ENSINO MÉDIO
PRÉ-VESTIBULAR

# MAT

MATEMÁTICA

# 3

Poliedro
Sistema de Ensino

**COLEÇÃO PV**

ISBN 978-65-5613-312-6

**Presidente:** Nicolau Arbex Sarkis

**Autoria:** Flavio Lieb Filho, João Guilherme Giudice, Marco Aurélio de Melo Miola, Renato Alberto Rodrigues (Tião), Sergio Augusto de Paiva França e Umberto Cesar Chacon Malanga

**Edição de conteúdo:** Ana Paula Enes, Juliana Grassmann dos Santos, Andriele de Carvalho Landim Aquino, Larissa Calazans Nicoletti Mesquita, Rodrigo Macena e Silva e Waldyr Correa dos Santos Junior

**Edição de arte:** Christine Getschko, Marina Ferreira, Bruna H. Fava, Lourenzo Acunzo e Nathalia Laia

**Design:** Adilson Casarotti

**Licenciamento e multimídia:** Leticia Palaria, Vitor Hugo Medeiros, Fernanda Soares Bitencourt e Danielle Navarro Fernandes

**Revisão:** Rosangela Carmo Muricy, Bianca da Silva Rocha, Ellen Barros de Souza, Sara de Jesus Santos e Thiago Marques

**Impressão e acabamento:** PifferPrint

**Crédito de capa:** BEST-BACKGROUNDS/Shutterstock.com



**Poliedro Sistema de Ensino**
T. 12 3924-1616
sistemapoliedro.com.br

# Sumário

## Frente 1



## Frente 2

## Frente 3

Yuttana Contributor Studio/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

10

# Transformações trigonométricas e funções trigonométricas

Como visto no último capítulo, quando o domínio das razões trigonométricas é estendido para o conjunto dos números reais, as razões apresentam comportamento periódico. É por isso que as funções trigonométricas – funções cujas leis dependem do seno, do cosseno ou da tangente da variável – são frequentemente usadas para modelar grandezas periódicas, como fenômenos ondulatórios (luz, som etc.), marés e movimentos celestes.

Em especial, as funções trigonométricas estão presentes na modelagem de fenômenos elétricos, como a corrente e a tensão alternada, presentes em nossas residências.

# Transformações trigonométricas

Durante os estudos das razões trigonométricas, você já deve ter percebido que **não são válidas**, para todos os $a$ e $b \in \mathbb{R}$, identidades como:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$$
$$\cos(a + b) = \cos a + \cos b$$
$$\text{tg}(a + b) = \text{tg}\,a + \text{tg}\,b$$

Por exemplo:

**a)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, mas

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

**b)** $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$,

mas $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(0) = 1.$

**c)** $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}$, mas

$\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

No entanto, em alguns contextos, como no cálculo das razões trigonométricas de certos ângulos, é interessante conhecer identidades que expressem $\text{sen}(a + b)$, $\cos(a + b)$ e $\text{tg}(a + b)$ em função de razões trigonométricas de $a$ e $b$, o que será feito a seguir, utilizando o conceito de distância entre dois pontos do plano cartesiano.

**! Atenção**

Lembre-se que a distância entre dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ do plano cartesiano é dada por:

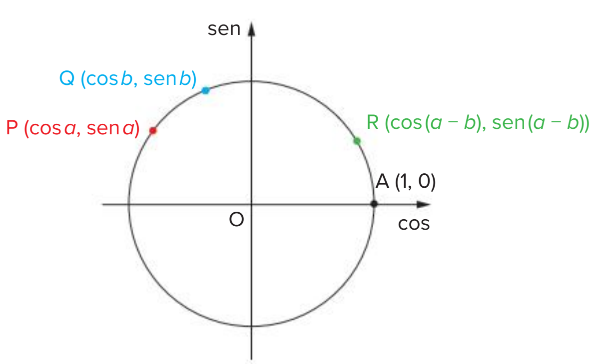
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

## Cosseno da soma e da diferença

Sejam $a$ e $b \in \mathbb{R}$ e P, Q e R os pontos da circunferência trigonométrica associados às medidas angulares $a$, $b$ e $a - b$, respectivamente. Assim, tem-se:

- $P(\cos a, \text{sen}\,a)$;
- $Q(\cos b, \text{sen}\,b)$;
- $R(\cos(a - b), \text{sen}(a - b))$.

A figura a seguir ilustra essa situação para o caso em que P e Q pertencem ao 2º quadrante e $a > b$.




Independentemente dos valores de $a$ e $b$, podemos perceber que os arcos $\overset{\frown}{PQ}$ e $\overset{\frown}{AR}$ (com A(1, 0)) têm a mesma medida angular, igual a $|a - b|$. Desse modo, podemos afirmar que a distância entre os pontos P e Q é igual à distância entre A e R. Assim, $d(P, Q) = d(A, R)$, o que implica $[d(P, Q)]^2 = [d(A, R)]^2$. Temos:

$$[d(P, Q)]^2 = \left[\sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen}\,a - \text{sen}\,b)^2}\right]^2 =$$
$$= \cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b +$$
$$+ \text{sen}^2 a - 2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b + \text{sen}^2 b =$$
$$= 1 + 1 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b =$$
$$= 2 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

$$[d(A, R)]^2 = \left[\sqrt{(\cos(a - b) - 1)^2 + (\text{sen}(a - b) - 0)^2}\right]^2 =$$
$$= \cos^2(a - b) - 2\cos(a - b) + 1 + \text{sen}^2(a - b) =$$
$$= 1 + 1 - 2\cos(a - b) = 2 - 2\cos(a - b)$$

