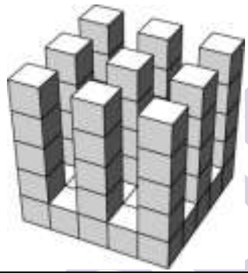
Canguru Brasil 2014 – Nível S – Soluções

3 pontos

1. Retirando alguns cubinhos de lado 1 de um cubo de lado 5, obtemos uma figura sólida composta de colunas de mesma altura sobre uma camada, como na ilustração ao lado. Quantos cubinhos foram retirados?



(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

1. Resposta: alternativa C
Nenhum cubinho foi retirado da camada inferior. Sobraram 9 colunas de um total de 25 colunas de quatro cubinhos empilhados, isto é, foram retirados (25 – 9) x 4 = 64 cubinhos.

2. Hoje é o dia de aniversário de Carla, Emília e Lília. A soma de suas idades é 44. De quanto será esta soma na próxima vez que for novamente um número de dois algarismos iguais?

(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

2. Resposta: alternativa C
Daqui a *x* anos, a soma das idades será 44 + 3*x*; como esse número deve ter dois algarismos iguais, então é um múltiplo positivo de 11; logo, 3*x* também deve ser múltiplo positivo de 11, ou seja, *x* = 11, 22, 33, etc. No caso, o único valor aceitável é 11. Logo, a soma será igual a $44+3\times 11=44+33=77$.

3. Se $a^b=\frac{1}{2}$, qual é o valor de a^{-3b}?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

3. Resposta: alternativa B
Se $a^b=\frac{1}{2}$ então $a^{-3b}=\left(a^b\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8.$

4. Há 48 bolas iguais distribuídas em três cestas de diferentes tamanhos. A menor cesta e a maior cesta, juntas, contêm o dobro do número de bolas da cesta média. A menor cesta contém metade das bolas da cesta média. Quantas bolas há na cesta maior?

(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

4. Resposta: alternativa C
Se *x* é o número de bolas da cesta média, então a maior e a menor cesta contêm juntas 2*x* bolas, logo *x* + 2*x* = 3*x* = 48, ou seja, *x* = 16. Assim, a menor cesta tem 8 bolas e a cesta maior contém $2x-8=32-8=24$ bolas.

Direitos Reservados

5. $\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=?$

(A) 1 (B) 2 (C) 2^{1011} (D) 2^{2012} (E) 2^{2013}

5. Resposta: alternativa B

$\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=\dfrac{2^{2012}\left(2^2-2\right)}{2^{2012}\left(2-1\right)}=2.$

6. Qual das expressões a seguir não contém $b+1$ como fator?

(A) $2b+2$ (B) b^2-1 (C) b^2+b (D) $-1-b$ (E) b^2+1

6. Resposta: alternativa E

$2b+2=2(b+1);$

$b^2-1=(b-1)(b+1);$

$b^2+b=b(b+1);$

$-b-1=-(b+1).$

A expressão b^2+1 não pode ser fatorada no conjunto dos números reais.

7. Quantos algarismos tem o número que é o resultado da multiplicação $\left(2^{22}\right)^5\times\left(5^{55}\right)^2$?

(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

7. Resposta: alternativa E

O número 10^n (*n* natural) tem *n* + 1 algarismos. Então número $\left(2^{22}\right)^5\times\left(5^{55}\right)^2=2^{110}\times5^{110}=10^{110}$ tem 111 algarismos.

8. Juliana tem uma conta secreta de e-mail conhecida por apenas quatro amigas. Hoje ela recebeu oito e-mails nessa conta. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

(A) Juliana recebeu dois e-mails de cada amiga.
(B) É impossível que Juliana tenha recebido os oito e-mails de uma única amiga.
(C) Juliana recebeu pelo menos um e-mail de cada amiga.
(D) Juliana recebeu pelo menos dois e-mails de uma de suas amigas.
(E) Juliana recebeu pelo menos dois e-mails de duas amigas diferentes.

