ELSEVIER

IACI MALTA SINÉSIO PESCO HÉLIO LOPES

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 2

DERIVADA E INTEGRAL

CAMPUS

EDITORA PUC RIO

ELSEVIER

IACI MALTA SINÉSIO PESCO HÉLIO LOPES

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 2

DERIVADA E INTEGRAL

CAMPUS

EDITORA PUC RIO

IACI MALTA SINÉSIO PESCO HÉLIO LOPES

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 2

DERIVADA E INTEGRAL

ELSEVIER

EDITORA PUC RIO

CAMPUS

© 2015, Elsevier Editora Ltda.

Todos os direitos reservados e protegidos pela Lei nº 9.610 de 19/02/1998. Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Elsevier Editora Ltda.
Conhecimento sem Fronteiras

Rua Sete de Setembro, 111 – 16º andar
20050-006 – Centro – Rio de Janeiro – RJ
Rua Quintana, 753 – 8 º andar
04569-011 – Brooklin – São Paulo – SP
Serviço de Atendimento ao Cliente
0800-0265340
sac@elsevier.com.br

Nota: Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceitual. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação ao nosso Serviço de Atendimento ao Cliente, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão. Nem a editora nem o autor assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

Revisão: Nina Luna

Editoração eletrônica: Yunelsy Nápoles

Capa: Guilherme Xavier

Produção digital: Freitas Bastos

PUC RIO

Em coedição com: Editora PUC-Rio
Rua Marquês de S. Vicente, 225
Casa Editora/Projeto Comunicar
22451-900 – Gávea
Rio de Janeiro – RJ
Tel.: (21)3527-1838/1760
www.puc-rio.br/editorapucrio

Reitor
Pe. Josafá Carlos de Siqueira SJ

Vice-reitor
Pe. Francisco Ivern Simó SJ

Vice-reitor para Assuntos Acadêmicos
Prof. José Ricardo Bergmann

Vice-reitor para Assuntos Administrativos
Prof. Luiz Carlos Scavarda do Carmo

Vice-reitor para Assuntos Comunitários
Prof. Augusto Luiz Duarte Lopes Sampaio

Vice-reitor para Assuntos de Desenvolvimento
Prof. Sergio Bruni

Decanos
Prof. Paulo Fernando Carneiro de Andrade (CTCH)
Prof. Luiz Roberto A. Cunha (CCS)
Prof. Luiz Alencar Reis da Silva Mello (CTC)
Prof. Hilton Augusto Koch (CCBM)

Conselho editorial
Augusto Sampaio, Cesar Romero Jacob, Fernando Sá, Hilton Augusto Koch, José Ricardo Bergmann, Luiz Alencar Reis da Silva Mello, Luiz Roberto A. Cunha, Miguel Pereira, Paulo Fernando Carneiro de Andrade e Sergio Bruni.

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte.
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

M226c
v. 2 Malta, Iaci Pereira
Cálculo a uma variável, volume II: derivada e integral / Iaci Malta, Helio Lopes, Sinesio Pesco. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Elsevier: PUC-Rio, 2015.
300 p.: il.

Inclui bibliografia e índice
ISBN (Elsevier): 978-85-352-5458-7
ISBN (PUC-Rio): 978-85-8006-164-2

1. Matemática - Estudo e ensino. I. Lopes, Helio. II. Pesco, Sinésio. III. Título.III. Título.

CDD: 510
15-20440 CDU: 51

Agradecimentos

Queremos agradecer a Geovan Tavares dos Santos, que coordenou o projeto Matmídia do Departamento de Matemática da PUC-Rio e cujo empenho foi muito importante para a publicação deste livro pela Editora PUC-Rio/Edições Loyola.

Agradecemos também a Edições Loyola e à Editora PUC-Rio, que além de publicarem o livro durante 12 anos, proporcionaram a oportunidade de que o mesmo recebesse a *Menção Honrosa* do Prêmio Jabuti, 2003.

Agradecemos especialmente a Gilda Palis, com quem foram feitas as primeiras discussões e avaliações que resultaram no programa para uma introdução ao cálculo. Dirce Uesu Pesco também merece nossos agradecimentos especiais pelo apontamento cuidadoso de vários erros que apareciam nas diversas versões em apostilas. Agradecemos também a Carlos Tomei, Paul Schweitzer, George Svetlichny, Sérgio Volchan, Marcos Craizer e Humberto Bortolossi pelas valiosas sugestões e críticas, a Tatiana Iwashita e Marco Antonio Pinto Fibger, que colaboraram na preparação das respostas aos exercícios, a Jessica Quintanilha Kubrusly e Felipe Duarte Cardozo de Pina, pela revisão das respostas dos exercícios do volume II, a Tina Velho que se responsabilizou pelas figuras do texto, a José Cal Neto e Leonardo Navarro de Carvalho, que prepararam a versão em LATEX para a primeira apostila e a Yunelsy Nápoles Alvarez, responsável pelo novo formato em LATEX do volume 1 e 2.

Finalmente, agradecemos a Andre Wolff, da Editora Elsevier, pelo seu empenho em estabelecer uma parceria com a Editora PUC-Rio que viabilizou esta nova edição do livro.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes

Ao Estudante

Em geral a leitura de um texto matemático não é fácil. Além de ser necessária uma certa desenvoltura de leitura em geral, a compreensão de um texto matemático necessita de um mínimo de conhecimento da linguagem e da lógica matemáticas, razão pela qual iniciamos este livro tratando desse tema. Uma das coisas que pode atrapalhar o aproveitamento de um texto matemático é a expectativa de *entender* o que está sendo lido no sentido de identificar algo que já se conheça. Na verdade, praticamente tudo o que está nesse texto é, provavelmente, novo para você. Assim, não se assuste com o fato de não estar *entendendo*, pois a sua compreensão só pode ocorrer como resultado de um trabalho para aprender o conteúdo apresentado. Talvez seja importante pensar que você, além do cálculo, também estará aprendendo a aprender.

Por isso, além de fornecer informações de conteúdo matemático este texto tem, igualmente, o objetivo de ajudá-lo a desenvolver sua capacidade de raciocínio organizado, assim como de desenvolver sua capacidade de expressar com clareza e de forma organizada o seu raciocínio.

Assim, para que esse objetivo seja atingido, ao fazer um exercício você deve sempre justificar com clareza suas conclusões, isto é, descrever os passos que o levaram à solução do exercício relacionando-os com as propriedades e teoremas que foram usados. Isso o auxiliará, inclusive, na própria compreensão dos conceitos, propriedades e teoremas. Pense que cada exercício resolvido é um exemplo da aplicação dos conceitos e teoremas que foi construído por você. Estudar com o objetivo de decorar conceitos e técnicas não é produtivo. A memorização de conceitos, técnicas e teoremas ocorre naturalmente quando resolvemos exercícios atentos para os processos que conduzem às suas soluções.

Os exercícios estão distribuídos ao longo de cada capítulo de tal forma que você possa o quanto antes testar sua compreensão dos conteúdos apresentados. A ideia é que os primeiros exercícios de cada seção sejam feitos com consulta imediata ao texto, de forma que a utilização dos conceitos e teoremas na resolução dos exercícios o ajude a compreender o conteúdo de cada seção. Ao resolver um exercício sempre procure responder a pergunta *para que este exercício serve? Qual é a sua relação com a teoria?* Isso também poderá ajudá-lo em seu aprendizado, já que os exercícios são elaborados também para destacar o que há de mais importante em cada seção.

Você pode encontrar resposta para a maioria dos exercícios na seçãorespostas, mas é importante ter em mente que a maioria das respostas não contém justificativas. Assim, a confirmação da sua solução é apenas parcial, e sua melhor garantia é a referência que você mesmo faz aos teoremas (ou propriedades) usadas para chegar à solução.

O curso cujo conteúdo é o tema deste livro é, provavelmente, seu primeiro contato com a Matemática (no caso, o Cálculo) apresentada da forma como se faz Matemática. Esperamos que, independentemente de sua apreciação da beleza do cálculo, você descubra que o método que você desenvolveu para aprender cálculo é útil para aprender qualquer outro assunto.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes

Sumário

Apresentação

O material que compõe este livro começou a ser escrito quando fui convidada a organizar um programa para uma disciplina de Matemática que preparasse alunos das áreas de Biologia e Agronomia para um primeiro curso de cálculo tradicionalmente dirigido a alunos da área de ciências exatas.

As ideias que nortearam minha proposta para tal disciplina, denominada então Cálculo 0, foram, basicamente, olhar para o aluno como um jovem recém ingresso na universidade, em oposição a tratá-lo como um estudante secundário (que em geral é considerado apto a apenas ser treinado na execução de alguns algoritmos), buscar meios e conteúdos que viessem a desenvolver suas capacidades de raciocínio e expressão organizados, capacidades estas imprescindíveis para uma efetiva compreensão da Matemática, assim como já introduzi-los no contexto numérico, isto é, no contexto do cálculo aproximado e dos recursos computacionais.

Daí resultou o que é apresentado nos primeiros seis capítulos deste livro que compõem o primeiro volume *Uma introdução ao cálculo*.

O capítulo 1, *Elementos da linguagem e da lógica matemáticas*, já reflete esse "olhar para o jovem universitário" e sua presença no programa tem o objetivo de permitir a passagem do "apenas aprender a fazer" para o "aprender a fazer compreendendo o que faz". A inclusão desse tema no livro refiete minha convicção, forjada no ensino de matemática na universidade, de que, para a maioria das pessoas, o aprendizado das regras mínimas da lógica matemática não ocorre espontaneamente a partir do aprendizado de alguns algoritmos matemáticos.

O capítulo 2, *Os números reais*, além de fornecer conteúdo já familiar, com o qual se pode promover a fixação da linguagem e das regras da lógica matemática, introduz os conceitos de aproximação e erro, a noção de cálculo aproximado.

O tema sequências de números reais, tradicionalmente evitado em cursos de cálculo, é apresentado no capítulo 3, e aí está para o que serve: introduzir, do ponto de vista conceitual, o aluno no mundo dos algoritmos que, com a acessibilidade aos computadores, se tornou o mundo daqueles que utilizam a matemática. Além disso, considero que a utilização de sequências para definir limites de funções é bem mais eficiente em promover a compreensão desse difícil e importante conceito.

No capítulo 4, *Funções reais*, uma ênfase especial é dada ao que denominamos *leitura gráfica*, isto é, à relação entre propriedades algébricas e geométricas (gráficas) de uma função. Também é discutida a utilização de programas gráficos para o estudo do comportamento de funções reais.

O capítulo 5, *Continuidade e limites de funções reais*, reforça o objetivo de introduzir o aluno no mundo (real) do cálculo aproximado: apresenta o conceito de função contínua não como resultado da imaginação criativa de matemáticos, mas sim como uma necessidade prática já que as funções contínuas são aquelas com as quais, efetivamente, se pode fazer cálculos aproximados. Tanto o conceito de continuidade como o de limite de função são introduzidos a partir do conceito de seqüência convergente. Essa opção se deve à minha convicção de que o conceito de limites de sequências é mais acessível à compreensão pelo fato de representar um processo discreto.

No capítulo 6, *As funções elementares*, são utilizados os recursos desenvolvidos nos capítulos anteriores para introduzir e estudar as funções elementares algébricas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Nesse capítulo também aproveitamos o conceito de sequência convergente, agora para construir as funções exponenciais. Essa opção tem a vantagem de introduzir as exponenciais e logarítmicas antes de derivada e integral e de dar um significado menos misterioso à exponencial de um número, isto é, o número que pode ser calculado por aproximações obtidas por meio de operações familiares, a exponenciação inteira e a radiciação.

Os capítulos que tratam do cálculo diferencial e integral, e que compõem o segundo volume, são basicamente tradicionais, exceto por uma maior ênfase nos aspectos numérico e conceitual. Por exemplo, como motivação para a introdução do conceito de derivada, foi escolhida a aplicação do Método de Newton para encontrar aproximações da raiz quadrada de dois.

Com relação ao cálculo integral, a opção adotada foi começar pela introdução do conceito de integral definida (em oposição à antiderivação). Essa escolha foi feita pelo fato de que soluções aproximadas de um problema revelam diretamente que sua solução resulta numa integral quando as aproximações obtidas são identificadas como somas de Riemann. Em particular, a independência dos dois conceitos, derivada e integral, fica destacada e sua relação é, então, dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. A escolha do problema do cálculo do comprimento de arco para motivar a introdução do conceito de integral definida, em vez do tradicional problema de cálculo de áreas, teve o objetivo de desvincular a integral definida do conceito de área, já que em geral o problema que é resolvido por uma integral não tem nenhuma relação com a área da região determinada pelo gráfico da função que está sendo integrada. De fato, neste texto, integrais definidas são usadas para definir de uma região determinada pelo gráfico de uma função contínua.

Pode-se dizer que o tratamento dado ao conteúdo matemático deste livro aponta para um enfoque mais conceitual. De fato, a ênfase num treinamento extensivo na execução de algoritmos usados em cálculos exatos se tornou inadequada devido à realidade atual de grande acessibilidade aos recursos computacionais (programas poderosos que fazem qualquer coisa). Por outro lado, uma compreensão mais conceitual se tornou necessária, no sentido de fornecer recursos para uma análise crítica de resultados obtidos por intermédio de programas computacionais.

De uma maneira geral, aquilo que neste livro pode ser visto como um tratamento formal tem por objetivo ajudar o aluno a desenvolver sua capacidade de compreensão de um texto matemático e não a precisão matemática em si. Assim, demonstrações são encaradas mais como uma exemplificação do processo de obtenção de resultados matemáticos do que como provas da validade dos resultados.

Esse enfoque mais conceitual nos processos, em oposição ao enfoque na execução de algoritmos, e a preocupação com o desenvolvimento da capacidade de compreensão direta de um texto matemático refletem o pressuposto de que a universidade deve, prioritariamente, formar um autodidata. De fato, a velocidade com que novos conhecimentos são gerados atualmente aponta para a necessidade do desenvolvimento da capacidade de auto aprendizado.

No que diz respeito à modelagem matemática, apenas alguns exemplos são apresentados neste livro. A opção de sacrificar esse tema em favor do conteúdo matemático foi feita não pela pouca importância que nós, autores, damos a esse tema, mas sim pelo fato de que, devido à formação prévia do aluno que recém ingressa na universidade, problemas que pressupõem apenas conceitos de outras áreas já do domínio do aluno resultam ser artificiais e pouco interessantes. Em verdade, dada a grande importância desse tema, consideramos que o mesmo merece um tratamento especial, isto é, um texto diretamente dedicado à modelagem matemática, no qual o cálculo (diferencial e integral) seja apenas aplicado e os conceitos de outras áreas envolvidos na formulação dos problemas sejam devidamente abordados.

No que diz respeito aos exercícios, optamos por apresentar exercícios simples, no sentido de não necessitarem de ideias muito elaboradas para sua solução. Tratam-se de exercícios cujas soluções são praticamente imediatas à compreensão do conteúdo matemático apresentado, e a ideia é que o aluno adquira o domínio do processo (conceitos e resultados utilizados) que o conduziu à solução. Assim, os exercícios privilegiam o aspecto conceitual, embora o caráter de treinamento no domínio de algoritmos não esteja ausente.

As informações históricas contidas neste livro foram obtidas em

Mathematics – its content, methods, and meaning (segunda edição, 1965) – publicação em russo editada por A. D. Alekasandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lvrent'ev e publicação em inglês editada por S. H. Gould – MIT Press e AMS.

Iaci Malta

CAPÍTULO 7

A Derivada

O conceito de derivada é o conceito fundamental do Cálculo, pois fornece o instrumento mais poderoso para o estudo do comportamento de funções reais. Sua formulação foi feita independentemente por Isaac Newton e Geottfried Leibniz no século dezessete e, podemos dizer, de uma maneira simples, que o conceito de derivada nasceu da necessidade de se quantificar a variação de uma função, isto é, o modo como a função varia.

Se uma função é contínua, então pequenas variações da variável x geram pequenas variações dos valores da função mas, até comparando funções contínuas bastante simples, podemos ver que uma mesma pequena variação de x pode gerar variações muito diferentes dos valores das funções. O conceito de derivada nos permite quantificar essas diferenças de variação, sendo, portanto, um instrumento muito importante para o estudo do comportamento de funções reais.

Por outro lado, o conceito de derivada é o elemento de que necessitamos para poder falar de uma reta tangente ao gráfico de uma função, generalizando a ideia bastante familiar de reta tangente a um círculo.

Neste capítulo, introduzimos os conceitos de derivada e reta tangente ao gráfico de uma função derivável, bem como apresentamos as propriedades do processo de derivação e as derivadas das funções elementares. A utilização de derivadas no estudo do comportamento de funções e outras aplicações da derivada são objeto do próximo capítulo.

Como nos capítulos anteriores, demonstrações de alguns resultados (indicados com o símbolo *) enunciados neste capítulo são dadas em seu apêndice.

1. O conceito de derivada

O conceito de reta tangente a um círculo já nos é bastante conhecido: a *reta tangente a um círculo no ponto p* é caracterizada pela propriedade de interceptar o círculo somente no ponto p.

Com a familiaridade que temos com o gráfico da função $\phi(x) = x^2$, que é uma parábola, facilmente nos convencemos de que parábolas se comportam em relação a retas não verticais da mesma maneira que círculos o fazem e, portanto, deve ser possível estender, para o gráfico de $\phi(x) = x^2$, o conceito de reta tangente:

> *a reta tangente ao gráfico de* ϕ *em* x_0 *é a reta não vertical que intercepta o gráfico somente no ponto* $(x_0, \phi(x_0))$.

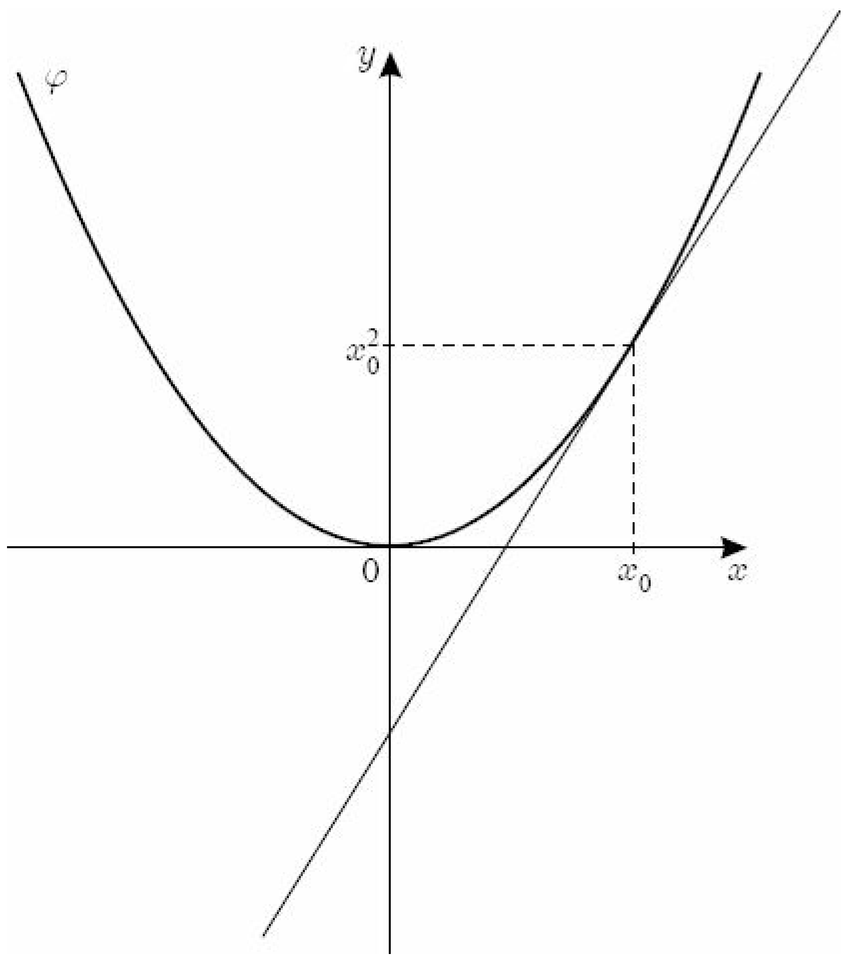


Figura 1.1

Vejamos algebricamente que, de fato, essa propriedade (geométrica) determina uma reta. Para isso, consideremos, por simplicidade, $x_0 = 2$. Primeiro lembremos que se $y = ax + b$ é a equação de uma reta r, então os pontos de interseção do gráfico de ϕ com r são dados pelas soluções da equação

$$x^2 = ax + b.$$

Logo, como queremos que o ponto $(2, \phi(2))$ esteja nessa interseção, $x_0 = 2$ tem que ser solução, isto é,

$$2^2 = a \cdot 2 + b,$$

donde obtemos que $b = -2a + 4$ e, portanto, as interseções são dadas pelas soluções da equação

$$x^2 = ax - 2a + 4,$$

que são as soluções da equação

$$x^2 - ax + (2a - 4) = 0.$$

Agora queremos impor a condição de que $x_0 = 2$ seja a *única* solução dessa equação: como se trata de uma equação do segundo grau, sabemos que isso ocorre exatamente quando o discriminante da equação se anula, isto é,

$$a^2 - 4(2a - 4) = 0,$$

ou seja,

$$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2 = 0,$$

que tem como única solução $a = 4$. Como já tínhamos que $b = -2a + 4$, obtemos para b o valor -4 e, portanto, a equação de r é $y = 4x - 4$.

Observe que o que fizemos prova que de fato a propriedade de interceptar a parábola $y = x^2$ somente no ponto (2,4) determina uma única reta, a reta cuja equação é $y = 4x - 4$.

> Exercício: Em tudo o que fizemos acima não usamos nenhuma propriedade especial do número 2. Pelo mesmo processo,

(a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de x^2 em $x_0 = -1$.

(b) Verifique que a equação da reta tangente ao gráfico de ϕ em um número real qualquer, c, é

$$y = (2c)\,x - c^2.$$

Como um exemplo da utilidade do fato de que parábolas têm retas tangentes bem definidas, consideremos o problema de calcular aproximações do número $\sqrt{2}$: sabemos que esse número é caracterizado pelo fato de ser um número positivo cujo quadrado é 2, isto é, $\sqrt{2}$ é a solução positiva da equação

$$x^2 - 2 = 0.$$

Logo se g é a função $g(x) = x^2 - 2$, então, geometricamente, $\sqrt{2}$ é dado pela interseção do gráfico de g com o semieixo positivo (veja Figura 1.2a).

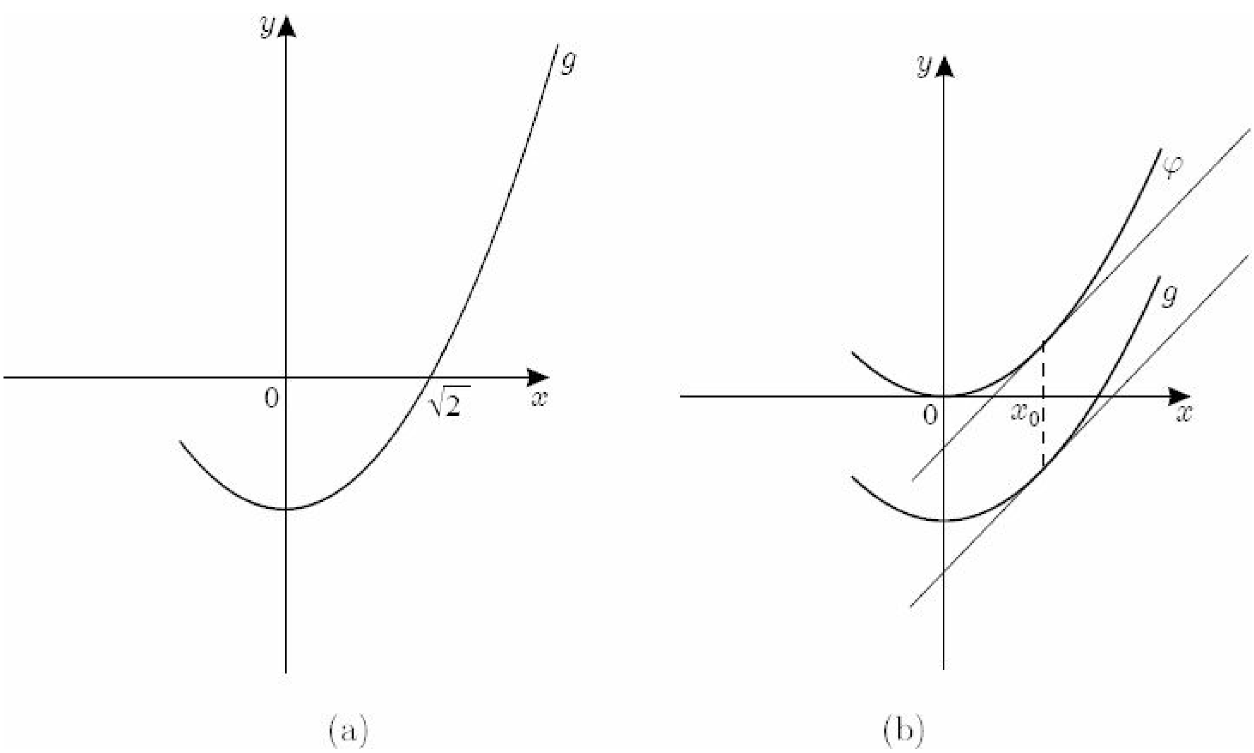


Figura 1.2

Mais ainda, como o gráfico de g é uma translação vertical do gráfico de $\phi(x) = x^2$, vemos que o gráfico de g também possui retas tangentes e que essas retas são obtidas fazendo a mesma translação vertical das retas tangentes ao gráfico de ϕ. Podemos imaginar, por exemplo, que as retas tangentes descem grudadas no gráfico de ϕ (veja Figura 1.2b).

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x_0 = 2$ é $y = 4x - 6$, já que a reta tangente ao gráfico de $\phi(x) = x^2$como já vimos, é $y = 4x - 4$.

Em geral, usando o resultado dado no exercício l(b) temos que a equação da reta tangente ao gráfico de g em c é

$$y = (2c)x + -(c^2 + 2).$$

Sabemos também que $1 < \sqrt{2} < 2$ e que $x_0 = 2$ é uma aproximação muito grosseira para $\sqrt{2}$. Por outro lado, se desenhamos o gráfico de g no intervalo [0, 3] junto com sua reta tangente em $x_0 = 2$, vemos que a interseção dessa reta com o eixo-x se dá num ponto entre os pontos correspondentes aos números $\sqrt{2}$ e 2, correspondendo portanto a um número x_1, que é uma melhor aproximação para $\sqrt{2}$ (veja Figura 1.3).

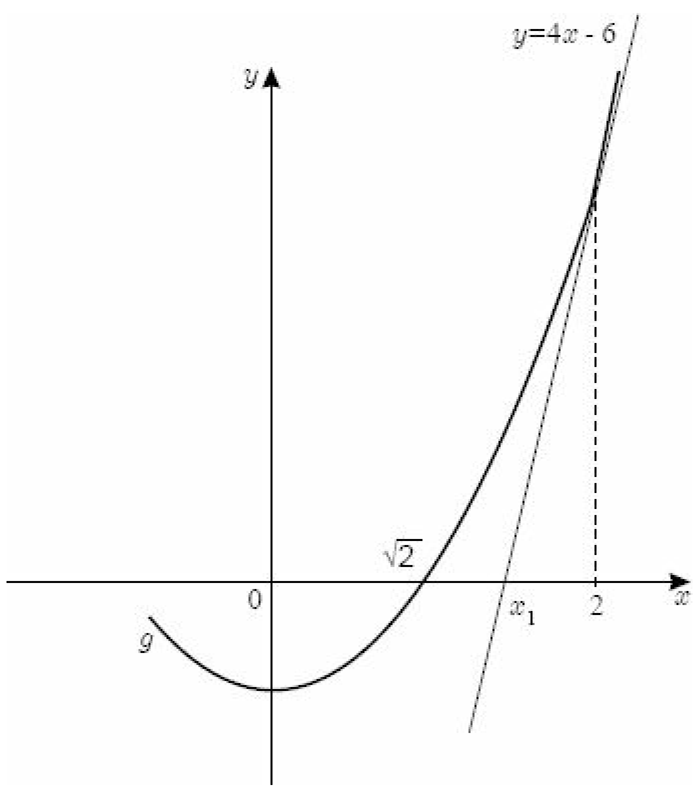


Figura 1.3

De imediato vemos que podemos calcular o número x_1 facilmente, já que se trata da solução de uma equação linear, o tipo mais simples de equação que conhecemos: vimos acima que a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x_0 = 2$ é $y = 4x - 6$, logo x_1 é a solução da equação

$$4x - 6 = 0.$$

Observe que é como se tivéssemos substituído uma equação mais complicada

$$x^2 - 2 = 0$$

pela equação mais simples

$$4x - 6 = 0,$$

que sabemos resolver facilmente, obtendo $x_1 = 1,5$

O mais interessante, no entanto, é que a partir de x_1, repetindo o procedimento com $x_1 = 1,5$ no lugar de $x_0 = 2$, podemos obter um número x_2 que é uma aproximação de $\sqrt{2}$ melhor ainda: x_2 corresponde ao ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de g em x_1 com o eixo-x (Figura 1.4a).

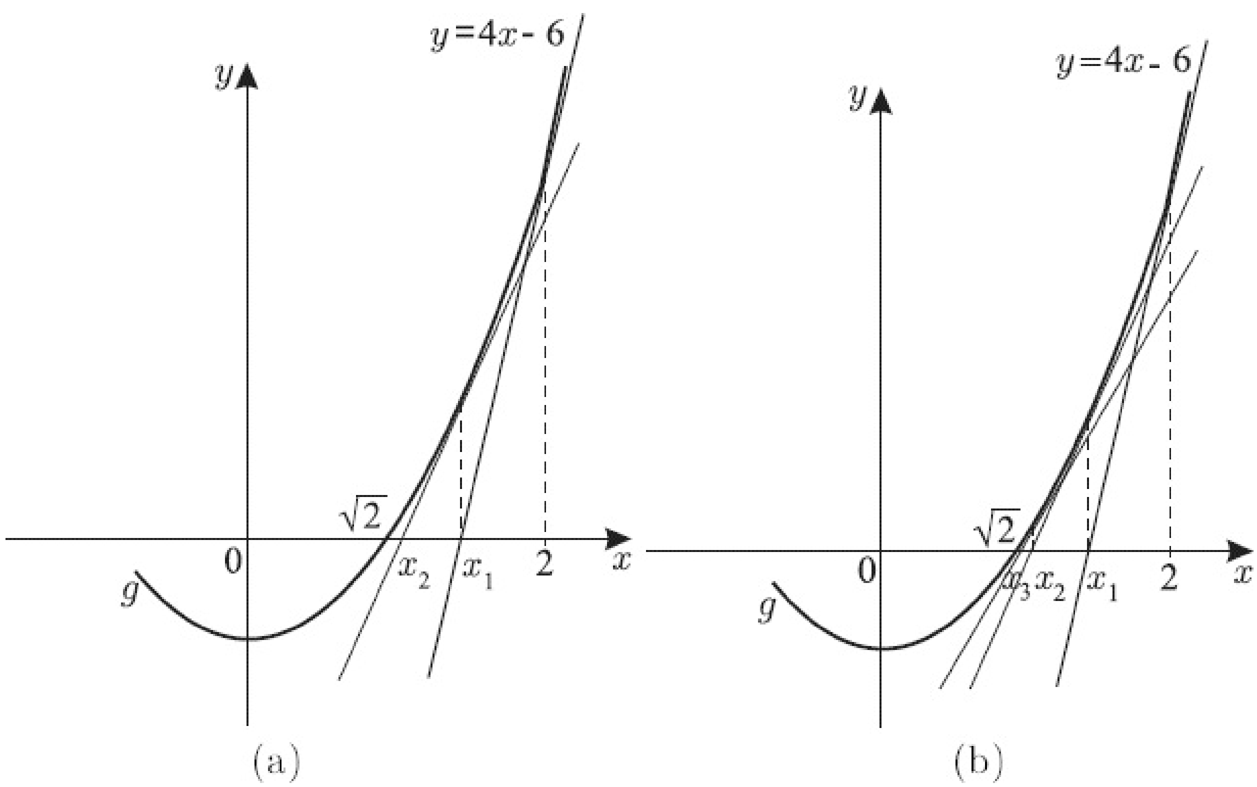


Figura 1.4

A representação geométrica desse processo é suficientemente clara e simples, de tal forma a nos convencer que repetindo esse procedimento podemos obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt{2}$ (Figura 1.4b). Na verdade, como veremos mais adiante, esse processo nos permite calcular aproximações tão boas quanto desejarmos do número $\sqrt{2}$ de uma maneira bastante eficiente.

Em particular, como a equação da reta tangente ao gráfico de g em um número qualquer c é $y = 2cx - (c^2 + 2)$, temos que, para $c \neq 0$, a interseção dessa reta com o eixo-x é dada pela solução da equação

$$2cx - (c^2 + 2) = 0,$$

que é $x = \frac{1}{2}(c + \frac{2}{c})$.

Assim, a partir de $x_0 = 2$, calculamos, sucessivamente, as aproximações do número $\sqrt{2}$,

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = 1,41666666666...$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = 1,41421568627...$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{2}{x_3}) = 1,41421356237...$$

e, em geral, para $n \geq 4$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}),$$

que já sabemos ser um sequência que converge a $\sqrt{2}$ (Seção 1 do Capítulo 3).

O fato mais relevante desse processo é que com apenas quatro etapas já obtivemos uma aproximação, x_4, cuja expansão decimal coincide com a expansão de $\sqrt{2}$ até a décima primeira casa decimal, isto é, estamos cometendo um erro inferior a 10^{-11}.

Esse exemplo é um caso particular do Método de Newton (que será estudado mais adiante) para resolver numericamente certas equações.

A eficiência desse método é suficientemente impressionante para nos levar a pensar em usá-lo para resolver outras equações de forma aproximada, por exemplo, para calcular aproximações de $\sqrt[3]{2}$.

Primeiro lembramos que $\sqrt[3]{2}$ se caracteriza como sendo a solução da equação $x^3 - 2 = 0$. Em seguida, fazendo o gráfico de $h(x) = x^3 - 2 = 0$ no intervalo [0, 3] vemos que todo ponto do gráfico *parece* ter uma reta tangente e, assim sendo, poderíamos, a partir de uma aproximação inicial $x_0 = 2$, obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt[3]{2}$, que corresponde ao ponto de interseção do gráfico com 0 eixo-x (veja Figura 1.5).

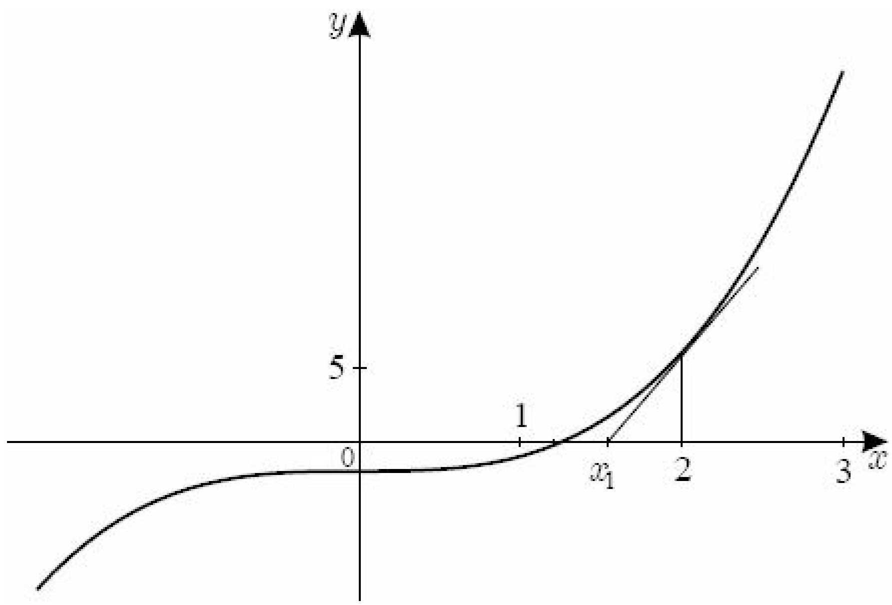


Figura 1.5

De fato, isso é verdade, mas, só para começar, qual é a equação da reta tangente ao gráfico de h em $x_0 = 2$? Lembre-se de que usamos a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x_0 = 2$ para calcular x_1 acima.

A primeira observação que podemos fazer é que a reta horizontal $y = h(2)$ intercepta o gráfico de h somente no ponto $(2, h(2))$ e certamente não é a reta que gostaríamos de chamar de reta tangente ao gráfico de h (na verdade, uma infinidade de retas tem essa propriedade: são as retas que passam por $(2, h(2))$ e têm coeficiente angular suficientemente pequeno). Isso já nos diz que a propriedade que usamos para caracterizar as retas tangentes ao gráfico de g (uma parábola) não serve para a função h.

Mas, mais ainda, fazendo 0 gráfico de h num intervalo suficientemente grande como na Figura 1.6, podemos ver que a reta que gostaríamos de eleger para ser a *reta tangente ao gráfico de h em* $x_0 = 2$ intercepta o gráfico de h num outro ponto à esquerda do eixo-y.

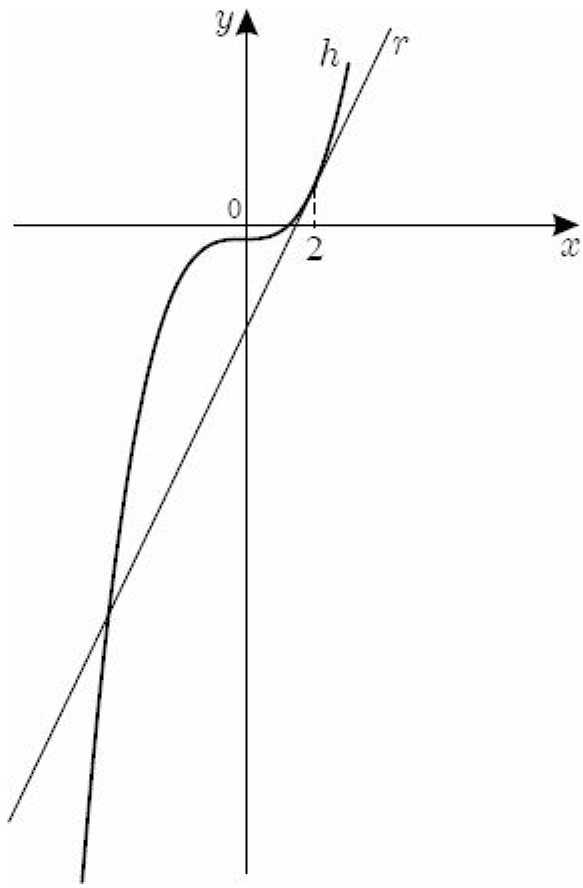


Figura 1.6

O que ocorre aqui é que a nossa intuição sobre qual reta deve ser chamada de reta tangente utiliza apenas o comportamento de h em x próximo de $x_0 = 2$, isto é, considera apenas propriedades *locais* do gráfico de h, enquanto que uma reta *interceptar o gráfico num único ponto* é uma propriedade global do gráfico.

Isso nos sugere que devemos voltar à função $\phi(x) = x^2$ e procurar caracterizar a reta tangente ao seu gráfico em x_0 por alguma propriedade local do seu gráfico. Em outras palavras, queremos encontrar uma caracterização que só dependa do comportamento da função ϕ num intervalo aberto contendo x_0, de maneira que possamos generalizar o conceito de reta tangente para uma função cujo gráfico, como é o caso de $h(x) = x^3 - 2$, pareça possuir retas tangentes.

Novamente para simplificar, façamos $x_0 = 2$. A primeira observação que fazemos é que se para calcular o coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico de ϕ tivemos que usar fortemente o fato de ϕ ser uma função quadrática, o cálculo do coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos de seu gráfico só usa o valor da função em dois números do domínio. Em particular o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto $(2, \phi(2))$ e por um outro ponto $(x, \phi(x))$, com $x \neq 2$ é

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(2)}{x-2} = \frac{x^2 - 2^2}{x-2} = x + 2.$$

Examinando essa expressão, vemos que esse coeficiente angular se aproxima do número 4 à medida que damos para x valores próximos de 2, isto é, temos que

$$\lim_{x \to 2} \frac{\varphi(x) - \varphi(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4.$$

Por outro lado, podemos *"ver"* geometricamente que, à medida que $x \to 2$, essas retas (chamadas retas secantes ao gráfico de ϕ em $x = 2$) parecem "*tender*" à reta tangente ao gráfico de $\phi(x) = x^2$ em $x = 2$.

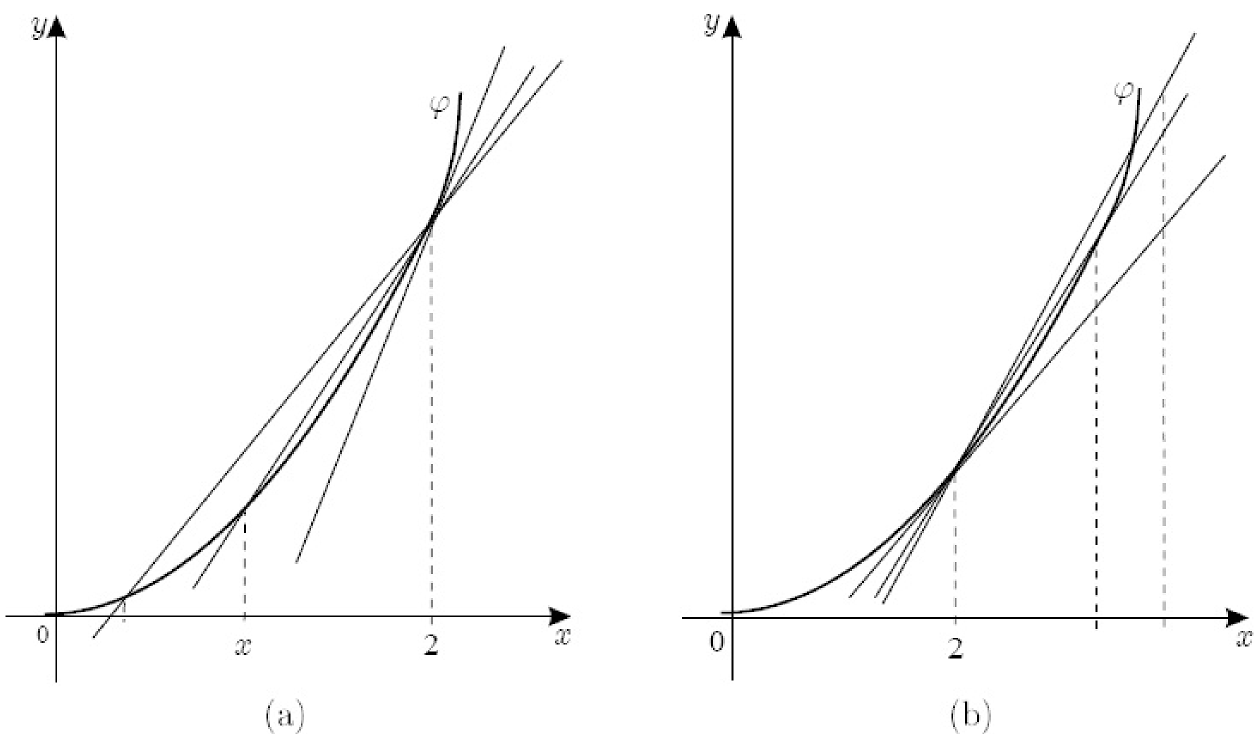


Figura 1.7

De fato, já conhecemos a equação dessa reta tangente, $y = 4x - 4$, e podemos concluir que seu coeficiente angular é o *limite, quando* $x \to 2$, *do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de* ϕ *em* $x_0 = 2$ *que passa por* $(x, \phi(x))$.

E esse não é um resultado particular do ponto $(2, \phi(2))$. De fato, pelo resultado do exercício da página 7, item (b), sabemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de ϕ em um número x_0 é $2x_0$. Por outro lado, para um número x_0 qualquer, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de ϕ em x_0 que passa por $(x, \phi(x))$, $x \neq x_0$ é

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0,$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Conseguimos então caracterizar uma reta tangente ao gráfico da função $\phi(x) = x^2$ usando apenas propriedades locais, ou seja,

a reta tangente ao gráfico de $\phi(x) = x^2$ *em* $x_0 \in \mathbb{R}$ é *a reta que passa pelo ponto* $(x_0, \phi(x_0))$ *e cujo coeficiente angular é o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}.$$

Como veremos agora, essa é a caracterização que podemos generalizar para outras funções.

Sejam f uma função real e x_0 um número fixo do domínio de f. Se x é um número do domínio de f, com $x \neq x_0$, a reta, r_x, que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, é chamada uma *reta secante* ao gráfico de f em x_0 (veja Figura 1.8). Como já sabemos, o coeficiente angular (ou inclinação) dessa reta é dado por

$$a(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

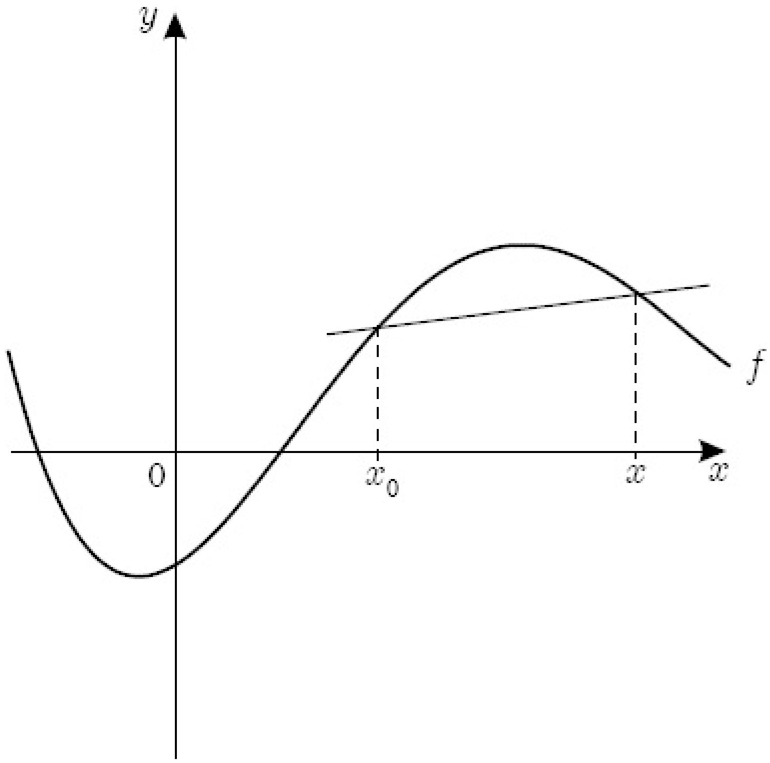


Figura 1.8

Exemplos

1. Se $f(x) = x^3$ e $x_0 = 2$, então os coeficientes angulares das retas secantes ao gráfico de f em $x_0 = 2$ são dados pela expressão $a(x) = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$, para $x \neq 2$.

2. Se $f(x) = x^3$ *e* $x_0 = -1$, então os coeficientes angulares das retas secantes ao gráfico de f em $x_0 = -1$ são dados pela expressão $a(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$, para $x \neq -1$.

Definição: Dizemos que uma função f é *derivável* (ou *diferenciável*) num ponto x_0 de seu domínio, se f está definida em algum intervalo aberto contendo x_0 e existe um número real que é o $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Neste caso, esse limite será chamado a *derivada de f no ponto x_0*.

Se f é uma função derivável em x_0, a derivada de f no ponto x_0 é denotada por $f'(x_0)$, isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplos

3. A função $f(x) = x^2$ é derivável em $x_0 = 1$ e $f'(1) = 2$, pois

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2.$$

Na verdade, f é derivável em qualquer número real x_0 com $f'(x_0) = 2x_0$, já que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

4. A função $h(x) = x^3 - 2$ é derivável em $x_0 = 2$ com $h'(2) = 12$. De fato,

$$\frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

e, como

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4),$$

temos que

$$\frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4,$$

donde

$$\lim_{x \to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x^2 + 2x + 4 = 12.$$

5. A função $f(x) = x$ é derivável em qualquer número real x_0. De fato, temos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

isto é, $f'(x_0) = 1$ para qualquer número real x_0.

A função identidade $f(x) = x$ é um caso particular de uma função afim, uma função cujo gráfico é uma reta. Mais geralmente, se a e b são números reais, então a função afim $g(x) = ax + b$ é derivável em qualquer número real x_0, pois

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

Se uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos de seu domínio D, dizemos simplesmente que f é derivável e a função $f' : D \to \mathbb{R}$ que a cada número $x \in D$ associa o número $f'(x)$ (a derivada de f em x) é chamada *a derivada de f*.

Assim podemos dizer que:

Se g é uma função constante, então g é derivável e $g'(x) = 0$ para qualquer número real x.

A função identidade, $f(x) = x$, é derivável e $f'(x) = 1$ para qualquer número real x.

Ainda, dos resultados que obtivemos acima segue-se que a função $\phi(x) = x^2$ é derivável com $\phi'(x) = 2x$.

Usamos também a notação $\frac{d}{dx}(f(x))$ para denotar a derivada de uma função derivável f. Assim, podemos dizer que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.

Se f é uma função derivável em x_0, como o quociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ é o coeficiente angular (ou inclinação) de uma reta secante ao gráfico de f em x_0, temos que, geometricamente, $f'(x_0)$ é o limite, quando $x \to x_0$, dos coeficientes angulares de retas secantes ao gráfico de *f em* x_0.

Por analogia ao que já conhecemos sobre o gráfico da função $\phi(x) = x^2$, introduzimos o conceito de *reta tangente ao gráfico de uma função derivável*, isto é, definimos:

Definição: Se f é derivável em x_0, a reta que tem coeficiente angular $f'(x_0)$ e passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ será chamada de *reta tangente ao gráfico de f* em $x = x_0$.

Há uma outra situação em que nossa intuição nos leva a dizer que uma reta r é tangente ao gráfico de uma função, situação esta que não está incluída na definição acima: é quando r é uma reta vertical.

Por exemplo se $f(x) = \sqrt[3]{x}$, é natural dizermos que a reta cuja equação é $x = 0$ (o eixo vertical) é tangente ao gráfico de f em $x = 0$, mas, como retas verticais não possuem coeficiente angular, essa propriedade geométrica não provém da derivabilidade da função em $x = 0$.

De fato, podemos ver que o coeficiente angular de retas secantes ao gráfico de $\sqrt[3]{x}$ em $x = 0$ tende a ∞ quando x tende a 0: temos que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2},$$

já que $x = (\sqrt[3]{x})^3$ e, portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = \infty.$$

Isto é, a função $x = (\sqrt[3]{x})^3$ **não** é derivável em $x = 0$.

Levando isso em consideração vemos que dizer que f é derivável em x_0 é equivalente a dizer que o gráfico de f tem uma reta tangente não vertical em $x = x_0$.

Em particular, se nos permitimos desenvolver nossa capacidade de "visualização geométrica", a partir da ideia já formada de retas tangentes a círculos (ou a parábolas), podemos visualizar geometricamente a propriedade de uma dada função ser derivável num ponto.

Por exemplo, podemos acreditar que a função f, cujo gráfico é dado na Figura 1.9a, é derivável (podemos *ver* as retas tangentes em cada ponto) e concordar com a afirmação de que a curva da Figura 1.9b é um bom esboço do gráfico de sua derivada f'.

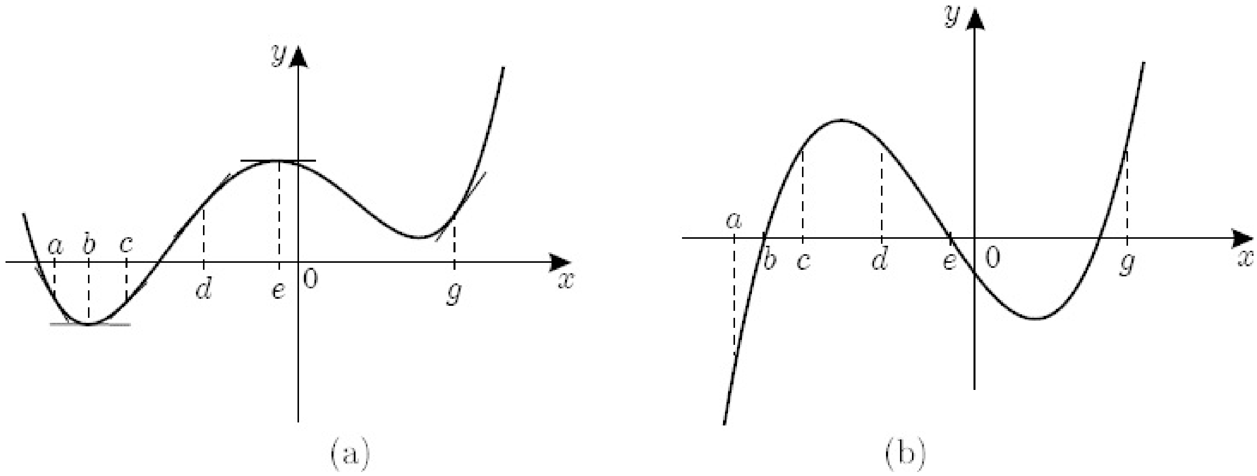


Figura 1.9

Exemplos

6. Determinemos a equação da reta r tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x = -1$:

já sabemos que $f'(x) = 2x$, logo $f'(-1) = -2$ e, portanto, o coeficiente angular (ou inclinação) da reta r é -2, isto é, a equação de r é

$$y = -2x + b.$$

Para determinarmos o valor de b usamos a condição de que r passa pelo ponto $(-1, f(-1)) = (-1,1)$, ou seja, $x = -1$ e $y = 1$ satisfazem a igualdade dada pela equação de r:

$$1 = -2(-1) + \text{b},$$

donde $b = -1$ e, portanto, a equação que procuramos é $y = -2x - 1$.

7. Vamos verificar que a função $g(x) = \sqrt{x}$ é derivável em $x = 2$ e achar a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$.

Devemos verificar que existe o $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ Para isso, observamos que se $x \geq 0$, então $(\sqrt{x})^2 = x$ e, portanto,

$$x - 2 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2}),$$

logo, para $0 \geq x \neq 2$, temos

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}},$$

ou seja,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}.$$

Podemos assim concluir que g é derivável em $x = 2$ e que $g'(2)\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$ é

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + b,$$

sendo que b é determinado pela condição de que essa reta passa pelo ponto$(2, g(2)) = (2,\sqrt{2})$:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 + b,$$

donde $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e a equação que procuramos é $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Um exemplo simples de uma função que não é derivável pode ser útil para a compreensão do conceito de derivada. Mostremos que a função $f(x) = |x|$ não é uma função derivável, pois f não é derivável em $x_0 = 0$.

De fato, observe que: se $x > 0$, então

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = 1,$$

e, se $x < 0$, então

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = -1.$$

Logo, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1,$$

ou seja, como os limites laterais são diferentes podemos concluir que não existe o $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ e, portanto, $f(x) = |x|$ não possui derivada em $x_0 = 0$. Por outro lado é fácil verificar que se $x_0 \neq 0$, então f é derivável em x_0, com $f'(x_0) = 1$ se $x_0 > 0$ e $f'(x_0) = -1$ se $x_0 < 0$.

Muitas vezes é conveniente usar uma outra notação para o limite que define a derivada: introduzimos uma outra variável, por exemplo δ (ou Δx, como é comum em textos de Física), fazendo $\delta = x - x_0$. Daí, $x = x_0 + \delta$ *e* $x \to x_0$ *é* equivalente a $\delta \to 0$, logo

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-x_0} = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}.$$

Agora observamos que usando a variável δ, não mais necessitamos da letra indexada x_0 para denotar o ponto em que estamos calculando a derivada, já que a letra x não mais aparece nessa forma de expressar o limite, isto é, podemos substituir x_0 por x obtendo

$$f'(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}.$$

A derivada como taxa de variação

Como dissemos na introdução deste capítulo, o conceito de derivada nos permite quantificar a variação de uma função. Para entender o que isso quer dizer, comecemos comparando duas funções contínuas bem simples, $g(x) = 3x$ e $h(x) = 2x$.

Vemos que dada uma pequena variação, $x + \delta$, de x, as variações dos valores de g e h, respectivamente, são

$$g(x+\delta) - g(x) = 3\delta \text{ e } h(x+\delta) - h(x) = 2\delta,$$

ou seja, se δ é muito pequeno, as variações dos valores de g e de h são também muito pequenas (g e h são funções contínuas), mas bastante diferentes.

Por outro lado, no caso da função $f(x) = x^2$, que também é uma função contínua e ainda simples, vemos que uma pequena variação, δ, de $x = 1$, gera uma pequena variação,

$$\begin{aligned} f(1+\delta) - f(1) &= (1+\delta)^2 - 1^2 \\ &= \delta^2 + 2\delta, \end{aligned}$$

que é diferente da variação

$$\begin{aligned} f(2+\delta) - f(2) &= (2+\delta)^2 - 2^2 \\ &= \delta^2 + 4\delta, \end{aligned}$$

gerada pela mesma variação δ de $x = 2$.

Observe que nos dois casos nos interessa saber qual é a relação entre a variação dos valores das funções e a variação da variável x, isto é, se f é uma função definida num intervalo, estamos interessados em estudar a razão

$$T_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta},$$

que é chamada a *taxa de variação média da função* f de x a $x + \delta$. Por exemplo, para $f(x) = 2x$, a taxa de variação média é sempre igual a 2, independentemente da variação δ e do ponto x. Essa propriedade reflete o fato de que $f(x) = 2x$ é uma função afim, isto é, seu gráfico é uma reta e a taxa de variação média é o coeficiente angular dessa reta.

Por outro lado, se f é função $f(x) = x^2$, as taxas de variação média dependem da variação δ e do ponto x, já que

$$T_\delta(x) = \frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} = 2x + \delta,$$

e essa dependência reflete o fato de que retas secantes ao gráfico de f possuem diferentes coeficientes angulares. De fato, a taxa de variação média de x a $x + \delta$ é o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + \delta, f(x + \delta))$.

Em particular, se f é uma função derivável em x_0, então o limite, quando $\delta \to 0$, da taxa de variação média de x_0 a $x_0 + \delta$, é a derivada, $f'(x_0)$, de f no ponto x_0, isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} T_\delta(x).$$

Daí dizermos que

$f'(x_0)$ é a *taxa de variação instantânea de f em x_0*.

Para termos uma ideia simples da relevância dessa interpretação, basta observar que a taxa de variação instantânea nos dá a informação sobre a variação da função a partir de variações δ suficientemente pequenas de x_0. De fato, como

$$f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta},$$

temos que se $\delta \neq 0$ é suficientemente pequeno, então

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta},$$

donde

$$\left|f'(x_0)\right| \approx \left|\frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}\right| = \frac{|f(x_0+\delta) - f(x_0)|}{|\delta|},$$

e, portanto,

$$|f(x_0+\delta) - f(x_0)| \approx \left|f'(x_0)\right| |\delta| .$$

Em particular, se f e g são funções deriváveis com $|f'(x_0)| < |g'(x_0)|$, podemos afirmar que a variação de f em x_0 é menor do que a variação de g em x_0. Mais precisamente, podemos afirmar que se $\delta \neq 0$ é suficientemente pequeno, então

$$|f(x_0+\delta) - f(x_0)| < |g(x_0+\delta) - g(x_0)| ,$$

já que

$$|f(x_0+\delta)-f(x_0)| \approx \left|f'(x_0)\right| |\delta| < \left|g'(x_0)\right| |\delta| \approx |g(x_0+\delta)-g(x_0)| .$$

Derivada e velocidade instantânea

Como já lembramos na seção 1 do Capítulo 6, se uma partícula se move ao longo de uma linha reta, dizemos que seu movimento é retilíneo. Um movimento retilíneo pode ser descrito por uma função real s: usamos duas cópias da reta real, uma para representar o tempo e uma outra para representar a linha reta onde a partícula se move. Para cada instante de tempo t a função s fornece a posição $s(t)$ da partícula em relação a um ponto de referência que associamos à origem na reta em que a partícula se move.

Um caso particular de movimento retilíneo é o *movimento retilíneo uniforme* que, como vimos, se caracteriza pela propriedade de que, em qualquer intervalo de tempo, o deslocamento sofrido pela partícula é proporcional ao intervalo de tempo transcorrido, isto é, existe uma constante v, chamada a *velocidade da partícula* (velocidade do movimento), tal que dados dois instantes quaisquer, t_1 e t_2, tem-se que o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ e o deslocamento $s(t_2) - s(t_1)$ satisfazem

$$s(t_2) - s(t_1) = v \cdot (t_2 - t_1).$$

A característica do movimento retilíneo uniforme é que a velocidade e a posição da partícula em um dado instante determinam a posição em qualquer outro instante, isto é, se conhecemos a velocidade v e a posição $s(t_0)$, num instante t_0, então em qualquer instante t temos que

$$s(t) - s(t_0) = v \cdot (t - t_0),$$

e, portanto,

$$s(t) = v \cdot (t - t_0) + s(t_0).$$

Em particular, o gráfico da posição em função do tempo, isto é, o gráfico de s, é uma reta cujo coeficiente angular é a velocidade v.

Por outro lado temos também que, no movimento retilíneo uniforme, se conhecemos a posição da partícula em dois instantes, $t_0 \neq t_1$, podemos determinar a velocidade

$$v = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

que, com $s(t_0)$, determina a posição em qualquer instante t, como vimos acima.

Reciprocamente, se s é uma função que descreve um movimento retilíneo e seu gráfico é uma reta, isto é,

$$s(t) = at + b,$$

então o movimento é uniforme. De fato, dados dois instantes quaisquer, $t_0 \neq t_1$, temos que

$$s(t_1) - s(t_0) = a(t_1 - t_0)$$

e, portanto, o movimento é uniforme com velocidade $v = a$.

Certamente, a conceituação matemática de velocidade para um movimento retilíneo uniforme que a Física nos dá modela a experiência que temos no cotidiano: se, andando em linha reta, a cada minuto sistematicamente percorrermos 1,5 metros, passados 10 minutos teremos percorrido 15 metros. Isto é, a distância percorrida é proporcional ao tempo de percurso, sendo que a constante de proporcionalidade, 1,5, é a velocidade em metros por minuto.

Por outro lado, nossa experiência também nos diz que nem todo movimento retilíneo é uniforme: por exemplo, o movimento de uma esfera numa canaleta reta (e horizontal), a partir de um impulso inicial (como num jogo de boliche).

Esse movimento pode ser modelado por uma função real s que, para t segundos após o momento em que a esfera foi impulsionada, dá a posição da esfera em relação a um ponto fixo da canaleta, por exemplo, o ponto em que a esfera estava quando aplicamos o impulso.

Pela nossa experiência cotidiana, sabemos que a esfera vai se mover cada vez mais lentamente até parar. Sabemos que "mais lentamente" quer dizer, por exemplo, que o tempo que a esfera gasta para percorrer a primeira metade do caminho até parar é menor do que o tempo que gasta para percorrer a segunda metade; isso nos diz que esse movimento não pode ser uniforme.

De fato, suponhamos que a esfera parou T segundos após o início do movimento tendo percorrido l metros, isto é, $s(0) = 0$ e $s(T) = l$. Se $\bar{t}$ segundos é o tempo gasto para percorrer os primeiros $\frac{l}{2}$ metros, então os $\frac{l}{2}$ metros restantes foram percorridos em $T - \bar{t}$ segundos com

$$\bar{t} < T - \bar{t},$$

já que a esfera se moveu mais lentamente na segunda metade do percurso. Se o movimento fosse uniforme deveríamos ter

$$\frac{s(\bar{t}) - s(0)}{\bar{t} - 0} = \frac{s(T) - s(\bar{t})}{T - \bar{t}},$$

o que não ocorre, pois

$$s(\bar{t}) - s(0) = \frac{l}{2} - 0 = \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} = s(T) - s(\bar{t})$$

e, como já concluímos, $\bar{t} < T - \bar{t}$.

Na Figura 1.10 exibimos o gráfico de uma função s que pode descrever o movimento desse exemplo.

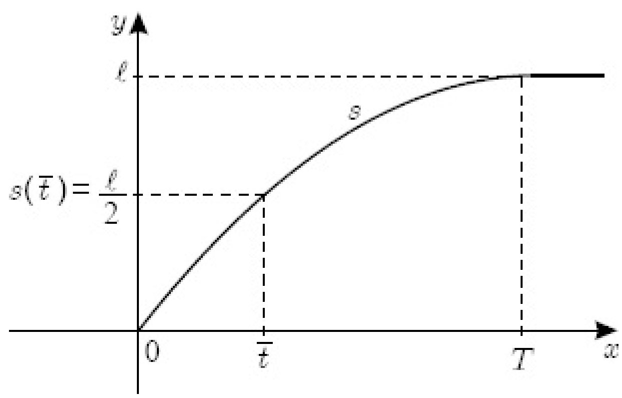


Figura 1.10

Em particular, vemos que não podemos associar a esse movimento um número que corresponda à velocidade da partícula como fizemos com o movimento uniforme.

Por outro lado, se $t_1 \neq t_2$, sempre podemos calcular o quociente

$$v_{t_1,t_2} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

que, sendo o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(t_1, s(t_1))$ e $(t_2, s(t_2))$, é a velocidade que uma partícula deve ter para, no intervalo de tempo de t_1 a t_2, se deslocar da posição $s(t_1)$ à posição $s(t_2)$ por um movimento retilíneo uniforme.

Daí dizermos que o número vt_t,t_2 é *velocidade média da partícula no* *intervalo de tempo de* t_1 a t_2.

Com essa definição temos que, num movimento retilíneo uniforme, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é sempre igual à velocidade do movimento, enquanto que nos movimentos retilíneos não uniformes as velocidades médias dependem dos intervalos de tempo.

No nosso exemplo, vemos (no gráfico da Figura 1.11) que a velocidade média no intervalo $[0, \bar{t}]$ é maior do que a velocidade média no intervalo $[\bar{t}, T]$, já que a inclinação da reta que passa por (0, s(0)) e $(\bar{t}, s(\bar{t}))$ é maior do que a inclinação da reta que passa por $(\bar{t}, s(\bar{t}))$ e $(T, s(T))$.

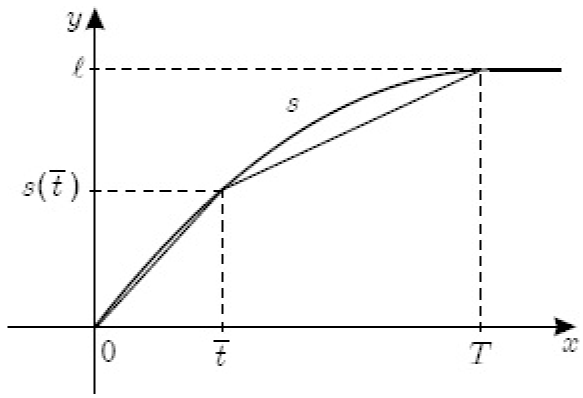


Figura 1.11

Por outro lado, vemos também (Figura 1.12) que, se t_0 está fixo e t_1 está suficientemente próximo de t_0, então o movimento uniforme com velocidade igual à velocidade média

$$v_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

e posição inicial $x_0 = s(t_0)$, parece ser uma boa aproximação para o movimento da nossa partícula num pequeno intervalo de tempo contendo o instante t_0 e, portanto, a velocidade média v_1 deve estar dando uma boa informação sobre a velocidade com que a partícula se move nesse pequeno intervalo de tempo.

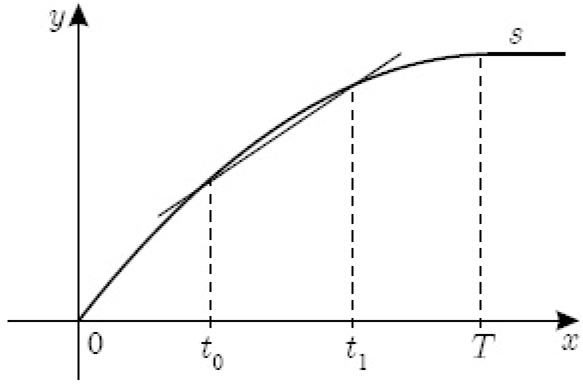


Figura 1.12

Mais ainda, como no nosso exemplo a função posição s é derivável em t_0, sabemos que existe o limite

$$s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

e, portanto, se t_1 e t_2 estão suficientemente próximos de t_0, então as velocidades médias

$$v_1 = \frac{s\,(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{s\,(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0}$$

são praticamente iguais, ou seja, tanto v_1 quanto $v2$ nos dão praticamente a mesma informação sobre a velocidade com que a partícula se move num pequeno intervalo de tempo contendo t_0.

Em resumo, concluímos que se t é qualquer instante suficientemente próximo de t_0 com $t \neq t_0$, então a velocidade média

$$v_t = \frac{s\,(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

nos dá informações sobre a velocidade da partícula num intervalo suficientemente pequeno de tempo em torno do instante t_0. Mas, se isso é o que ocorre, como sabemos que, para t suficientemente próximo de t_0, tem-se que

$$v_t = \frac{s\,(t) - s(t_0)}{t - t_0} \approx s'(t_0),$$

devemos ter que o número $s'(t_0)$ deve dar a mesma informação. De fato, essa é a definição de *velocidade instantânea,* $v(t_0)$, para um movimento retilíneo no instante t_0, que a Física nos dá:

> *se s é a função posição para um movimento retílineo, definimos a velocidade instantânea, $v(t_0)$, no instante t_0, como o limite das velocidades médias, v_t, quando $t \to t_0$, se esse limite existir,*

isto é,

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_t = \lim_{t \to t_0} \frac{s\,(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

e, como esse limite é o que já chamamos de derivada de s em t_0, $s'(t_0)$, temos que

> *a velocidade instantânea é a derivada da função posição.*

Com essa definição, temos que, se

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0$$

é a função posição para um movimento retilíneo uniforme com velocidade v e posição inicial $x(t_0) = x_0$, então

$$v(t) = x'(t) = v,$$

isto é, a função velocidade num movimento retilíneo uniforme é constante, sendo que essa constante é a velocidade do movimento uniforme.

Para terminar, observamos que, tradicionalmente, os livros de Física utilizam uma notação diferente da que usamos aqui. Para relacionar as duas notações, começamos denotando por Δt o intervalo de tempo $t - t_0$, isto é,

$$\Delta \mathrm{t} = t - t_0,$$

e, portanto,

$$t = t_0 + \Delta t$$

e a condição $t \to t_0$ é equivalente à condição $\Delta t \to 0$. Com essa notação, o limite acima se expressa por

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Em seguida, observamos que, como na última expressão não estamos mais usando a variável t, não há necessidade de usar a letra indexada t_0, isto é, podemos substituí-la pela letra t simplesmente, obtendo

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Finalmente, denotando por Δs o deslocamento $s(t + \Delta t) - s(t)$, isto é,

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t),$$

chegamos a

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Considere a função $f(x) = 3x^2 - 2x$. Calcule $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ e $f'(3)$.

2. Em cada item abaixo, calcule a derivada da função no ponto x_0 dado:

   (a) $f(x) = x^2 - 2$, ponto $x_0 = 0,5$.

   (b) $f(x) = 3 - 2x$, ponto $x_0 = 1,2$.

(c) $f(x) = \frac{2x+1}{5}$, ponto $x_0 = 3$.

(d) $f(x) = \sqrt{x+2}$, ponto $x_0 = -1$.

3. Considere a função $f(x) = x^3 + 4$. Utilizando a definição de derivada:

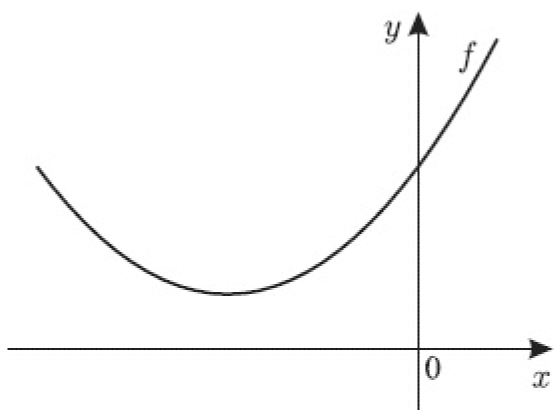
   (a) Calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

   (b) Calcule $f'(1)$.

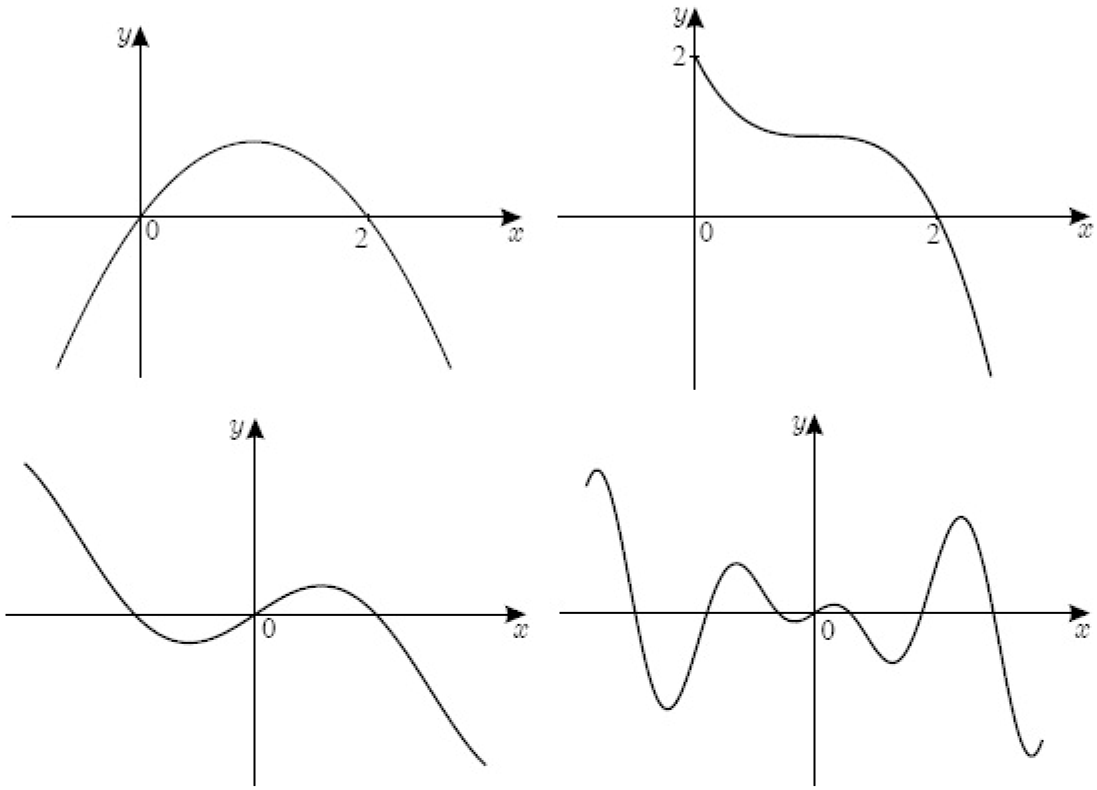
   (c) Calcule $f'(a)$.