Igualando $[d(P, Q)]^2$ e $[d(A, R)]^2$, temos:

$$[d(P, Q)]^2 = [d(A, R)]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b = 2 - 2\cos(a - b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Da equação acima e do fato de que $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, obtido pela simetria entre os pontos associados a $b$ e $-b$ na circunferência trigonométrica, chegamos em:

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) =$$
$$= \cos a \cdot \cos(-b) + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}(-b) =$$
$$= \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Portanto:

Para quaisquer $a$ e $b \in \mathbb{R}$, vale:
$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$
$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

## Seno da soma e da diferença

Da simetria na circunferência trigonométrica, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}(x)$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Utilizando essa identidade e as identidades obtidas anteriormente, obtemos:

$$\text{sen}(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}(a + b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen}\,b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

Já o seno da diferença é dado por:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a + (-b))$$
$$\Rightarrow \text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

Desse modo:

Para quaisquer $a$ e $b \in \mathbb{R}$, vale:
$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$
$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

## Tangente da soma e da diferença

Por fim, as identidades acima podem ser utilizadas para definir identidades para $\text{tg}\,(a + b)$ e $\text{tg}\,(a - b)$: Para $a$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos\,(a + b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\text{sen}\,b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a \cdot \cos b}}{\cancel{\cos a \cdot \cos b}} - \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\cos a \cdot \cos b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} \cdot \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

De maneira análoga, para $a$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, e $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{sen}(a - b)}{\cos(a - b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a - b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} - \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}}{1 + \dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} \cdot \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

**! Atenção**

As restrições $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, e $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, são dadas para garantir a existência de $\text{tg}\,a$, $\text{tg}\,b$, $\text{tg}\,(a + b)$ e $\text{tg}\,(a - b)$, respectivamente.

Assim:

Para $a$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Para $a$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

**! Atenção**

As identidades acima são válidas também para ângulos em graus.

Há várias aplicações para essas identidades: podemos calcular seno e cosseno de ângulos como 15° e 75° e seus ângulos simétricos nos outros quadrantes; eliminar a adição ou subtração em funções trigonométricas; fatorar ou modificar expressões, entre outras.

## Exercícios resolvidos

**1.** Calcule:

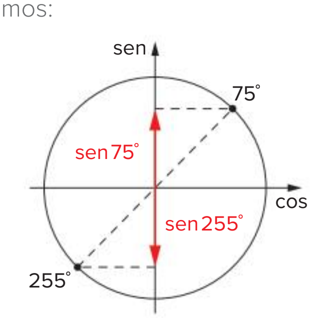
**a)** cos 15° **b)** sen 75° **c)** sen 255°

**Resolução:**

**a)**
$$\cos 15° = \cos\,(45° - 30°) =$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \text{sen}\,45° \cdot \text{sen}\,30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

**b)**
$$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°) =$$
$$= \text{sen}\,45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{4}$$

**c)** Usando a simetria na circunferência trigonométrica, temos:




$$\text{sen}\,(255°) = -\text{sen}\,(75°) = -\frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{4}$$

FRENTE 1

**2.** Determine $\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

**Resolução:**

$$\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}$$

## Arco duplo

Podemos encontrar identidades que fornecem os valores do seno, cosseno e tangente do dobro de arcos fazendo $a = x$ e $b = x$ nas identidades anteriores.

### Cosseno

Para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \mathrm{sen}\, x \cdot \mathrm{sen}\, x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$

Ainda podemos substituir as parcelas acima usando a identidade $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$ e $\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, derivadas da relação fundamental da Trigonometria:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 1 - \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 1 - 2\mathrm{sen}^2 x$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

### Seno

Para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\mathrm{sen}(x + x) = \mathrm{sen}\, x \cdot \cos x + \mathrm{sen}\, x \cdot \cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen}\, x \cdot \cos x$$

### Tangente

Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $2x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\mathrm{tg}(x + x) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

Resumindo:

Para $x \in \mathbb{R}$, vale:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen}\, x \cdot \cos x$$

Já para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $2x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

Exemplos:

a) $\cos 100° = \cos^2 50° - \mathrm{sen}^2 50°$

b) $\mathrm{sen}\, 32° = 2\mathrm{sen}\, 16° \cdot \cos 16°$

c) $\mathrm{tg}\, 56° = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, 28°}{1 - \mathrm{tg}^2 28°}$

**! Atenção**

As identidades deduzidas anteriormente expressam $\cos(2x)$, $\mathrm{sen}(2x)$ e $\mathrm{tg}(2x)$ em função de razões trigonométricas de $x$. No entanto, essas identidades também podem ser adaptadas para expressar $\cos x$, $\mathrm{sen}\, x$ e $\mathrm{tg}\, x$ em função de razões trigonométricas de $\frac{x}{2}$, como é mostrado a seguir.

$$\mathrm{sen}\, x = 2\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

## Exercícios resolvidos

**3.** Calcule $\cos\theta$ sabendo que $\cos(2\theta) = -\frac{7}{8}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

**Resolução:**

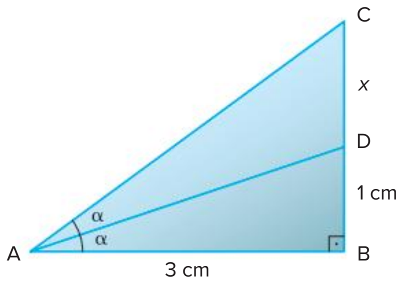
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow -\frac{7}{8} = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{4}$$

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta$ pertence ao 1º quadrante, e assim, $\cos\theta > 0$.

Portanto, $\cos\theta = \frac{1}{4}$.

**4.** Calcule medida de $\overline{CD}$ na figura abaixo sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo no vértice A.




**Resolução:**

No $\triangle ABD$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$.

