - v`_M = v_{separacao}$$

Assim:

$$\frac{2Mv_M + (M-m)v_m}{(M+m)} = v`_m \Rightarrow \frac{2M}{M+m} \cdot v_M + \frac{M-m}{M+m} \cdot v_m = v'_m$$

$$\frac{(M-m)v_M - 2mv_m}{(M+m)} = v`_M \Rightarrow \frac{M-m}{M+m} \cdot v_M - \frac{2m}{M+m} \cdot v_m = v'_M$$

Mas, M é muito maior que m, então:

$$\Rightarrow v`_m \cong 2v_M + v_m \Rightarrow v`_M \cong v_M$$

Assim:

$$v_{separação} = v_M + v_m$$

b) Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$mgH_F = \frac{mv`^2_m}{2}$$

$$2gH_F = 9v_M^2 = 18gH$$

$$\Rightarrow H_F = 9H$$

Gabarito: a) $v_M + v_m$ b) $9H$

12. (ITA – 2012)

Apoiado sobre patins niuna superfície horizontal sem atrito, um atirador dispara um projétil de massa m com velocidade v contra um alvo a uma distância d. Antes do disparo, a massa total do atirador e seus equipamentos é M. Sendo v_s a velocidade do som no ar e desprezando a perda de energia em todo o processo, quanto tempo após o disparo o atirador ouviria o ruído do impacto do projétil no alvo?

a) $\dfrac{d(v_s + v)(M - m)}{v(M \cdot v_s - m(v_s + v))}$

b) $\dfrac{d(v_s + v)(M + m)}{v(M \cdot v_s + m(v_s + v))}$

c) $\dfrac{d(v_s - v)(M + m)}{v(M \cdot v_s + m(v_s + v))}$

d) $\dfrac{d(v_s + v)(M - m)}{v(M \cdot v_s - m(v_s - v))}$

e) $\dfrac{d(v_s - v)(M - m)}{v(M \cdot v_s + m(v_s + v))}$

Comentários:

Pela quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow 0 = mv - (M - m)u$$

$$u = \frac{mv}{M - m}$$

O projetil atinge o alvo após um tempo t_1:

$$t_1 = \frac{d}{v}$$

Façamos a função horaria para o atirador e para o som:

$$S_A = d + u \cdot t_1 + u \cdot t$$

$$S_S = v_S \cdot t$$

O atirador ouve o impacto quando $S_A = S_S$, então:

$$d + u \cdot t_1 + u \cdot t_2 = v_S \cdot t_2$$

$$t_2 = \frac{d + u \cdot t_1}{v_S - u}$$

Assim:

$$t_{t_{total}} = t_1 + t_2$$

$$t_{total} = \frac{d \cdot (M - m) \cdot (v_S + v)}{v(M \cdot v_S - m(v_S + v))}$$

Gabarito: A

---

13. (ITA – 2013)

Uma rampa maciça de 120 kg inicialmente em repouso, apoiada sobre um piso horizontal, tem sua declividade dada por $tg(\theta) = 3/4$. Um corpo de 80 kg desliza nessa rampa a partir do repouso, nela percorrendo 15 m até alcançar o piso. No final desse percurso, e desconsiderando qualquer tipo de atrito, a velocidade da rança em relação ao piso é de aproximadamente

a) 1 m/s. b) 3 m/s. c) 5 m/s. d) 2 m/s. e) 4 m/s.

Comentários:

Devido à ausência de forças externas, a posição do centro de massa do sistema não se altera. Assim podemos encontrar o quanto a rampa se deslocou:

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

$$\frac{80 \cdot 12 + 120 \cdot 8}{80 + 120} = \frac{80x + 120(8 + x)}{80 + 120}$$

$$x = 4{,}8\, m$$

Adotando o referencial não inercial e fazendo as equações das forças, temos:

- Para a rampa:

$$Nsen\theta = Ma$$

- Para o bloco:

$$N + ma \cdot sen\theta = mgcos\theta$$

Substituindo a N podemos encontrar a aceleração da rampa:

$$a \cong 2{,}58\, m/s^2$$

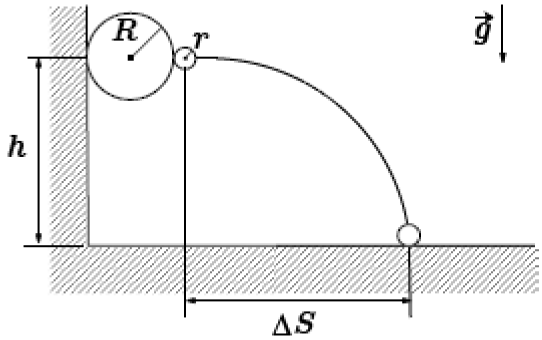
Logo a velocidade da rampa é:

$$v^2 = 2a\Delta S \Rightarrow v = 5m/s$$

Gabarito: C

14. (ITA - 2021)