8. Resposta: alternativa D

Como ela recebeu 8 e-mails de suas amigas, que eram 4, podem ter ocorrido várias coisas diferentes. Por exemplo, uma amiga pode ter enviado todos os e-mails ou uma enviou cinco e-mails e cada uma das outras enviou um, etc. O que se pode garantir, pelo princípio da casa dos pombos, é que pelo menos dois e-mails foram enviados por uma de suas amigas.

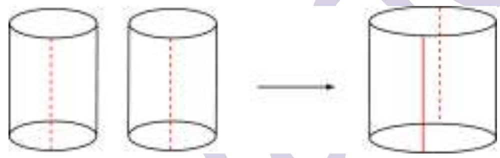
Direitos reservados

9. No número do ano 2014, os algarismos são diferentes e o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos. Antes de 2014, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

9. Resposta: alternativa C
O número procurado deve ter quatro algarismos distintos e o último algarismo deve ser maior que a soma dos outros três. Além disso, deve ser o maior número que é menor do que 2014. Nenhum número com milhar 2 poderá servir. Então o número é da forma 1*XYZ*. O maior valor possível de *Z* é 9 e, para que o número seja o maior possível, devemos ter *X* = 7. Logo, o número é 1709 e isso ocorreu há 2014 – 1709 = 305 anos.

10. O soldador Júlio abriu duas latas cilíndricas iguais paralelamente aos seus eixos (linhas tracejadas, na figura) e as soldou para formar uma lata maior. Se *v* é o volume de cada lata menor e *V* é o volume da lata maior, qual das relações a seguir é verdadeira?



(A) $V=2v$ (B) $V=3v$ (C) $V=2\pi v$ (D) $V=4v$ (E) $V=8v$

10. Resposta: alternativa D
As latas têm a mesma altura, logo as relações entre os volumes dependem apenas das áreas das bases. Se as latas menores têm raio da base igual a *r*, então a circunferência da base de cada uma delas é $2\pi r$ e, ao juntar as duas latas conforme proposto, a circunferência será de 2 x $2\pi r$ = $4\pi r$. Se *R* é o raio da base da lata maior, a circunferência de sua base é $2\pi R$ = $4\pi r$ ou seja, *R* = 2*r*. Logo, a área da base da lata maior será 4 vezes a área da base de cada lata menor, ou seja, *V* = 4*v*.

4 pontos

11. As dimensões de um bloco retangular são *a*, *b*, *c*, tais que $a<b<c$. Aumentando qualquer uma dessas medidas de um mesmo valor positivo, o volume do bloco aumenta. Em qual dos casos o volume do bloco é o maior?

(A) Quando aumentamos *a.*
(B) Quando aumentamos *b.*
(C) Quando aumentamos *c.*
(D) É igual para as três dimensões.
(E) Depende dos valores iniciais de *a*, *b* e *c*.

11. Resposta: alternativa A
O volume do bloco original é igual a $a\cdot b\cdot c$. Seja *x* o aumento (positivo) da dimensão. Temos:

$$a<b<c \Leftrightarrow ax<bx<cx \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ax<bx \\ bx<cx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ax+ab<bx+ab \\ bx+bc<cx+bc \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a(x+b)<b(x+a) \\ b(x+c)<c(x+b) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ac(x+b)<bc(x+a) \\ ab(x+c)<ac(x+b) \end{array}\right. \Leftrightarrow ab(x+c)<ac(x+b)<bc(x+a)$$

Logo, o volume do bloco é o maior quando aumentamos a dimensão *a*.

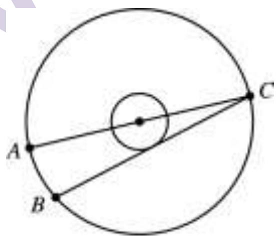
Direitos Reservados

12. Num campeonato de futebol, com quatro times *A*, *B*, *C* e *D*, o vencedor de cada partida ganhou 3 pontos e o perdedor 0 ponto; nos empates, ambos ganharam 1 ponto. Ao final do campeonato, em que todos os times jogaram exatamente uma vez contra os demais times, o time *A* terminou com 7 pontos e os times *B* e *C* terminaram com 4 pontos cada um. Com quantos pontos ficou o time *D*?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