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$$

No $\triangle ABC$, $\text{tg}(2\alpha) = \frac{x+1}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$.

Portanto, $\overline{CD}$ mede $\frac{5}{4}$ cm.

**5.** Calcule sen 15° · cos 15°.

**Resolução:**

$$E = \text{sen}15° \cdot \cos 15° \Rightarrow 2E = 2\,\text{sen}15° \cdot \cos 15° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2E = \text{sen}30° \Rightarrow 2E = \frac{1}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{4}$$

## Transformação de soma ou diferença em produto

Na Álgebra, a transformação de soma ou diferença em produto é chamada de fatoração, e ela pode nos ajudar a simplificar frações e resolver equações. Aqui, deduziremos fatorações das expressões $\text{sen}\,p \pm \text{sen}\,q$, $\cos p \pm \cos q$ e $\text{tg}\,p \pm \text{tg}\,q$.

Como visto anteriormente, temos, para $a$ e $b \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a \qquad \text{(I)}$$
$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a \qquad \text{(II)}$$

De (I) + (II):

$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos b \qquad \text{(III)}$$

Fazendo $a + b = p$ e $a - b = q$, e resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Aplicando (IV) em (III),

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \text{ para } p \text{ e } q \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

$$\text{sen}40° + \text{sen}20° =$$
$$= 2\,\text{sen}\left(\frac{40° + 20°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40° - 20°}{2}\right) =$$
$$= 2\,\text{sen}30° \cdot \cos 10° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 10° = \cos 10°$$

Se subtrairmos (II) de (I) e aplicarmos a troca de variáveis $a + b = p$ e $a - b = q$, obtemos:

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right), \text{ para } p \text{ e } q \in \mathbb{R}$$

De maneira análoga, a partir das fórmulas da adição e subtração do cosseno, podemos obter:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \text{ para } p \text{ e } q \in \mathbb{R}$$

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right), \text{ para } p \text{ e } q \in \mathbb{R}$$

Por fim, para $p$ e $q \in \mathbb{R}$ tais que $p \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, e $q \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg}\,p \pm \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}\,p}{\cos p} \pm \frac{\text{sen}\,q}{\cos q} =$$
$$= \frac{\text{sen}\,p \cdot \cos q \pm \text{sen}\,q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q}$$

Lembrando que $\text{sen}(p \pm q) = \text{sen}\,p \cdot \cos q \pm \text{sen}\,q \cdot \cos p$, concluímos que:

$$\text{tg}\,p + \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q} \text{ e } \text{tg}\,p - \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q},$$

para $p \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, e $q \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

### Exercício resolvido

**6.** Fatore as expressões a seguir.

**a)** sen 70° − sen 10°

**b)** $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1$

**c)** tg 65° + tg 15°

**Resolução:**

**a)** $\text{sen}70° - \text{sen}10° =$

$$= 2\,\text{sen}\left(\frac{70° - 10°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{70° + 10°}{2}\right) =$$
$$= 2\,\text{sen}30° \cdot \cos 40° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 40° = \cos 40°$$

FRENTE 1

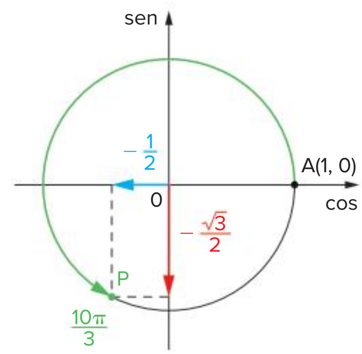
**b)** $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1 = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos 0 = 2\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{9} + 0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{4\pi}{9} - 0}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

**c)** $\text{tg}\,65° + \text{tg}\,15° = \frac{\text{sen}\left(65° + 15°\right)}{\cos 65° \cdot \cos 15°} = \frac{\text{sen}\left(80°\right)}{\cos 65° \cdot \cos 15°}$

# Funções trigonométricas

No capítulo 9 da Frente 1, trabalhamos com a associação de medidas angulares $\alpha$ em radianos, com $\alpha \in [0, 2\pi]$, a pontos da circunferência trigonométrica. Em seguida, estendemos essa associação para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$, e essa construção foi usada para definir $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ e, quando $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, para definir $\text{tg}\,\alpha$ também.

Por exemplo, para $\alpha = \frac{10\pi}{3}$:




- Identificamos que $\alpha$ é um ângulo da 2ª volta côngruo a $\frac{4\pi}{3}$, pois $\alpha = \frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$.
- O ponto da circunferência trigonométrica associado a $\frac{4\pi}{3}$ (e a $\frac{10\pi}{3}$ também) é o ponto $P(x_P, y_P)$ tal que o arco orientado $\overset{\frown}{AP}$, com A(1, 0), tem medida angular $\text{med}\left(\overset{\frown}{AP}\right) = \frac{4\pi}{3}$.
- Como, pela circunferência trigonométrica, $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos:

$$\cos\alpha = x_P = -\frac{1}{2},\ \text{sen}\,\alpha = y_P = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \text{tg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Como, por esse artifício, associamos para cada número real $x$ um único valor de $\text{sen}\,x$, de $\cos x$ e de $\text{tg}\,x$ (neste último caso, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$), podemos definir as **funções trigonométricas** $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ e $y = \text{tg}\,x$.