   (d) Qual é a expressão da função derivada de f?

4. Seja f a função cujo gráfico é dado abaixo. Considere a função g tal que $g(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. Faça um esboço razoável do gráfico de g.



5. Repita o exercício 4 para as funções cujos gráficos são dados nas figuras abaixo.



6. Use a definição de derivada para determinar a expressão de $f'(x)$, onde $f(x)$ é a função dada em cada item abaixo (sugestão: use a notação $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)):

   (a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

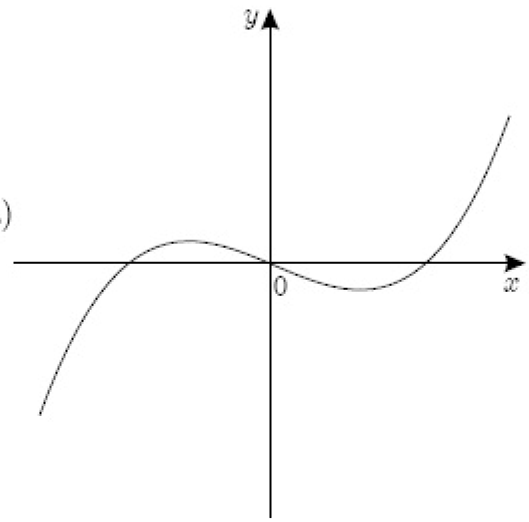
   (c) $f(x) = \sqrt{2x}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

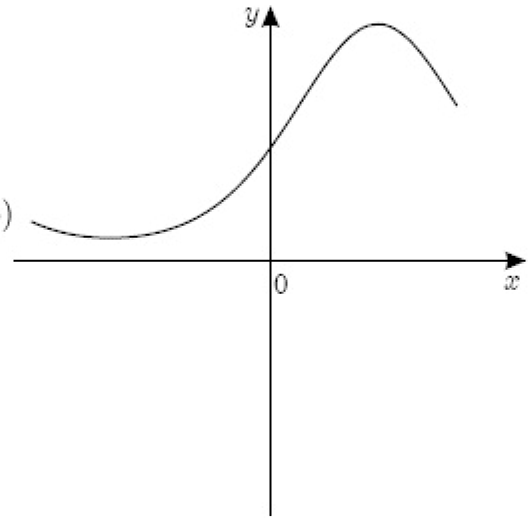
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

7. Os gráficos abaixo podem ser agrupados em pares tais que cada par é composto pelo gráfico de uma função e o gráfico de sua derivada. Identifique os pares explicitando qual é o gráfico da função e qual é o gráfico da derivada.

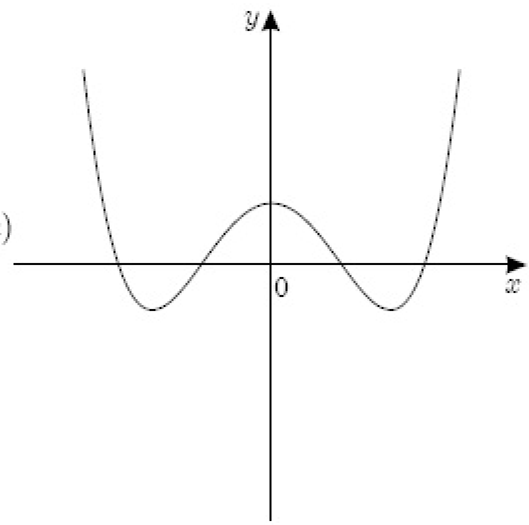
(a)



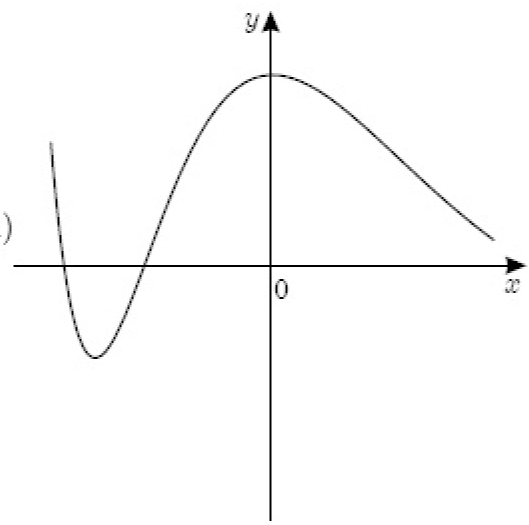
(b)



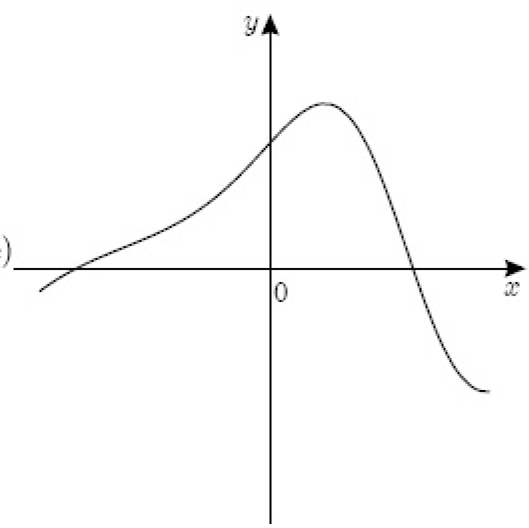
(c)



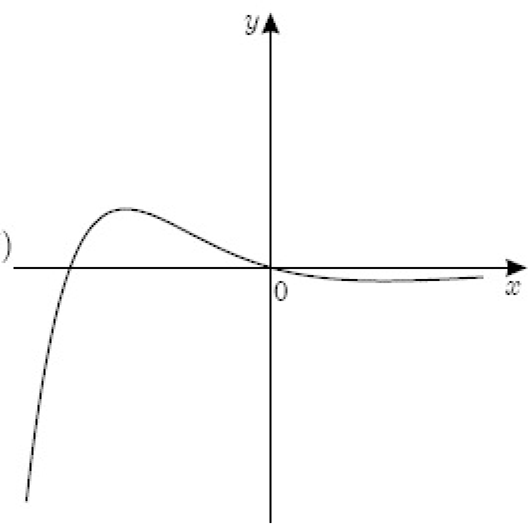
(d)



(e)



(f)



8. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, então $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

(b) Se a reta $y = 3x - 1$ é tangente ao gráfico de uma função f em $x = 1$, então $f(1) = 2$ e $f'(1)=3$.

(c) Se f é uma função tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$, então $f(x) = 2x - 1$.

9. Considere a função $f(x) = x^2 + x$.

(a) Utilize a definição de derivada para determinar a expressão de $f'(x)$.

(b) Determine a equação de uma reta que seja tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + x$ e que passe pelo ponto $P(2, 5)$.

10. A função $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = 1$?

11. A função $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 & \text{se } x > -2 \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = -2$?

12. A função $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{se } x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = \frac{1}{3}$?

13. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(d) $f(1) = 1$

(e) $f'(x) > 0$ se, e somente se $x \in (0,1)$

(f) $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$ ou $x = 1$.

Faça um esboço do gráfico de f.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que:

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(b) $f(-1) = 1$ e $f(1) = -1$

(c) $f'(x) = 0$ exatamente para $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$.

Faça um esboço do gráfico de f.

15. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) f é crescente nos intervalos $[-3, -2)$, $(-2,1]$ e $[3, \infty)$

(b) f é decrescente nos intervalos $(-\infty, -3]$ e $[1, 3]$

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(d) $f'(x) = 0$ se, e somente *se* $x = -3$, $x = 1$ ou $x = 3$.

Faça um esboço do gráfico de f.

16. Seja $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que para cada $x \neq 0$ o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, f(0)) = (0, 2) e $(x, f(x))$ é o número $2x + 1$. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $f'(0) = 1$, pois $f'(x) = 2x + 1$ e, portanto, $f'(0) = 1$.

(b) $f'(0) = 1$, pois $f'(0) = \lim_{x\to 0}(2x + 1) = 1$.

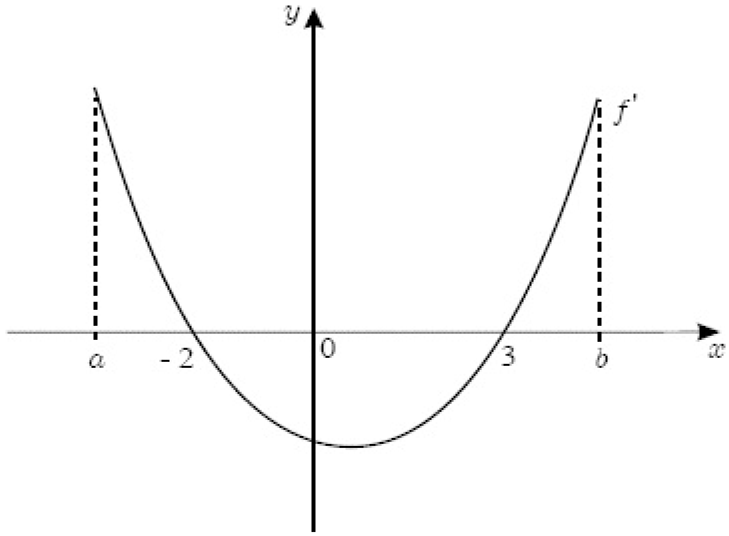
(c) $f(x) = x + 2$, pois $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

(d) A equação da reta r que é tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $y = 2x + 1$, pois $f'(x) = 2x + 1$.

(e) A equação da reta r que é tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $y = x + 2$, pois a equação de r é $y = f'(0)x + f(0)$, sendo que $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

(f) $f(x) = 2x^2 + x + 2$, pois $\frac{f(x)-f(0)}{x} = 2x + 1$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 2$.

17. Seja f um polinômio de grau 3 tal que o gráfico da derivada de f é dado na figura abaixo:



Dado que $f(-2) = -1$ e $f(3) = -3$, faça um esboço do gráfico de f. Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

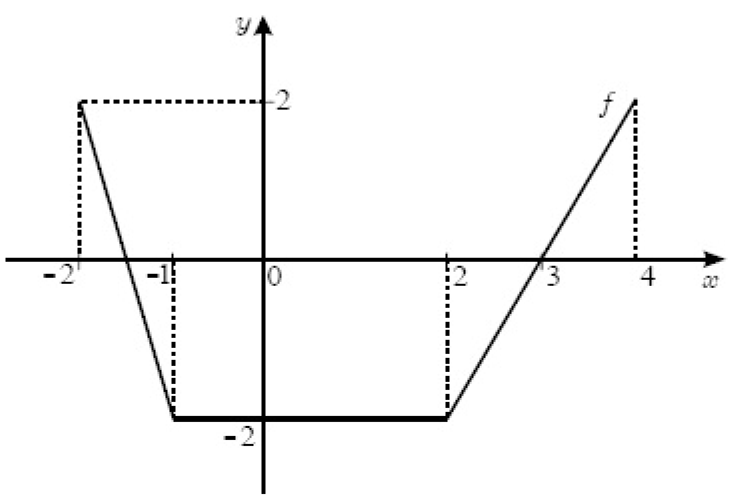
18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável em $x = 0$ tal que:

$$f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 4.$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}(x+2)^2$

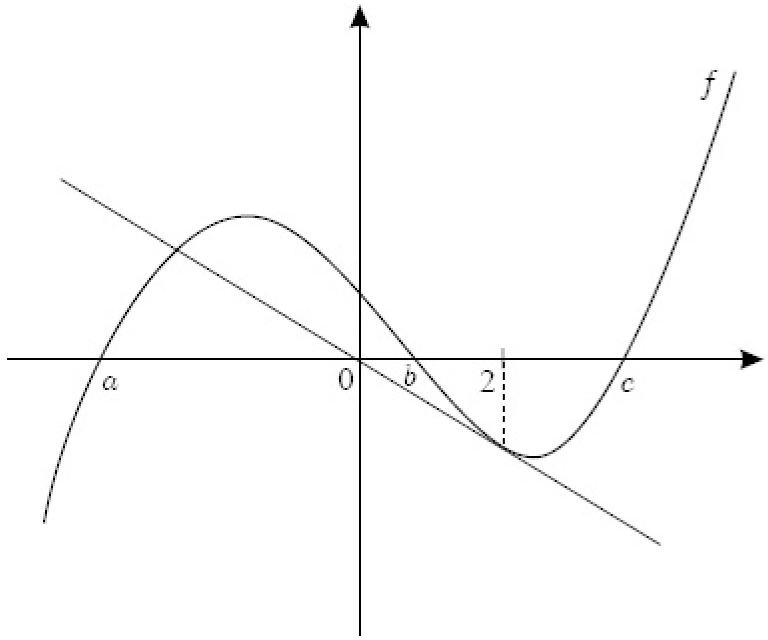
19. Sabendo que f é uma função derivável em $x = 1$ com $f(1) = 1$ e $f'(1) = 3$, calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)^2 - 1}{x - 1}$

20. Considere f a função definida pelo gráfico abaixo:



Faça um esboço do gráfico de $f'(x)$.

21. Considere f a função definida pelo gráfico abaixo:



Sabendo que a equação da reta tangente ao gráfico de f é $3y + x = 0$ (indicada na figura):

(a) Determine $f(2)$.

(b) Determine $f'(2)$.

22. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Verifique que f é derivável e ache a função f'.

23. As funções seno e cosseno são deriváveis em $x = 0$?

24. Se f é uma função derivável, o que podemos dizer a respeito da derivabilidade das funções dadas abaixo?

(a) $g(x) = f(x - 1)$

(b) $h(x) = f(2x)$

(c) $u(x) = f(-x) + 1$

25. Sabendo que a reta $y = 7x - 13$ é tangente ao gráfico de uma função f em $x = 0$, determine:

(a) $f(0)$ e $f'(0)$

(b) a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x - 2)$ em x = 2.

(c) a equação da reta tangente ao gráfico de $h(x) = f(x) - 1$ em $x = 0$.

(d) a equação da reta tangente ao gráfico de $u(x) = -f(x)$ em $x = 0$.

2. Propriedades e a derivada de x^r

Nesta seção, apresentaremos as propriedades básicas das funções deriváveis que usaremos para, em particular, obter as derivadas das funções elementares algébricas.

Propriedades da derivação

Como já salientamos, as funções contínuas são aquelas com as quais podemos fazer cálculos aproximados e daí decorre a importância dessas funções. O teorema que enunciamos a seguir garante que toda função derivável é também uma função contínua.

Teorema 2.1*: *Se a função f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Em particular, se uma função f é derivável em todos os pontos de seu domínio, então f é contínua em todos os pontos de seu domínio sendo, portanto, uma função contínua.

No entanto, é importante destacar que a recíproca desse teorema não é verdadeira, isto é, se sabemos que uma função é contínua nada podemos afirmar a respeito de sua derivabilidade. Para vermos isso é suficiente apresentar um contraexemplo para a recíproca, isto é, uma função que seja contínua mas não derivável.

A função

$$f(x) = |x|$$

com $x_0 = 0$ é um contraexemplo, já que sabemos que f é uma função contínua em $x_0 = 0$ (f é contínua em qualquer número real) e, como vimos acima, f não é derivável em $x_0 = 0$.

Os resultados que enunciamos a seguir são muito úteis no cálculo de derivadas, pois nos garantem que podemos obter a derivada de certas funções a partir da derivada de outras funções.

Teorema 2.2: *Se f e g são funções deriváveis em x_0, então:*

(a) *$f + g$ é derivável em x_0 e*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) *fg é derivável em x_0 e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

(c) *se $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{1}{g}$ é derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Usando os itens (b) e (c) podemos provar o seguinte resultado:

Corolário 1*: *Se f e g são funções deriváveis em x_0 e $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Já o item (b) e o fato de que a derivada de uma função constante é a função constante igual a 0, nos garantem que:

Corolário 2*: *Se f é uma função derivável e c é um número real, então a função $x \mapsto cf(x)$ é derivável e*

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Observe que, como consequência desses resultados, se f e g são funções deriváveis (isto é, deriváveis em todos os pontos de seus domínios), então as funções $f+g,\ fg,\ \dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$ também são deriváveis e podemos obter suas funções derivadas sem precisar calcular os limites que definem a derivada.

Exemplos

1. Se a, b e c são números reais e $f(x) = ax^2 + bx + c$, então f é uma função derivável e $f'(x) = 2ax + b$. De fato, se $g(x) = ax^2$ e $h(x) = bx + c$, já vimos que $h'(x) = b$ e agora podemos usar o Teorema 2.2 e o Corolário 2 para concluir que f é derivável em cada número real x (e portanto é uma função derivável) com $f'(x) = 2ax + b$.

2. Seja $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-x+1}$ Então, usando o Corolário 1 e o exemplo acima, temos que para cada número x no domínio de f (isto é, x tal que $x^2 - x + 1 \neq 0$)

$$f'(x) = \frac{3(x^2-x+1)-(3x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}.$$

O teorema seguinte dá condições que garantem que uma função definida por mais de uma regra de associação é uma função derivável:

Teorema 2.3: Se f e g são funções deriváveis em (a, b) e $c \in (a, b)$ é tal que

$$f(c) = \alpha = g(c) \text{ e } f'(c) = \beta = g'(c),$$

então a função

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } a < x < c, \\ \alpha & x = c, \\ g(x) & \text{se } c < x < b, \end{cases}$$

é derivável com

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } a < x < c, \\ \beta & x = c, \\ g'(x) & \text{se } c < x < b. \end{cases}$$

Demonstração: Para mostrar que h é derivável em (a, b), consideremos primeiro $a < x_0 < c$. Nesse caso, temos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

já que para $x < c$ tem-se que $h(x) = f(x)$ e f é derivável em x_0. OU seja,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

e, portanto, h é derivável em $x_0 < c$ com $h'(x_0) = f(x_0)$. Analogamente, para $c < x_0 < b$, temos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

isto é, h é derivável em $x_0 > c$ com $h'(x_0) = g'(x_0)$. Agora, para $x_0 = c$, vemos que devemos considerar os limites laterais do quociente $\frac{h(x) - h(c)}{x - c}$, já que

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \begin{cases} \dfrac{f(x) - h(c)}{x - c} & \text{se } \ a < x < c, \\ \dfrac{g(x) - h(c)}{x - c} & \text{se } \ c < x < b. \end{cases}$$

Mas, $h(c) = \alpha = f(c) = g(c)$, donde

$$\lim_{x \to c^-} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

e

$$\lim_{x \to c^+} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(c),$$

já que f e g são deriváveis em $x = c$. Como, por hipótese,

$$f'(c) = \beta = g'(c),$$

temos que

$$\lim_{x \to c^-} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \beta = \lim_{x \to c^+} \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \beta,$$

o que nos diz que h é derivável em $x = c$ com $h'(c) = \beta$. □

Aqui é importante destacar que a continuidade de h em $x = c$, que no teorema é dada pela condição $f(c) = g(c)$, é fundamental para a derivabilidade de h, já que para ser derivável num ponto a função tem que ser contínua nesse ponto (isso é o que nos diz o Teorema 2.1). A seguir, damos um exemplo bem simples de uma função h do tipo acima que não é derivável, embora as funções f e g que usamos para definir h sejam deriváveis com $f'(c) = g'(c)$:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ -1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

Aqui, f é a função constante igual a 1 e g é a função constante igual a -1, sendo assim funções deriváveis com $f'(x) = 0 = g'(x)$ para qualquer número real x.

Mas

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + 1}{x} = -\infty$$

e, portanto, não existe o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$, isto é, h não é derivável em $x = 0$, apesar de $f'(0) = 0 = g'(0)$.

A derivada de x^n

Observe que, como já sabemos que a função identidade, $f(x) = x$, é derivável com $f'(x) = 1$ para qualquer x, podemos usar o Teorema 2.2 da seção anterior para concluir que a função $h(x) = x^2$ também é derivável com $h'(x) = 2x$, sem precisar calcular diretamente o limite envolvido na definição como fizemos anteriormente: de fato, basta observar que $h(x) = f(x)f(x)$ e, portanto, o item (b) garante que

$$h'(x) = f'(x)f(x) + f'(x)f(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$$

(basta fazer, no item (b), $f(x) = x = g(x)$).

Mais ainda, agora que sabemos que a função identidade e a função $x \mapsto x^2$ são deriváveis, podemos novamente usar o item (b) do Teorema 2.2 para concluir que a função $x \mapsto x^3$ também é derivável e $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$.

De fato, podemos provar que se $n > 1$ é um inteiro, então para qualquer número real x tem-se que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Para isso vejamos que se já sabemos que essa fórmula é válida para um número inteiro $n > 1$, então, usando o item (b) do teorema acima e a derivada da função identidade, podemos concluir que a fórmula também é válida para o inteiro seguinte, $n + 1$: basta fazer $f(x) = x$ e $g(x) = x^n$. Então

$$f'(x) = 1 \text{ e } g'(x) = nx^{n-1},$$

já que estamos assumindo que a fórmula é válida para a função $g(x) = x^n$. Como

$$x^{n+1} = x \cdot x^n = f(x)g(x),$$

temos que a função $x \mapsto x^{n+1}$ é derivável com

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = 1 \cdot x^n + nx^{n-1} \cdot x = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

Por outro lado, como já sabemos que a fórmula é verdadeira para $n = 2$, o *Princípio de Indução Finita* da Matemática garante que essa fórmula é válida para qualquer $n > 1$.

Também decorre do princípio de indução finita e do item (a) do Teorema 2.2 que

a soma de um número finito de funções deriváveis é uma função derivável cuja *derivada é a soma das derivadas das parcelas.*

Uma aplicação imediata que podemos fazer desse resultado e das derivadas que aprendemos até agora é que qualquer polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é uma função derivável com

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

De fato, um polinômio é uma soma finita de funções do tipo $x \mapsto cx^k$, k inteiro positivo, que pelo Corolário 2 e a derivabilidade das funções x^k, são funções deriváveis com

$$\frac{d}{dx}(cx^k) = c(\frac{d}{dx}(x^k)) = ckx^{k-1}.$$

Em particular aprendemos que se p é um polinômio de grau n, então sua derivada p' é um polinômio de grau $n - 1$.

Agora, podemos usar o item (c) do Teorema 2.2 e as derivadas das funções x^k, $k \geq 1$ para obter as derivadas das funções $x \mapsto \frac{1}{x^k}$.

Comecemos com a função $x \mapsto \frac{1}{x}$. Como a função identidade $g(x) = x$ é derivável em qualquer número real x com $g'(x) = 1$, temos que se $x \neq 0$, então $\frac{1}{g}$ é derivável em x com g

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{g})'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Em geral, se k é um inteiro positivo, fazendo $g(x) = x^k$, o item (c) do Teorema 2.2 garante que se $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^k}) = -\frac{kx^{k-1}}{(x^k)^2}.$$

Agora, usando as propriedades algébricas de potências inteiras de números reais e a notação $\frac{1}{x} = x^{-1}$, obtemos

$$\frac{1}{(x^k)^2} = x^{-2k} \quad \text{e} \quad x^{k-1}x^{-2k} = x^{-k-1}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k}\right) = -kx^{-k-1}.$$

Observe agora que se fazemos $n = -k$, então $\frac{1}{x^k} = x^{-k} = x^n$ e portanto podemos afirmar que a fórmula que obtivemos acima para a derivada de x^n com n sendo um inteiro positivo também é válida quando n é um inteiro negativo.

Como vimos acima que polinômios são funções deriváveis, o Corolário 1 garante que as funções definidas como quocientes de polinômios (que são chamadas *funções racionais*), isto é, funções do tipo $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios, são também deriváveis.

Exemplos

3. Se $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + x - 1$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5 \cdot 3)x^{5-1} + (3 \cdot 2)x^{3-1} + 1 \\ &= 15x^4 + 6x^2 + 1. \end{aligned}$$

4. Se $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$, então $f'(x) = \frac{-x^4 + 4x^2 - 1}{(x^3 + x)^2}$.

De fato, fazendo $p(x) = x^2 - 1$ e $q(x) = x^3 + x$, temos que $f = \frac{p}{q}$, portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2} \\ &= \frac{2x(x^3 + x) - (x^2 - 1)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$f'(x) = \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{(x^3 + x)^2}.$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Use as regras de derivação para calcular a derivada das funções a seguir. Explicite quais regras foram usadas.

(a) $f(x) = 0$

(b) $f(x) = \sqrt{6}$

(c) $f(x) = 8x$

(d) $f(x) = 6x^3 - x^2$

(e) $f(x) = (4x^7 - 209x^3 + 5x + 1)(5x^3 - 9x - 100)$

(f) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

(g) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x-1}$

(h) $f(x) = \frac{3x^9-2x^8}{7-7x^5}$

(i) $f(x) = \frac{(2x-9)(6-4x^2)}{2x^4-1}$

(j) $f(x) = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + c$

(k) $f(x) = \dfrac{a-x}{a+x}$

2. Seja $f(x) = \frac{3x-7}{2x^4-7x+1}$. equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 1$.

3. Determine a equação da reta que seja tangente ao gráfico de

$$f(x) = (2x^5 + x - 8)(6 - 3x^3 + 8x^9 + 10x)$$

no ponto $x_0 = 0$.

4. Seja $f(x) = x^3 + 2$:

   (a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2$.

   (b) Para quais valores de x_0 tem-se que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é paralela à reta $y = 3x$?

5. Seja $p(x) = x^4 - 3x^2 + 3x - 1$ e r a reta cuja equação é $y = 3x - 1$. Encontre os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico de p é paralela à reta r.

6. Considere a função $f(x) = x^2 + x$.

   (a) Determine $f'(x)$.

   (b) Determine a equação de uma reta que seja tangente ao gráfico de f e que seja paralela à reta $y = 2x + 4$.

7. Seja $f(x) = \frac{4x^5+ax^2+3}{4x-1}$ a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é paralela à reta $y = 5x$:

   (a) Determine a.

   (b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.

8. Determine o ponto x_1 onde a reta tangente à curva $y = \frac{1}{4}x^4$ no ponto $(x_0, \frac{x_0^4}{4})$ corta o eixo dos x.

9. Seja f uma função tal que $f(0) = -1$ e $f'(0) = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x)(x^3 + x - 1)$ em $x = 0$.

10. Seja g uma função tal que $g(1) = 3$ e $g'(1) = -1$.

    (a) Calcule $h'(1)$, onde $h(x) = \dfrac{5x^3 - 10x + 9}{g(x)}$.

    (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de h em $x = 1$.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = -2$. Calcule $g'(1)$ onde

$$g(x) = \frac{f(x)}{2x^3 + x - 1}.$$

12. Seja $f(x) = x^3 - 2x + 3$. Determine o ponto de interseção do eixo-x com a reta tangente ao gráfico de f em $x = t$.

13. Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ em $x = 1$? Determine as interseções dessa reta com o gráfico de g.

14. Dizemos que o gráfico de uma função f é tangente ao gráfico de uma função g num ponto se f e g possuem a mesma reta tangente nesse ponto. Os gráficos de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 5$ e $g(x) = x^2 - 2x + 3$ têm pontos de tangência? Quais?

15. Seja $p(x) = 3x^5 - x^2 + 1$:
    (a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de p em $x = 1$.
    (b) Sabendo que f é derivável em $x_0 = 1$, com $f(1) = -1$ e $f'(1) = 2$, ache a equação da reta tangente ao gráfico da função $h(x) = p(x)f(x)$ em $x = 1$.

16. Decida se a afirmação abaixo é correta:

    Se f é a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0, \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

    então $f'(0) = 0$, pois $f'(x) = 2x$.

17. Sabendo que f é uma função derivável em $x = -1$ com $f'(-1) = 2$ e $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$, ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$

18. Considere funções f da forma

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se} \quad x \geq 0, \\ h(x) & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

onde g e h são funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Decida se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa:

> *Se f é do tipo acima com $g' = h'$, então f é derivável em x =* 0 e $f'(0) = g'(0)$.

19. Decida se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa:

> *Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$, então f é derivável em x =* 0 *com* $f'(0) = 1$.

20. Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Verifique que f é derivável e ache f'.

21. Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{se } x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1, \\ -x^2 + bx + c & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determine valores para a, b e c de tal forma que f seja derivável em x = 1.

A derivada da função inversa

Lembremos agora que algumas funções que já conhecemos foram obtidas como funções inversas de outras funções: esse é o caso, por exemplo, da função $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geq 0$, que é a inversa de $\phi(x) = x^2$ para $x \geq 0$.

Vejamos agora que a partir da diferenciabilidade de uma função inversível f podemos obter informações sobre a diferenciabilidade de sua função inversa f^{-1}.

Para isso vamos usar a representação geométrica do conceito de derivada e o fato de que o gráfico da inversa f^{-1} de uma função inversível f pode ser obtido pela reflexão, em relação à reta $y = x$, do gráfico de f.

Suponhamos então que estamos falando de uma função inversível f que é derivável num número a. Já sabemos que isso significa que, no ponto (a,

$f(a)$), o gráfico de f possui uma reta tangente não vertical, r_a, cujo coeficiente angular é o número $f'(a)$.

Por outro lado, sabemos também que o gráfico de f^{-1} é obtido por uma reflexão em relação à reta $y = x$ do gráfico de f e, portanto, facilmente nos convencemos de que a reflexão da reta r_a junto com o gráfico de f fornece uma reta r_b que é tangente ao gráfico de f^{-1} em $b = f(a)$ (veja Figura 2.1).

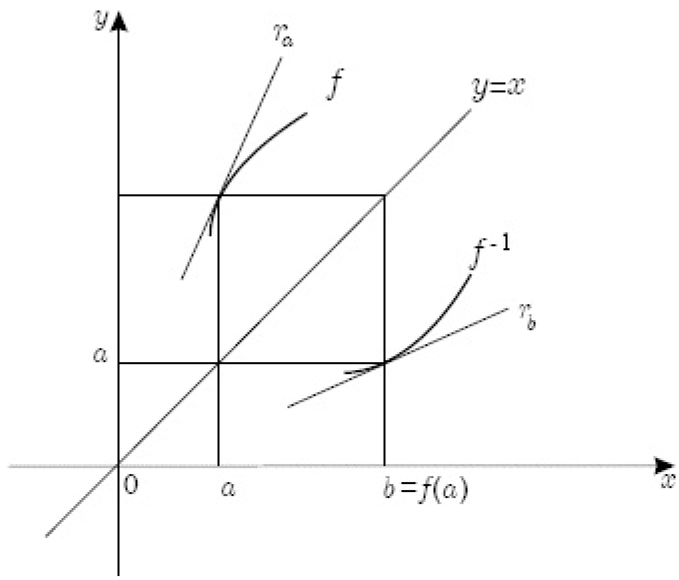


Figura 2.1

Observamos agora que, se r_a não é uma reta horizontal, o que é equivalente a dizer que $f'(a) \neq 0$, então r_b não é vertical e, portanto, podemos concluir que f^{-1} é derivável no número $b = f(a)$ e que $(f^{-1})'(b)$ é o coeficiente angular de r_b. Para calcular $(f^{-1})'(b)$, isto é, para calcular o coeficiente angular de r_b, observamos que se

$$g(x) = \alpha x + \beta$$

é a função afim, cujo gráfico num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos é a reta r_a e $\alpha = f'(a) \neq 0$, então g é inversível e a reta r_b (ver Figura 2.2) é o gráfico de

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}.$$

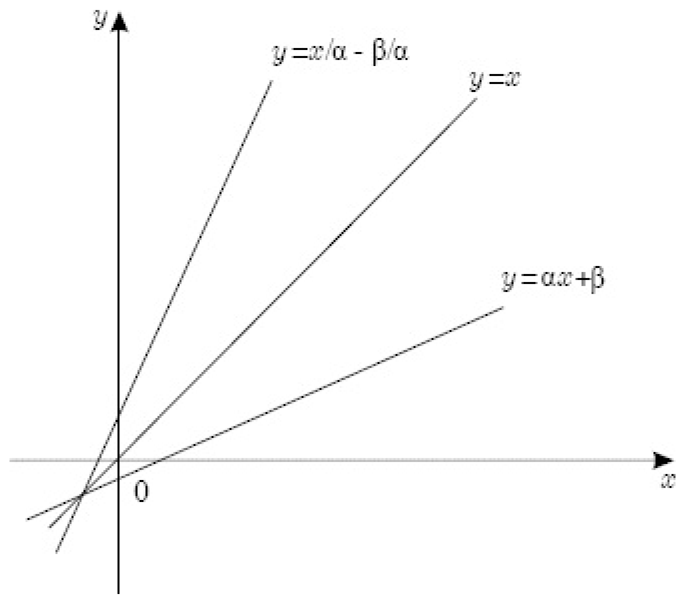


Figura 2.2

Assim vemos que o coeficiente angular de r_b é $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{f'(a)}$ isto é,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Mas $b = f(a)$ quer dizer que $f^{-1}(b) = a$ e, portanto, podemos escrever

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(\,f^{-1}(b))}.$$

Ou seja, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.3 (Derivada da função inversa): *Se f é uma função inversível e derivável no número $a = f^{-1}(x_0)$ com $f'(a) \neq 0$, então sua função inversa f^{-1} é derivável em x_0 com*

$$(\,f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(\,f^{-1}(x_0))}.$$

Resta observar que se a é tal que $f'(a) = 0$, isto é, a reta tangente ao gráfico de f em $x = a$ é horizontal, então o gráfico de f^{-1} possui uma reta tangente vertical em $x_0 = f(a)$, já que a reflexão ortogonal de uma reta horizontal em relação à reta $y = x$ produz uma reta vertical e, portanto f^{-1} não é derivável em x_0.

Observe que, em particular, se f é uma função inversível e derivável cuja derivada nunca se anula, isto é, $f'(x) \neq 0$ qualquer que seja x no domínio de f, então sua função inversa também é uma função derivável, isto é, possui derivada em todos os números de seu domínio e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Uma aplicação imediata do Teorema 2.3 nos leva à diferenciabilidade da função $x \mapsto \sqrt{x}$, para $x > 0$. De fato, se $\phi(x) = x^2$ para $x \geq 0$, então

$$\phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

e, se $x > 0$,

$$\phi'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} > 0.$$

Logo, para $x > 0$, o Teorema 2.3 garante que

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{\varphi'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Na verdade esse é um caso particular das funções $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x > 0$ e $n > 1$. De fato, se $n > 1$ e $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$, então $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ para $x \geq 0$ e, como

$$f'(\sqrt[n]{x}) = n(\sqrt[n]{x})^{n-1} = n\sqrt[n]{x^{n-1}},$$

temos que $f'(\sqrt[n]{x}) \neq 0$ se $x > 0$, já que nesse caso $\sqrt[n]{x} > 0$. Logo a função $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é derivável em $x > 0$ com

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Usando a notação com expoente, isto é, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, temos que

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} = (x^{n-1})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n-1}{n}}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Resta agora observar que sené um inteiro ímpar, então a função $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ também está definida em todo número real com $\sqrt[n]{x} \neq 0$ se $x \neq 0$. Logo, se n é ímpar, então $\sqrt[n]{x}$ é derivável em qualquer número $x \neq 0$ com

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Geometricamente, temos que o gráfico de $\sqrt[n]{x}$ possui um reta tangente vertical em $x = 0$, não sendo, portanto, derivável em 0.

A regra da cadeia

O Teorema 2.2 trata das operações com funções que resultam das operações algébricas com números reais, isto é, soma, produto e quociente de números reais. Mas sabemos que há uma outra operação que podemos efetuar com funções, a composição. O resultado que trata da diferenciabilidade de uma função composta a partir da diferenciabilidade das funções componentes é conhecido como *Regra da Cadeia*.

Teorema 2.4 (Regra da Cadeia): *Se g é derivável em x_0* e *f é derivável no número $g(x_0)$, então a função composta f* o *g é derivável em x_0 com*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Exemplos

5. Se $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$, então f é derivável e

$$f'(x) = 20x(x^2 + 1)^9.$$

De fato, fazendo $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x^{10}$, temos que $f = h \circ g$ e, portanto,

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

Como

$$g'(x) = 2x \text{ e } h'(x) = 10x^9,$$

temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x^2 + 1)(2x) \\ &= 10(x^2 + 1)^9(2x) \\ &= 20x(x^2 + 1)^9. \end{aligned}$$

6. Se $f(x) = f(x) = \sqrt{x^3 + x}$, então $f'(x) = f'(x) = \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$, para todo número x onde f é derivável, isto é, x real tal que $x^3 + x > 0$.

De fato, fazendo

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ e } h(x) = x^3 + x,$$

temos que $f = g \circ h$. Mais ainda, como h é derivável em qualquer número real e g é derivável em números positivos, o teorema da regra da cadeia garante que f é derivável em números x tais que $h(x) > 0$, e

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$

Como $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, temos que

$$g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Por outro lado,

$$h'(x) = 3x^2 + 1,$$

logo

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}}\right)(3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

7. Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $h = f \circ g$, onde g é uma função derivável em $x_0 = -1$, com

$$g(-1) = 1 \text{ e } g'(-1) = 3.$$

Então h é derivável em $x_0 = -1$ com

$$h'(-1) = 6.$$

De fato, pela regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} h'(-1) &= f'(g(-1))g'(-1) \\ &= f'(1)g'(-1) \\ &= 2 \cdot 3 = 6, \end{aligned}$$

já que $f'(x) = 2x$ e, portanto, $f'(1) = 2$.

A derivada de x^r

Como aplicação imediata da regra da cadeia, vamos obter a diferenciabilidade da função $x \mapsto x^r$ em $x > 0$, onde r é um número racional.

Comecemos considerando o caso $r > 0$, isto é, $r = \frac{p}{q}$ com p e q sendo inteiros positivos. Sejam

$$f(x) = x^{\frac{1}{q}} \text{ e } g(x) = x^p.$$

Então

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} \quad \text{e} \quad g'(x) = px^{p-1} \text{ e } g'(x) = px^{p-1}$$

e

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = f(g(x)),$$

isto é, x^r é a composta $f \circ g$. Como $g(x) > 0$ para $x > 0$ e f é derivável em qualquer número positivo, temos que f é derivável no número $g(x)$, qualquer que seja $x > 0$, com

$$f'(g(x)) = \frac{1}{q}(g(x))^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q}x^{\frac{p}{q}-p}.$$

Assim, como g é derivável em qualquer número real, a Regra da Cadeia garante que f o g é derivável em qualquer $x > 0$ com

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = (\tfrac{1}{q}x^{\frac{p}{q}-p})g'(x) \\ &= (\tfrac{1}{q}x^{\frac{p}{q}-p})px^{p-1} = \tfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.\end{aligned}$$

Lembrando que $r = \dfrac{p}{q}$ e $(f \circ g)(x) = x^r$, obtivemos que para $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}.$$

Finalmente observamos que essa fórmula também é válida para r sendo um racional negativo. Para verificar essa afirmação basta usar o resultado acima para $s = -r$ e usar a propriedade algébrica $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que f é inversível e $f(-1) = -3$, determine $(f^{-1})'(-3)$.

2. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é inversível, determine $(f^{-1})'(2)$.

3. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 8x - 6$. Sabendo que f é inversível, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = -6$.

4. Sabendo que $y = 2x + 3$ é a equação da reta tangente ao gráfico de uma função inversível, f, em $x = 1$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 5$.

5. Sabendo que $y = -\frac{3}{5}x + 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de uma função inversível, f, em $x = -\frac{2}{7}$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = \frac{41}{35}$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 1$.
   (a) Determine f^{-1}.
   (b) Determine $(f^{-1})'$.
   (c) Considere $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Calcule a derivada de g e compare sua resposta com o resultado do item (b).

7. Considere $f(x) = x^3$. Utilizando o teorema da função inversa, determine a derivada da função inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, para $x \neq 0$.

8. Considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4x^3 - 7x + 8$. Calcule $(f \circ g)'$ e $(g \circ f)'$.

9. Use as regras de derivação para calcular a derivada das funções abaixo:

(a) $f(x) = (3x^8 - 4x^5 + 9x - 14)^{27}$

(b) $f(x) = (4x^7 - 5x^3)^{51}(7x^3 - \frac{x}{3} + 1)^{43}$

(c) $f(x) = \frac{1}{(3x^7 - 6x^2)^{15}}$

(d) $f(x) = (\frac{3x^2 - 4x + 1}{7x^4 + 1})^6$

(e) $f(x) = 7x^{\frac{3}{5}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{9}{2}} + \sqrt{x} - \sqrt{3}$

(f) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 1}$

(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

(i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

(j) $f(x) = x^3\sqrt{3x^2 + 1}$

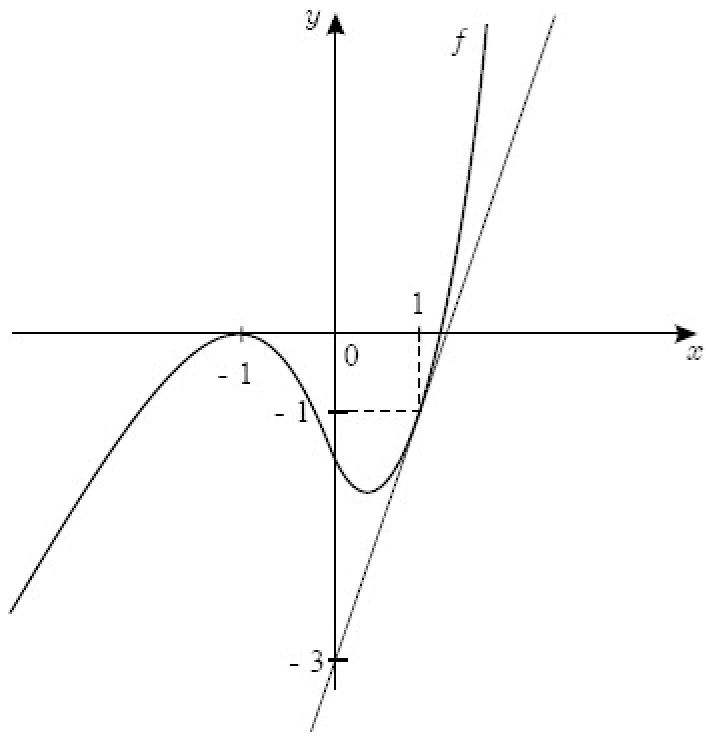
(k) $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{6x^3 - 2x}$

(l) $f(x) = ((\frac{2}{7}x^{-3} + 4x)(5 - \sqrt{x + 1}) + \pi)^{345}$

(m) $f(x) = \dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{bx^2}{x\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}$

(n) $f(x) = \sqrt[7]{9 - \frac{3}{5}\sqrt{x}}$

10. Seja $g(t) = f(t^2 + t - 5)$, onde f é a função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



(a) Ache $f'(1)$.

(b) Ache $g'(2)$.

(c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $t = 2$.

11. Seja g uma função derivável tal que $g(-1) = 2$ e $g'(-1) = 3$. Sejam $f(x) = \frac{x^3-x}{x-1}$ e $h(x) = f(g(x))$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de h em $x = -1$.

12. Seja f a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$ é

$$y = 3x + 1.$$

Seja $g(x) = f(x^3 - 3x - 1)$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = 0$.

13. Seja f uma função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $y = 2x - 1$ e seja $g(x) = f(x^2 + 2x + 1)$. Decida qual das afirmações a seguir é correta:

(a) a equação da reta r, tangente ao gráfico de g em $x = 0$, é $y = 4x + 1$, pois

$$(0, g(0)) \in r,\ g(0) = f(1) = 1, \text{ e } g'(0) = 2f'(1) = 4.$$

(b) a equação da reta r, tangente ao gráfico de g em $x = 0$, é $y = 2x + 1$, pois

$$(0, g(0)) \in r,\ g(0) = f(1) = 1 \text{ e } g'(0) = f'(1) = 2.$$

(c) $g'(0) = -2$, pois

$$f'(x) = 2x - 1 \text{ e } g'(x) = f'(x)(2x + 2) = 4x^2 + 2x - 2.$$

14. Seja f a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é

$$y = 5x - 4.$$

Seja $g(x) = f(f(x))$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = 1$.

15. Seja f uma função diferenciável. Use as regras de derivação para calcular a derivada das funções abaixo:

(a) $g(x) = 8f(x) + [f(x)f(x)]^{\frac{3}{7}}$

(b) $g(x) = f(f(x))$

(c) $g(x) = f(f(f(x)))$

(d) $g(x) = f(4x^3 - \frac{7}{3}\sqrt{x} - 9)f(18 - \frac{8}{\sqrt{x}})$

16. Sabendo que f é uma função derivável com $f(0) = -1$ e que

$$h(x) = xf(x) + (f(x))^2$$

é a função constante igual a 1, calcule $f'(0)$.

17. Sabendo que f é uma função derivável com $f(0) = 0$ e que

$$h(x) = 2(x - 1)^2 + (f(x) + 1)^2$$

é a função constante igual a 5, calcule $f'(0)$.

3. Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas

Se usarmos um programa gráfico para obter o gráfico de uma exponencial, b^x, num intervalo contendo o zero, veremos que a exponencial *parece* ser uma função derivável em $x = 0$, já que seu gráfico *parece* ter uma reta tangente nesse ponto (Figura 3.1). Isso de fato pode ser provado, mas aqui vamos admitir que isso é o que ocorre, isto é, que se b é a base de uma exponencial, então $h(x) = b^x$ é derivável em $x = 0$.

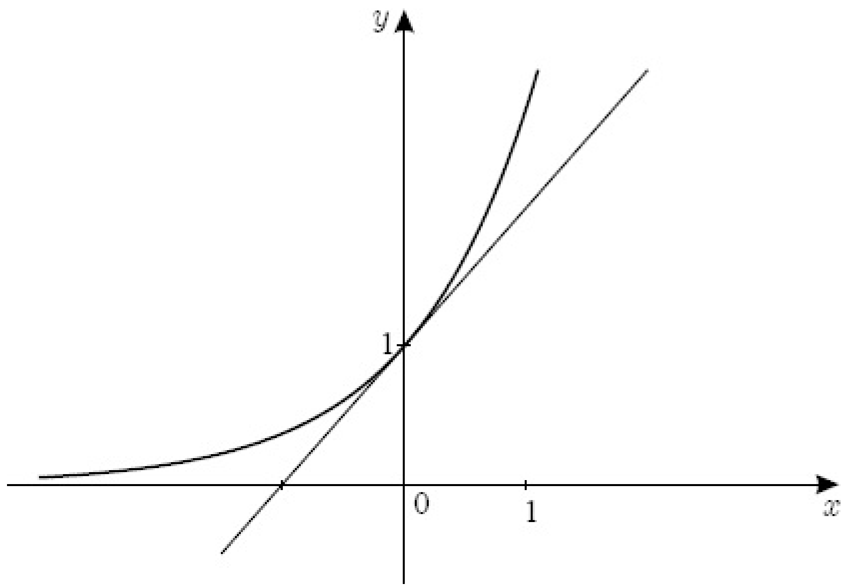


Figura 3.1

Nosso objetivo é chegar à derivabilidade das funções exponenciais e calcular suas derivadas admitindo que essas funções são deriváveis em $x = 0$.

Primeiro observamos que se compararmos os gráficos das exponenciais 2^x e 3^x com a reta $y = x + 1$, como na figura abaixo,

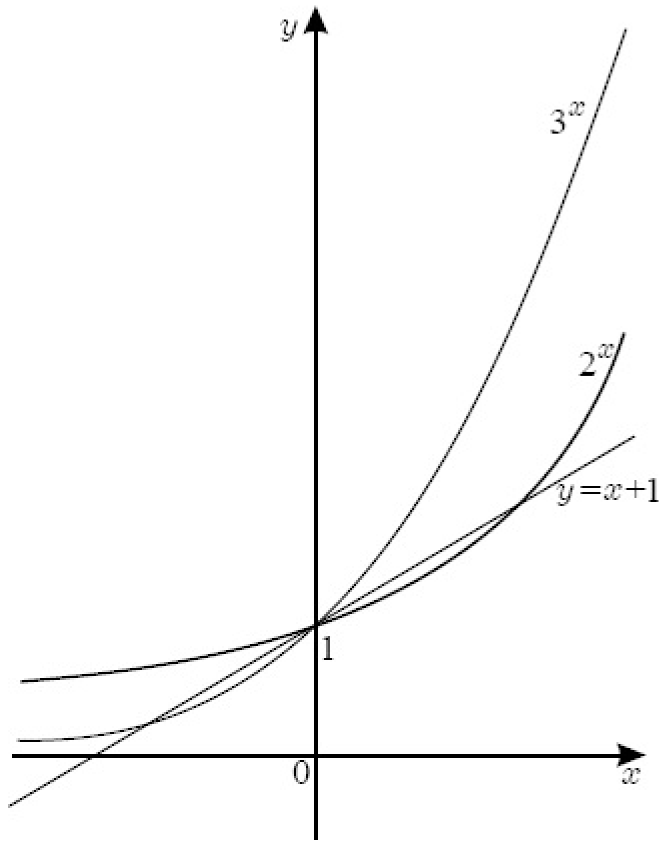


Figura 3.2

vemos que as retas tangentes aos gráfico de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$ em $x = 0$ (que admitimos existirem) têm uma inclinação menor, no caso de 2^x, e maior, no caso de 3^x, do que a inclinação de $y = x + 1$, isto é,

$$f'(0) < 1 < g'(0).$$

Essa relação e o fato de que entre os gráficos de duas exponenciais há sempre o gráfico de uma outra exponencial nos sugerem que deve haver um número, que denotaremos por e, entre 2 e 3 tal que o gráfico de $\psi(x) = e^x$ tem a reta $y = x+1$ como reta tangente em $x = 0$. Se isso é o que ocorre, então $\psi'(0) = 1$ (veja Figura 3.3), ou seja,

$$\psi'(0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^\delta - 1}{\delta} = 1,$$

já que 1 é o coeficiente angular da reta $y = x + 1$.

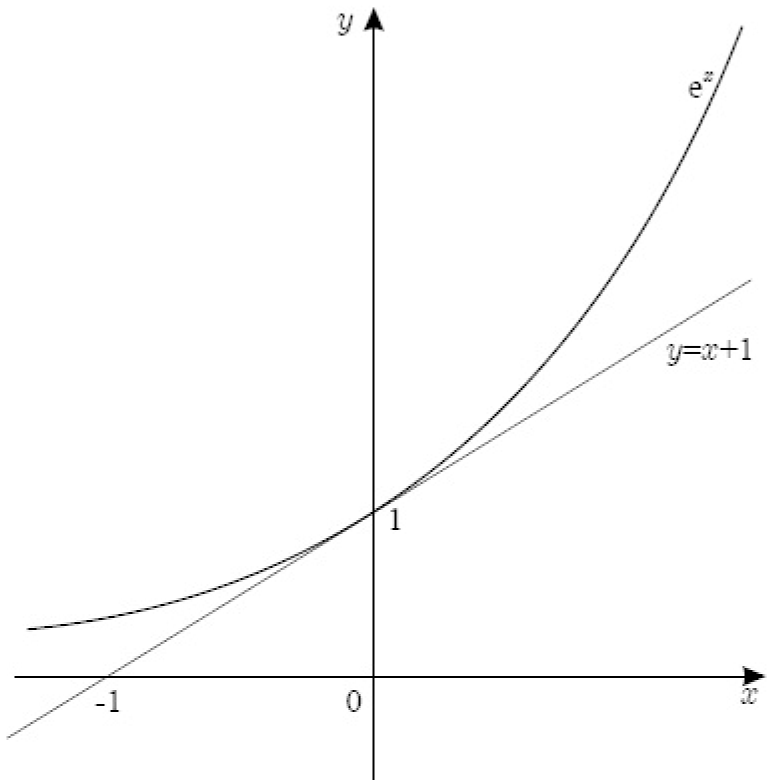


Figura 3.3

Mostremos então que a diferenciabilidade das funções exponenciais em $x = 0$ garante que existe tal número e. Para isso, lembremos que se b é a base de uma exponencial, podemos usar a exponencial 2^x para expressar b^x na forma

$$b^x = 2^{x \log_2 b},$$

qualquer que seja o número real x. Isto é, se

$$u(x) = (\log_2 b)x$$

e $f(x) = 2^x$, então u é uma função derivável com

$$u'(x) = \log_2 b \neq 0$$

(já que $b \neq 1$), e b^x é a função composta

$$b^x = (f \circ u)(x).$$

Como $u(0) = 0$ e estamos admitindo que f é derivável em $x_0 = 0$, a regra da cadeia garante que $h(x) = b^x$ é derivável em $x_0 = 0$ com

$$h'(0) = f'(u(0))u'(0) = f'(0) \log_2 b.$$

Ou seja, se definimos a função

$$H(b) = f'(0) \log_2 b$$

onde $f'(0)$ é a derivada de 2^x em $x = 0$, então, para cada $b \neq 1$ e positivo,

$H(b)$ é a derivada da função exponencial b^x *em $x = 0$.*

Em particular, $H(3)$ é a derivada de 3^x em $x = 0$ *e*, portanto, $H(3) > 1$, já que concluímos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de 3^x em $x = 0$ *é* maior do que a inclinação da reta $y = x + 1$.

Assim, provar que existe uma exponencial cuja derivada em $x = 0$ é 1 é equivalente a provar que existe um número real e, positivo, tal que e $\neq 1$ e $H(e) = 1$. Ou seja, queremos e tal que

$$f'(0) \log_2(e) = 1$$

donde

$$\log_2(e) = \frac{1}{f'(0)},$$

e, portanto,

$$e = 2^{\frac{1}{f'(0)}}.$$

Para concluir que $2 < e < 3$, basta usar o fato de que a função H é crescente com

$$H(2) < 1 < H(3),$$

isto é,

$$H(2) < H(e) < H(3),$$

e, portanto, $2 < e < 3$.

É interessante observar que o fato de a função H ser crescente nos diz que o número e é caracterizado pela propriedade de ser o único número real que é base de uma função exponencial cujo gráfico é tangente à reta $y = x + 1$ em $x = 0$.

O número e é chamado a *base dos logaritmos naturais* e, como provaremos no próximo capítulo (seção 2),

$$e = \lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}.$$

Resumindo, mostramos que se admitirmos que as exponenciais são deriváveis em $x = 0$, então para uma exponencial, $\psi(x) = e^x$, cuja base é um número entre 2 e 3, tem-se que seu gráfico é tangente à reta $y = x + 1$ em $x = 0$, isto é, $\psi'(0) = 1$

Vamos usar esse resultado para mostrar que a função e^x é derivável em qualquer número real com

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Para isso, devemos calcular o

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{e^{x+\delta} - e^x}{\delta}.$$

Primeiro usamos as propriedades da exponencial para obter que se $\delta \neq 0$, então

$$\frac{e^{x+\delta} - e^x}{\delta} = \frac{e^x(e^\delta - 1)}{\delta} = e^x(\frac{e^\delta - 1}{\delta}).$$

Em seguida observamos que

$$\lim_{\delta\to 0} e^x = e^x,$$

qualquer que seja o número real x (observe que x está fixo, é a variável em que estamos calculando o limite) e que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} = \psi'(0) = 1.$$

Podemos então usar o Teorema 2.2 do Capítulo 5 para concluir que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{e^{x+\delta} - e^{x}}{\delta} = (\lim_{\delta \to 0} e^{x})(\lim_{\delta \to 0} \frac{e^{\delta} - 1}{\delta}) = e^{x}.$$

Ou seja, e^x é uma função derivável com

$$\frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x},$$

De fato, essa propriedade caracteriza a função exponencial na base e: a exponencial e^x é, essencialmente, a única função não nula cuja derivada é a própria função (as outras funções que possuem essa propriedade são as funções ce^x, com c sendo qualquer número real).

Agora, para obter a derivada de outra exponencial, a^x, onde a é um número positivo diferente de 1, usamos a identidade

$$a^x = e^{x \ln a},$$

que nos diz que a^x é uma composição de funções deriváveis, isto é,

$$a^x = (f \circ g)(x)$$

com

$$f(x) = e^x \text{ e } g(x) = (\ln a)x.$$

Podemos então usar a regra da cadeia para obter a derivada de a^x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^{x}) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= e^{g(x)}g'(x) \\ &= e^{x \ln a}(\ln a) \\ &= (\ln a)a^{x}, \end{aligned}$$

já que $f'(g(x)) = e^{g(x)}$ $g'(x)$ = lna e $e^{x \ln a} = a^x$.

Desses resultados segue-se, pelo teorema da derivada da função inversa (Teorema 2.3), a diferenciabilidade das funções logarítmicas: de fato, se $h(x) = a^x$, então

$$\log_a x = h^{-1}(x),$$

e, como a derivada h' nunca se anula, podemos concluir que $\log_a x$ é derivável em qualquer número real positivo x com

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{h'(h^{-1}x)}\\ &= \frac{1}{(\ln a)a^{h^{-1}(x)}}\\ &= \frac{1}{(\ln a)a^{\log_a x}}.\end{aligned}$$

Mas $a^{\log_a x} = x$, logo, para $x > 0$, tem-se que

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

Em particular, para $a = e$, temos que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

já que $\ln e = 1$.

Como vimos anteriormente, se r é um número racional, então a função $x \mapsto x^r$, para $x > 0$, é derivável e $\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$. Agora que já conhecemos a derivada de uma função exponencial, podemos mostrar que essa regra de derivação é válida para qualquer expoente real s.

Mais precisamente, dado um número real s, seja h a função definida por

$$h(x) = x^s = e^{s\ln x}$$

para $x > 0$. Vamos mostrar que h é derivável e

$$\frac{d}{dx}(x^s) = sx^{s-1}.$$

De fato, se $f(x) = e^x$ e $g(x) = s \ln x$, então

$$x^s = (f \circ g)(x),$$

e, portanto, como f e g são deriváveis com $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = \frac{s}{x}$, o teorema da Regra da Cadeia garante que x^s é derivável com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^s) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= e^{g(x)}g'(x) \\ &= e^{s\ln x}(\frac{s}{x}), \end{aligned}$$

mas $e^{s\ln x} = x^s$, logo, para qualquer $x > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^s) &= \frac{s\,x^s}{x} \\ &= s\,x^{s-1}. \end{aligned}$$

Exemplos

1. Como $\frac{2}{3}$ é um número racional, já sabíamos que $\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Agora, como consequência do resultado imediatamente acima, temos que se $f(x) = x^\pi$ para $x > 0$, então $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

2. Seja $f(x) = x^{x^2}$ para $x > 0$. Temos que

$$f(x) = e^{x^2 \ln x}$$

e, portanto, fazendo $g(x) = e^x$ e $h(x) = x^2 \ln x$, temos que $f = g \circ h$. Mas

$$g'(x) = e^x \text{ e } h'(x) = 2x \ln x + x = x \ln x^2 + x,$$

e, portanto, pela Regra da Cadeia temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= e^{h(x)}(x \ln x^2 + x) \\ &= (x \ln x^2 + x)\, e^{x^2 \ln x} \\ &= (x \ln x^2 + x) x^{x^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$f'(x) = x^{x^2+1}(\ln x^2 + 1).$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^2e^x + \pi x$

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

(c) $f(x) = e^{x \ln x}$

(d) $f(x) = x^2(1 - \log_3 x)$

(e) $f(x) = x\ e^{x^3+2x-1} + x^3$

(f) $f(x) = (x^4 - x^2 + 2x - 1)\ln x^2$

(g) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

(h) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + \ln 2x$

(i) $f(x) = (1 - x^2)\,e^x$

(j) $f(x) = \ln\left|x^3 - 2x^2 + 1\right|$

(k) $f(x) = 2^{x^2}$

(l) $f(x) = x^x$

(m) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(n) $f(x) = (x \ln x)^9$

(o) $f(x) = (xe^x + x^2)^{12}$

(p) $f(x) = xe^{x^2+1} + x\ln(x^2+1)$

2. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções, e determine (se existirem) os pontos onde ela se anula:

(a) $f(t) = \dfrac{\ln t^2}{t}$

(b) $g(u) = u^2e^{-u}$

(c) $h(s) = \ln(1 + e^{s^2-s})$

(d) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \log_3(2x)$

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{z \to 0} \frac{3^{z+2} - 3^2}{z}$

(b) $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x - 1}$

4. Para cada função f abaixo determine a equação da reta tangente no ponto x_0 correspondente.

   (a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = e^{x^2-1}$, $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

   (c) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \log_7 x$, $x_0 = 1$.

   (e) $f(x) = \log_4 |x|$, $x_0 = -1$.

   (f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$ e $x_0 = e$.

   (g) $f(x) = \ln |x|$, $x_0 = e^2$.

   (h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x_0 = 1$.

5. Considere $f(x) = e^{5x+2}$.

   (a) Encontre a solução da equação $f(x) = 3$.

   (b) Calcule $(f^{-1})'(3)$.

   (c) Ache a expressão da função inversa f^{-1}.

   (d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$.

   (e) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 1$.

6. Considere $f(x) = e^{7x-2}$ e $g(x) = \ln(4x^3 + \sqrt{2})$. Calcule:

   (a) $g'(x)$ e $f'(x)$.

   (b) $(g \circ f)(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.

   (c) $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.

   (d) $(fg)(x)$ e $(fg)'(x)$.

(e) $(f + g)(x)$ e $(f + g)'(x)$.

(f) $(f^{-1} \circ g)(x)$ e $(f^{-1} \circ g)'(x)$.

(g) $(f \circ g^{-1})(x)$ e $(f \circ g^{-1})'(x)$.

7. Calcule a derivada de $f(x) = e^{g(x)}$ em $x_0 = 1$, sabendo que $g(1) = 1$ e $g'(1) = -3$.

8. Considere $f(x) = g(e^{x^2-1})$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = -1$, sabendo que $f(-1) = 2$ e $g'(1) = \frac{8}{3}$.

9. Seja $f(x) = \ln g(x)$. Calcule $g'(4)$, sabendo que $f(4) = 2$ e $f'(4) = 5$.

10. Seja $f(x) = 6^{h(h(x))}$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = -2$, sabendo que $h(-2) = -2$ e $h'(-2) = 2$.

11. Sabendo que f é uma função derivável com $f(1) = 3$ e que $h(x) = xe^{f(x)2} + f(x)$ é a função constante igual a 3, calcule $f'(1)$.

4. Derivadas das funções trigonométricas

As derivadas de seno e cosseno

Comecemos por observar que para obter as derivadas das funções trigonométricas é suficiente conhecer a derivada da função sen x, já que cos x = sen $(x + \frac{\pi}{2})$. Outras funções trigonométricas são definidas por quocientes que envolvem seno e cosseno ou por funções inversas dessas funções.

Denotemos por f a função seno, isto é, $f(x)$ = sen x. Para concluir que f é derivável num número x, devemos mostrar que existe o limite

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\delta) - \operatorname{sen} x}{\delta}.$$

Para isso, primeiro usamos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x + \delta) = \operatorname{sen} x \operatorname{cós} \delta + \operatorname{sen} \delta \cos x$$

para obter que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)-\operatorname{sen} x}{\delta} &= \frac{\operatorname{sen} x\ \cos\ \delta+\operatorname{sen}\delta\ \cos\ x-\operatorname{sen} x}{\delta}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x(\cos\ \delta-1)+\operatorname{sen}\delta\ \cos x}{\delta}\\ &= \operatorname{sen} x(\frac{\cos\ \delta-1}{\delta})+\cos x(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}).\end{aligned}$$

Em seguida, analisando essa expressão, vemos que seu limite, quando $\delta \to 0$, envolve os limites fundamentais

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\delta\to 0}\frac{\cos\ \delta-1}{\delta}=0,$$

(veja Teorema 3.2 do capítulo 6) e que, como x é um número fixo (a variável em que estamos tomando o limite é δ), os números sem x e cós x não variam quando $\delta \to 0$. Ou seja,

$$\lim_{\delta\to 0}\operatorname{sen} x\,(\frac{\cos\ \delta-1}{\delta})=\operatorname{sen} x\,(\lim_{\delta\to 0}\frac{\cos\ \delta-1}{\delta})=0$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}\cos x\,(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta})=\cos x\,(\lim_{\delta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta})=\cos x.$$

Temos então que

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)-\operatorname{sen} x}{\delta}=\operatorname{sen} x(\lim_{\delta\to 0}\frac{\cos\ \delta-1}{\delta})+\cos x(\lim_{\delta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta})=0+\cos x,$$

e, portanto,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)-\operatorname{sen} x}{\delta}=\cos x,$$

isto é, seno é uma função derivável em qualquer número real x com

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}\ x)=\cos x.$$

Agora, para obtermos a derivada da função cosseno usamos a regra da cadeia, pois se denotamos por f e g as funções

$$f(x) = \text{sen}\, x \quad \text{e} \quad g(x) = x + \frac{\pi}{2},$$

então f e g são funções deriváveis com $g'(x) = 1$ e $\cos x = (f \circ g)(x)$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x + \frac{\pi}{2}).1 \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\text{sen}\, x,\end{aligned}$$

já que, pela identidade trigonométrica para $\cos(a + b)$, com $a = x$ e $b = \frac{\pi}{2}$ tem-se que $\cos\,(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}\, x$.

As derivadas de tangente e secante

As derivadas de tangente e secante seguem-se do Teorema 2.2 e do Corolário 1: fazendo $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, já vimos que $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = -\,\text{sen}\, x$, logo, substituindo na fórmula dada pelo Corolário 1 temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{tg}\, x) &= \frac{\cos x\ \cos x - (-\,\text{sen}\, x)\,\text{sen}\, x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

Por outro lado, do item (c) do Teorema 2.2 segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec\ x) &= -\frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x.\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec\ x) = \operatorname{tg} x \sec x.$$

As derivadas das funções trigonométricas inversas

Aqui usamos o Teorema 2.3, que dá a derivada da função inversa: denotando por S a função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e por arcsen(x) sua função inversa, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\mathcal{S}'(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

Mas na seção 3 do Capítulo 6 vimos que

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2},$$

donde

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por outro lado, se denotamos por T a restrição da função tangente ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos que a função que denominamos arco tangente é a função inversa de T. Logo, pelo Teorema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{T'(\operatorname{arctg} x)}\\ &= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}.\end{aligned}$$

Mas, lembrando que

$$\sec^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + x^2,$$

(veja seção 3 do Capítulo 6), obtemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De forma análoga, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}\ x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)\sec(\operatorname{arcsec} x)}\\ &= \frac{1}{x\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)}.\end{aligned}$$

E, como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x) = -\sqrt{x^2-1} \quad \text{para} \quad x \leq -1$$
$$\text{e}$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2-1} \quad \text{para} \quad x \geq 1,$$

concluímos que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}\ x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{para} \quad |x| \geq 1.$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:
   (a) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$
   (b) $f(x) = x^2(1 - \cos x)$
   (c) $f(x) = \text{sen}\, x \cos x$
   (d) $f(x) = (\text{sen}\, x + \cos x)^3$
   (e) $f(x) = \text{tg}\, x\, \text{sen}\, x$
   (f) $f(x) = \sec x\, \text{tg}\, x$
   (g) $f(x) = \cos^2 x + \sec^3 x$
   (h) $f(x) = \dfrac{xe^x}{\sec x}$
   (i) $f(x) = e^{\cos^2 x}$
   (j) $f(x) = \ln |\text{sen}\, x + \cos x|$
   (k) $f(x) = \ln |\sec x|$
   (l) $f(x) = \frac{x \cos x^2 - x^2}{x^2 + 1}$
   (m) $f(x) = e^{\cos x - x}$
   (n) $f(x) = \text{arcsen}\, x^2$
   (o) $f(x) = \text{arctg}\, x^2$
   (p) $f(x) = \text{arctg}\left(\sqrt{\sec^2 x - 1}\right)$
   (q) $f(x) = \arccos(1 + x^3)$
   (r) $f(x) = \text{arctg}\,(\ln x)$
   (s) $f(x) = \text{sen}^2 (\cos x^2 + 1)$

2. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções, e determine (se existirem) os pontos onde ela se anula:

(a) $h(s) = \text{tg}\, s$

(b) $f(x) = \text{arcsen}\,(x^2 e^x)$

(c) $f(x) = \text{arctg}\,(\frac{x}{1+x})$.

(d) $f(x) = \sec(2x)$

3. Para cada função f abaixo determine a equação da reta tangente no ponto x_0 correspondente:

(a) $f(x) = \text{arctg}\, x$, $x_0 = 1$.

(b) $f(x) = e^{x^2} \cos x$, $x_0 = 0$.

(c) $f(x) = |\text{sen}\, x|$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

(d) $f(x) = \frac{\sec(7x+\frac{\pi}{6})}{x^4+1}$, $x_0 = 0$.

4. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $y = ax + b$ é a equação de uma reta tangente ao gráfico da função seno, então $-1 \leq a \leq 1$.

(b) Se $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $y = \dfrac{1}{2}x + \text{ sen } a - \dfrac{a}{2}$ é a equação da reta tangente ao gráfico da função seno em $x = a$, então $y = 2x + a - \sqrt{3}$ é a equação da reta tangente ao gráfico da função arco seno em $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Calcule a derivada de $f(x) = \cos(g(x))$ em $x_0 = \frac{1}{2}$, sabendo que $g(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ e $g'(\frac{1}{2}) = -3$.

6. Seja $f(x) = g(\text{arctg}\, x)$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = \sqrt{3}$, sabendo que $g(\frac{\pi}{3}) = -5$ e $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{10}$.

7. Utilizando o teorema da função inversa mostre que a derivada de $f(x) = \arccos x$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Sabendo que f é uma função derivável com $f(-1) = \frac{\pi}{4}$ e que $h(x) = \text{tg}(2f(x) + \frac{\pi}{2}) + (x^2 + 1)f(x)$ é a função constante igual a -8, calcule f

$'(-1)$.

9. Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{1+\cos x} - 2 & \text{se } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ (\text{sen}\,(2x) - \cos^2 x) \ln 2 & \text{se } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Verifique que f é derivável e ache f'.

10. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sec(\frac{\pi}{1+x^2}) + b & \text{se} \quad x < 0, \\ e^{\text{arctg}\, x} + ax & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

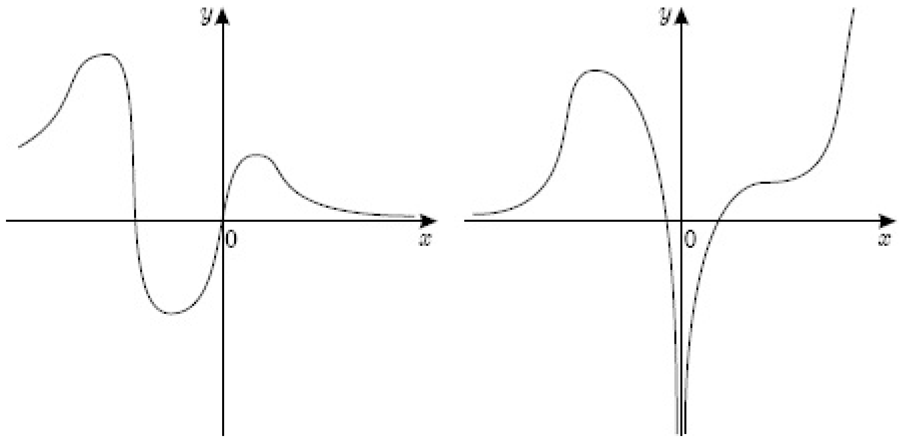
Determine a e b para que f seja derivável em $x = 0$.

5. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo, calcule utilizando a definição de derivada:
   (a) $f'(1)$ para $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$.
   (b) $g'(1)$ para $g(t) = \sqrt{3 - t^2}$.
   (c) $h'(0)$ para $h(x) = \frac{2x+1}{5-2x}$.
   (d) $u'(0)$ para $u(x) = \text{sen}2x$.

2. Para cada um dos gráficos dados nas figuras abaixo, faça um esboço do gráfico da sua derivada.



3. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:
   (a) Se f não é diferenciável em x_0, então f não é contínua em x_0.
   (b) Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
   (c) Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, então $f(0) = 0$.

4. A função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x \le 0, \\ -\sqrt{x} & \text{se } x > 0, \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = 0$? Em caso afirmativo calcule $f'(0)$.

5. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{se } x \le 1, \\ 2x^2 - 7x + 2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = 1$. Em caso afirmativo calcule $f'(1)$.

6. A função $f(x) = \begin{cases} 3x^3 + 3 & \text{se } x \le -1, \\ 9x - 16 & \text{se } -1 < x \le 2, \\ x^3 - 3x & \text{se } x > 2, \end{cases}$ é derivável no ponto $x_0 = -1$?

   Em caso afirmativo calcule $f'(-1)$. Verifique se f é derivável no ponto $x_0 = 2$, e em caso afirmativo calcule $f'(2)$.

7. Determine a de forma que $f(x) = \begin{cases} 4x^4 + ax^3 & \text{se } x \le 0, \\ 20x^2 - 2x & \text{se } x > 0, \end{cases}$ seja direrenciavel.

8. Determine *a, b* e c de forma que $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x + 3 & \text{se } x \leq -2, \\ ax^2 + bx + c & \text{se } -2 < x \leq 2, \\ 8x - 5 & \text{se } x > 2, \end{cases}$ seja diferenciável.

9. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ tal que:
   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
   (b) $\lim_{x\to 4} f(x) = -2$.
   (c) $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$.
   (d) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -5)$, $(-3, 0]$, $[3, 4]$ e $[5, \infty)$.
   (e) f é decrescente nos intervalos $[-5, -3)$, $[0, 3]$, e $[4, 5]$.
   (f) $f'(x) = 0$ se e somente se $x = -5$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$ ou $x = 5$.

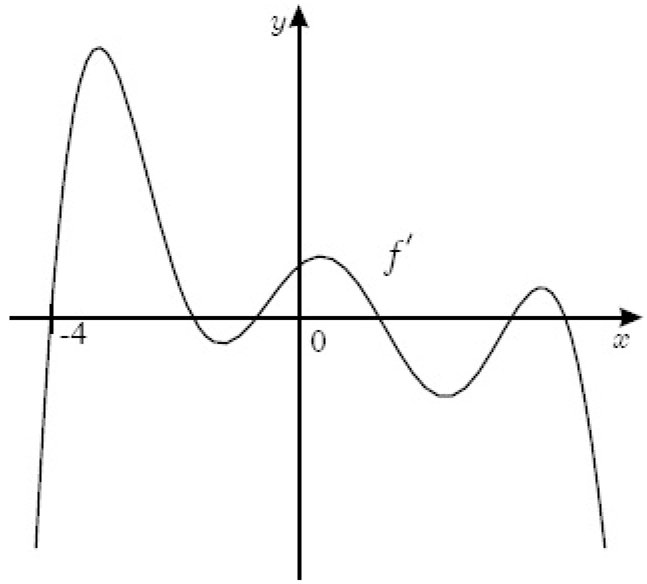
   Faça um esboço do gráfico de f.

10. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que:
   (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) < 0$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$.
   (c) $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$.
   (d) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$.
   (e) f é crescente nos intervalos $(-2, 0]$, $[1, 2)$ e $(2, 3]$.
   (f) f é decrescente nos intervalos $(-\infty, -2)$, $[0,1]$, e $[3, \infty)$.
   (g) $f'(x) = 0$ se e somente se $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 3$.

   Faça um esboço do gráfico de f.

11. Determine a equação da reta que seja tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{3x^{\frac{3}{4}} - x^2}{\sqrt{7x^2+1}}$ no ponto $x_0 = 1$.

12. Seja f tal que o gráfico da derivada de f é dado na figura abaixo:



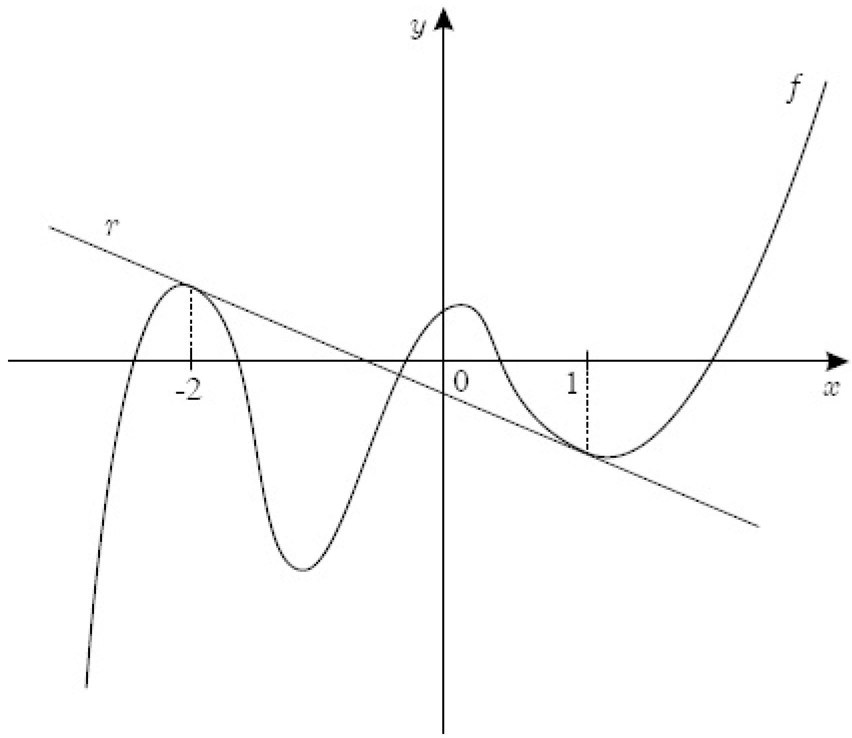
Dado que $f(-4) = -1$, qual é o número mínimo de soluções da equação $f(x) = 0$? Qual é o número máximo de soluções?

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável em $x = 2$ tal que:

$$f(2) = 1 \text{ e } f'(2) = 4.$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{f(x) - 1}$.

14. Considere f a função definida pelo gráfico abaixo.



Sabendo $f'(-2) = -\frac{2}{3}$ e $f(1) = -1$ e r é tangente ao gráfico de f em $x = 1$ e $x = -2$:

(a) Determine $f'(1)$.

(b) Determine $f(-2)$.

(c) Determine a equação da reta r.

15. Considere a função $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ e r a reta que passa pelos pontos $(-1, f(-1))$ e $(x, f(x))$.

 (a) Determine uma função g tal que, para cada $x \neq -1$, $g(x)$ seja o coeficiente angular da reta r.

 (b) Calcule $\lim_{x \to -1} g(x)$..

 (c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$.

16. Use as regras de derivação para calcular a derivada das funções abaixo, onde a, b e c são constantes.

 (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

 (b) $f(x) = x^{6+\sqrt{5}}$

 (c) $f(x) = 92 - \frac{2x^{81}}{3} - \sqrt{55}x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(d) $f(x) = (91 - x^{\sqrt{31}})(4^{\frac{2}{3}} x^{1+\sqrt{2}})$

(e) $f(x) = (3 - x^{\sqrt{a}})(bx^{ax^2+b} + cx + 3)$

(f) $f(x) = \frac{(2x-ax^2)(b^2 x^{\frac{\sqrt{2}+c}{b+a}})}{cx^c+a-b}$

17. Seja $f(x) = \frac{9-6x^2-5x}{2x+3}$

(a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 0$.

(b) Para quais valores de x_0 tem-se que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é paralela à reta $y = -9x - 12$?

18. Seja $f(x) = \frac{1-x^2}{x-5}$.

(a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 3$.

(b) Para quais valores de x_0 tem-se que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é horizontal?

19. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - 12x + 9 & \text{se} \quad x < 1, \\ 3x^2 - 2x + 1 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 1$.

(b) Para quais valores de x_0 tem-se que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é horizontal?

20. Seja $f(x) = \frac{2ax^2-5}{1-ax}$ a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é perpendicular à reta

$$y = \frac{x}{30} + 15.$$

(a) Determine a.

(b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

21. Seja $f(x) = \frac{ax^2+b}{3x+2}$ a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é

$$y = \frac{10}{25}x + \frac{8}{5}.$$

Determine a e b.

22. Considere $f(x) = (6x^2 - 4)(9 - 5x^3)$ e g uma função tal que $g(-2) = 4$ e $g'(-2) = -5$.
    (a) Calcule $h'(-2)$, onde $h(x) = (7f(x)+x^3)(2 - xg(x))$.
    (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de h em $x = -2$.

23. Considere $f : \mathbb{R} - \{\frac{1}{6}\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x+5}{6x-1}$. Sabendo que f é inversível, determine $(f^{-1})'(1)$.

24. Considere $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^2+4x}{1-x^2}$. Sabendo que f é inversível, determine $(f^{-1})'(0)$.

25. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2x+5} & \text{se} \quad x \geq -2, \\ 1 - x^2 - x & \text{se} \quad x < -2. \end{cases}$$

Sabendo que f é inversível, determine $(f^{-1})'(-1)$.

26. Seja $y = 5x + 1$ a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$, onde f é uma função inversível. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} *em* $x = 11$.

27. Seja f uma função inversível, e $y = 7x - 3$ a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = -1$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -10$.

28. Use as regras de derivação para calcular a derivada das funções abaixo:
    (a) $f(x) = (3x^3 - 4x^4 + 5x^5)^{\sqrt{2}}$
    (b) $f(x) = (\frac{4}{3}x^{\frac{2}{7}} + 2x^{2\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}}(99 - 98x + x^{2\pi})^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$
    (c) $f(x) = (\frac{x^3-3}{3x+4})^{\frac{3}{4}}$

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{7x^2+3}}$

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{5x^2-1}}{6x-2}}$

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{(3x-5)^{100}}{\sqrt[4]{9x-9}}}$

(g) $f(x) = \sqrt[5]{3x + \sqrt{5x^2 + 3x + 1}}\sqrt{(x^3 - 8x)^5}$

29. Seja f uma função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -2$ é $y = \frac{5x}{2} - 1$ e seja $g(x) = f(\frac{6-2x}{x^2-3})$. Determine a equação da reta r, tangente ao gráfico de g em $x = 1$.

30. Considere $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3$ e g uma função derivável tal que $g(3) = 1$ e $g'(3) = -9$.

    (a) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de $h(x) = f(g(x))$ em $x = 3$.

    (b) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de $h(x) = g(f(x))$ em $x = 3$.

31. Seja f a função tal que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -9$ é

$$y = 4x + 27.$$

Seja $g(x) = f(f(2x^2 - 9))$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = 0$.

32. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \pi^{2x^4-5x}$

(b) $f(x) = (x+\pi)^{x+\pi}$

(c) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \frac{5x^3 \ln x}{1+e^x}$

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{e^{x^3+4}}{\ln(5x^5+1)}}$

(f) $f(x) = (6x^3 - xe^{\frac{9x-8}{3-x^2}}) \ln x^2$

(g) $f(x) = \ln \sqrt[7]{(x+10)^2}$

(h) $f(x) = \log_3 \frac{3x}{\sqrt{4-5x}}$

(i) $f(x) = 7^{\ln \frac{2}{x}}$

(j) $f(x) = e^{2^x+5}$

(k) $f(x) = \begin{cases} 1 + \ln \sqrt{x} & \text{se } 0 < x < 1, \\ \sqrt{e^{x^2-x}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

33. Determine a equação da reta que seja tangente ao gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{x+4} & \text{se } -4 < x < -3, \\ e^{x^2+5x+6} - 1 & \text{se } x \geq -3, \end{cases}$$

no ponto $x_0 = -3$.

34. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\ln(8x^2+5)}} & \text{se } x < 0, \\ \ln \left| x^3 + 3x^2 + e^{\frac{1}{\sqrt{\ln 5}}} \right| & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Para quais valores de x_0 tem-se que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é horizontal?

35. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\sqrt{x}} & \text{se } x > 1, \\ e^{\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{12}} & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 1$.

36. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \ln(9x^2 + a) & \text{se } \quad x < -1, \\ e^{5x^2+x-4} + b & \text{se } \quad x \geq -1. \end{cases}$$

Determine *a e b* para que *f* seja derivável em $x = -1$.

37. Calcule a derivada de $f(x) = g(\ln 2x^3)$ em x_0 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, sabendo que $g'(0) = \sqrt[3]{4}$.

38. Considere $f(x) = g(g(xe^{2-x^3}))$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de *f em* $x_0 = 1$, sabendo que $g(e) = e$ e $g'(e) = -2$.

39. Seja $f(x) = e^{3g(x)+2}$. Calcule $g'(3)$, sabendo que $f(3) = 1$ e $f'(3) = 6$.

40. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \text{sen}^2(\ln x)$

(b) $f(x) = e^{\frac{\cos 2x}{x+1}}$

(c) $f(x) = \frac{\text{tg}\, x}{1+\cos^2 x}$

(d) $f(x) = \sec(x^3 + \sqrt{\cos x})$

(e) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{\cos x}$

(f) $f(x) = \text{tg}\,(x^{1+4x^2})$

(g) $f(x) = \text{sen}^5(6x^2 + 9x - 2)$

(h) $f(x) = \ln \sqrt{\text{arctg}\ x}$

(i) $f(x) = \frac{2+x^4}{\text{arcsen}\ (x^3+x)}$

(j) $f(x) = \ln \left|\text{arctg}^2 x\right|$

(k) $f(x) = \frac{\arccos(3x^5-2x)}{x\text{arctg}\ \sqrt{x}}$

(l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{sen}\, x & \text{se } x < 0 \\ \ln(1 + \text{arctg}\, x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(m) $f(x) = x3^{\sec x^2 + \arccos x}$

(n) $f(x) = x^{\text{arctg}\, 2x}$

(o) $f(x) = \log_5(\text{sen}\, x^4)$

41. Seja $g(x)$ $\text{tg}\sqrt{f(x)}$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g em $x_0 = 2$, sabendo que $f(2) = \frac{\pi^2}{9}$ e $f'(2) = \pi$.

42. Determine a equação da reta que seja tangente ao gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+\cos(x-2)-3} - 1 & \text{se } x < 2 \\ \operatorname{sen}(\ln|1-x|) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

no ponto $x_0 = 2$.

43. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se $y = ax$ é a equação da reta tangente ao gráfico da função seno em $x = x_0$, então tg $x_0 = x_0$.

    (b) Se $y = ax+b$ é a equação de uma reta tangente ao gráfico da função tangente, então $a \geq 1$.

44. Calcule a derivada de $f(x) = \text{arctg}\,(g(g(x)))$ em $x_0 = -1$, sabendo que $g(-1) = -1$e $g'(-1)$=4.

45. Seja $f(x) = g(\cos(g(x)))$. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0\ \frac{\sqrt{2}}{2}$, sabendo que $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ e $g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -3$.

6. Apêndice ao Capítulo

Aqui damos as demonstrações dos resultados deste capítulo indicados com o símbolo *.

Seção 2
Teorema 2.1: *Se a função f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, sabendo que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Primeiro observamos que

$$f(x) - f(x_0) = (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})(x - x_0).$$

Agora, como existem os limites

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0,$$

podemos usar o Teorema 2.2 do Capítulo 5 para concluir que

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = (\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})(\lim_{x \to x_0} (x - x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Mas,

$$f(x) = (f(x) - f(x_0)) + f(x_0),$$

e, portanto, o mesmo teorema garante que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0). \qquad \square$$

Corolário 1: *Se f e g são funções deriváveis em* x_0 *e* $g(x_0) \neq 0$, *então* $\frac{f}{g}$ *é derivável em* x_0 *e*

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Demonstração: Para chegar a esse resultado, primeiro usamos (c) do Teorema 2.2 para concluir que a função $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ é derivável em x_0 com

$$h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Em seguida aplicamos o item (b) à função $f\,h = f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$, obtendo:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + (-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2})f(x_0),$$

donde

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

e, portanto,

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}. \square$$

Corolário 2: *Se f é uma função derivável e c é um número real, então a função $x \mapsto c\,f(x)$ é derivável e*

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Demonstração: Seja g a função constante igual a c, isto é, $g(x) = c$ para qualquer número real x. Como já vimos, g é derivável com $g'(x) = 0$ para qualquer número x. Como, por hipótese, f é derivável em qualquer número x de seu domínio (já que é uma função derivável), o item (b) nos dá que a função $cf = gf$ é derivável em qualquer número x de seu domínio com

$$(cf)'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = cf'(x). \qquad \square$$

CAPÍTULO 8

Aplicações da Derivada

Este capítulo é dedicado às principais aplicações da derivada no contexto do cálculo a uma variável. Começaremos pelo Método de Newton, que é o algoritmo numérico mais eficiente para a resolução aproximada de equações $f(x) = b$, sendo, portanto, muito utilizado em aplicações. A seguir, apresentaremos os recursos que o conceito de derivada fornece para o estudo do comportamento de funções deriváveis, concluindo com suas aplicações em problemas de otimização.

Como nos demais capítulos, as demonstrações dos teoremas indicados com o símbolo * são dadas no apêndice.

1. O Método de Newton

Na seção 1 do capítulo anterior apresentamos um processo para calcular aproximações do número $\sqrt{2}$ que usava a diferenciabilidade da função $f(x) = x^2 - 2$ ou, do ponto de vista geométrico, a propriedade de que em cada ponto de seu gráfico há uma reta tangente ao gráfico. Como já dissemos, esse processo é denominado Método de Newton.

De uma maneira geral, o Método de Newton é usado para resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$, onde f é uma função derivável.

Em geral, resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$ consiste em obter aproximações arbitrariamente boas de um número real que é uma solução da equação. Ou seja, consiste na construção de uma sequência de números que converge para um número real a que satisfaz $f(a) = 0$. Um método numérico que já estudamos anteriormente é o método da Bisseção. No exemplo da seção 1 do capítulo 7, f é a função $f(x) = x^2 - 2$ e a é o número $\sqrt{2}$ que sabemos ser uma solução da equação $x^2 - 2 = 0$.

A importância dos métodos numéricos decorre do fato, que já conhecemos, de que não só a maioria dos números reais só é acessível por intermédio de aproximações com as quais podemos efetuar cálculos, mas também de que para a maioria das equações não existe um método de resolução exato.

Mais especificamente, o Método de Newton tem por objetivo fornecer aproximações arbitrariamente boas de uma solução, a, da equação $f(x) = 0$, onde f é uma função diferenciável com f' sendo contínua e $f'(a) \neq 0$.

Basicamente, o Método de Newton estabelece um procedimento que, a partir de uma aproximação do número a, tem por objetivo fornecer um número que seja uma melhor aproximação para a.

Assim começamos com um número real x_0, que consideramos uma aproximação de a, que é denominado condição inicial. Se $f'(x_0) \neq 0$, então a reta tangente ao gráfico de f em x_0 é uma reta não horizontal e, portanto, intercepta o eixo horizontal num único ponto.

Tomamos então, como nova aproximação para a, o número x_1 que, no eixo horizontal, representa esse único ponto (veja Figura 1.1a). Se x_1 pertence ao domínio da função e $f'(x_1) \neq 0$, então podemos repetir o processo e obter uma nova aproximação x_2. Isto é, x_2 é dado pela interseção da reta tangente ao gráfico de f em x_1 com o eixo-x (veja Figura 1.1b).

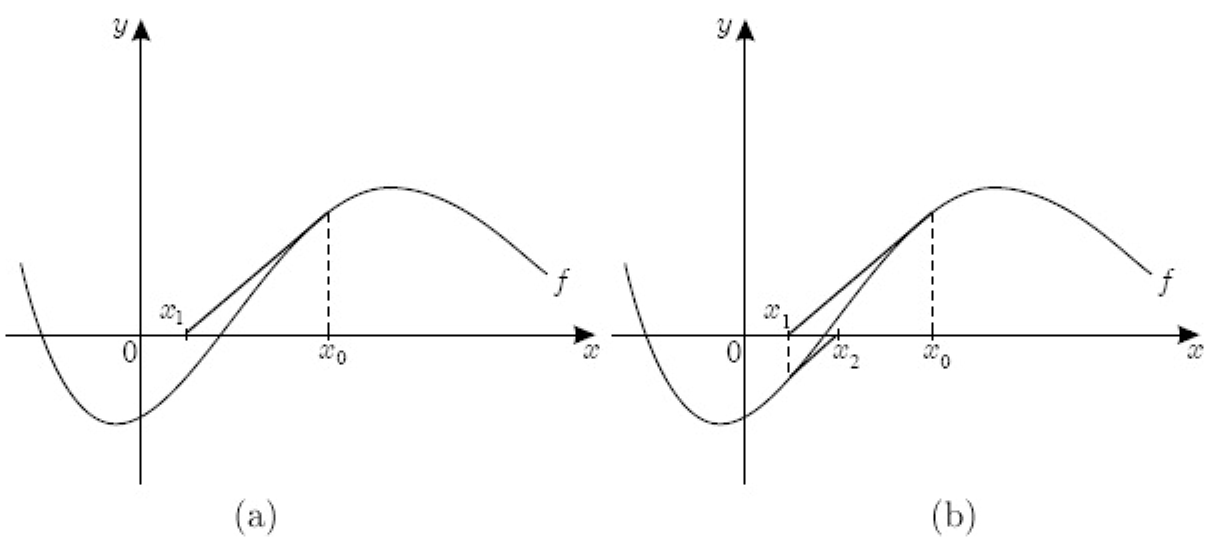


Figura 1.1

Assim, repetindo sucessivamente esse procedimento (se possível), estaremos construindo uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ de números reais. Mais precisamente, se para um inteiro $n \geq 1$ já obtivemos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e a função f está definida em x_n com $f'(x_n) \neq 0$, podemos determinar o termo seguinte da sequência, x_{n+1}, que é o número que corresponde ao ponto de interseção do eixo horizontal com a reta tangente ao gráfico de f em x_n.

Se em alguma etapa desse processo nos deparamos com um número x_i no qual a função não está definida ou no qual sua derivada se anula, o processo é interrompido (não podemos construir uma sequência) e dizemos que x_0 não é uma boa condição inicial (como veremos mais adiante essa não é a única situação em que x_0 não é uma boa condição inicial). Devemos então escolher uma outra condição inicial e reiniciar o processo (veja Figura 1.2).

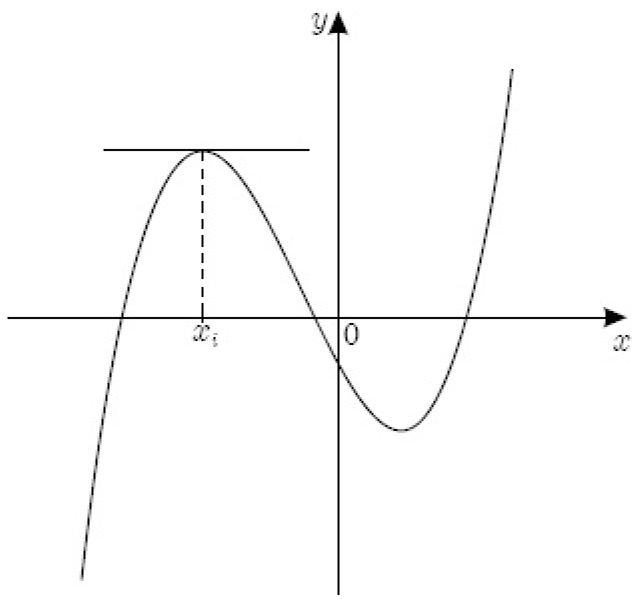


Figura 1.2

Nosso objetivo agora é, a partir dessa descrição geométrica do Método de Newton, obter uma fórmula que, conhecido o número x_n, forneça o número x_{n+1}. Vejamos como podemos calcular x_1 a partir da condição inicial x_0: primeiro achamos a equação da reta tangente ao gráfico de f em x_0. Sabemos que seu coeficiente angular é $f'(x_0)$, logo a equação é

$$y = f'(x_0)x + b.$$

Para determinarmos b, usamos a condição de que a reta passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e, portanto, $y = f(x_0)$ e $x = x_0$ satisfazem a equação acima, isto é,

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

donde obtemos $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Logo a equação que procuramos é

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Agora, como x_1 é definido geometricamente pela interseção dessa reta com o eixo-x, temos que, algebricamente, x_1 é a solução da equação

$$0 = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

ou,

$$f'(x_0)x = f'(x_0)x_0 - f(x_0),$$

ou seja,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Observe que usamos o fato de que $f'(x_0) \neq 0$ para poder resolver essa equação e obter x_1. Sabemos que esse fato reflete a informação (geométrica) de que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 não é horizontal.

Agora observamos que, como x_2 é obtido pelo mesmo processo colocando x_1 no lugar da condição inicial x_0, podemos concluir que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

e, em geral,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

que é a fórmula de recorrência dada pelo Método de Newton. Observe que essa fórmula já reflete as condições que apontamos acima para que se possa realmente obter uma sequência: para poder calcular o número x_{n+1} é preciso que o número obtido anteriormente, x_n, seja tal que exista o número $f(x_n)$ (i.e., x_n deve ser um número do domínio de f) e $f'(x_n) \neq 0$ para que possamos efetuar a divisão $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Como vimos acima, é possível que existam condições iniciais para as quais o processo é interrompido (ou nem pode começar) e, nesse caso, o que devemos fazer é escolher outra condição inicial.

Suponhamos então que temos uma condição inicial, x_0, a partir da qual é possível construir uma sequência, x_n, isto é, o processo nunca é interrompido. A pergunta que nos interessa agora poder responder é *qual é o comportamento de* x_n*?* Lembre-se de que pretendíamos que x_n convergisse a uma solução da equação $f(x) = 0$.

Como veremos mais adiante num exemplo, isso nem sempre acontece, mas, primeiro, destacamos que se a sequência x_n converge para um número c do domínio de f, então $f(c) = 0$, ou seja, c é, de fato, uma solução da equação $f(x) = 0$.

Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1*: Seja f uma função derivável com f' contínua e c um número de seu domínio. Se x_n é uma sequência obtida pelo Método de Newton a partir de uma condição inicial x_0 e $x_n \to c$, então $f(c) = 0$.

Na Figura 1.3 damos um exemplo para o qual $x_0 = 1$ não é uma boa condição inicial, apesar de o processo nunca se interromper, isto é, utilizando o Método de Newton com $x_0 = 1$ podemos construir uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ mas que, nesse caso, não é uma sequência convergente.

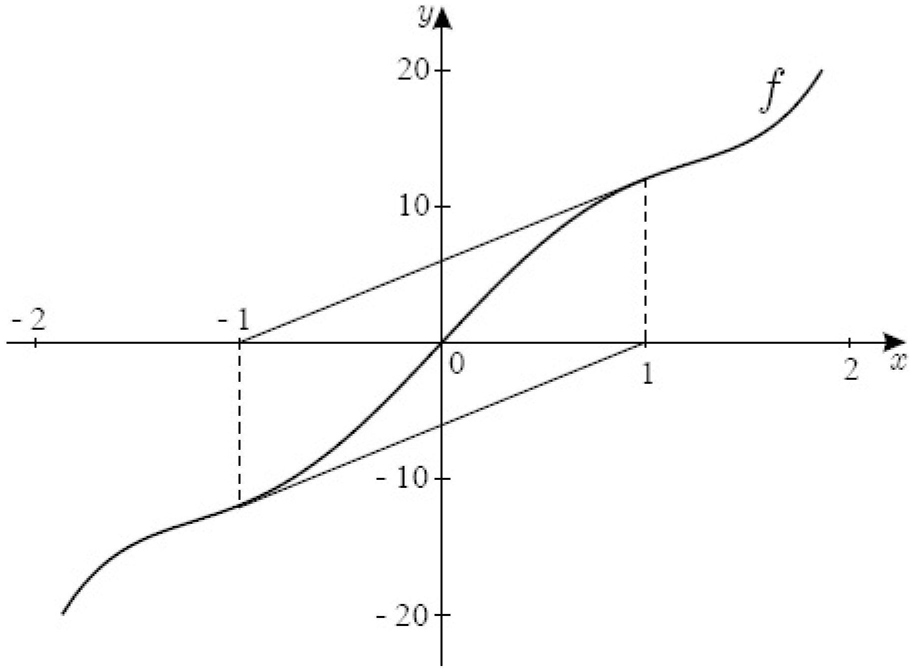


Figura 1.3

Gráfico de $f(x) = x^5 - 5x^3 + 16x$ no intervalo $[-2, 2]$ com as retas tangentes em $x = -1$ e $x = 1$.

Pela figura podemos ver que se $x_0 = 1$, então $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Como o valor de um termo da sequência dada pelo Método de Newton só depende do valor do termo anterior, vemos que a sequência x_n satisfaz $x_n = -1$ se n é ímpar e $x_n = 1$ se n é par e, portanto, não é uma sequência convergente.

Essa situação ocorre, por exemplo, para o polinômio $f(x) = x^5 - 5x^3 + 16x$. De fato, temos que

$$\begin{array}{rl} f(1) = 12 & f'(1) = 6 \\ f(-1) = -12 & f'(-1) = 6, \end{array}$$

donde, se $x_0 = 1$, então

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - 2 = -1$$

e, portanto,

$$x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 + 2 = 1.$$

Por outro lado, qualquer número do intervalo $(-1,1)$ é uma boa condição inicial, e a sequência dada pelo Método de Newton a partir de uma condição inicial $x_0 \in (-1,1)$ converge a $c = 0$, que é a única solução da equação $f(x) = 0$.

Voltando então à situação geral, vemos que o problema de resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$ pelo Método de Newton se resume à escolha de condições iniciais boas. Isso poderia parecer complicado mas, de fato, para funções bem comportadas (que, na prática, é o caso de funções que resultam de problemas aplicados), a maioria das escolhas possíveis resulta numa condição inicial boa, no sentido de gerar uma sequência que converge para uma solução da equação.

O aspecto mais importante do Método de Newton é que se x_0 é uma boa condição inicial, então a convergência é muito rápida, no sentido de que com um número pequeno de etapas podemos obter aproximações de uma solução da equação $f(x) = 0$ com uma precisão muito grande. A justificativa para essas afirmações foge ao âmbito deste texto, mas algumas experiências computacionais facilmente nos convencerão de sua veracidade.

Para completar nossa apresentação do Método Newton, observamos que se podemos dispor de um esboço suficientemente preciso do gráfico de f (o que pode ser feito com um computador, usando-se um programa gráfico), a interpretação geométrica do Método de Newton nos permite escolher *visualmente* uma condição inicial que fornecerá aproximações de uma solução específica da equação $f(x) = 0$.

Por exemplo, a partir do gráfico de $f(x) = x^2 - 2$, podemos concluir que qualquer número não nulo é uma condição inicial boa e que condições iniciais positivas darão aproximações de $\sqrt{2}$, enquanto que condições iniciais negativas darão aproximações de $-\sqrt{2}$ (ver figura 1.4).

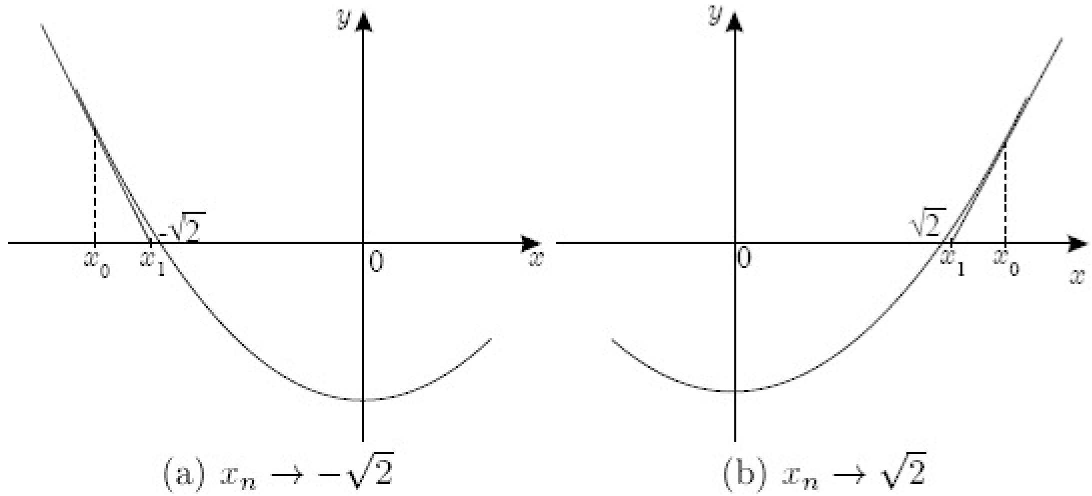


Figura 1.4

O gráfico de $f(x) = 0.6+0.3(x+1)(x+2)(x-1)(x-1)(x-2)$ é dado na Figura 1.5 (como veremos mais adiante, ao usar os recursos dados pelo conceito de derivada para estudarmos o comportamento de funções, esse é um esboço de gráfico suficientemente bom). Podemos assim ver que se escolhermos para x_0 qualquer número no intervalo $[A, B]$, obteremos aproximações para a menor solução da equação $f(x) = 0$ denotada por a_0 na figura. Analogamente, ao escolhermos uma condição inicial no intervalo $[C,D]$ ou $[E,F]$, obteremos aproximações para as soluções a_1, a_2 da equação $f(x) = 0$, respectivamente. Por outro lado, ob- serve que se tomarmos como condição inicial $x_0 = 0{,}9$, a sequência dada pelo Método de Newton convergirá para a solução a_1, embora x_0 esteja mais próximo da solução a_2 do que de a_1.

Exercícios

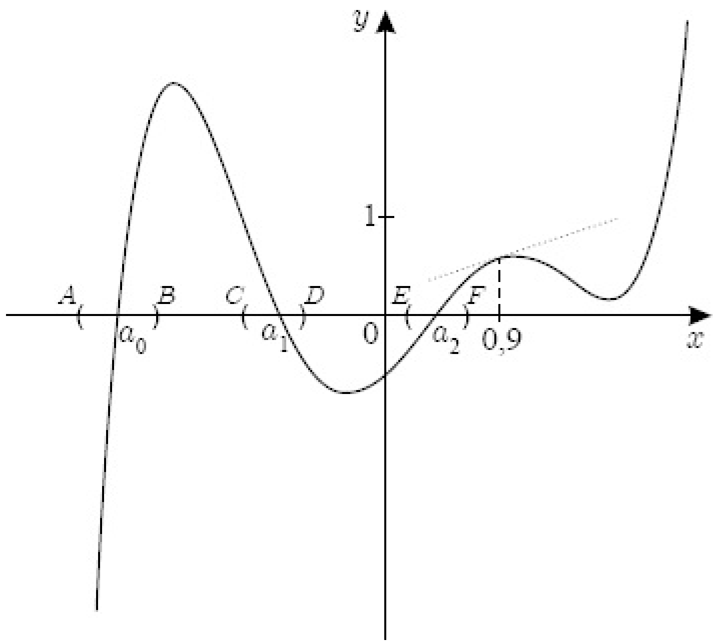


Figura 1.5

Finalmente, quanto ao critério que, na prática, usamos para decidir que já atingimos a precisão desejada, observamos que se teoricamente já atingimos uma precisão que é maior que a precisão com que efetuamos os cálculos (número de casas decimais consideradas), passaremos a obter valores que se repetem, como se a sequência fosse constante a partir de algum termo.

Por exemplo, se o valor exato do número obtido na décima etapa é 2,344598716612… e o valor exato do número seguinte é 2,344598716624… (isto é, diferença entre esses dois números só pode ser detectada na 12ª casa decimal) e só estamos efetuando cálculos com dez casas decimais, teremos como resposta

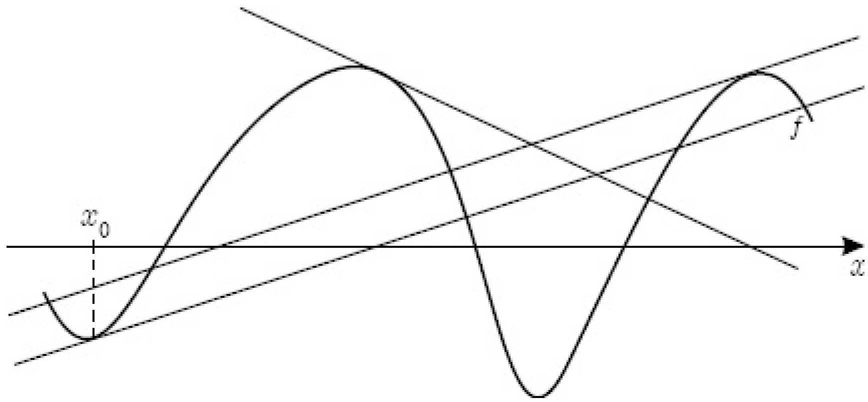
$$x_{10} = 2{,}3445987166$$
$$x_{11} = 2{,}3445987166$$

e em geral, $x_n = 2{,}3445987166$ para $n \geq 12$. Daí é *razoável* assumir que 2,3445987166 é uma aproximação para a solução que buscamos com um erro que não excede 10^{-10}, mas só com essa informação não podemos garantir que isso é o que de fato ocorre. No entanto podemos ter essa certeza se levarmos em conta outras informações, por exemplo, um esboço *fiel* do gráfico da função.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

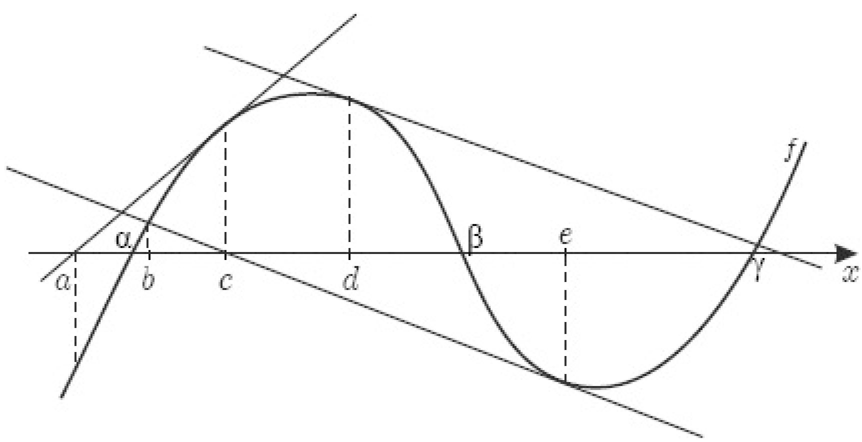
1. Na figura a seguir são dados o gráfico de uma função e algumas retas tangentes ao seu gráfico. Seja x_n, $n \geq 1$, a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial x_0 marcada na figura.



   (a) Marque no eixo-x os números x_1, x_2 e x_3 da sequência x_n acima.

   (b) A sequência x_n é convergente? Se for, marque no eixo-x o seu limite.

2. Na figura abaixo são dados o gráfico de uma função derivável, f, e três retas tangentes ao gráfico de f.



   Em cada item abaixo, decida se a afirmação é falsa ou verdadeira:

   (a) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial x_0 = e, então $x_2 = a$.

(b) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial x_0 = e, então $x_1 = b$.

(c) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial x_0 = e, então $x_n \to \beta$.

(d) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial x_0 = e, então $x_n \to \alpha$.

(e) $a = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$.

(f) Se x_n, $n \geq 1$, é uma sequência obtida pelo Método de Newton a partir de uma condição inicial $x_0 \in [a, \text{e}]$, então x_n não converge para γ.

3. Para obter aproximações para $\sqrt{a}$ utilizando o Método de Newton, onde $a > 0$, podemos utilizar a função $f(x) = x^2 - a$. Mostre que a fórmula de recorrência do Método de Newton para a função $f(x) = x^2 - a$ é dada por $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

4. Deduza a fórmula de recorrência do Método de Newton para obter aproximações para $\sqrt[n]{a}$, partindo da função $f(x) = x^n - a$.

2. A regra de L′Hôpital

Nesta seção veremos como podemos usar derivadas para calcular limites quando as propriedades que vimos no Capítulo 5 não se aplicam.

Por exemplo, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$, nada podemos dizer, em geral, a respeito do limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x tende ao número a. Esse é um dos casos em que dizemos que há uma indeterminação quanto ao limite.

Nosso objetivo aqui é apresentar um resultado, conhecido como regra de L′Hôpital, por meio do qual se pode, em certas condições, usar derivadas para calcular limites para os quais existe uma indeterminação.

A regra de L′Hôpital

Comecemos analisando um exemplo:

$$f(x) = e^x - 1 \text{ e } g(x) = \text{sen } x.$$

Sabemos que f e g são funções deriváveis em qualquer número real com

$$f'(x) = e^x \text{ e } g'(x) = \text{cós } x.$$

Em particular, sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 \qquad \text{e}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1.$$

Agora, observamos que dividindo e multiplicando por x o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ obtemos, para $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x}\frac{x}{g(x)},$$

e como já sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) \neq 0,$$

podemos concluir, usando o Teorema 2.2 do Capítulo 5, que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{g(x)} = \frac{1}{g'(0)}$ e, portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x})(\lim_{x\to 0} \frac{x}{g(x)}) = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1.$$

Mais ainda, como nesse caso f' e g' são funções contínuas e $g'(0) \neq 0$, temos que

$$\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

isto é, obtivemos nesse exemplo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Esse é um caso particular da regra de L′Hôpital que enunciamos a seguir sem demonstração. No enunciado abaixo, α e Ω podem representar números reais ou os símbolos ∞ e $-\infty$.

Se α é um número real assumimos que f e g são funções deriváveis num intervalo aberto contendo α exceto, possivelmente, no próprio número α e que $g(x) \neq 0$ para $x \neq \alpha$ pertencente ao intervalo.

Se α representa o símbolo ∞ (ou, equivalentemente, 0 símbolo $-\infty$) assumimos que f e g são funções deriváveis num intervalo não limitado (a, ∞) (ou, equivalentemente, $(-\infty, a)$) com $g(x) \neq 0$ nesse intervalo.

Regra de L′Hôpital - 1º caso

Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha} g(x)$ *e* $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \Omega$, *então* $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \Omega$.

Regra de L′Hôpital - 2º caso

Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ *ou* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ *ou* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$

e $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \Omega$, *então* $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \Omega$.

Vejamos alguns exemplos de utilização da regra de L′Hôpital:

Exemplos

1. O exemplo que analisamos acima se insere no 1º caso, com $\alpha = 0$ e $\Omega = 1$.

2. Calculemos $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$. Sejam $f(x)$ = sem x e $g(x) = x^3$.

Como $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0 = \lim_{x\to 0} x^3$, temos uma indeterminação do 1º caso: devemos verificar se podemos calcular o $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Como $f'(x)$ = cós x e $g'(x) = 3x^2$, temos que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \cos 0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2} = \infty.$$

Logo, pelo Teorema 4.4 do Capítulo 5, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3x^2} = \infty.$$

Isto é, usando a regra de L′Hôpital podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3x^2} = \infty.$$

Neste exemplo usamos o 1º caso com $\alpha = 0$ e $\Omega = \infty$.

3. Calculemos, se possível, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Como $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty = \lim_{x\to\infty} x$, temos uma indeterminação do 2º caso, onde $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$. Vejamos então se podemos calcular o $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Temos que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g'(x) = 1,$$

logo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Podemos então usar a regra de L′Hôpital para o 2º caso e concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Neste exemplo $\alpha = \infty$ e $\Omega = 0$.

4. Calculemos, se possível, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$.

Como $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, temos uma indeterminação do 2º caso com $f(x) = x$ e $g(x) = e^{-x}$. Sabemos que $f'(x) = 1$ e $g'(x) = -e^{-x}$ e, portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0.$$

Logo, pela regra de L′Hôpital, temos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0.$$

Neste exemplo $\alpha = -\infty$ e $\Omega = 0$.

É interessante observar que neste último exemplo, como

$$\frac{x}{e^{-x}} = xe^x,$$

obtivemos que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Note que, como

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$

nenhum dos teoremas do Capítulo 5 pode ser aplicado para calcular esse limite, isto é, essa é uma outra situação de indeterminação quanto ao limite. Por outro lado, ao escrevermos o produto xe^x como um quociente de funções, $\frac{x}{e^{-x}}$, pudemos usar a regra de L′Hôpital.

Esse é um recurso que podemos tentar usar para resolver indeterminações para $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)$ quando

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0.$$

De fato, se f e g são duas funções, podemos escrever o produto $f(x)g(x)$ na forma de um quociente,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}, \quad \text{desde que} \quad g(x) \neq 0,$$

ou

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad \text{desde que} \quad f(x) \neq 0,$$

dependendo do que for mais conveniente, e tentar usar uma das regras de L

$'$Hôpital. Vejamos um outro exemplo: mostremos que $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = 0$.

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $\lim_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$, não podemos aplicar nenhuma das propriedades de limites. Tentamos então usar o recurso descrito acima: de fato, temos que

$$x^2 \ln x^2 = \frac{\ln x^2}{1/x^2},$$

e, portanto, como

$$\lim_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

podemos verificar se a regra de L$'$Hôpital para o 2º caso se aplica, fazendo $f(x) = \ln x^2$ e $g(x) =$ $f(x) = \ln x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Então

$$f'(x) = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad g'(x) = -\frac{2}{x^3},$$

donde $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -x^2$, para $x \neq 0$ e, portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} (-x^2) = 0.$$

Pela regra de l$'$Hôpital temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2/x}{(-2/x^3)} = 0,$$

isto é,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{1/x^2} = 0.$$

A regra de L$'$Hôpital é também válida, nos dois casos, para limites laterais. Em cada caso o enunciado é obtido do enunciado acima simplesmente substituindo-se limite pelo limite lateral correspondente.

Por exemplo, podemos concluir que $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. De fato, é suficiente escrevermos

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$$

e aplicar a regra de L′Hôpital para o limite lateral à direita, obtendo

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Finalmente observamos que conhecermos o limite de um quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando $x \to \alpha$, nos casos em que há indeterminação é importante pois esse limite fornece informações sobre o comportamento relativo das duas funções quando $x \to \alpha$.

Por exemplo, o fato de que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ nos informa que x tende a infinito muito mais rapidamente do que $\ln x$. Em particular podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$, pois

$$x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x}) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{\ln x}{x}) = 1.$$

Derivadas de ordem superior

Nem sempre é possível calcular diretamente um limite para o qual existe uma indeterminação, mesmo quando temos uma situação de indeterminação, como nas hipóteses da regra de L′Hôpital. Por exemplo, isso pode ocorrer se, ao tentarmos calcular o $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, verificarmos que f' e g' também levam a uma indeterminação do tipo tratado na regra de L′Hôpital.

Vejamos um exemplo: suponhamos que queremos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$. Como

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty = \lim_{x\to\infty} e^x$$

e as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$ são deriváveis, podemos tentar usar a regra de L′Hôpital no 2º caso. Mas $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = e^x$ e, portanto,

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty = \lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} g'(x),$$

ou seja, o quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ leva à mesma situação de indeterminação quanto ao limite quanto $x \to \infty$. Observemos, no entanto, que as funções derivadas, f' e g', são, por sua vez, deriváveis. Logo, se denotamos por u a função f' e por v a função g', temos que o quociente $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{2x}{e^x}$ apresenta uma indeterminação do tipo considerado na regra de L′Hôpital, sendo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Podemos então aplicar a regra de L′Hôpital para o quociente $\frac{u(x)}{v(x)}$, obtendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = 0.$$

Mas $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e, portanto, obtivemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Podemos então aplicar a regra de L′Hôpital novamente, agora para o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, e obter que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

As funções u' e v' são chamadas, respectivamente, as derivadas segunda (ou derivadas de segunda ordem) das funções f e g.

> Em geral, se uma função f é derivável e sua função derivada f' também é derivável, dizemos que f é duas vezes derivável e à função derivada de f' damos o nome de *derivada segunda de f* (ou derivada de segunda ordem de f, ou ainda derivada de ordem 2 de f) e usamos a notação f' para representá-la. A derivada f' é também chamada a *primeira derivada de f*.

Exemplos
5. Se $f(x)$ = sem x, então $f'(x)$ = cós x e, portanto, $f''(x) = -$ *sem* x.
6. Se $f(x) = \ln |x|$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$ e, portanto, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Em cada exemplo acima, vemos que a segunda derivada é ainda uma função derivável. Quando isso ocorre dizemos que f possui uma *terceira derivada* (ou *derivada de ordem* 3) que é denotada por f'''.

Claramente, enquanto, a partir de uma função f, o processo de derivação resultar numa função que é derivável, podemos, pela derivação, obter uma nova função que dizemos ser uma derivada de f de ordem 1 maior que a anterior. Em geral, se podemos aplicar o processo de derivação n vezes sequencialmente a partir de uma função f, dizemos que f é n vezes derivável (ou n vezes diferenciável) e usamos a notação $f^{(n)}$ para designar sua derivada de ordem n, isto é, a função que resulta desse processo.

As funções elementares que estudamos no Capítulo 6 são *infinitamente deriváveis*, isto é, possuem derivadas de todas as ordens.

Em particular, se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$ e, se $g(x) = x^n$, $n \geq 1$, então $g^{(n+1)}$ é a função constante igual a 0.

Voltando à regra de L'Hôpital, vemos que se um quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ apresenta uma indeterminação quanto a um limite dos tipos tratados acima, podemos tentar usar a regra de L'Hôpital para o quociente de suas derivadas, enquanto pudermos derivar as funções resultantes e o quociente dessas funções apresentar indeterminação dos tipos considerados.

Calculemos, por exemplo, o $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$. Temos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} x^3,$$

e, portanto, podemos tentar aplicar a regra de L'Hôpital. Mas, derivando o numerador e o denominador do quociente, obtemos, respectivamente, as funções e^x e $3x^2$, que também satisfazem

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} 3x^2$$

e, portanto, o quociente $\frac{e^x}{3x^2}$ também gera uma indeterminação quando $x \to \infty$. Podemos agora tentar aplicar a regra de L'Hôpital para $\frac{e^x}{3x^2}$. Derivando então o numerador e o denominador deste novo quociente, obtemos as funções e^x e $6x$, que ainda tendem a ∞ quando $x \to \infty$, isto é,

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} 6x,$$

o que nos diz que devemos tentar aplicar a regra para o quociente $\frac{e^x}{6x}$ Derivando então o numerador e o denominador desse último quociente, obtemos novamente a função e^x e agora a função constante igual a 6. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty,$$

podemos concluir, aplicando sucessivamente a regra de L′Hôpital, que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

Em geral, por esse processo, podemos provar que se $n \geq 1$ é um número inteiro, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty,$$

e esse fato nos informa que a função exponencial e^x tende muito mais rapidamente a infinito, quando $x \to \infty$, do que as funções x^n, $n \geq 1$.

Finalmente, é importante salientar que a igualdade $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ só é válida, em geral, quando temos as condições da regra de L′Hôpital, ou seja, em geral é necessário que haja uma indeterminação para o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to \alpha$

Exemplos simples mostram que $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ podem ser diferentes se não há uma indeterminação para 0 quociente: consideremos as funções

$$f(x) = \text{cós}\, x \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen}^2\, x.$$

Então

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \text{sen}^2\, x = 0$$

e, portanto, o quociente $\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$ não apresenta indeterminação quando $x \to 0$. De fato, como $\text{sen}^2 x > 0$ para $x \neq 0$ e próximo de 0, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\text{sen}^2\, x} = \infty$$

e, usando 0 Teorema 4.4 do Capítulo 5, obtemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\text{sen}^2\, x} = \infty.$$

No entanto, como

$$f'(x) = -\text{sen}\, x \quad \text{e} \quad g'(x) = 2\text{sen}\, x \cos x,$$

temos que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\text{sen}\, x}{2\,\text{sen}\, x\, \cos x} = -\frac{1}{2\cos x},$$

donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Sejam f e g funções deriváveis. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) Se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

   (c) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

   (d) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

   (e) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = 0$.

   (f) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{\ln(2x)}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + 3x^2)}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi + 3x^2)}{x^2}$

(d) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$

(e) $\lim_{\delta \to 0} \frac{9^\delta - 3^\delta}{\delta}$

(f) $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

(g) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x + 1}$

(h) $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^3}$

(i) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

(j) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

(k) $\lim_{x\to 1} \frac{1+x^2}{(1-x)^2}$

(l) $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(e-t)}{t^{-2}}$

(m) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+1)}{(e^x-e)^2}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln x^2}{x^2}$

(o) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1+\ln x^2}{x^2}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^3}$

(q) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

(r) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$

(s) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{x^2}$

(t) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-7x^2+3x+1}{9-4x^2}$

(u) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3x}{8x^4+4x}$

(v) $\lim_{x\to 1} \frac{7x^9-4x^5+6x^2-9}{x^2-1}$

(w) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-12}{3-3x-2x^3}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}$

(y) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

3. Determine o valor de a de tal forma que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^4 + \ln x^2}{3 - 2x^4} = 2.$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x-\cos 8x}{\operatorname{sen} 5x} & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determine o valor de c para que f seja contínua.

5. Dado n inteiro positivo, calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

3. A derivada no estudo do comportamento da função

O comportamento quanto ao crescimento

Como já vimos nos capítulos anteriores, se sabemos que uma função é contínua, se conhecemos seu comportamento assintótico e, mais ainda, se sabemos em quais intervalos a função é crescente e em quais a função é decrescente, podemos obter um primeiro esboço de seu gráfico, determinando apenas os pontos do gráfico onde ocorrem as mudanças de comportamento com relação às propriedades de ser crescente ou ser decrescente. A importância desse esboço, como já dissemos anteriormente, decorre do fato de que ele nos permite ter uma visão global do comportamento da função.

No capítulo anterior, com as noções de derivadas e retas tangentes, vimos que podemos dar uma precisão maior ao esboço do gráfico de uma função derivável. Nesta seção aprenderemos como, a partir de certas informações sobre a derivada, podemos obter informações sobre o comportamento da função. Mais especifica-mente, veremos como, usando a derivada, podemos determinar os intervalos onde a função é crescente e aqueles onde ela é decrescente, encontrando os pontos onde a função muda de comportamento (de crescente para decrescente ou vice-versa).

Se f é uma função e (a, b) é um intervalo contido em seu domínio, tal que f

não é constante nem crescente e nem decrescente em (a, b), dizemos que f apresenta mudança de comportamento quanto ao crescimento em (a, b). Assim, no estudo de uma função f, queremos determinar os intervalos de seu domínio onde não há mudanças de comportamento quanto ao crescimento e qual é o único comportamento de f em cada um desses intervalos.

Para isso, comecemos por analisar algumas situações onde ocorrem mudanças de comportamento de uma função quanto ao crescimento, buscando caracterizar pontos de seu domínio que indiquem a possibilidade de ocorrência dessas mudanças. Por exemplo, a situação em que um número x_0 pertence a um intervalo (c, d) do domínio de f é tal que f é crescente em $(c, x_0]$ e decrescente em $[x_0, d)$. Observe que, nesse caso,

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ para qualquer } x \in (c, d),$$

isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume no intervalo (c, d). Daí definirmos:

Definição: Dizemos que x_0 é um *ponto de máximo local* de f, se existe um intervalo aberto (c, d) contido no domínio de f tal que $x_0 \in (c, d)$ e $f(x) \leq f(x_0)$, qualquer que seja $x \in (c, d)$. O número $f(x_0)$ é chamado valor *máximo local* de f.

Analogamente, definimos ponto de mínimo local de f:

Definição: Dizemos que x_0 é um *ponto de mínimo local* de f, se existe um intervalo aberto (c, d) contido no domínio de f tal que $x_0 \in (c, d)$ e $f(x_0) \leq f(x_0)$, qualquer que seja $x \in (c, d)$. O número $f(x_0)$ é chamado *valor mínimo local* de f.

Com essa definição temos que se $x_0 \in (c, d)$ e f é decrescente em $(c, x_0]$ e crescente no intervalo $[x_0, d)$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f.

Exemplos

1. $x_0 = 0$ é ponto de mínimo local de $f(x) = x^2$, já que $f(x) \geq 0$ para qualquer número x e $f(0) = 0$.

2. $x_0 = -1$ é ponto de mínimo local de $f(x) = \sqrt{|x+1|}$, pois $f(x) \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$ e $f(-1) = 0$.

3. $x_0 = \pi$ é ponto de máximo local de $f(x) = \sec x$, já que $\sec x \leq -1$, para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ e $\sec \pi = -1$. Por outro lado, $x_1 = 0$ é ponto de mínimo local de f, pois $\sec x \geq 1$, para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\sec 0 = 1$.

Pontos de máximo local ou de mínimo local são, genericamente, denominados *pontos* *de extremo local de f.*

Nos exemplos dados há pouco, os pontos de extremo local são pontos que indicam uma mudança de comportamento da função quanto ao crescimento. No entanto, se f é uma função constante num intervalo (a, b), então todo ponto do intervalo é tanto ponto de máximo local quanto ponto de mínimo local; essa é uma situação em que a propriedade de ser ponto de extremo local não indica mudanças de comportamento da função quanto ao crescimento.

Por outro lado, pode ser provado (embora não 0 façamos aqui) que se uma função é contínua num intervalo e aí apresenta mudanças de comportamento quanto ao crescimento, então a função possui pontos de extremo local nesse intervalo. Daí, neste contexto, a importância dos pontos de extremo local de uma função.

A partir do teorema que apresentamos a seguir, poderemos estabelecer um critério para a seleção dos candidatos a pontos que garantam mudanças de comportamento da função quanto ao crescimento.

Teorema 3.1*: *Se x_0 é um ponto de extremo local de uma função f derivável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

E importante salientar que o teorema acima diz que *dentre os pontos onde f é derivável* os candidatos a ponto de extremo são os pontos onde a derivada se anula, isto é, são as soluções da equação $f'(x) = 0$.

Ou seja, esse teorema não detecta candidatos a ponto de extremo local nos quais a função não seja derivável. Exemplos simples, como o dado na Figura 3.1, mostram que de fato um ponto onde a função não é derivável pode ser um ponto de extremo local. No exemplo dado, $x = 1$ é um ponto de mínimo local.

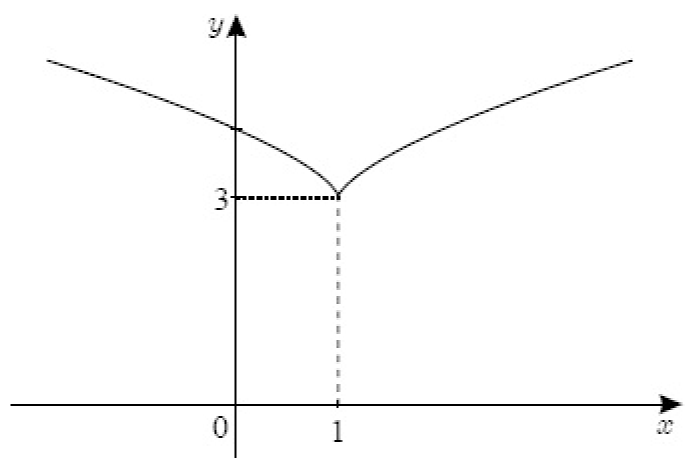


Figura 3.1

Assim, vemos que devemos incluir, entre os candidatos a ponto de extremo local, pontos do domínio nos quais a função não seja derivável. Mais precisamente,

Definição: Se (a, b) é um intervalo contido no domínio de uma função f e $c \in (a, b)$ é tal que f não é derivável em c ou então $f'(c) = 0$, dizemos que c é um *ponto crítico de f*.

Por exemplo, os pontos críticos da função $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$. De fato, como f é derivável, seus pontos críticos são as soluções da equação $f'(x) = 0$, isto é, da equação

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

cujas soluções são -1 e $-\frac{1}{3}$.

Por outro lado, $x = 0$ é o único ponto crítico da função $g(x) = |x|$, uma vez que a equação $g'(x) = 0$ não tem solução e g não é derivável em $x = 0$.

Observe que pontos de descontinuidade de uma função f são pontos críticos de f já que, nesses pontos, a função, não sendo contínua, também não é derivável.

Com a definição de ponto crítico e o Teorema 3.1 podemos dizer que

os candidatos a ponto de extremo local de f são os pontos críticos de f.

Usamos a palavra *candidatos* para salientar que a propriedade de ser um ponto crítico de uma função não garante, por si só, que se trata de um ponto de extremo local.

Por exemplo, se

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

então $x = 0$ *é* um ponto crítico de f, já que f não é derivável em $x = 0$ (o gráfico de f possui uma reta tangente vertical em $x = 0$), mas $x = 0$ não é ponto de máximo nem ponto de mínimo local, já que $f(x) = \sqrt[3]{x}$, é uma função crescente. Ou seja,

$x = 0$ *é ponto crítico da função* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, *mas não é ponto de extremo local*.

Por outro lado, se $g(x) = x^3$, então $g'(x) = 3x^2$ e, portanto, $g'(0) = 0$, mas $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo local, já que $g(x) = x^3$ é uma função crescente.

Em outras palavras, temos que a recíproca do Teorema 3.1 é falsa, sendo que $g(x) = x^3$ com $x_0 = 0$ é um contraexemplo para a recíproca, já que $g'(0) = 0$, mas $x = {}_0$ não é ponto de extremo local (ver Figura 3.2).

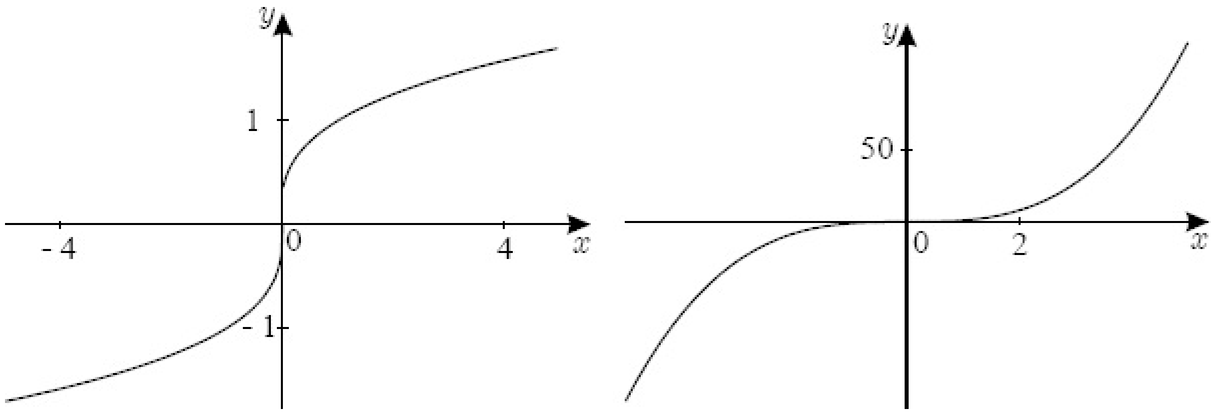


Figura 3.2 Gráficos de $\sqrt[3]{x}$ e de x^3

Veremos agora que o comportamento de uma função num intervalo de seu domínio só pode apresentar mudanças quanto ao crescimento se existirem pontos críticos nesse intervalo. Isto é, os pontos críticos de uma função são os pontos que podem indicar mudanças de comportamento quanto ao crescimento.

Mais precisamente, mostraremos que se f está definida em (a, b) e não tem pontos críticos nesse intervalo, então ou f é crescente em (a, b) ou f é decrescente nesse intervalo.

Da definição de ponto crítico decorre que se f não possui pontos críticos num intervalo (a, b) de seu domínio, então f é derivável em (a, b). Podemos então tentar encontrar alguma propriedade de f' que possa determinar o comportamento de f no intervalo (a,b).

Vejamos, para começar, o que podemos dizer da derivada de uma função crescente num intervalo. Isto é, suponhamos que f é derivável e crescente num intervalo (a, b) e denotemos por x_0 um ponto qualquer desse intervalo.

Como f é crescente, temos que:

$$\begin{aligned} &\text{se } a < x < x_0, \quad \text{então} \quad x - x_0 < 0 \quad \text{e} \quad f(x) - f(x_0) < 0, \text{ e} \\ &\text{se } x_0 < x < b, \quad \text{então} \quad x - x_0 > 0 \quad \text{e} \quad f(x) - f(x_0) > 0, \end{aligned}$$

o que nos dá, em ambos os casos, que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

e, portanto

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Como x_0 pode ser qualquer número do intervalo, podemos concluir que se f é **derivável e crescente** em (a,b), então $f'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in (a, b)$.

Em particular, se sabemos que f não possui pontos críticos em (a, b), isto é, $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in (a,b)$, podemos concluir que $f'(x) > 0$ para todo número x do intervalo. Ou seja,

se f é crescente e não possui pontos críticos em (a,b), então $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

De forma análoga podemos concluir que

se f é decrescente e não possui pontos críticos em (a, b), então $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Frente a esses resultados, é razoável perguntar se são essas as propriedades da derivada que estamos procurando. De fato, como demonstramos no teorema a seguir, isso é o que ocorre:

Teorema 3.2*: *Seja f uma função derivável num intervalo I, então:*

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I.*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I.*

A demonstração desse teorema utiliza um resultado que é conhecido como Teorema do Valor Médio. Os dois teoremas estão demonstrados no apêndice deste capítulo.

Teorema 3.3* (Teorema do Valor Médio): *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), então existe um número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema do Valor Médio tem uma interpretação geométrica interessante: observe que o número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *é o* coeficiente angular da reta *r* que passa pelos pontos (*a*, *f*(*a*)) e (*b*, *f*(b)) e, portanto, existir um número c ∈ (*a*, *b*) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é equivalente, geometricamente, a existir uma reta tangente ao gráfico de *f* no intervalo (a, *b*) que é paralela à reta *r* (veja Figura 3.3).

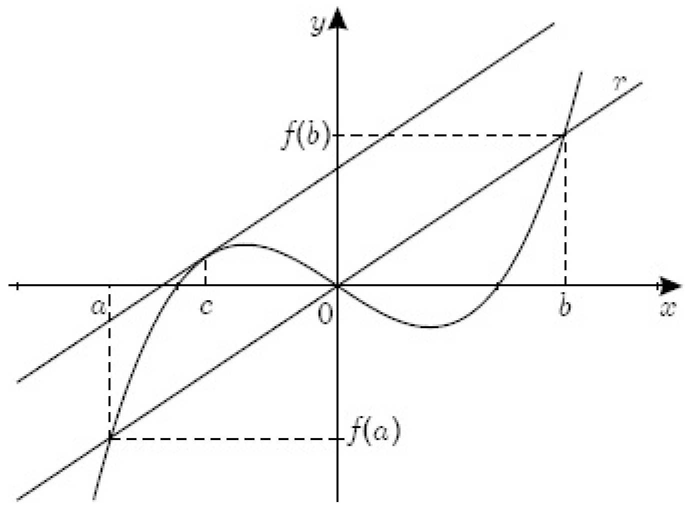


Figura 3.3

O próximo teorema, juntamente com o Teorema 3.2, nos permitirá concluir que se *f* está definida em (a, *b*) e apresenta, nesse intervalo, mudanças de comportamento quanto ao crescimento, então *f* possui pontos críticos em (*a*,*b*).

Teorema 3.4: *Se f é derivável num intervalo I e existem números a e b nesse intervalo tais que* $f'(a) < 0 < f'(b)$ *(ou,* $f'(b) < 0 < f'(a)$*), então existe c ∈ I tal que* $f'(c) = 0$.

Em outras palavras, se *f* é uma função derivável num intervalo e sua função derivada assume valores positivos e negativos, então *f* possui pontos críticos nesse intervalo. Em particular, usando o Teorema 3.2, temos:

Teorema 3.5*: *Seja* (*a*, *b*) *um intervalo contido no domínio de uma função f. Se f não possui pontos críticos no intervalo* (*a*,*b*), *então uma das duas situações abaixo ocorre:*

(i) $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in (a, b)$. Nesse caso *f é crescente em* (*a*, *b*),

(ii) $f'(x) < 0$ para qualquer $x \in (a, b)$. Nesse caso *f* é *decrescente em* (*a*, *b*).

Uma consequência bastante prática desse teorema e do Teorema 3.2 é que se f não possui pontos críticos num intervalo de seu domínio, então para determinar se f é crescente ou decrescente, nesse intervalo, é suficiente calcular f' em qualquer ponto do intervalo e verificar se o resultado é positivo ou negativo.

Usando a primeira derivada

Vejamos agora quando podemos usar as informações que obtivemos para decidir se um ponto crítico no qual a função é contínua é, de fato, um ponto de extremo local, isto é, um ponto que garante mudança de comportamento da função quanto ao crescimento.

Critério da primeira derivada*: *Se f é uma função contínua em (a, b) e x_0 é o único ponto crítico de f nesse intervalo, então uma das quatro situações abaixo ocorre:*

(i) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (a, x_0)$ *e* $f'(x) < 0$ *para* $x \in (x_0, b)$. *Nesse caso f é crescente em* $(a, x_0]$ *e decrescente em* $[x_0, b)$. *Em particular, x_0 é ponto de máximo local de f.*

(ii) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (a, x_0)$ *e* $f'(x) > 0$ *para* $x \in (x_0, b)$. *Nesse caso f é decrescente em* $(a, x_0]$ *e crescente em* $[x_0, b)$. *Em particular, x_0 é ponto de mínimo local de f.*

(iii) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (a, b) - \{x_0\}$. *Nesse caso f é crescente em (a, b) e, portanto, x_0 não é ponto de extremo local.*

(iv) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (a, b) - \{x_0\}$. *Nesse caso f é decrescente em (a, b) e, portanto, x_0 não é ponto de extremo local.*

Observe que se x_0 é um ponto crítico no qual f é derivável, então f é necessariamente contínua em x_0 (lembre-se que diferenciabilidade implica continuidade). Assim, os critérios dados acima sempre podem ser usados para decidir qual é o comportamento de f (quanto ao crescimento) num intervalo (a, b) no qual f é derivável e que contém um único ponto crítico de f. Em geral, usamos os recursos que desenvolvemos acima para estudar a função em subintervalos de seu domínio nos quais a função é contínua.

Vejamos, em alguns exemplos, como usar esse critério para obter um esboço do gráfico de uma função.

Exemplos

4. Seja $f(x) = e^{3x^4-8x^3+6x^2}$. Queremos determinar em quais intervalos *f* é crescente e em quais *f* é decrescente.

Pelo que vimos acima, devemos calcular os pontos críticos de f, que são os pontos onde podem ocorrer mudanças de comportamento de crescente para decrescente ou vice-versa. Como *f* é uma função derivável em qualquer número real, os pontos críticos são apenas as soluções da

equação $f'(x) = 0$. Derivando *f* obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x^3 - 24x^2 + 12x)e^{3x^4-8x^3+6x^2} \\ &= 12(x^3 - 2x^2 + x)e^{3x^4-8x^3+6x^2}. \end{aligned}$$

Devemos então resolver a equação

$$12(x^3 - 2x^2 + x)e^{3x^4-8x^3+6x^2} = 0.$$

Como $12e^{3x^4-8x^3+6x^2} > 0$ para qualquer número real x soluções dessa equação são as soluções de

$$x^3 - 2x^2 + x = 0,$$

donde

$$x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2 = 0,$$

cujas soluções são $x = 0$ ou $x = 1$. Ou seja, concluímos que os pontos críticos de *f* são $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

Pelo critério dado acima, devemos determinar qual é o sinal de f' em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Para isso, como vimos, é suficiente avaliarmos f' em um ponto de cada um desse intervalos: calculando então, por exemplo, $f'(-1)$, $(\frac{1}{2})$ e $f'(2)$, obtemos

$$f'(-1) = -48\,e^{17} < 0,$$
$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{12}{8}\,e^{\frac{11}{16}} > 0 \;\text{ e}$$
$$f'(2) = 24\,e^{8} > 0.$$

Logo, f' é negativa no intervalo $(-\infty, 0)$ e positiva nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Daí decorre que f é decrescente $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$. Em particular, $x_0 = 0$ é ponto de mínimo local de f enquanto que $x_1 = 1$ não é ponto de extremo local. Calculando agora os limites assintóticos e o valor de f em $x_0 = 0$,

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} e^{3x^4 - 8x^3 + 6x^2} = \infty = \lim_{x \to -\infty} e^{3x^4 - 8x^3 + 6x^2},$$

podemos ver que a curva dada na Figura 3.4 é um esboço bastante razoável do gráfico de f (observe que, como $f'(1) = 0$, o gráfico de f deve ser tangente a uma reta horizontal em $x_1 = 1$).

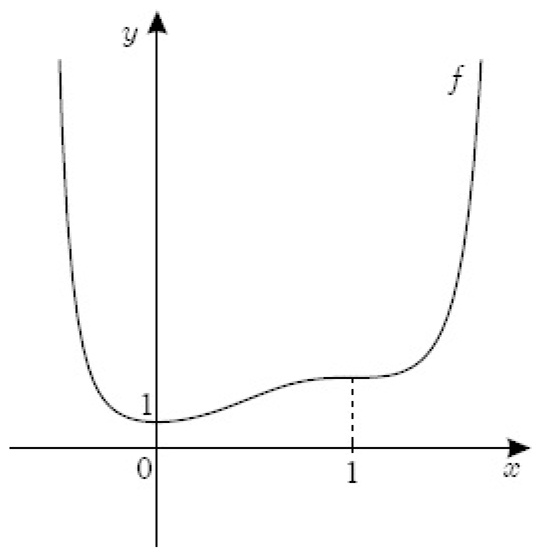


Figura 3.4

5. Seja $f(x) = x^3 - |x|$. Temos que f é contínua em qualquer número real e é derivável em $x \neq 0$, pois as funções x^3 e $|x|$ são deriváveis em $\mathbb{R} - \{0\}$. No entanto, da não-diferenciabilidade de $|x|$ em zero decorre que f também não é derivável em $x = 0$.

De fato,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-x}{x} = -1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1,$$

e, portanto, não existe o $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Ou seja, $x_0 = 0$ é um ponto crítico de f.
Os outros pontos críticos (se existirem) são as soluções da equação $f'(x) = 0$. Temos que $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x > 0, \\ x^3 + x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x > 0, \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Como $3x^2 + 1 > 0$ para qualquer x, já podemos concluir que f não possui pontos críticos no intervalo $(-\infty, 0)$ e, mais ainda, que f é crescente nesse intervalo.

Para determinar os pontos críticos de f no intervalo $(0, \infty)$ devemos resolver a equação $3x^2 - 1 = 0$ com a condição $x > 0$, o que nos dá $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ou seja, os pontos críticos de f são $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$..

Como no exemplo anterior, para usar o critério da primeira derivada, devemos determinar o sinal de f' em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. No primeiro desses intervalos já sabemos que f' é positiva. Escolhendo um ponto em cada um dos outros intervalos, por exemplo $\frac{1}{2} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $1 \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, e calculando f', obtemos

$$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0 \quad e \quad f'(1) = 2 > 0.$$

Podemos então concluir que f' é positiva nos intervalos $(-\infty, 0)$ e ($(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$,$\infty$) o que nos diz que f é crescente em cada um desses intervalos. Por outro lado, temos que f é decrescente em $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, já que f' é negativa nesse intervalo. Em particular, x_0, = 0 é ponto de máximo local e $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo local de f.

Calculando $f(0) = 0$, $f(0) = 0,\ f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{27}}$ e os limites assintóticos

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - |x| = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} x^3 - |x| = \infty$$

e usando as informações que obtivemos sobre 0 comportamento de f, chegamos ao esboço do gráfico dado na Figura 3.5.

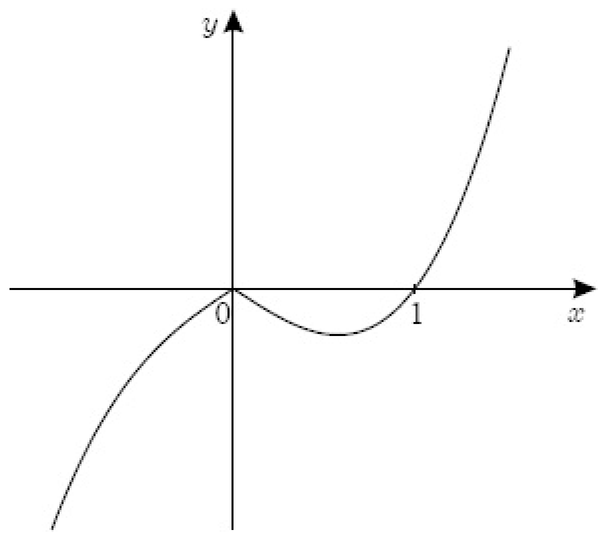


Figura 3.5

6. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{3x^4 - 10x^3 + 9x^2}.$$

Como $3x^4 - 10x^3 + 9x^2 = 0$, somente quando $x = 0$ temos que f está definida e é derivável em qualquer número real diferente de 0.

Derivando f obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{12x^3 - 30x^2 + 18x}{(3x^4 - 10x^3 + 9x^2)^2} \\ &= -\frac{6x(2x^2 - 5x + 3)}{x^4(3x^2 - 10x + 9)^2} \\ &= -\frac{6(2x^2 - 5x + 3)}{x^3(3x^2 - 10x + 9)^2} \end{aligned}$$

e, portanto, $f'(x) = 0$ quando

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ e } x \neq 0$$

(lembremos que $x = 0$ não pertence ao domínio de f). Resolvendo essa equação obtemos os pontos críticos $x_0 = 1$ e $x_1 = \frac{3}{2}$, que pertencem ao intervalo $(0, \infty)$.