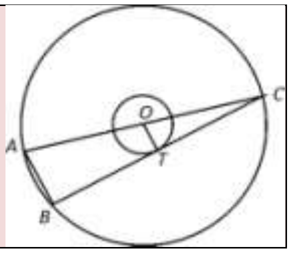
12. Resposta: alternativa B
Como o time A ganhou 7 pontos, ele venceu 2 vezes e empatou 1 vez, pois se ele tivesse vencido apenas 1 vez, teria que ter empatado 4 vezes (são apenas 3 jogos de cada time). Para os times B e C com 4 pontos, só resta a possibilidade de terem vencido 1 vez, empatado 1 vez e perdido 1 vez. Como A não perdeu de nenhum time, B e C ganharam de D. No total houve dois empates, com três possibilidades: (A com B e C com D) ou (A com C e B com D) ou (A com D e B com C). Em qualquer das situações, conclui-se que D perdeu 2 vezes e empatou 1 vez, ficando com apenas 1 ponto na tabela.

13. Na figura, os raios das circunferências concêntricas estão na razão de 1 para 3. A corda BC da circunferência maior é tangente à circunferência menor e a medida do segmento AB é 12. Qual é o raio da circunferência maior?



(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

13. Resposta: alternativa B
Sendo *O* centro das circunferências concêntricas e *T* o ponto de tangência da corda *BC* à circunferência menor, concluímos que os triângulos *OTC* e *ABC* são semelhantes e a razão de semelhança é 1:2. Sendo *AB* = 12, temos *OT* = 6 = raio da menor. Como a razão dos raios é 1:3, o raio da maior é 3 x 6 = 18.



14. Quantos ternos (a,b,c) de números inteiros tais que $a>b>c>1$ satisfazem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?

(A) Nenhum (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Infinitos

14. Resposta: alternativa C
Quanto menor um número positivo, maior o valor do seu inverso. Vejamos o que ocorre com os menores valores das variáveis. Temos $2<3<4$ e $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}>1$ e $2<3<5$ e $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{31}{30}>1$.
Seja $a\geq 6, b=3, c=2$. Temos $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Seja $b\geq 4$. Então $a>4$ e $\frac{1}{b}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{19}{20}<1$, qualquer que seja *c*. Logo, apenas os ternos $(2,3,4)$ e $(2,3,5)$ satisfazem a inequação.

Direitos reservados

15. Sejam a, b, c números reais não nulos e n um inteiro positivo. Sabe-se que os números $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ e $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ têm o mesmo sinal. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

15. Resposta: alternativa D

O sinal da expressão $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ pode ser estudado na tabela abaixo:

fator	$(-2)^{2n+3}$	a^{2n+2}	b^{2n-1}	c^{3n+2}
sinal	–	+	Igual ao de b	+

e o sinal da expressão $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$, na tabela a seguir:

fator	$(-3)^{2n+2}$	a^{4n+1}	b^{2n+5}	c^{3n-4}
sinal	+	Igual ao de a	Igual ao de b	+

Assim, a primeira expressão tem o sinal de $-b$ e a segunda expressão tem o sinal de ab. Assim, se ambas são positivas, b é negativo e a é negativo e se ambas forem negativas, então b é positivo e a é negativo. Logo, teremos sempre $a < 0$.

16. Em seis semanas há $n!$ segundos. Qual é o valor de n?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

16. Resposta: alternativa D

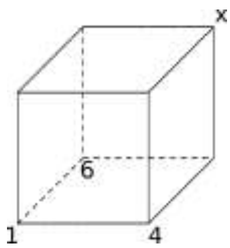
Temos

$$6\times7\times24\times60\times60=(2\times3)\times7\times(2\times2\times2\times3)\times(2\times2\times3\times5)\times(2\times2\times3\times5)=$$

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=10!$$

Logo, n = 10.

17. Os vértices de um cubo são numerados de 1 a 8 de tal forma que a soma dos quatro números nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números 1, 4 e 6 já foram atribuídos a alguns vértices, conforme mostrado na figura. Qual é o número do vértice indicado pelo x?