## Função seno

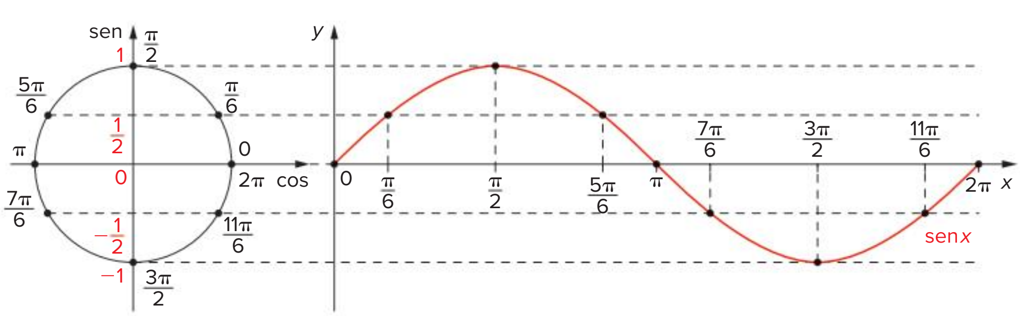
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}\,x$ está definido. Desse modo, o domínio da função $f(x) = \text{sen}\,x$ é $D(f) = \mathbb{R}$. Além disso, os valores de $\text{sen}\,x$ são números reais, então podemos definir o contradomínio como $CD(f) = \mathbb{R}$.

Portanto, a função seno é:

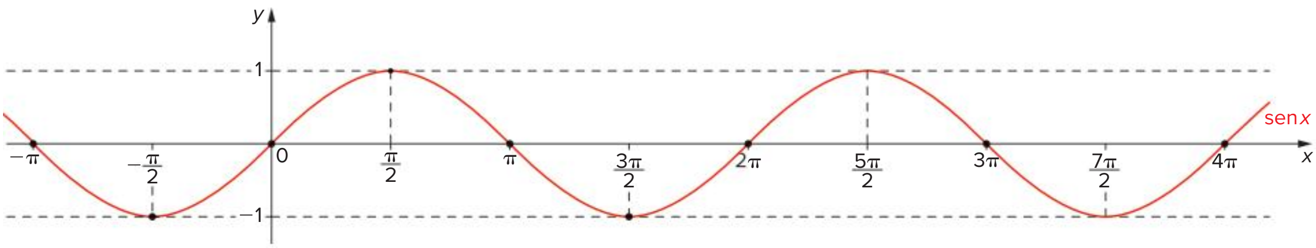
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

O gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ pode ser obtido pela circunferência trigonométrica, como mostrado a seguir, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:



Lembrando que ângulos côngruos têm o mesmo valor de seno, o gráfico da função seno estendida para todos os valores reais de $x$ é da forma a seguir.




Observando o gráfico e as informações que já conhecemos sobre o seno, temos:

- Os valores de seno variam no intervalo $[-1, 1]$. Por isso, a **imagem** da função seno é $Im(f) = [-1, 1]$.
- A função seno é **positiva** para valores de $x$ no 1º ou no 2º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos ..., $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ...
- Ela é **negativa** para valores de $x$ no 3º ou 4º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos..., $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, ...
- A função seno é **crescente** para valores de $x$ nos intervalos fechados correspondentes ao 1º ou 4º quadrantes: $\ldots, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right], \ldots$
- Ela é **decrescente** para valores de $x$ nos intervalos fechados correspondentes ao 2º ou 3º quadrantes: $\ldots, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right], \ldots$
- Os **zeros** da função seno são os elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Os **máximos** da função seno são da forma $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Já os **mínimos** são da forma $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno é ímpar:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Além dessas características, há duas outras que podemos destacar sobre a função seno: o **período** e a **amplitude**.

O período de uma função periódica $f$ é o **menor** número $P \in \mathbb{R}$, $P > 0$, tal que $f(x) = f(x + P)$ para todo $x \in D(f)$.

Para a função seno, vale:

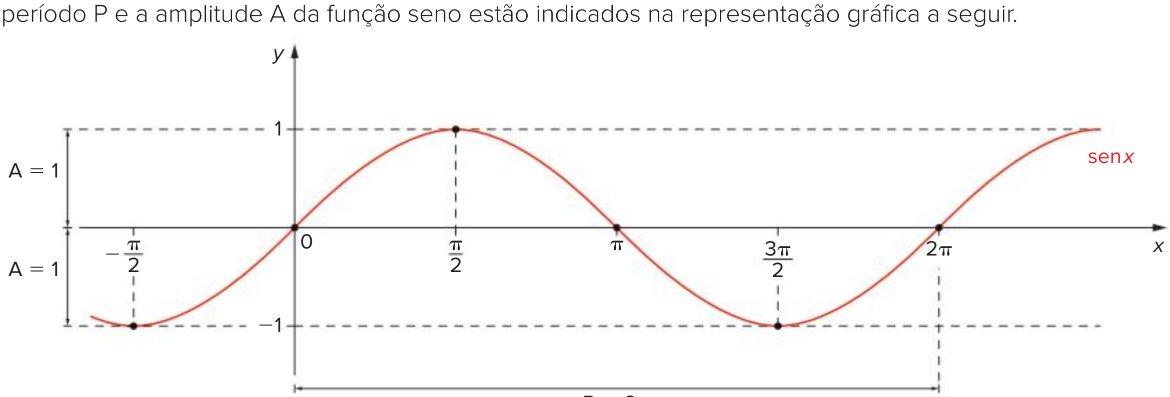
$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi), \forall x \in \mathbb{R}$$

Além disso, observando o gráfico dela, podemos perceber que não existe P' real, com $0 < P' < 2\pi$, tal que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + P'), \forall x \in \mathbb{R}$. Desse modo, o período P da função seno é $P = 2\pi$.

A amplitude A de uma função periódica limitada $f$ é a metade da diferença entre o maior e o menor valor que a função $f$ pode assumir.

No caso da função seno, sabemos que seu máximo e seu mínimo são, respectivamente, 1 e $-1$. Desse modo, a amplitude A da função seno é $A = \frac{1-(-1)}{2} = 1$.

O período P e a amplitude A da função seno estão indicados na representação gráfica a seguir.




FRENTE 1

## Exercício resolvido

**7.** Determine o conjunto imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de lei $f(x) = 1 + 3\operatorname{sen}(-2x)$.

**Resolução:**

Conforme $x$ assume valores em $(-\infty, \infty)$, $\operatorname{sen}(-2x)$ assume todos os valores em $[-1, 1]$. Assim:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}(-2x) \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 \leqslant 3\operatorname{sen}(-2x) \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 + 1 \leqslant 3\operatorname{sen}(-2x) + 1 \leqslant 3 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 \leqslant 1 + 3\operatorname{sen}(-2x) \leqslant 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 \leqslant f(x) \leqslant 4$$

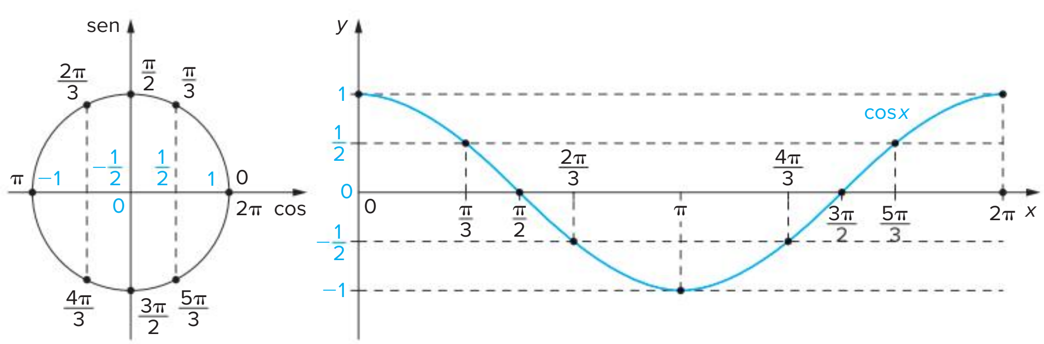
Portanto, $\operatorname{Im}(f) = [-2, 4]$.

## Função cosseno

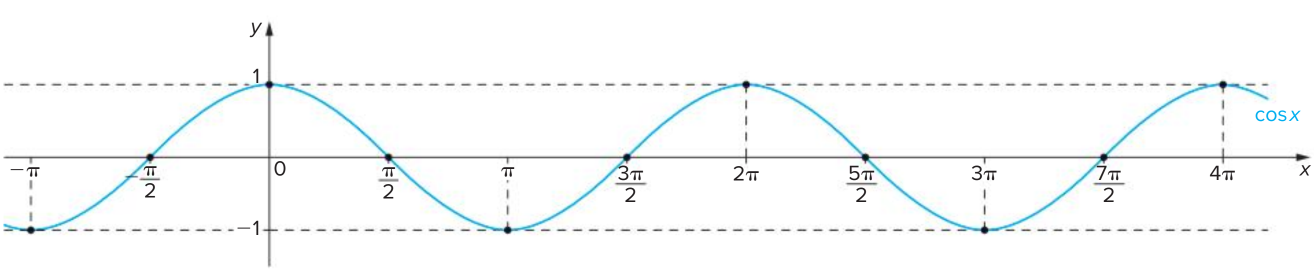
De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, a função cosseno é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \cos x$$

O gráfico de $f(x) = \cos x$ também pode ser obtido pela circunferência trigonométrica, como mostrado a seguir, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:




Considerando valores além do intervalo $[0, 2\pi]$ e o fato de que ângulos côngruos têm o mesmo valor de cosseno, o gráfico da função cosseno é da seguinte forma.




Observando o gráfico e as informações que já conhecemos sobre o cosseno, temos:

- Os valores de cosseno variam no intervalo $[-1, 1]$. Por isso, a **imagem** da função cosseno é $\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$.
- A função cosseno é **positiva** para valores de $x$ no 1º ou no 4º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right), \ldots$
- Ela é **negativa** para valores de $x$ no 2º ou 3º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos $\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$
- A função cosseno é **crescente** para valores de $x$ nos intervalos fechados correspondentes ao 3º ou 4º quadrantes: $\ldots, [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], [3\pi, 4\pi], \ldots$

- Ela é **decrescente** para valores de $x$ nos intervalos fechados correspondentes ao 1º ou 2º quadrantes: ..., $[-2\pi, -\pi]$, $[0, \pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ...
- Os **zeros** da função cosseno são os elementos do conjunto:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Os **máximos** da função cosseno são da forma $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Já os **mínimos** são da forma $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função cosseno é **par**:

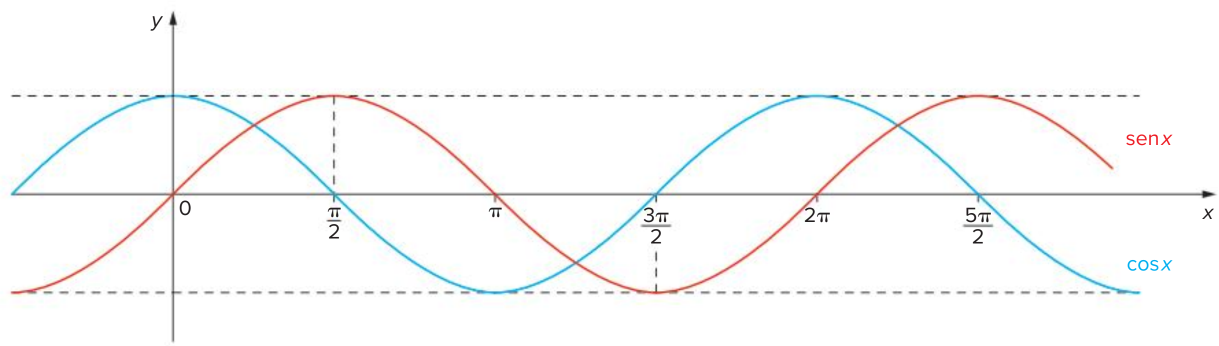
$$\cos(-x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

- A função cosseno é **periódica** de período $P = 2\pi$:

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi), \forall x \in \mathbb{R}$$

- A **amplitude** da função cosseno é $A = 1$.