Agora é importante lembrar que o domínio de f não é um intervalo, mas sim a união dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Logo, como o teste da primeira derivada só é válido em intervalos, devemos aplicá-lo independentemente em cada um desses dois intervalos. Como f só tem pontos críticos no intervalo $(0, \infty)$, sabemos que f' não muda de sinal em $(-\infty, 0)$. Escolhendo um ponto desse intervalo, por exemplo $x = -1$, obtemos $f'(-1) > 0$, podendo então concluir que f' é positiva (e portanto f é crescente) em $(-\infty, 0)$.

Por outro lado, vimos que f tem dois pontos críticos, $x_0 = 1$ e $x_1 = \frac{3}{2}$, no intervalo $(0, \infty)$. Devemos então determinar o sinal de f' em cada um dos subintervalos $(0, 1)$, $(1,\frac{3}{2})$ e $(\frac{3}{2}, \infty)$. Escolhendo os pontos $\frac{1}{2} \in (0, 1)$,
$\frac{5}{4} \in (1, \frac{3}{2})$ e $2 \in (\frac{3}{2}, \infty)$ obtemos

$$f'(\frac{1}{2}) < 0, \quad f'(\frac{5}{4}) > 0 \quad \text{e} \quad f'(2) < 0,$$

concluindo então que f é decrescente em $(0, 1]$ e em $[\frac{3}{2}, \infty)$ e é crescente em $[1,\frac{3}{2}]$.

Para determinar o comportamento assintótico de f, como seu domínio é o conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, devemos calcular

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^4-10x^3+9x^2)=\infty=\lim_{x\to\infty}(3x^4-10x^3+9x^2)$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x^4-10x^3+9x^2}=0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^4-10x^3+9x^2}.$$

Por outro lado,

$$3x^4-10x^3+9x^2=x^2(3x^2-10x+9)$$

e, como

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2-10x+9}=\frac{1}{9},$$

podemos usar o Teorema 4.4 do Capítulo 5 para concluir que

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})(\frac{1}{3x^2-10x+9})=\infty.$$

Em particular, pelo Teorema 4.9 do Capítulo 5 temos que

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x^2})(\frac{1}{3x^2-10x+9})=\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x^2})(\frac{1}{3x^2-10x+9})=\infty,$$

isto é,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\infty=\lim_{x\to 0^-}f(x).$$

Com essas informações e usando os valores

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(\frac{3}{2})=\frac{16}{27},$$

obtemos o esboço do gráfico de *f* dado na Figura 3.6.

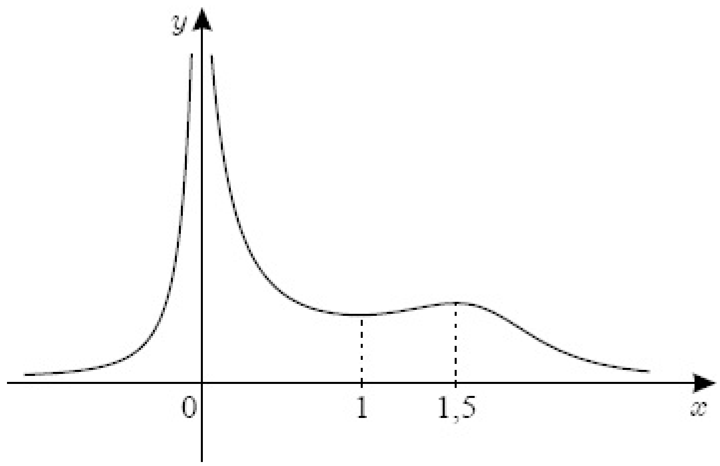


Figura 3.6

Como já observamos, se uma função é constante num intervalo, então qualquer ponto desse intervalo é um ponto de extremo local, e esses pontos não indicam mudanças de comportamento quanto ao crescimento.

Por outro lado, usando o critério da primeira derivada, podemos ver que, no caso em que um ponto de extremo local, x_0, de uma função contínua f é um ponto crítico *isolado*, isto é, x_0 é ponto de extremo local e é o único ponto crítico de f num intervalo, então x_0 é também um ponto onde ocorre uma mudança de comportamento quanto ao crescimento.

De fato, se f é contínua num intervalo (a, b) e x_0 é o único ponto crítico de f nesse intervalo, então a condição de x_0 ser um ponto de extremo local elimina as situações (iii) e (iv), restando apenas, como possibilidades, as duas primeiras situações. Em qualquer dos casos, vemos que ocorre uma mudança de comportamento quanto ao crescimento. Ou seja, é válido o seguinte resultado:

Teorema 3.6: *Seja f uma função contínua num intervalo e x_0 um ponto de extremo local para f. Se x_0 é um ponto crítico isolado de f, então existe um intervalo (a, b) contendo x_0 no qual ocorre uma das duas situações:*

(i) *f é crescente em $(a, x_0]$* e *é decrescente em $[x_0, b)$.*

(ii) *f é decrescente em $(a, x_0]$ e é crescente em $[x_0, b)$.*

Usando a segunda derivada

Uma forma de resumir o que fizemos ao usar a derivada para estudar o comportamento de uma função quanto ao crescimento é dizer que reduzimos o problema de decidir em quais intervalos uma função derivável é crescente e em quais ela é decrescente ao problema de determinar em quais intervalos uma outra função (sua derivada) é positiva e em quais ela é negativa.

Certamente houve um ganho sensível nessa redução, pois determinar algebricamente se uma função é ou não crescente é, em geral, muito mais complicado (quando possível) do que determinar em que intervalos uma função é positiva e em quais ela é negativa. Os exemplos que apresentamos acima dão um bom testemunho desse fato.

Ou seja, temos que certas propriedades de uma função derivável equivalem a propriedades mais simples de sua derivada. Levando essa observação em consideração, vemos que é razoável perguntar se, no caso em que f é uma função duas vezes derivável, é possível usar a segunda derivada para obter mais facilmente as informações que necessitamos sobre f'. A resposta a essa pergunta é dada pelo *critério da segunda derivada* que é uma consequência do teorema abaixo:

Teorema 3.7*: *Se* $f'(x_0) = 0$ e *existe* $f''(x_0)$, *então*

(i) *se* $f''(x_0) > 0$, *então* x_0 *é ponto de mínimo local de* f;

(ii) *se* $f''(x_0) < 0$, *então* x_0 *é ponto de máximo local de* f.

Antes de continuar, devemos salientar que o caso em que x_0 é um ponto crítico de f com $f''(x_0) = 0$ não está incluído no teorema, pelo fato de que esta condição não determina, por si só, o comportamento de f em um intervalo contendo x_0. De fato, exemplos simples como $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$, mostram que, pelo menos, três situações distintas podem ocorrer:

(a) $f'(_0) = 0 = f''(0)$ e $x_0 = 0$ não é ponto de extremo local de f. De fato, f é uma função crescente.

(b) $g'(0)$ =0=g$''(0)$ e $x_0 = 0$ é ponto de mínimo local de g.

(c) $h'(0) = 0 = h''(0)$ *e* $x_0 = 0$ *é* ponto de máximo local de h.

Usando agora o Teorema 3.7 e o critério da primeira derivada, obtemos o que podemos chamar de *critério da segunda derivada*, que também é usado para estudar o comportamento de uma função quanto ao crescimento:

Critério da segunda derivada*: *Se uma função f está definida em (a, b) com x_0 sendo o único ponto crítico de f nesse intervalo e existe $f''(x_0)$, então:*

(i) *se* $f''(x_0) > 0$, *então* f *é decrescente em* $(a, x_0]$ *e crescente em* $[x_0, b)$;

(ii) *se* $f''(x_0) < 0$, *então* f *é crescente em* $(a, x_0]$ *e decrescente em* $[x_0, b)$.

A seguir, aplicamos o critério da segunda derivada em um dos exemplos que já estudamos, usando apenas o critério da primeira derivada.

Seja $f(x) = x^3 - |x|$. Como já vimos $x_0 = 0$ e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. são os pontos críticos de f. Como f não é derivável em $x = 0$ não podemos usar o critério da segunda derivada nesse caso. Por outro lado, f é duas vezes derivável em $x \neq 0$, com $f''(x) = 6x$. Podemos então usar o critério da segunda derivada para $\frac{1}{\sqrt{3}}$ que é o único ponto crítico de f no intervalo $(0, \infty)$, e concluir que f é decrescente em $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e é crescente em $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Para determinar o comportamento de f no intervalo $(-\infty, 0)$, usamos, como antes, o critério de primeira derivada. Isto é, verificamos que $f'(x) > 0$ para x nesse intervalo e, portanto, f é crescente em $(-\infty,0)$. Em particular, $x_0 = 0$ é ponto de máximo local de f, e $\frac{1}{\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo local.

Observe que o ganho que tivemos ao usar o critério da segunda derivada foi uma economia de cálculos, já que antes, no exemplo **5**, avaliamos f' em dois pontos e agora calculamos f'' apenas em $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Observe também que, se x_0 é um ponto crítico de uma função f para o qual $f''(x_0) \neq 0$, pelo Teorema 3.7, podemos decidir se x_0 é um ponto de máximo local ou de mínimo local sem precisar conhecer todos os pontos críticos de f, como ocorre se usamos o critério da primeira derivada.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Encontre os pontos críticos das funções:

   (a) $f(x) = x^2(x^2 - 1)$

   (b) $f(x) = |x^2(x^2 - 1)|$

   (c) $f(x) = e^{x^5 - x}$

   (d) $f(x) = \text{arctg}\,(3x^4 - 6x)$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que -1, 0, $\frac{1}{2}$ e 1 são seus pontos críticos. Encontre os pontos críticos de $g(x) = f(x + 1)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que -1, 1 e 2 são seus pontos críticos. Encontre os pontos críticos de $g(x) = f(x^2 - 2)$.

4. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se $f'(a) = 0$, então $x = a$ é ponto de extremo local de f.

   (b) Se $x = a$ é ponto de extremo local de f, então $f'(a) = 0$.

5. A função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ é inversível?

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax + 2$.

   (a) Determine os valores de a tal que f seja inversível.

   (b) A função f^{-1} é derivável para quais valores de a?

7. Seja $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 1$.

   (a) f possui pontos de mínimo local? Quais?

   (b) f possui pontos de máximo local? Quais?

8. Seja $f(x) = \ln(x^2 - x)$.

(a) f possui pontos de mínimo local? Quais?

(b) f possui pontos de máximo local? Quais?

(c) Em quais subintervalos de seu domínio f é crescente?

(d) Em quais subintervalos de seu domínio f é decrescente?

9. Seja f a função definida pela expressão

$$f(x) = \frac{[\ln(x^2 - 1)]^2}{x^2 - 1}.$$

(a) Qual é o domínio de f?

(b) Determine os pontos de mínimo local e de máximo local de f.

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

10. Seja f a função definida por $f(x) = e^{\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - 2x^3\right)}$.

(a) Determine o intervalo de crescimento e decrescimento da função f.

(b) Determine os pontos de máximo local e mínimo local de f.

(c) Calcule $\lim_{x \to \infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(d) Faça um esboço do gráfico de f.

11. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $f'(0) = 0$ (use a definição de derivada em $x = 0$.)

(b) Seja $g(x) = \operatorname{sen}(\pi f(x))$. Calcule $g'(0)$ e $g'(x)$ para $x \neq 0$.

(c) Quais são os pontos críticos de g? (Observe que $0 < \pi e^{-\frac{1}{x^2}} < \pi$).

(d) Calcule $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to \infty} g(x)$.

(e) Faça um esboço do gráfico de g.

12. Seja $f(x) = e^{3x^4-2x^3}$. Ache os pontos de máximo e mínimo local de f.

13. Faça um esboço do gráfico de cada função f abaixo, utilizando a primeira derivada. Determine os pontos onde ocorrem máximos e mínimos locais (caso existam) estudando o crescimento da função, isto é, determinando os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente. Calcule os limites assintóticos.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$
(c) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$
(d) $f(x) = x \ln x$
(e) $f(x) = x\sqrt{1-x}$
(f) $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$
(g) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
(h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
(i) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$
(j) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, para $|x| < \frac{\pi}{2}$

14. Quantas soluções a equação

$$\operatorname{tg} x = x$$

tem no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$? (Analise o comportamento de $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ neste intervalo)

15. Quantas soluções a equação

$$\operatorname{tg} x = 2x$$

tem no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

16. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$, então para algum $x_0 \in (-1, 1)$ a reta tangente ao gráfico neste ponto tem inclinação igual a 2.

(b) Se $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 2x$, então a equação $f'(x) = 0$ tem no mínimo uma solução no intervalo aberto (0,1).

17. Mostre que as seguintes proposições são verdadeiras:

(a) Se $f'(x) = 0$ para todo x, então f é a função constante.

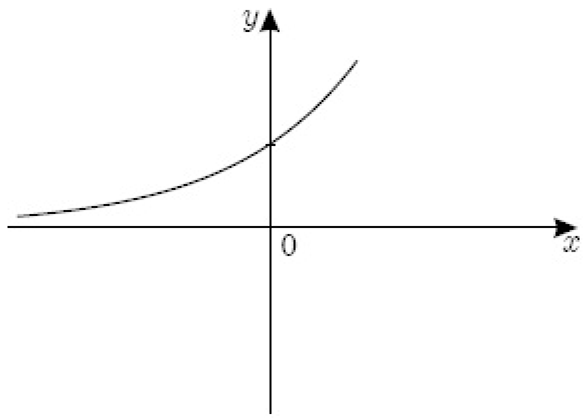
(b) Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ com $f'(x) = g'(x)$ para $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + C$.

(c) Se $f'(x) = f(x)$, então $f(x) = Ce^x$.

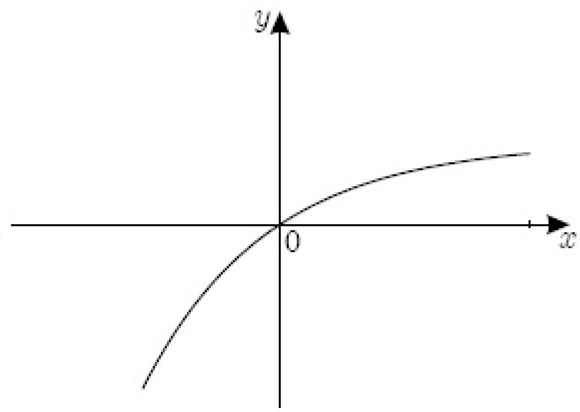
Concavidade e pontos de inflexão

Na seção anterior vimos que podemos conhecer o comportamento de uma função derivável, em termos de crescimento, a partir de propriedades de sua função derivada.

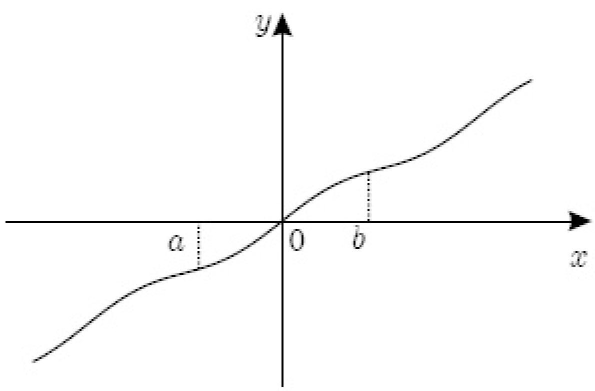
Em particular, vimos que se f é uma função derivável com f' positiva num intervalo, então f é crescente nesse intervalo. Por outro lado, os exemplos dados na Figura 3.7 mostram que, mesmo sendo deriváveis, funções crescentes num intervalo podem apresentar comportamentos bem diferentes quanto à forma de crescimento, o mesmo ocorrendo para funções decrescentes num intervalo (veja Figura 3.8).



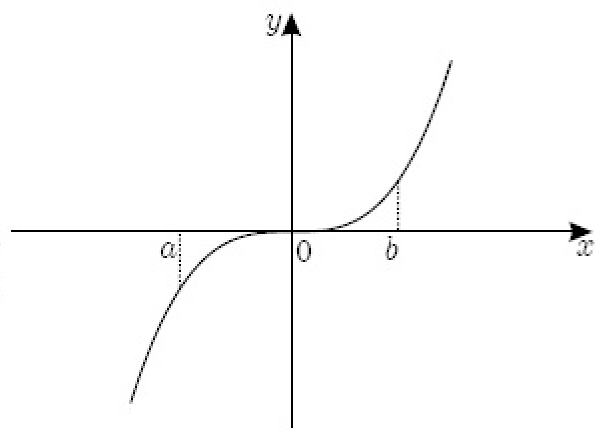
(a) gráfico de g.



(b) gráfico de h.

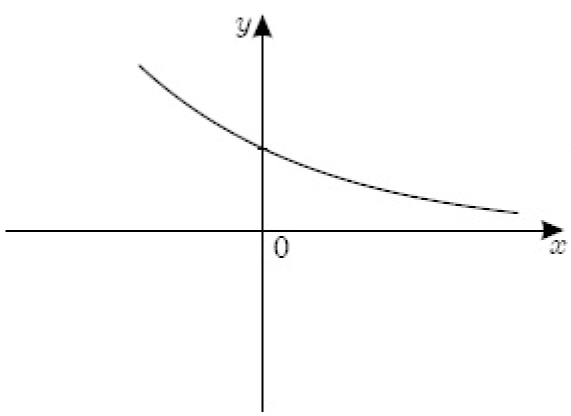


(c) gráfico de u.

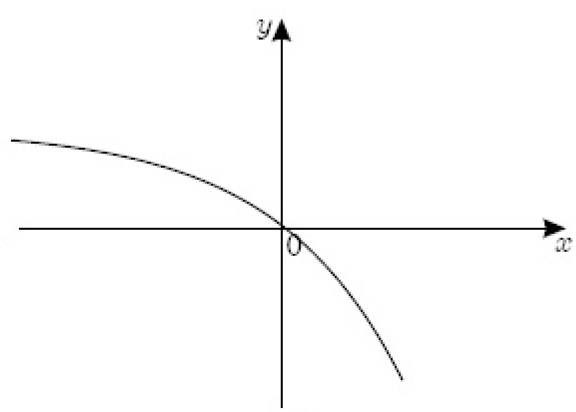


(d) gráfico de v.

Figura 3.7



(a)



(b)

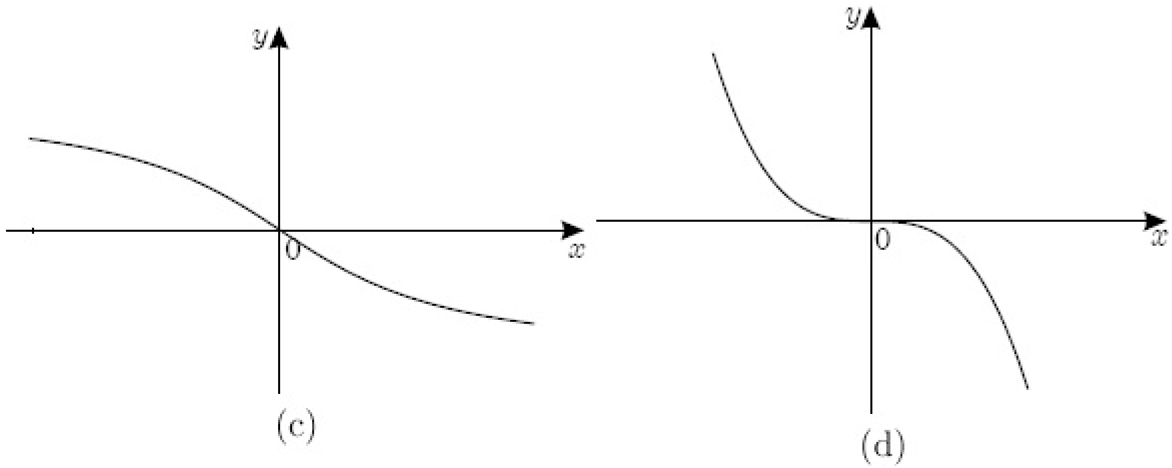
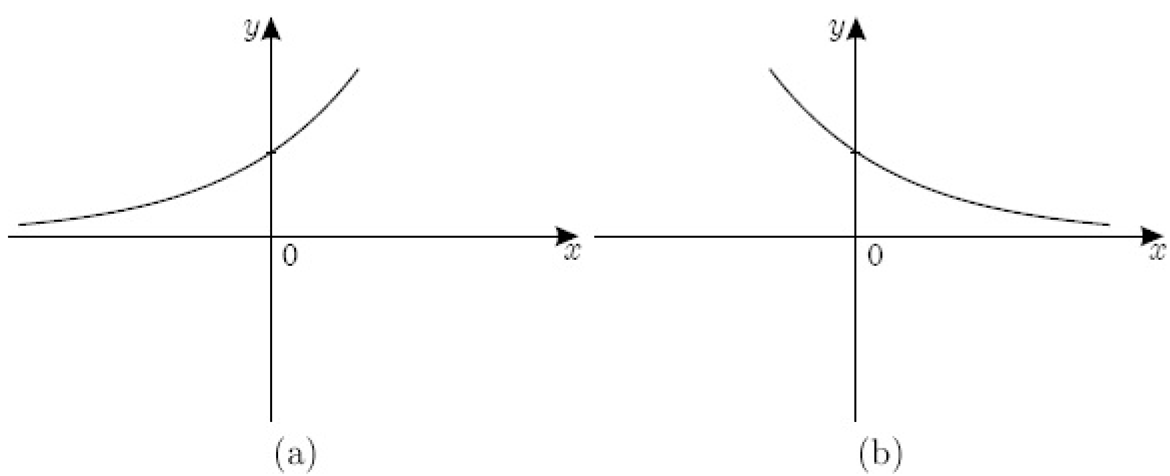


Figura 3.8

Nosso objetivo nesta seção é obter mais informações sobre uma função derivável de maneira a poder determinar quais destas formas a função apresenta num intervalo em que é crescente (ou, analogamente, num intervalo onde a função é decrescente) e chegar, em particular, a um esboço mais preciso de seu gráfico. Comecemos por observar que cada comportamento descrito na Figura 3.7 pode ser associado ao comportamento da função derivada correspondente: de fato, se nos for dito que cada gráfico da Figura 3.9, a seguir, é o gráfico da derivada de uma das funções dadas na Figura 3.7, não teremos dúvida em afirmar que (a) é o gráfico de g', (b) é o gráfico de h', (c) é o gráfico de u' e (d) é o gráfico de v'.



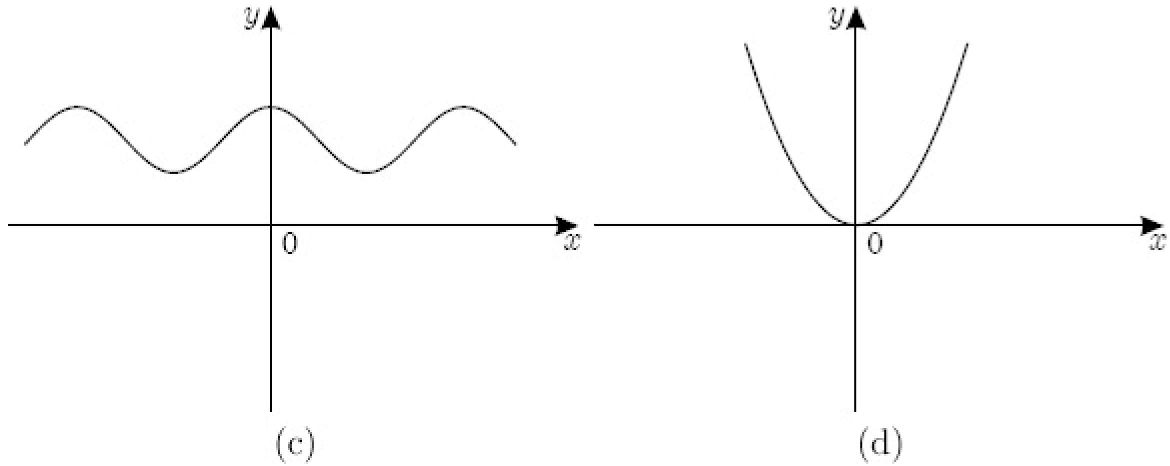


Figura 3.9

Comparando os gráficos de g' e de h', vemos que ambas só assumem valores positivos, o que garante que g e h são funções crescentes, mas vemos também que g' é crescente enquanto que h' é decrescente.

Por outro lado, podemos ver que o gráfico de g tem a propriedade de não possuir pontos abaixo de qualquer uma de suas retas tangentes, enquanto que o gráfico de h tem exatamente a propriedade oposta, isto é, o gráfico de h não tem pontos acima de qualquer uma de suas retas tangentes.

O fato é que esses comportamentos, de g' e do gráfico de g e de h' e do gráfico de h, estão fortemente relacionados. Mais precisamente, podemos provar que se f é uma função derivável no intervalo (a, b), então a propriedade algébrica

f' é crescente no intervalo (a, b)

é equivalente à seguinte propriedade geométrica:

o gráfico de f no intervalo (a, b) não possui pontos abaixo de qualquer uma de suas retas tangentes.

Descrevemos essa propriedade dizendo que o gráfico de f nesse intervalo é *côncavo para cima*. Mais precisamente, definimos:

Definição: Dizemos que o gráfico de uma função f num intervalo (a, b) é *côncavo para cima* se f é derivável em (a, b) e seu gráfico, nesse intervalo, não possui pontos abaixo de qualquer uma de suas retas tangentes.

Com essa definição e a partir do que foi afirmado acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.8: *Se f é derivável com f' sendo crescente em (a, b), então o gráfico de f no intervalo (a, b) é côncavo para cima.*

Esse é o caso da função g cujo gráfico é dado na Figura 3.7a. Observe também que, usando esse teorema, podemos agora garantir que os esboços dos gráficos das funções exponenciais que apresentamos no Capítulo 6 são precisos com relação à concavidade (côncavo para cima), já que suas derivadas são funções crescentes em $\mathbb{R}$.

Analogamente, definimos:

Definição: Dizemos que o gráfico de uma função f num intervalo (a, b) é *côncavo para baixo* se f é derivável em (a, b) e seu gráfico nesse intervalo não possui pontos acima de qualquer uma de suas retas tangentes.

Em termos de propriedades da derivada temos:

Teorema 3.9: *Se f é derivável com f' sendo decrescente em* (a, b), *então o gráfico de f no intervalo* (a, b) *é côncavo para baixo*.

Esse é o caso da função h, cujo gráfico é dado na Figura 3.7b. Em resumo, os dois teoremas que enunciamos relacionam o comportamento da derivada da função quanto ao crescimento, com o comportamento do gráfico da função quanto à concavidade.

Aqui, convém acrescentar que podemos também adotar uma outra terminologia para descrever o comportamento do gráfico de uma função quanto à concavidade: usamos simplesmente *côncavo* com o significado de *côncavo para baixo* e *convexo* com o significado de *côncavo para cima*. Com essa terminologia é usual dizermos que uma função é côncava quando seu gráfico é côncavo em todo o seu domínio e, analogamente, que uma função é convexa quando seu gráfico é convexo em todo o seu domínio.

Observamos agora que apesar de termos usado as funções g e h, que são crescentes no intervalo (a, b), para motivar as definições acima, o conceito de concavidade não leva em conta o comportamento da própria função quanto ao crescimento. Isto é, no que diz respeito à concavidade o que interessa é o crescimento ou decrescimento da derivada, f', e não da função f.

De fato, se f é duas vezes derivável no intervalo (a,b) com $f'(x) \neq 0$ e $x_0 \in$ e (a, b) é um ponto crítico de f, podemos usar os resultados da seção anterior (veja Figura 3.10) para concluir que:

(i) *se x_0 é ponto de mínimo local de f, então o gráfico de f em* (a, b) *é côncavo para cima*,

(ii) *se x_0 é ponto de máximo local de f, então o gráfico de f em* (a, b) *é* *côncavo para baixo*.

Ou seja, nos dois casos, f muda de comportamento quanto ao crescimento mas, no primeiro caso, sua derivada f' é crescente em (a, b) e, no segundo caso, f' é decrescente em (a, b).

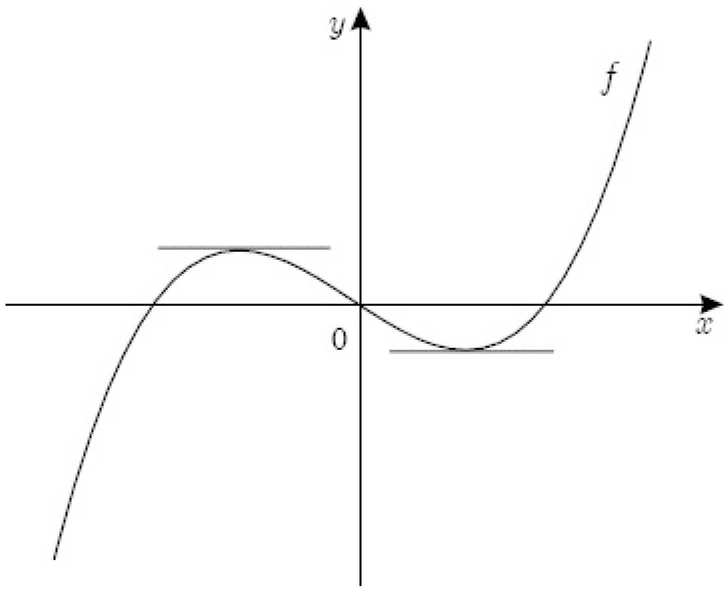


Figura 3.10

Por exemplo, temos que o gráfico de $f(x) = x^2$ é côncavo para cima em qualquer intervalo. De fato, sua derivada, $f'(x) = 2x$, é crescente em $\mathbb{R}$. Já o gráfico de

$$f(x) = x^3 - x$$

é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e é côncavo para cima no intervalo $(0, \infty)$, pois sua derivada, $f'(x) = 3x^2 - 1$, é decrescente no primeiro intervalo e é crescente no segundo.

Voltando agora aos exemplos da Figura 3.7, vemos que as funções u *e* v têm um comportamento misto no que diz respeito à concavidade: o gráfico de u é côncavo para cima no intervalo $(a, 0)$ e côncavo para baixo em (0, b), enquanto que o gráfico de v é côncavo para baixo no intervalo $(a, 0)$ e côncavo para cima em $(0, b)$. Em qualquer dos casos, podemos dizer que $c = 0$ é um ponto de mudança de concavidade. Descrevemos essa propriedade dizendo que $c = 0$ é um ponto de inflexão para a função.

Mais precisamente, usamos as condições sobre a derivada para definirmos ponto de inflexão:

Definição: Dizemos que c é um *ponto de inflexão* para f se existe um intervalo (a, b)

contendo c tal que f é contínua em (a, b) e derivável nos intervalos (a, c) e (c, b) e uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) f' é crescente em (a, c) e é decrescente em (c, b),

(ii) f' é decrescente em (a, c) e é crescente em (c, b).

Em outras palavras, pontos de inflexão para f são os pontos do domínio de f que detectam a ocorrência de mudanças no comportamento quanto ao crescimento da função derivada f' ou, equivalentemente, pontos que detectam mudanças de concavidade no gráfico de f.

Exemplos

7. $c = 0$ é um ponto de inflexão para $f(x) = x^3$. De fato, sabemos que $f'(x) = 3x^2$ e, portanto, f' é decrescente em $(-\infty, 0)$ e é crescente em $(0, \infty)$. Em particular, o gráfico de x^3 é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$. Observe que $x = 0$ é um ponto crítico de $f(x) = x^3$ que não é um ponto de extremo local. Como veremos mais adiante, pontos críticos de uma função que não são pontos de extremo local são candidatos a ponto de inflexão para a função.

8. Como vimos acima, a derivada da função $f(x) = x^3 - x$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e é crescente em $(0, \infty)$ e, portanto, $c = 0$ é 0 único ponto de inflexão para f.

9. Na Figura 3.11 são dados os gráficos de uma função f e de sua derivada. Podemos ver, a partir dos dois gráficos, que c_1 e c_2 são os pontos de inflexão para f.

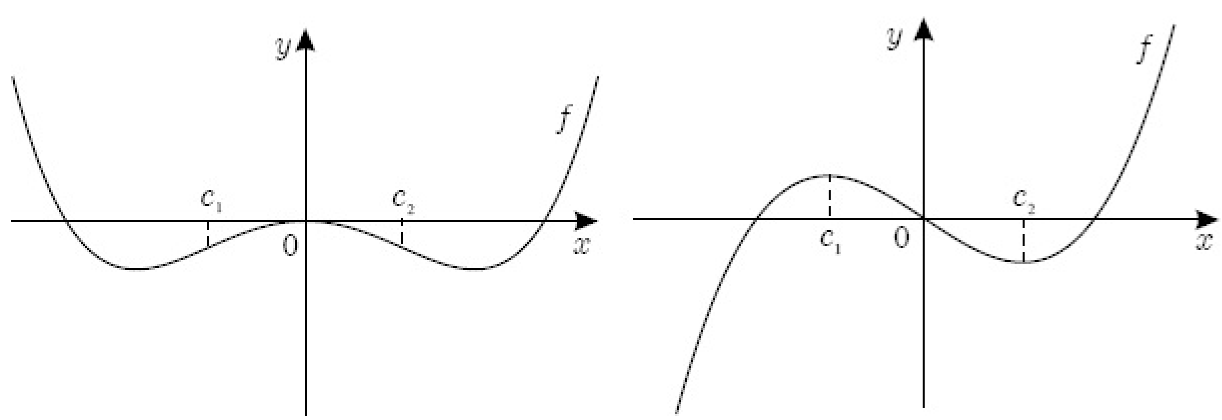


Figura 3.11

Neste último exemplo podemos ver pelo gráfico que os pontos de inílexão para a função f são pontos de extremo local para a sua derivada f'.

Na verdade, essa é uma propriedade dos pontos de inflexão de uma função cuja derivada seja uma função contínua. De fato, se c é um ponto de inflexão para f, temos, pela definição, que uma das duas condições (i) ou (ii) da definição deve ser satisfeita;

• a condição (i) e a continuidade de f' em c garantem que f' é crescente em $(a, c]$ e é decrescente em $[c, b)$, isto é, c é um ponto de máximo local de f'.

• a condição (ii) e a continuidade de f' em c garantem que f' é decrescente em $(a, c]$ e é crescente em $[c, b)$, isto é, c é um ponto de mínimo local de f'.

Em geral, se c é um ponto de inflexão para f e existe $f'(c)$, como c é um ponto onde a derivada f' muda de comportamento quanto ao crescimento, temos que c é um ponto crítico de f'.

Por outro lado, exemplos como $f(x) = |x^2 - 1|$ nos mostram que pontos onde f não é derivável também podem ser pontos de inflexão para f. De fato, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ são pontos de inflexão para $f(x) = |x^2 - 1|$: temos que f é derivável em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ com

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1, \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1, \end{cases}$$

e, portanto, f' é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1,\infty)$ e é decrescente em $(-1, 1)$. Nesse caso, os pontos de inflexão são os pontos críticos da própria f.

Em resumo, podemos concluir que

os candidatos a ponto de inflexão de uma função f são os pontos críticos de f e os pontos críticos de sua derivada f'.

Em particular, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.10*: *Se c é um ponto de inflexão de uma função f, então $f''(c) = 0$ ou f não possui segunda derivada em c.*

Ou seja, podemos dizer que os pontos de inflexão para uma função f estão entre as soluções da equação $f''(x) = 0$ e os pontos para os quais não existe a segunda derivada. Em particular, pontos nos quais f não é derivável (e portanto não é duas vezes derivável) são, automaticamente, candidatos a pontos de inflexão para f.

Vejamos quando, e como, podemos usar os recursos que já desenvolvemos para decidir se um dado candidato é de fato um ponto de inflexão para uma função f.

Primeiro observamos que se f'' é positiva num intervalo, então, pelo Teorema 3.2 aplicado à derivada f', temos que f' é crescente no intervalo, assim como se f'' é negativa num intervalo, então f' é decrescente nesse intervalo.

Seja (a, b) um intervalo contido no domínio de f e suponhamos que $c \in (a, b)$ é o único candidato a ponto de inflexão para f nesse intervalo. Temos então que f é duas vezes derivável em $(a, b) - \{c\}$ com $f''(x) \neq 0$ para qualquer $x \in (a, b) - \{c\}$.

Em particular, f' *não possui pontos críticos nos dois intervalos* (a, c) *e* (c, b), sendo, portanto, derivável nos dois intervalos, isto é, podemos falar de $f''(x)$ para qualquer $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Logo podemos usar o Teorema 3.5 aplicado a f' para obter o seguinte critério:

Critério da segunda derivada para pontos de inflexão: *Se* (a, b) *está contido no domínio de uma função f e c é o único candidato a ponto de inflexão para f em* (a, b), *então uma das situações abaixo ocorre:*

(i) f'' *é positiva em* (a, c) *e* f'' *é negativa em* (c, b). *Nesse caso* f' é *crescente em* (a, c) e *decrescente em* (c, b) *e, portanto*, c é *ponto de inflexão. Em particular, o gráfico de f é côncavo para cima em* (a, c) *e côncavo para baixo em* (c, b).

(ii) f'' *é negativa em* (a, c) *e* f'' *é positiva em* (c, b). *Nesse caso f* é *decrescente em* (a, c) *e crescente em* (c, b) *e, portanto, c é ponto de inflexão. Em particular, o gráfico de f é côncavo para baixo em* (a, c) *e côncavo para cima em* (c, b).

(iii) f'' *é positiva em* $(a, b) - \{c\}$. *Nesse caso f é crescente em* (a, c) *e em* (c, b) *e, portanto, c não é ponto de inflexão. O gráfico de f é côncavo para cima nos dois intervalos* (a, c) *e* (c, b).

(iv) f'' *é negativa em* $(a, b) - \{c\}$. *Nesse caso f é decrescente em* (a, c) *e em* (c, b) *e, portanto, c não é ponto de inflexão. O gráfico de f é côncavo para baixo nos dois intervalos* (a, c) *e* (c, b).

Vejamos o exemplo $f(x) = x^3 - |x|$. Já vimos que f só não é derivável em $x = 0$ *e* que

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x > 0, \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Em particular, f é duas vezes derivável em $x \neq 0$ com

$$f''(x) = 6x \quad \text{se } x \neq 0.$$

Logo $x = 0$ é o único candidato a ponto de inflexão. Como $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e $f''(x) > 0$ para $x > 0$, podemos concluir que o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e é côncavo para cima em $(0, \infty)$, como já esboçamos na Figura 3.5.

Como já observamos antes, se a derivada f' é contínua num ponto de inflexão, então esse ponto é um ponto de extremo local para f'. Sabemos também que pontos de extremo local nem sempre indicam mudanças de comportamento quanto ao crescimento, e portanto não podemos esperar que qualquer ponto de extremo local para a derivada seja um ponto de inflexão para a função.

Por outro lado, podemos aplicar o Teorema 3.6 à derivada f', para concluir que pontos de extremo local para f' que sejam pontos críticos isolados de f' são pontos de inflexão para f, isto é,

Teorema 3.11: *Se f' é contínua e um ponto de extremo local para f', x_0, é ponto crítico isolado de f', então x_0 é ponto de inflexão para f.*

Podemos então resumir a relação entre pontos de extremo local para a derivada e pontos de inflexão para a função:

Teorema 3.12: *Se f' é contínua e possui um número finito de pontos críticos, então os pontos de inflexão para f são os pontos de extremo local para f'.*

O critério da segunda derivada para pontos de inflexão que enunciamos acima foi obtido usando-se o critério da primeira derivada aplicado à função derivada f'. Analogamente, nos casos em que f é três vezes derivável, e portanto f' é duas vezes derivável, podemos aplicar o critério da segunda derivada à função derivada f' para estudar a concavidade do gráfico de f. Mais precisamente, temos o teorema

Teorema 3.13: *Se $f''(c) = 0$ e $f'''(c) \neq 0$, então c é ponto de inflexão para f,*

que permite identificar pontos de inflexão a partir de condições sobre a derivada terceira, e o seguinte critério, que permite o estudo da concavidade do gráfico de uma função três vezes diferenciável:

Critério da terceira derivada para pontos de inflexão*: *Seja f uma função duas vezes derivável em (a, b) e $c \in (a, b)$. Se c é o único ponto crítico de f' nesse intervalo e existe $f'''(c)$, então:*

(i) *se $f'''(c) > 0$, então o gráfico f é côncavo para baix$_0$ em $(a, c]$ e é côncavo para cima em $[c, b)$;*

(ii) *se $f'''(c) < 0$, então o gráfico f é côncavo para cima em $(a, c]$ e é côncavo para baix$_0$ em $[c,b)$.*

Exemplo

10. Seja $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Para determinar os candidatos a ponto de inflexão, resolvemos a equação
$f''(x) = 0$: temos que

$$f(x) = 4x^3 - 12x \text{ e } f''(x) = 12x^2 - 12$$

e, portanto os candidatos a ponto de inflexão são $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. Como $f'''(x) = 24x$, temos que $f'''(-1) < 0$ e $f'''(1) > 0$. Pelo critério da terceira derivada para pontos de inflexão, podemos concluir que $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$ são pontos de inflexão para f, sendo que o gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$ e é côncavo para baixo no intervalo $[-1, 1]$.

É importante destacar que se $f''(c) = 0$ e existe $f'''(c)$, mas $f'''(c) = 0$, nada podemos afirmar, em geral, sobre o comportamento de f quanto à concavidade. De fato, os três exemplos que damos abaixo nos mostram que, nessas condições, diversos comportamentos podem ocorrer:

(a) $f(x) = x^4$. Nesse caso, $f''(0) = 0 = f'''(0)$ e $c = 0$ é ponto de mínimo local de f, sendo que o gráfico de f é côncavo para cima.

(b) $f(x) = -x^4$. Nesse caso, $f''(0) = 0 = f''(0)$ e $c = 0$ é ponto de máximo local de f, sendo que o gráfico de f é côncavo para baixo.

(c) $f(x) = x^5$. Nesse caso, $f''(0) = 0 = f'''(0)$ e $c = 0$ é ponto de inflexão para f, sendo que o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty, 0]$ e é côncavo para cima em $[0, \infty)$.

Para concluir, vamos mostrar, num exemplo, como podemos fazer uma análise do gráfico de uma função duas vezes diferenciável f a partir do gráfico de f'.

Seja f a função cuja derivada, f', é a função dada pelo gráfico na Figura 3.12.

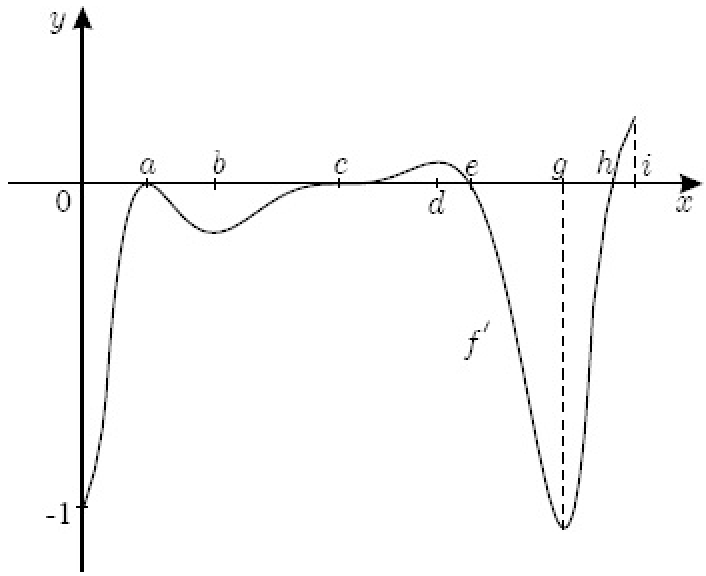


Figura 3.12

Pelo gráfico de f', podemos concluir que f' é derivável e os pontos críticos de f são a, c, e e h, pois esses são os pontos onde f' se anula. Pelo critério da primeira derivada, podemos afirmar que:
- f é crescente nos intervalos (c, e) e (h, i), pois f' é positiva nesses intervalos;
- f é decrescente no intervalo (e, h), pois f' é negativa nesse intervalo;
- f é decrescente no intervalo $(0, c)$, pois f' é negativa em $(0, c) - \{a\}$;
- c e h são pontos de mínimo local de f e o ponto e é um ponto de máximo local de f;
- o ponto crítico a não é ponto de extremo local, pois f é decrescente no intervalo $(0, c)$.

Com relação à concavidade, vemos que os candidatos a ponto de inflexão são a, b, c, d e g, que são os pontos críticos de f', isto é, pontos nos quais a reta tangente ao gráfico de f' é horizontal (pontos onde f'' se anula). Mas, pelo Teorema 3.12, apenas a, b, d e g são pontos de inflexão, pois são os pontos de extremo local de f' (de fato, já havíamos concluído que c é um ponto de mínimo local). Podemos ver também que:
- o gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(0, a)$, (b, d) e (g, i) pois f' é crescente em cada um desses intervalos.
- o gráfico de f é côncavo para baixo nos intervalos (a, b) e (d, g).

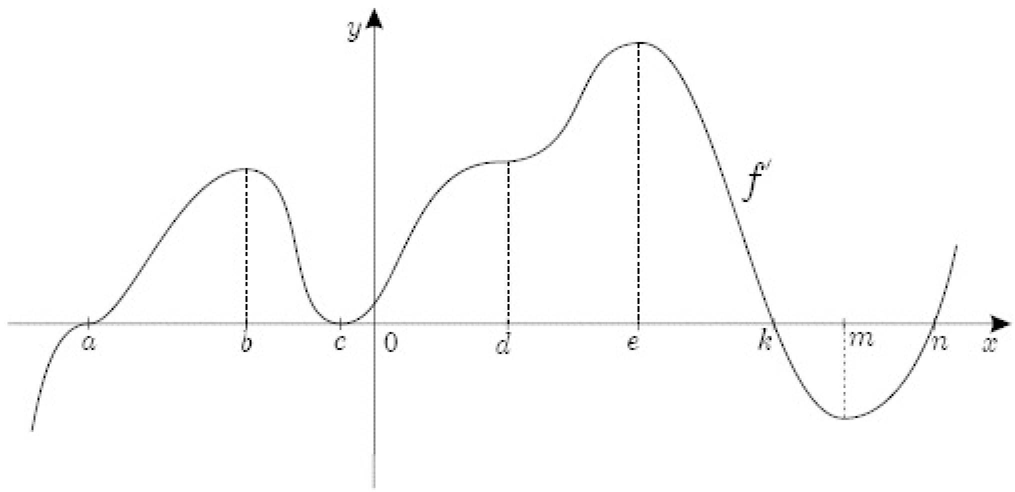
Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Confira os esboços dos gráficos das funções potência (x^r, $r \in \mathbb{R}$), das exponenciais e das funções trigonométricas, que foram apresentados no Capítulo 6, usando os recursos dados pelas derivadas, isto é, determine os intervalos de crescimento, de decrescimento e analise a concavidade dos gráficos.

2. Faça uma análise da concavidade das funções f do último exercício 13 da seção 3, determinando os pontos de inflexão, caso existam, e refaça os gráficos mais detalhadamente.

3. Na figura abaixo é dado o gráfico da derivada, f', de uma função f.



   (a) Quais são os candidatos a pontos de extremo local de f?

   (b) Quais são os pontos de mínimo local de f?

   (c) Quais são os pontos de máximo local de f?

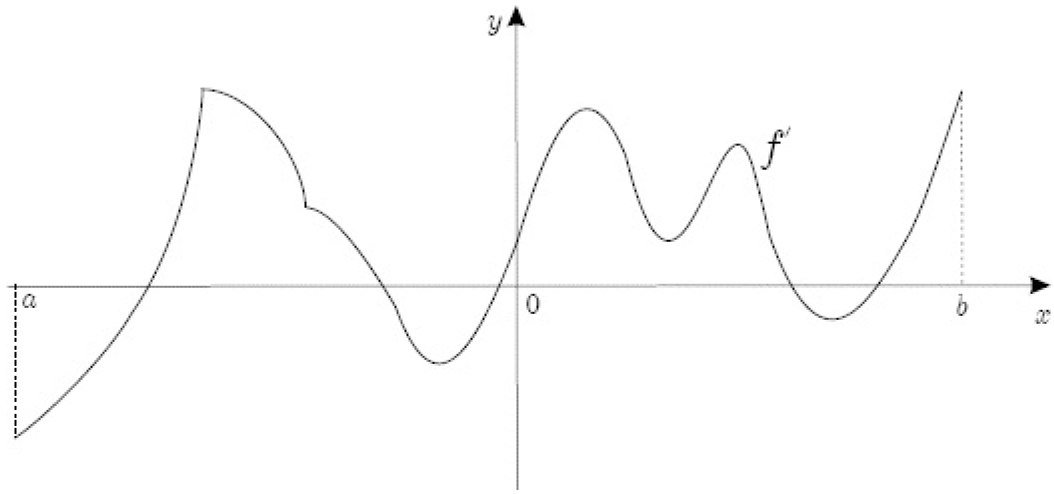
   (d) Quais são os pontos de inflexão de f?

4. Seja $f(x) = \frac{x^5}{10} - x^4 + 3x^3$.

   (a) $x = 0$ é ponto de inflexão de f?

   (b) $x = 3$ é ponto de inflexão de f?

5. Na figura abaixo, é dado o gráfico da derivada de uma função f.



Marque no eixo-x, usando letras para designá-los, os pontos que são candidatos a pontos de extremo local de f e os pontos que são candidatos a pontos de inflexão do gráfico de f.

(a) Quais são os candidatos a pontos de extremo local de f?

(b) Quais são os candidatos a pontos de inflexão do gráfico de f?

(c) Quais são pontos de mínimo local de f?

(d) Quais são pontos de máximo local de f?

(e) Quais são pontos de inflexão do gráfico de f?

(f) Quais são os intervalos onde f é crescente?

(g) Quais são os intervalos onde f é decrescente?

6. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $f''(a) = 0$, então $x = a$ é ponto de inflexão de f.

(b) Se f é três vezes derivável e $x = a$ é ponto de inflexão de f, então $f'''(a) \neq 0$.

(c) Se f é um polinômio de grau 2, então f não possui um ponto de inflexão.

(d) Se $f''(a) > 0$, então $f'(a) > 0$.

7. Sejam a, b, c, d e e números reais tais que

$$a < b < c < d < e$$

e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável para a qual são válidas as seguintes propriedades:

(i) f' é contínua.
(ii) as soluções da equação $f'(x) = 0$ são os números a, c e e.
(iii) $x = c$ é o único ponto de mínimo local de f'.
(iv) os pontos de máximo local de f' são b e d.

Utilizando estas propriedades de f, responda aos itens abaixo:

(a) Quais são os pontos de máximo local de f?

(b) Quais são os pontos de mínimo local de f?

(c) Quais são os pontos de inflexão do gráfico de f?

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua tal que:

(i) f' é contínua.

(ii) os pontos críticos de f são $x = -1$ e $x = 0$.

(iii) $x = -1$ é ponto de máximo local e $x = 0$ é ponto de mínimo local de f.

(iv) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

O gráfico de f possui pontos de inflexão? No mínimo quantos?

9. Seja $g(x) = f(x^2)$, onde f é duas vezes derivável para todo $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.

(a) Determine, se houver, os pontos de mínimo e máximo local de g.

(b) Faça o estudo da concavidade de g, determinando os intervalos (se houver) em que o gráfico da g é côncavo para cima e os intervalos (se houver) em que o gráfico da g é côncavo para baixo.

10. Faça um esboço do gráfico de cada função f abaixo. Determine os pontos onde ocorrem máximos e mínimos locais (caso existam), estudando o crescimento da função, isto é, determinando os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente. Faça uma análise da concavidade, determinando os pontos de inflexão, caso

existam. Calcule os limites assintóticos.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^4$

(c) $f(x) = x^2\sqrt{x^2+1}$

(d) $f(x) = e^{x^2} - 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$

(f) $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$

11. Faça um esboço do gráfico de cada função f abaixo. Determine os pontos onde ocorrem máximos e mínimos locais (caso existam), estudando o crescimento da função, isto é, determinando os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente. Faça uma análise da concavidade, determinando os pontos de inflexão, caso existam. Calcule os limites assintóticos.

(a) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 3$

(b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{3x^4}{4} - 1$

(d) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

(e) $f(x) = xe^x$

(f) $f(x) = 1 - xe^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$

(g) $f(x) = x^3 e^{-x}$

(h) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(\cos x)$.

(i) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(j) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x^2}{x^2}$

(k) $f(x) = [1 - \ln(x)]^2$

4. Derivada e problemas de otimização

Uma das importantes aplicações do conceito de derivada ocorre em problemas de otimização, isto é, problemas para os quais a solução é encontrar pontos do domínio de uma função nos quais a função assume o maior valor possível ou, analogamente, o menor valor possível.

Por exemplo, se $f(x) = x^2 + \frac{80}{x}$, para $x > 0$, em que número (ou números) x_0 de seu domínio f assume seu valor mínimo e qual é esse valor? Em outras palavras, para que números $x_0 > 0$ (se existem) tem-se que

$$f(x) \geq f(x_0)$$

para qualquer $x > 0$ e qual é o valor $f(x_0)$?

Vejamos um problema prático para o qual a modelagem matemática resulta num problema de otimização:

Um fabricante de caixas d'água pretende construir caixas retangulares sem tampa e com base quadrada. Problema: quais devem ser as dimensões de uma caixa que tenha um determinado volume, V m³, e seja tal que a quantidade de material necessário para sua construção seja a menor possível?

Se denotamos por x o comprimento do lado da base da caixa e por b o comprimento de sua altura, sabemos que $x > 0$, $b > 0$ e

$$V = bx^2,$$

que nos diz que o comprimento b está determinado pelo comprimento x do lado da base e pelo volume V desejado, isto é,

$$b = \frac{V}{x^2} \text{ com } x > 0.$$

Por outro lado, temos que a quantidade necessária de material para a construção da caixa é dada pela área da superfície da caixa, que é

$$A = x^2 + 4bx,$$

já que x^2 *é a* área da base e bx é a área de cada uma das faces verticais. Como já temos que $b = \frac{V}{x^2}$, podemos obter a área como função do comprimento do lado da base, x:

$$A(x) = x^2 + \frac{4V}{x}, \text{ para } x > 0.$$

Vemos, então, que para encontrar as dimensões da caixa para a qual a quantidade de material necessário é a menor possível devemos encontrar (se o problema tiver solução) um número $x_0 > 0$, para o qual $A(x_0)$ é o menor valor assumido pela função $A(x)$. Em particular, vemos que se o volume desejado é 20 m³, o problema foi reduzido ao exemplo que demos antes. Voltaremos a esse problema após desenvolver recursos para resolvê-lo.

Comecemos por caracterizar as propriedades que queremos:

Definição: Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, e $x_0 \in D$ é tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D$, dizemos que x_0 é *ponto de mínimo global* (ou simplesmente *ponto de mínimo*) de f e que $f(x_0)$ é o *valor mínimo* (ou simplesmente o *mínimo*) de f.

Analogamente, definimos:

Definição: Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, e $x_0 \in D$ é tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D$, dizemos que x_0 é *ponto de máximo global* (ou simplesmente *ponto de máximo*) de f e que $f(x_0)$ é o *valor máximo* (ou simplesmente o *máximo*) de f.

Exemplos

1. Se $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, então $x_0 = 0$ é o único ponto de mínimo de f, sendo 0 seu valor mínimo. Por outro lado, $f(x) = x^2$ não possui valor máximo.
2. Se $f(x) = \cos x$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, então $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$ são os pontos de mínimo de f, com valor mínimo $0 = f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ e $x_3 = 0$ e $x_3 = 0$ é único ponto de máximo com valor máximo $f(0) = 1$.
3. Se $f(x) = x^3$ para $x \in \mathbb{R}$, então f não possui pontos de mínimo e nem de máximo. Por outro lado, se $g(x) = x^3$ para $x \in [-1, 2]$, então $x_1 = -1$ é ponto de mínimo de g e $x_2 = 2$ é ponto de máximo de g, com valor mínimo $g(-1) = -1$ e valor máximo $g(2) = 8$.

Em geral, se Y é um subconjunto do domínio de uma função f e $x_0 \in Y$ é ponto de máximo (ou, respectivamente, ponto de mínimo) da função $g : Y \to \mathbb{R}$, defmida por $g(x) = f(x)$ para $x \in Y$, dizemos que x_0 é ponto de máximo (respectivamente, de mínimo) de f em Y. Assim, por exemplo, podemos dizer que $x_1 = -1$ é ponto de mínimo de $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1, 2]$.

Pontos de máximo global ou pontos de mínimo global são denominados, genericamente, pontos de extremo global (ou simplesmente pontos de extremo) de f. Os valores máximo e mínimo são chamados de extremos de f.

Nosso objetivo agora é apresentar as condições nas quais podemos usar resultados que nos permitam calcular pontos de máximo ou de mínimo globais de uma função.

A primeira observação que fazemos é que se (a, b) é um intervalo contido no domínio de uma função f e $x_0 \in (a, b)$ é um ponto de extremo (global) de f, então x_0 é, automaticamente, ponto de *extremo local* de f. Esse fato nos permite caracterizar os candidatos a ponto de extremo (global) de uma função num intervalo, isto é,

se I é um intervalo e f: $I \to \mathbb{R}$ é uma função, então os candidatos a pontos de extremo global de f (se houver) são os pontos críticos de f e os extremos do intervalo que pertençam a I.

Com esse resultado, podemos resolver o problema prático que enunciamos acima: já chegamos à conclusão de que devemos buscar pontos de mínimo global

$$A(x) = x^2 + \frac{4V}{x}, \text{ para } x > 0.$$

Como o domínio de $A(x)$ é o intervalo $(0, \infty)$ e a função é derivável, temos que os pontos de mínimo (se houver) devem estar dentre os pontos críticos de $A(x)$, isto é, dentre as soluções da equação $A'(x) = 0$. Derivando a função obtemos

$$A'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} \text{ para } x > 0$$

e, portanto,

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 4V \text{ e } x > 0,$$

o que nos dá a solução $\sqrt[3]{2V}$. Para decidir se $\sqrt[3]{2V}$ é ponto de mínimo global, podemos usar o critério da segunda derivada: temos que

$$A''(x) = 2 + \frac{8V}{x^3} \text{ para } x > 0$$

e, portanto, $A''(\sqrt[3]{2V}) > 0$. Em particular $x = \sqrt[3]{2V}$ é ponto de mínimo local de $A(x)$. Por outro lado, como $x = \sqrt[3]{2V}$ é o único ponto crítico de $A(x)$ e seu domínio é 0 intervalo $(0, \infty)$, podemos concluir que A é decrescente em $(0, \sqrt[3]{2V}]$ e é crescente em $[\sqrt[3]{2V}\ \infty)$, ou seja, $\sqrt[3]{2V}$ é, de fato, ponto de mínimo global. Assim, as medidas de comprimento da base e da altura devem ser, respectivamente, $\sqrt[3]{2V}\, m$ e $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\, m$.

Observe que, para resolver 0 problema acima, usamos 0 fato de que $x = \sqrt[3]{2V}$ era 0 único ponto crítico da função $A(x)$ e que seu domínio era um intervalo. Isto é, só a informação de que $x = \sqrt[3]{2V}$ é o único ponto de mínimo local não é suficiente para garantir que a função $A(x)$ possui um ponto de mínimo global. De fato, $f(x) = x^3 - x$, para $x \in \mathbb{R}$ é um exemplo de uma função que possui um único ponto de mínimo local $(x = \frac{1}{\sqrt{3}})$, mas não possui pontos de mínimo global, já que seu conjunto imagem contém todos os números reais.

Por outro lado, se sabemos que uma função possui pontos de máximo e/ou de mínimo globais, basta avaliar a função nos pontos que são candidatos a ponto de extremo global e compararmos os valores obtidos. Isso claramente é possível se há apenas um número finito de candidatos a ponto de extremo.

O teorema que enunciamos a seguir fornece condições com as quais podemos garantir a existência de pontos de extremo global.

Teorema 4.1: *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f possui pontos de máximo e de mínimo globais. Em particular, f possui um valor mínimo e um valor máximo.*

Vejamos, com alguns exemplos, como podemos usar esse resultado:

Exemplos

4. Considere a função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1$. Qual o valor máximo e o valor mínimo de f no intervalo $[-1, 1]$?

Como estamos nas condições do Teorema 4.1, sabemos que f possui um valor mínimo e um valor máximo no intervalo $[-1, 1]$. Logo, basta determinar os pontos desse intervalo que são candidatos a pontos de extremo global e comparar os valores que f assume nesses pontos: como já vimos, os candidatos são os extremos do intervalo, -1 e 1, e os pontos críticos de f que pertençam ao intervalo $(-1, 1)$. Derivando f, obtemos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x$$

e, portanto, os pontos críticos de f são $x_0 = 0$ e $x_1 = 3$. Como $3 \notin [-1, 1]$ e queremos encontrar os valores extremos de f nesse intervalo, os candidatos são, apenas, os números -1, 0 e 1. Como

$$f(-1) = -10,$$
$$f(0) = 1 \text{ e}$$
$$f(1) = -6,$$

podemos concluir que o valor máximo de f no intervalo $[-1, 1]$ é 1 e que seu valor mínimo nesse mesmo intervalo é -10. Em particular, $x = -1$ é ponto de mínimo *e* $x = 0$ *é* ponto de máximo de f no intervalo $[-1,1]$. Observe que se tivéssemos incluído $x_1 = 3$ pelo fato de 3 ser ponto crítico de f sem nos preocuparmos em conferir se se tratava de um número do intervalo $[-1,1]$, teríamos chegado a um resultado errado, já que $f(3) = -26 < -10$.

5. Seja $g(x) = x^3 - |x|$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é o conjunto imagem de f?

Como g é contínua e seu domínio é um intervalo, sabemos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que sua imagem é também um intervalo.

Por outro lado, como $[-1, 1]$ é um intervalo fechado e limitado e, portanto, nas condições da hipótese do Teorema 4.1, sabemos que g possui um valor mínimo e um valor máximo, isto é, podemos afirmar que a imagem de g é o intervalo $[g(x_m), g(x_M)]$, onde x_m e x_M são, respectivamente, um ponto de mínimo e um ponto de máximo de g.

Já vimos antes que os pontos críticos de $f(x) = x^3 - |x|$ são $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Como esses dois números pertencem ao intervalo $(-1, 1)$, são também pontos críticos de g. Assim, os candidatos a pontos de extremo global de g são os extremos do intervalo, -1 e 1, e os pontos críticos 0 e $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Avaliando a função g nesses números, obtemos que 0 e 1 são pontos de máximo global e que -1 é ponto de mínimo global de g. Logo, o conjunto imagem de g é o intervalo

$$[g(-1), g(0)] = [-2,0].$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Determine os valores máximos e mínimos (se existirem) das seguintes funções nos correspondentes intervalos:

   (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in [-1, 1]$.

   (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$.

   (c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

   (d) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

   (e) $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x \in (-\infty, 1]$.

2. Seja $f(x) = 1 - xe^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$.

   (a) f possui valor mínimo? Qual?

   (b) f possui valor máximo? Qual?

3. Considere a função $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$. Encontre o valor máximo e valor mínimo de f no intervalo $[0, 2]$.

4. Seja $f(x) = \dfrac{1 + \ln x^2}{x^2}$.

(a) f possui valor mínimo? Qual?

(b) f possui valor máximo? Qual?

5. Seja $f(x) = e^{3x^4+4x^3-12x^2+5}$. Calcule o valor máximo e o valor mínimo de f no intervalo $[-1, 2]$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defmida por $f(x) = xe^x$.

   (a) Esta função possui valor máximo? Se existir, quais são os pontos de máximo de f?

   (b) Esta função possui valor mínimo? Se existir, quais são os pontos de mínimo de f?

7. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

   (a) f possui valor mínimo? Qual?

   (b) f possui valor máximo? Qual?

8. Ache um número no intervalo $[\frac{1}{5}, 3]$ tal que a soma do número com o seu recíproco seja:

   (a) a menor possível.

   (b) a maior possível.

9. Encontre dois números não negativos ($x \geq 0$ e $y \geq 0$) cuja soma seja igual a 1, de tal forma que a soma do quadrado do primeiro mais o quadrado do segundo assuma:

   (a) o maior valor possível.

   (b) o menor valor possível.

10. Encontre as dimensões do retângulo de perímetro 100 cuja área seja a maior possível.

11. Quadrados de tamanhos iguais são cortados em cada canto de um pedaço retangular de papelão medindo 4cm×7cm. Uma caixa sem tampa é construída virando-se os lados para cima. Determine o

tamanho do lado dos quadrados de tal forma que o volume dessa caixa seja máximo.

12. Deseja-se fabricar latas cilíndricas sem tampa com 15 cm^3 de volume. Encontre o raio e a altura da lata que utilize a quantidade mínima de material necessária para esse volume. Resolva o mesmo problema para a lata com tampa.

13. Uma pista de atletismo de 800 m é formada por dois semicírculos e dois segmentos de reta paralelos. Encontre o comprimento dos trechos retos da pista de tal forma que a área do retângulo formado por eles seja máxima.

14. Determine a largura l e o comprimento c de um retângulo inscrito num círculo de raio 3 de tal forma que seu perímetro seja máximo.

15. Determine a altura a e o raio r de um cilindro inscrito numa esfera de raio 2 de tal forma que seu volume seja máximo.

16. Determine a altura a e o raio r de um cilindro inscrito num cone reto de altura 3 e de raio 2 de tal forma que seu volume seja máximo.

5. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(7x^2+3x)(6x+\frac{8}{x})}{(9x-x^2-5x^3)}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)(x+3)(x-5)}{(x+1)(x+9)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1000x^3-4x}{x-x^4}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{xe^{x^2}}{\ln(x+1)}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x^2-1)e^x}$

(f) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2}+\ln\frac{2x^3+x}{x^2+2})$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{x^2}}{\ln(x+1)}$

(h) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x})}{x^\pi}$

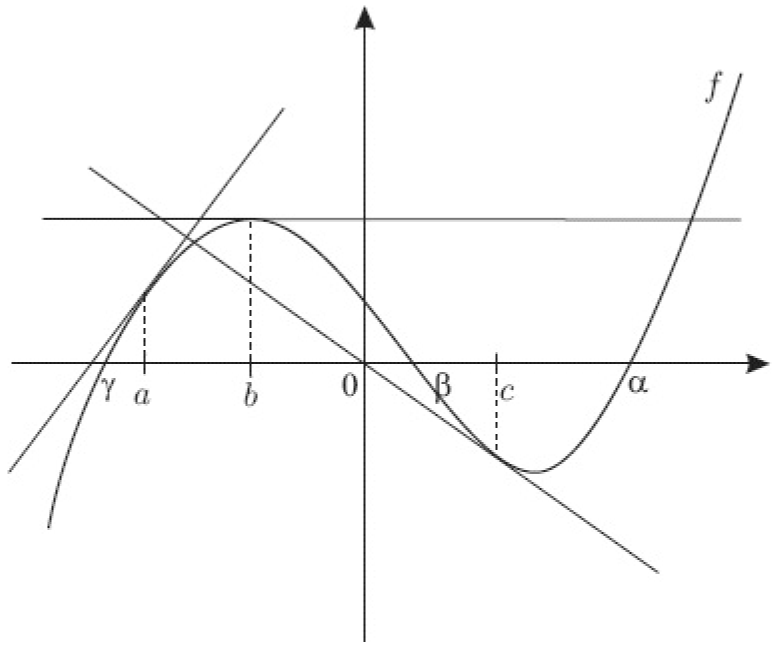
(i) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x \operatorname{sen} x}-\frac{1}{x \operatorname{tg} x})$

(j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x^2+x-2)}{\operatorname{sen}(8x-8)}$

(k) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{(x-1)^2}$

(l) $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sec t-1}{\ln(\cos t)}$

2. Na figura abaixo são dados o gráfico de uma função derivável, *f*, e três retas tangentes ao gráfico de *f*.



Em cada item abaixo, decida se a afirmação é falsa ou é verdadeira:

(a) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial $x_0 = c$, então $x_n \to \gamma$.

(b) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial $x_0 = b$, então x_n não converge.

(c) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial $x_0 = a$, então $x_n \to \gamma$.

(d) *Se* x_n, $n \geq 1$, é a sequência obtida pelo Método de Newton a partir da condição inicial $x_0 = 0$, então $x_n \to \beta$.

(e) $c = \frac{f(c)}{f'(c)}$

3. Sejam f e g deriváveis. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1$.

4. Calcule:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{x}$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{4^x}$.

(b) Para as sequências $a_n = 4^n$ e $b_n = n$, calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$.

5. Determine o valor de c para que a função

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x - \operatorname{sen} x} & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

seja contínua.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x + \operatorname{sen} x} & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determine o valor de c para que f seja contínua.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \frac{x^2+1}{2}}{x-1} & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{e^{3x^2-12}-1}{x \ln(2x^2-7)} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determine o valor de a e b para que f seja contínua.

8. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

(c) a equação $f(x) = 0$ tem seis soluções.

(d) $f'(x) > 0$ nos intervalos $(-1, 1)$ e $(3, 4)$.

(e) $f'(x) < 0$ nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(4, \infty)$.

(f) $f'(x) = 0$ se e somente se $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ ou $x = 4$.

Faça um esboço do gráfico de f.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que -4, 2 e 8 são seus pontos críticos. Encontre os pontos críticos de $g(x) = e^{f(3x-1)}$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que -4, -3 e 5 são seus pontos críticos. Encontre os pontos críticos de $g(x) = \ln f(x^2 + 4x)$.

11. Mostre que a função $f(x) = 4x^7 + 3x^3 + 9x$ é inversível. Calcule $(f^{-1})'(0)$.

12. Seja $f(x) = \frac{x+1}{e^{4x^2+x}}$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

13. Sejam a, b, c, d, e, f, g, h e i números reais tais que

$$a < b < c < d < e < f < g < h < i$$

e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável para a qual são válidas as seguintes propriedades:

(i) f' é contínua.

(ii) as soluções da equação $f'(x) = 0$ são os números a, c, e, g e i.

(iii) os pontos de mínimo local de f' são c, f e h.

(iv) os pontos de máximo local de f' são b, d e g.

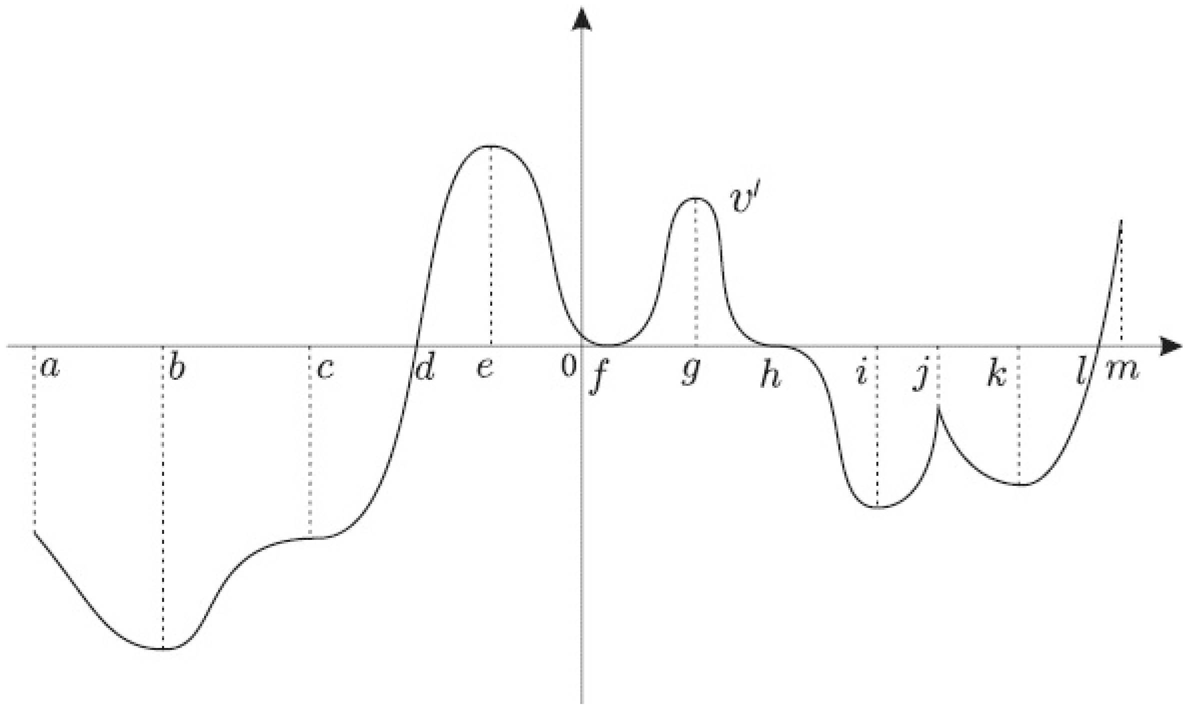
Utilizando estas propriedades de f, responda os itens abaixo:

(a) Quais são os pontos de máximo local de f?

(b) Quais são os pontos de mínimo local de f?

(c) Quais são os pontos de inflexão do gráfico de f?

14. Na figura abaixo, é dado o gráfico da derivada de uma função v.



(a) Quais são os candidatos a pontos de extremo local de v?

(b) Quais são os candidatos a pontos de inflexão do gráfico de v?

(c) Quais são pontos de mínimo local de v?

(d) Quais são pontos de máximo local de v?

(e) Quais são pontos de inflexão do gráfico de v?

(f) Quais são os intervalos onde v é crescente?

(g) Quais são os intervalos onde v é decrescente?

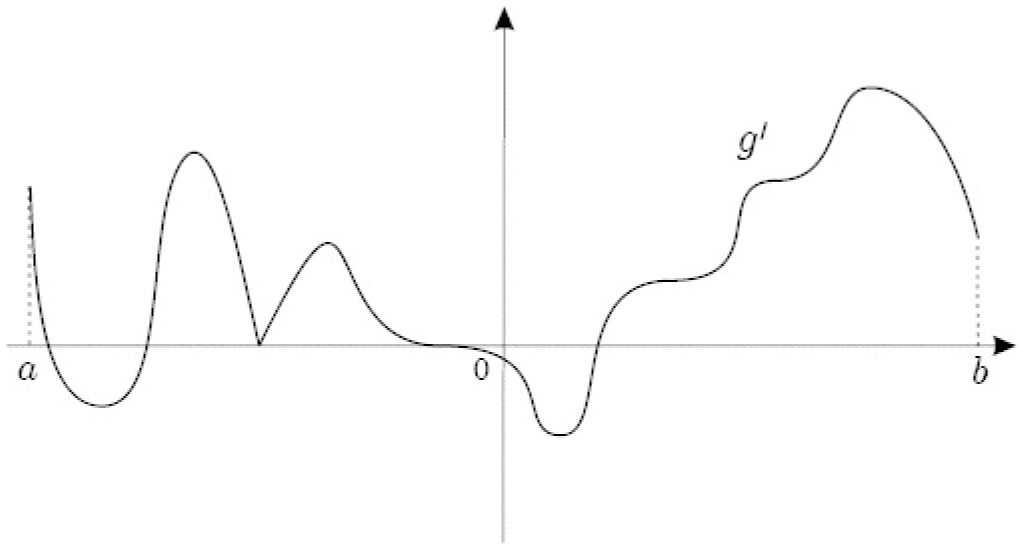
15. Para cada uma das funções abaixo, faça o estudo da concavidade e determine os pontos de inflexão.

