SUMÁRIO

1. REPRESENTAÇÃO DE UM VETOR DO $\mathbb{R}^3$

Sejam $\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, o conjunto destes vetores, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, forma a base *ortonormal canônica*, sendo $\vec{i}$ o versor do eixo dos x, $\vec{j}$ do eixo dos y e $\vec{k}$ do eixo dos z.

Projeções do vetor $\vec{v}$:

$x.\vec{i}$ = projeção no eixo Ox
$y.\vec{j}$ = projeção no eixo Oy
$z.\vec{k}$ = projeção no eixo Oz

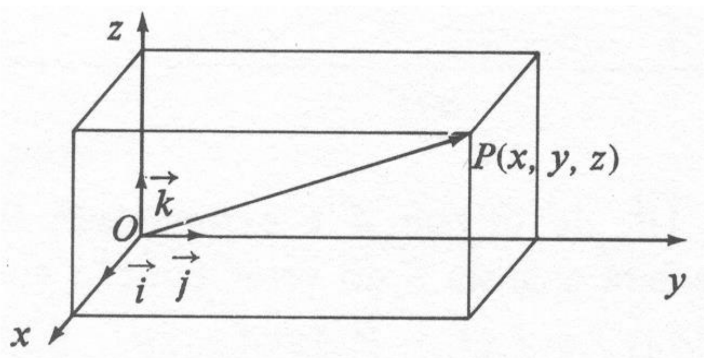
Representação do vetor $\vec{v}$:

$\vec{v} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = (x, y, z)$

MÓDULO DO VETOR POSIÇÃO EM RELAÇÃO À ORIGEM O DOS EIXOS

O módulo de $\overrightarrow{OP}$ podemos obtê-lo através da diagonal do paralelepípedo

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



2. MÓDULO DO VETOR POSIÇÃO $\overrightarrow{AB}$ EM RELAÇÃO À ORIGEM A

$$\text{Sejam } A(x_A, y_A, z_A) \text{ e } B(x_B, y_B, z_B)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3. EXPRESSÃO CARTESIANA DO VERSOR DE UM VETOR

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$$

4. CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE 2 VETORES

Sejam $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Dois vetores são paralelos quando suas coordenadas correspondentes são proporcionais

5. CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE 3 VETORES

Sejam os vetores

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Três vetores são coplanares se, e somente se, o determinante obtido de suas coordenadas for nulo

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Condição de coplanaridade
de 3 vetores

6. PRODUTO VETORIAL

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$, chamamos de produto vetorial do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$ que representamos por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$ ao vetor que satisfaz três condições:

I) O módulo do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é igual a $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.\text{sen}\theta$, sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

II) O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

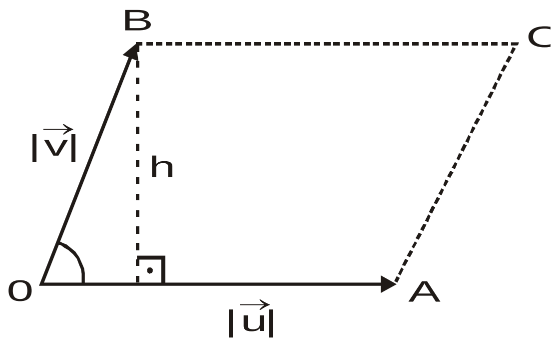
III) O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é aquele no qual triedro formado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$. é orientado positivamente.

Colocando os dedos *médio* e *indicador* da mão *esquerda*, respectivamente, na direção e sentido dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o polegar dará o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$,

Uma outra maneira de se obter o produto $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é através do determinante: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Note que o produto vetorial não é comutativo como o produto escalar.

- Interpretação Geométrica: Considere o paralelogramo abaixo:



Temos que $\text{sen}\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|\ \text{sen}\theta$ (altura do paralelogramo). Logo, a área do paralelogramo é $S = |\vec{u}|\ h. \Rightarrow S = |\vec{u}|.|\vec{v}|\ \text{sen}\theta$, mas $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\ \text{sen}\theta$, ou seja, chegamos a conclusão de que o módulo do produto vetorial entre os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a área do paralelogramo, cujos lados medem os vetores $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$.