Perceba que o gráfico da função cosseno é idêntico ao gráfico da função seno deslocado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.




Esse resultado é esperado, já que $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

**Saiba mais**

Também podemos afirmar que o gráfico da função seno é idêntico ao gráfico da função cosseno deslocado $\frac{\pi}{2}$ para a direita, já que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x)$.

## Exercício resolvido

**8.** Determine as raízes da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de lei $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

**Resolução:**

Temos $f(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Fazendo a mudança de variável $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, a equação anterior vira $\cos t = 0$, cujo conjunto solução sabemos ser $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Desse modo, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$t = 2x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{t + \frac{\pi}{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

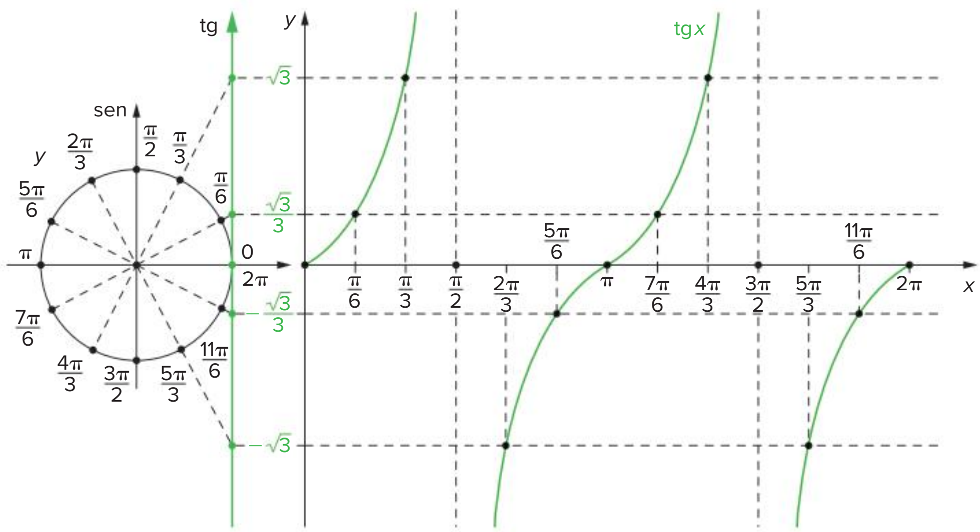
Portanto, as raízes de $f$ são os elementos do conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

## Função tangente

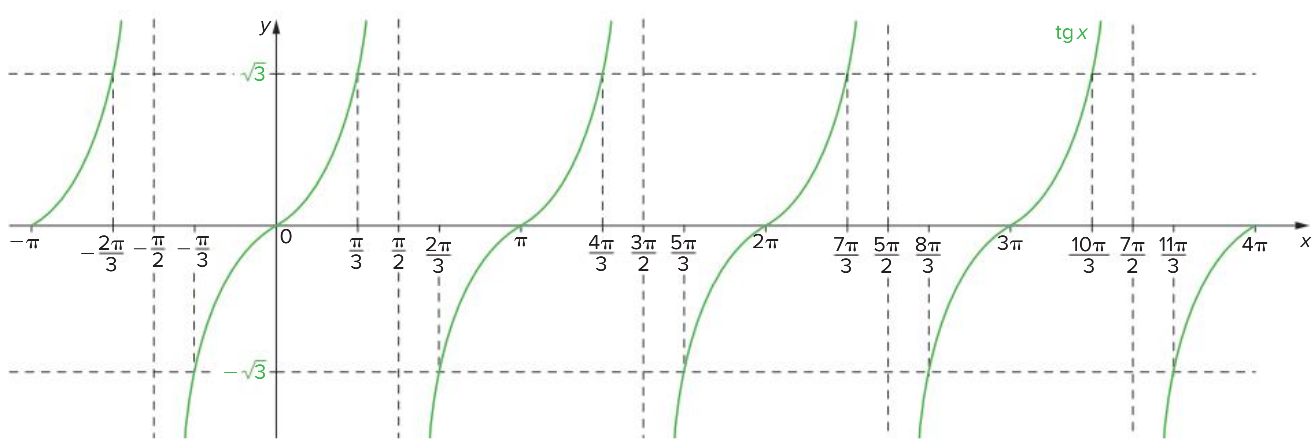
Como a tangente de um número não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, o domínio da função tangente $f(x) = \text{tg}\, x$ não é $\mathbb{R}$, e sim $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Portanto, a função tangente é:

$$f: \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \text{tg}\, x$$

Também podemos deduzir o gráfico da função tangente utilizando a circunferência trigonométrica, com o auxílio do eixo das tangentes:




Como ângulos côngruos têm o mesmo valor de tangente, o gráfico da função tangente, de forma geral, é dado por:




Com base no gráfico da função tangente e de informações que já conhecemos sobre a tangente, temos:

- A função tangente $f(x) = \text{tg}\, x$ pode assumir qualquer valor real. Por isso, a **imagem** da função tangente é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- A função tangente é **positiva** para valores de $x$ no 1º ou no 3º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos $\ldots, \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \ldots$
- Ela é **negativa** para valores de $x$ no 2º ou 4º quadrante, que são os valores de $x$ nos intervalos $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \ldots$
- A função tangente é **crescente** para valores de $x$ nos intervalos $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \ldots$
- Os **zeros** da função tangente são os elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- A função tangente não admite máximos ou mínimos.
- A função tangente é **ímpar**:

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x),\ \forall x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- A função tangente é **periódica** de período P = π:

$$\text{tg}(x) = \text{tg}(x + \pi), \forall x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- O gráfico da função tangente possui **assíntotas verticais** em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Saiba mais**

Boa parte das informações acima para a função tangente pode ser obtida do fato de que $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, para $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Por exemplo:

- Como $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, os zeros da função tg $x$ são também os zeros de sen$x$: $x \in \mathbb{R}$, com $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno é ímpar e a função cosseno é par; assim:

$$\text{tg}(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\text{sen}\,x}{\cos x} = -\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = -\text{tg}\,x$$

Logo, a função tangente é ímpar.