(a) $f(x) = \frac{4x^2-2x}{x-4}$

(b) $f(x) = \ln(3x^4+5)$

(c) $f(x) = \frac{x^3+x^2}{e^x}$

16. Na figura abaixo é dado o gráfico da derivada de uma função g.



Marque no eixo-x, usando letras para designá-los, os pontos que são candidatos a pontos de extremo local de g e os pontos que são candidatos a pontos de inflexão do gráfico de g.

(a) Quais são os candidatos a pontos de extremo local de g?

(b) Quais são os candidatos a pontos de inflexão do gráfico de g?

(c) Quais são pontos de mínimo local de g?

(d) Quais são pontos de máximo local de g?

(e) Quais são pontos de inflexão do gráfico de g?

(f) Quais são os intervalos onde g é crescente?

(g) Quais são os intervalos onde g é decrescente?

17. Seja $f(x) = x^2 \ln |x|$.

(a) f possui pontos de mínimo local? Quais?

(b) f possui pontos de máximo local? Quais?

(c) Em quais subintervalos de seu domínio f é crescente?

(d) Em quais subintervalos de seu domínio f é decrescente?

18. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $x = a$ é ponto de inflexão de f, então $f''(a) = 0$.

(b) Se $f''(a) = 0$, então $f'(a) = 0$.

19. Faça um esboço do gráfico de cada função f abaixo. Determine os pontos onde ocorrem máximos e mínimos locais (caso existam) estudando o crescimento da função, isto é, determinando os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente. Faça uma análise da concavidade, determinando os pontos de inflexão, caso existam. Calcule os limites assintóticos.

(a) $f(x) = x^5 - 80x + 1$

(b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3}$

(c) $f(x) = 4x^{\frac{7}{4}} - 16x^{\frac{3}{4}}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^4 - 24x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ 5x^3 - 15x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(f) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(g) $f(x) = 2x \ln \left|\frac{x}{2}\right|$

(h) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

(i) $f(x) = \begin{cases} \cos^2 x & \text{se } x \leq 0, \\ x^5 - x^2 + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

20. Seja $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2 + 1) & \text{se } x < 0, \\ e^{x^2} - 1 + \operatorname{sen} 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

(a) f possui pontos de mínimo local? Quais?

(b) f possui pontos de máximo local? Quais?

(c) Em quais subintervalos de seu domínio f é crescente?

(d) Em quais subintervalos de seu domínio f é decrescente?

21. Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

(a) f possui um valor mínimo? Qual?

(b) f possui um valor máximo? Qual?

22. Considere a função $f(x) = e^{x^2+1}$. Encontre o valor máximo e o valor mínimo (se existirem) de f no intervalo [1, 10].

23. Considere a função $f(x) = \ln |x^2 - 4x + 5|$. Encontre o valor máximo e valor mínimo de f (se existirem).

24. Considere $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{19}{12} & \text{se } x < 1, \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$ Determine os valores máximos e mínimos (se existirem) de f nos seguintes intervalos:

(a) $x \in [0, 2]$.

(b) $x \in (-1, 1]$. (b) $x \in (-1, 1]$.

(c) $x \in \mathbb{R}$.

25. Considere $f(x) = e^{x^3 - x^2}$. Determine os valores máximos e mínimos (se existirem) de f nos seguintes intervalos:

(a) $x \in [-1, 1]$.

(b) $x \in [-1, 1)$.

(c) $x \in (-1, 1)$.

(d) $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

26. Considere $f(x) = \begin{cases} e^x \cos x & \text{se } x < \pi, \\ e^{\pi + \operatorname{sen} x} - 2e^{\pi} & \text{se } x \geq \pi. \end{cases}$. Determine os valores máximos e mínimos (se existirem) de f nos seguintes intervalos:

(a) $x \in [-\pi, 2\pi]$.

(b) $x \in [-\pi, \pi]$.

(c) $x \in \mathbb{R}$.

Apêndice ao Capítulo

Nesta seção daremos a demonstração de alguns teoremas enunciados neste capítulo.

Seção 1

Teorema 1.1: *Seja f uma função derivável com f' contínua e c um número de seu domínio. Se x_n é uma sequência obtida pelo Método de Newton a partir de uma condição inicial x_0 e $x_n \to c$, então* $f(c) = 0$.

Demonstração: Como vimos acima, a sequência (x_n) é definida pela fórmula de recorrência $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Para cada $n \geq 1$ seja $y_n = x_{n+1}$, isto é, a lista ordenada infinita de números reais dados pela sequência (y_n) é obtida da lista de números da sequência (x_n) simplesmente eliminado o número x_1. Em particular, y_n também converge a c e, portanto, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Mas

$$x_n - y_n = x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

e, portanto,

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - y_n).$$

Como estamos assumindo que f' é contínua, então $f'(x_n) \to f'(c)$, donde

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = [\lim_{n\to\infty} f'(x_n)][\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)] = f'(c) \cdot 0 = 0.$$

Mas f é contínua em c, logo $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Seção 3

Teorema 3.1: *Se x_0 é um ponto de extremo local de uma função f derivável em x_0, então* $f'(x_0) = 0$.

Demonstração: Se f é derivável em x_0, temos, pela definição, que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O Teorema 4.9 do Capítulo 5 garante então que existem os limites laterais do quociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, e que esses limites devem ser iguais a f

$'(x_0)$. Vamos usar os limites laterais para provar o teorema. Suponhamos, primeiro, que x_0 é ponto de máximo local de f. Pela definição, sabemos que existem números c e d tais que se $x \in (c, d)$, então $f(x) \leq f(x_0)$, isto é,

$$\text{se } c < x < d, \text{ então } f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

Logo, se $c < x < x_0$, então

$$x - x_0 < 0 \text{ e } f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

donde $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, o que nos diz que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Por outro lado, se $x_0 < x < d$, então

$$x - x_0 > 0 \quad \text{e} \quad f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

donde $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ e, portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Isto é, obtivemos que $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ e portanto que $f'(x_0) = 0$. Agora, se x_0 é um ponto de mínimo local, a demonstração é análoga, usando o fato de que, nesse caso, se x está suficientemente próximo de x_0, então $f(x) - f(x_0) \geq 0$. □

Teorema 3.3 (Teorema do Valor Médio): *Se f é uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b), *então existe um número c* $\in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Primeiro vamos provar o teorema no caso em que $f(a) = f(b)$. Nesse caso, devemos provar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Para isso, observamos que se para qualquer $x \in (a, b)$ tem-se que $f(x) = f(a)$, então f é uma função constante em (a, b) e, portanto, podemos tomar para c qualquer número do intervalo, já que $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in (a, b)$. Logo, se esse não é o caso, seja $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \neq f(a)$. Pelo Teorema 4.1, como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, sabemos que f possui um valor máximo e um valor mínimo. Se $f(x_0) < f(a)$, seja $c \in [a, b]$ tal que $f(c)$ é o valor mínimo de f. Então, temos que,

$$f(c) \leq f(x_0) < f(a) = f(b)$$

e, portanto, $a \neq c \neq b$, isto é, $c \in (a, b)$, sendo assim um ponto de mínimo local de f. Pelo Teorema 1.2, como por hipótese f é derivável em c temos que $f'(c) = 0$. Se $f(x_0) > f(a)$, tomamos c tal que $f(c)$ é o valor máximo de f. Nesse caso, de maneira análoga, concluímos que c é ponto de máximo local de f e, portanto, $f'(c) = 0$. Para provar o caso geral, consideramos a função h definida por

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos que h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Mais ainda, $h(a) = f(a) = h(b)$ e, portanto, usando o que já provamos para a função h, podemos concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Mas

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo $h'(c) = 0$ é o mesmo que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.. □

Teorema 3.2: *Seja f uma função derivável num intervalo I, então:*
(i) *se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I.*
(ii) *se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I.*

Demonstração: Provemos (i); a demonstração de (ii) é totalmente análoga. Suponhamos, por absurdo, que $f'(x) > 0$ para todo $x \in$ I e que f não é crescente. Então existem números *a e b* pertencentes ao intervalo I tais que $a < b$ e $f(a) \geq f(b)$, isto é,

$$b - a > 0 \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) \leq 0$$

e, portanto,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0.$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio, temos que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algum número c do intervalo I, donde $f'(c) \leq 0$, o que é uma contradição, já que, por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. □

Teorema 3.5: *Seja (a, b) um intervalo contido no domínio de uma função f. Se f não possui pontos críticos no intervalo (a, b), então uma das duas situações abaixo ocorre:*

(i) $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in (a, b)$. Nesse caso, *f é crescente em* (a, b);

(*ii*) $f'(x) < 0$ para qualquer $x \in (a, b)$. Nesse caso, *f é decrescente em* (a, b)

Demonstração: De fato, como f não possui pontos críticos no intervalo (a, b) podemos concluir que f é derivável em todos os pontos desse intervalo e que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Pelo teorema acima sabemos que:

(i) $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ ou

(ii) $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Logo, usando o Teorema 3.2, temos que f é crescente em (a, b) se (i) é válida ou f é decrescente em (a, b) se a condição (ii) é que é válida. □

Critério da primeira derivada: *Se f é uma função contínua em* (a, b) *e* x_0 *é o único ponto crítico de f nesse intervalo, então uma das quatro situações abaixo ocorre:*

(i) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (a, x_0)$ *e* $f'(x) < 0$ *para* $x \in (x_0, b)$. *Nesse caso f é crescente em* $(a, x_0]$ *e decrescente em* $[x_0, b)$. *Em particular,* x_0 *é ponto de máximo local de f.*

(ii) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (a, x_0)$ *e* $f'(x) > 0$ *para* $x \in (x_0, b)$. *Nesse caso f é decrescente em* $(a, x_0]$ *e crescente em* $[x_0, b)$. *Em particular,* x_o *é* *ponto de mínimo local de f.*

(iii) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (a, b) - \{x_0\}$. *Nesse caso f é crescente em* (a, b) *e, portanto,* x_0 *não é ponto de extremo local.*

(iv) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (a, b) - \{x_0\}$. *Nesse caso f é decrescente em* (a, b) *e, portanto,* x_0 *não é ponto de extremo local.*

Demonstração: Como x_0 é o único ponto crítico de f em (a, b), temos que f não possui pontos críticos nos intervalos (a, x_0) e (x_0, b). Logo, podemos usar o Teorema 3.5 para cada um desses intervalos, obtendo uma das quatro possibilidades acima quanto ao sinal de f' em cada intervalo. Por exemplo, $f'(x) > 0$ para $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0, b)$. Nesse caso, f é crescente em (a, x_0) e decrescente em (x_0, b) *o* que, junto com a continuidade de f *em* x_0, garante que f é crescente em $(a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b)$. Em particular, podemos concluir que, nessas condições, x_0 é ponto de máximo local de f. Para as outras possibilidades os argumentos são análogos. □

Teorema 3.7: *Se* $f'(x_0) = 0$ e *existe* $f''(x_0)$, *então*

(i) *se* $f''(x_0) > 0$, *então* x_0 *é ponto de mínimo local de f.*

(ii) *se* $f''(x_0) < 0$, *então* x_0 *é ponto de máximo local de f.*

Demonstração: Provemos (i); a demonstração de (ii) é análoga. Temos, por definição, que

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Logo, se $f''(x_0) > 0$, então para x suficientemente próximo de x_0 (mas diferente de x_0) o quociente $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ também deve ser positivo. Isto é, existe um intervalo aberto (c, d), contido no domínio de f' (e, portanto contido no domínio de f) tal que

$$\text{se } x \in (c, d) \text{ e } x \neq x_0, \text{ então } \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Ou seja, se $x \in (c, d)$ e $x \neq x_0$, os números $f'(x) - f'(x_0)$ e $x - x_0$ devem ser ambos positivos ou ambos negativos. Logo,

$$\text{se } x \in (c, x_0), \text{ então } f'(x) - f'(x_0) < 0, \text{ já que } x - x_0 < 0,$$

$$\text{se } x \in (x_0, d), \text{ então } f'(x) - f'(x_0) > 0, \text{ já que } x - x_0 > 0.$$

Ou seja, usando o fato de que $f'(x_0) = 0$ e o Teorema 2.2, obtemos que

$$\text{se } x \in (c, x_0), \text{ então } f'(x) < 0 \text{ e, portanto, } f \text{ é decrescente em } (c, x_0),$$

$$\textit{se } x \in (x_0, d), \text{ então } f'(x) > 0 \text{ e, portanto, } f \text{ é crescente em } (x_0, d).$$

Usamos agora a continuidade de f em x_0 para concluir que f é decrescente em $(c, x_0]$ e crescente em $[x_0, d)$ e, portanto, que x_0 é ponto de mínimo local de f. □

Critério da segunda derivada: *Se uma função f está definida em* (a, b) *com* x_0 *sendo o único ponto crítico de f nesse intervalo e existe* $f''(x_0)$*, então:*

(i) *se* $f''(x_0) > 0$, *então f é decrescente em* $(a, x_0]$ *e crescente em* $[x_0, b)$,

(ii) *se* $f''(x_0) < 0$, *então f é crescente em* $(a, x_0]$ *e decrescente em* $[x_0, b)$.

Demonstração: Primeiro observamos que como, por hipótese, x_0 é o único ponto crítico de f e existe $f''(x_0)$, então f é derivável em (a, b) e, portanto, contínua em (a, b). Isto é, estamos em condições de usar o critério da primeira derivada para concluir que ocorre uma das quatro situações ali estabelecidas. Como, pelo Teorema 3.7, se $f''(x_0) > 0$ temos que x_0 é um ponto de mínimo local de f, vemos que só pode ocorrer a situação (ii) do critério da primeira derivada, enquanto que a condição $f''(x_0) < 0$ determina que o que ocorre é a situação (i). □

Teorema 3.8: *Se c é um ponto de inflexão de uma função f, então* $f''(c) = 0$ *ou f não possui segunda derivada em c.*

Demonstração: Se f possui segunda derivada em c, isto é, se f' é derivável em c, então f' é também contínua em c e, portanto, c é ponto de extremo local de f'. Pelo Teorema 2.2 aplicado a f', temos que $f''(c) = 0$. □

Critério da terceira derivada para pontos de inflexão: *Seja f uma função duas vezes derivável em (a, b) e $c \in (a, b)$. Se c é o único ponto crítico de f' nesse intervalo e existe $f'''(c)$, então*:

(i) *se $f'''(c) > 0$, então o gráfico f é côncavo para baix$_0$ em $(a, c]$ e é côncavo para cima em $[c, b)$,*

(ii) *se $f'''(c) < 0$, então o gráfico f é côncavo para cima em $(a, c]$ e é côncavo para baixo em $[c, b)$.*

Demonstração: Como f é duas vezes derivável em (a, b), temos que sua derivada, f', é derivável em (a, b) com $f''(x) \neq 0$ para $x \neq c$ já que c é o único ponto crítico de f' nesse intervalo. Como estamos supondo que existe $f'''(c)$, podemos usar o critério da segunda derivada para a função f':

(i) se $f'''(c) > 0$, então f' é decrescente em $(a, c]$ e é crescente em $[c, b)$, isto é, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(a, c]$ e é côncavo para cima em $[c, b)$.

(ii) se $f'''(c) < 0$, então f' é crescente em $(a, c]$ e é decrescente em $[c, b)$, isto é, o gráfico de f é côncavo para cima em $(a, c]$ e é côncavo para baixo em $[c, b)$. $\square$

CAPÍTULO 9

A Integral

O conceito de integral tem sua origem na necessidade de solução de problemas práticos como, por exemplo, os problemas do cálculo da área de uma região curvilínea e do cálculo da distância percorrida num movimento não uniforme.

O método usado por Arquimedes (267-212 a.C.) no cálculo de área de regiões curvilíneas é o mesmo que empregamos aqui para resolver os problemas dos exemplos introdutórios: a partir de ideias empíricas chegamos a um processo que nos permite obter aproximações arbitrariamente boas para a solução do problema. Em particular, esse processo faz uso da ideia de limite, pois consiste em construir uma sequência convergente cujo limite é a solução do problema.

Como veremos, os problemas que são resolvidos por meio de integrais são aqueles cujas soluções aproximadas são dadas por um certo tipo de soma. Em particular, a identificação de tais somas nas soluções aproximadas é que nos informa que a solução do problema é dada pela integral de uma determinada função. Assim, escolhemos não começar apresentando o tradicional problema de cálculo de áreas, na tentativa de evitar a excessiva conexão de integral com áreas já que, na maior parte dos casos, essa conexão não é inerente à natureza do problema, não sendo, portanto, o que nos leva a concluir que sua solução é uma integral.

Veremos também que o conceito de integral, que é formulado totalmente independente do conceito de derivada, guarda com este uma relação muito importante: num certo sentido, integrais resolvem problemas que são inversos aos problemas resolvidos pela derivada. Essa estreita relação entre os dois conceitos foi estabelecida por Newton e Leibniz no século XVII, sendo hoje conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Neste capítulo, além de introduzirmos o conceito de integral e tratarmos das propriedades da integral e de suas relações com a derivada, apresentaremos algumas aplicações ao cálculo de comprimentos, áreas, volumes e equações diferenciais.

Como nos capítulos anteriores, demonstrações para os resultados indicados com símbolo * são dados no apêndice.

1. O conceito de integral

Introdução ao conceito de integral

Como uma introdução ao conceito de integral de uma função vamos apresentar dois problemas que pretendemos resolver de forma aproximada, isto é, buscar algum processo que permita calcular aproximações arbitrariamente boas de sua solução.

> **Problema 1:** *Considere a função g, derivável com derivada continua, cujo gráfico é dado na figura abaixo. Vamos admitir que o gráfico de g é uma curva que possui um comprimento. O problema é calcular aproximações para o comprimento dessa curva, admitindo que só sabemos calcular comprimento de segmentos de retas.*

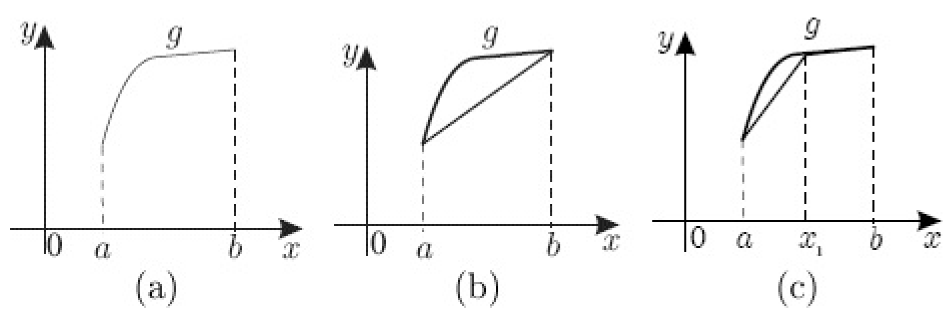


Figura 1.1

Talvez seja natural tentar "retificar" a curva, isto é, tomar, como uma primeira aproximação, o comprimento do segmento de reta que une os pontos $(a, g(a))$ e $(b, g(b))$ (veja Figura 1.1b).

Claramente, vemos que essa aproximação pode ser bastante grosseira, mas por outro lado, essa ideia pode nos sugerir dividir o intervalo $[a, b]$ em dois subintervalos de mesmo comprimento, $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$, e tomar como uma segunda aproximação o comprimento da poligonal que passa pelos pontos $(a, g(a))$, $(x_1, g(x_1))$ e $(b, g(b))$ (veja Figura 1.1c).

Comparando, na figura, as duas aproximações, vemos que parece que essa divisão nos forneceu uma melhor aproximação. Isso nos sugere que se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em um número cada vez maior de subintervalos de mesmo comprimento, poderemos obter aproximações cada vez melhores, calculando o comprimento da poligonal que passa pelos pontos do gráfico de g correspondentes aos pontos da divisão do intervalo $[a, b]$.

De fato, se n é um inteiro positivo suficientemente grande podemos imaginar que se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{n}$,

$$[a, x_1],[x_1, x_2], \ldots,[x_{n-1}, b],$$

a poligonal correspondente a essa divisão pouco se distinguirá da curva que é o gráfico de g.

Na Figura 1.2a é dada a poligonal obtida dividindo-se o intervalo $[a, b]$ em seis subintervalos e em 1.2b temos o gráfico de g.

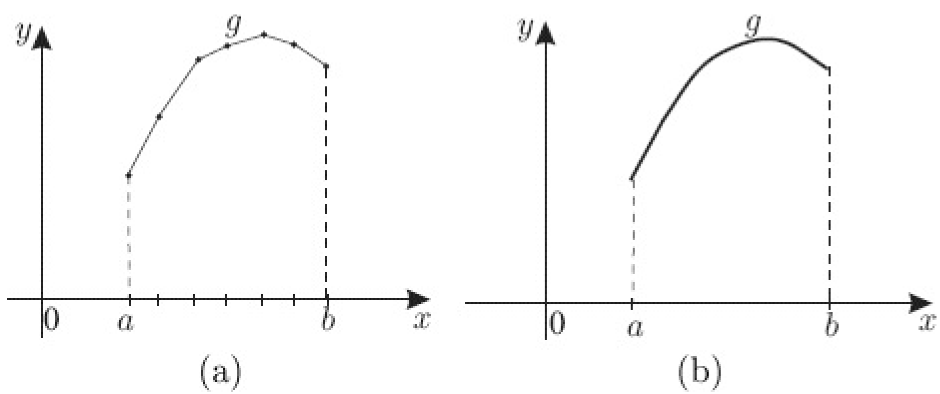


Figura 1.2

É razoável, então, admitir que o comprimento da poligonal construída é uma boa aproximação para o comprimento da curva dada pelo gráfico de g.

Para cada inteiro positivo n, denotemos por σ_n o comprimento da poligonal obtida a partir da subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos. Para simplificar a notação, denotemos a por x_0 e b por x_n. Podemos assim designar os subintervalos por $[x_{i-1}, x_i]$, fazendo o índice i variar de 1 a n.

Para calcular σ_n, comecemos com um exemplo, fazendo primeiro $n = 4$. Nesse caso a poligonal é constituída pelos segmentos de reta que ligam, respectivamente, os pontos $(x_0, g(x_0))$ e $(x_1, g(x_1))$, $(x_1, g(x_1))$ e $(x_2, g(x_2))$, $(x_2, g(x_2))$ e $(x_3, g(x_3))$, e $(x_3, g(x_3))$ e $(x_4, g(x_4))$ (veja Figura 1.3).

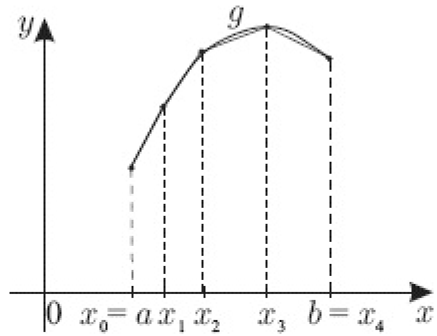


Figura 1.3

Logo, o comprimento do primeiro segmento, que é a distância entre seus dois pontos extremos, é dado por

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (g(x_1) - g(x_0))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 (1 + \frac{(g(x_1) - g(x_0))^2}{(x_1 - x_0)^2})} \\ &= (x_1 - x_0)\sqrt{1 + (\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0})^2}. \end{aligned}$$

Como estamos supondo que g é uma função derivável, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para concluir que

$$\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} = g'(\zeta_1),$$

onde ζ_1 é algum número do intervalo (x_0, x_1), isto é,

$$d_1 = \sqrt{1 + (g'(\zeta_1))^2}\ (x_1 - x_0).$$

Analogamente, temos que

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \sqrt{1 + (g'(\zeta_2))^2}\ (x_2 - x_1) \\
d_3 &= \sqrt{1 + (g'(\zeta_3))^2}\ (x_3 - x_2) \\
d_4 &= \sqrt{1 + (g'(\zeta_4))^2}\ (x_4 - x_3),
\end{aligned}
$$

ou seja, em geral

$$d_i = \sqrt{1 + (g'(\zeta_i))^2}\ (x_i - x_{i-1}),$$

onde ζ_i é um número do intervalo (x_{i-1}, x_i) dado pelo Teorema do Valor Médio.

Assim, para $n = 4$, o comprimento da poligonal é

$$
\begin{aligned}
\sigma_4 &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\
&= \sum_{i=1}^{4} d_i.
\end{aligned}
$$

Substituindo d_i pela fórmula que encontramos acima, obtemos que

$$\sigma_4 = \sum_{i=1}^{4} \sqrt{1 + (g'(\zeta_i))^2}\ (x_i - x_{i-1}).$$

Em geral, se a poligonal é obtida pela divisão de $[a, b]$ em n subintervalos, então seu comprimento é

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (g'(\zeta_i))^2}\ (x_i - x_{i-1}),$$

onde, lembrando, ζi é um número do intervalo (x_{i-1}, x_i)

Problema 2: *A que distância do ponto de partida estará um corpo, que se move ao longo de uma reta, T unidades de tempo após o início do movimento se, a cada instante, a velocidade do corpo é dada por uma função contínua* $v(t)$ *?*

Primeiro observamos que se $p(t)$ é a função que dá a posição do corpo no instante t, então a distância do corpo ao ponto de partida será dada por $|p(T) - p(0)|$ e, portanto, devemos calcular aproximações para $p(T)$. Para isso, temos que usar que a velocidade instantânea $v(t)$ é a derivada da função posição $p(t)$ e, portanto, nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira:

calcular aproximações para $p(T)$ *conhecendo-se o valor* $p(0)$ *e a derivada* $p'(t) = v(t)$ *para* t *no intervalo* $[0,T]$

Uma boa maneira de buscar um processo para a solução geral de um problema é tentar resolver um caso particular para o qual já conhecemos a resposta. A ideia é que, nesse caso, podemos testar o processo que estamos querendo usar.

> Suponhamos então que, para uma dada função velocidade, sabemos que a função distância $p(t)$, para $0 \le t \le T$, é dada pelo gráfico da Figura 1.4a. O que queremos é calcular aproximações para $p(T)$, usando apenas as informações dadas pela posição inicial, $p(0)$ e as velocidades $v(t)$ em cada instante t do intervalo de tempo $[0, T]$, ou seja, usaremos o conhecimento da função p somente para nos convencermos que o processo que queremos usar pode dar certo.

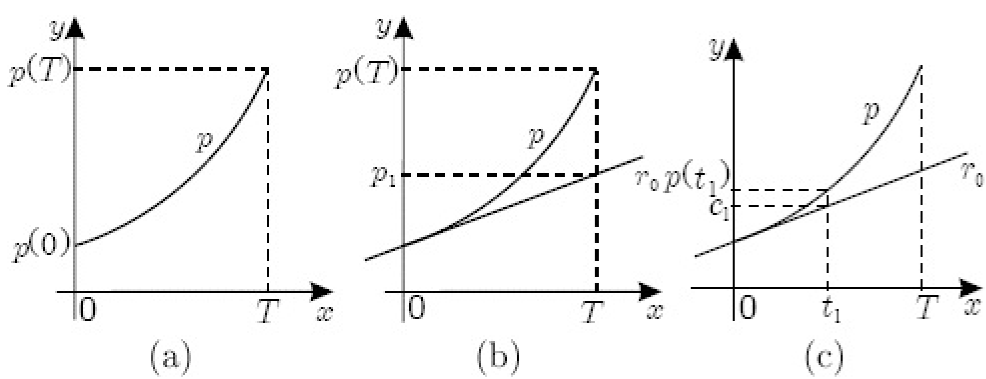


Figura 1.4

Como conhecemos $p(0)$ e $v(0)$, podemos achar a equação da reta r_0, tangente ao gráfico de p em $t = 0$, e usar essa reta para calcular uma primeira aproximação p_1 de $p(T)$, como na Figura 1.4b. Observe que isso é equivalente a calcular a posição do corpo no instante T se o movimento fosse uniforme, isto é, com velocidade constante $v(t) = v(0)$.

Vemos na Figura 1.4b que essa primeira aproximação pode ser muito grosseira, mas podemos usar essa ideia para obter uma aproximação melhor. Primeiro observamos que podemos ver, na Figura 1.4c, que se t_1 é o instante de tempo dado pelo ponto médio do intervalo $[0, T]$, então a reta r_0 também fornece uma aproximação, c_1, para a posição $p(t_1)$ com um erro que é visivelmente menor que o erro que cometemos com a aproximação p_1 para $p(T)$. Em outras palavras, o movimento uniforme com velocidade $v(0)$ dá uma melhor aproximação para a posição do corpo no instante ti do que para a posição no instante T.

A ideia é usar essa aproximação c_1 para obter p_2, uma aproximação melhor para $p(T)$: como conhecemos $v(t_1)$ podemos achar a equação da reta $\tilde{r}_1$ dada na Figura 1.5, que é paralela à reta tangente ao gráfico de p em t_1 e passa pelo ponto (t_1, c_1), e usar essa reta para calcular uma nova aproximação p_2 para $p(T)$ (ver Figura 1.5a). Observe que isso é como se, a partir da aproximação c_1 para a posição no instante t_1, usássemos o movimento uniforme com velocidade $v(t_1)$ para obter uma aproximação p_2 para a posição no instante T.

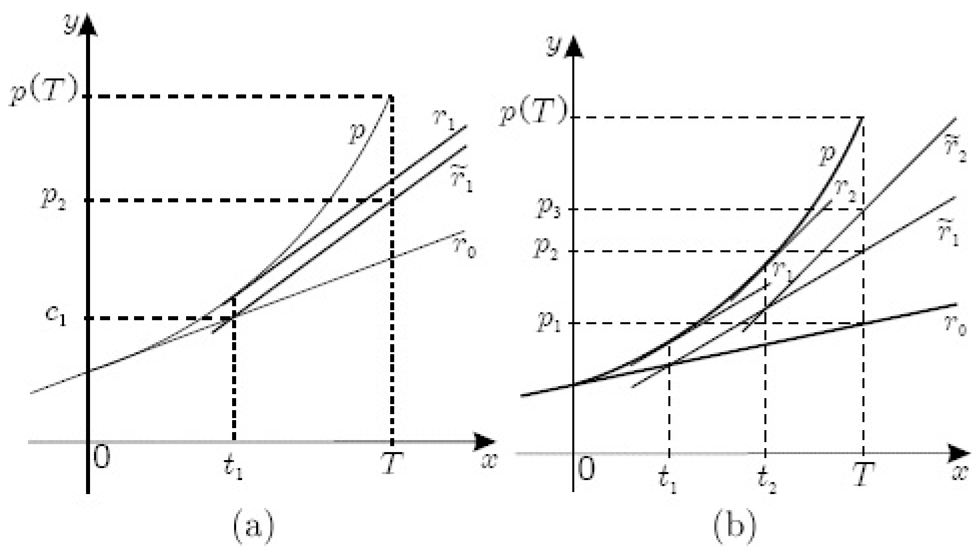


Figura 1.5

Claramente, nesse exemplo, p_2 é uma aproximação melhor para $p(T)$. Observe que não usamos a própria reta tangente (r_1 na figura) porque só nos permitimos usar o fato de que conhecemos $v(t_1) = p'(t_1)$, isto é, não queremos usar o número $p(t_1)$, que também é necessário para achar a equação de r_1, uma vez que estamos buscando um processo que resolva o problema 2 quando conhecemos apenas a posição inicial, $p(0)$, e a velocidade, $v(t)$, em cada instante t do intervalo de tempo $[0,T]$.

Agora, para obter uma aproximação melhor, p_3, de $p(T)$ a ideia é usar dois pontos intermediários t_1 e t_2, que podemos escolher de tal forma que o intervalo [0, T] fique dividido em três subintervalos de tamanho $\frac{T}{3}$, [0, t_1], [t_1, t_2] e [t_2, T] como na Figura 1.5b:

(i) usamos a reta r_0, tangente ao gráfico de p em $t = 0$, para calcular uma aproximação c_1 de $p(t_1)$,

(ii) usamos a reta $\tilde{r}_1$, que é paralela à reta tangente ao gráfico de p em $t = t_1$ e passa pelo ponto (t_1, c_1), para calcular uma aproximação c_2 de $p(t_2)$,

(iii) usamos a reta $\tilde{r}_2$, que é paralela à reta tangente ao gráfico de p em $t = t_2$ e que passa pelo ponto (t_2, c_2), para calcular uma aproximação p_3 de $p(T)$.

A ideia geral é que, para obter aproximações cada vez melhores, devemos utilizar mais pontos intermediários, de tal forma que a distância entre dois pontos consecutivos seja cada vez menor: para calcular uma aproximação, p_n, usando $n - 1$ pontos intermediários, dividimos o intervalo [0,T] em n subintervalos de comprimento $\frac{T}{n}$, determinando os pontos intermediários t_1, t_2,…, t_{n-1}.

Como fizemos com $n = 3$, obtida uma aproximação c_i de $p(t_i)$, usamos a reta que é paralela à reta tangente ao gráfico de p em $t = t_i$ e passa pelo ponto (t_i, c_i) para calcular uma aproximação para o valor de p no ponto seguinte, $p(t_{i+1})$, até calcularmos a aproximação p_n de $p(T)$. Para a função p cujo gráfico é dado nas figuras, podemos ver que estaremos construindo uma sequência p_n que parece convergir para o número $p(T)$.

A partir dessa descrição geométrica do método, podemos obter uma fórmula que usamos para calcular as aproximações p_n. Façamos os cálculos para $n = 3$: nesse caso temos

$$t_1 = \frac{T}{3} \text{ e } t_2 = \frac{2T}{3}.$$

(i) para calcular ci usamos a equação da reta r_0 (tangente ao gráfico de p em 0) que é

$$p = v(0)\,(t - 0) + p(0).$$

O número c_1 é obtido dando-se à variável t o valor t_1, isto é,

$$c_1 = v(0)(t_1 - 0) + p(0).$$

(ii) como a reta $\tilde{r}_1$ é paralela à reta tangente ao gráfico de p em ti, seu coeficiente angular é $v(t_1)$ e, portanto, já que o ponto (t_1, c_1) pertence a $\tilde{r}_1$, sua equação é

$$p = v(t_1)\,(t - t_1) + c_1,$$

logo, fazendo $t = t_2$ nessa equação obtemos c_2:

$$c_2 = v(t_1)\,(t_2 - t_1) + c_1,$$

donde, substituindo-se c_1 pelo valor já calculado, temos que

$$c_2 = v(t_1)\,(t_2 - t_1) + v(0)\,(t_1 - 0) + p(0).$$

(iii) repetindo-se o procedimento para a reta $\tilde{r}_2$, obtemos que sua equação é

$$p = v(t_2)\,(t - t_2) + c_2$$

e calculamos a aproximação p_3 fazendo $t = T$:

$$p_3 = v(t_2)\,(T - t_2) + c_2.$$

donde, substituindo-se c_2 pelo valor já calculado temos que

$$p_3 = v(t_2)\,(T - t_2) + v(t_1)\,(t_2 - t_1) + v(0)(t_1 - 0) + p(0).$$

Para escrevermos essa fórmula de uma maneira mais compacta, fazemos $t_0 = 0$, $t_3 = T$ e usamos a notação de somatório obtendo

$$p_3 = p(0) + \sum_{i=1}^{3} v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Podemos mostrar que essa fórmula é válida no caso geral, isto é, fazendo $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{T}{n}, \ldots,\ t_i = \frac{iT}{n}, \ldots,\ t_n = T,$ temos que

$$p_n = p(0) + \sum_{i=1}^{n} v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}),$$

sendo que os números t_i satisfazem

$$t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}.$$

De fato, como veremos mais adiante, a continuidade da função velocidade, $v(t)$, garante que esse processo realmente fornece aproximações arbitrariamente boas da solução do problema, isto é, se para cada inteiro positivo n, calculamos p_n pelo processo descrito acima, obteremos uma sequência p_n tal que

$$p_n \to p(T)$$

e, portanto,

$$|p_n - p(0)| \to |p(T) - p(0)|,$$

e $|p(T) - p(0)|$ é a distância que queremos calcular por aproximações.

O que há de comum nesses dois exemplos (e é o que nos interessa) é que, ao resolvê-los de forma aproximada, chegamos a aproximações que envolvem somas da forma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}), (*)$$

onde f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, os números $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ satisfazem

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{i-1} < xi < \ldots < b = x_n,$$

e, para cada índice $1 \leq i \leq n$, ζ_i é um número do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

No problema 1, f é a função $f(x) = \sqrt{1 + (g'(x))^2}$, sendo que, para cada $1 \leq i \leq n$, $x_i = 1 \leq i \leq n,\ x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$ e ζ_i é um número do intervalo (x_{i-1}, x_i) dado pelo Teorema do Valor Médio.

No problema 2, f é a função velocidade v com $x_i = \dfrac{iT}{n}$ e $\zeta_i = x_{i-1}$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Na verdade, esses são apenas dois exemplos dentre muitos problemas cuja solução aproximada envolve uma soma do tipo (*). Daí a importância de considerarmos de forma geral o comportamento de somas desse tipo, isto é, a possível convergência de sequências s_n do tipo (*). Observe que se assumirmos que o processo que usamos nos dois problemas acima de fato fornece aproximações arbitrariamente boas da solução dos problemas, equivale a dizer que a propriedade de que cada sequência das aproximações é convergente.

O conceito de integral que introduzimos na próxima seção trata exatamente dessa questão.

O conceito de integral

Se a e b são números reais com $a < b$, uma partição, P, para o intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos do intervalo, $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, satisfazendo

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{k-1} < b = x_k.$$

Se $[a, b]$ é um intervalo contido no domínio de uma função f e $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ é uma partição de $[a, b]$, dada uma escolha de números,

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, .\zeta_i, \ldots, \zeta_k,$$

com $x_{i-1} \le \zeta_i \le x_i$, para $1 \le i \le k$ (veja Figura 1.6, onde $k = 4$), a soma

$$f(\zeta_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

é chamada uma *soma de Riemann de f sobre a partição P*.

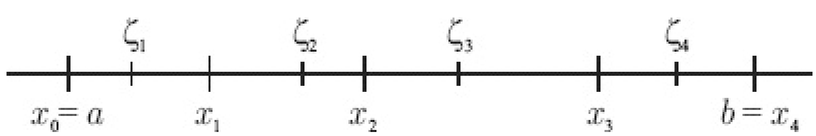


Figura 1.6

Para simplificar a notação, fazemos $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e denotamos por $R(f, P)$ a soma. Ou seja,

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x.$$

Exemplo
1. Se [*a, b*] = [0,1], os números

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{7}{12},\ x_3 = \frac{3}{4}\ \text{ e }\ x_4 = 1$$

constituem uma partição, $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, 1\}$, para o intervalo [0,1]. Se *f* é uma função definida no intervalo [0,1] e escolhemos

$$\zeta_1 = \frac{1}{8},\ \zeta_2 = \frac{1}{2},\ \zeta_3 = \frac{2}{3}\ \text{ e }\ \zeta_4 = \frac{5}{6},$$

então $\zeta_1 \in [0, \frac{1}{4}],\ \zeta_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{7}{12}],\ \zeta_3 \in [\frac{7}{12}, \frac{3}{4}],\ \zeta_4 \in [\frac{3}{4}, 1]$ e a soma

$$\sum_{i=1}^{4} f(\zeta_i)\Delta_i x = f(\frac{1}{8})(\frac{1}{4}-0)+f(\frac{1}{2})(\frac{7}{12}-\frac{1}{4})+f(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}-\frac{7}{12})+f(\frac{5}{6})(1-\frac{3}{4})$$

é uma soma de Riemann de *f* sobre a partição $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Observamos agora que, com essa terminologia que acabamos de introduzir, podemos dizer que, ao resolver por aproximação cada um dos problemas tratados na introdução, chegamos em somas de Riemann de uma função. Isto é, nesses exemplos, $s_n = R(f, P_n)$, sendo que:
(i) no problema 1,

$$f(x) = \sqrt{1 + (g'(x))^2}$$

e, para cada *n* inteiro positivo, P_n é a partição

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{(b-a)}{n}, ..., a + (n-1)\frac{(b-a)}{n}, b\},$$

isto é,

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \quad \text{para}\ \ 0 \leq i \leq n.$$

(ii) no problema 2, *f* = *v* e

$$P_n = \{0, \frac{T}{n}, ..., \frac{iT}{n}, ..., T\},$$

isto é,

$$t_i = \frac{iT}{n} \quad \text{para} \quad 0 \le i \le n.$$

Nesses exemplos, como já dissemos, ao fazermos as aproximações, estávamos implicitamente assumindo que poderíamos obter uma aproximação tão boa quanto desejássemos do número que queríamos calcular, desde que usássemos uma partição tal que os subintervalos (x_{i-1}, x_i) fossem suficientemente pequenos.

Para descrever essa propriedade com mais precisão definimos o *tamanho* de uma partição:

Definição: O *tamanho de uma partição* P, denotado por $|P|$, é o comprimento do maior subintervalo determinado por dois números consecutivos da partição, isto é, intervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$. Ou seja,

$$|P| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \ldots, (x_i - x_{i-1}), \ldots, (x_k - x_{k-1})\}.$$

Observe que, com essa definição, o comprimento de qualquer subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é sempre menor ou igual ao tamanho da partição, isto é,

$$|x_{i-1} - x_i| \le |P|, \text{ para } 1 \le i \le k.$$

Para a partição P dada na Figura 1.6, $|P| = x_3 - x_2$ é o comprimento do intervalo $[x_2, x_3]$.

Observe também que, para cada $n \ge 1$, as partições que usamos nos problemas 1 e 2 têm, respectivamente, comprimentos $\frac{b-a}{n}$ e $\frac{T}{n}$. Em particular, se em cada um desses exemplos denotamos por P_n, $n \ge 1$ as partições utilizadas, temos que

$$\lim_{n \to \infty} |P_n| = 0.$$

Assim, a propriedade que estamos implicitamente assumindo ser válida, ao dizermos que estamos resolvendo os problemas por aproximações, é:

se I é o número que queremos calcular e s_n é uma sequência de números dados pelas somas de Riemann,

$$s_n = R(f, P_n),$$

obtidas de partições P_n tal que $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} s_n = I.$$

Ou seja, nessas condições, a sequência s_n fornece aproximações do número I tão boas quanto desejarmos.

Vamos usar essa propriedade (que necessitamos para tornar válidas as aproximações que fizemos) para definir 0 que denominamos a *integrabilidade* de uma função.

Definição: Sejam f uma função real e $a < b$ números reais tais que o intervalo $[a, b]$ esteja contido no domínio de f. Dizemos que f é *integrável* em $[a,b]$ se existe um número real I tal que se $R(f, P_n), n \geq 1$, é uma sequência de somas de Riemann obtidas de partições P_n do intervalo $[a,b]$, com a propriedade de que $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} R(f, P_n) = I.$$

Se f é integrável num intervalo $[a, b]$, dizemos que o número I é a *integral definida de* f em $[a, b]$ e usamos a notação

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Os números a e b são chamados de *limites de integração*.

Em relação à notação da integral, é importante salientar que a letra x usada na expressão é apenas uma escolha arbitrária, isto é, o elemento dx informa que escolhemos a letra x para designar a variável no intervalo $[a, b]$ (a variável de integração) e a notação $f(x)$ nos diz que estamos considerando a variação da função nesse intervalo. Temos portanto muita liberdade de escolha, sendo que o importante é a consistência da notação: as únicas letras proibidas para designar a variável de integração são as letras que escolhemos para designar os limites de integração. Assim, por exemplo, as expressões $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(z)dz$ igualmente denotam o número real que é a integral definida de f em $[a, b]$.

Um resultado que podemos obter sem grandes esforços é a integrabilidade das funções constantes, isto é:

se f é a função constante igual a c (isto é, $f(x) = c$ para qualquer número real x), então f é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

De fato, se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k\}$ é uma partição de $[a,b]$, então como $f(x) = c$ para qualquer número real x, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x &= \sum_{i=1}^{k} c\,\Delta_i x \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0),\end{aligned}$$

qualquer que seja a escolha dos números ζ_i. Como $x_0 = a$ e $x_k = b$, temos que

$$R(f, P) = c(b-a),$$

qualquer que seja a partição P. Em particular, se P_n é uma sequência de partições tal que $|P_n| \to 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} R(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

e, portanto, $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

Observe que, como o gráfico de $f(x) = c$ é uma reta horizontal que corta o eixo vertical no ponto que corresponde ao número c, temos que se $c \neq 0$, a região R do plano entre o intervalo $[a, b]$ e o segmento de reta que corresponde ao gráfico de f nesse intervalo (veja Figura 1.7) é um retângulo cujos lados medem $(b-a)$ (o comprimento do lado horizontal) e $|c|$ (o comprimento do lado vertical do retângulo).

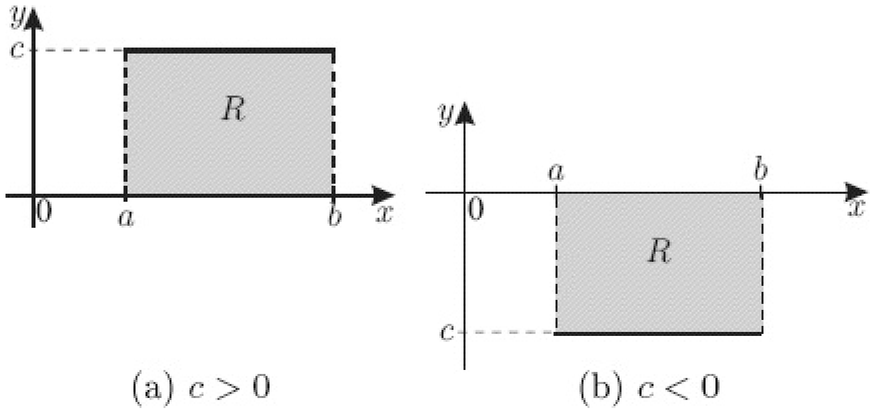


Figura 1.7

Logo se estamos utilizando um sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos, a área de R é $|c|\,(b - a)$. Nesse caso, vemos que se c > 0, então

$$\int_a^b c\,dx = \text{área de } R$$

e, se $c < 0$, então

$$\int_a^b c\,dx = -(\text{área de } R).$$

Decidir se uma dada função é integrável num intervalo verificando a condição dada na definição é, em geral, um problema bastante complicado. Daí a importância do teorema que enunciamos a seguir que, em particular, garante que as sequências de aproximações que obtivemos na introdução realmente eram sequências convergentes e, portanto, seus limites podiam ser tomados como soluções dos problemas considerados.

Teorema 1.1: *Se f é contínua em* $[a, b]$, *então f é integrável em* $[a,b]$.

Em particular, como já apontamos, em cada um dos problemas considerados na introdução, a continuidade das funções envolvidas garante que a sequência de soluções aproximadas é convergente: no problema 1, σ_n converge para a integral da função $f(x) = \sqrt{1 + (g'(x))^2}$ no intervalo $[a, b]$ e, no problema 2, p_n converge para a integral da função velocidade no intervalo $[0, T]$, isto é,

$$\sigma_n \to \int_a^b \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx \quad \text{e} \quad p_n \to \int_0^T v(t)\,dt.$$

Aqui é importante observar que se sabemos que um função f é integrável num intervalo $[a, b]$, para calcular $\int_a^b f(x)dx$ não precisamos considerar partições arbitrárias do intervalo $[a, b]$, isto é, a condição de integrabilidade nos diz que dada uma sequência qualquer, P_n, de partições com a propriedade de $|P_n| \to 0$, uma sequência de somas de Riemann, s_n, obtidas a partir de P_n, necessariamente converge a $\int_a^b f(x)dx$. Em particular,

Teorema 1.2: *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então*

$$s_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \to \int_a^b f(x)dx,$$

onde, para cada $n \geq 1$, ζ_i é um número no intervalo

$$[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}, a + \frac{i(b-a)}{n}].$$

Demonstração: Como f é contínua, o teorema acima garante que f é integrável e, portanto, basta observar que, para cada $n \geq 1$,

$$s_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)$$

é uma soma de Riemann de f sobre a partição

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{(b-a)}{n}, ..., a + (n-1)\frac{(b-a)}{n}, b\}$$

(que se obtém dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $\frac{1}{n}$), já que

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \tfrac{1}{n} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Como $|P_n| = \frac{1}{n} \to 0$, temos que $s_n \to \int_a^b f(x)dx$. □

Vejamos um primeiro exemplo de aplicação desses teoremas:

Exemplo
2. Vamos mostrar que a integral da função identidade, $f(x) = x$, (que, sendo contínua, é integrável) em qualquer intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Se $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ é uma partição de $[a,b]$, para cada $1 \leq i \leq k$, escolhemos ζ_i como o ponto médio entre x_{i-1} e x_i, isto é, $\zeta_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$. Com essa escolha temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x &= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}(x_k^2 - x_0^2),
\end{aligned}$$

ou seja, $R(f, P) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, já que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Agora, se para cada $n \geq 1$, P_n é a partição de $[a, b]$ obtida dividindo-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho $\frac{b-a}{n}$, então $|P_n| =$ $|P_n| = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ e, portanto, escolhendo os números ζ_i da maneira acima, obtemos a sequência de somas de Riemann

$$s_n = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

que é uma sequência constante e, portanto, converge a $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, ou seja,

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Observe que, analogamente ao que ocorre com uma função constante e positiva, se $0 < a < b$, então a função identidade, $f(x) = x$, só assume valores positivos no intervalo $[a, b]$ e, se R é a região entre o gráfico de f (feito num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos) nesse intervalo e o segmento de reta correspondente a esse intervalo no eixo-x (veja Figura 1.8, onde R é a região sombreada), então de R é dada por

$$A(R) = (\frac{a+b}{2})(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

ou seja,

$$A(R) = \int_a^b x dx.$$

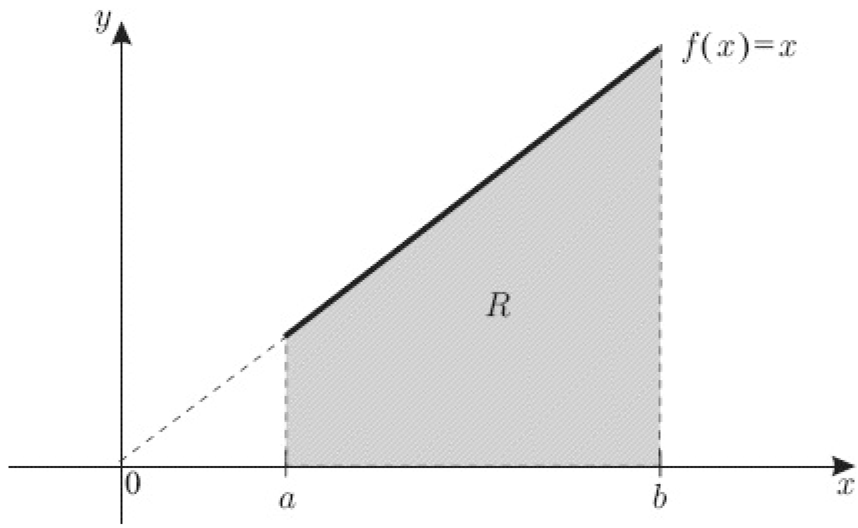


Figura 1.8

Mais geralmente, se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ que só assume valores positivos, isto é, $f(x) > 0$ para qualquer que seja $x \in [a, b]$, considere R a região entre o gráfico de f, feito num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos, e o segmento de reta do eixo-x que corresponde ao intervalo $[a,b]$ (veja Figura 1.9a).

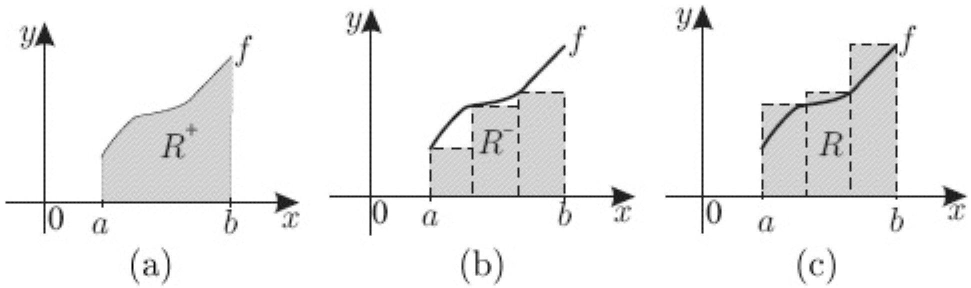


Figura 1.9

Como f é contínua, já sabemos que f é integrável, isto é, existe o número $\int_a^b f(x)\,dx$, que é o limite de somas de Riemann de f obtidas a partir de partições com tamanho tendendo a zero.

Observemos agora que, dada um partição qualquer do intervalo $[a, b]$, se em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhemos um ponto de mínimo de f nesse subintervalo, ζ_i^-, então a soma de Riemann correspondente é a área da região R^- (veja Figura 1.9b) que é a união dos retângulos cujos lados horizontais inferiores são os segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ e cujos lados verticais têm comprimento $f(\zeta_i^-)$, isto é,

$$A(R^-) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i^-)\Delta_i x = R^-(f, P).$$

Analogamente, se para a mesma partição escolhemos em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto de máximo de f nesse intervalo, ζ_i^+, a soma de Riemann correspondente é a área da região R^+ (veja Figura 1.9c) que é a união dos retângulos cujos lados horizontais inferiores são os mesmos segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ mas cujos lados verticais têm comprimento $f(\zeta_i^+)$, isto é,

$$A(R^+) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i^+)\Delta_i x = R^+(f, P).$$

Como a região R^- está contida na região R que, por sua vez, está contida na região R^+, temos que se R possui uma área, então

$$A(R^-) \leq A(R) \leq A(R^+),$$

ou seja,

$$R^-(f, P) \leq A(R) \leq R^+(f,P).$$

Como essa construção é válida para qualquer partição, podemos usá-la para uma sequência de partições P_n, tais que $|P_n| \to 0$, obtendo

$$R^-(f, P_n) \leq A(R) \leq R^+(f,P_n),$$

para qualquer $n \geq 1$, donde

$$\lim_{n\to\infty} R^-(f, P_n) \leq A(R) \leq \lim_{n\to\infty} R^+(f, P_n).$$

Mas já sabemos que, como f é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} R^-(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R^+(f, P_n),$$

isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq A(R) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

e, portanto,

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Resumindo, verificamos que se a região R possui uma área, então essa área tem que ser a integral de f no intervalo $[a, b]$. Esse fato nos permite definir:

> **Definição:** Se f é uma função não negativa e contínua num intervalo $[a, b]$ e R é a região entre o gráfico de f nesse intervalo e o segmento $[a, b]$ no eixo-x, dizemos que *o número $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área da região R.*

Exemplo

3. Como $f(x) = x^2$ é uma função contínua e não negativa, temos que $\int_0^1 x^2\,dx$ $x^2\,dx$ é a area da região determinada pelo gráfico de x^2 no intervalo $[0,1]$.

Para calcular aproximações para essa área, podemos usar, para cada $n >$ 1, a partição P_n obtida pela divisão do intervalo [0, 1] em n subintervalos de mesmo comprimento $\frac{1}{n}$,

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\},$$

ou seja, $x_i = \frac{i}{n}$, para $0 \leq i \leq n$ e $\Delta_i x = \frac{1}{n}$. Logo, se tomamos $\zeta_i = x_i$ e $s_n = R(f,P_n)$, então

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta_i x \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2. \end{aligned}$$

Como $s_n \to \int_0^1 x^2\,dx$, acabamos de obter que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 \to A(R)$, onde R é a região determinada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo intervalo [0, 1]. Observe que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2,$$

e, como

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

temos que

$$A(R) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

A seguir, apresentamos várias propriedades da integral que, em particular, nos permitirá estender a dennição de área da região determinada pelo gráfico de uma função e pelo eixo-x, de forma a incluir funções contínuas não necessariamente positivas.

A demonstração do teorema que apresentamos a seguir é demasiadamente técnica para esse texto.

Teorema 1.3: *Sejam* [*a, b*] *um intervalo e c um número real que pertence ao intervalo* (*a, b*). *Se f é integrável em* [*a, b*], *então f também é integrável nos intervalos* [*a, c*] *e* [*c, b*] *e, reciprocamente, se f é integrável nos intervalos* [*a, c*] *e* [*c, b*], *então f é integrável em* [*a, b*]. *Em qualquer dos casos tem-se que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Observe que nesse teorema supusemos $a < c < b$, mas se, por exemplo, c é um número menor do que a e f é uma função integrável em [c, b], então o teorema garante que

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Assim vemos que, para simplificar a manipulação algébrica com integrais, é conveniente definir:

Definição: Se $b < a$ e f é integrável no intervalo [b, a], definimos

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Com o mesmo objetivo, se a é um número qualquer do domínio de uma função f, definimos $\int_a^a f(x)dx = 0.$.

Com essas deefinições e usando o Teorema 1.3, podemos provar o seguinte resultado, que é frequentemente útil quando efetuamos cálculos que envolvam integrais:

Teorema 1.4*: *Se a,b e c são números reais de um intervalo em que f é integrável, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Como veremos ao longo deste capítulo, essas propriedades da integral são muito úteis em aplicações que envolvem integrais. Em particular, podemos usálas para generalizar a definição de área para qualquer região determinada pelo gráfico de uma função contínua num intervalo e pela representação desse intervalo no eixo-x.

Comecemos por considerar o caso de uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, tal que f é positiva no intervalo $[a, c)$ e negativa no intervalo $(c, b]$, como a função cujo gráfico é dado na Figura 1.10a.

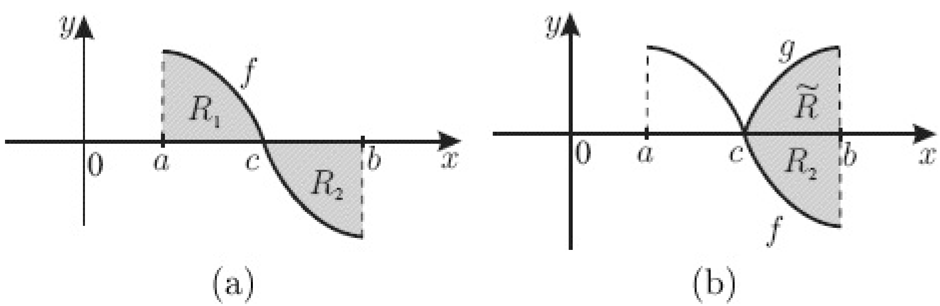


Figura 1.10

Primeiro observamos que a região R, determinada pelo gráfico de f e pelo intervalo $[a, b]$, é a união das regiões R_1 e R_2, determinadas, respectivamente, por $[a, c]$ e 0 gráfico de f em $[a, c]$ e por $[c, b]$ e o gráfico de f em $[c, b]$ (veja Figura 1.10a).

Como $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, c]$, isto é, f é contínua e não negativa em $[a, c]$, temos, pela definição que já demos antes, que a área da região R_1 é a integral de f no intervalo $[a, c]$, isto é,

$$A(R_1) = \int_a^c f(x)\, dx.$$

Por outro lado, se consideramos a função $g : [c, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(\mathrm{x}) = -f(x),$$

temos que g é contínua e não negativa, já que $f(x) \leq 0$ para $x \in [c, b]$. Logo, pela mesma definição, a área da região $\widetilde{R}$ limitada pelo gráfico de g e pelo intervalo [c, b] é

$$A(\widetilde{R}) = \int_c^b g(x)\, dx = \int_c^b (-f(x)\,)dx.$$

Mas, sabemos também, o gráfico de g é a reflexão em relação ao eixo-x do gráfico de f no intervalo [c, b] (veja Figura 1.10b) e, portanto, $\widetilde{R}$ e R_2 possuem a mesma área, isto é,

$$A(R_2) = A(\widetilde{R}) = \int_c^b (-f(x))\, dx.$$

Em particular, temos que

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b (-f(x))\, dx.$$

Observemos agora que a função $|f(x)|$ é contínua no intervalo [a, b] (e, portanto, integrável nesse intervalo) e

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } \ x \in [a, c], \\ -f(x) & \text{se } \ x \in [c, b]. \end{cases}$$

Logo, usando o Teorema 1.4 acima, temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\, dx &= \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_c^b |f(x)|\, dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_a^c (-f(x)) dx \\ &= A(R). \end{aligned}$$

Isso nos diz que, para sermos consistentes com a definição anterior, devemos, em geral, definir:

Definição: Se f é uma função contínua num intervalo [a, b] el R é a região entre o gráfico de f nesse intervalo e o segmento [a, b] no eixo-x, dizemos que o *número* $\int_a^b |f(x)|$ *dx é a área da região R.*

No caso de f ser uma função não negativa, então $f(x) = |f(x)|$, o que nos diz que, nesse caso, a definição geral se reduz à primeira definição que demos. É importante observar que apenas nessa situação, isto é, em que f é uma função não negativa num intervalo $[a, b]$, tem-se que a área da região correspondente é a integral de f no intervalo $[a, b]$. De fato, para um exemplo simples como $f(x) = x$ para $x \in [-1,1]$, temos que

$$A(R) = 2\int_0^1 x dx = 1$$

e, no entanto, $\int_{-1}^1 x dx = 0.$

Outras propriedades da integral são dadas nos teoremas a seguir.

Teorema 1.5*: *Se f e g são funções integráveis num intervalo [a, b] e c é um número real, então as funções cf e f + g também são integráveis em [a, b], com*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo

4. Se g é uma função cujo gráfico é uma reta, isto é, $g(x) = \alpha x + \beta$, então

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{1}{2}((g(a) + g(b))(b - a).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b (\alpha x + \beta)dx \\
&= \alpha \int_a^b x dx + \int_a^b \beta dx \\
&= \alpha(\frac{b^2 - a^2}{2}) + \beta(b - a) \\
&= \alpha \frac{(b+a)(b-a)}{2} + \beta(b - a) \\
&= \frac{b-a}{2}(\alpha b + \alpha a + 2\beta) \\
&= \frac{(\alpha a + \beta + \alpha b + \beta)}{2}(b - a) \\
&= \frac{(g(a) + g(b))(b - a)}{2}.
\end{aligned}
$$

Observe que no caso em que $a < b$ e $g(x) > 0$ para $x \in [a, b]$, então a região entre o gráfico de g e o intervalo $[a, b]$ no eixo-x é um trapézio e a expressão que acabamos de obter, $\frac{(g(a)+g(b))(b-a)}{2}$, é a fórmula que conhecemos para a área de um trapézio, já que $g(a)$ e $g(b)$ são os comprimentos dos lados paralelos do trapézio e $(b - a)$ é a altura (veja Figura 1.11).

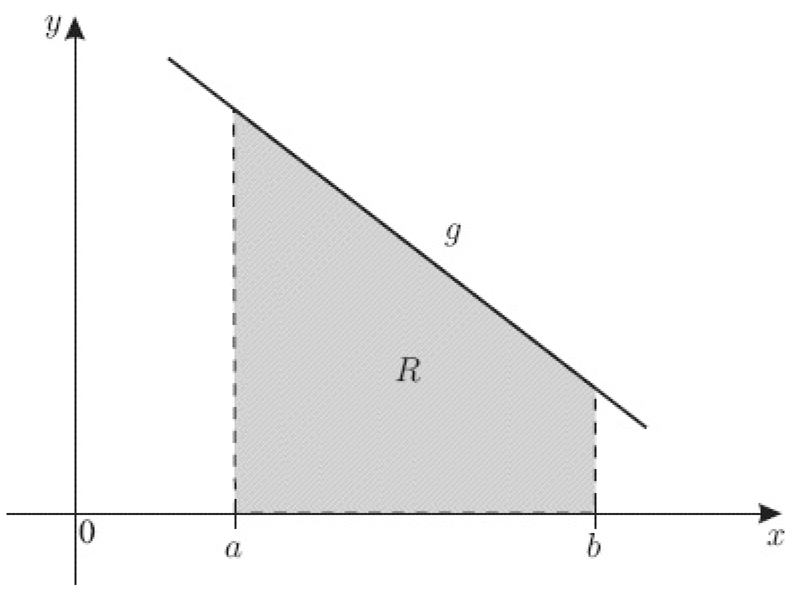


Figura 1.11

Teorema 1.6*: *Se f e g são funções integráveis num intervalo [a, b] e* $f(x) \leq g(x)$ *para*

$x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 1.7* (do valor médio para integrais): *Se f é uma função contínua num intervalo que contém os números a e b, então existe um número $\overline{x}$ no intervalo cujos extremos são os números a e b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})(b-a).$$

O número é a generalização da média aritmética de um conjunto finito de números, sendo por isso chamado de *valor médio* de f em $[a, b]$.

Se f é uma função que possui uma derivada f' contínua num intervalo $[a,b]$, podemos usar as propriedades da integral definida para obter uma estimativa de erro quando usamos, para aproximar a integral $\int_a^b f(x)\,dx$, uma sequência s_n, tal que para cada $n > 1$, s_n é uma soma de Riemann de f sobre a partição P_n, obtida pela divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\frac{b-a}{n}$. Isto é,

$$P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

onde $x_0 = a$ e, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \qquad \text{e} \qquad \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Assim, se s_n é a soma de Riemann com $\zeta_i = x_i$, temos que

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Queremos então obter uma estimativa para o erro

$$\left| s_n - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Para isso, primeiro observamos que, pelo Teorema 1.4,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left| s_n - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right] \right|.$$

Agora, observe que, para cada i, podemos usar o Teorema 1.7 para obter que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

para algum número $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Donde

$$f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (f(x_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1}),$$

isto é,

$$\left| s_n - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} [(f(x_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1})] \right|,$$

donde, pela desigualdade triangular, temos que

$$\left|s_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1})|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(c_i)|\,|x_i - x_{i-1}|\,.$$

Usamos agora o fato de que f é derivável para aplicar o Teorema do Valor Médio e concluir que $f(x_i) - f(c_i) = f'(d_i)(x_i - c_i)$, para algum número $d_i \in [c_i, x_i]$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(c_i)| &= \left|f'(d_i)(x_i - c_i)\right| \\ &= \left|f'(d_i)\right| |x_i - c_i| \\ &\leq \left|f'(d_i)\right| |x_i - x_{i-1}|\,, \end{aligned}$$

já que $|x_i - c_i| \leq |x_i - x_{i-1}|$ pois $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Daí,

$$|f(x_i) - f(c_i)|\,|x_i - x_{i-1}| \leq \left|f'(d_i)\right| |x_i - x_{i-1}|^2\,.$$

Como estamos supondo que f' é contínua no intervalo $[a,b]$, sabemos, pelo Teorema 4.1 do Capítulo 8, que f' possui um valor máximo M_1 em $[a, b]$, isto é, existe um número real M_1 tal que $|f'(x)| \leq M_1$ para qualquer $x \in [a, b]$, em particular, $[f'(d_i)/ \leq M_1$. Logo

$$|f(x_i) - f(c_i)|\ |x_i - x_{i-1}| \leq |f'(d_i)|\ |x_i - x_i - 1|^2 \leq M_1\ |x_i - x_{i-1}|^2,$$

ou seja,

$$\left|s_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(c_i)|\,|x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^{n} M_1 |x_i - x_{i-1}|^2\,.$$

Lembremos agora que, para as partições que estamos considerando, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} M_1 |x_i - x_{i-1}|^2 = \sum_{i=1}^{n} M_1 \frac{(b-a)^2}{n^2} = M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Assim chegamos à estimativa

$$\left|s_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n},$$

onde s_n são somas de Riemann das partições obtidas pela divisão do intervalo $[a, b]$ em subintervalos de mesmo comprimento, e M_1 é tal que $|f'(x)| \leq M_1$ para qualquer $x \in [a,b]$.

Em particular, podemos usar essa estimativa para afirmar que o número $\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}(\frac{i}{200})^2$ é aproximação para a área da região determinada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo intervalo [0,1] cujo erro não excede 10^{-2}. De fato, no Exemplo 3, para $f(x) = x^2$, $a = 0$ e $b = 1$, obtivemos que

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$$

e, portanto,

$$s_{200} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}(\frac{i}{200})^2.$$

Como $f'(x) = 2x$, temos que $|f'(x)| \leq 2$ para qualquer $x \in [0,1]$, isto é, podemos tomar $M_1 = 2$. Assim,

$$\left|s_{200} - \int_0^1 x^2 dx\right| \leq \frac{2}{200} = 10^{-2}.$$

O interessante dessa estimativa, além do fato de poder ser feita, é que ela nos mostra que, em geral, o cálculo de aproximações de uma integral diretamente a partir de suas somas de Riemann pode resultar num processo que envolve muitas operações, isto é, se quisermos uma precisão muito grande, o número de operações necessárias pode ser muito grande. Daí terem sido desenvolvidos métodos numéricos mais eficientes para calcular aproximações para o valor de uma integral, dois dos quais, conhecidos como Método dos Trapézios e Método de Simpson, serão apresentados mais adiante.

Convém observar que, na verdade, com a eficiência dos computadores atuais, no que diz respeito à velocidade de computação, a necessidade de efetuar muitas operações não é mais um problema (isto é, no que diz respeito ao tempo necessário para efetuar os cálculos), mas, considerando que em cada operação ocorrem erros de aproximações, o erro acumulado, quando se efetua um número muito grande de operações, pode ser significativo ao ponto de invalidar as estimativas teóricas.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Obtenha uma sequência s_n tal Que o limite de s_n seja a área sob o gráfico de $f(x) = x^3$, no intervalo [0,1].
2. Calcule:

   (a) $\int_{-3}^{4} 2\,dx$

   (b) $\int_{4}^{7} -3\,dx$

   (c) $5\int_{2}^{-1} dt$

   (d) $6\int_{\frac{1}{2}}^{3} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} 4\,dx$

   (e) $\int_{1}^{2} (5s-2)\,ds$

   (f) $\int_{-1}^{4} (4-4x)\,dx$

   (g) $\int_{-1}^{4} |4-4x|\,dx$

3. Sabendo que $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 4$,, calcule:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} (5+4f(x))\ dx$

(b) $\displaystyle\int_{3}^{-2} (f(t)-\tfrac{t}{3})\ dt$

(c) $\displaystyle\int_{3}^{1} 2f(x)\ dx - 2\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$

(d) $\displaystyle\int_{3}^{5} (2f(x)+1)\ dx + 4\int_{5}^{-2} \tfrac{f(x)-3}{2}\ dx$

4. Sabendo que $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{2}} (7-8g(x))\ dx = -5$, calcule $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx$.

5. Sabendo que $\displaystyle\int_{-6}^{5} f(x)\ dx = 2$ e $\displaystyle\int_{7}^{5} g(x)\ dx = -3$,, calcule $\displaystyle\int_{-6}^{7} f(x)\ dx - \int_{5}^{7} (f(x)+g(x))\ dx$.

6. Sabendo que $\displaystyle\int_{1}^{2} \operatorname{arctg}(x-1)\ dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$, calcule:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{arctg} x\ dx$.

(b) A área da região entre o eixo-x e o gráfico de $f(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$ no intervalo $[0, 2]$.

(c) $\displaystyle\int_{0}^{2} \operatorname{arctg}(x-1)\ dx$.

(d) $\displaystyle\int_{0}^{2} |\operatorname{arctg}(x-1)|\ dx$.

7. Sabendo que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\ dx = 2$, calcule:

(a) A área da região entre o gráfico de seno no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ e o eixo-*x*.

(b) $\int_{-\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } x \, dx$

8. Calcule:

(a) $\int_{-1}^{5} |2x - 1| \, dx$

(b) $\left| \int_{-1}^{5} (2x - 1) \, dx \right|$

9. Determine quais das alternativas abaixo são verdadeiras:

(a) $\int_{0}^{2} \cos x \, dx = \int_{-2}^{0} \cos x \, dx$

(b) $\int_{0}^{1} x^2 \, dx < \int_{0}^{1} x^3 \, dx$

(c) $\int_{1}^{-2} \frac{3x^2}{4x^2+1} \, dx = \int_{1}^{-2} \frac{3t^2}{4t^2+1} \, dt$

(d) $\int_{0}^{1} e^x \, dx > \int_{0}^{1} x^2 \, dx$

(e) $\int_{-1}^{1} |x^5| \, dx = \left| \int_{-1}^{1} x^5 dx \right|$

10. Para cada $x \geq 0$, considere $F(x) = \int_0^x t + 1 \, dt$. Calcule $F(\frac{1}{2})$ e $F(2)$. Ache uma expressão algébrica para F. O que acontece se também admitirmos $x < 0$?

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\int_{1}^{3} f(x) dx < 0$, então $f(x) \leq 0$ para $x \in [1, 3]$.

(b) Se $\int_{0}^{1} f(x) dx = 0$, então $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$.

(c) Se $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$, então $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [0,1]$.

(d) Se $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, então $\int_a^b |f(x)|\ dx = 0$.

(e) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_a^b g(x)dx\right].$$

12. Seja f contínua e inversível com $f(0) = 0$ e $f(1) = 4$. Sabendo que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{2}$, calcule $\int_0^4 f^{-1}(x)dx.$.

13. Sabendo que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \ln\sqrt{2}$, calcule $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

14. Sabendo que para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ tem-se que $\int_0^x \operatorname{tg} t\, dt = -\ln|\cos x|$, mostre que $\int_0^x$ arctg $t\ dt = xtgx + \ln|\cos x|$.

15. Sabendo que f é uma função par e $f(x) \geq 0$ em $[0,1]$ com $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$, calcule:

    (a) A área da região entre o gráfico de f no intervalo $[-1, 1]$ e o eixo-x.

    (b) $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

16. Sabendo que f é uma função contínua e $\int_0^1 f(x)dx = 5$, calcule:

    (a) $\int_{-1}^0 f(x+1)dx$.

    (b) $\int_1^2 f(x-1)dx$.

2. O Teorema Fundamental do Cálculo

O resultado matemático que apresentaremos nesta seção relaciona os conceitos de derivada e integral, que são os dois conceitos fundamentais do Cálculo. Por essa razão esse resultado é denominado Teorema Fundamental do Cálculo. Achamos importante salientar a independência desses dois conceitos: falamos de derivada sem saber o que é uma integral e, reciprocamente, introduzimos o conceito de integral sem nos referirmos a derivadas.

E comum livros de Cálculo apresentarem, de início, a integral como uma anti-derivada, induzindo os alunos a se fixarem nessa ideia, o que é limitador, já que a assim chamada antiderivada (ou primitiva) da maioria das funções contínuas só é acessível por meio do conceito de integral definida que introduzimos na seção anterior.

Apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo em duas versões: a primeira, que pode ser qualificada de mais teórica, garante, em particular, que toda função contínua num intervalo é a derivada de alguma função; a segunda, mais prática, permite efetuar o cálculo de integrais definidas de uma função contínua f, para a qual conhecemos uma função cuja derivada é a função f.

Seja f uma função contínua num intervalo I e a um número desse intervalo. Como I é um intervalo, temos que para cada $x \in I$ o intervalo fechado de extremos a e x ($[a,x]$ se $x \geq a$ ou $[x, a]$ se $x \leq a$) está contido no intervalo I e, portanto, f é contínua nesse subintervalo.

Em particular, podemos falar da integral definida de f nesse subintervalo, isto é, a cada $x \in I$ podemos associar o número real $\int_a^x f(t)dt$ (observe que usamos a letra t para designar a variável de integração, pois já utilizamos a letra x para designar um dos limites de integração). Ou seja, estamos falando de uma nova função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Exemplos

1. A função $f(x) = \cos x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, podemos definir a função

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt.$$

Neste caso, por exemplo, $F(-1)$ é a integral definida

$$F(-1) = \int_0^{-1} \cos t^2 \, dt,$$

assim como

$$F(\sqrt{2}) = \int_0^{\sqrt{2}} \cos t^2 \, dt.$$

2. Como a função identidade é contínua em toda a reta, a função

$$F(x) = \int_{-1}^{x} t \, dt$$

está bem definida para qualquer número real.

Observe que, nesse caso, pelo que foi visto no exemplo 2 da seção 1, fazendo $a = -1$ e $b = x$ obtemos que

$$\int_{-1}^{x} t \, dt = \frac{1}{2}(x^2 - (-1)^2),$$

isto é, a função F desse exemplo é a função

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo (I)*: *Se f é uma função contínua num intervalo I que contém o número a e, para cada $x \in I$,*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

então F é uma função derivável e $F'(x) = f(x)$.

Por exemplo, podemos afirmar que a função do exemplo 1 acima,

$$F(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt,$$

é derivável com

$$F'(x) = cos\ x^2.$$

Para tratar da segunda versão do Teorema Fundamental do Cálculo, começa-remos por definir o termo primitiva (ou antiderivada) de uma função:

Definição: Se f e G são funções tais que f é a derivada de G, isto é, $G'(x) = f(x)$, dizemos que a função G é uma *primitiva* para f.

Exemplos

3. $G(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva para a função identidade $g(x) = x$ e $H(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva para $f(x) = x^2$.

4. $G(x) = -$ cós x é uma primitiva para a função $f(x) =$ sen x.

5. $G(x) =$ In x é uma primitiva para $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

6. $F(x) = \int_1^x t^2 dt$ também é uma primitiva de $f(x) = x^2$ (pelo TFC (I), acima).

Observe que, como a derivada de uma função constante é a função constante igual a 0, se G é uma primitiva para f e c é uma constante qualquer, então a função
$H(x) = G(x) + c$ também é uma primitiva para f. De fato, H é uma função derivável, já que G e a função constante igual a c são deriváveis e

$$H'(x) = G'(x) + 0 = f(x).$$

Em particular vemos que se uma função possui uma primitiva, então na verdade essa função possui um infinidade de primitivas, isto é, podemos falar na família de primitivas da função. Por outro lado, se f é uma função definida num intervalo, podemos caracterizar a família de primitivas de f em função de uma das primitivas, mais explicitamente,

Teorema 2.1*: *Se F e G são primitivas de uma função f definida num intervalo* $[a,b]$, *então existe uma constante c tal que* $F(x) = G(x) + c$.

Podemos então afirmar que se G é uma primitiva para uma função f definida num intervalo, então todas as primitivas de f são dadas por $G(x) + c$, onde c é qualquer número real. Em outras palavras, duas primitivas de uma mesma função diferem por uma função constante.

Nos exemplos 3 e 6 acima, vimos que $F(x) = \int_1^x t^2 dt$ e $H(x) = \frac{x^3}{3}$ são primitivas para a função $f(x) = x^2$. Pelo Teorema 2.1 acima, temos que

$$
\begin{aligned}
F(x) &= H(x) + c \\
&= \frac{x^3}{3} + c
\end{aligned}
$$

para alguma constante c. Como $F(1) = 0$,

$$
\begin{aligned}
F(1) &= H(1) + c \\
0 &= \frac{1}{3} + c,
\end{aligned}
$$

donde $c = -\frac{1}{3}$ e, portanto,

$$\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

É importante salientar que, em particular, a primeira versão do TFC garante que *toda função contínua tem uma primitiva*, isto é, toda função contínua num intervalo é a função derivada de alguma outra função.

A segunda versão do TFC, que apresentamos a seguir, é a versão que é mais comumente conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo. Essa versão nos diz que se conhecemos uma primitiva para uma função contínua, então podemos calcular qualquer integral definida dessa função, sem precisarmos apelar para suas somas de Riemann.

Teorema Fundamental do Cálculo (II)*: *Se G é uma primitiva para uma função f que é contínua num intervalo contendo os números a e b, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Antes de darmos alguns exemplos de aplicação desse teorema, vamos introduzir uma notação que é bastante prática: denotamos $G(b) - G(a)$ pela expressão $G(x)|_a^b$. Com essa notação temos, nas condições do TFC (II),

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b \, .$$

Exemplos

7. Se a e b são números reais quaisquer e $n \geq 1$ é um número inteiro, então

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

De fato, já sabemos que $\frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}}{n+1}) = x^n$, isto é, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é uma primitiva para x^n. Logo, pelo TFC (II),

$$\int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Em particular, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Observe que, indiretamente, calculamos o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2$, já que no Exemplo 3 da seção 1 havíamos concluído que $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 \to \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

8. Qual é a da área região, *R*, limitada pelo gráfico de *f*(*x*) = sen *x* e pelo intervalo [0, 2π]?

Já sabemos que $A(R) = \int_0^{2\pi} |\mathrm{sen}\, x|\, dx$.. Como sem *x* > 0 para *x* ∈ (0, π) e sen *x* < 0 para *x* ∈ (π, 2π)⁰, com sen 0 = sen π = sen 2π = 0, temos que

$$|\mathrm{sen}\, x| = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ -\mathrm{sen}\, x & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\mathrm{sen}\, x|\, dx &= \int_0^{\pi} |\mathrm{sen}\, x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\mathrm{sen}\, x|\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\mathrm{sen}\, x) dx \\ &= -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi \\ &= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4, \end{aligned}$$

pois – cos *x* é uma primitiva para sen *x* e cos *x* é uma primitiva para –sen *x*.

9. Se $x > 0$, então $\ln x = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.\, dt$.

De fato, $\ln x$ é uma primitiva para $\frac{1}{x}$, $x > 0$. Logo, aplicando o TFC (II), obtemos

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x - \ln 1 = \ln x,$$

já que $\ln 1 = 0$.

Observe que essa propriedade nos permite fazer uma interpretação geométrica para a função $\ln x$. Se $x > 1$, então a função $\frac{1}{t}$ é não negativa no intervalo $[1, x]$ e, portanto, sua integral nesse intervalo é a área da região R_x, determinada pelo gráfico de $\frac{1}{t}$, $t \in [1, x]$ e pelo intervalo $[1, x]$ no eixo-x, (veja Figura 2.1a), isto é,

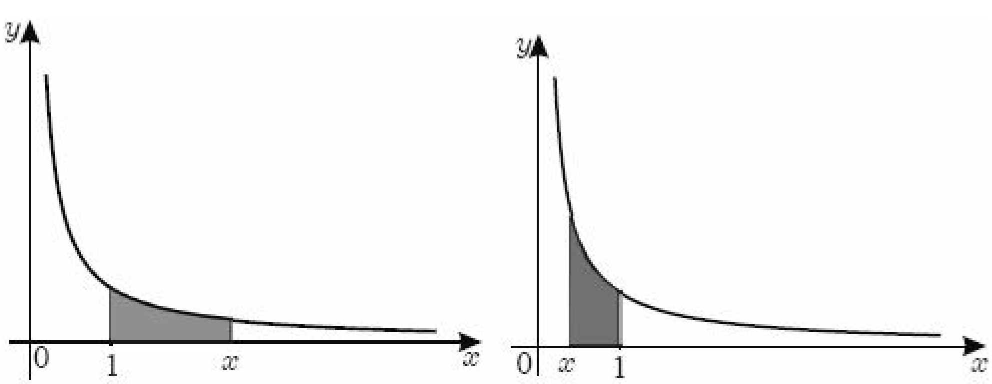
$$\ln x = A(R_x), \text{ para } x > 1.$$

Por outro lado, se $0 < x < 1$, e R_x é a região determinada pelo gráfico de $\frac{1}{t}$, $t \in [x, 1]$ e pelo intervalo $[x, 1]$ no eixo-x (veja Figura 2.1b), então

$$A(R_x) = \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\ln x,$$

isto é,

$$\ln x = -A(R_x), \text{ para } 0 < x < 1.$$



(a) $\ln x = A(R_x)$ (b) $\ln x = -A(R_x)$

Figura 2.1

Uma consequência mais teórica das duas versões do TFC é a derivabilidade de certas funções definidas por integrais.

Vejamos um exemplo: como a função $f(x)$ = cós x é contínua em $\mathbb{R}$, temos que dado um número real x, f é contínua no intervalo $[0, x^2]$ e, portanto, podemos falar de sua integral nesse intervalo, $\int_0^{x^2} \cos t\, dt$, isto é, a cada número x podemos associar o número $\int_0^{x^2} \cos t\, dt$. Estamos assim falando de uma função h definida pela expressão

$$h(x) = \int_0^{x^2} \cos t\, dt.$$

Como sen t é uma primitiva para cos t, decorre do TFC que

$$\begin{aligned} h(x) = \int_0^{x^2} \cos t\, dt &= \operatorname{sen} t\big|_0^{x^2} \\ &= \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen} 0 \\ &= \operatorname{sen}(x^2). \end{aligned}$$

e, portanto, h é derivável com $h'(x) = 2x \cos x^2$.

Observe, no entanto, que podemos chegar a esse resultado sem nos utilizarmos do fato de conhecer uma primitiva para a função cosseno. De fato, denotemos por G uma primitiva da função cosseno que sabemos existir, já que cos x é contínua (pelo TFC I). Podemos então usar o TFC II para concluir que

$$\begin{aligned} h(x) = \int_0^{x^2} \cos t\, dt &= G(t)\big|_0^{x^2} \\ &= G(x^2) - G(0) \end{aligned}$$

e, portanto, h, sendo a composta de funções deriváveis, é derivável com

$$\begin{aligned} h'(x) &= G'(x^2)\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= 2xG'(x^2). \end{aligned}$$

(observe que $G(0)$ não contribui com nada para a derivada, pois é uma constante e derivada de uma função constante é zero). Mas, por definição, G ser uma primitiva da função cosseno quer dizer que $G'(x)$ = cós x. Logo, $G'(x^2) = \cos x^2$, donde $h'(x) = 2x \cos x^2$.

Em geral, se f é uma função contínua num intervalo I, e α e β são funções definidas num intervalo tal que, para cada x, tem-se que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ pertencem ao intervalo I, podemos definir a função

$$h(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt.$$

Por exemplo, a expressão

$$h(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} t^2\,dt$$

define uma função cujo domínio é $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2: *Se f é contínua e α e β são deriváveis, então*

$$h(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

é derivável com

$$h'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Demonstração: Seja G uma primitiva para f. Então

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = G(t)\big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \\ &= G(\beta(x)) - G(\alpha(x)), \end{aligned}$$

isto é,

$$h = G \circ \beta - G \circ \alpha.$$

Como G é uma primitiva para f, temos que G é derivável com $G'(x) = f(x)$ e, portanto, pela regra da cadeia h também é derivável com

$$h'(x) = G'(\beta(x))\beta'(x) - G'(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Como $G'(\beta(x)) = f(\beta(x))$ e $G'(\alpha(x)) = f(\alpha(x))$, temos que

$$h'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \qquad \square$$

Por exemplo, a função dada como exemplo acima,

$$h(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} t^2\, dt,$$

é derivável com

$$h'(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x + \cos^2 x \operatorname{sen} x.$$

A utilidade da versão prática do TFC, isto é, da segunda versão, é evidente. No entanto, sua utilidade depende de conhecermos uma boa primitiva para a função que queremos integrar, isto é, uma primitiva que pode ser descrita por uma expressão que resulte de operações (soma, produto, quociente, composição) com as funções elementares. Ocorre que muitas funções contínuas, na verdade a maioria, não possuem uma boa primitiva. Para essas funções, a melhor expressão que temos à disposição é aquela dada pela primeira versão do TFC, isto é, uma expressão que envolve uma integral definida e, nesse caso, a segunda versão do TFC não tem qualquer utilidade. Decorre daí a importância das técnicas numéricas de integração que serão discutidas na próxima seção.

Exemplos clássicos de funções assim são $f(x) = e^{x^2}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x^2$. Em geral, não é uma questão fácil decidir se podemos ou não encontrar uma boa primitiva para uma função contínua. Mais adiante, trataremos do que é conhecido como *técnicas de integração*, que se resume a tentativas de reduzir a integral de uma função à integral de uma outra função (ou outras funções) para a qual conhecemos uma boa primitiva. Antes, porém, trataremos das técnicas numéricas de integração.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_0^2 6x^4\,dx$

(b) $\int_3^2 (\frac{t^2}{3} - \sqrt{t})\,dt$

(c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{4}{x^2} dx$

(d) $\int_5^1 4x^{\frac{3}{4}}\,dx$

(e) $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

(g) $\int_{-4}^{-3} \frac{e^t}{3}\,dt$

(h) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} (\operatorname{sen} x + 2\cos x)\,dx$

(i) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \operatorname{tg} x\,dx$

(k) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

(l) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

   (a) Calcule a área da região R entre o gráfico de f e o intervalo $[0, 2]$ no eixo-x.

(b) Para cada $x \geq 2$, seja $g(x)$ a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[0, x]$. Ache uma expressão para $g(x)$.

3. Calcule a área da região R entre o gráfico de seno e o intervalo $[0, 2\pi]$ no eixo-x.

4. Seja F(x) = $F(x) = \int_0^x t^2 + t \, dt.$ Ache uma expressão algébrica para F.

(a) Derive a função $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

(b) Calcule $\int_0^1 \frac{(3x^2+x^4)}{(1+x^2)^2} \, dx.$

5. Derive as funções $f(x) = \frac{x}{1+x}$ e $g(x) = -\frac{1}{1+x}$ e calcule $\int_3^2 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx$. O que se pode concluir a respeito da relação entre f e g?

6. Encontre uma primitiva, F, para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tal que $F(-1) = 1$.

7. Derive as seguintes funções:

(a) $f(t) = \int_0^t e^{x^2}\,dx$

(b) $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}dt$

(c) $f(x) = \int_x^0 e^{-s^2}\,ds$

(d) $f(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1+s^2}\;ds$

(e) $f(s) = \int_{\cos s}^{\operatorname{sen} s} t\operatorname{sen}\,t\;dt$

(f) $f(x) = \int_1^x (\operatorname{sen}\,t^2 + e^{-t^2})dt$

(g) $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\ln t}{t}dt$

(h) $f(x) = \int_x^1 e^{t^2}\;dt$

(i) $f(x) = \int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

(j) $f(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2+1)\,dt$

8. Seja $f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\,dt$. Calcule $f'(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}})$.

9. Seja $f(x) = 2^{(\operatorname{sen}^2 x - \cos x)^5}$. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt$.

10. Seja $g(x) = \int_0^x 2\,e^{-t^2}dt$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

11. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\int_0^{2x} f(t)dt - 2\int_0^x f(t)dt\right)\right]$, onde $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua., onde f

: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é contínua.

12. Sejam $F(x) = F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ e $G(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt + \int_0^1 e^{-t^2}\,dt.$ Derive F e G. Qual é a relação entre essas funções?

13. Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se que

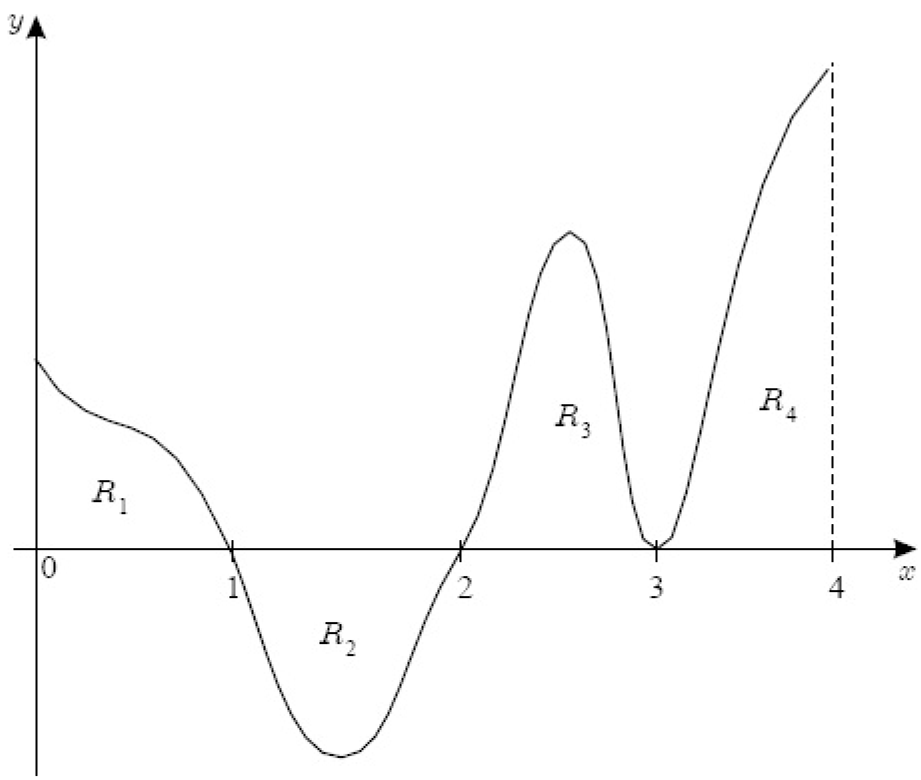
$$\int_{1-x}^{1+x} (t-1)^3 e^{t^2-2t+1}\,dt = 0,$$

(Sugestão: derive a função $f(x) = f(x) = \int_{1-x}^{1+x} (t-1)^3 e^{t^2-2t+1}\,dt.$)

14. Considere

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

onde $f(t)$ é a função cujo gráfico é dado abaixo.



Sabendo que as áreas das regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 são $A(R_1) = 2$, $A(R_2) = 2$, $A(R_3) = 3$ e $A(R_4) = 4$:

(a) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função G.

(b) Determine os pontos de máximo e de mínimo local da função G.

(c) Marque no eixo dos x os pontos de inflexão da função G.

(d) Determine os intervalos onde o gráfico de G possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo.

(e) Calcule $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, $G(4)$.

(f) Determine os pontos de máximos e mínimos absolutos da função G no intervalo $[0,4]$.

(g) Faça em esboço do gráfico da função G.

15. Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^x (t^2-1)e^{-t^2}dt$ para $x \in [-2,2]$.

(a) Ache os pontos de máximo e de mínimo locais de F.

(b) Ache os pontos de inflexão.

(c) Sabendo que $F(-2) = 1$, faça um esboço do gráfico de F.

16. Considere a função $G(x) = G(x) = \int_0^x e^{3t^4+4t^3}\,dt.$.

(a) Determine os pontos de inflexão de G.

(b) Quais são os intervalos em que o gráfico de G é côncavo para baixo?

(c) Quais são os intervalos em que o gráfico de G é côncavo para cima?

17. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\int_3^{2-x} e^{t^2-9}dt.$

(a) Em quais intervalos, se houver, f é crescente? Em quais intervalos, se houver, f é decrescente?

(b) Determine, se houver, os pontos de máximo e mínimo local de f.

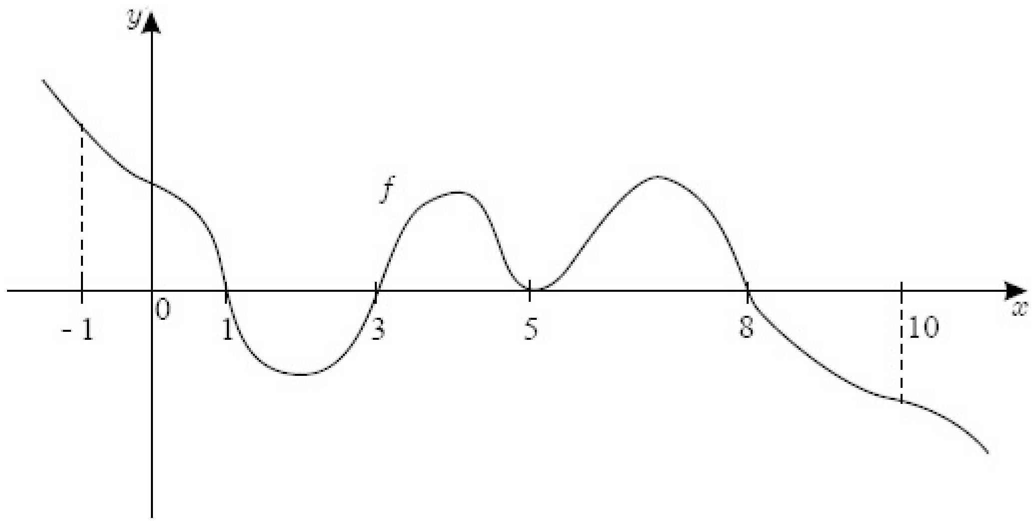
(c) Em quais intervalos, se houver, o gráfico de f é côncavo para cima? Em quais intervalos, se houver, o gráfico de f é côncavo para baixo?

(d) Determine, se houver, os pontos de inflexão do gráfico de f.

18. Seja f contínua com $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 3$. Calcule $\int_{-1}^{1} f(2x)dx$ (sugestão: utilize o TFC.)

19. Mostre que se f é contínua, então $\int_{a}^{b} f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)dx.$

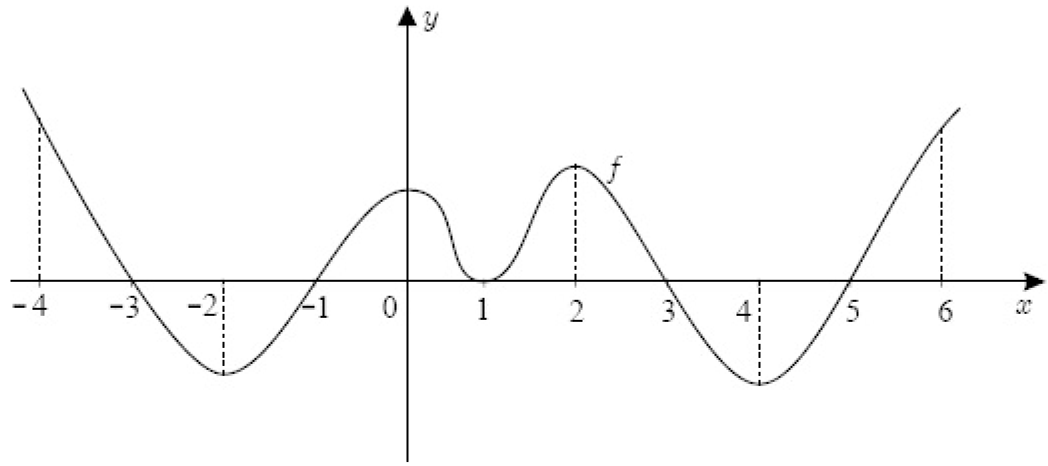
20. Considere a função $F(x) = \int_{0}^{x-1} f(t)\, dt$ definida no intervalo [0, 10], onde f é dada pelo gráfico abaixo. Determine os pontos de extremo local da função F no intervalo (0,10).



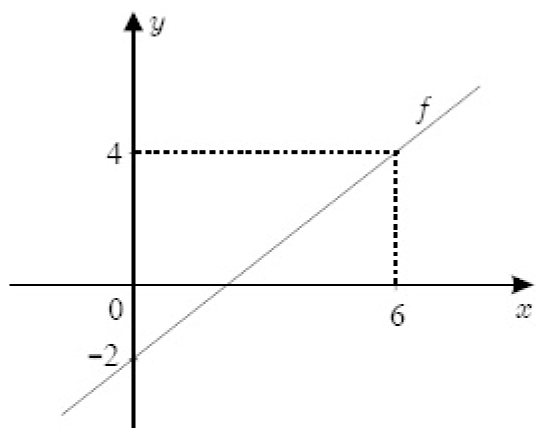
21. Considere a função $G(x) = \int_{1}^{2x} \frac{f(t)}{2}dt$ definida no intervalo $x \in [-1, 2]$, onde o gráfico de f é dado abaixo.

(a) Em quais intervalos G é crescente? Em quais intervalos G é decrescente?

(b) Determine os pontos de máximo e mínimo local da função G.



22. Considere a função $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ definida no intervalo [1,6], onde f é a função cujo gráfico é a reta dada na figura abaixo. Determine o ponto de mínimo global da função $F(x)$.



23. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Calcule $\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$. Qual pode ser uma interpretação geométrica para este limite?

   (b) Utilizando o gráfico de f e comparando áreas, verifique que para n inteiro maior que 1:

   $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \leq \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

   Conclua que a série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ é convergente com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2.$

24. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) Calcule $\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt.dt$. Qual pode ser uma interpretação geométrica para este limite?

(b) Utilizando o gráfico de g e comparando áreas, verifique que para n inteiro positivo:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x}dx$

Conclua que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ não converge.

25. Use a função $h(x) = e^{-x}$ para concluir que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k}$ é convergente e $\frac{1}{e} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k} < 1.$

3. Integração numérica

Como já dissemos anteriormente, ao fazermos estimativas para o erro quando usamos as somas de Riemann para aproximar uma integral deíinida, se desejamos alcançar uma precisão muito grande é conveniente podermos dispor de métodos numéricos mais eíicientes para calcular a integral, isto é, um processo que permita a construção de uma sequência de aproximações que venha a convergir mais rapidamente para o valor da integral.

Nesta seção apresentaremos o Método dos Trapézios e o Método de Simpson. Para isso, começaremos por interpretar cada parcela, $f(\zeta_i)\Delta_i x$, de uma soma de Riemann, como a integral de uma função constante.

Como já vimos, se [c, d] é qualquer intervalo e α é um número real, então

$$\int_c^d \alpha dx = \alpha(d-c),$$

isto é, na expressão $\int_c^d \alpha dx$ o número real α é identificado com a função constante $g(x) = \alpha$, $x \in [c, d]$.

Assim, se f é uma função integrável num intervalo $[a, b]$ e $R(f, P) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x$ é uma soma de Riemann de f sobre uma partição, $P = \{x_0, x_1, \ldots,$

$x_k\}$, podemos, para cada i, interpretar a parcela

$$f(\zeta_i)\Delta_i x = f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

como a integral da função constante, $g_i(x) = f(\zeta_i)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, isto é,

$$f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx.$$

Ou seja, podemos dizer que

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{k}(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx).$$

Por outro lado, como P é uma partição de $[a, b]$ (em particular, $x_0 = a$ e $x_k = b$), decorre do Teorema 1.4 que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right)\end{aligned}$$

e, portanto, comparando as duas somas

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k}(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx) \qquad \text{e} \qquad R(f,P) = \sum_{i=1}^{k}(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx),$$

podemos dizer que usar uma soma de Riemann para calcular uma aproximação para a integral $\int_a^b f(x)dx$ é o mesmo que, em cada subintervalo, $[x_{i-1}, x_i]$, substituir a integral de f pela integral de uma função do tipo mais simples que conhecemos, uma função constante, escolhendo para a constante o valor de f em algum ponto ζ_i do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é, estamos tomando a integral da função constante $g_i(x) = f(\zeta_i)$ como uma aproximação da integral de f nesse intervalo,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx,$$

donde

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right) \approx \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx\right).$$

Essa maneira de olhar para as somas de Riemann é interessante, pois nos dá a ideia de que se em cada subintervalo usarmos para substituir f uma função que ainda seja suficientemente simples, de tal forma que possamos calcular sua integral exata, mas que coincida com f em mais pontos do que a função constante que só podemos garantir coincidir com f no ponto ζ_i, talvez seja possível obter aproximações melhores com um número menor de divisões.

O Método dos Trapézios

O método numérico denominado Método dos Trapézios consiste em calcular aproximações para $\int_a^b f(x)dx$, onde f é uma função contínua, usando-se partições P_n, obtidas pela divisão de $[a, b]$ em n intervalos de mesmo comprimento, sendo que em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ substituímos a função f pela função g_i, cujo gráfico é o segmento de reta que une os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Isto é, a ideia é usar a integral de g_i no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como uma aproximação da integral de f nesse intervalo. Em particular, nesse caso, estamos usando uma função g_i, que coincide com f em pelo menos dois pontos do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é,

$$g_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad g_i(x_i) = f(x_i).$$

Nas Figuras 3.1a e 3.1b temos o gráfico de uma função contínua e positiva. Na Figura 3.1a, podemos ver que, para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, a parcela

$$f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)dx$$

da soma de Riemann corresponde do retângulo R_i, determinado pelo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ no eixo-x e pelo segmento correspondente da reta horizontal $y = f(x_i)$.

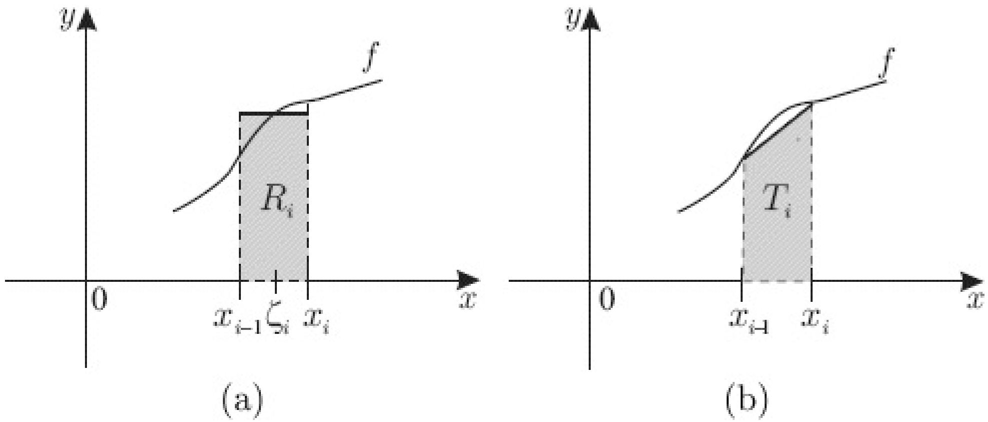


Figura 3.1

Por outro lado, na Figura 3.1b podemos ver que a parcela $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx$ corresponde à área do trapézio T_i, determinado pelo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ no eixo-x e pelo segmento de reta que é o gráfico de g_i: daí decorre a denominação Método dos Trapézios.

Calculemos então as aproximações obtidas pelo Método do Trapézio para a integral de uma função contínua f, num intervalo $[a, b]$.

Seja P_n a partição $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, obtida pela divisão de $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\frac{b-a}{n}$. Então,

$$x_0 = a \quad \text{e} \quad x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

e $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$, seja g_i a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Como no exemplo 4, já que o gráfico de g_i é uma reta, temos que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(g_i(x_{i-1}) + g_i(x_i))(x_i - x_{i-1})}{2},$$

e, como $g_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ e $g_i(x_i) = f(x_i)$, obtemos, para cada i,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(f(x_{i-1}) + f(x_i))(x_i - x_{i-1})}{2}$$
$$= (\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2})(\frac{b-a}{n}),$$

já que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Tomando então $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx$ como uma aproximação para $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, temos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx,$$

donde

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right) \approx \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx \right).$$

Assim, a aproximação que queremos é

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} (\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx) = (\frac{b-a}{n}) \sum_{i=1}^{n} (\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}).$$

Mas observe que, para cada $1 < k < n$, o número $\frac{f(x_k)}{2}$ aparece em exatamente duas parcelas da soma $\sum_{i=1}^{n} (\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2})$: por exemplo $\frac{f(x_1)}{2}$ aparece na primeira e na segunda parcelas, quando fazemos $i = 1$ e $i = 2$, respectivamente,

$$\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Em geral, se $1 < k < n$, o número $\frac{f(x_i)}{2}$ aparece quando fazemos $i = k$ e $i = k + 1$,

$$\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} + \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2},$$

e, portanto, o ponto x_k contribui com $\frac{f(x_k)}{2} + \frac{f(x_k)}{2} = f(x_k)$ para a soma total.

Ou seja, apenas $x_0 = a$ e $x_n = b$ só contribuem para a soma com $\frac{f(x_0)}{2}$ e $\frac{f(x_n)}{2}$, donde

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right) = \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}$$
$$= \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)$$

e, portanto,

$$\tau_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)\right)$$
$$= \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2n} + \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i).$$

Vejamos agora que $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \int_a^b f(x)dx$, isto é, o Método dos Trapézios fornece aproximações para $\int_a^b f(x)dx$ com a precisão que desejarmos. Para isso, observe que, como $x_i - x_{i-1} = \frac{(b-a)}{n}$ e $x_n = b$, podemos escrever τ_n na forma

$$\tau_n = \frac{f(a)(b-a)}{2n} + \frac{f(b)}{2}\cdot\frac{(b-a)}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \frac{f(a)(b-a)}{2n} + \left(f(b) - \frac{f(b)}{2}\right)\frac{(b-a)}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \frac{f(a)(b-a)}{2n} - \frac{f(b)(b-a)}{2n} + f(b)\frac{(b-a)}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \frac{(f(a)-f(b))(b-a)}{2n} + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

e, portanto, incluindo a parcela $f(x_n)(x_n - x_{n-1})$ no somatório, obtemos que

$$\tau_n = \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{2n} + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ou seja,

$$\tau_n = \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{2n} + s_n \qquad (*)$$

onde s_n é a soma de Riemann, $s_n = R(f, P_n) = \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$, de f sobre a partição P_n. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \tau_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= 0 + \int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{2n} = \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx,$$

já que f é integrável e $|P_n| = \frac{(b-a)}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Na seção 1, fizemos uma estimativa para o erro quando usamos, para calcular aproximações para a integral definida de uma função com derivada contínua no intervalo $[a,b]$, as somas de Riemann sobre partições P_n geradas pela divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento. Mais precisamente, vimos que se M_1 é o valor máximo de f' em $[a, b]$, então

$$\left| s_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

O teorema que apresentamos abaixo, sem demonstração, fornece uma estimativa para o erro de uma aproximação dada pelo Método dos Trapézios, quando f é uma função duas vezes derivável com derivada segunda contínua em [*a, b*].

Teorema 3.1: *Sejam f uma função com derivada segunda contínua em* [*a*,*b*] *e* M_2 *o valor máximo de f″ em* [*a*,*b*]. *Então*

$$\left|\tau_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M_2}{10}\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Comparando as duas estimativas, vemos que se usamos as somas de Riemann o erro tende a 0 como $\frac{1}{n}$ tende a 0, enquanto que se usamos o Método dos Trapézios o erro tende a 0 como $\frac{1}{n^2}$ tende a 0. Também é interessante observar que a igualdade (*) acima, nos diz que, para um mesmo valor de *n*, o custo adicional introduzido pelo Método dos Trapézios em relação às somas de Riemann s_n, se refere apenas às operações com a parcela $\frac{(f(a)-f(b))(b-a)}{2n}$ e, no entanto, se *n* é suficientemente grande, a precisão dada pelo Método dos Trapézios é muito maior que aquela dada pelas somas de Riemann.

O Método de Simpson

Como já observamos acima, no Método dos Trapézios, em cada subintervalo de comprimento $\frac{b-a}{n}$ usamos duas informações precisas sobre *f*, os números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, em véz de apenas uma, o número $f(x_i)$, como nas somas de Riemann. Vimos também, quando comparamos as estimativas, que 0 Método dos Trapézios gera uma sequência de aproximações que converge mais rapidamente para 0 valor da integral definida $\int_c^d f(x)dx$.

Daí, é razoável esperar que se em cada subintervalo de comprimento $\frac{b-a}{n}$, pudermos usar três informações precisas sobre *f*, isto é, os valores de *f* em três pontos de cada subintervalo, venhamos a obter uma sequência de aproximações que tenha a propriedade de convergir para $\int_c^d f(x)dx$ ainda mais rapidamente do que aquela gerada pelo Método dos Trapézios. Isso é o que faz o Método de Simpson.

A ideia básica do Método de Simpson, para obter aproximações para $\int_c^d f(x)dx$ é decompor o intervalo [*a, b*] em *n* subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{n}$ e, em cada um desses subintervalos, substituir a função *f* por um polinômio, de grau no máximo 2, com a propriedade de coincidir com *f* nos pontos extremos e no ponto médio do subintervalo.

A Figura 3.2 ilustra o Método de Simpson, quando dividimos o intervalo em quatro subintervalos de mesmo comprimento. Na Figura 3.2a é dada a curva constituída pelo gráfico de quatro polinômios de grau 2 (um em cada subintervalo), sendo que cada polinômio coincide com *f* (pelo menos) nos pontos extremos e no ponto médio do subintervalo correspondente. Na Figura 3.2b temos a curva da figura (a) e o gráfico de *f*.

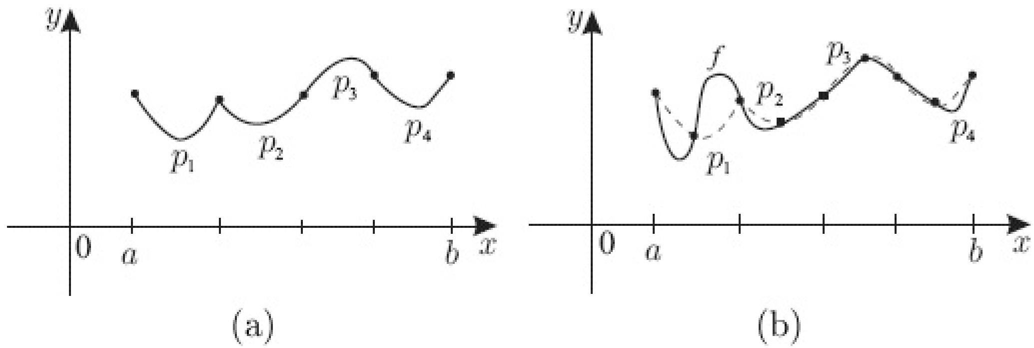


Figura 3.2

Em cada subintervalo da decomposição usaremos a integral do polinômio substituto para aproximar a integral de *f* no subintervalo. O lema que se segue garante que isso pode ser feito:

Lema 3.1: *Se a_1, a_2 e a_3 são três números reais distintos, então, dados b_1, b_2 e b_3 números reais quaisquer, existe um polinômio p, de grau no máximo 2, tal que*

$$p(a_1) = b_1,\ p(a_2) = b_2 \text{ e } p(a_3) = b_3.$$

Observamos que o grau de p é menor do que 2 quando os pontos (a_1,b_1), (a_2, b_2) e (a_3, b_3) são colineares, e, nesse caso, o gráfico de p é a reta que contém os três pontos.

A demonstração desse lema corresponde a verificarmos que o sistema

$$\begin{aligned} \alpha\, a_1^2 + \beta\, a_1 + \gamma &= b_1 \\ \alpha\, a_2^2 + \beta\, a_2 + \gamma &= b_2 \\ \alpha\, a_3^2 + \beta\, a_3 + \gamma &= b_3. \end{aligned}$$

de três equações e três incógnitas (α, β e γ), tem solução.

Para o Método de Simpson usaremos esse lema com a_1 e a_3 sendo extremos de um subintervalo gerado pela decomposição do intervalo $[a,b]$, tendo a_2 como ponto médio e com $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$ e $b^3 = f(a_3)$. Ou seja, um polinômio, de grau no máximo 2, que coincide com f nos pontos extremos e no ponto médio do subintervalo.

O teorema seguinte nos diz que não precisamos conhecer os coeficientes do polinômio substituto para calcular sua integral no respectivo subintervalo.

Teorema 3.2: *Se $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, onde α, β, e γ são números reais quaisquer, então*

$$\int_c^d p(x)dx = \frac{(d-c)}{6}\left[p(c) + 4\,p\left(\frac{c+d}{2}\right) + p(d)\right].$$

Observe que esse teorema nos diz que se p é um polinômio de grau no máximo 2, então podemos calcular sua integral num intervalo de extremos c e d, conhecendo apenas os valores de p nos pontos extremos, c e d, e no ponto médio $\frac{c+d}{2}$. A demonstração desse teorema consiste em efetuar os cálculos em cada um dos membros da igualdade (usando que $\int_c^d(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x\Big|_c^d$) e verificar que os resultados são iguais.

Como já dissemos, a ideia do Método de Simpson é dividir 0 intervalo $[a, b]$ em subintervalos de mesmo comprimento e, em cada um desses subintervalos, substituir f por um polinômio de grau no máximo 2 que coincida com f em cada extremidade e no ponto médio do subintervalo.

Assim, como para cada subintervalo precisamos também de seu ponto médio, é conveniente, para cada $n \geq 1$, considerar a partição $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}\}$, obtida pela divisão de $[a, b]$ em $2n$ subintervalos de mesmo comprimento, $\frac{b-a}{2n}$, isto é,

$$x_0 = a$$
$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{2n}, \text{ para } 1 \leq i \leq 2n,$$

mas, em vez de substituirmos f em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, como fizemos no Método dos Trapézios, usamos os n intervalos $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{2n-2}, x_{2n}]$, ou seja, intervalos da forma $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $1 \leq k \leq n$, que têm comprimento $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$.

Assim, se um ponto da partição é indexado por um número par, então é extremo de um intervalo onde vamos substituir f por um polinômio e, se é um ponto indexado por um número ímpar, então é o ponto médio de um desses intervalos. Logo, queremos usar o Teorema 1.4 para decompor $\int_a^b f(x)dx$ na soma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \right).$$

Agora, em cada intervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, usamos o Lema 3.1 com

$$\begin{aligned} a_1 &= x_{2k-2}, & b_1 &= f(x_{2k-2}) \\ a_2 &= x_{2k-1}, & b_2 &= f(x_{2k-1}) \\ a_3 &= x_{2k}, & b_3 &= f(x_{2k}), \end{aligned}$$

para obter um polinômio de grau no máximo 2, $p_k(x)$, que tem a propriedade de coincidir com f nos pontos x_{2k-2}, x_{2k-1} e x_{2k} (veja Figura 3.3), isto é,

$$\begin{aligned} p_k(x_{2k-2}) &= f(x_{2k-2}) \\ p_k(x_{2k-1}) &= f(x_{2k-1}) \\ p_k(x_{2k}) &= f(x_{2k}). \end{aligned}$$

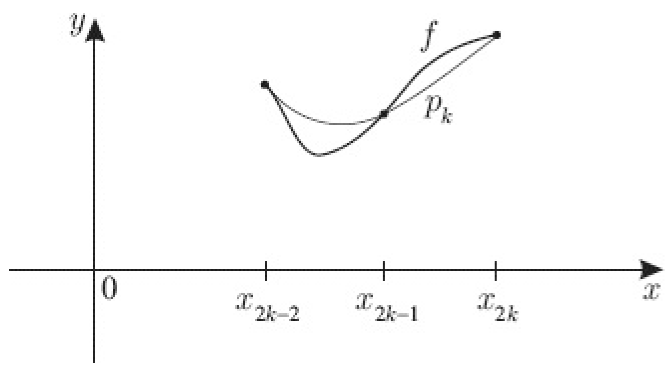


Figura 3.3

Usamos então a integral de $p_k(x)$ no subintervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ como uma aproximação da integral de f nesse subintervalo,

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x)dx.$$

Agora, como p_k é um polinômio de grau no máximo 2 e x_{2k-1} é o ponto médio do intervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, que tem comprimento $x_{2k} - x_{2k-2} = \Delta_n$, obtemos pelo Teorema 3.2 que

$$\begin{aligned}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x)dx &= \frac{(x_{2k} - x_{2k-2})}{6}\left(p_k(x_{2k-2}) + 4p_k(x_{2k-1}) + p_k(x_{2k})\right)\\ &= \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right).$$

Por exemplo, para o primeiro subintervalo $[x_0, x_2]$, temos o polinômio $p_1(x)$ que satisfaz

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= f(x_0)\\ p_1(x_1) &= f(x_1)\\ p_1(x_2) &= f(x_2)\end{aligned}$$

com

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_1(x)dx = \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \\ &\approx \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \\ &+ \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) + \ldots + \\ &+ \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right).\end{aligned}$$

Colocando $\frac{\Delta_n}{6}$ em evidência, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta_n}{6}((f(x_0) &+ 4f(x_1) + f(x_2)) + \\ &+ (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \ldots + \\ &+ (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))).\end{aligned}$$

Podemos ver, então, que:

- se i é ímpar, então x_i é o ponto médio de um dos intervalos e, portanto, contribui para a soma com $4f(x_i)$.

- se i é par e diferente de $2n$, então x_i é extremo de dois subintervalos e, portanto, contribui para a soma com $2f(x_i)$ (por exemplo, x_2 contribui uma vez com $f(x_2)$ porque x_2 *é o* extremo à direta do intervalo $[x_0, x_2]$ e mais uma vez com $f(x_2)$ porque também é o extremo à esquerda do intervalo $[x_2, x_4]$.

- Já $f(x_0)$ e $f(x_{2n})$ aparecem um única vez na soma, pois $x_0 = a$ e $x_{2n} = b$ só contribuem para a soma por serem, respectivamente, o extremo à esquerda do primeiro intervalo $[x_0, x_2]$ e 0 extremo à direita do último inter-valo $[x_{2n-2}, x_{2n}]$.

Assim, denotando por σ_n a aproximação que obtivemos para $\int_a^b f(x)dx$ pelo Método de Simpson, temos que

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\Delta_n}{6}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+\right.\\ &\left.+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right)\\ &= \frac{(b-a)}{6n}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+\right.\\ &\left.+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right),\end{aligned}$$

que, com a notação de somatório pode ser escrito como

$$\sigma_n = \frac{(b-a)}{6n}\left(f(a)-f(b)+\sum_{k=1}^{n}[2f(x_{2k})+4f(x_{2k-1})]\right).$$

Pode-se provar que a integrabilidade da função f no intervalo $[a, b]$ garante que a sequência σ_n, $n \geq 1$, obtida pelo Método de Simpson, converge para $\int_a^b f(x)dx$. Mais ainda, o teorema seguinte fornece estimativas para os erros dessas aproximações quando f é um função com derivada de ordem quatro, $f^{(4)}$, contínua no intervalo $[a, b]$.

Teorema 3.3: *Se f é uma função que possui derivada de ordem 4 contínua num intervalo $[a, b]$ e σ_n é uma aproximação dada pelo Método de Simpson, então*

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M_4}{10^2}\frac{(b-a)^5}{n^4},$$

onde M_4 é o valor máximo de $f^{(4)}$ no intervalo $[a, b]$.

Ou seja, nas condições do teorema, o erro de aproximações obtidas pelo Método de Simpson tende a 0 como $\frac{1}{n^4}$ tende a 0, garantindo, portanto, melhores condições de convergência que o Método dos Trapézios.

Uma consequência curiosa desse teorema é que se f é um polinômio de grau 3, então sua derivada de ordem 4 é a função constante igual a zero e, portanto, seu valor máximo $M_4 = 0$, o que diz, em particular, que $\sigma_1 = \int_a^b f(x)dx$. Como

$$\sigma_1 = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],$$

temos que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

se f é um polinômio de grau 3. Ou seja, o Teorema 3.2 também é válido para polinômios de grau 3.

Finalmente, é conveniente fazer alguns comentários a respeito das estimativas para o erro das aproximações obtidas pelos métodos numéricos para cálculo de integrais.

O fato é que as estimativas dadas pelos teoremas 3.1 e 3.3 têm, na verdade, um valor teórico, no sentido de que nos informam sobre o nível de eficiência de cada método, mas têm pouco valor prático, já que, em geral, não é fácil ter acesso aos valores máximos de derivadas da função que estamos integrando (M_2 para o Método dos Trapézios e M_4 para o Método de Simpson). Assim, na prática, se desejamos uma dada precisão, por exemplo, 10^{-5}, o que fazemos é calcular algumas aproximações até obter aproximações s_n e s_{n+1} tais que

$$|s_n - s_{n+1}| < 10^{-5}.$$

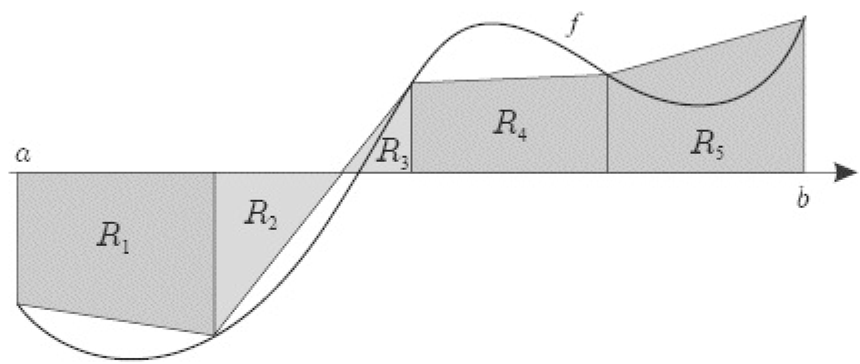
Por exemplo, se calculamos s_{50} e s_{51} e vemos que os truncamentos na quinta casa decimal desses dois números coincidem, é razoável (se estamos usando um método numérico seguro) admitir que qualquer desse números é uma aproximação para o número que estamos querendo aproximar com erro menor do que 10^{-5}.

De fato sabemos que não podemos garantir que isso é verdade, mas se estamos utilizando um programa confiável, um programa devidamente testado, temos uma grande chance de não cometer erros. Programas para cálculo numérico mais sofisticados já incluem critérios específicos que praticamente garantem a precisão desejada.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Considere a função *f* cujo gráfico é dado na figura abaixo:



Conhecendo as áreas da regiões associadas (R_1,R_2,R_3,R_4 e R_5) podemos calcular uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ que corresponde a um dos métodos de integração numérica.

(a) Sabendo que $A(R_1) = 11$, $A(R_2) = 4$, $A(R_3) = 2$, $A(R_4) = 8$ e $A(R_5) = 10$, calcule uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$

(b) Qual é o método numérico que fornece essa aproximação?

2. Sejam $g(x) = x^2 + x - 1$ e $h(x) = -2x^2 + x - \frac{1}{4}$. Sabendo que *f* é uma função contínua no intervalo [0,1] que satisfaz

$f(0) = g(0)$

$f(\frac{1}{4}) = g(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2})$

$f(\frac{3}{4}) = h(\frac{3}{4})$

$f(1) = h(1)$,

calcule a aproximação de $\int_0^1 f(x)dx$ $f(x)dx$ dada pelo Método de

Simpson com $n = 2$.

4. Buscando primitivas: técnicas de integração

O Teorema Fundamental do Cálculo em sua primeira versão garante que toda função contínua possui uma primitiva, dando uma expressão integral para suas primitivas. Por exemplo, sabemos que a função

$$F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\, dt$$

é uma primitiva para a função contínua $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ e, portanto, suas primitivas são dadas por $F(x) + c$, com c tomando valores no conjunto de números reais.

Já a segunda versão do TFC nos diz que se conhecemos uma primitiva para uma função contínua f, isto é, se conhecemos uma função que é dada a partir de operações (soma, produto, quociente ou composição) com funções elementares e cuja derivada é a função f, então podemos usá-la para calcular qualquer integral definida da função f. Nessa seção apresentamos o que denominamos *técnicas de integração*, isto é, alguns procedimentos com os quais tentamos encontrar uma tal primitiva, que chamaremos de uma *boa primitiva* para f.

Usaremos a expressão $\int f(x)\, dx$, que é chamada *a integral indefinida de f*, para designar a família de primitivas da função f. Como duas primitivas quaisquer de uma função diferem por uma constante, se F é uma primitiva de f dizemos que

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c.$$

onde c assume valores no conjunto de números reais.

Por exemplo, como $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$, temos que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e, portanto, qualquer primitiva de $f(x) = x$ é da forma $\frac{x^2}{2} + c$, para algum número real c, isto é,

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Observe que, fazendo $c = 0$, obtemos a primitiva acima $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Fazendo c

= 1, por exemplo, obtemos uma outra primitiva, $G(x) = \frac{x^2}{2} + 1$.

Um exemplo importante é a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$. Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

mas sabemos também que isso só é válido para $x > 0$, já que o domínio da função logarítmica só contém números positivos. Ou seja, ln x não é uma primitiva para a função f pois o domínio contém também os números negativos. De fato,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c,$$

já que $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$.

Das regras de derivação decorre que se F e G são funções deriváveis *e* α é um número real, então

$$(\alpha F)'(x) = \alpha F'(x)$$

e

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x).$$

Em outras palavras, se F e G são, respectivamente, primitivas para as funções f e g, então $\alpha\, F$ é uma primitiva para $\alpha\, f$ *e* $F + G$ *é* uma primitiva para $f + g$. Na notação que introduzimos para designar as primitivas de uma função, temos

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$$
$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Dizer que F *é a integral de* f é equivalente a dizer que F é uma boa primitiva para f, isto é,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Dizer que α é *a integral de f no intervalo* [*a, b*] é dizer que o número real α é *a integral definida de f no intervalo* [*a, b*], isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha.$$

Assim a *integral de f* é uma função, enquanto que a integral de f num intervalo (ou uma integral definida de *f*) é um número real.

Qualquer técnica de integração consiste, basicamente, na tentativa de reduzir a integral de uma função *f* à integral de uma ou mais funções para as quais conhecemos uma boa primitiva, isto é, uma primitiva que é obtida por meio de operações com funções elementares. Por outro lado, mesmo quando lidamos com a integral de uma função que não possui uma boa primitiva, o domínio das técnicas de integração pode ser bastante útil: do ponto de vista teórico, porque as novas integrais podem fornecer informações qualitativas que não são evidentes na integral original e, do ponto de vista prático, porque os métodos numéricos podem ser mais eficientes no cálculo das novas integrais.

Integração por substituição

Esta técnica de integração decorre da regra da cadeia. Suponhamos que conhecemos uma primitiva, G, para a função g (isto é, $G' = g$) e que h é uma função derivável. Da regra da cadeia decorre que

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx = G(h(x)) + c,$$

já que

$$\begin{aligned}(G \circ h)'(x) &= G'(h(x))h'(x)\\ &= g(h(x))h'(x),\end{aligned}$$

pois, como $G' = g$, temos que $G'(h(x)) = g(h(x))$.

Observe agora que, fazendo $u = h(x)$, podemos dizer que

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx = G(u) + c.$$

Mas, como $G' = g$, isto é, G é uma primitiva para g, temos também que

$$G(u) + c = \int g(u)\,du..$$

Dizemos então que

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx = \int g(u)\,du,,$$

onde $u = h(x)$ e $du = h'(x)\,dx$.

Ou seja, em resumo, se

$$f(x) = g(h(x))h'(x),$$

obtivemos que

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du,,$$

onde $u = h(x)$ e, portanto, se conhecemos uma boa primitiva, G, para a função g, conhecemos também uma boa primitiva para f, isto é, a função $F = G \circ h$.

Exemplos

1. Calculemos $\int x\,e^{x^2}dx.$

Fazendo

$$u = x^2,$$

temos que

$$du = 2x\,dx,$$

donde

$$\frac{1}{2}du = x\,dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}x\,dx = \int \frac{e^u}{2}du \\ = \frac{e^u}{2} + c \\ = \frac{e^{x^2}}{2} + c.\end{aligned}$$

Neste exemplo, com a notação usada acima, $g(u) = \frac{e^u}{2}$ e $u = h(x) = x^2$.

2. Problema: encontrar uma primitiva, F, para a função $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$, tal que $F(0) = -1$.

Fazendo

$$u = x^3 - 1,$$

obtemos

$$du = 3x^2dx$$

e, portanto,

$$\frac{1}{3}\,du = x^2\,dx,$$

donde

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{3}\frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + c \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 - 1\right| + c.\end{aligned}$$

Ou seja $F(x) = \frac{1}{3}$ ln $|x^3 - 1| + c$ para algum número real c. Para determinar c usamos a condição que queremos, $F(0) = -1$, isto é,

$$-1 = F(0) = \frac{1}{3}\ln(1) + c = 0 + c$$

e, portanto, $c = -1$ e $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3 - 1) - 1$.

3. Calculemos $\int \frac{2x+5}{3x-1}\,dx$..

Fazendo

$$u = 3x - 1,$$

temos que

$$du = 3dx \text{ e } du = 3\,dx \qquad \text{e} \qquad x = \frac{u+1}{3},,$$

logo

$$dx = \frac{1}{3}\,du \qquad \text{e} \qquad 2x + 5 = \frac{2}{3}(u+1) + 5,$$

donde

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5}{3x-1}\,dx &= \int \frac{1}{3}\frac{\frac{2(u+1)}{3} + 5}{u}\,du \\ &= \int \frac{2}{9}\,du + \frac{1}{3}(\frac{2}{3} + 5)\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{2}{9}\,u + \frac{1}{3}(\frac{2}{3} + 5)\ln|u| + c \\ &= \frac{2}{9}(3x-1) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3} + 5)\ln|3x-1| + c.\end{aligned}$$

Na verdade, o exemplo acima é um caso particular de uma situação mais geral: calculemos $\int \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\,dx$,, onde α, β, γ e δ são números reais dados e $\gamma \neq 0$.

Fazendo

$$u = \gamma x + \delta,$$

temos que

$$du = \gamma\, dx \text{ e } du = \gamma\, dx \qquad \text{e} \qquad x = \frac{u-\delta}{\gamma},$$

logo

$$dx = \frac{1}{\gamma}\, du \qquad \text{e} \qquad \alpha x + \beta = \frac{\alpha}{\gamma}(u-\delta) + \beta,$$

donde

$$\begin{aligned}
\int \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\, dx &= \int \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha/\gamma(u-\delta) + \beta}{u}\, du \\
&= \int \frac{\alpha}{\gamma^2}\, du + \frac{1}{\gamma}(\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}) \int \frac{1}{u}\, du \\
&= \frac{\alpha}{\gamma^2}\, u + \frac{1}{\gamma}(\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}) \ln|u| + c \\
&= \frac{\alpha}{\gamma^2}\, (\gamma x + \delta) + \frac{1}{\gamma}(\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}) \ln|\gamma x + \delta| + c.
\end{aligned}$$

Integração por partes

A técnica de integração por partes utiliza a regra de derivação para o produto de duas funções. Comecemos considerando um exemplo: não conhecemos, de imediato, uma primitiva para a função $f(x) = x \cos x$, mas observamos que $\cos x$ é a derivada de $g(x) = \operatorname{sen} x$ e, portanto, fazendo $h(x) = x$, temos que

$$f(x) = h(x)g'(x).$$

Lembrando agora da regra de derivação para o produto,

$$f(x) + g(x)h'(x) = h(x)g'(x) + g(x)h'(x) = (gh)'(x),$$

isto é,

$$f(x)+g(x)h'(x) = (gh)'(x),$$

que nos diz que a soma de uma primitiva de $f = hg'$ com uma primitiva de gh' é uma primitiva de $(gh)'$. Como gh é uma primitiva para sua derivada $(gh)'$, podemos dizer que

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)h'(x)\,dx = h(x)g(x)$$

e, portanto,

$$\int f(x)\,dx = h(x)g(x) - \int g(x)h'(x)\,dx.$$

Ou seja, reduzimos o problema de encontrar um primitiva para $f = hg'$ ao problema de encontrar uma primitiva para a função $h'g$. Dessa igualdade vemos que é como se já tivéssemos encontrado uma parte, a função gh, da primitiva de f: daí a denominação *integração por partes*.

O processo é bem-sucedido quando conhecemos uma boa primitiva para $h'g$. Esse é o caso de nosso exemplo, $f(x) = x \cos x$. Neste exemplo,

$$h(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sen} x \text{ e } f(x) = h(x)g'(x).$$

Então, usando a fórmula que obtivemos acima, temos que

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\\ &= x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + c\\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + c.\end{aligned}$$

De fato, derivando a função que obtivemos concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x\operatorname{sen} x + \cos x) &= \operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x\\ &= x\cos x = f(x).\end{aligned}$$

Sempre podemos tentar encontrar uma primitiva para uma função contínua pela integração por partes, mas não podemos garantir o sucesso, já que, em particular, existem funções que não possuem primitivas que resultam de operações (soma, produto e composição) com funções elementares.

A integração por partes pode ser resumida da seguinte forma: olhamos a função f que queremos integrar, como o produto de duas funções, uma das quais é a derivada de uma função já conhecida, isto é,

$$f(x) = h(x)g'(x),$$

com g sendo uma função conhecida. Como vimos acima, temos que

$$\int f(x)\,dx = \int h(x)g'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx.$$

Esperamos, então, que nossa escolha para as funções h e g tenha sido boa, de maneira que conheçamos uma boa primitiva para gh'. Usando novas variáveis, u e v, podemos representar a igualdade acima de uma forma mais simples: fazemos

$$\begin{aligned} u &= h(x) \\ du &= h'(x)\,dx \\ v &= g(x) \\ dv &= g'(x)\,dx \end{aligned}$$

e, portanto, nessas novas variáveis, a fórmula que obtivemos acima,

$$\int h(x)g'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx,$$

se reduz a

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

De fato, quando queremos integrar uma função f por partes (e, portanto, olharemos f como um produto de duas funções) pode ser estabelecida uma ordem de prioridade para decidir qual das duas funções escolheremos para *u:* funções logarítmicas, funções trigonométricas inversas, funções x^r, trigonométricas e, por último, as funções exponenciais. Por exemplo, nas integrais relacionadas a seguir as melhores escolhas para as funções u, segundo a ordem de prioridade citada, são:

$$\begin{array}{ll}
\int x \ln x \, dx & u = \ln x, \\
\int (x^2 + \sqrt{x}) e^x \, dx & u = (x^2 + \sqrt{x}), \\
\int \arctan x \, dx & u = \arctan x, \\
\int x \sec^2 x \, dx & u = x, \\
\int e^x \cos x \, dx & u = \cos x.
\end{array}$$

É importante observar que nem toda integral indefinida pode ser resolvida por partes, mas para aquelas que podem esta ordem de prioridade para a escolha da função *u* funciona na maioria dos casos.

Exemplos

3. Calculemos $\int \ln x \, dx$.

Podemos olhar para $f(x) = \ln x$ como $f(x) = 1 \cdot \ln x$. Como a função constante igual a 1 é a derivada de uma função que conhecemos, a função identidade, fazemos

$$u = \ln x$$

$$dv = 1 \, dx.$$

Então

$$v = x$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\
&= x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx \\
&= x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x + c.
\end{aligned}$$

Conferindo, isto é, derivando a função que obtivemos, vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x\ln x - x) &= \ln x + x(\frac{1}{x}) - 1 \\
&= \ln x + 1 - 1 = \ln x.
\end{aligned}
$$

4. Calculemos $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

Aqui, a função que queremos integrar é o produto de duas funções para as quais conhecemos primitivas, isto é, qualquer uma delas serve para ser vista como uma derivada. Devemos portanto escolher qual delas olharemos como sendo uma derivada. De imediato, vemos que $\frac{x^3}{2}$, cuja derivada é a função x^2, é mais complicada do que x^2, enquanto que a função $-\cos x$, cuja derivada é a função seno, tem o mesmo nível de complicação que a função seno. Esse fato indica que devemos escolher a função seno para considerá-la como uma derivada, isto é, escolhemos $u = x^2$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Com essa escolha, temos $v = -\cos x$, $du = 2x \, dx$. Logo

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \, dv \\
&= uv - \int v \, du \\
&= -x^2 \cos x - \int (-2\cos x) x \, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.
\end{aligned}
$$

De imediato, não conhecemos uma primitiva para $f(x) = x \cos x$, mas podemos usar a integração por partes novamente, agora para a função f. De fato, já fizemos isso antes e obtivemos

$$
\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + c \\
&= (2 - x^2)\cos x + 2x \operatorname{sen} x + c.
\end{aligned}
$$

Observe que se, nesse exemplo, fizéssemos a outra escolha, $u = \operatorname{sen} x$ e dv

$= x^2\, dx$, teríamos

$$v = \frac{x^3}{3}$$
$$du = -\cos x\, dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{sen} x - \int -\frac{x^3}{3} \cos x\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \int x^3 \cos x\, dx,\end{aligned}$$

chegando assim à integral de uma função ($g(x) = x^3 \cos x$) que é mais complicada do que aquela que queríamos integrar. Assim, podemos dizer que, entre várias opções, é conveniente escolher para a função que será vista como uma derivada, aquela cuja primitiva não é mais complicada do que sua derivada, ou que é a menos complicada possível quando comparada com sua derivada.

5. Calculemos $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

Seguindo o critério acima, escolhemos $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = e^x\, dx$ (na verdade, neste caso, qualquer escolha é boa). Então,

$$v = e^x$$
$$du = \cos x\, dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx.\end{aligned}$$

Para calcular $\int e^x \cos x \, dx$, usamos novamente a integração por partes, fazendo, agora,

$$v = \cos x$$
$$dv = e^x dx$$
$$du = -\operatorname{sen} x \, dx$$
$$v = e^x,$$

obtendo

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x \, dx &= \int u \, dv \\
&= uv - \int v \, du \\
&= e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx) \\
&= e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx,
\end{aligned}$$

donde

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

e, portanto,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

6. Problema: encontrar uma primitiva, F, da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ tal que $F(0) = -2$.

Podemos dizer que $f(x) = 1(\text{arctg } x)$. Fazemos

$$u = \text{arctg } x$$
$$dv = 1\, dx$$

e, portanto,

$$du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$v = x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \text{arctg}\, x\, dx &= x\, \text{arctg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ &= x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c \\ &= x\, \text{arctg}\, x - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + c.\end{aligned}$$

Queremos agora determinar c de tal forma que $F(x) = x \text{ arctg } x - \ln \left(\sqrt{1+x^2}\right) + c$ satisfaça a condição $F(0) = -2$, ou seja,

$$-2 = F(0) = 0 - \ln 1 + c = c$$

e, portanto, $F(x) = x \text{ arctg } x - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) - 2$.

Mudança de variável: substituição trigonométrica

A mudança de variável por uma função inversível é mais um recurso que utilizamos para tentar encontrar uma boa primitiva para uma função contínua. Esse recurso decorre também, como na integração por substituição, da regra da cadeia.

Sejam f uma função contínua, F uma primitiva de f e h uma função derivável. Se G é uma primitiva para a função $g = (f \circ h)h'$, isto é,

$$G'(t) = g(t) = f(h(t))h'(t),$$

então $F \circ h$ e G diferem por uma constante, já que, pela regra da cadeia, a função $F \circ h$ também é uma primitiva de g, ou seja,

$$\begin{aligned}(F \circ h)'(t) &= F'(h(t))h'(t) \\ &= f(h(t))h'(t) \\ &= g(t),\end{aligned}$$

e, portanto,

$$F(h(t)) = G(t) + C$$

para algum número real C. Agora, observe que se h é uma função inversível e $x = h(t)$, então $t = h^{-1}(x)$ e

$$F(x) = F(h(t)) = G(t) + C$$

$$= G(h^{-1}(x)) + C,$$

ou seja,

$$F = G \circ h^{-1} + C.$$

Essa igualdade nos diz que a função $G \circ h^{-1}$ é derivável e

$$(G \circ h^{-1})'(x) = F'(x) = f(x),$$

isto é, $G \circ h^{-1}$ também é uma primitiva para f. A utilização que fazemos desse resultado é que se h é uma função derivável e inversível e conhecemos uma primitiva, G, para a função $g = (f \circ h)h'$, podemos obter uma primitiva para f, a função $G \circ h^{-1}$. Nessas condições, usando a notação de integral indefinida, temos

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = G(t) + c$$

e

$$\int f(x)\,dx = G(h^{-1}(x)) + c,$$

donde, fazendo $h^{-1}(x) = t$, obtemos

$$\int f(x)\,dx = G(t) + c = \int f(h(t))h'(t)\,dt.$$

Ou seja, temos que se h é uma função derivável e inversível, então

$$\int f(x)\,dx = \int f(h(t))h'(t)\,dt,$$

onde $t = h^{-1}(x)$. Daí dizermos que $x = h(t)$ e $dx = h'(t)\,dt$.

Observe que na primeira técnica de integração que apresentamos, a integração por substituição, utilizamos a regra da cadeia para obter uma primitiva para a função $g(t) = f(h(t))h'(t)$, conhecendo uma boa primitiva para f. Aqui estamos fazendo o contrário: conhecendo uma boa primitiva para g, encontramos uma primitiva para f, mas para que isso seja possível a função h tem que ser inversível.

Exemplos

7. Calculemos $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Primeiro observamos que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}$ (arctg x) e arco tangente é da função inversa da função tangente no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Isso nos sugere tentar uma mudança de variável com $h(t)$ = tg t, para $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Fazemos, então,

$$x = \operatorname{tg} t$$
$$dx = \sec^2 t\,dt$$
$$t = \operatorname{arctg} x,$$

obtendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\sec^2 t\,dt \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sec^2 t}\sec^2 t\,dt \\
&= \int \operatorname{tg}^2 t\,dt = \int (\sec^2 t - 1)\,dt \\
&= \int \sec^2 t\,dt - \int 1\,dt = \operatorname{tg} t - t + c.
\end{aligned}$$

Como $x = \text{tg}\, t$, temos que $t = \text{arctg}\, x$ e, portanto,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = x - \text{ arctg}\, x + c.$$

8. Calculemos $\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$

Aqui, primeiro observamos que se

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

então

$$y^2 + x^2 = 1,$$

o que nos remete à identidade trigonométrica

$$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1,$$

sugerindo que devemos tentar a mudança de variável com $h(t) = \text{sen}\, t$, com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Sabemos que h é inversível com $h^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$. Fazemos, assim,

$$x = \text{sen}\, t$$
$$dx = \cos t\, dt$$
$$t = \text{arcsen}\, x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int \sqrt{1 - \text{ sen}^2 t}\ \cos t\, dt \\ &= \int \cos t \sqrt{\cos^2 t}\, dt. \end{aligned}$$

Agora observamos que como $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $\cos\, t \geq 0$ e, portanto, $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. Logo

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 t\, dt,$$

onde $t = \text{arcsen}\, x$. Podemos calcular $\int \cos^2 t\ dt$ por partes, obtendo (verifique)

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(\cos t \operatorname{sen} t + t) + c.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 t\, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \operatorname{sen} t + t) + c \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\operatorname{arcsen} x) \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{arcsen} x) + c.\end{aligned}$$

Usando agora que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) &= x \\ \cos(\operatorname{arcsen} x) &= \sqrt{1-x^2},\end{aligned}$$

chegamos a

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x) + c.$$

Quando a função h que usamos para efetuar a mundança de variável é uma função trigonométrica, como nos dois exemplos que apresentamos há pouco, o método de integração é também chamado de *substituição trigonométrica*.

De uma maneira geral, expressões da $\sqrt{a^2-x^2}$ ou $\sqrt{a^2+x^2}$, onde a é um número real positivo, podem, por meio de mudanças de variáveis, ser transformadas em expressões que envolvem as funções trigonométricas e onde aparece a raiz quadrada. Inicialmente reescrevemos as expressões nas formas

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= a\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})} \text{ e} \\ \sqrt{a^2+x^2} &= a\sqrt{(1+\frac{x^2}{a^2})}.\end{aligned}$$

Agora, no primeiro caso, fazendo $\frac{x}{a}$ = sen t, com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, temos que t = arcsen $(\frac{x}{a})$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= a\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}\\ &= a\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 t)}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t.\end{aligned}$$

Ou seja, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,$ onde t =arcsen $(\frac{x}{a})$.

No segundo caso, fazendo $\frac{x}{a}$ = tg t, com $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, temos que t = arctg $(\frac{x}{a})$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= a\sqrt{(1+\frac{x^2}{a^2})}\\ &= a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\\ &= a\sqrt{\sec^2 t} = a\sec t.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t, \text{onde } t = \operatorname{arctg}(\tfrac{x}{a}).$$

9. Calculemos $\int x^2\sqrt{2-x^2}\,dx.$.

Primeiro vemos que $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}.$. Daí vemos que queremos

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{2}} &= \operatorname{sen} t\\ x &= \sqrt{2}\operatorname{sen} t\\ dx &= \sqrt{2}\cos t\,dt,\end{aligned}$$

donde $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2}\cos t$ cost e, portanto

$$\int x^2\sqrt{2-x^2}\,dx = 4\int \operatorname{sen}^2 t\,\cos^2 t\,dt.$$

Reduzimos assim o problema a calcular a integral $\int \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt$, o que podemos fazer, integrando por partes:

temos que

$$\text{sen}^2 t \cos^2 t = (\text{sen}^2 t \cos t) \cos t.$$

Fazemos então

$$u = \text{sen}^2 t \cos t$$
$$dv = \cos t \, dt$$

donde

$$du = (2\text{sen } t \cos^2 t - \text{sen}^3 t)\, dt$$
$$v = \text{sen } t.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^2 t \cos^2 t \, dt &= \text{sen}^3 t \cos t - \int \text{sen}\, t (2\text{sen}\, t \cos^2 t - \text{sen}^3 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t - \int (2\text{sen}^2 t \cos^2 t - \text{sen}^4 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t - \int (2\text{sen}^2 t \cos^2 t - \text{sen}^2 t\, \text{sen}^2 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t - \int (2\text{sen}^2 t \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)\, \text{sen}^2 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t - \int (3\text{sen}^2 t \cos^2 t - \text{sen}^2 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t - \int 3\text{sen}^2 t \cos^2 t \, dt + \int \text{sen}^2 t \, dt,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int 4\text{sen}^2 t \cos^2 t \, dt &= \text{sen}^3 t \cos t + \int \text{sen}^2 t \, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t + \int (1 - \cos^2 t)\, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t + \int 1 \, dt - \int \cos^2 t \, dt \\
&= \text{sen}^3 t \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 t \, \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4}(\operatorname{sen}^3 t \cos t + t) - \int \frac{1}{4} \cos^2 t \, dt.$$

No exemplo 8 já usamos que $\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\cos t \operatorname{sen} t + t) + c$, donde

$$\int \frac{1}{4} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{8}(\cos t \operatorname{sen} t + t) + c.$$

Substituindo na expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 t \, \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{4}(\operatorname{sen}^3 t \cos t + t) - \frac{1}{8}(\cos t \operatorname{sen} t + t) + c \\ &= \frac{1}{8}(2 \operatorname{sen}^3 t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t + t) + c. \end{aligned}$$

Técnicas de integração e a integral definida

Na maioria das vezes, quando estamos buscando uma boa primitiva para uma função contínua, nosso objetivo é usar a primitiva para calcular uma integral definida usando, para isso, o Teorema Fundamental do Cálculo em sua segunda versão.