7. PRODUTO MISTO

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores tomados nessa ordem, o produto misto desses vetores é representado por $\left[u, \vec{v}, \vec{w}\right]$ é: $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

Obs: Como $\vec{v} \wedge \vec{w}$ é um vetor, então $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$ é um escalar.

Sendo os vetores:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ tomados nessa ordem em relação a mesma base:

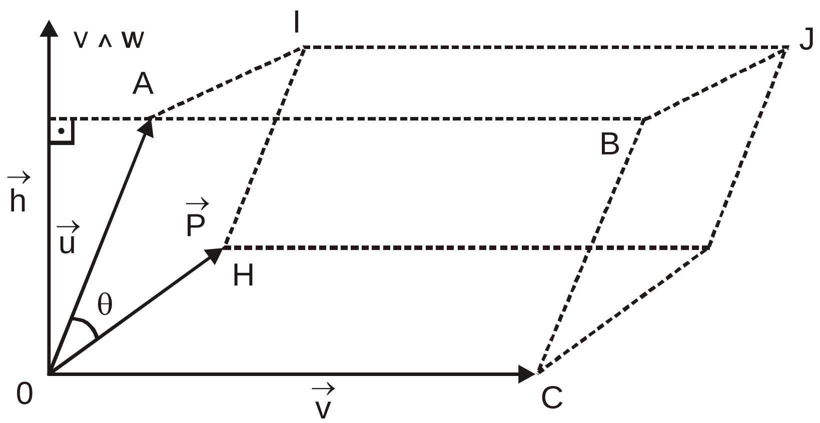
$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u}.(\vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Portanto: $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u}$ = (1,2,2), $\vec{v}$ = (1,1,2) e $\vec{w}$ = (3,1,2). Calcule $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$

Solução: $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 10 + 2 - 6 - 2 - 4 = 2$

A interpretação geométrica do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$



Temos que $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \left|\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})\right| = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v} \wedge \vec{w}\right| \cos\theta$ mas $\left|\vec{u}\right| \; \left|\cos\theta\right| = \left|\vec{h}\right| =$ h e $\left|\vec{v} \wedge \vec{w}\right|$ (área do paralelogramo de lados $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$. Portanto $\left[u, v, w\right]$ = S.h = v (volume do paralelepípedo OH, OC, OA).

1. Determine o produto vetorial do vetor $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$.

2. Calcule $\vec{V}=\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ com $\vec{V}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{V}_2=\vec{i}+4\vec{k}$

3. (EN 2008) Considere $\vec{x},\vec{y}$ e $\vec{z}$ e vetores no R³ que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,\ -1,\ -2) \\ \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z}=(5,-2,-8) \\ \vec{x}+4\vec{y}+9\vec{z}=(15,-6,-24) \end{cases}$$

o produto $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})$ vale

a) -1
b) 0
c) 1/2
d) 1
e) 2

4. (EN 1993) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ e $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\sqrt{\ }$. O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 120°

5. Determine o volume do paralelepípedo de arestas AB, AC e AD, sendo A(2, 1, 3); B(2, 7, 4); C(3, 2, 3) e D(1, -2, 3).

1.

RESPOSTA:

Sabemos que $\vec{u}$ = (2,-1,3) e $\vec{v}$ = (3,2,1) e usando o determinante temos

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}+3\vec{k}-6\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-7\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}$$

2.

RESPOSTA:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=-4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}-8\vec{j}=-4\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$$

3.

RESPOSTA:

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\vec{x}=(1,-1,2)\ ;\vec{y}=(-1,1,-2);\vec{z}=(2,-1,-2)$$

como $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são paralelos o produto misto dos 3 vetores é nulo.

4.

RESPOSTA: C

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \text{sen}\theta = \sqrt{3}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|.\cos\theta = 1$$
$$\text{tg}\theta = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = 60^0$$

5.

RESPOSTA:

Volume = $|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

Calculemos as coordenadas dos 3 vetores.

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (0, 6, 1); $\overrightarrow{AC}$ = C – A = (1, 1, 0) e $\overrightarrow{AD}$ = D –A (-1, -3, 0)

$$\text{Volume} = \left|\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right| = |-3+1| = 2\text{ u.v.}$$