LISTA TURMA ESPECIAL

10 DE ABRIL

CLEUBER NASCIMENTO

Álgebra

Problem. 1)(**OCM**) Quais valores inteiros a e b positivos existem, para que:

$$\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4$$

Problem. 2) Seja $n > 1$, podemos afirmar que o número $\sqrt{\underbrace{11111.1}\underbrace{4444...4}}$ que possui n 1's e 2n 4's.

a) Pertence aos racionais

b)Pertence aos inteiros

c) Pertence aos Irracionais

d) Não é real

Problem. 3) Racionalize a expressão abaixo:

$$\boxed{\frac{1}{\left(1+\sqrt[64]{2}\right)\left(1+\sqrt[32]{2}\right)\left(1+\sqrt[16]{2}\right)\left(1+\sqrt[8]{2}\right)\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt[2]{2}\right)}}$$

Problem. 4) Resolva em $\mathbb{R}$a equação $\lfloor x^3 \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \{x\}$, onde $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de x e $\{x\}$representa a x.

Problem. 5) Resolva o sistema de equações abaixo:

$$\boxed{\begin{cases} 7x = 11y \\ mdc(x,\, y) = 45 \end{cases}}$$

Problem. 6)Determine o conjunto solução $S = \{(x, y)/x,\, y \in \mathbb{N}\}$ da equação

$$(x + y)k = xy$$

sabendo que k é um número primo.

Problem. 7) Sabe -se que $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$, para todo $a \in \mathbb{R}$, resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 4,2 \\ y + \lfloor z \rfloor + \{x\} = 3,6 \\ z + \lfloor x \rfloor + \{y\} \end{cases}$$

com x,y e z inteiros. Determine $x - y + z$

Problem. 8) Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possiveis valores de n, p e q.

Problem. 9) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação

$$\lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{3} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[3]{x^3 - 1} \rfloor = 400$$

Geometria

Problem. 1) No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.

Problem. 2)(*Cone Sul)* Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a interseção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero$ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

Problem. 3)Prove que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo ABC é mínima quando P é o baricentro do triângulo.

Problem. 4)(OBM) Seja N o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $\overline{AN} = 2\overline{NC}$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB . Sabendo que $AC = 12cm$ e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.

Problem. 5)Seja ABC um triângulo e sejam E e D pontos sobre o lado BC tal que $CE = ED = DB$. Seja F o ponto médio de AC e G o ponto médio de AB. Seja H a interseção de EG e FD. Determine o valor de $\frac{EH}{HG}$.

Problem. 6) E é um ponto no lado AD do retângulo $ABCD$, tal que $DE = 6$, $DA = 6$. Se prolongarmos CE até interceptar o circuncírculo em F, encontre o valor da corda DF.

Problem. 7)Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Seja I o ponto de encontro das diagonais AC e BD; M, N, P e Q são as projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um quadrilátero circunscritível a uma circunferência com centro em I.

Problem. 8)(*SELEÇÃO PARA A OLIMPÍADA DO CONE SUL – 98*) No triângulo ABC, temos $BC = 2AC$. Seja M o ponto médio de BC. A reta passando por M e tangente à circunferência inscrita em ABC encontra o lado AB no ponto N. Encontre o valor de $\frac{AN}{AB}$.