
OBJETIVO
ITA
Matemática
3
1º CENTENÁRIO DO SÊLO NO BRASIL
1843
1943

MÓDULO 9

Conjuntos

1. **(ITA)** – Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$.   II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.   IV. $\{0,1,2,5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e III.   b) apenas II e IV.
c) apenas II e III.   d) apenas IV.
e) todas as afirmações.

2. **(ITA-adaptado)** – Considere os conjuntos
$S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0,1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0,1\}$.

Julgue-as se são verdadeiras ou falsas.

3. **(ITA)** – Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$.

Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11   b) 14   c) 15   d) 18   e) 25

4. **(ITA)** – Sejam **A** um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que **A ∪ B** contenha 12 elementos.
Então, o número de elementos de **P(B \ A) ∪ P (Ø)** é igual a

a) 8 b) 16 c) 20 d) 17 e) 9

Obs.: **Na notação usada pelo exame do Ita tem-se B \ A = B – A**

5. Conforme pesquisa realizada com 18.000 pessoas de uma comunidade, sabe-se que:
a) 8.000 são homens;
b) 9.000 são gordos;
c) 13.000 são estudantes;
d) 1.500 são magros e não estudam;
e) 4.000 são homens magros;
f) 2.000 são homens e não estudam;
g) 500 homens magros não estudam.
Quantas mulheres gordas estudam?

MÓDULO 10

Conjuntos

1. **(ITA)** – Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto dos números reais. Então, podemos afirmar que:
a) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$
b) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$
c) Se $A \subset B$, então $A^C \subset B^C$
d) $(A \cap B) \cup C^C = (A^C \cup C)^C \cap (B^C \cup C)^C$
e) $A \cup (B \cup C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$
Nota: A^C significa o complementar de A no conjunto dos reais.

2. Assinale a alternativa falsa, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

b) $A \cap (B \ \Delta\ C) = (A \cap B)\ \Delta\ (A \cap C)$, onde $X\ \Delta\ Y$, chamado "diferença simétrica entre os conjuntos X e Y", significa $(X - Y) \cup (Y - X)$.

c) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap B \cap C)$

d) $\complement^{C}_{A \cup B} = \left(\complement^{C}_{A}\right) \cup \left(\complement^{C}_{B}\right)$

e) uma das anteriores é falsa.

3. Considerando A, B e X subconjunto de S tais que $\complement_S\ ((A - B) \cup (B - A)) = \complement_S\ (A \cup B\ ) \cup X$, pode-se afirmar que:

a) $X = A - B$ b) $X = A \cap B$ c) $X = A \cup B$
d) $X \subset (A \cup B)$ e) $(A \cap B) \subset X$

4. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a,b\}$ e $A^C \backslash B = \{d,e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 8.

MÓDULO 11

Conjuntos

1. **(ITA)** – Seja U um conjunto não-vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de P(U) com a seguinte propriedade:
Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.
Então, o número máximo de elementos que S pode ter é
a) 2^{n-1}
b) n/2, se n for par, e (n + 1)/2, se n for ímpar
c) n + 1 d) $2^n - 1$ e) $2^{n-1} + 1$

2. **(ITA)** – Se A, B, C forem conjuntos tais que
$n(A \cup B) = 23$, $n(B - A) = 12$, $n(C - A) = 10$,
$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,
a) formam uma progressão aritmética de razão 6.
b) formam uma progressão aritmética de razão 2.
c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
e) não formam uma progressão aritmética.

3. **(ITA)** – Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:
I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.
II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
Destas, é (são) falsa(s)
a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e III. e) nenhuma.

4. **(ITA)** – Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.
a) Determine $n(C)$.
b) Determine $n(P(B \backslash C))$.

5. **(ITA)** – Seja A um conjunto não-vazio.
a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de m.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

MÓDULO 12

Conjuntos

1. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B \backslash A)$, $n(A \backslash B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B \backslash A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A \backslash B)$ é igual a

a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

2. **(ITA)** – Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

a) $2^8 - 9$ b) $2^8 - 1$ c) $2^8 - 2^6$
d) $2^{14} - 2^8$ e) 2^8

3. **(ITA)** – Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então, o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ c) $\{1, 3, 7, 8\}$
d) $\{1, 3\}$ e) $\{7, 8\}$

4. Mostre que quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 9

1. Seja A o conjunto de todos os conjuntos X tais que $\{1; 3\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\}$, e B o conjunto dos divisores naturais de 6. Determine o número de subconjuntos de A X B.

2. **(ITA)** – Sejam F e G dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
b) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente $F \cup G = \mathbb{R}$.
c) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.
d) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
e) Se $F \subset G$ e $G \neq \mathbb{R}$, então $\{F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$.

3. **(ITA)** – Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$; $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.
II. $B \setminus A^C = B \cap A$.