Uma bola de gude de raio r e uma bola de basquete de raio R são lançadas contra uma parede com velocidade horizontal v e com seus centros a uma altura h. A bola de gude e a bola de basquete estão na iminência de contato entre si, assim como ambas contra a parede. Desprezando a duração de todas as colisões e quaisquer perdas de energia, calcule o deslocamento horizontal ΔS da bolinha de gude ao atingir o solo.



a) $3v\sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$

b) $3v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$

c) $v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$

d) $v\sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$

e) $3v\sqrt{\frac{2(h-R-r)}{g}}$

Comentários:

Como não há perdas nas colisões, todas as colisões podem ser consideradas perfeitamente elásticas. Então, após a bola de basquete colidir com a parede vertical, a velocidade da bola de basquete apenas inverte de sentido, enquanto a bola de gude ainda está se movendo na direção da parede.

Agora, vamos considerar a colisão entre a bola de basquete e a bola de gude (que inicialmente está indo para a esquerda) perfeitamente elástica. Então:

$$Mv - mv = Mu + mw \ (eq. 1)$$

Pelo coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{w - u}{2v} = 1$$

$$u = w - 2v \ (eq. 2)$$

Substituindo 2 em 1, temos:

$$Mv - mv = M(w - 2v) + mw$$

$$(3M - m)v = (M + m)w$$

$$w = \left(\frac{3M - m}{M + m}\right)v$$

Considerando a massa M da bola de basquete é muito maior que a massa m da bolinha de gude, podemos aproximar para:

$$w \cong 3v$$

Então, após as colisões, a bolinha de gude sai horizontalmente com velocidade $3v$. Portanto, o deslocamento horizontal da bola de gude é de:

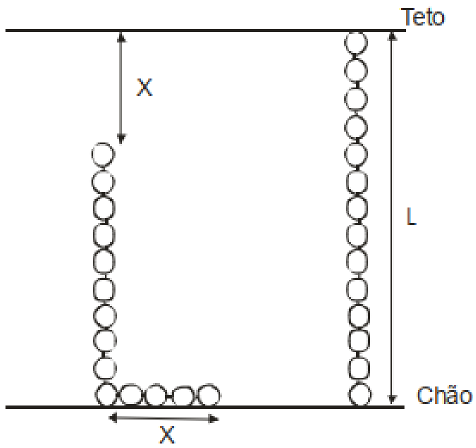
$$\Delta S = 3v \cdot t_q$$

$$\boxed{\Delta S = 3v \cdot \sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}}$$

Gabarito: B

15. (3ª fase OBF – 2010)

Uma corrente de aço de massa M e comprimento L é feita de pequenas argolas entrelaçadas. A corrente esta pendurada na vertical e a parte de baixo toca o chão conforme indicado na figura abaixo. A corrente é então solta e cai na vertical. Considerando x a distância do topo da corrente ao teto, qual será a força (exercida pelo chão) aplicada na corrente durante toda a sua queda. Expresse seu valor como função de M, L, x e g (aceleração gravitacional local).



Comentários:

Em teoria, vimos a abordagem mais geral, utilizando o Cálculo para o caso mais geral possível. Para essa questão da OBF, vamos fazer uma abordagem matemática um pouco diferente, mais parecido ainda com aquilo que pode aparecer na sua prova.

De fato, precisamos determinar a quantidade de movimento do sistema em função do tempo. Observe que somente a parte da corda que ainda não chegou ao solo irá possuir velocidade e essa velocidade será a mesma de uma queda livre, já que a corda não está tracionada e cada parte da corda sofre apenas ação do próprio peso.