Assim sendo, é importante salientar que podemos usar as técnicas de integração diretamente com integrais definidas, isto é, ao invés de buscar uma boa primitiva para a função que estamos querendo integrar num intervalo, passamos de uma integral definida para uma outra (ou mais de uma) integral definida. A importância desse fato é que quando usamos a integração por substituição ou pela mudança de variável por um função inversível, muitas vezes trabalhar diretamente com as integrais definidas resulta numa economia ou simplificação dos cálculos.

Consideremos a integração por substituição. Suponhamos que, pela substituição $u = h(x)$, obtivemos que

$$\int f(x) \, dx = \int g(u) \, du$$

e que conhecemos uma boa primitiva, G, para a função g. Nesse caso, vimos que

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + c = G(h(x)) + c$$

e, portanto, pelo TFC,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(h(x))|_a^b = G(h(b)) - G(h(a)).$$

Mas, também pelo TFC, aplicado agora à função g, temos que

$$\int_{h(a)}^{h(b)} g(u)\,du = G(h(b)) - G(h(a)).$$

Ou seja, temos que se $\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du$ para $u = h(x)$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u)\,du.$$

Vejamos um exemplo: calcular $\int_0^\pi \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x\,dx$.

Façamos $u = \operatorname{sen} x$. Então $du = \cos x\,dx$ e, quando $x = 0$, temos que $u = \operatorname{sen} 0 = 0$, assim como quando $x = \pi$, $u = \operatorname{sen} \pi = 0$. Logo,

$$\int_0^\pi e^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x\,dx = \int_0^0 \mathrm{e}^{u^2} du = 0.$$

Observe que nem precisamos integrar a função e^{u^2}. De fato, essa é uma das funções que não possuem uma boa primitiva.

Consideremos agora a mudança de variável por uma função inversível h. Nesse caso vimos que

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt,$$

onde $x = h(t)$ com h sendo uma função inversível, donde $t = h^{-1}(x)$. Vimos também que, se G é uma primitiva para g, então $\int f(x)dx = G(h^{-1}(x)) + c$. Logo, pelo TFC,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(h^{-1}(b)) - G(h^{-1}(a)) = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} g(t)\,dt.$$

Em resumo, se $\int f(x)dx = \int g(t)\,dt$ para $x = h(t)$ e h é uma função inversível, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} g(t)\,dt.$$

Exemplos

10. Calculemos $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$..

Como fizemos antes, seja

$$x = \operatorname{sen} t$$
$$dx = \cos t\, dt.$$

Quando $x = -1$, temos que t =arcsen $(-1) = -\frac{\pi}{2}$ e quando $x = 1$, t =arcsen $(1) = \frac{\pi}{2}$. Logo

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\cos t \operatorname{sen} t + t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Uma outra situação em que é conveniente trabalhar diretamente com as integrais definidas ocorre quando a função que queremos integrar num intervalo é definida por mais de uma expressão, como nos exemplos a seguir.

11. Se $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{|x|}}$ e quisermos encontrar uma boa primitiva, F, para f devemos considerar dois casos: (i) $x \geq 0$ e (ii) $x \leq 0$.

(i) Neste caso $f(x) = f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. Como $x \geq 0$, podemos usar, para fazer uma mudança de variável $x = h(t)$, a função

$$h(t) = t^2, \text{ para } t \geq 0,$$

que é inversível com $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$, isto é,

$$x = t^2$$

$$dx = 2t\,dt.$$

Então,

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2t\,e^t\,dt$$

onde $t = \sqrt{x}$. Uma integração por partes nos dá que $G(t) = e^t(t-1)$ é uma primitiva para $g(t) = t\,e^t$, donde

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2t\,e^t\,dt = 2\,e^t(t-1)\ + c$$
$$= 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\ + c\,.$$

Ou seja, obtivemos que $F(x) = 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ é uma primitiva para f no intervalo $[0, \infty)$.

(ii) Neste caso, $x \le 0$, temos que $|x| = -x$, donde $f(x) = e^{\sqrt{-x}}$.

Como já conhecemos $\int e^{\sqrt{x}}\,dx,$ dx, para calcular $\int e^{\sqrt{-x}}\,dx,$$dx$, podemos fazer a substituição

$$u = -x$$
$$du = -dx,$$

donde $dx = -du$ e

$$\int e^{\sqrt{-x}}\,dx = \int -e^{\sqrt{u}}\,du$$
$$= -2\,e^{\sqrt{u}}(\sqrt{u}-1)\ + c$$
$$= -2\,e^{\sqrt{-x}}(\sqrt{-x}-1)\ + c\,.$$

Juntando essas duas informações, concluímos que

$$F(x) = \begin{cases} 2\,e^{\sqrt{|x|}}(\sqrt{|x|}-1) & \text{se } x \ge 0, \\ -2\,e^{\sqrt{|x|}}(\sqrt{|x|}-1) & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

é uma primitiva para $f(x) = f(x) = e^{\sqrt{|x|}}.$.

Suponha agora que, de início, nosso problema, neste exemplo, fosse calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$. Neste caso, só nos interessaria considerar $f(x)$ para $x \in$

[0,2] e, portanto, em vez de buscarmos uma primitiva para a função *f*, trabalharíamos com as integrais definidas, o que significa considerar apenas o caso (i), isto é, com a mudança de variável $x = h(t) = t^2$, para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^2 e^{\sqrt{x}}\,dx \\ &= \int_{h^{-1}(0)}^{h^{-1}(2)} 2t\,e^t\,dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t\,e^t\,dt \\ &= 2\,e^t(t-1)\Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2\,e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)+2.\end{aligned}$$

12. Calculav $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{|x^2-1|}}dx.$.

Como x varia no intervalo [0,1], temos que $x^2 - 1 \leq 0$ e, portanto, $|x^2 - 1| = 1 - x^2$. Daí,

$$\int_0^1 x\,e^{\sqrt{|x^2-1|}}dx = \int_0^1 x\,e^{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Fazendo a substituição

$$u = 1 - x^2$$
$$du = -2x\,dx,$$

onde $x\,dx = -\frac{1}{2}\,du$, e

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow u = 0.$$

De modo que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,e^{\sqrt{|x^2-1|}}dx = \int_0^1 x\,e^{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_1^0 -\frac{1}{2}\,e^{\sqrt{u}}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 e^{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sqrt{u}}\,du \\ &= e^{\sqrt{u}}(\sqrt{u}-1)\Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por substituição:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} + \operatorname{sen} x)(2e^{2x} + \cos x)\ dx$

   (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sec^2(\ln\theta)}{\theta} d\theta$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{1 + \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

2. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por partes:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sec^2 x\ dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^x\ dx$

   (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{5}}^0 x \cos(5x)\ dx$

   (d) $\displaystyle\int_3^1 \ln t\ dt$

3. Derive a função $h(u) = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u|$ e calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$.

4. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por substituição trigonométrica:

(a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^6 \frac{1}{\sqrt{x^2+36}}dx$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{25-x^2}dx$

5. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2+3x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{-2} \sqrt{3x+8}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{3}{(4x+5)^3}dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{6x^2+3}}dx$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{2}} \ln x dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}\ x^2 dx$

(j) $\displaystyle\int_{1}^{e} (x+1)\ln x dx$

(k) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$

(l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(n) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2\theta) d\theta$

(o) $\displaystyle\int_{1}^{-\sqrt{3}} \frac{4+x^2}{1+x^2} dx$

(p) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{(x^2+16)^2} dx$

6. Resolva as seguintes integrais indefinidas, e verifique sua resposta derivando a função encontrada:

(a) $\int e^{2x}\,dx$

(b) $\int \operatorname{sen}(10x)\ dx$

(c) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

(d) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

(e) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

(f) $\int e^{\operatorname{sen} 2x} \cos 2x \, dx$

(g) $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$

(h) $\int x \sec^2 x \, dx$

(i) $\int (\ln x)^3 \, dx$

(j) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$

(k) $\int x^2 e^x \, dx$

(l) $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(m) $\int e^x \cos x \, dx$

(n) $\int \sec x \operatorname{sen} x \, dx$

(o) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx$

(p) $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx$

(q) $\int (x^2 + 3x - 1)e^x \, dx$

(r) $\int x^2\sqrt{1-x^2} dx$

7. Encontre a primitiva F da função $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{e + x^2 + 2\operatorname{sen} x}$ tal que $F(0) =$

2.
8. Encontre uma primitiva, G, para a função $g(x) = x^2 \ln x^2$ tal que $G(1) = 0$.
9. Encontre uma primitiva, G, para a função $g(t) = \frac{4}{\sqrt{49-81t^2}}$ tal que $G(\frac{7}{18}) = \frac{29\pi}{27}$.
10. Demonstre que as proposições abaixo são verdadeiras:

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\int_b^a f(x)dx = \int_{b+d}^{a+d} f(x-d)dx$.
(b) Se f é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
(c) Se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

5. Algumas aplicações da integral

Algumas equações diferenciais ordinárias

Como vimos, o Teorema Fundamental do Cálculo, na sua primeira versão, nos garante que toda função contínua é a derivada de uma outra função. Em outras palavras, dada uma função contínua, f, o TFC nos fornece uma resposta para a pergunta:

quais são as funções que têm como derivada a função f?

Podemos formular essa pergunta por meio do que chamamos uma *equação diferencial*, isto é, uma equação cujas soluções são funções deriváveis, ao invés de números, como ocorre com as equações algébricas que conhecemos até agora. Essa formulação é a seguinte:

dada uma função f, quais são (se existem) as soluções da equação diferencial $y' = f(x)$ *?*

Aqui, a letra y designa a *incógnita* (o objeto matemático que não é conhecido) e, por se tratar de uma equação diferencial, y representa uma função, $y(x)$, derivável num intervalo, cuja função derivada é designada por y' Assim, a solução de uma equação diferencial é sempre uma função derivável cujo domínio é um intervalo.

Em termos dessa formulação, se f é uma função contínua definida num intervalo, o TFC garante que a equação diferencial

$$y' = f(x)$$

tem solução e, mais ainda, as soluções são as funções que já denominamos de primitivas de f, isto é,

$$y = \int f(x)\,dx$$

são as soluções dessa equação.

Por exemplo, as soluções da equação diferencial

$$y' = \cos x$$

são as funções

$$y = \int \cos x \; dx = \operatorname{sen} x + c,$$

com c tomando valores no conjunto dos números reais.

A vantagem de introduzirmos essa formulação é que ela permite uma generalização para representar, de uma forma simples, outras perguntas envolvendo funções deriváveis. Por exemplo, a pergunta

quais são as funções que quando derivadas resultam na própria função? se reduz a

quais são as soluções da equação diferencial $y' = y$?

Além disso, essa formulação nos dá uma boa notação para chegarmos à resposta. Por exemplo, para resolver a equação acima,

$$y' = y,$$

primeiro observamos que a função constante $y(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma das soluções da equação, já que $y'(x) = 0$ para qualquer número real x. Busquemos então encontrar soluções que não se anulem, isto é, $y(x) \neq 0$ para qualquer número x. Nesse caso, podemos dividir y' por y, obtendo a equação diferencial

$$\frac{y'}{y} = 1,$$

isto é,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1,$$

donde, integrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int 1\,dx.$$

Fazendo agora a substituição

$$\begin{aligned} y &= y(x) \\ dy &= y'(x)\,dx, \end{aligned}$$

chegamos a

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{dy}{y}$$

e, portanto,

$$\int \frac{dy}{y} = \int 1\,dx.$$

Efetuando as integrais indicadas, obtemos que

$$\ln |y| = x + c,$$

onde c é qualquer número real, isto é, as soluções da equação diferencial $y' = y$, com $y(x) \neq 0$, satisfazem a relação

$$\begin{aligned} \ln |y| &= x + c \Rightarrow \\ e^{\ln |y|} &= e^{x+c} \Rightarrow \\ |y| &= e^{x+c} = e^c e^x. \end{aligned}$$

Como y é uma solução que não se anula e é derivável num intervalo (sendo portanto contínua num intervalo), temos duas possibilidades:

(i) $y(x) > 0$ para qualquer x num intervalo. Neste caso, $y = |y| = e^c e^x$.

(ii) $y(x) < 0$ para qualquer x num intervalo. Neste caso, $y = -|y| = -e^c e^x$. Observe agora que, como c pode ser qualquer número real, e^c pode ser qualquer número real positivo e $(-e^c)$ pode ser qualquer número real negativo, ou seja, podemos dizer que as soluções da equação diferencial $y' = y$ são dadas por

$$y = y(x) = C\, e^x, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

onde C é qualquer número real, sendo que:

(i) para $C > 0$, temos as soluções sempre positivas,

(ii) para $C < 0$, temos as soluções sempre negativas, e

(iii) com $C = 0$ recuperamos a primeira solução que havíamos encontrado, isto

é, a solução constante igual a 0.

Dizemos também que $y = C\, e^x$, com $C \in \mathbb{R}$, é a *solução geral* da equação diferencial $y' = y$, assim como $y = \operatorname{sen} x + c$, com $c \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação diferencial $y' = \cos x$

Antes de vermos mais exemplos, observamos que podemos estar interessados numa determinada solução de uma equação diferencial, isto é, uma solução y que esteja definida num dado número x_0 e que, nesse número, assuma um valor dado $y_0 = y(x_0)$. Dizemos então que temos uma equação diferencial com uma *condição inicial*. Uma solução para uma equação diferencial com uma condição inicial é chamada uma *solução particular* da equação diferencial.

Exemplos

1. Resolver a equação diferencial com condição inicial

$$\begin{aligned} y' &= \cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 2. \end{aligned}$$

Solução: Neste exemplo, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ e $y_0 = 2$. Como já vimos, a solução geral da equação diferencial é

$$y = \operatorname{sen} x + c$$

e, portanto, a solução particular que queremos deve satisfazer

$$2 = y(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + c = 1 + c \Rightarrow$$
$$c = 2 - 1 = 1,$$

donde $y = \operatorname{sen} x + 1$ é a solução do problema.

2. Resolver a equação diferencial com condição inicial

$$y' = y$$
$$y(1) = -2.$$

Solução: a solução geral da equação diferencial, como vimos acima, é

$$y = Ce^x.$$

Logo, a solução particular que queremos deve satisfazer

$$-2 = y(1) = C\,e \Rightarrow$$
$$C = -2e^{-1}.$$

donde, $y = -2e^{x-1}$ é a solução do problema.

3. Resolver a equação diferencial com condição inicial

$$y' + y^2 = 0$$
$$y(0) = 1.$$

Solução: como queremos $y(0) = 1 \neq 0$, podemos procurar as soluções que não se anulam (a função constante igual a 0, isto é, $y(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma das soluções, mas não é a que estamos procurando). Assim, podemos escrever a equação na forma

$$-\frac{y'}{y^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\int -\frac{y'(x)\,dx}{(y(x))^2} = \int 1\,dx \Rightarrow$$
$$\int -\frac{dy}{y^2} = x + c \Rightarrow$$
$$\frac{1}{y} = x + c \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{x+c}.$$

Ou seja, obtivemos que as soluções que não se anulam são da forma

$y = \frac{1}{x+c}$, onde c é um número real. Impondo a condição inicial

$$1 = y(0) = \frac{1}{c},$$

obtemos que devemos tomar $c = 1$ e, portanto, a solução do problema é a função $y = y(x) = \frac{1}{x+1}$ para $x > -1$ (observe que a solução $y = \frac{1}{x+1}$ para $x < -1$ não está definida em $x = 0$).

4. Resolver a equação diferencial

$$y' + x^2 y = 0.$$

Solução: devemos encontrar sua solução geral. Também neste caso, a função constante igual a 0, isto é, $y(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma das soluções. Busquemos as soluções que não se anulam. Podemos então escrever a equação diferencial na forma

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -x^2 \Rightarrow \\ \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int -x^2\, dx \Rightarrow \\ \int \frac{dy}{y} &= -\frac{x^3}{3} + c \Rightarrow \\ \ln|y| &= -\frac{x^3}{3} + c \Rightarrow \\ |y| &= e^c\, e^{-\frac{x^3}{3}}. \end{aligned}$$

Assim, se $y > 0$, temos que $y = C\, e^{-\frac{x^3}{3}}$, com $C = e^c$ sendo um número positivo e, se $y < 0$, então $C = -e^c$, que é negativo. Para $C = 0$ temos a solução constante igual a zero.

5. O exemplo 4 é um caso particular de uma equação diferencial

$$y' + g(x)\, y = 0,$$

onde g é uma função contínua, equação esta que é chamada *equação diferencial linear homogênea*. Se conhecemos uma primitiva, G, para a função g, sempre podemos resolver essa equação diferencial pelo processo usado acima: para encontrar as soluções que não se anulam reescrevemos a equação diferencial na forma

$$\frac{y'}{y} = -g(x) \Rightarrow$$
$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int -g(x)\, dx \Rightarrow$$
$$\int \frac{dy}{y} = -G(x) + c \Rightarrow$$
$$\ln|y| = -G(x) + c \Rightarrow$$
$$|y| = e^c e^{-G(x)},$$

que nos dá que a solução geral é

$$y = C\, e^{-G(x)} \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Todos os exemplos de equações diferenciais que apresentamos aqui são do tipo *variáveis separáveis*, isto é, equações que podem ser escritas na forma

$$f(y)y' = g(x),$$

onde f e g são funções contínuas. Neste caso, integrando ambos os membros da equação diferencial obtemos

$$\int f(y(x))y'(x)\, dx = \int g(x)\, dx \Rightarrow$$
$$\int f(y)dy = \int g(x)\, dx.$$

Assim, se conhecemos primitivas para f e g, podemos obter uma relação algébrica entre as soluções e a primitiva de g.

Para terminar, observarmos de que as equações diferenciais de que tratamos aqui são chamadas *equações diferenciais ordinárias de primeira ordem*. O termo *ordinária* indica que suas soluções são funções reais a uma variável real, isto é, funções que são estudadas neste texto, e a expressão *de primeira ordem* indica que são equações que envolvem somente a primeira derivada.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Considere o problema dado pela equação diferencial com condição inicial

$$y' + y = \cos x$$
$$y(0) = 1.$$

A função $y(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ é solução desse problema?

2. Decida qual das funções abaixo é a solução do problema:

$$y' - (2x \cos x^2)y = 0$$
$$y(0) = 1.$$

(a) $y = 2e^{\operatorname{sen} x^2}$

(b) $y = e^{\operatorname{sen} x^2}$

(c) $y = \cos x^2 e^{\operatorname{sen} x^2}$

3. Decida qual das funções abaixo é a solução do problema:

$$y' - y = 3x^2 - x^3$$
$$y(1) = 1 + 2e.$$

(a) $y = x^2 + 2e^x$

(b) $y = x^3 + e^x$

(c) $y = x^3 + 2e^x$

4. Encontre a família das funções que satisfazem a equação $y' + (\operatorname{tg} x)y = 0$.

5. Considere a função $y = \operatorname{sen} x \cos x$.

(a) y é solução da equação $y' + y^2 \sec^2 x = \cos^2 x$?

(b) y é solução do problema $y' + y^2 \sec^2 x = \cos^2 x$, $y(0) = 1$?

6. Ache a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = \frac{5x}{7y}$

(b) $y' = 3y$

(c) $\frac{dy}{dx} + y = 0$

(d) $y\frac{dy}{dx} - (1 + y^2)x^2 = 0.$

7. Para cada uma das equações acima, determine a solução que satisfaz a

condição inicial $y(0) = 1$.

8. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial: $y' = \sqrt{y}\sec^2 x.$. Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{4}) = 9$.
9. Resolva a equação diferencial com condição inicial:

$$y' - \frac{e^{2x}}{y^2} = 0$$
$$y(0) = 1.$$

10. Resolva a equação diferencial com condição inicial:

$$2y' - 2\frac{xe^{x^2}}{y} = 0$$
$$y(0) = 1.$$

11. Em cada item abaixo encontre $y(x)$ que satisfaz a condição dada:

    (a) $y'(x) = x^3 - 5y^2 + y^2x^3 - 5$ e $y(2) = 0$.

    (b) $y'(x) + x^2y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $y(x) \neq 0$.

    (c) $y'(x) + 5y(x) = 0$ e $y(1) = 2$.

    (d) $y''(x) = \ln x$, $(y')(1) = 3$ e $y(1) = \frac{21}{4}$.

    (e) $y'(x) + (x\cos x)y = 0$ e $y(0) = -1$.

12. Mostre que $y(x) = e^{-\int_0^x t^2 dt}\int_0^x te^{\int_0^t s^2 ds}dt$ satisfaz a equação diferencial $y' + x^2y = x$ com a condição inicial $y(0) = 0$.
13. Decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $y(x) = x\int_1^x f(t)dt$ é solução da equação diferencial $xy' - y = x^2f(x)$.

Outras aplicações

Apresentaremos agora algumas aplicações da integral no cálculo do comprimento de arco, de áreas e volumes por meio de problemas resolvidos.

O comprimento de arco

Tentando resolver o problema 1 que apresentamos na introdução ao conceito de integral, chegamos à conclusão de que, se o comprimento (ou mais precisamente, o comprimento de arco) da curva que é o gráfico de uma função derivável com derivada contínua num intervalo deve ser o limite do comprimento de poligonais construídas a partir da divisão do intervalo em subintervalos de mesmo comprimento, então o comprimento de arco dessa curva é dado por uma integral definida. Esse fato nos motiva a adotar a seguinte definição:

Definição: Se f é uma função derivável com derivada contínua num intervalo $[a, b]$, definimos o *comprimento de arco, L*, da curva que é o gráfico de f no intervalo $[a, b]$ pela integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Como exemplo consideremos o **Problema 1:** Qual é o comprimento do arco da parábola $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$?

Solução: como esse arco de parábola é o gráfico de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$ e f tem como derivada a função $f(x) = 2x$, que é contínua no intervalo $[0,1]$, o comprimento desse arco é, por definição, a integral $\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx.$ Para calcular essa integral, podemos usar a substituição trigonométrica

$$\begin{aligned} 2x &= \operatorname{tg} \theta \\ dx &= \frac{1}{2} \sec^2 \theta \, d\theta, \end{aligned}$$

obtendo

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3\theta\,d\theta.$$

Integrando, agora por partes, a função $\sec^3\theta$, fazendo

$$u = \sec\theta$$

$$dv = \sec^2\theta\,d\theta$$

obtemos

$$\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right)\Big|_0^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$$

e, portanto

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}}).$$

Na verdade, esse é um dos poucos exemplos em que o cálculo do comprimento de arco resulta na integral de uma função para a qual conseguimos encontrar uma boa primitiva. Ou seja, o cálculo do comprimento de arco é um bom exemplo da utilidade dos métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas. Mesmo nesse exemplo, dado o resultado que obtivemos, podemos pensar que talvez fosse mais simples calcular numericamente a integral envolvida.

Área de região entre curvas

Problema 2. Sejam $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, 2\pi]$. Qual é a área da região R entre os gráficos de f e g (veja Figura 5.1a)?

Solução: primeiro observamos que se transladarmos verticalmente os dois gráficos juntos, a região $\widetilde{R}$ entre os dois gráficos transladados, tem a mesma área que a região R. Isto é, se c é um número real e

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + c$$
$$\widetilde{g}(x) = g(x) + c,$$

então a região $\widetilde{R}$, entre os gráficos de $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$, é uma translação de c unidades da região *R*, e portanto suas áreas são iguais. Assim, podemos tomar um número positivo c suficientemente grande, de tal forma que

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + c \geq 0$$
$$\widetilde{g}(x) = g(x) + c \geq 0$$

e calcular de $\widetilde{R}$ (veja Figura 5.1b).

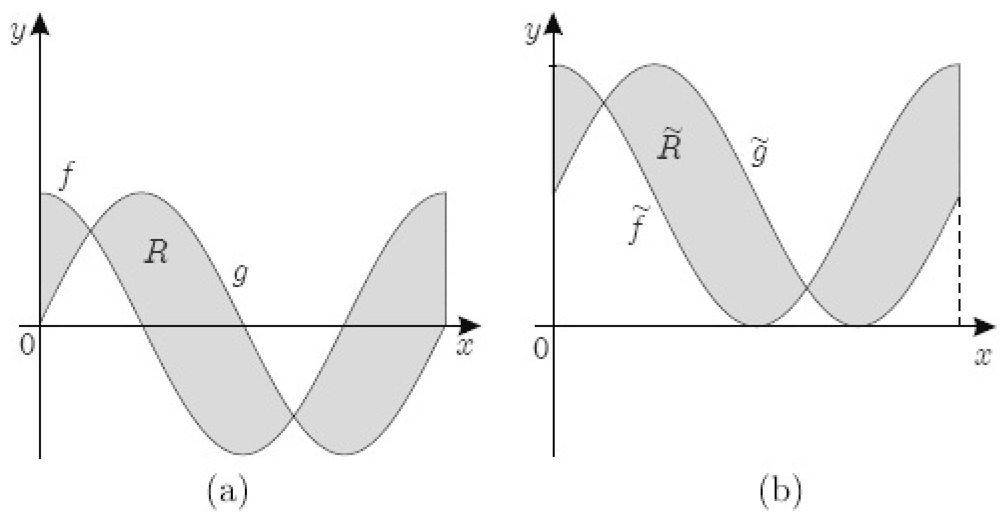


Figura 5.1

Agora observemos que podemos decompor a região $\widetilde{R}$ na união das regiões R_1, R_2 e R_3, como na Figura 5.2, que são determinadas pelos pontos de interseção dos gráficos de $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ denotados por P_1 e P_2.

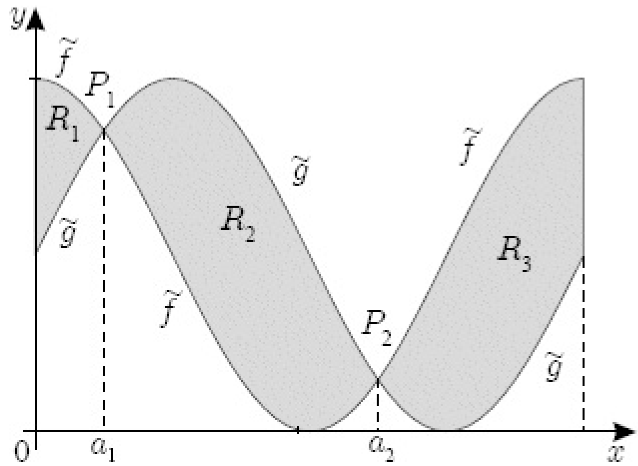


Figura 5.2

Logo

$$A(R) = A(\widetilde{R}) = A(Ri) + A(R_2) + A(R_3).$$

Denotemos por a_1 a primeira coordenada do ponto P_1 e por a_2 a primeira coordenada de P_2. Como $\widetilde{f}(x) \geq \widetilde{g}(x) \geq 0$ no intervalo $[0, a_1]$, temos que:

(i) $\int_0^{a_1} \widetilde{f}(x)\, dx$ = área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{f}$ e pelo intervalo $[0, a_1]$ (já que $\widetilde{f}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).

(ii) $\int_0^{a_1} \widetilde{g}(x)\, dx$ = área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{g}$ e pelo intervalo $[0, a_1]$ (já que $\widetilde{g}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).

(iii) a área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{f}$ e pelo intervalo $[0, a_1]$ é a soma da área de R_1 com a área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{g}$ e pelo intervalo $[0, a_1]$ (já que $\widetilde{f}(x) \geq \widetilde{g}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).

Ou seja,

$$\int_0^{a_1} \widetilde{f}(x)\, dx = A(R_1) + \int_0^{a_1} \widetilde{g}(x)\, dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^{a_1} \widetilde{f}(x)\, dx - \int_0^{a_1} \widetilde{g}(x)\, dx \\ &= \int_0^{a_1} [\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)]\, dx. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} [\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)]\, dx &= \int_0^{a_1} [(f(x) + c) - (g(x) + c)]\, dx \\ &= \int_0^{a_1} [f(x) - g(x)]\, dx, \end{aligned}$$

e a_1 é uma solução da equação

$$f(x) = g(x)$$

pois, sendo a primeira coordenada de um ponto de interseção dos gráficos de $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$, temos que

$$\widetilde{f}(a_1) = \widetilde{g}(a_1),$$

ou seja,

$$f(a_1) + c = g(a_1) + c,$$

donde $f(a_1) = g(a1)$.

Por outro lado, vemos que $\widetilde{g}(x) \geq \widetilde{f}(x) \geq 0$ para $x \in [a_1, a_2]$ e, portanto, analogamente ao que acabamos de analisar, temos que:

(i) $\int_{a_1}^{a_2} \widetilde{f}(x)\, dx$ = área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{f}$ e pelo intervalo $[a_1, a_2]$ (já que $\widetilde{f}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).

(ii) $\int_{a_1}^{a_2} \widetilde{g}(x)\, dx$ = área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{g}$ e pelo intervalo $[a_1, a_2]$ (já que $\widetilde{g}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).

(iii) a área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{g}$ e pelo intervalo $[a_1, a_2]$ é a soma da área de R_2 com a área da região determinada pelo gráfico de $\widetilde{f}$ e pelo intervalo $[a_1, a_2]$ (já que $\widetilde{g}(x) \geq \widetilde{f}(x) \geq 0$ para x nesse intervalo).
Ou seja,

$$\int_{a_1}^{a_2} \widetilde{g}(x)\, dx = A(R_2) + \int_{a_1}^{a_2} \widetilde{f}(x)\, dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_{a_1}^{a_2} \widetilde{g}(x)\, dx - \int_{a_1}^{a_2} \widetilde{f}(x)\, dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} [\widetilde{g}(x) - \widetilde{f}(x)]\, dx. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} [\widetilde{g}(x) - \widetilde{f}(x)]\, dx &= \int_{a_1}^{a_2} [(g(x) + c) - (f(x) + c)]\, dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} [g(x) - f(x)]\, dx \end{aligned}$$

e, como no caso de $x = a_1$, temos que a_2 é uma solução da equação

$$f(x) = g(x).$$

Finalmente, repetindo os argumentos, considerando agora que $\widetilde{f}(x) \geq \widetilde{g}(x) \geq 0$ para $x \in [a_2, 2\pi]$, obtemos que

$$\begin{aligned} A(R_3) &= \int_{a_2}^{2\pi} [\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)]\, dx \\ &= \int_{a_2}^{2\pi} [f(x) - g(x)]\, dx. \end{aligned}$$

Em resumo, obtivemos que

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) \\ &= \int_0^{a_1} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{a_1}^{a_2} [g(x) - f(x)]\, dx + \\ &+ \int_{a_2}^{2\pi} [f(x) - g(x)]\, dx, \qquad (*) \end{aligned}$$

onde a_1 e a_2 são as soluções da equação

$$f(x)=g(x), \text{ para } x \in [0,2\pi].$$

Resolvendo então a equação

$$\cos x = \operatorname{sen} x, \text{ para } x \in [0, 2\pi],$$

obtemos $a_1 = \frac{\pi}{4}$ e $a_2 = \frac{5\pi}{4}$. Logo

$$\begin{aligned} A(R) = &\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx + \\ &+ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx \\ &= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + [-(\cos x + \operatorname{sen} x)]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Observe agora que, como $f(x) - g(x) \geq 0$ para $x \in [0, a_1] \cup [a_2, 2\pi]$ e $f(x) - g(x) \leq 0$ para $x \in [a_1, a_2]$, temos

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{para } x \in [0, a_1] \cup [a_2, 2\pi], \\ g(x) - f(x) & \text{para } x \in [a_1, a_2], \end{cases}$$

e, portanto, a igualdade assinalada por (*) acima, equivale a

$$A(R) = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\, dx,$$

ja que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|\,dx &= \int_0^{a_1} |f(x)-g(x)|\,dx + \int_{a_1}^{a_2} |f(x)-g(x)|\,dx + \\ &+ \int_{a_2}^{2\pi} |f(x)-g(x)|\,dx \\ &= \int_0^{a_1} [f(x)-g(x)]\,dx + \int_{a_1}^{a_2} [g(x)-f(x)]\,dx + \\ &+ \int_{a_2}^{2\pi} [f(x)-g(x)]\,dx.\end{aligned}$$

Mais ainda, vemos que para chegar à igualdade (*) só usamos o fato de que $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$ e os respectivos gráficos para:

(i) conhecer os pontos de interseção de seus gráficos (que no caso eram apenas os pontos P_1 *e* P_2, cujas primeiras coordenadas denotamos, respectivamente, por a_1 e por a_2)

(ii) conhecer os intervalos onde $f > 0$ e os intervalos onde $g > 0$.

(iii) conhecer os intervalos onde $f > g$ e os intervalos onde $f < g$.

Assim, podemos concluir que o resultado que obtivemos é válido em geral, isto é,

se f e g são funções contínuas num intervalo $[a, b]$, então a área da região R entre os gráficos de f e g é dada por

$$A(R) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Problema 3: Calcular a área da região R entre os gráficos de $f(x) = x^5+x^3+x^2$ e $g(x) = x^3 + 2x^2$ para $x \in [-1,2]$.

Solução: como f *e* g são funções contínuas no intervalo $[-1,2]$, temos que

$$A(R) = \int_{-1}^{2} |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Seja $h(x) = f(x) - g(x) = x^5 - x^2$. Devemos determinar em quais intervalos tem-se que $f \geq g$ (isto é, $h \geq 0$) e em quais intervalos $f \leq g$ (isto é, $h \leq 0$). Para isso devemos resolver a equação

$$x^5 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 \text{ para } x \in [-1,2],$$

ou seja, a equação

$$x^5 - x^2 = 0 \text{ para } x \in [-1,2],$$

cujas soluções são $x1 = 0$ e $x1 = 1$. Como h é uma função contínua no intervalo $[-1,2]$, e só se anula nessas soluções, podemos concluir, pelo Teorema do Valor Intermediário, que h não pode assumir valores positivos e negativos em cada um dos intervalos $[-1, 0)$, $(0,1)$ e $(1,2]$. Logo, para saber qual é o sinal de h em um desses intervalos, é suficiente avaliar h em um ponto de cada intervalo. Escolhendo, por exemplo, os pontos -1, $\frac{1}{2}$ e 2, obtemos

$$\begin{aligned}
h(-1) &= -1 - 1 < 0 \\
h(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^2} < 0 \\
h(2) &= 2^5 - 2^2 > 0
\end{aligned}$$

e, portanto, $f - g = h \leq 0$ no intervalo $[-1,1]$ e $f - g = h \geq 0$ no intervalo $[1,2]$. Logo

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-x^5 + x^2)\, dx + \int_{1}^{2} (x^5 - x^2)\, dx \\
&= (-\frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} + (\frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3})\Big|_{1}^{2} \\
&= (-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}) + (\frac{2^6}{6} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}) \\
&= \frac{53}{6}.
\end{aligned}$$

Problema 4: Calcular aproximações para o número π usando uma integral definida.

Solução: sabemos que π é a área da região limitada por um círculo de raio 1, isto é, num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos, $\frac{\pi}{2}$ é a área da região entre o gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e o eixo-x (já que o gráfico de f é o semicírculo superior de raio 1). Assim temos que

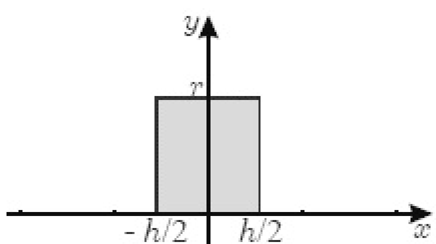
$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

e, portanto, podemos usar qualquer um dos métodos numéricos para cálculo de integrais definidas para obter aproximações arbitrariamente boas de π.

Volume de um sólido de revolução

Um outro tipo de problema cuja solução resulta no cálculo de integrais definidas é o cálculo de volumes do que chamamos *sólidos de revolução*.

O exemplo mais simples de um sólido de revolução é um cilindro circular reto: num sistema de coordenadas cartesianas, consideramos uma região retangular, como na Figura 5.3a, onde o comprimento do lado horizontal é a altura do cilindro e o comprimento do lado vertical é o raio da base do cilindro. O cilindro é obtido pela revolução ortogonal da região retangular em torno do eixo-x; (Figura 5.3b).



(a)

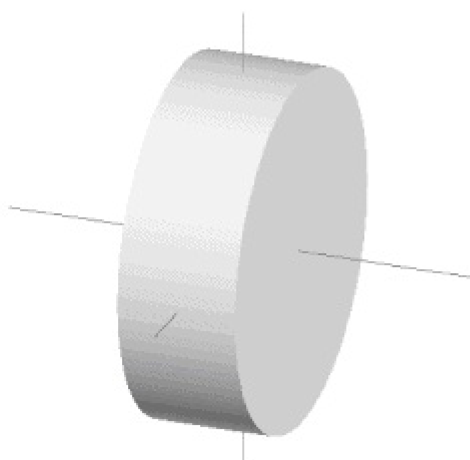

(b)

Figura 5.3

Um outro exemplo de um sólido de revolução é o *toro sólido*, que é dado na Figura 5.4.

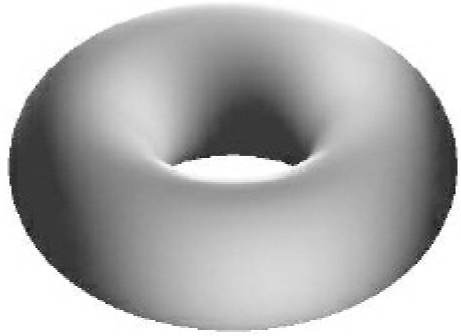


Figura 5.4

Um modelo matemático para um toro sólido é obtido da seguinte maneira: num sistema de coordenadas cartesianas com a mesma unidade de medida nos dois eixos, consideramos um disco que não intercepta o eixo-x; como na Figura 5.5a. O toro sólido é aquele que se obtém pela revolução ortogonal do disco em torno do eixo-x; (Figura 5.5b).

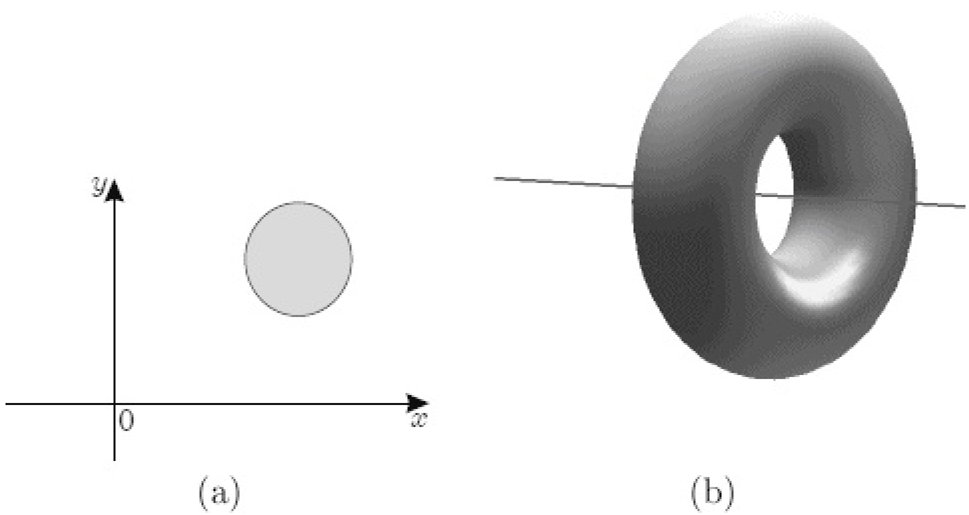


Figura 5.5

Problema 5: Calcular o volume $V(T)$ do toro sólido T, que é obtido pela revolução do disco de raio 1 e centro (0,2) em trono do eixo-x (Figura 5.6).

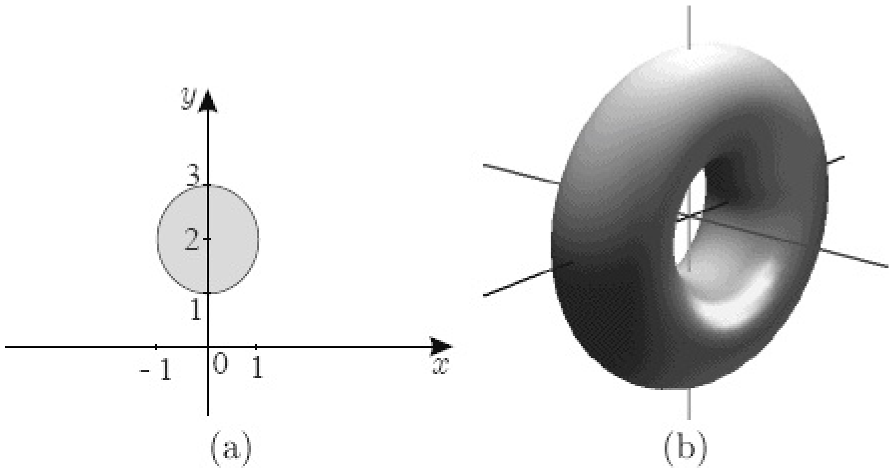


Figura 5.6

Solução: primeiro observemos que se R_1 é a região entre o semicírculo superior e o intervalo $[-1,1]$ no eixo-x e R_2 é a região entre o semicírculo inferior e 0 intervalo $[-1,1]$ no eixo-x (veja Figura 5.7a e b), então as revoluções dessas regiões em torno do eixo-x geram dois sólidos, S_1 e S_2 (veja figuras 5.8a e 5.8b) cujos volumes satisfazem

$$\text{volume } (S_1) = \text{volume } (T) + \text{volume } (S_2),$$

ou seja,

$$V(T) = V(S_1) - V(S_2)$$

e, portanto, reduzimos 0 problema ao cálculo dos volumes de S_1 e de S_2.

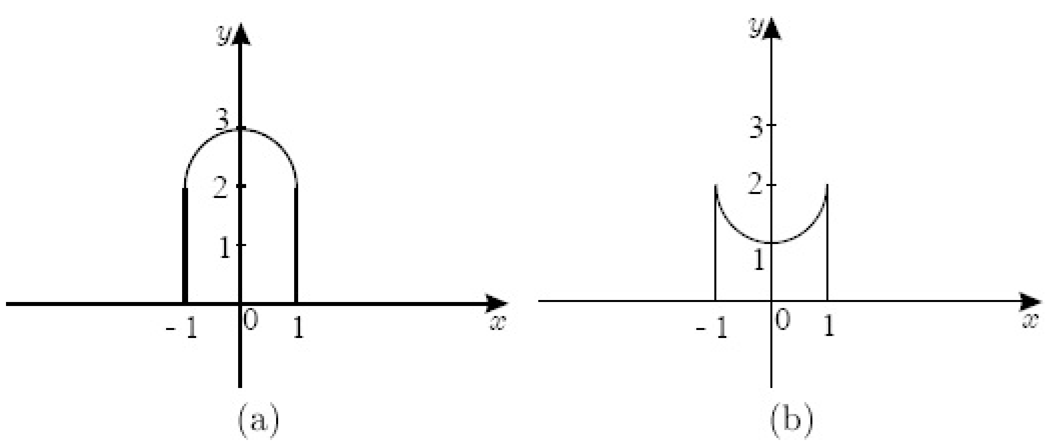


Figura 5.7

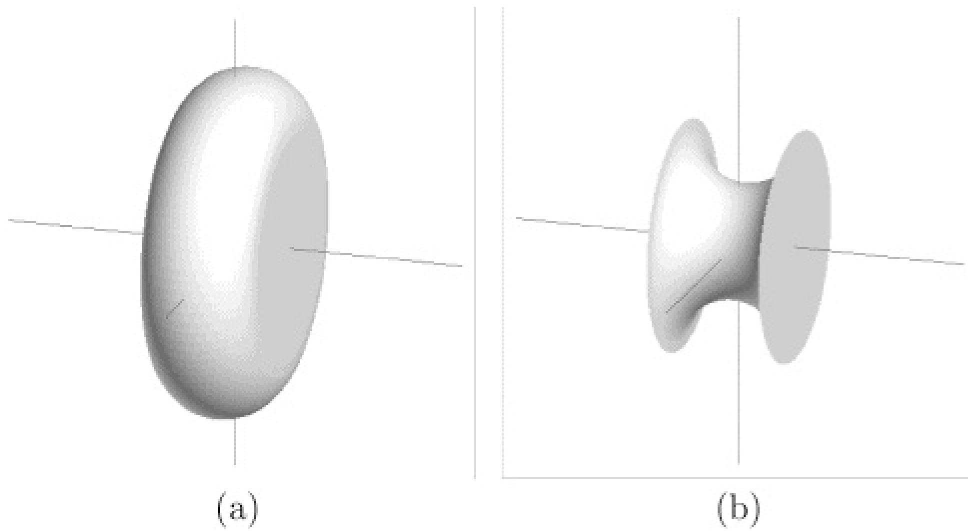


Figura 5.8

Comecemos calculando $V(S_1)$. A ideia é usar o fato de que sabemos que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura do cilindro. Observemos então que se dividirmos o intervalo [–1,1] em n subintervalos de mesmo comprimento, $\Delta = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n}$, e considerarmos a região R^- (que é uma união de retângulos) como na Figura 5.9a, vemos que a revolução de R^- em torno do eixo-x gera um sólido, S_n^- (que é uma união de cilindros retos), que está contido em S_1 e, portanto, satisfaz

$$V(S_n^-) \leq V(S_1).$$

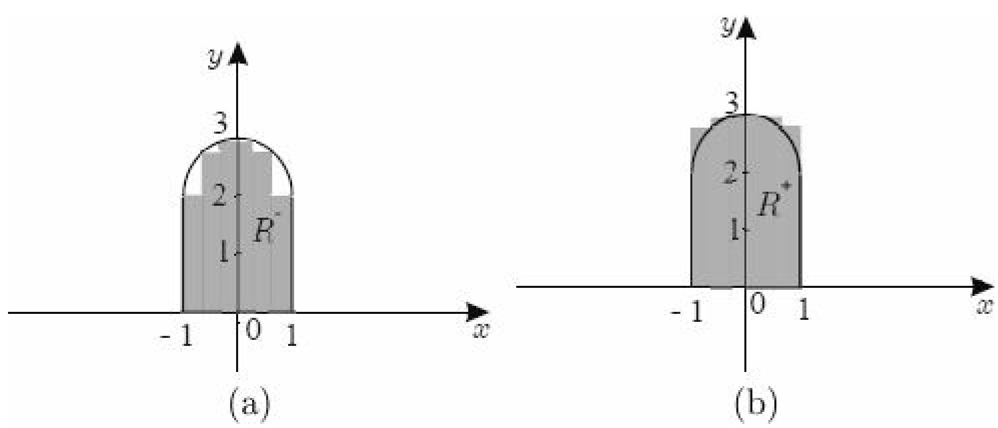


Figura 5.9

Analogamente, se consideramos a região R^+ (que também é uma união de retângulos) como na Figura 5.9b, vemos que a revolução de R^+ em torno do eixo-x gera um sólido (que também é uma união de cilindros) S_n^+, que contém S_1, donde

$$V(S_1) \leq V(S_n^+).$$

Ou seja, temos que

$$V(S_n^-) \leq V(S_1) \leq V(S_n^+).$$

Como S_n^- e S_n^+ são uniões de cilindros, sabemos calcular seus volumes. Para isso, denotemos por $x0 < x1 < \ldots < x_n$ os extremos dos subintervalos da divisão que fizemos. Então,

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_n &= 1 \qquad \text{e} \\ x_i - x_{i-1} = \Delta &= \frac{2}{n}, \text{ para } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Observemos agora que o semicírculo superior, que determina a região R_1, é o gráfico da função

$$f(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$$

e, portanto, se R_i é o retângulo cujo lado horizontal é o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então o volume do cilindro C_i, gerado pela revolução de R_i em torno do eixo-x é

$$V(C_i) = \pi(f(\zeta_i^-))^2(x_i - x_{i-1}),$$

onde ζ_i^- é o ponto de mínimo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. De fato, a base desse cilindro é um disco de raio $f(\zeta_i^-)$ e sua altura é o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que é $(x_i - x_{i-1})$.

Como o volume de S_n^- é a soma dos volumes desses cilindros, obtemos que

$$V(S_n^-) = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(\zeta_i^-))^2(x_i - x_{i-1}).$$

Analogamente, usando os mesmos subintervalos, chegamos a

$$V(S_n^+) = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(\zeta_i^+))^2(x_i - x_{i-1}),$$

onde ζ_i^+ é, neste caso, o ponto de máximo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Agora, podemos identificar que se g é a função

$$g(x) = \pi(f(x))^2,$$

então, tanto $V(S_n^-)$, quanto $V(S_n^+)$, são somas de Riemann da função g sobre a partição $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[-1, 1]$. Como o tamanho dessa partição é $|P_n| = \frac{2}{n}$, temos que $|P_n| \to 0$ quando n tende a infinito. Logo, como g é uma função contínua (pois f é continua) e, portanto, integrável no intervalo $[-1,1]$, já sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} V(S_n^-) = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} V(S_n^+).$$

Por outro lado, já temos que

$$V(S_n^-) \le V(S_1) \le V(S_n^+)$$

e, assim, podemos concluir que

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} V(S_n^-) \le V(S_1) \le \lim_{n\to\infty} V(S_n^+) = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

Isto é, obtivemos que

$$V(S_1) = \int_{-1}^{1} \pi(f(x))^2\,dx.$$

Para calcular o volume de S2 repetimos o procedimento, considerando que, neste caso, o semicírculo inferior que determina a região R_2 é 0 gráfico da função $h(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$. Assim procedendo, podemos concluir que

$$V(S_2) = \int_{-1}^{1} \pi(h(x))^2\, dx.$$

Usando agora 0 resultado que obtivemos antes, isto é,

$$V(T) = V(S_1) - V(S_2),$$

temos que

$$\begin{aligned}
V(T) &= \int_{-1}^{1} \pi(f(x))^2\, dx - \int_{-1}^{1} \pi(h(x))^2\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \pi(2+\sqrt{1-x^2})^2\, dx - \int_{-1}^{1} \pi(2-\sqrt{1-x^2})^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} [(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2]\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\pi^2,
\end{aligned}$$

já que

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$ = área do semicírculo de raio 1 e centro na origem = $\frac{\pi}{2}$

Na verdade, podemos ver que para calcular o volume do sólido S_1 (ou do sólido S_2), usamos apenas que a região, cuja revolução em torno do eixo-x gera 0 sólido de revolução, é *determinada pelo gráfico de uma função contínua num intervalo e pelo intervalo no eixo-x*, ou seja,

se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ *e R é a região determinada pelo gráfico de f e pelo intervalo* $[a, b]$ *no eixo-x*,

então, os mesmos argumentos que nos levaram a calcular 0 volume de S_1 nos permitem afirmar que o *volume, V(S), do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo-x é*

$$V(S) = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx.$$

Problema 6: Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela região determinada pelo gráfico de $f(x) = e^x$ e pelo intervalo [0,1] no eixo-x.

Solução: como f é contínua no intervalo [0,1], se S denota o sólido de revolução, temos que

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^1 \pi(f(x))^2\,dx \\ &= \int_0^1 \pi(e^x)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x}\,dx. \end{aligned}$$

Para calcular $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ dx fazemos

$$u = 2x$$
$$du = 2dx,$$

donde

$$\frac{1}{2}du = dx \quad \text{e} \quad e^u = e^{2x}.$$

Com $u = 0$ para $x = 0$ e $u = 2$ para $x = 1$ temos que

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \int_0^2 \frac{e^u}{2}\,du = \left.\frac{e^u}{2}\right|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1),$$

donde $V(S) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

Massa de uma barra retilínea rígida

Consideremos uma barra retilínea rígida de comprimento L e massa M. Dizemos que a barra é *homogênea* (ou que sua massa é distribuída uniformemente) se a massa de qualquer segmento da barra é proporcional ao comprimento do segmento, onde a constante de proporcionalidade é $k = \frac{M}{L}$. Em outras palavras, se um segmento da barra homogênea tem comprimento l e massa m, então

$$\frac{m}{l} = \frac{M}{L}.$$

O número $k = \frac{M}{L}$ chamado de *densidade de massa linear* e dizemos que uma barra homogênea possui densidade de massa linear constante.

Consideremos agora uma barra retilínea rígida de comprimento L, cuja densidade de massa linear não é constante mas varia continuamente ao longo da barra, isto é, podemos construir um modelo matemático para esse problema físico identificando a barra com um segmento de reta $[0, L]$, e assumindo que a densidade de massa linear é dada por uma função contínua $\varrho : [0, L] \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in [0, L]$, dizemos que $\varrho(x)$ é a densidade linear de massa no ponto x.

Problema 7: Calcular a massa M de uma barra retilínea rígida de comprimento L e densidade de massa linear dada por uma função contínua $\varrho : [0, L] \to \mathbb{R}$.

> Solução: a ideia é procurar calcular aproximações para M e, a partir dessas aproximações, chegar ao valor de M. Primeiro observamos que se $[a, b]$ é um subintervalo de comprimento suficientemente pequeno, então a continuidade de ϱ nos diz que para cada $x \in [a, b]$ tem-se que
>
> $$\varrho(x) \approx \varrho(c),$$
>
> onde c é um ponto do intervalo $[a, b]$ (o ponto médio do intervalo, por exemplo) e, portanto, uma boa aproximação para a massa do segmento da barra que corresponde ao intervalo $[a, b]$ é a massa de uma barra homogênea de comprimento $(b - a)$ com densidade de massa linear constante igual a $\varrho(c)$.

A partir dessa ideia, vemos que se n é um inteiro positivo suficientemente grande e subdividimos a barra em n segmentos de comprimento $\frac{L}{n}$, podemos aproximar a massa de cada segmento pelo critério acima e a soma das massas dos n segmentos será uma boa aproximação para a massa da barra. Ou seja, se tomamos a partição

$$P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$$

do intervalo $[0, L]$, onde

$$x_i = \frac{iL}{n} \text{ para } 0 \leq i \leq n,$$

e n é suficientemente grande (ou, equivalentemente, se $\frac{L}{n}$ é suficientemente pequeno), então, para $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \rho(\zeta_i)\frac{L}{n},$$

com ζ_i sendo o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é uma boa aproximação para a massa do segmento da barra que corresponde ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \approx M.$$

Agora, observando que $\frac{L}{n} = x_i - x_{i-1}$, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\Delta_i x, \end{aligned}$$

que é uma soma de Riemann da função ϱ sobre a partição P_n. Mais ainda, estamos admitindo que quanto maior for o n, melhor será a aproximação $M_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\Delta_i x$ de M. Em outras palavras, temos que

$$M_n \rightarrow M,$$

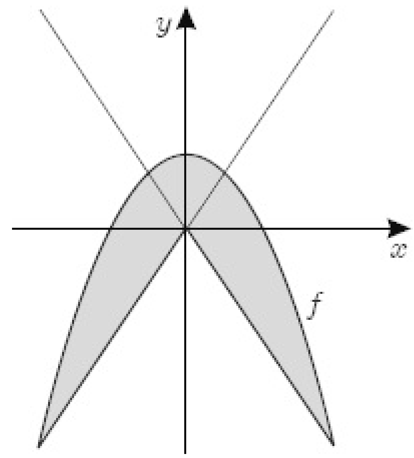
quando $n \rightarrow \infty$. Como cada aproximação M_n é uma soma de Riemann de ϱ sobre a partição P_n e $|P_n| = \frac{L}{n} \rightarrow 0$, concluímos que

$$M = \int_0^L \rho(x)\, dx.$$

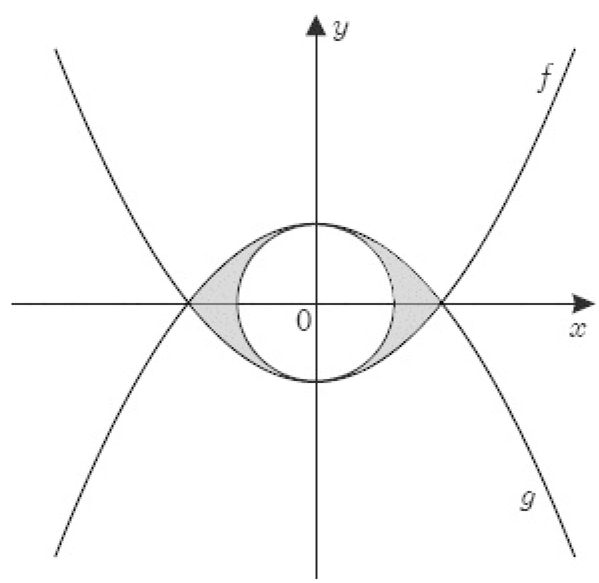
Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

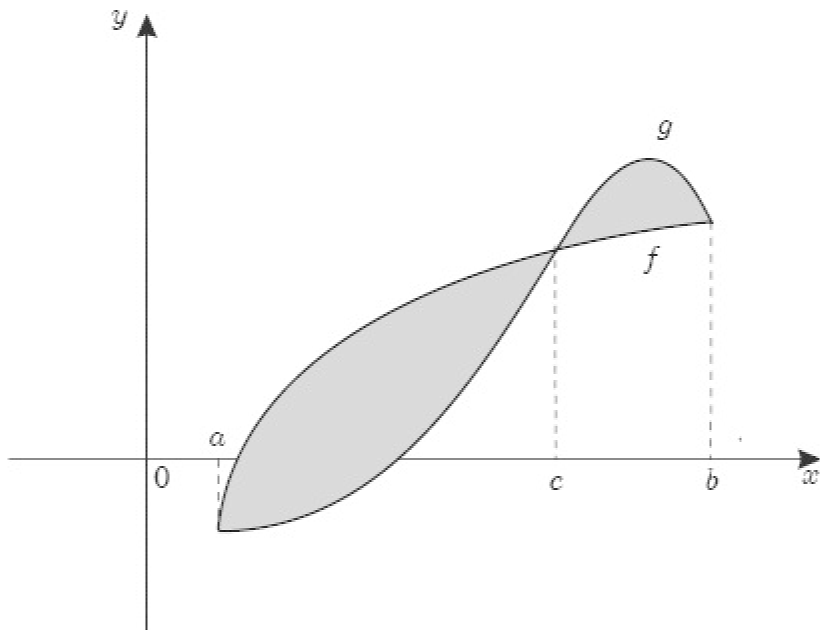
1. Considere $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^3$.
   (a) Calcule a área da região entre os gráficos de f e g, com $x \in [-1, 1]$.
   (b) Calcule $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx.$
2. Calcule a área da região entre os gráficos de $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = -x$, com $0 \le x \le 1$.
3. Ache a área da região limitada por $y = 2 - x^2$ e $y = x$.
4. Calcule a área da região entre o gráfico de $g(x) = \cos x$ e o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ no eixo-x.
5. Calcule a área da região R entre o gráfico de $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x$ e o intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ no eixo-x.
6. Calcule a área da região entre os gráficos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ e $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$ para $x \in [-1, 3]$.
7. Considere $f(x) = e^{\sec x} \sec x \operatorname{tg} x$. Calcule a área limitada pelo gráfico, pelo eixo-x e pelas retas $x = -\dfrac{\pi}{3}$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$.
8. Encontre a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$, pela reta tangente à função f em $x = 4$ e o eixo-y.
9. Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ e as retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.
10. Na figura abaixo são dados o gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ e duas retas $y = \frac{3x}{2}$. Calcule a área da região sombreada:



11. Determine a área da região destacada na figura abaixo, limitada pelo gráfico das funções $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ e $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ e pelo círculo de raio 1 centrado na origem.

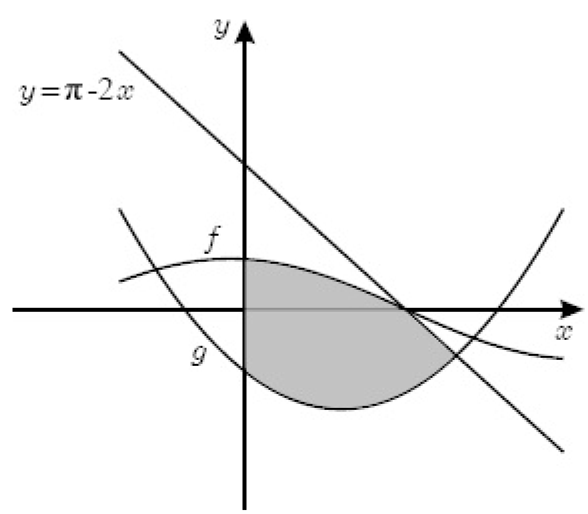


12. Considere as funções *f* e *g* cujos gráficos são dados abaixo:

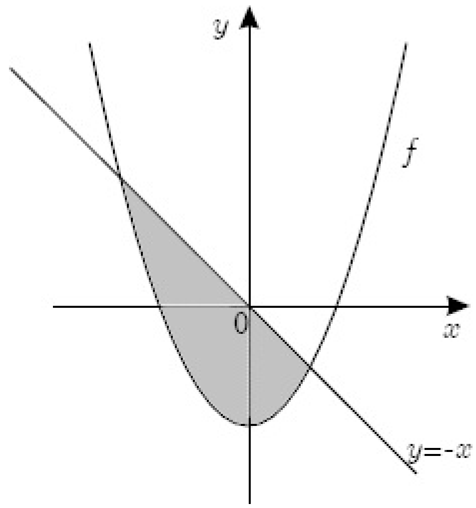


Sabendo que $\int_a^c f(x)\,dx = 4$, $\int_a^b f(x)\,dx = 7$, $\int_a^c g(x)\,dx = 1$ e $\int_a^b g(x)\,dx = 5$, calcule a área da região entre os gráficos de f e de g.

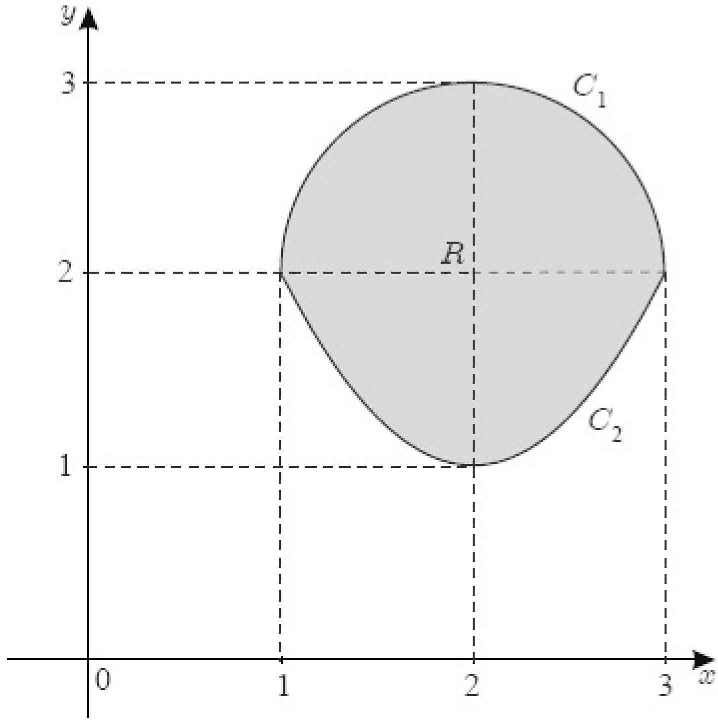
13. Determine a área da região destacada na figura abaixo, onde $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2 - 2x - 1$.



14. Determine a área da região destacada entre os dois gráficos abaixo, onde $f(x) = x^2 - 2$:



15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da curva $y = \sqrt{3x - x^2}$ em torno do eixo-x.
16. Ache o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo-x a região limitada por: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $0 < x < 1$.
17. Determine o volume do sólido obtido pela revolução, em torno do eixo-x, da região limitada pelo gráfico de $y = \sqrt{x^2 + 1}$, pelo eixo-x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.
18. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo-x, da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, pelo eixo-x e pela retas $x = 0$ e $x = \pi$.
19. Considere a região plana **R** dada na figura, onde C_1 é o semicírculo de raio **1** e centro no ponto (2, 2) e C_2 é um arco de parábola.



Calcule o volume do sólido gerado pela revolução de **R** em torno do eixo *x*.

6. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades ou teoremas que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Sabendo que $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = 2$, calcule:

(a) $\int_{-1}^{2} (3 - 2f(x))\, dx$

(b) $\int_{2}^{-1} (f(s) - \cos(\pi s))\, ds$

(c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)\, dx + \int_{1}^{2} 3f(x)\, dx$

(d) $\int_{-1}^{2} (2f(x) + 1)\, dx + 4\int_{-1}^{2} \frac{f(x)-2}{3}\, dx$

2. Sabendo que a função contínua g é par e $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + g(x))\, dx = 2$, calcule $\int_{0}^{\pi} g(x)\, dx$.

3. Sabendo que a função contínua g é ímpar e $\int_{-\pi}^{\pi} (x + g(x))\, dx = 1$,, calcule $\int_{0}^{\pi} g(x)\, dx$.

4. Sabendo que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi$,, calcule:

   (a) A área da região entre o gráfico de $\cos^2 x$ no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ e o eixo-x.

   (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$.

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos^2 x \right| dx$.

5. Sabendo que $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\pi$, calcule:

   (a) A área da região entre o gráfico de $\operatorname{sen}^2 x$ no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ e o eixo-x.

   (b) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

   (c) $\int_{0}^{\pi} \left| \operatorname{sen}^2 x \right| dx$.

6. Calcule:

   (a) $\int_{-2}^{3} |3x - 3|\, dx$

   (b) $\left| \int_{-2}^{3} (3x - 3) dx \right|$

7. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} |\cos x|\, dx$

(b) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx + \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx\right|$

8. Determine quais das alternativas abaixo são verdadeiras:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \cos x\, dx = \int_{2}^{-2} \cos x\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{-2} (4x+2)\, dx = \int_{1}^{-2} 4t\, dt + 2\int_{1}^{-2} ds$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} x^5\, dx > \int_{1}^{2} x^4\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3\, dx > \int_{0}^{1} x^4\, dx$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^3\right| dx = \left|\int_{-2}^{2} x^3 dx\right|$

9. Para cada $x \geq 0$, considere $F(x) = \int_0^x (2t-1)\, dt$. Calcule $F(1)$ e $F(3)$. Ache uma expressão algébrica para F.

10. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx > 0$, então $f(x) \geq 0$ para $x \in [1,2]$.

(b) Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \neq 0$, então $f(x) \neq 0$ para $x \in [0,1]$.

(c) Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 g(x)dx$, então $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [0,1]$.

(d) Se $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx = 0$, então $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

11. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_0^2 2x^3 \, dx$

(b) $\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{t^3}{4}} - \sqrt[3]{t}\right) dt$

(c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$

(d) $\int_2^0 (x^{\frac{1}{2}} + x)\, dx$

(e) $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx$

(f) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

(g) $\int_{-1}^1 2^t\, dt$

(h) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} (2\text{sen}\, x + x)\, dx$

(i) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

(j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + \sec x \,\text{tg}\, x)\, dx$

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sec^2 x)\, dx$

(l) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(m) $\int_1^2 \frac{2}{x^2}\, dx$

(n) $\int_{-2}^{-1} 3^t\, dt$

(o) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} 4\cos x\, dx$

(p) $\int_0^1 \frac{1}{9+9t^2}\, dt$

(q) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\, dx$

12. Seja $f(x) = x^3 - x$.

    (a) Calcule a área da região R entre o gráfico de f e o intervalo $[-1, 1]$

no eixo-x.

(b) Repita o exercício anterior, considerando o intervalo [0, 2].

(c) Para cada $x \geq 1$, seja $g(x)$ a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[0, x]$. Ache uma expressão para $g(x)$.

(d) Para cada $x \leq -1$, seja $h(x)$ a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[x, 0]$. Ache uma expressão para $h(x)$.

13. Calcule a área da região R entre o gráfico do cosseno e o intervalo $[0, 2\pi]$ no eixo-x.

14. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2 + t)\, dt$. Ache uma expressão algébrica para F.

(a) Derive a função $F(x)$.

(b) Calcule $F(0)$ e $F'(0)$.

(c) Calcule $F(1)$ e $F'(1)$.

15. Derive as seguintes funções:

(a) $f(t) = \displaystyle\int_0^t x^{10} e^{x^2}\, dx$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} \cos t \ln t\, dt$

(c) $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} (1 + \operatorname{arctg} s)\, ds$

(d) $f(x) = \displaystyle\int_{\cos 2x}^{\operatorname{sen} 2x} \sqrt{1 - s^2}\, ds$

(e) $f(s) = \displaystyle\int_{\cos s}^{0} e^{\arccos t}\, dt$

16. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi e^x} \cos t^2\, dt$. Calcule $f'(0)$.

17. Seja $f(x) = x^x$. Calcule $\displaystyle\int_1^2 f'(t)dt$.

18. Seja $g(x) = \displaystyle\int_1^x \cos t^2 dt$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x-1}$.

19. Calcule $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \int_0^{2x} e^{t^2} dt \right)$.

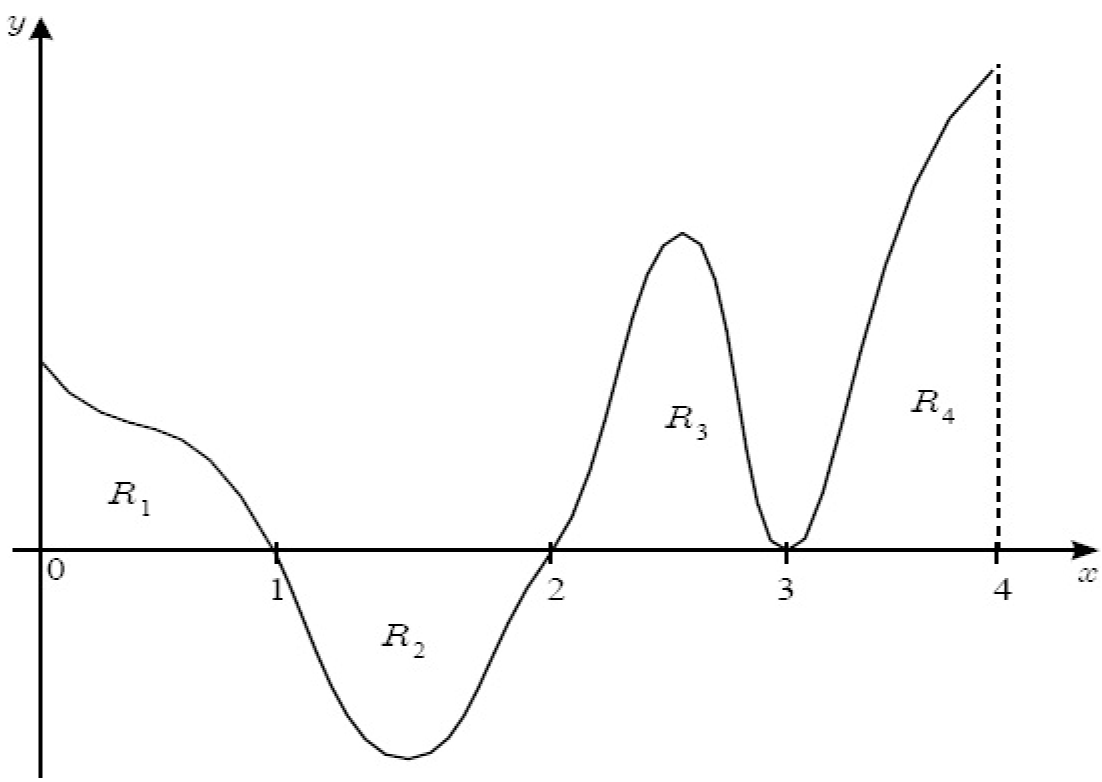
20. Considere a função $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)e^{t^2} dt$ definida no intervalo [–2, 2]. Determine o ponto de mínimo e máximo global da função $F(x)$.

21. Encontre uma primitiva F para a função $f(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$ tal que $F(-1) = 1$.

22. Considere

$$G(x) = \int_0^x |f(t)| dt,$$

onde $f(t)$ é a função cujo gráfico é dado abaixo.



Sabendo que as áreas das regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 são $A(R_1) = 2$, $A(R_2) = 2$, $A(R_3) = 3$ e $A(R_4) = 4$.

(a) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função G.

(b) Determine os pontos de máximos e mínimos locais da função G.

(c) Calcule $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, $G(4)$.

(d) Determine os pontos de máximos e mínimos absolutos da função G no intervalo [0,4].

(e) Faça em esboço do gráfico da função G.

23. Seja $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2^{-s^2} ds$ para $x \in [-2, 2]$.

(a) Ache os pontos de máximo e de mínimo locais de F.

(b) Quais são os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para baixo?

(c) Quais são os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para cima?

24. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_{-x}^{x} (t^3 - 9t)e^{t^2} dt.$

(a) Em quais intervalos, se houver, f é crescente? Em quais intervalos, se houver, f é decrescente?

(b) Determine, se houver, os pontos de máximo e mínimo local de f.

(c) Em quais intervalos, se houver, o gráfico de f é côncavo para cima? Em quais intervalos, se houver, o gráfico de f é côncavo para baixo?

(d) Determine, se houver, os pontos de inflexão do gráfico de f.

25. Sabendo que f é uma função contínua no intervalo [0,1] que satisfaz $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{4}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(\frac{3}{4}) = 1$ e $f(1) = 0$,, calcule a aproximação de $\int_0^1 f(x)dx$ dada

(a) pelo Método de Simpson com $n = 2$.

(b) pelo Método do Trapézio com $n = 4$.

(c) pelo Método do Ponto Médio com $n = 2$.

26. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por substituição:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$

(b) $\int_0^{\pi} e^{2x} \cos(e^{2x}) dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{tg} \theta} \sec^2\theta \, d\theta$

(d) $\int_1^2 \frac{t+2}{t^2+4t+1} dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} \theta \sqrt{1-\cos\theta} d\theta$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

27. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por partes:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx$

(b) $\int_{-1}^1 (x^2+x)e^x \, dx$

(c) $\int_{-1}^1 \operatorname{arctg} x \, dx$

(d) $\int_1^2 t \ln 5t \, dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arccos \theta \, d\theta$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos 3t \, dt$

28. Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando integração por substituição trigonométrica:

(a) $\int_2^4 \frac{1}{4+9x^2} dx$

(b) $\int_2^3 \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x^2} dx$

(c) $\int_0^{-1} \sqrt{9x^2+25} dx$

(d) $\int_0^1 \sqrt{25-4x^2} dx$

(e) $\int_1^2 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} dt$

29. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \sqrt{3-2\cos x}\, dx$

(b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2}+2}\,dx$

(c) $\int_0^{-1} \frac{3}{\sqrt{3x+4}}\,dx$

(d) $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{6x^2+24x}}\,dx$

(e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,ds$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\ \cos x\,dx$

(g) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\ \cos^2 x\ dx$

(h) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\ \cos^3 x\,dx$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\operatorname{tg} t^2 dt$

(j) $\int_1^e (x^2+x)\ln x\,dx$

(k) $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$

(l) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,dx$

(l) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(m) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4+9x^2}$

30. Derive a função $h(u) = \cos^2(u^3)$ e calcule $\int_0^1 \left(\cos x^3 \operatorname{sen} x^3\right) x^2\,dx.$

31. Resolva as seguintes integrais indefinidas, e verifique sua resposta derivando a função encontrada:

(a) $\int 2^{3x} dx$

(b) $\int (6x^3 + 5x)\ \text{sen}(3x^4 + 5x^2 + 1)\ dx$

(c) $\int x \cos x\ dx$

(d) $\int e^{\text{sen}^2 x} \cos x\ dx$

(e) $\int \frac{\log_{10} x}{x}\ dx$

(f) $\int \text{sen}\, 2x\ \text{tg}\, 2x\ dx$

(g) $\int \frac{\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\ dx$

(h) $\int x \sec^2(x^2)\ dx$

(i) $\int (\ln x)^2 dx$

(j) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$

(k) $\int (x^3 + 2x + 1)e^x\ dx$

(l) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$

(m) $\int e^x \text{sen}\, x\ dx$

(n) $\int x \cos^2 x\, dx$

(o) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\ dx$

(p) $\int \sec^2 x\, \text{tg}\, x\ dx$

(q) $\int (x^2 - 1)e^{2x}\ dx$

(r) $\int e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}dx$

(s) $\int \frac{1}{9 + x^2}\ dx$

(t) $\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^2}}dx$

(u) $\int \frac{1}{\sqrt{16 - 9x^2}}dx$

(v) $\int x^2 \text{arctg}\, x\, dx$

(w) $\int (8^{4x} + 1)\, dx$

(x) $\int \text{sen}^5 x\, dx$

(y) $\int x^2 \ln x\, dx$

32. Encontre a primitiva *F* da função $f(x) = \dfrac{-2\left(\text{sen}\, x^2\right)x + 2xe^x + x^2e^x}{\cos x^2 + x^2e^x}$ tal que $F(0) = 2$

33. Encontre a primitiva *G* para a função $g(x) = \arccos x$ tal que $G(0) = 1$.

34. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\int_b^a f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{cb+d}^{ca+d} f(\frac{x-d}{c})dx.$

    (b) Se $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,, então *f* é uma função par.

    (c) Se $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, então *f* é uma função ímpar.

35. Considere o problema dado pela equação diferencial com condição inicial

$$
\begin{aligned}
y' + xy &= x^3 + x^2 + 2x + 1 \\
y(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

A função $y(x) = x^2 + x$ é solução deste problema?

36. Considere o problema dado pela equação diferencial com condição inicial

$$
\begin{aligned}
y'y &= 2\cos x \operatorname{sen}^3 x \\
y(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

A função $y(x) = \operatorname{sen}^2 x$ é solução deste problema?

37. Ache a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = \frac{x+1}{y}$

(b) $y' = -y$

(c) $y' = y + 1$

(d) $y^2 \frac{dy}{dx} - (1 + y^3)x^2 = 0$

(e) $y' = \frac{x^2}{y}$

(f) $y' = 5y$

(g) $\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$

38. Para cada uma das equações acima, determine as soluções que satisfazem à condição inicial $y(0) = 1$.

39. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial $y' = y \cos x$. Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2}) = 9$.

40. Resolva a equação diferencial com condição inicial:

$$
\begin{aligned}
y' - \frac{x \cos x^2}{y^2} &= 0 \\
y(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

41. Resolva a equação diferencial com condição inicial:

$$y' - 2\frac{xe^x}{y} = 0$$
$$y(0) = 1.$$

42. Em cada item abaixo encontre $y(x)$ que satisfaz a condição dada:
    (a) $y' = x^2 - y + yx^2 - 1$ e $y(0) = 1$.
    (b) $y' + yx \cos x^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $y(0) = 2$. (c) $y' + 2xy = 0$ e $y(1) = 2$.
    (c) $y' + 2xy = 0$ e $y(1) = 2$.
    (d) $y'' = x^2 + 3x$, $y'(1) = 3$ e $y(1) = 1$.
    (e) $y' + (x\cos x)y = 0$ e $y(0) = -1$.
    (f) $y' + (\operatorname{tg} x)y = 0$ e $y(0) = 1$.
    (g) $y' + (\sec x \operatorname{tg} x)y = 0$ e $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.
    (h) $y' + \frac{y}{\operatorname{tg} x} = 0$ e $y(\pi) = 2$.
43. Encontre a família das funções que satisfazem a equação $y' + (\operatorname{tg}^2 x)y = 0$.
44. Mostre que $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}t^2\,dt + e^{-\frac{1}{2}x^2}$ satisfaz a equação diferencial $y' + xy = x^2$ com a condição inicial $y(0) = 1$.
45. Considere $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = -\text{sen } 2x$.
    (a) Calcule a área da região entre os gráficos de f e g, com $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
    (b) Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))\,dx$.
    (c) Compare o resultado obtido no item (a) e no item (b). São iguais ou diferentes? Por quê?
46. Calcule a área da região entre os gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 1 - x^2$, com $-1 \le x \le 1$.
47. Ache a área da região limitada por $y = x - x^3$ e $y = -x$.
48. Calcule a área da região R entre o gráfico de $f(x) = \sec^2 x \operatorname{tg} x$ e o intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ no eixo-x.
49. Considere $f(x) = \operatorname{arcsen} x$. Calcule a área limitada pelo gráfico, pelo

eixo-x e pelas retas $x - \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$

50. Encontre a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, pela reta tangente à função f em $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ e pelo eixo dos y.
51. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da curva $y = \sqrt{4x^2 - x^4}$ em torno do eixo-x.
52. Ache o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo-x a região do limitada por: $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^3$, $0 < x < 1$.
53. Determine o volume do sólido obtido pela revolução, em torno do eixo-x, da região limitada pelo gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, pelo eixo-x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.
54. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo-x, da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$, pelo eixo-x e pela retas $-\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$
55. Considere a região plana R que corresponde ao interior de um círculo de raio 1 com centro no ponto (2, 2). Calcule o volume do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo-y.

7. Apêndice ao Capítulo

Aqui são dadas demonstrações de alguns resultados enunciados neste capítulo.

Seção 1

Teorema 1.4: *Se a, b e c são números reais de um intervalo em que f é integrável, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Se $a < c < b$, o resultado é o Teorema 1.3. Se $c < a < b$, vimos acima que

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Como definimos que $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$,, basta efetuar uma substituição na igualdade acima para obter o resultado. O caso $a < b < c$ é obtido de maneira análoga e, se $a = c$ (ou $b = c$), usamos a definição $\int_a^a f(x)dx = 0$ (ou $\int_b^b f(x)dx = 0$).

□

Teorema 1.5: *Se f e g são funções integráveis num intervalo* $[a,b]$ *e c é um número real, então as funções cf e $f + g$ também são integráveis em* $[a,b]$, *com*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: Se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ é uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$ e

$$R(cf, P) = \sum_{i=1}^{k} cf(\zeta_i)\Delta_i x$$
$$R(f + g, P) = \sum_{i=1}^{k} [f(\zeta_i) + g(\zeta_i)]\Delta_i x$$

são somas de Riemann para as funções cf e $f + g$, respectivamente, então

$$R(cf, P) = c\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x = cR(f, P),$$

$$\begin{aligned} R(f + g, P) &= \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^{k} g(\zeta_i)\Delta_i x \\ &= R(f, P) + R(g, P). \end{aligned}$$

Assim, se P_n são partições tais que $|P_n| \to 0$, então para cada $n \geq 1$

temos que

$$R(cf, P_n) = cR(f, P_n)$$
$$R(f + g, P_n) = R(f, P_n) + R(g, P_n)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R(cf, P_n) &= c \lim_{n\to\infty} R(f, P_n)\\ &= c\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R(f+g, P_n) &= \lim_{n\to\infty} R(f, P_n) + \lim_{n\to\infty} R(g, P_n)\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,\end{aligned}$$

quaisquer que sejam as sequências de somas de Riemann, $R(cf, P_n)$ e $R(f + g, P_n)$, já que f e g são integráveis em [a, b] e $|P_n| \to 0$. Ou seja, c f e $(f+g)$ são integráveis em $[a, b]$, e

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} R(cf, P_n) = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} R(f+g, P_n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

□

Teorema 1.6: *Se f e g são funções integráveis num intervalo* $[a, b]$ *e* $f(x) \leq g(x)$ $x \in [a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: A demonstração segue-se do fato de que $R(f, P) \leq R(g, P)$,para qualquer partição P do intervalo $[a, b]$, e do Teorema 3.4 do Capítulo 3. □

Teorema 1.7 (do valor médio para integrais): *Se f é uma função contínua num intervalo que contém os números a e b, então existe um número [span]x[/span] no intervalo cujos extremos são os números a e b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})(b-a).$$

Demonstração: Suponhamos primeiro que $a < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, sabemos que f possui um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto nesse intervalo. Sejam x_1 e x_2 pontos de mínimo e de máximo absoluto de f, respectivamente. Então, para cada x no intervalo $[a, b]$, tem-se que

$$m = f(x_x) \leq f(x) \leq f(x_2) = M.$$

Pelo teorema 1.6, podemos concluir que

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx.$$

Mas já sabemos que $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$,, assim como $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$, ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

donde

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

Isto é, denotando por c o número $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, mostramos que $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$. Usamos agora o Teorema do Valor Intermediário para concluir que existe um número *[span]x[/span]* do intervalo cujos extremos são x_1 e x_2 (e portanto pertencente ao intervalo $[a, b]$) tal que $f($*[span]x[/span]*$) = c$. Assim

$$f(\overline{x}) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

ou

$$\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})(b-a).$$

Para concluir a demonstração observamos que se $a > b$ basta usar o que já provamos e a definição $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

□

Seção 2

Teorema Fundamental do Cálculo (I): *Se f é uma função contínua num intervalo I que contém o número a e, para cada x* $\in$ *I*,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

então F é uma função derivável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração: Devemos mostrar que para cada x no intervalo tem-se que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Isto é, devemos mostrar que se h_n é uma sequência de números não nulos, tal que $h_n \to 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} = f(x).$$

Para isso, primeiro observamos que, a partir das propriedades que já conhecemos, qualquer que seja o número h tal que $x + h$ pertença ao intervalo I, temos que

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Seja então h_n uma sequência tal que $h_n \to 0$. Então para cada $n \geq 1$ temos que

$$F(x+h_n) - F(x) = \int_x^{x+h_n} f(t)dt.$$

Usamos agora o Teorema do Valor Médio para Integrais para concluir que, para cada $n \geq 1$, existe um número x_n pertencente ao intervalo cujos extremos são os números x e $x + h_n$ tal que

$$\int_x^{x+h_n} f(t)dt = f(x_n)h_n.$$

Ou seja,

$$F(x + h_n) - F(x) = f(x_n)h_n$$

e, portanto,

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = f(x_n).$$

Agora, observe que, como x_n está entre os números x *e* $x + h_n$, temos que $|x - xn| \leq |h_n|$, e portanto, $x_n \to x$, já que $h_n \to 0$. A continuidade de f garante então que $f(x_n) \to f(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \qquad \square$$

Teorema 2.1: *Se F e G são primitivas de uma função f definida num intervalo* [*a,b*], *então existe uma constante c tal que F*(*x*) = *G*(*x*) + c.

Demonstração: Seja $h(x) = F(x) - G(x)$. Então h é derivável e $h'(x) = 0$ para qualquer x no intervalo $[a,b]$. Seja c = $h(a)$. Vamos mostrar que $h(x) = c$, qualquer que seja o número $x \in [a, b]$. De fato, se $x \neq a$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número ζ entre a e x tal que

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(\zeta).$$

Mas já sabemos que $h'(\zeta) = 0$, logo $h(x) - h(a) = 0$, ou seja $h(x) = h(a) = c$.

$\square$

Teorema Fundamental do Cálculo (II)*: *Se G é uma primitiva para uma função f que é contínua num intervalo contendo os números a e b, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração: Seja I o intervalo onde f é contínua e $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, para $x \in I$. Então,

$$F(a) = 0 \text{ e } F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Pela primeira versão do Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que F é uma primitiva para f. Logo, pelo Teorema 2.1, como por hipótese G também é uma primitiva para f, temos que $F(x) = G(x)+c$ para alguma constante c e para qualquer número x do intervalo $[a, b]$. Em particular, fazendo $x = a$, obtemos que

$$F(a) = G(a) + c,$$

donde

$$c = F(a) - G(a)$$

e, portanto,

$$F(x) = G(x) + F(a) - G(a) = G(x) - G(a),$$

já que $F(a) = 0$. Fazendo agora $x = b$, obtemos que $F(b) = G(b) - G(a)$. Mas, como vimos acima, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$,, logo

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \qquad \square$$

Respostas

Ao consultar as respostas lembre-se que outras formas de respostas podem também estar corretas. Especificamente, no caso de exemplos ou contraexemplos, as respostas fornecidas aqui são, em cada caso, apenas uma das possibilidades corretas. Observe ainda que a maioria das respostas dadas não contém justificativas.

Capítulo 7
Derivada

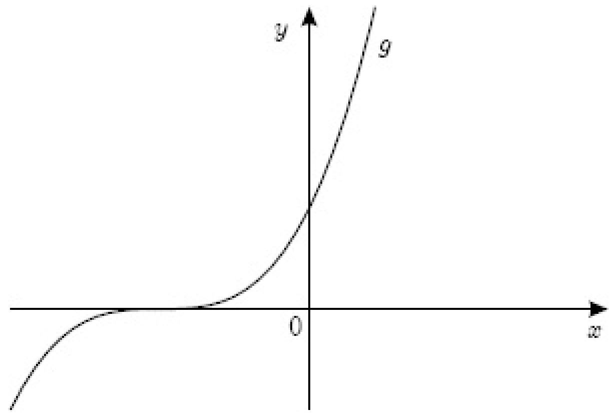
Seção 1

1. $f'(0) = -2$, $f'(-\frac{1}{2}) = -5$ e $f'(3) = 16$.

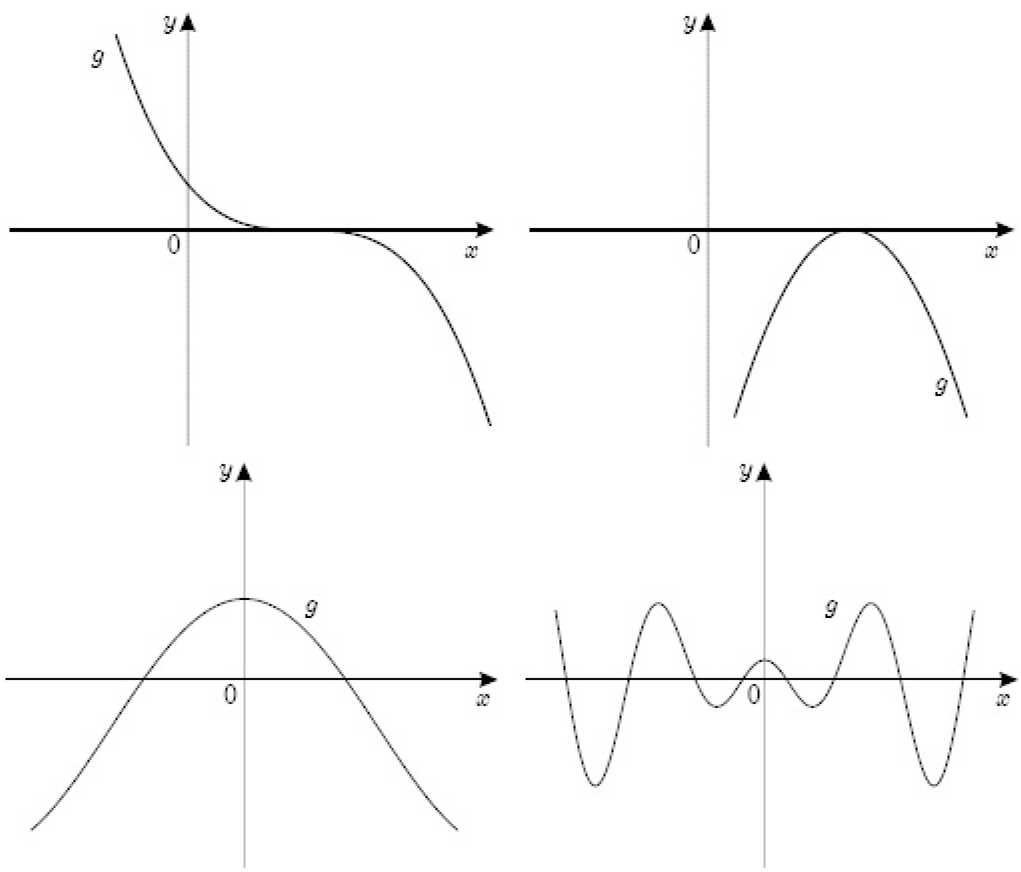
2. **(a)** 1 **(b)** -2 **(c)** $\frac{1}{5}$ **(d)** $\frac{1}{2}$.

3. **(a)** 0 **(b)** 3 **(c)** $3a^2$ **(d)** $3x^2$

4.



5.



6. **(a)**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-\frac{1}{x+h}-(x-\frac{1}{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h-\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x}}{h} &&= \lim_{h\to 0}\frac{xh(x+h)-x+(x+h)}{xh(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xh(x+h)+h}{xh(x+h)} &&= \lim_{h\to 0}\frac{x(x+h)+1}{x(x+h)} \\
&= \frac{x^2+1}{x^2} &&= 1+\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

(b) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(c)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x})}{h}\frac{(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2(x+h)-2x)}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2}{(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})} \\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2x}}.
\end{aligned}
$$

(d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

(e)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+h-1}}{h(\sqrt{x+h-1})(\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+h-1}\right)}{\left(h(\sqrt{x+h-1})(\sqrt{x-1})\right)} \frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+h-1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+h-1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)-(x+h-1)}{h(\sqrt{x+h-1})(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+h-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{x+h-1})(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+h-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(\sqrt{x+h-1})(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+h-1})} \\
&= -\frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

7. Os pares são: (c,a), (b,e) e (d,f).

8. **(a)** V **(b)** V **(c)** F.

   Justificativas:

   (a) $1 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, já que $f(0) = 0$.

   (b) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1)$ e o ponto (1,f(1)) pertence à reta. Como o coeficiente angular de $y = 3x - 1$ é 3, temos que $f'(1) = 3$. Como $(1, f(1))$ pertence à reta, $f(1) = 3$-$1 - 1 = 2$.

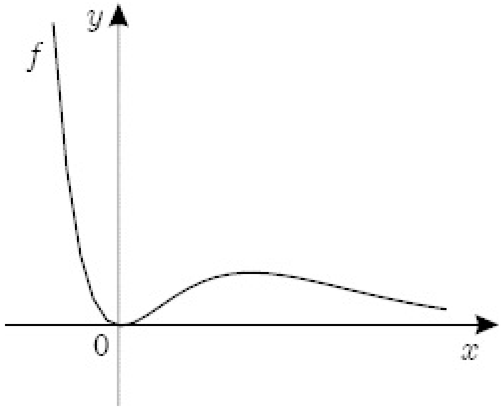
   (c) A função $f(x) = x^2$ é um contraexemplo, já que $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ e $f(x) \neq 2x - 1$ se $x \neq 1$.

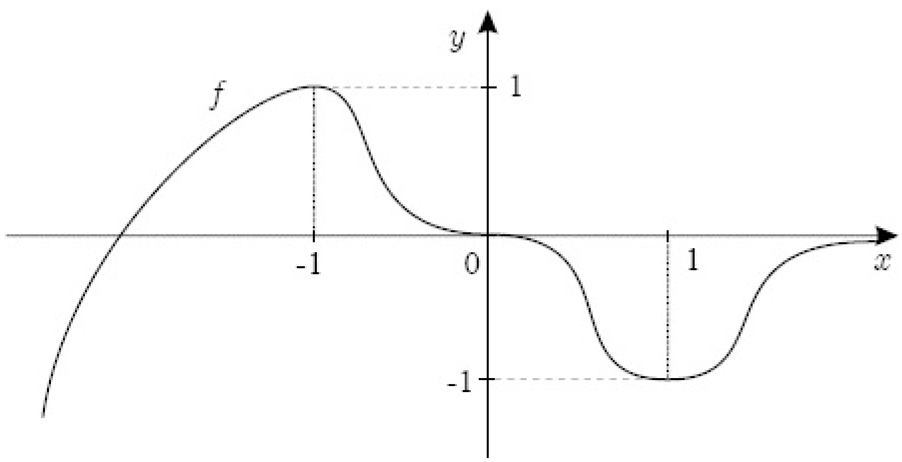
9. **(a)** $f'(x) = 2x + 1$ **(b)** $y = 7x - 9$ ou $y = 3x - 1$.

10. Não é derivável em $x = 1$.

11. Não é derivável em $x = -2$.

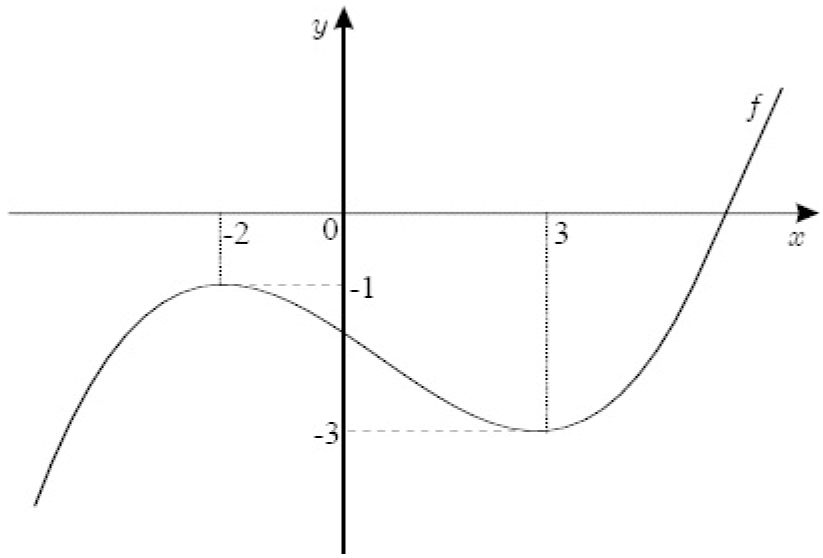
12. $f'(\frac{1}{3}) = 6$.

13. 

14. 

16. **(a)** F **(b)** V **(c)** F **(d)** F **(e)** V **(f)** V.

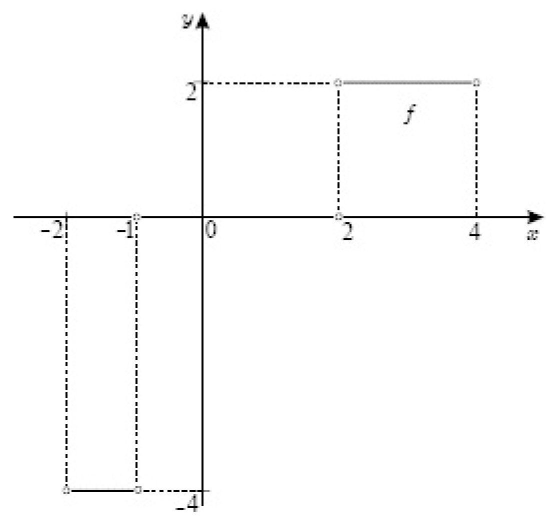
17. A equação $f(x) = 0$ tem somente uma solução.



18. 16.

19. 6.

20.



21. **(a)** $-\frac{2}{3}$ **(b)** $-\frac{1}{3}$

22. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

25. (**a**) $f(0) = -13$ e $f'(0) = 7$ **(b)** $y = 7x - 13$ **(c)** $y = 7x - 14$ **(d)** $y = -7x + 13$.

Seção 2 – páginas 39 a 41

1. **(a)** 0 **(b)** 0 **(c)** 8 **(d)** $18x^2 - 2x$

   (e) $(28x^6 - 627x^2 + 5)(5x^3 - 9x - 100) + (4x^7 - 209x^3 + 5x + 1)(15x^2 - 9)$

   (f) $\frac{1}{(2-x)^2}$ **(g)** $\frac{3x^2+1}{x-1} - \frac{x^3+x+1}{(x-1)^2}$ **(h)** $\frac{(27x^8-16x^7)(7-7x^5)+35x^4(3x^9-2x^8)}{(7-7x^5)^2}$

   (i) $\frac{(2(6-4x^2)-8x(2x-9))(2x^4-1)-(2x-9)(6-4x^2)(8x^3)}{(2x^4-1)^2}$ **(j)** $6ax^2 - \frac{2x}{b}$ **(k)** $-\frac{2a}{(a+x)^2}$.

2. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
3. $y = -74x - 48$.
4. **(a)** $y = 12x - 14$ **(b)** $x = -1$ e $x = 1$.
5. $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
6. **(a)** $f'(x) = 2x + 1$ **(b)** $y = 2x - \frac{1}{4}$.
7. **(a)** $a = \frac{13}{2}$ **(b)** $y = 5x - \frac{1}{2}$.
8. $x = \frac{3x_0}{4}$.
9. $y = -3x + 1$.
10. **(a)** $h'(1) = \frac{19}{9}$ **(b)** $y = \frac{19}{9}x - \frac{7}{9}$.
11. $g'(1) = -\frac{11}{4}$.
12. $(\frac{2t^3-3}{3t^2-2}, 0)$.
13. y = 5x – 2, os pontos de interseção são $x = 1$ e $x = -3$.
14. x = 1.
15. **(a)** $y = 13x$-10 **(b)** y=-7x + 4.
16. Falso. f não é contínua em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Assim, não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0. Não sendo contínua em $x = 0$ não pode ser derivável em $x = 0$.

17. $y = 2x + 5$.

18. F.

19. F, um contraexemplo é $f(x) =$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ x+2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

20. $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1, \\ -2x+4 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

21. $a = 1$, $b = 3$ e $c = -1$.

Seção 2 – páginas 47 a 50

1. $\frac{1}{54}$.

2. 1.

3. $y = \frac{x+6}{8}$.

4. $y = \frac{x-3}{2}$.

5. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$.

6. **(a)** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ **(b)** $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ **(c)** $g'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$.

8. $(f \circ g)'(x) = \frac{12x^2-7}{2\sqrt{4x^3-7x+8}}$ e $(g \circ f)'(x) = \frac{6x^2}{\sqrt{x^3}} - \frac{7}{2\sqrt{x}}$.

9. **(a)** $27\left(3x^8 - 4x^5 + 9x - 14\right)^{26}\left(24x^7 - 20x^4 + 9\right)$

   (b) $51\left(4x^7 - 5x^3\right)^{50}\left(7x^3 - \frac{1}{3}x + 1\right)^{43}\left(28x^6 - 15x^2\right) +$
   $43\left(4x^7 - 5x^3\right)^{51}\left(7x^3 - \frac{1}{3}x + 1\right)^{42}\left(21x^2 - \frac{1}{3}\right)$

   (c) $-\frac{15}{(3x^7-6x^2)^{16}}\left(21x^6 - 12x\right)$ **(d)** $6\left(\frac{3x^2-4x+1}{7x^4+1}\right)^5\left(\frac{-42x^5+84x^4-28x^3+6x-4}{(7x^4+1)^2}\right)$

   (e) $\frac{21}{5x^{\frac{2}{5}}} + \frac{18}{5\sqrt{x^{11}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(f)** $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ **(g)** $\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}$ **(h)** $-\frac{3x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$

   (i) $\frac{1}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$ **(j)** $\frac{12x^4+3x^2}{\sqrt{3x^2+1}}$ **(k)** $\frac{5x}{\sqrt{(5x^2-4)(6x^3-2x)}} - \frac{\sqrt{(5x^2-4)}}{(6x^3-2x)^2}\left(18x^2 - 2\right)$

   (l) $345\left(\left(\frac{2}{7x^3} + 4x\right)(5 - \sqrt{x+1}) + \pi\right)^{344}\left(\left(-\frac{6}{7x^4} + 4\right)(5 - \sqrt{x+1}) - \frac{\frac{2}{7x^3}+4x}{2\sqrt{(x+1)}}\right)$

   (m) $\frac{5a\sqrt[3]{x^2}}{3} + \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{6\sqrt[6]{x^{13}}}$ **(n)** $-\frac{3}{70\sqrt{x}\sqrt[7]{\left(9-\frac{3}{5}\sqrt{x}\right)^6}}$.

10. **(a)** 2 **(b)** 10 **(c)** $y = 10x - 21$.

11. $y = 15x + 2$.

12. $y = -9x - 11$.

13. Alternativa (a). Fazendo $h(x) = x^2 + 2x + 1$, temos que $g = f \circ h$ e, portanto, $g(0) = f(h(0))$. Como $h(0) = 1$ e f é derivável em $x = 1$, com $f'(1) = 2$, *e h é* derivável em $x = 0$, com $h'(0) = 2$, pela Regra da Cadeia, temos que

$$g'(0) = f'(h(0$$
$$= \quad 2f'$$

14. $y = 25x - 24$.

15. **(a)** $g'(x) = 8f'(x) + \frac{6}{7}f'(x)\,f(x)\,[f(x)f(x)]^{-\frac{4}{7}}$ **(b)** $g'(x) = f'(f(x))\,f'(x)$ **(c)** $g'(x) = f'(f(f(x)))\,f'(f(x))\,f'(x)$ **(d)** $g'(x) = f'(4x^3 - \frac{7}{3}\sqrt{x} - 9)(12x^2 - \frac{7}{6\sqrt{x}})f(18 - \frac{8}{\sqrt{x}}) + f(4x^3 - \frac{7}{3}\sqrt{x} - 9)f'(18 - \frac{8}{\sqrt{x}})(\frac{4}{\sqrt{x^3}})$.

16. $-\frac{1}{2}$

17. -2.

Seção 3

1. **(a)** $4xe^x + 2x^2e^x + \pi$ **(b)** $\frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^3}$ **(c)** $(\ln x + 1)\, e^{x \ln x}$

 (d) $2x(1 - \log_3 x) - \frac{x}{\ln 3}$ **(e)** $e^{x^3+2x-1} + x\left(3x^2+2\right)e^{x^3+2x-1} + 3x^2$

 (f) $\left(4x^3 - 2x + 2\right)\ln x^2 + 2\frac{x^4-x^2+2x-1}{x}$ **(g)** $\frac{x}{x^2-1}$ **(h)** $12x^2 - 6x + \frac{1}{x}$

 (i) $-2xe^x + \left(1-x^2\right)e^x$ **(j)** $\frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}$ **(k)** $2x2^{x^2}\ln 2$ **(l)** $x^x(\ln x + 1)$

 (m) $-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ **(n)** $9(x\ln x)^8(\ln x + 1)$ **(o)** $12\left(xe^x + x^2\right)^{11}(e^x + xe^x + 2x)$

 (p) $(1+2x^2)e^{x^2+1} + \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}$.

2. **(a)** $f'(t) = \frac{2-\ln t^2}{t^2}$; $t = -e$, $t = e$

 (b) $g'(u) = 2ue^{-u} - u^2e^{-u}, u = 0,\ u = 2$

 (c) $h'(s) = (2s-1)\,\frac{e^{s^2-s}}{1+e^{s^2-s}}$; $s = \frac{1}{2}$

 (d) $f'(x) = \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln 2$, (não se anula)

 (e) $f'(x) = \frac{1}{x\ln 3}$, (não se anula).

3. **(a)** $9\ln 3$ **(b)** $\frac{1}{e}$ **(c)** $2e^2$.

4. **(a)** $y = x + 1$ **(b)** $y = \frac{1}{e}$ e $y = 2x - 1$ **(c)** $y = x\ln 2 + 1$ **(d)** $y = \frac{x-1}{\ln 7}$

 (e) $y = -\frac{1+x}{\ln 4}$ **(f)** $y = x - 1$ e $y = \frac{1}{e}$ **(g)** $y = \frac{1}{e^2}x + 1$ **(h)** $y = \frac{1}{e}x$.

5. **(a)** $\frac{\ln 3}{5} - \frac{2}{5}$ **(b)** $\frac{1}{15}$ **(c)** $\frac{\ln x}{5} - \frac{2}{5}$ **(d)** $y = \frac{5x+6}{e^3}$ **(e)** $y = \frac{x-3}{5}$.

6. **(a)** $f'(x) = 7e^{7x-2}$ e $g'(x) = \frac{12x^2}{4x^3+\sqrt{2}}$

 (b) $(g\circ f)(x) = \ln(4e^{21x-6} + \sqrt{2})$ e $(g\circ f)'(x) = \frac{84e^{21x-6}}{4e^{21x-6}+\sqrt{2}}$

 (c) $(f\circ g)(x) = e^{7\ln(4x^3+\sqrt{2})-2}$ e $(f\circ g)'(x) = \frac{84x^2e^{7\ln(4x^3+\sqrt{2})-2}}{4x^3+\sqrt{2}}$

 (d)$(fg)(x) = e^{7x-2}\ln(4x^3+\sqrt{2})$

 e $(fg)'(x) = e^{7x-2}(7\ln(4x^3+\sqrt{2}) + 12\frac{x^2}{4x^3+\sqrt{2}})$

 (e) $(f+g)(x) = e^{7x-2} + \ln(4x^3+\sqrt{2})$ e $(f+g)'(x) = 7e^{7x-2} + \frac{12x^2}{4x^3+\sqrt{2}}$

 (f) $(f^{-1}\circ g)(x) = \frac{\ln(\ln(4x^3+\sqrt{2}))+2}{7}$ e $(f^{-1}\circ g)'(x) = \frac{12}{7}\frac{x^2}{\left(4x^3+\sqrt{2}\right)\ln\left(4x^3+\sqrt{2}\right)}$

 (g) $(f\circ g^{-1})(x) = e^{7\sqrt[3]{\frac{e^x-\sqrt{2}}{4}}-2}$ e $(f\circ g^{-1})'(x) = \frac{7e^x}{12\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)}\right)^2}e^{7\sqrt[3]{\frac{e^x-\sqrt{2}}{4}}-2}$.

7. $-3e$.

8. $y = -\frac{16}{3}x - \frac{10}{3}$.

9. $5e^2$.

10. $y = \frac{\ln 6}{9}x + \frac{1+8\ln 6}{36}$.

11. $-\frac{e^9}{6e^9+1}$.

Seção 4

1. **(a)** 0 **(b)** $2x\,(1-\cos x)+x^2\text{sen }x$ **(c)** $\cos^2 x{-}\text{sen}^2 x$

   (d) $3(\text{sen}\,x+\cos x)^2(\cos x{-}\text{sen}\,x)$ **(e)** $(\sec^2 x+1)\text{sen}\,x$

   (f) $2\sec^3 x\ -\sec x$ **(g)** $-2\cos x\ \text{sen}\,x+3\sec^3 x\,\text{tg}\,x$

   (h) $e^x\cos x(1+x-x\,\text{tg}\,x)$ **(i)** $-2\cos x\,\text{sen}\,x\,e^{\cos^2 x}$

   (j) $\frac{\cos x-\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x+\cos x}$ **(k)** $\text{tg}\ x$ **(l)** $\frac{-2x+\cos x^2-2x^2\text{sen}\ x^2}{x^2+1}+2\frac{x^3-x^2\ \cos x^2}{(x^2+1)^2}$

   (m) $(-\text{sen}\ x-1)e^{\cos x-x}$ **(n)** $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **(o)** $\frac{2x}{1+x^4}$

   (p) $\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x-1}}\text{tg}x$ **(q)** $-\frac{3}{\sqrt{\left(1-(1+x^3)^2\right)}}x^2$ **(r)** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

   (s) $-4(\text{sen}\left(\cos x^2+1\right)\cos\left(\cos x^2+1\right)\text{sen}\ x^2)x.$

2. **(a)** $h'(s)=\ \sec^2 s$, (não se anula).

   (b) $f'(x)=\ \frac{1}{\sqrt{(1-x^4e^{2x})}}\left(2xe^x+x^2e^x\right)$; $x=0,\ x=-2.$

   (c) $f'(x)=\ \frac{1}{1+2x+2x^2}$, (não se anula).

   (d) $f'(x)=2\sec(2x)\,\text{tg}\,(2x)$; $x=\frac{k\pi}{2}$ onde $k\in\mathbb{Z}$.

3. **(a)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi-2}{4}$ **(b)** $y=1$ **(c)** $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$ **(d)** $y=\frac{14}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. **(a)** V **(b)** V.

5. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. $y=\frac{x}{40}-\frac{200+\sqrt{3}}{40}$.

8. $\frac{\pi}{8}$.

9.
$$f'(x)=\begin{cases}-2^{1+\cos x}\text{sen}\,x\ln 2 & \text{se } x\leq\frac{\pi}{2},\\ (2\cos 2x+2\cos x\,\text{sen}\,x)\ln 2 & \text{se } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

10. $a=-1$ e $b=2$.

Capítulo 8
Aplicações da Derivada

Seção 1

2. **(a)** V **(b)** *f* **(c)** *f* **(d)** V **(e)** V **(f)** F.

4. $x_{n+1} = \frac{1}{n}((n-1)x_n + \frac{a}{(x_n)^{n-1}})$.

Seção 2

1. **(a)** V **(b)** f **(c)** f **(d)** f **(e)** f **(f)** F.

2. 2. **(a)** 2 **(b)** -3 **(c)** $-\infty$ **(d)** 12 **(e)** $\ln 3$ **(f)** 0 **(g)** 0 **(h)** ∞ **(i)** 0 **(j)** 1 **(k)** ∞ **(l)** 0 **(m)** ∞ **(n)** $-\infty$ **(o)** 0 **(p)** ∞ **(q)** 0 **(r)** não existe $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$ **(s)** $-\infty$ **(t)** $-\infty$ **(u)** 0 **(v)** $\frac{55}{2}$ **(w)** -2 **(x)** -1 **(y)** e.

3. $a = -4$.

4. $c\,\frac{1}{5}$.

5. 0.

Seção 3 - páginas 107 a 109

1. **(a)** $0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **(b)** $0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, -1$ **(c)** $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ **(d)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

2. -2, -1, $-\frac{1}{2}$ e 0.

3. $-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2, 2$.

4. **(a)** *f* **(b)** F.

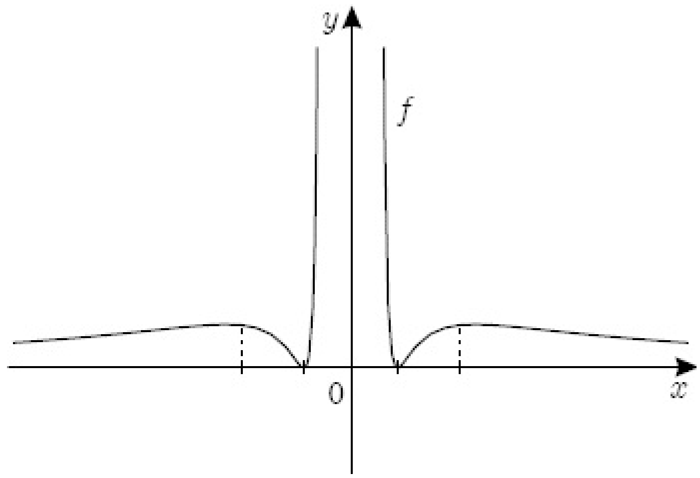
5. Sim, pois é uma função crescente.

6. **(a)** $a \geq 0$ **(b)** $a > 0$.

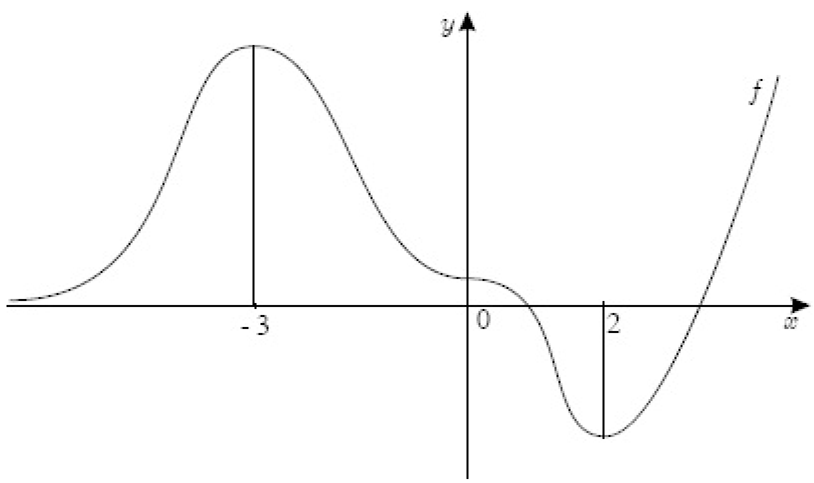
7. **(a)** $x = 0$ **(b)** $x = -1$.

8. **(a)** Não **(b)** Não **(c)** $(1,\infty)$ **(d)** $(-\infty,0)$.

9. **(a)** $(-\infty,-1)$ e $(1, \infty)$ **(b)** Mínimo local: $x =$ e $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Máximo local: $x = -\sqrt{e^2+1}$ e $x = \sqrt{e^2+1}$

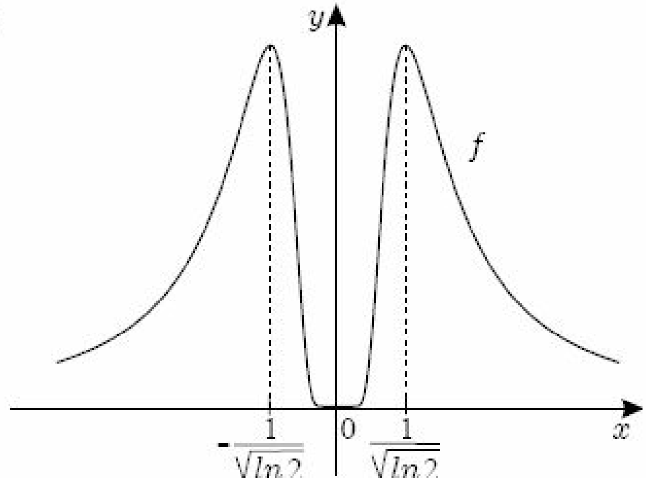


10. **(a)** Crescimento: $(-\infty, -3]$ e $[2, \infty)$, Decrescimento: $[-3, 2]$ **(b)** Mínimo local: $x = 2$ e Máximo local: $x = -3$ **(c)** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (d)



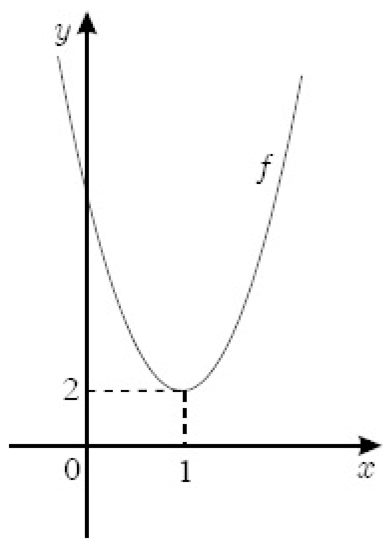
11. **(b)** $g'(0) = 0$ e $g'(x) = \pi \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \cos(\pi e^{-\frac{1}{x^2}})$, para $x \neq 0$ **(c)** $x = -\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}, x = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$ e $x = 0$ **(d)** $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

(e)

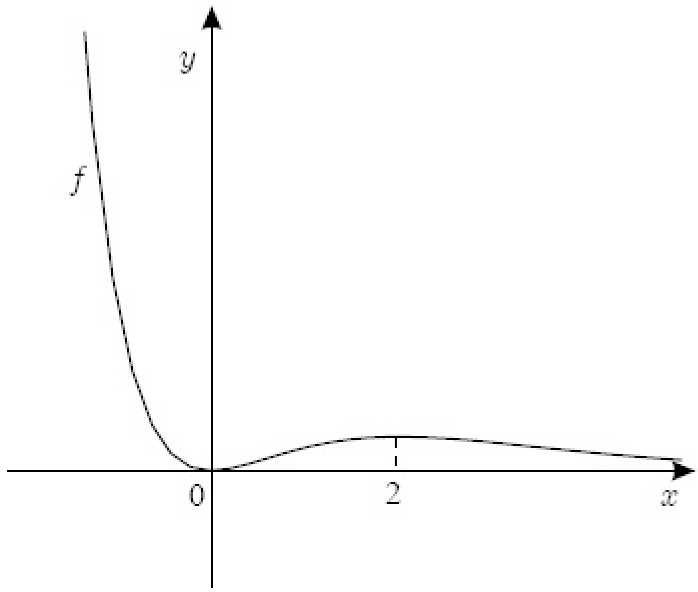


12. Mínimo local: $x = \frac{1}{2}$.

13. **(a)** *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$, crescimento: [1,∞), decrescimento: (–∞,1], pontos de mínimo local: *x* = 1, limites assintóticos: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, gráfico:



(b) *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$, crescimento: [0,2], decrescimento: (–∞,0] e [2, ∞), pontos de máximo local: *x* = 2, pontos de mínimo local: *x* = 0, limites assintóticos: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, gráfico:



(c) *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$ – {0}, crescimento: [–e, 0) e (0, e], decrescimento: (–∞, –e] e [e, ∞), pontos de máximo local: *x* = e, pontos de mínimo local: *x* = –e, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$.

(d) *dom*(*f*) = (0,∞), crescimento: [$\frac{1}{e}$, ∞), decrescimento: [0, $\frac{1}{e}$), pontos de mínimo local: *x* = $\frac{1}{e}$ limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(e) *dom*(*f*) = (–∞,1], crescimento: (–∞,$\frac{2}{3}$], decrescimento: [$\frac{2}{3}$, 1], pontos de máximo local: *x* = $\frac{2}{3}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

(f) *dom*(*f*) = (0, ∞), crescimento: (0, ∞), não existem pontos de extremo local, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(g) *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$, crescimento: [0, ∞), decrescimento: (–∞,0], pontos de mínimo local: *x* = 0, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

(h) *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$ – { –1,1}, crescimento: (–∞, –1) e (– 1,0), decrescimento: (0,1) e (1, ∞), pontos de máximo local: *x* = 0, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) =$

0 e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$.

(i) *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$ − {2,3}, crescimento: [− $\sqrt{6}$, 2) e (2, $\sqrt{6}$], decrescimento: (−∞, −$\sqrt{6}$ e [$\sqrt{6}$, 3) e (3, ∞), ponto de máximo local: $x = \sqrt{6}$, ponto de mínimo local: $x = -\sqrt{6}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ 0, $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to3^+} f(x) = \infty$.

(j) *dom*(*f*) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, crescimento: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$, decrescimento: $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, pontos de máximo local: $x = \frac{\pi}{4}$.

14. Somente uma solução ($x = 0$).

15. três soluções.

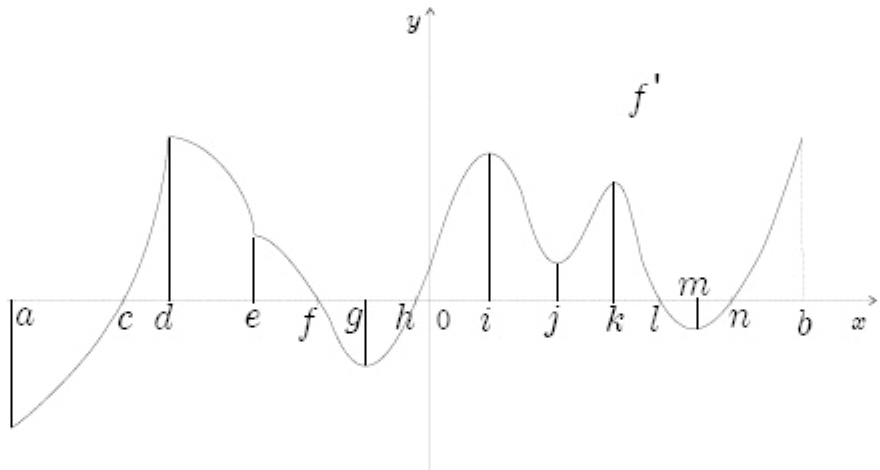
16. **(a)** V **(b)** V.

Seção 3 – páginas 120 a 123

3. **(a)** *a,c,k,n* **(b)** *a,n* **(c)** *k* **(d)** b, c, e, m.

4. **(a)** Sim **(b)** Não.

5. **(a)** *c, f, h, l, n* **(b)** *d, e, g, i, j, k, m* **(c)** *c, h, n* **(d)** *f, l* **(e)** *d, g, i, j, k, m* **(f)** [*c, f*] e [*h, l*] e [*n, b*] **(g)** [*a*, c] e [*f, h*] e [*l, n*].



6. **(a)** f **(b)** f **(c)** V **(d)** F.

7. **(a)** e **(b)** a **(c)** b, c, d.

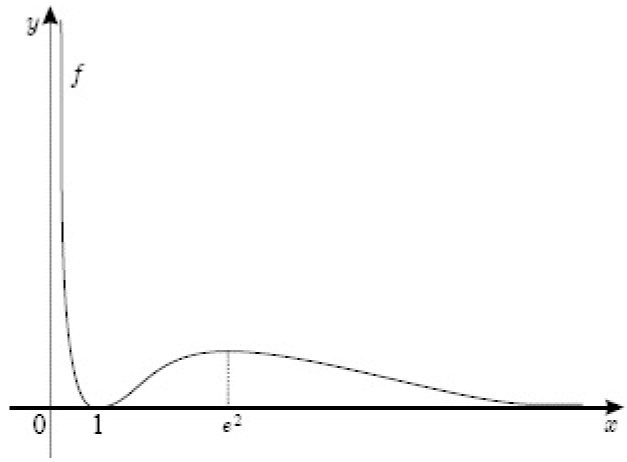
8. **3.**

9. **(a)** Ponto de mínimo local: $x = 0$ **(b)** g tem concavidade para cima.

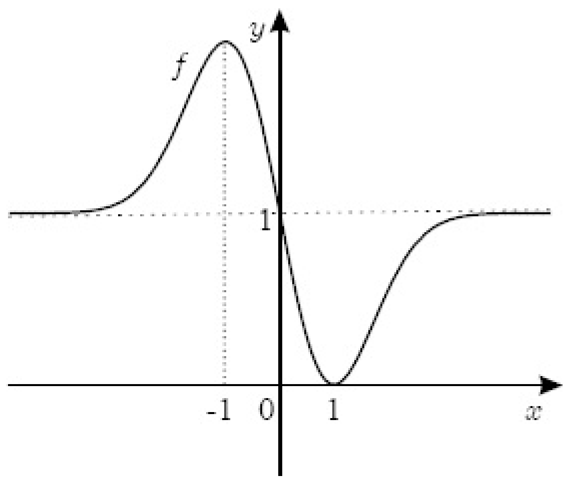
10. Crescimento: $[0, \infty)$, decrescimento: $(-\infty,0]$, pontos de mínimo local: $x = 0$, concavidade para cima: $\mathbb{R}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

11. **(b)** Crescimento: $(-\infty, 0]$, decrescimento: $[0, \infty)$, pontos de máximo local: $x = 0$, concavidade para cima: $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, concavidade para baixo: $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, pontos de inflexão: $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

    (d) Crescimento: $[1,e^2]$, decrescimento: $(0,1]$ e $[e^2,\infty)$, ponto de máximo local: $x = e^2$, ponto de mínimo local: $x = 1$, concavidade para cima: ($(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$), concavidade para baixo: $x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, pontos de inflexão:$(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$ e $x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, gráfico:



(f) Crescimento: (–∞, –1] e [1, ∞), decrescimento: [–1,1], pontos de máximo local: x = –1, pontos de mínimo local: x = 1, concavidade para cima: (–∞, $\sqrt{-3}$) e (0, $\sqrt{3}$), concavidade para baixo: ($\sqrt{-3}$, 0) e ($\sqrt{3}$ ∞), pontos de inflexão: x = 0,x = $\sqrt{3}$ e x =$\sqrt{-3}$, limites assintóticos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, gráfico:



(h) Crescimento: (– $\frac{\pi}{2}$,0] decrescimento: (0,$\frac{\pi}{2}$], ponto de máximo local: x = 0, concavidade para baixo: (– $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$), pontos de inflexão: não existem, limites assintóticos: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$.

(j) Crescimento: (–∞, – 1] e (0,1], decrescimento: [–1,0) e [1,∞), pontos de máximo local: x = – 1 e x = 1, concavidade para cima: $(-\infty, -\sqrt[3]{e})$ e $(\sqrt[3]{e}, \infty)$, concavidade para baixo: $(-\sqrt[3]{e}, 0)$ e $(0, \sqrt[3]{e})$, pontos de inflexão: $x = -\sqrt[3]{e}$ e $x = \sqrt[3]{e}$,, limites assintóticos: $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Seção 4

1. **(a)** Valor mínimo: –1. Valor máximo: 0. **(b)** Não tem valor mínimo. Valor máximo: −1. **(c)** Valor mínimo: $-\frac{5}{3}$. Valor máximo: −1. **(d)** Não tem valor mínimo. Valor máximo: $\frac{2}{e}$. **(e)** Não tem valor mínimo. Valor máximo: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

2. **(a)** Valor mínimo: 0. **(b)** Valor máximo: 2.

3. Valor mínimo: 0. Valor máximo: 37.

4. **(a)** Não possui valor mínimo **(b)** Valor máximo: 1.

5. Valor mínimo: e^{-8}. Valor máximo: e^{37}.

6. **(a)** Não possui valor máximo. **(b)** Valor mínimo: $-\frac{1}{e}$. Ponto de mínimo: $x = -1$

7. **(a)** Valor mínimo: 0 **(b)** Não possui valor máximo.

8. **(a)** $\frac{1}{5}$ **(b)** 1.

9. **(a)** $x = 0$ e $y = 1$ (ou $x = 1$ e $y = 0$) **(b)** $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

10. E um quadrado cujo lado tem comprimento 25.

11. Comprimento do lado do quadrado $\frac{11-\sqrt{37}}{6}$ cm. cm.

12. Sem tampa - raio do fundo = $\left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm e altura da lata = $\left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm; com tampa - raio do fundo $\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm e altura da lata $\left(\frac{60}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm.

13. Comprimento dos trechos = 200 m.

14. $c = \sqrt{18}$ e $l = \sqrt{18}$.

15. $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

16. $a = 1$ e $r = \frac{4}{3}$.

Capítulo 9
A Integral

Seção 1

1. $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3$.

2. **(a)** 14 **(b)** -9 **(c)** -15 **(d)** $\frac{145}{4}$ **(e)** $\frac{11}{2}$ **(f)** -10 **(g)** 26.

3. **(a)** 41 **(b)** $-\frac{19}{6}$ **(c)** -8 **(d)** 36.

4. $\frac{3}{16}$.

5. -1.

6. **(a)** $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{2} - 2\ln\sqrt{2}$ **(c)** 0 **(d)** $\frac{\pi}{2} - 2\ln\sqrt{2}$.

7. **(a)** 6 **(b)** -2 **(c)** 0.

8. **(a)** $\frac{45}{2}$ **(b)** 18.

9. **(a)** V **(b)** F **(c)** V **(d)** V **(e)** F.

10. $F(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$, $F(2) = 4$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$.

11. **(a)** F **(b)** F **(c)** F **(d)** F **(e)** F.

12. $\frac{3}{2}$.

13. $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

15. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$.

16. **(a)** 5 **(b)** 5.

Seção 2

1. **(a)** $\frac{192}{5}$ **(b)** $-\frac{19}{9}+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ **(c)** 4 **(d)** $-\frac{80}{7}\left(\sqrt[4]{5}\right)^3+\frac{16}{7}$ **(e)** $\frac{54}{7}\sqrt{3}-\frac{2}{7}$ **(f)**.$\ln 2$ **(g)**$\frac{1}{3}e^{-3}-\frac{1}{3}e^{-4}$ **(h)** 3 **(i)** $\frac{\pi}{4}$ **(j)** 1 **(k)** $1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **(l)** $\frac{\pi}{6}$.

2. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $g(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+\frac{1}{2}$.

3. 4.

4. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$, **(a)** $f'(x)=\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$.

5. $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $\int_3^2\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{12}$, $f(x)=g(x)+c$ (neste caso $c=1$).

6. $F(x)=1+\ln|x|$.

7. **(a)** e^{t^2} **(b)** $\frac{x^2}{1+x^2}$ **(c)** $-e^{-x^2}$ **(d)** $\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2 x)}\cos x+\sqrt{(1+\cos^2 x)}\operatorname{sen} x$ **(e)** $\operatorname{sen} s\operatorname{sen}(\operatorname{sen} s)\cos s+\cos s\operatorname{sen}(\cos s)\operatorname{sen} s$ **(f)** $\operatorname{sen} x^2+e^{-x^2}$ **(g)** $2\frac{\ln x^2}{x}$ **(h)** $-e^{x^2}$ **(i)** $3\left(\operatorname{sen}\left(1+e^{3x}\right)^2\right)e^{3x}-2\left(\operatorname{sen} x^4\right)x$ **(j)** $3\left(\ln\left(x^6+1\right)\right)x^2+\ln\left(1+\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x$.

8. $\sqrt[4]{\pi}$.

9. $\frac{3}{2}$.

10. 2.

11. **(a)** 1 **(b)** 0.

12. $F'(x)=G'(x)=e^{-x^2}$.

14. **(a)** Crescimento: [0, 1]e[2,4]. Decrescimento:[1, 2] **(b)** Máximo Local: $x=1$,Mínimo local:$x=2$ **(e)** $G(0)=0$, $G(1)=2$, $G(2)=0$, $G(3)=3$, $G(4)=7$ **(f)** $x=0$, $x=2$ são pontos de mínimo global e $x=4$ é ponto de máximo global.

15. **(a)** Ponto de máximo local: $x=-1$ e ponto de mínimo local: $x=1$ **(b)** $x=0$, $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$.

16. **(a)**$x=-1$ **(b)** $(-\infty,-1)$ **(c)** $(-1,\infty)$.

17. **(a)** f é uma função decrescente **(b)** Não existem **(c)** concavidade para cima: $(-\infty,2)$ e concavidade para baixo: $(2,\infty)$ **(d)** 2.

18 $\frac{3}{2}$.

20. $x = 2$, $x = 4$, $x = 9$.

21. **(a)** crescente: $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e decrescente: $[-1, -\frac{1}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, 2]$ **(b)** ponto de mínimo local: $x = -\frac{1}{2}$, ponto de máximo local: $x = \frac{3}{2}$.

22. 2.

23. **(a)** 1.

24. **(a)** ∞.

Seção 3

1. **(a)** 5 **(b)** Método do Trapézio.

2. $-\frac{2}{3}$

Seção 4

1. **(a)** $\frac{e^{2\pi}}{2} + e^{\pi}$ **(b)** $\mathrm{tg}\,(\ln 3) - \mathrm{tg}\,(\ln 2)$ **(c)** $\frac{\pi}{4}$ **(d)** $-e^{\frac{1}{2}} + e$.

2. **(a)** $\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi - \ln 2$ **(b)** $e - 5e^{-1}$ **(c)** $\frac{2}{25}$ **(d)** $-3\ln 3 + 2$.

3. $h'(u) = \sec u$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(\sqrt{2}+1)$.

4. **(a)** $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$ **(b)** $-\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}\frac{2}{3}$ **(c)** $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **(d)** $6 + \frac{25}{2}\mathrm{arcsen}\frac{3}{5} - \sqrt{6} - \frac{25}{2}\mathrm{arcsen}\frac{1}{5}$.

5. **(a)** $\frac{14\sqrt{14}}{9} - \frac{5\sqrt{5}}{9}$ **(b)** $-\frac{28\sqrt{2}}{9}$ **(c)** $-\frac{9}{25}$ **(d)** 0 **(e)** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ **(f)** $-\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$ **(g)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **(h)** $\frac{5}{18}\pi\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 3$ **(i)** $-\frac{1}{2}\cos\pi^2 + \frac{1}{2}$ **(j)** $\frac{e^2+5}{4}$ **(k)** $\frac{1}{4}$ **(l)** $\frac{\ln 2 - \ln 3}{2}$ **(m)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(n)** $2 - \frac{\pi}{2}$ **(o)** $-1 - \frac{7\pi}{4} - \sqrt{3}$ **(p)** $\frac{1}{256} + \frac{\pi}{512}$.

6. **(a)** $\frac{e^{2x}}{2}$ **(c)** $\mathrm{sen}\, x - x\cos x$ **(e)** $\frac{1}{2}\ln^2 x$ **(g)** $\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$
   (i) $x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x$ **(k)** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$ **(m)** $\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x \mathrm{sen}\, x$ **(o)** $2\ln^{\frac{1}{2}} x$ **(q)** $x^2e^x + xe^x - 2e^x$.

7. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|e + x^2 + 2\,\mathrm{sen}\, x\right| + \frac{3}{2}$.

8. $G(x) = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}$.

9. $G(t) = \pi + \frac{4}{9}\mathrm{arcsen}(\frac{9t}{7})$.

Seção 5 - páginas 228 a 230

1. Não.

2. (b).

3. (c).

4. $y\,(x) = C \cos x$.

5. **(a)** sim **(b)** não.

6. **(a)** $y = \sqrt{\frac{5x^2}{7} + C}$ ou $y = -\sqrt{\frac{5x^2}{7} + C}$ **(b)** $y = Ce^{3x}$ **(c)** $y = Ce^{-x}$ **(d)** $y = \sqrt{Ce^{\frac{2x^3}{3}} - 1}$ ou $y = -\sqrt{Ce^{\frac{2x^3}{3}} - 1}$.

7. **(a)** $y = \sqrt{\frac{5x^2}{7} + 1}$ **(b)** $y = e^{3x}$ **(c)** $y = e^{-x}$ **(d)** $y = \sqrt{2e^{\frac{2x^3}{3}} - 1}$.

8. $y = (\frac{\operatorname{tg} x + c}{2})^2$ e $y = (\frac{\operatorname{tg} x + 5}{2})^2$.

9. $y\,(x) = \sqrt[3]{\frac{3e^{2x} - 1}{2}}$.

10. $y(x) = \sqrt{e^{x^2}}$.

11. **(a)** $y\,(x) = \operatorname{tg}(\frac{x^4}{4} - 5x + 6)$ **(b)** $y(x) = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$, com $C \neq 0$ **(c)** $y(x) = 2e^{5-5x}$ **(d)** $y(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 2$ **(e)** $y(x) = -e^{-\cos x - x \operatorname{sen} x + 1}$.

13. V.

Seção 5 – páginas 246 a 248

1. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{2}{5}$.

2. $\frac{17}{6}$.

3. $\frac{9}{2}$.

4. 4.

5. $2\sqrt{2} - 2$.

6. 8.

7. $e^{\sqrt{2}} - 2e + e^2$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. $4\sqrt{2}$.

10. $\frac{14}{3}$.

11. $\frac{16}{3} - \pi$.

12. 4.

13. $1 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{2(\pi+1)\sqrt{\pi+1}}{3}$.

14. $\frac{9}{2}$.

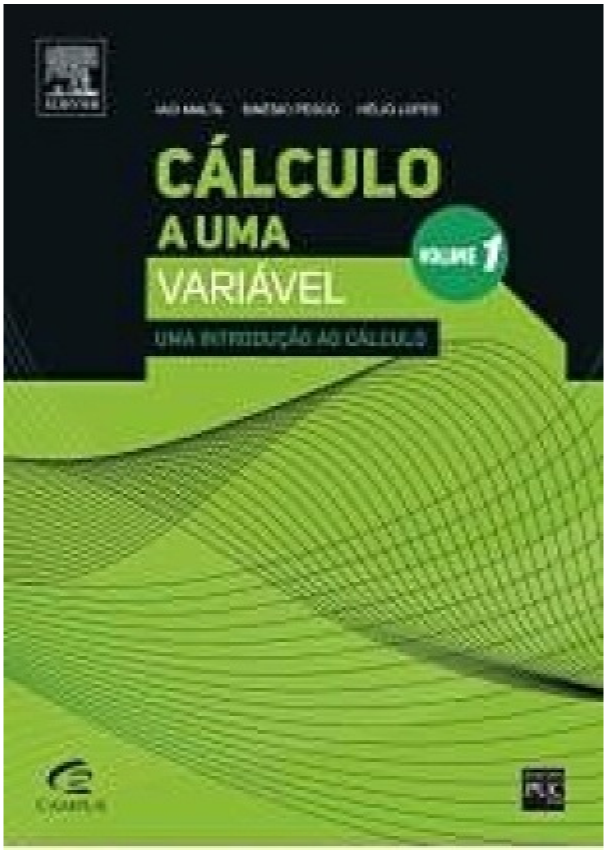
15. $\frac{9\pi}{2}$.

16. $\frac{3\pi}{10}$.

17. $\frac{8}{3}\pi$.

18. $\frac{\pi^2}{2}$.

19. $\frac{28\pi}{5} + 2\pi^2$.


CÁLCULO
A UMA
VARIÁVEL
UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

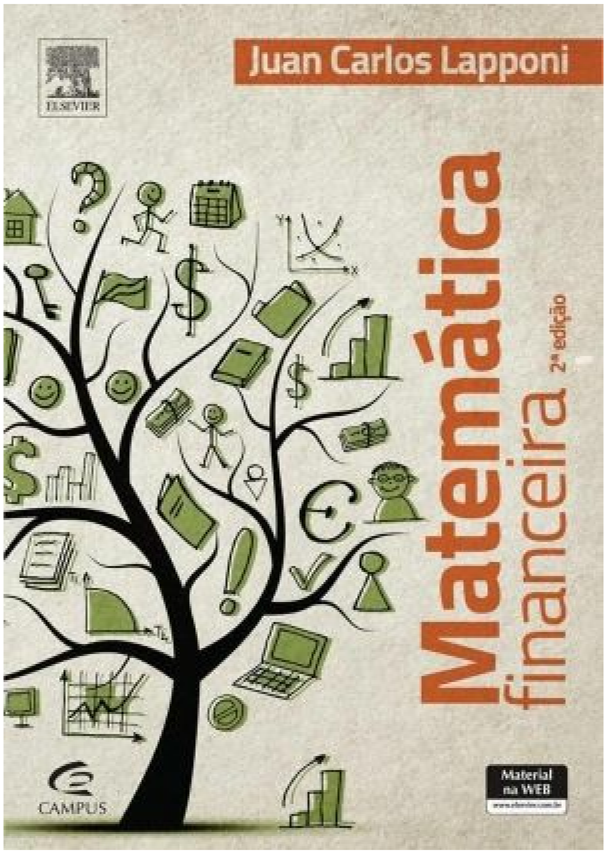
Cálculo a uma variável, volume I

Lopes, Hélio
9788535254570
472 páginas

Compre agora e leia

A obra tem o objetivo principal o de apresentar o conteúdo do cálculo diferencial e integral ao leitor, mas, além disso, introduzi-lo na realidade do cálculo por aproximações (cálculo numérico) e promover a formação de profissionais . Esses objetivos nortearam a ênfase nos aspectos numéricos e conceitual do cálculo. O Volume 1 é uma preparação para o cálculo integral e diferencial que é tratado no Volume 2.

Compre agora e leia


Juan Carlos Lapponi
ELSEVIER
Matemática financeira
2ª edição
CAMPUS
Material na WEB

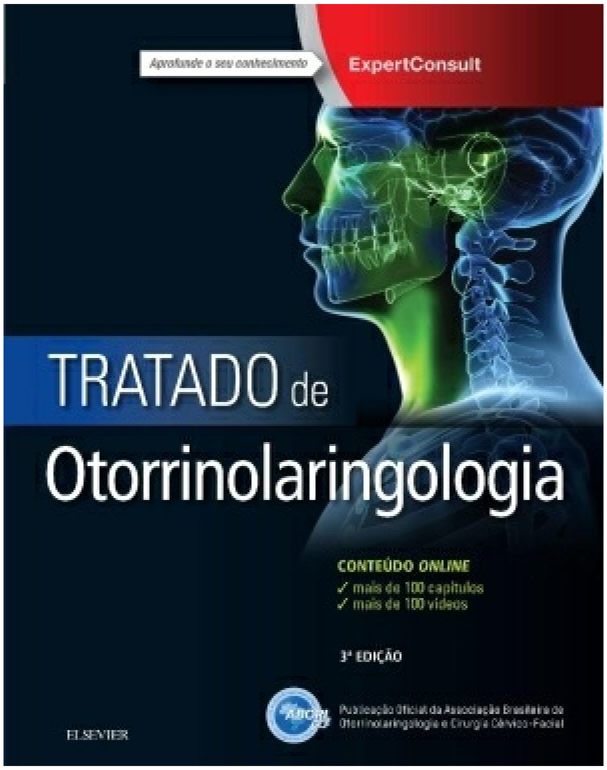
Matemática Financeira

Lapponi, Juan
9788535274424
312 páginas

Compre agora e leia

Esta nova edição de Matemática Financeira constrói uma ponte entre a apresentação dos conceitos de forma tradicional, como vem sendo divulgado e realizado no Brasil há muitos anos, e uma apresentação mais atual que inclui a utilização de conceitos mais abrangentes e modernos de Finanças.Com linguagem leve e didática e com o objetivo de facilitar o autodesenvolvimento do leitor, a obra é complementada por muitos exercícios e aborda assuntos como: juros simples e compostos, taxa nominal e capitalização contínua, temas com séries de capitais, avaliação de projetos de investimento, operação contingente, dentre outros.Acompanhando os exemplos e resolvendo os exercícios, o leitor terá um procedimento único de resolução dos cálculos financeiros com juro composto, utilizará adequadamente as antigas e novas ferramentas de cálculo e melhorará seu desempenho profissional.

Compre agora e leia


Aprofunde o seu conhecimento
ExpertConsult
TRATADO de
Otorrinolaringologia
CONTEÚDO ONLINE
✓ mais de 100 capítulos
✓ mais de 100 vídeos
3ª EDIÇÃO
Publicação Oficial da Associação Brasileira de
Otorrinolaringologia e Cirurgia Cérvico-Facial
ELSEVIER

Tratado de Otorrinolaringologia e Cirurgia Cérvicofacial da ABORL-CCF

Associação Brasileira de
9788535289039
1000 páginas

Compre agora e leia

A fim de termos em nosso catálogo o livro referência da área de Otorrinolaringologia, que é utilizado como base de estudo para os residentes da especialidade. A obra é escrita pelos principais nomes em Otorrinolaringologia no Brasil sendo referência e uma fonte confiável para consulta na prática clínica diária. Essa terceira edição será composta de apenas um volume e haverá capítulos impressos totalizando 1000 páginas e capítulos on-line com até 2.500 páginas. Além disso, haverá vídeos de procedimentos cirúrgicos e de exames, que também é uma novidade para esta edição.

Compre agora e leia


ELSEVIER
CRISTINA WERKEMA
Série Werkema
de Excelência Empresarial
LEAN SEIS SIGMA
Introdução às Ferramentas do Lean Manufacturing
2ª EDIÇÃO
CAMPUS
Material
do Professor
na WEB

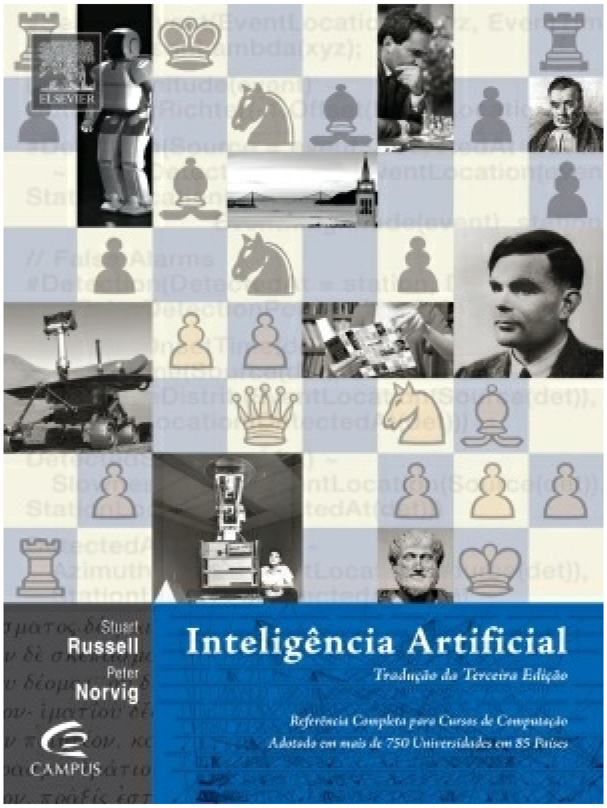
Lean Seis Sigma

Werkema, Cristina
9788535253856
120 páginas

Compre agora e leia

O Lean Manufacturing, cujas origens remontam ao Sistema Toyota de Produção, é uma iniciativa que busca eliminar desperdícios, isto é, excluir o que não tem valor para o cliente e imprimir velocidade à empresa. Já o Seis Sigma é uma estratégia cujo foco principal é a redução de custos e melhoria da qualidade de produtos e processos, com o consequente aumento da satisfação de clientes e consumidores e da lucratividade da organização.O programa resultante da integração entre o Seis Sigma e o Lean Manufacturing, por meio da incorporação dos pontos fortes de cada um deles, é denominado Lean Seis Sigma, uma estratégia mais abrangente, poderosa, eficaz e adequada para a solução de todos os tipos de problemas relacionados à melhoria de processos e produtos.Neste livro, é apresentada uma introdução às ferramentas do Lean Manufacturing e uma forma de integração dessas ferramentas ao método DMAIC, um dos pilares do Seis Sigma. O objetivo é que esta obra seja uma fonte de consulta para os pro_ssionais que desejem obter uma visão geral do tema por meio de uma leitura rápida.

Compre agora e leia


ELSEVIER
Stuart
Russell
Peter
Norvig
CAMPUS
Inteligência Artificial
Tradução da Terceira Edição
Referência Completa para Cursos de Computação
Adotado em mais de 750 Universidades em 85 Países

Inteligência artificial

Norvig, Peter

9788535251418
1056 páginas

Compre agora e leia

Número um no seu campo, este livro oferece a mais abrangente introdução à teoria e prática da inteligência artificial, sendo adotado por mais de 600 universidades de 60 países. Nos últimos cinquenta anos de pesquisas sobre IA e nos dois últimos milênios de trabalhos relacionados a esse tema, muitas ideias surgiram e a maneira como se pensa esta área está em constante evolução. Nesta tradução da terceira edição, foram consideradas as mais importantes aplicações de tecnologia de IA e seus marcos algoritmos, como a solução do jogo de damas, colocando a obra num patamar teórico bastante consistente. Inteligência Artificial destina-se, principalmente, ao uso em cursos de graduação ou de extensão. Também pode ser usado em cursos de pós-graduação ou para quaisquer estudantes que tenham familiaridade com os conceitos básicos de ciência da computação.

Compre agora e leia