Obtenha os pontos de interseção de t e ℓ nos casos:

1. $t: x - 2y = 0$ e $\ell: x^2 + y^2 = 5.$

RETA CIRCUNFERÊNCIA

Motando um sistema das duas equações, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2):

$(2y)^2 + y^2 = 5$

$4y^2 + y^2 = 5$

$5y^2 = 5$

$y = \pm\sqrt{1}$ → $y' = -1$, $y'' = 1$

Voltando à (1):

$x' = 2 \cdot (-1)$ $x'' = 2 \cdot 1$

$x' = -2$ $x'' = 2$

$(-2, -1)$ e $(2, 1)$

$\boxed{(-2, -1)\ e\ (2, 1)}$

2. $t: 2x - y + 1 = 0$ e $\ell: x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0.$

RETA CIRCUNFERÊNCIA

Encontrando a equação reduzida da circunferência:

$X_c = \frac{D}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$

$Y_c = \frac{E}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$

$R^2 = x_c^2 + y_c^2 - F$

$R^2 = 2^2 + 0^2 - (-21)$

$R = \sqrt{25} = 5$

Portanto: $(x-2)^2 + y^2 = 25$

Motando um sistema das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1 & (1) \\ (x-2)^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2):

$(x-2)^2 + (2x+1)^2 = 25$

$(x^2 - \cancel{4x} + 4) + (4x^2 + \cancel{4x} + 1) = 25$

$5x^2 + 5 - 25 = 0$

$5x^2 - 20 = 0$

$x^2 = \frac{20}{5}$

$x = \pm\sqrt{4}$ → $x' = -2$, $x'' = 2$

Voltando à (1):

$y' = 2 \cdot (-2) + 1$

$y' = -4 + 1 = -3$

$y'' = 2 \cdot 2 + 1$

$y'' = 4 + 1 = 5$

$(-2, -3)$ e $(2, 5)$

$\boxed{(-2, -3)\ e\ (2, 5)}$

3. $t: y = 1 - x$ e $\ell: 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$

RETA CIRCUNFERÊNCIA

$y = 1 - x \Rightarrow y + x - 1 = 0$

Organizando a equação da circunferência:

$\frac{2x^2 + 2y^2 - 1 = 0}{2}$

$x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0$

Portanto: $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Motando um sistema das duas equações, temos:

$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x & (1) \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2):

$x^2 + (1-x)^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 + (x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2}$

$2x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{2} = 0$

$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \quad \div 2$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

Da Fórmula de Bhaskara:

$x' = x'' = \frac{1}{2}$

Voltando à (1):

$y' = y'' = 1 - \frac{1}{2}$

$y' = y'' = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

4. Calcule o comprimento da corda que o eixo X determina na circunferência $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 16 = 0.$

Encontrando a equação reduzida da circunferência:

$$x^2 + y^2 \underbrace{-10x}_{D} \underbrace{-12y}_{E} + \underbrace{16}_{F} = 0.$$

$X_c = \frac{D}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$

$Y_c = \frac{E}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$

$R^2 = x_c^2 + y_c^2 - F$

$R^2 = 5^2 + 6^2 - 16$

$R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Portanto: $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 45$

Os pontos onde a corda formada pelo eixo X corta a circunferência são aqueles onde $y = 0$!

$(x-5)^2 + (0-6)^2 = 45$

$x^2 - 10x + 25 + 36 - 45 = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

Da Fórmula de Bhaskara:

$x' = 2 \quad x'' = 8$

$d_{P1,P2}^2 = (x_{P1} - x_{P2})^2 + (y_{P1} - y_{P2})^2$

$d_{P1,P2}^2 = (2-8)^2 + 0$

$d_{P1,P2} = \sqrt{36} = 6$

Tem-se os pontos $P_1(2,0)$ e $P_2(8,0)$

$\boxed{6}$

Verifique qual é a posição de cada reta dada em relação à circunferência $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 36.$

TROCA O SINAL

$X_c = 4$

$Y_c = 3$

$R^2 = 36$

$R = \sqrt{36}$

$R = 6$

5. Reta $t: 3x + 4y + 5 = 0$

$$d_{c,t} = \left|\frac{3x + 4y + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{29}{5}\right| = \frac{29}{5} = 5{,}8$$

$5{,}8 < 6 \Rightarrow d_{c,t} < R \Rightarrow$ Secante

Secante.

6. Reta $u: 3x + 4y + 6 = 0$

$$d_{c,u} = \left|\frac{3x + 4y + 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{30}{5}\right| = 6$$

$6 = 6 \Rightarrow d_{c,u} = R \Rightarrow$ Tangente

Tangente.

7. Reta $v: 3x + 4y + 7 = 0$

$$d_{c,v} = \left|\frac{3x + 4y + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 7}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{31}{5}\right| = \frac{31}{5} = 6{,}2$$

$6{,}2 > 6 \Rightarrow d_{c,v} > R \Rightarrow$ Exterior

Exterior.

Verifique qual é a posição da reta $8x - 6y - 5 = 0$ em relação a cada circunferência:

8. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

TROCA O SINAL.

$X_c = 2$

$Y_c = 1$

$R^2 = 1$

$R = \sqrt{1}$

$R = 1$

$$d_{c,r} = \left|\frac{8x - 6y - 5}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}\right| = \left|\frac{8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 5}{\sqrt{100}}\right| = \left|\frac{5}{10}\right| = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$0{,}5 < 1 \Rightarrow d_{c,r} < R \Rightarrow$ Secante

Secante.

9. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$

TROCA O SINAL.

$X_c = 1$

$Y_c = 3$

$R^2 = 1$

$R = \sqrt{1}$

$R = 1$

$$d_{c,r} = \left|\frac{8x - 6y - 5}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}\right| = \left|\frac{8 \cdot 1 - 6 \cdot 3 - 5}{\sqrt{100}}\right| = \left|\frac{-15}{10}\right| = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$1{,}5 > 1 \Rightarrow d_{c,r} > R \Rightarrow$ Exterior

Exterior.

10. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

TROCA O SINAL.

$X_c = 4$

$Y_c = 4$

$R^2 = 1$

$R = \sqrt{1}$

$R = 1$

$$d_{c,r} = \left|\frac{8x - 6y - 5}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}\right| = \left|\frac{8 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - 5}{\sqrt{100}}\right| = \left|\frac{3}{10}\right| = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$0{,}3 < 1 \Rightarrow d_{c,r} < R \Rightarrow$ Secante

Secante.

11. Para que valor de c a reta $3x - 4y + c = 0$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$?

$d_{c,r} = R$

$d_{c,r} = 2$

$X_c = 0$

$Y_c = 0$

$R^2 = 4$

$R = \sqrt{4}$

$R = 2$

$$d_{c,r} = \left|\frac{3x - 4y + c}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{c}{5}\right|$$

$\left|\frac{c}{5}\right| = 2 \Rightarrow c = \pm 10$

$\boxed{c = \pm 10}$