(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

17. Resposta: alternativa A

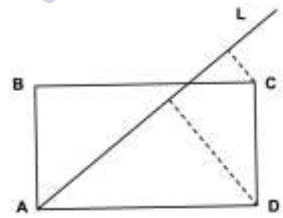
A soma dos números de 1 a 8 é 36. Como os números da face superior e os números da base do cubo devem ter somas iguais, esta só pode ser 18. Assim, o número do vértice que falta na base é 18 – (1 + 4 + 6) = 7. Logo, os números dos vértices da face superior são 2, 3, 5 e 8. Os números da face lateral direita somam 18, logo os números de sua aresta superior, a que tem o vértice de número x, só podem ser 2 e 5 (pois 18 – 11 = 7). Os números dos vértices da aresta superior da face frontal só podem ser 8 e 5 (pois 18 – 5 = 13). Logo, o vértice comum às duas arestas foi numerado com 5, de modo que para x resta o valor 2.

18. O rótulo de uma embalagem de queijo cremoso indica que o mesmo contém 24% de gordura. O mesmo rótulo diz também que há 64% de gordura na parte sólida do queijo (o que sobra após a desidratação). Qual é a porcentagem de água no queijo?

(A) 37,5% (B) 42% (C) 49% (D) 62,5% (E) 88%

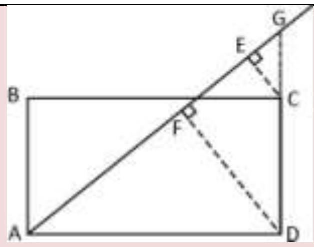
18. Resposta: alternativa D
Se m é a massa da parte sólida do queijo, então a massa de gordura é 0,64m. A massa total do queijo é igual a $m+x$, sendo x a massa de água do queijo. Como a massa de gordura é $0{,}24(m+x)$, temos $0{,}64m=0{,}24(m+x)\Leftrightarrow 0{,}4m=0{,}24x\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}m$. Logo, a massa total do queijo é equivalente a $m+\frac{5}{3}m=\frac{8}{3}m$ e a porcentagem da massa de água relativamente à massa total é $\frac{\frac{5}{3}m}{\frac{8}{3}m}=0{,}625=62{,}5\%$.

19. Uma reta L passa pelo vértice A de um retângulo $ABCD$. A distância do ponto C à reta L é igual a 2 e a distância do ponto D à reta L é igual a 6. Se $AD = 2\,AB$, qual é o valor de AD ?



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

19. Resposta: alternativa A
Prolongando o lado CD até encontrar a reta L, obtemos o ponto G. Sendo E e F os pés das perpendiculares baixadas de C e D sobre L, respectivamente, obtemos os triângulos semelhantes GCE e GDF. Como EC = 2 e FD = 6, concluímos que se $GC = x$, então $GD = 3x$. Logo, $CD = AB = 2x$ e $AD = 4x$. No triângulo retângulo pitagórico ADG, os catetos medem $3x$ e $4x$, logo a hipotenusa mede $5x$. Neste mesmo triângulo, temos $AG\cdot FD=AD\cdot GD$, ou seja, $5x\cdot 6=4x\cdot 3x\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.



Portanto, $AD=4x=4\cdot\frac{5}{2}=10$.

20. A função $f(x) = ax + b$ satisfaz as igualdades $f\left(f\left(f(1)\right)\right) = 29$ e $f\left(f\left(f(0)\right)\right) = 2$. Quanto vale a?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. Resposta: alternativa C

Admitindo a e b reais, temos:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$$f\left(f(0)\right) = f(b) = ab + b$$

$$f\left(f\left(f(0)\right)\right) = f(ab+b) = a(ab+b) + b = a^2b + ab + b = 2.$$

$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$

$$f\left(f(1)\right) = f(a+b) = a(a+b) + b = a^2 + ab + b$$

$$f\left(f\left(f(1)\right)\right) = f\left(a^2 + ab + b\right) = a\left(a^2 + ab + b\right) + b = a^3 + a^2b + ab + b = 29.$$

Logo, $a^3 + 2 = 29 \Leftrightarrow a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$.

5 pontos

21. Considere dez números inteiros positivos distintos, entre os quais exatamente cinco são divisíveis por 5 e exatamente sete são divisíveis por 7. Seja M o maior desses dez números. Qual é o menor valor possível de M?

(A) 63 (B) 75 (C) 77 (D) 105 (E) nenhum dos anteriores

21. Resposta: alternativa E

Os inteiros positivos divisíveis por cinco são 5, 10, 15,..., 35,..., 65, 70,... e os inteiros positivos divisíveis por sete são 7, 14, 21, ..., 35, ..., 63, 70, ...

Os sete menores divisíveis por sete são 7, 14, 21, 28, 35, 42 e 49. Podemos escolher mais três números divisíveis por 5, menores que 49. Esta lista tem 10 números, mas falta um divisível por cinco. Devemos retirar um dos divisíveis somente por sete e acrescentar um divisível por sete e por cinco. O menor desses números é 70. Se M é maior número da lista, então M = 70.

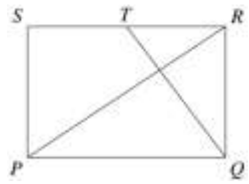
Solução alternativa

Dentre os números considerados, seja A o conjunto dos números divisíveis por 5 e B o conjunto dos números divisíveis por 7. Temos #(A) = 5 e #(B) = 7. Logo,

$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) \leq 10 \Rightarrow 5 + 7 - \#(A \cap B) \leq 10 \Leftrightarrow \#(A \cap B) \geq 2$. Isto significa que dentre os números considerados, há pelo menos dois que são múltiplos comuns de 5 e 7, a saber, 35 e 70. O maior deles é 70. Um exemplo para esta lista é na qual M = 70 é

$\{5, 7, 10, 14, 15, 21, 28, 35, 42, 70\}$

22. Na figura, *T* é o ponto médio do lado *RS* do retângulo *PQRS*. O segmento *QT* é perpendicular à diagonal *PR*. Qual é a razão *PQ*:*QR* ?



(A) $2:1$ (B) $\sqrt{3}:1$ (C) $3:2$ (D) $5:4$ (E) $\sqrt{2}:1$

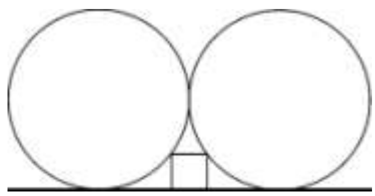
22. Resposta: alternativa E
Sendo *TR* = x, temos *PQ* = 2*x*. Seja *RQ* = *y*. Os triângulos retângulos *TRQ* e *RPQ* são semelhantes, logo $\frac{RQ}{PQ}=\frac{TR}{RQ} \Leftrightarrow \frac{y}{2x}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2=2x^2 \Leftrightarrow y=x\sqrt{2}$. Portanto, $\frac{PQ}{QR}=\frac{2x}{y}=\frac{2x}{x\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$, isto é, a razão *PQ*:*QR* é $\sqrt{2}:1$.

23. Numa reserva ecológica há nove cangurus que são ou prateados ou dourados. Quando três desses cangurus se encontram ao acaso, a probabilidade de que nenhum deles seja prateado é igual a dois terços. Quantos deles são dourados?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

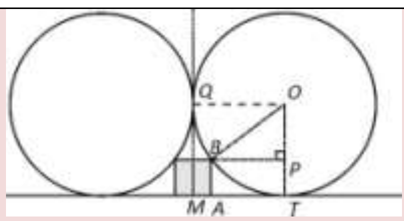
23. Resposta: alternativa E
Seja *n* o número de cangurus não prateados, isto é, dourados. Como há nove cangurus, a probabilidade de três deles que se encontram por acaso serem dourados é
$\frac{n}{9}\cdot\frac{n-1}{8}\cdot\frac{n}{7}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6 \Leftrightarrow n=8$. (única solução inteira da equação de 3º grau).
Portanto, o número de cangurus dourados é 8.

24. Um quadrado, apoiado sobre uma reta, tem os outros dois vértices sobre duas circunferências de raio 1 tangentes entre si e à reta de apoio, conforme figura ao lado. Quanto mede o lado do quadrado?



(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

24. Resposta: alternativa A



Seja *Q* o ponto de tangência entre as duas circunferências e *T* o ponto em que a circunferência de centro *O* tangencia a reta horizontal. Temos *QO* = *OT* = 1. A reta tangente por *Q* encontra o ponto médio *M* do lado do quadrado que contém o vértice *A*. Assim, *QO* = *MT* = 1 e se o lado do quadrado mede 2*x*, então $AT=PB=1-x$. Temos também que $OB=1$ e $OP=1-2x$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $1^2=(1-x)^2+(1-2x)^2 \Leftrightarrow 5x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{1}{5}$. Como o lado do quadrado é menor do que o raio, concluímos que mede $2x=\frac{2}{5}$.

Direitos Reservados

25. Tom pretende escrever vários inteiros positivos distintos e menores do que 101. Além disso, o produto desses números não poderá ser divisível por 54. No máximo, quantos números ele conseguirá escrever?

(A) 8 (B) 17 (C) 54 (D) 68 (E) 69

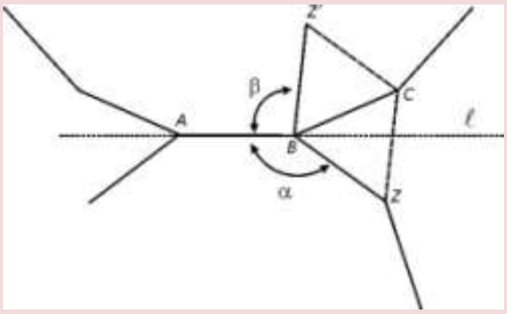
25. Resposta: alternativa E

Como $54 = 2 \cdot 3^3$, podemos eliminar todos os pares ou eliminar os múltiplos de 3, exceto dois números com um fator 3. Eliminamos menos números com a segunda opção, pois há 33 números positivos divisíveis por 3 menores do que 101, enquanto que há 50 números pares positivos menores do que 100. Assim, a quantidade máxima de números que Tom pode escrever é $100 - 33 + 2 = 69$ (por exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, ..., 97,98).

26. Dois polígonos regulares de lado 1 têm em comum apenas o lado *AB*. Um deles é o polígono de 15 lados *ABCD*... e o outro é o polígono de *n* lados *ABZY*... . Para qual valor de *n* a distância *CZ* é igual a 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

26. Resposta: alternativa A



A medida dos ângulos internos de um polígono de 15 lados é igual a $\dfrac{(15-2)\cdot 180^{\circ}}{15} = 156^{\circ}$. Vemos que a reta ℓ contendo o lado *AB* forma com o lado *BC* um ângulo de $180^{\circ} - 156^{\circ} = 24^{\circ}$. O polígono *ABZ*... está no interior ou no exterior do polígono *ABC*..., conforme figura. No primeiro caso, temos $CZ' = 1$ e o triângulo BCZ' é equilátero, de modo que o lado BZ' forma com a reta ℓ um ângulo de $24^{\circ} + 60^{\circ} = 84^{\circ}$ e o ângulo interno do polígono *ABZ'*... é $180^{\circ} - 84^{\circ} = 96^{\circ}$. Sendo *n* o número de lados deste polígono, temos

$$\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n} = 96^{\circ} \Leftrightarrow 180^{\circ} n - 360^{\circ} = 96^{\circ} n \Leftrightarrow n = \frac{360^{\circ}}{84^{\circ}} = \frac{30}{7} \notin N \text{, impossível.}$$

No caso externo, vemos que *BZ* forma $60^{\circ} - 24^{\circ} = 36^{\circ}$ com a reta ℓ, de modo que seu ângulo interno mede $180^{\circ} - 36^{\circ} = 144^{\circ}$. Assim,

$$\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n} = 144^{\circ} \Leftrightarrow 180^{\circ} n - 360^{\circ} = 144^{\circ} n \Leftrightarrow n = \frac{360^{\circ}}{36^{\circ}} = 10 \text{ lados.}$$

27. Nas igualdades $k=(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1$,os números *k*, *m*, *n* são inteiros positivos. Quantos valores distintos *m* pode assumir?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinitos

27. Resposta: alternativa C

Temos $(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1 \Leftrightarrow 2014+m=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^{n} \Leftrightarrow 2014=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^{n}-m$. Como os divisores positivos de 10 são 1,2, 5 e 10, temos:

$$n=1 \Rightarrow 2014=\left(2^{\frac{10}{1}}+1\right)^{1}-m=1025-m \Leftrightarrow m=-989$$

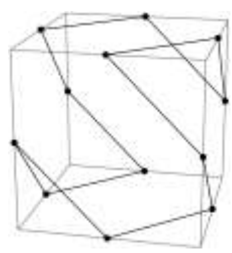
$$n=2 \Rightarrow 2014=\left(2^{\frac{10}{2}}+1\right)^{2}-m=33^2-m=1089-m \Leftrightarrow m=-925$$

$$n=5 \Rightarrow 2014=\left(2^{\frac{10}{5}}+1\right)^{5}-m=5^5-m=3125-m \Leftrightarrow m=1111$$

$$n=10 \Rightarrow 2014=\left(2^{\frac{10}{10}}+1\right)^{10}-m=3^{10}-m=59049-m \Leftrightarrow m=57035$$

Se $n>0$ não é divisor de 10, então o número $2^{\frac{10}{n}}$ não é inteiro, logo $k=2^{\frac{10}{n}}+1$ não é inteiro. Portanto, *m* pode assumir apenas dois valores.

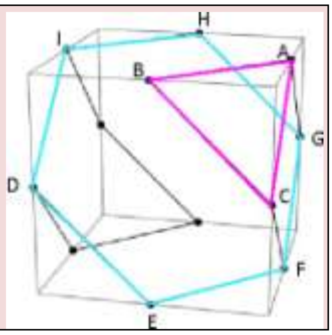
28. Podemos unir os pontos médios das arestas de um cubo para obter um polígono, conforme a figura. Um ângulo interno desse polígono em cada vértice é exatamente o ângulo formado pelos lados que se encontram nesse vértice. Qual é a soma das medidas de todos os ângulos internos desse polígono?



(A) 720$^{\mathrm{O}}$ (B) 1080$^{\mathrm{O}}$ (C) 1200$^{\mathrm{O}}$ (D) 1440$^{\mathrm{O}}$ (E) 1800$^{\mathrm{O}}$

28. Resposta: alternativa B

Como um cubo tem 12 arestas, o polígono tem 12 vértices. Há seis vértices de ângulos agudos e seis vértices de ângulos obtusos, alternados. Os vértices dos ângulos agudos são vértices de um triângulo equilátero (na figura, *ABC*) e os vértices dos ângulos obtusos são vértices de um hexágono regular (*DEFGHI* na figura). Portanto, a soma das medidas de todos os ângulos internos do polígono é $6\times60^{\mathrm{O}}+6\times120^{\mathrm{O}}=1080^{\mathrm{O}}$.



29. A função $f: Z \to Z$ satisfaz as condições $f(4)=6$ e $xf(x)=(x-3)f(x+1)$. Qual é o valor de $f(4)f(7)f(10)\cdot\dots\cdot f(2011)f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) $2013\cdot 2014$ (D) $2013!$ (E) $20114!$

29. Resposta: alternativa D

Temos $xf(x)=(x-3)f(x+1)$ logo, para valores admissíveis de *x*, podemos escrever:

$(x+1)f(x+1)=(x-2)f(x+2)$

$(x+2)f(x+2)=(x-1)f(x+3)$

Assim, $f(x+3)=\dfrac{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot f(x)}{(x-3)(x-2)(x-1)}$.