## Exercício resolvido

**9.** Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f$ de lei $f(x) = \text{tg}\left(\frac{5x}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ não está definida?

**Resolução:**

Sabemos que tg $x$ não está definido para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $f(x) = \text{tg}\left(\frac{5x}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ não está definida para valores reais de $x$ tais que $\frac{5x}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{5x}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{5x}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5x}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{6}{5}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6k\pi}{5}$$

Portanto, $f(x) = \text{tg}\left(\frac{5x}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ não está definida para $x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6k\pi}{5}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

**Saiba mais**

Também podemos construir as funções $y = \text{cossec}\,x$, $y = \sec x$ e $y = \text{cotg}\,x$ utilizando processo análogo ao feito anteriormente. No entanto, é mais prático apenas trabalhá-las pelas expressões a seguir, considerando as eventuais restrições no domínio:

$$y = \text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}, \text{ com domínio}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ com domínio}$$
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$y = \text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}, \text{ com domínio}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

## Gráficos de funções trigonométricas generalizadas

Em muitos contextos, trabalhamos com funções reais da forma $y = a + b\,\text{sen}(m(x + n))$ ou $y = a + b\,\text{sen}(m(x + n))$, com $a$, $b$, $m$ e $n \in \mathbb{R}$, e é de interesse conhecer como os parâmetros reais $a$, $b$, $m$ e $n$ influenciam o gráfico dessas funções.

**Atenção**

Para $\forall x \in \mathbb{R}$ vale:

$$a + b\cos\big(m(x + n)\big) =$$
$$= a + b\,\text{sen}\left(\big(m(x + n)\big) + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= a + b\,\text{sen}\left(m\left(x + n + \frac{\pi}{2m}\right)\right)$$

Assim, toda função da forma $f(x) = a + b\cos(m(x + n))$ pode ser escrita na forma $f(x) = a + b\,\text{sen}(m(x + n'))$, com $n' = n + \frac{\pi}{2m}$.

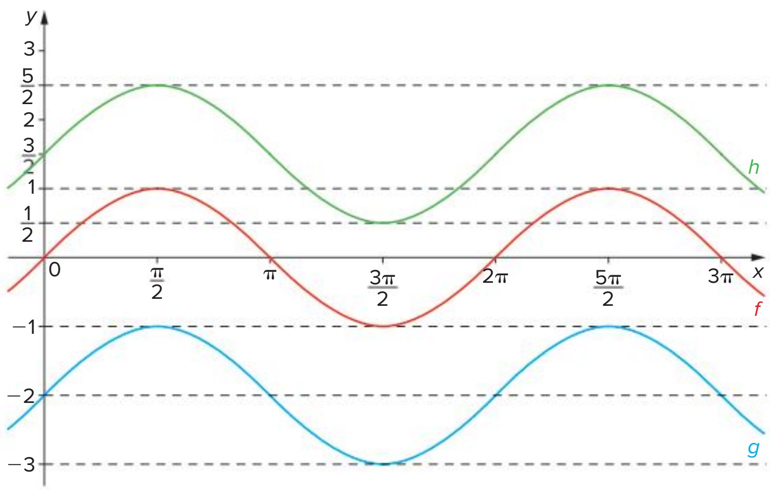
Por isso, os exemplos abaixo trabalharão apenas com $y = a + b\,\text{sen}(mx + n)$.

### Parâmetro *a*

Tomemos três funções de lei de formação $a + \text{sen}\,x$, com $a \in \left\{-2, 0, \frac{3}{2}\right\}$:

- $f(x) = \text{sen}\,x$;
- $g(x) = -2 + \text{sen}\,x$.
- $h(x) = \frac{3}{2} + \text{sen}\,x$.

Os gráficos dessas três funções estão representados no plano cartesiano abaixo.




Pela representação gráfica acima, podemos observar que:

- O gráfico de $g(x) = -2 + \operatorname{sen} x$ é obtido pela translação vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em 2 unidades para baixo. Como a imagem de $f$ é $\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$, a imagem de $g$ é dada por $\operatorname{Im}(g) = [-1 + (-2), 1 + (-2)] = [-3, -1]$.
- O gráfico de $h(x) = \frac{3}{2} + \operatorname{sen} x$ é obtido pela translação vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $\frac{3}{2}$ unidades para cima.