■ MÓDULO 10

1. **(ITA)** – Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios, e $A - B = \{p \in \mathbb{R};\ p \in A \text{ e } p \notin B\}$. Dadas as igualdades:

1. $(A - B) X C = (A X C) - (B X C)$
2. $(A - B) X C = (A X B) - (B X C)$
3. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
5. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$

podemos garantir que:

a) 2 e 4 são verdadeiras b) 1 e 5 são verdadeiras
c) 3 e 4 são verdadeiras d) 1 e 4 são verdadeiras
e) 1 e 3 são verdadeiras

2. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$
II. $(A - B^C)^C = B - A^C$
III. $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

Sobre essas afirmações, podemos garantir que:

a) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

3. Sendo A, B e C subconjuntos de um conjunto S, a afirmação nem sempre verdadeira é:

a) $\complement_S A \cap B \cap C = (B \cap C) - A$
b) $A \cap \complement_S B \cap \complement_S C = A - (B \cap C)$
c) $\complement_S (A \cup B) = \complement_S A \cap \complement_S B$
d) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$
e) $\exists$ A, B e C tais que $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$

■ MÓDULO 11

1. Um determinado produto vende-se líquido ou em pó. Uma sondagem mostrou os seguintes resultados:

– Um terço das pessoas interrogadas não utilizam o pó;
– Dois sétimos das pessoas interrogadas não utilizam o líquido;
– 427 pessoas utilizam o líquido e o pó;
– Um quinto das pessoas interrogadas não utilizam o produto.

Quantas pessoas foram interrogadas nesta sondagem?
(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

2. **(ITA)** – Seja X um conjunto não-vazio e sejam A e B dois subconjuntos de X. Definimos $A^C = \{x \in X \text{ tal que } x \notin A\}$ e $A - B = \{ x \in A \text{ tal que } x \notin B\}$. Dadas as sentenças

1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$, onde “ $\Leftrightarrow$ ” significa “equivalente” e $\emptyset$ representa o conjunto vazio;
2. Se $X = \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^3 - 1 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x - 1 = 0\}$, então $A = C = B$
3. $A - \emptyset = A$ e $A - B = A - (A \cap B)$
4. $A - B \neq A \cap B^C$

podemos afirmar que está(estão) correta(s):

a) as sentenças 1 e 3
b) as sentenças 1, 2 e 4
c) as sentenças 3 e 4
d) as sentenças 2, 3 e 4
e) apenas a sentença 2.

■ MÓDULO 12

1. Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

(I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} = X$.
(II) Se $Z \subset X$, então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] = X \cup Y$.
(III) Se $(X \cup Y)^c \subset Z$, então $Z^c \subset X$.

temos que:

a) apenas (I) é verdadeira.
b) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
c) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) todas são verdadeiras.

2. **(ITA)** – Sejam E, F, G e H subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere as afirmações:

I. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.

II. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.

III. Se $(E \times G) \cup (F \times H) = (F \times H)$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$

Então:

a) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

e) todas as afirmações são verdadeiras.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 9

1) $\{1; 3\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow \begin{cases} X = \{1; 3\} \\ X = \{1; 3; 2\} \\ X = \{1; 3; 4\} \\ X = \{1; 2; 3; 4\} \end{cases}$

Assim:
$A = \{\{1; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}\}$ e
$n(A) = 4$

$B = \{1; 2; 3; 6\}$ e $n(B) = 4$

$n(A \text{ X } B) = n(A) \,.\, n(B) = 16$ e $n[P(A \text{ X } B)] = 2^{16}$
Resposta: 2^{16} subconjuntos

2) $F \subset G$ **e** $G \subset F \Rightarrow F = G \Rightarrow F \cap G = F \cup G$
Resposta: C

3) **1) Para** $A \cap B = \varnothing$: $(x \in B \Rightarrow x \notin A, \forall\, x) \Rightarrow$
$(x \in B \Rightarrow x \in A^C, \forall\, x) \Rightarrow B \subset A^C$

2) $x \in B \setminus A^C, \forall\, x \Leftrightarrow (x \in B$ **e** $x \notin A^C), \forall\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in B$ **e** $x \in A), \forall\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \cap B), \forall\, x \Leftrightarrow B \setminus A^C = A \cap B$

Resposta: Demonstrações

■ MÓDULO 10

1) **1) Verdadeira, pois**

$$\forall (x; y) \in (A - B) \text{ X } C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (A - B) \\ \text{e} \\ y \in C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{e} \\ y \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } y \in C \\ \text{e} \\ y \notin B \text{ e } y \in C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \in (A \text{ x } C) \\ \text{e} \\ (x; y) \notin (B \text{ x } C) \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in (A \text{ X } C) - (B \text{ X } C)$$

logo $(A - B) \text{ X } C = (A \text{ X } C) - (B \text{ X } C)$

2) Falsa, conforme caso anterior

3) Falsa, pois

$$\left.\begin{matrix} (A \cap B) - A = \varnothing \\ (B \cap A) - B = \varnothing \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cap B) - A = (B \cap A) - B$$

4) Verdadeira, pois

$$\forall x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \notin (B \cap C) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \notin B \text{ ou } x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ e } x \notin C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (A - B) \\ \text{ou} \\ x \in (A - C) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$$

5) Falsa, pois

I) $(A - B) \cap (B - C) = \varnothing$, **visto que**
$\forall\, x \in (A - B) \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin (B - C)$

II) $(A - C) \cap (A - B)$ **não é necessariamente vazio, como no caso** $A = \{1, 2, 3\}$;
$B = \{3, 4\}$; $C = \{2, 5\}$ **e**
$(A - C) \cap (A - B) = \{1\} \neq \varnothing$

Resposta: D

2) **I) Verdadeira, pois** $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C =$
$= [(A - B) \cup (B \cup A^C)]^C =$
$= [(A \cup B) \cup A^C] = [IR]^C = \varnothing$

II) Falsa, pois

$$\left.\begin{matrix} A - B^C = A \cap B \\ B - A^C = A \cap B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (A - B^C)^C = (A \cap B)^C \neq (A \cap B) = B - A^C$

III) Falsa, pois

$[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = [\emptyset]^C = IR$ e pode-se ter $A \neq \mathbb{R}$

Resposta: A

3) a) Verdadeira

$\complement_s A \cap B \cap C = (B \cap C) \cap \complement_s A = (B \cap C) - A$

b) Verdadeira

$A \cap \complement_s B \cap \complement_s C = A \cap (B \cup C)^C = A - (B \cup C)$

c) Verdadeira

$\complement_s (A \cup B) = \complement_s A \cap \complement_s B$

d) Falsa, pois se

$A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$ e $C = \{1; 3\}$

tem-se $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) =$

$= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1; 2; 3\} \neq \emptyset$

e) Verdadeira, pois se

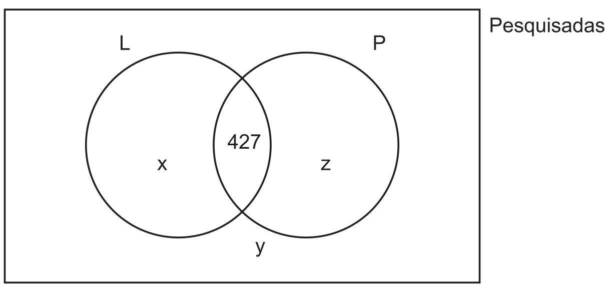
$A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$ e $C = \{1; 3\}$

tem-se $A \cap B \cap C = \emptyset$ e

$A \cap (B \cup C) = \{1; 2\} \neq \emptyset$

■ MÓDULO 11

1) Conforme o enunciado, temos o seguinte diagrama:



$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3}(x + y + z + 427) \\ y + z = \dfrac{2}{7}(x + y + z + 427) \\ y = \dfrac{1}{5}(x + y + z + 427) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) = \frac{44}{105}(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 105(x + y + z) = 44(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 61(x + y + z) = 44 \,.\, 427 \Rightarrow x + y + z = 44 \,.\, 7 = 308$$

Assim, o total de pessoas pesquisadas é

$427 + 308 = 735$

2) 1) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} (x \in A \Rightarrow x \notin B) \Leftrightarrow A \subset B^C \\ \text{e} \\ (x \in B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow B \subset A^C \end{cases}$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 = 0\} = \{1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1; +1\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 = 0\} = \{1\}$

$A = C \subset B$

3) $A - \emptyset = A$

$\forall x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in (A - (A \cap B))$

e, portanto, $A - B = A - (A \cap B)$

4) $\forall x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B^C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B^C)$ e portanto $A - B = A \cap B^C$

Resposta: A

■ MÓDULO 12

1) I) Verdadeira, pois

$X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} =$

$= X \cap \{[\emptyset] \cup [X \cup ((X \cup Y)^c)^c]\} =$

$= X \cap \{[\emptyset] \cup [X \cup (X \cup Y)]\} = X \cap (X \cup Y) = X$

II) Verdadeira, pois $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^c) \cap (X \cup Y)]$

Se $Z \subset X$, então $(Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^c) \cap (X \cup Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup (\mathbb{R} \cap (X \cup Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup (X \cup Y) = X \cup Y$

III) Falsa, pois se $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$ e $Z = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ por exemplo, temos

$(X \cup Y)^c = \{1; 2\}^c = \mathbb{R} - \{1; 2\} = Z \subset Z$ e

$Z^c = \{1; 2\} \not\subset \{1\} = X$

Resposta: B

2) I) Verdadeira, pois

$(E \times G) \subset (F \times H) \Rightarrow ((x, y) \in (E \times G) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (F \times H), \forall (x, y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{cases} x \in E \\ y \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in F \\ y \in H \end{cases}, \forall x, \forall y\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (E \subset F$ e $G \subset H)$

II) Verdadeira, pois se $A \subset B$, então $A \cup B = B$, $\forall A, B$

III) Verdadeira, pois se $A \cup B = B$, então $A \subset B, \forall A, B$

Resposta: E