Como $f(4)=6=1\cdot2\cdot3$, temos $f(7)=f(4+3)=\dfrac{4\cdot(4+1)\cdot(4+2)\cdot f(4)}{(4-3)(4-2)(4-1)}=\dfrac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot1\cdot2\cdot3=4\cdot5\cdot6$,

$f(10)=f(7+3)=\dfrac{7\cdot(7+1)\cdot(7+2)\cdot f(7)}{(7-3)(7-2)(7-1)}=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{4\cdot5\cdot6}\cdot4\cdot5\cdot6=7\cdot8\cdot9$

Indutivamente, temos

$f(13)=10\cdot11\cdot12, f(17)=14\cdot15\cdot16,\cdots, f(2014)=2011\cdot2012\cdot2013$

Logo, $f(4)f(7)f(10)\cdot\dots\cdot f(2011)f(2014)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2011\cdot2012\cdot2013=2013!$

Direitos Reservados

30. Numa floresta mágica perambulam somente três espécies de animais: leões, lobos e cabritos. Os lobos comem cabritos e os leões comem lobos e cabritos. Quando um lobo come um cabrito, transforma-se imediatamente em leão; quando um leão come um cabrito, torna-se um lobo e quando come um lobo, transforma-se em cabrito. Originalmente nessa floresta havia 17 cabritos, 55 lobos e 6 leões. Qual será o maior número possível de animais sobreviventes nessa floresta quando não for mais possível que algum animal coma outro?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35

24. Resposta: alternativa D

Podemos falar de sobreviventes quando restar somente uma espécie. Vamos representar por (x,y,z) a situação que retrata *x* leões, *y* lobos e *z* cabritos. Devemos considerar as três transformações a seguir:

Um lobo come um cabrito: $(x,y,z)\to(x+1,y-1,z-1)$ (a)

Um leão come um cabrito: $(x,y,z)\to(x-1,y+1,z-1)$ (b)

Um leão come um lobo: $(x,y,z)\to(x-1,y-1,z+1)$ (c)

As diferenças entre os números de leões, lobos e cabritos entre duas dessas situações finais é 0, 2 ou – 2. Por exemplo, (b) – (a) dá (– 2, 2, 0) e (c) – (b) dá (0, – 2, 2). Como o número inicial de leões é par e os números de lobos e cabritos são ímpares, as diferenças entre números de leões e lobos e entre números de leões e cabritos serão ímpares. Logo, as situações finais (0, 0, *k*) e (0, *k*, 0), para *k* > 0 são impossíveis. Disto concluímos que se sobrar apenas uma espécie, esta será de leões.

A partir da situação inicial $(6,55,17)$, suponhamos que ocorram *a* transformações (a), *b* transformações (b) e *c* transformações (c). A situação dos sobreviventes será retratada pelo terno $(6+a-b-c;55-a+b-c;17-a-b+c)$ (*). Como não devem restar lobos e cabritos e o número *M* de sobreviventes leões deve ser o maior possível, temos:

$$\begin{vmatrix}55-a+b-c=0\\17-a-b+c=0\\6+a-b-c=M\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a-b+c=55\\a+b-c=17\\M=6+a-b-c\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2a=72\\a+b-c=17\\M=6+a-b-c\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a=36\\c-b=19\\M=42-b-c\end{vmatrix}$$

Temos duas possibilidades:

a) $c=19+b$ e, substituindo na terceira equação, temos $M=42-b-(19-b)=23-2b$. Sabendo que $b\geq 0$, concluímos que $-2b\leq 0\Leftrightarrow 23-2b\leq 23\Rightarrow M\leq 23$.

b) $b=c-19$ e, substituindo na terceira equação, temos $M=42-(c-19)-c=61-2c$. Mas $c\geq 0$, logo $-2c\leq 0\Leftrightarrow 61-2c\leq 61\Rightarrow M\leq 61$.

Dessas duas cotas, a melhor é a primeira. Vamos supor então que *M* = 23. Teremos

$$\begin{vmatrix}c-b=19\\23=42-b-c\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}c-b=19\\b+c=19\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}b=0\\c=19\end{vmatrix}.$$

A situação final deverá ser, então, $(23,0,0)$ (substitua os valores em (*)). Veja uma possível sequência de operações em que isto pode ser feito:

$(6,55,17)\xrightarrow{\text{17 lobos comem 17 cabritos}}(23,38,0)\xrightarrow{\text{19 leões comem 19 lobos}}(4,19,19)$

$\xrightarrow{\text{19 lobos comem 19 cabritos}}(23,0,0)$.