Se a densidade linear da corda é constante, então:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Considerando que um pedaço da corda caiu x, então:

$$\Delta m = M \cdot \left(\frac{L - x}{L}\right)$$

Logo, pelo teorema do impulso, a variação da quantidade de movimento do instante 0 a t é dada por:

$$\Delta Q = \Delta Peso \cdot \Delta t \Rightarrow Q = M \cdot \left(\frac{L - x}{L}\right) \cdot g \cdot t$$

Mas $x = \frac{gt^2}{2}$, então:

$$Q = M \cdot g \cdot t - \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L}$$

Agora, se tomarmos um intervalo de tempo muito pequeno (Δt) após esse instante (t), ou seja, $t + \Delta t$ e aplicarmos a equação que acabamos de desenvolver, podemos encontrar a força normal em função do tempo:

$$\Delta Q = F_{resultante} \cdot \Delta t$$

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$\left[M \cdot g \cdot (t + \Delta t) - \frac{M \cdot g^2 \cdot (t + \Delta t)^3}{2 \cdot L}\right] - \left[M \cdot g \cdot t - \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L}\right] = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

Vamos expandir o termo $(t + \Delta t)^3$ e simplificar nossa equação:

$$M \cdot g \cdot \Delta t - (t^3 + 3t^2 \cdot \Delta t + 3t \cdot \Delta t^2 + \Delta t^3) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) + \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L} = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$M \cdot g \cdot \Delta t - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) \cdot \Delta t - \Delta t^2 \cdot (3t + \Delta t) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$M \cdot g - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) - \Delta t \cdot (3t + \Delta t) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = M \cdot g - N$$

Fazendo o intervalo tender a zero, $\Delta t \to 0$, temos:

$$M \cdot g - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = M \cdot g - N$$

$$\therefore \boxed{N = \frac{3 \cdot M \cdot g^2 \cdot t^2}{2 \cdot L}}$$

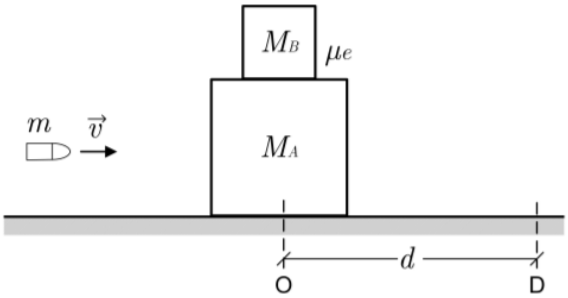
Como $x = \frac{gt^2}{2}$, então:

$$N = \frac{3 \cdot M \cdot g^2 \cdot t^2}{2 \cdot L} \Rightarrow N = \frac{3 \cdot M \cdot g}{L} \cdot \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$\boxed{N = \frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}}$$

Gabarito: $N = \frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}$

16. (IME – 2021)



Um projétil de massa m é disparado com velocidade v contra dois blocos A e B, de massas M_A = 800m e M_B = 199m, que estão inicialmente em repouso, um sobre o outro, conforme mostra a figura. O projétil atinge o bloco A, fazendo o conjunto se movimentar de uma distância d, da posição O até a posição D. Considerando g a aceleração da gravidade local, o coeficiente de atrito estático mínimo μ_e entre os blocos, de modo que o bloco B não deslize sobre o bloco A, é

a) $\frac{v^2}{2 \cdot 10^6 gd}$ b) $\frac{v}{2 \cdot 10^6 gd}$ c) $\frac{v^2}{10^6 gd}$ d) $\frac{v}{3 \cdot 10^6 gd}$ e) $\frac{v^2}{3 \cdot 10^6 gd}$

Comentários:

Por conservação da quantidade de movimento, já que a colisão durante muito pouco tempo, temos:

$$mv = 1000mv'$$

$$v' = \frac{v}{1000}$$

Além disso:

$$0^2 = v'^2 - 2ad$$

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot 10^6 d}$$

Como a força resultante é a força de atrito após a colisão, então:

$$M_A g \mu_e = M_A a$$

$$\mu_e = \frac{v^2}{2 \cdot 10^6 \, gd}$$

Gabarito: A

12. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão

13. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue o teorema do impulso, o que é um sistema isolado, a conservação da quantidade de movimento na colisão e as propriedades do centro de massa.

Essa aula possui muitos exercícios resolvidos e muitos exercícios, pois trata-se de um assunto que requer muito prática. Tente fazer todos os exercícios da lista. É muito comum aparecer questões envolvendo energia mecânica, quantidade de movimento, centro de massa e vínculo geométrico. Normalmente, são questões bem difíceis, por isso colocamos muitas questões na lista e nos simulados exploraremos bastante esse tema.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto