XIV OLIMPIADA MATEMÁTICA DE PAÍSES DEL CONO SUR

Primeiro dia

1. Em um torneio de futebol entre quatro equipes, A, B, C e D, cada equipe joga com cada uma das outras exatamente uma vez.

a) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	7
Gols sofridos	4	4	4	5

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

b) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	13
Gols sofridos	4	4	4	11

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

2. Considere a seqüência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

$$a_1=1$$
$$a_2=3$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1}\, a_n + 1, \text{ para todo inteiro } n \geq 1.$$

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

3. Seja ABC um triângulo acutângulo tal que o ângulo B mede 60° . A circunferência de diâmetro AC intersecta as bissetrizes internas de A e C nos pontos M e N respectivamente ($M \neq A$, $N \neq C$). A bissetriz interna do ângulo B intersecta MN e AC nos pontos R e S, respectivamente. Demonstrar que $BR \leq RS$.

Ica, 27 de maio de 2003.

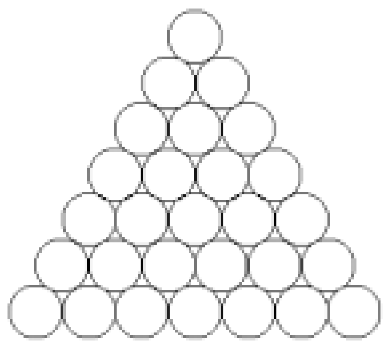
Duração: 4 horas

XIV OLIMPIADA MATEMÁTICA DE PAÍSES DEL CONO SUR

Segundo dia

4. No triângulo acutângulo *ABC*, os pontos *H*, *G* e *M* encontram-se sobre o lado *BC*, de modo que *AH*, *AG* e *AM* são altura, bissetriz e mediana do triângulo, respectivamente. Sabe-se que *HG* = *GM*, *AB* = 10 e *AC* = 14. Determinar a área do triângulo *ABC*.

5. Seja $n = 3k + 1$, onde k é um inteiro, $k \geq 1$. Constrói-se um arranjo triangular de lado n formado por círculos de mesmo raio como o mostrado na figura para $n = 7$.



   Determinar, para cada *k*, o maior número de círculos que podem ser coloridos de vermelho de tal modo que não existam dois círculos vermelhos tangentes entre si.

6. Demonstrar que existe uma seqüência de inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que satisfaz as duas condições seguintes:

   (i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,
   (ii) para cada $n = 1, 2, \ldots$ a soma parcial $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ é divisível por n^n.

Ica, 28 de maio de 2003.

Duração: 4 horas