  Como a imagem de $f$ é $\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$, a imagem de $h$ é dada por $\operatorname{Im}(h) = \left[-1 + \left(\frac{3}{2}\right), 1 + \left(\frac{3}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

De modo geral:

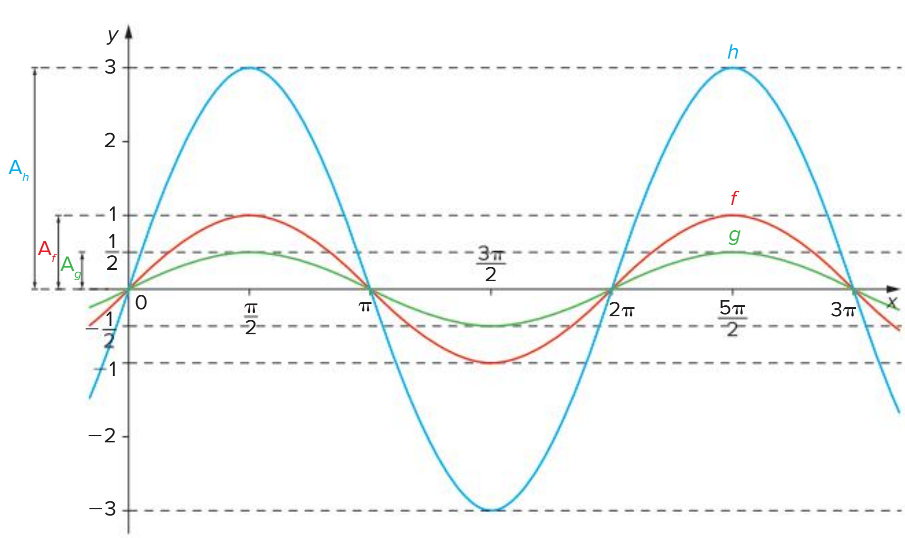
> Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o gráfico de $g(x) = a + \operatorname{sen} x$ é obtido pela translação vertical em $|a|$ unidades do gráfico da função seno $f(x) = \operatorname{sen} x$. Se $a > 0$, a translação é para cima; se $a < 0$, a translação é para baixo.
> A imagem de $g$ é dada por:
> $$\operatorname{Im}(g) = [-1 + a, 1 + a]$$

## Parâmetro *b*

Considere as funções de lei de formação $b \operatorname{sen} x$ indicadas abaixo, com $b \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$;
- $g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$;
- $h(x) = 3 \operatorname{sen} x$;
- $j(x) = -\operatorname{sen} x$;
- $k(x) = -2 \operatorname{sen} x$;
- $p(x) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} x$.

Os gráficos de $f$, $g$ e $h$ estão representados no plano cartesiano abaixo.



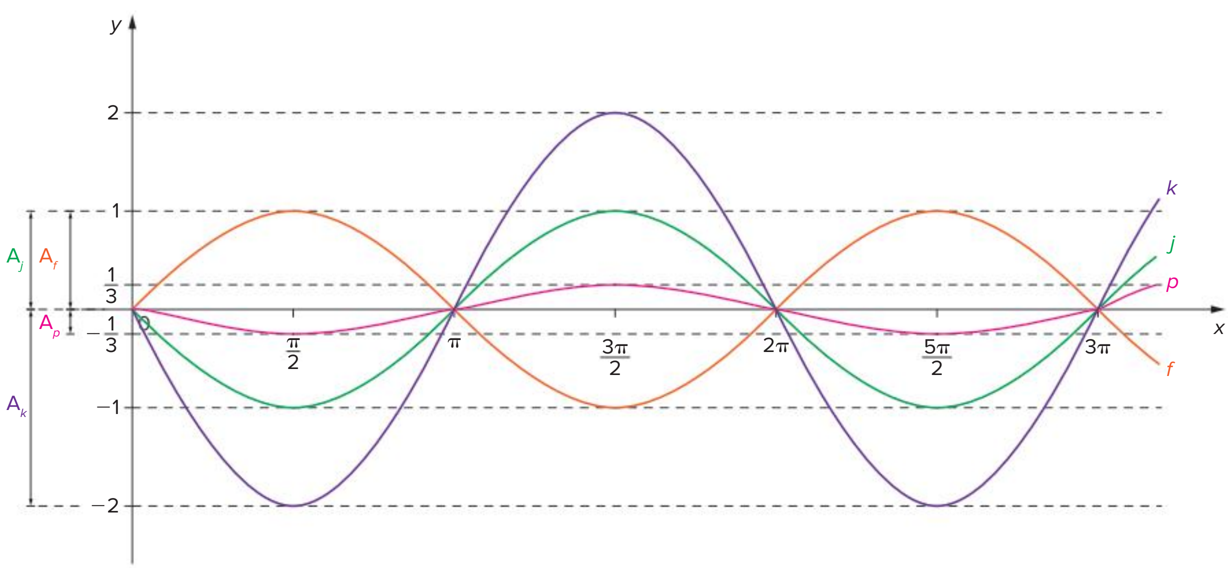
Perceba que:

- O gráfico de $h(x) = 3\operatorname{sen}x$ é obtido pelo "alongamento" vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de $f$ está associado a um ponto $(x_0, 3y_0)$ do gráfico de $h$. Por isso, a amplitude de $h$ é o triplo da amplitude de $f$: $A_h = 3A_f = 3 \cdot 1 = 3$.
- O gráfico de $g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}x$ é obtido pela "compressão" vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de $f$ está associado a um ponto $\left(x_0, \frac{1}{2}y_0\right)$ do gráfico de $g$. Por isso, a amplitude de $g$ é metade da amplitude de $f$: $A_g = \frac{1}{2}A_f = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

De modo geral:

> Dado $b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, o gráfico de $g(x) = b\operatorname{sen}x$ é obtido pelo "alongamento" (se $b > 1$) ou pela "compressão" (se $0 < b < 1$) **vertical** do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$.
> Em ambos os casos, sendo $A_f$ e $A_g$, respectivamente, as amplitudes de $f$ e $g$, vale:
> $$A_g = b \cdot A_f = b \cdot 1 = b$$
> Além disso, a imagem de $g$ é dada por:
> $$\operatorname{Im}(g) = [-b, b]$$

Agora, representamos os gráficos de $f$, $j$, $k$ e $p$ no mesmo plano cartesiano.




- O gráfico de $j(x) = -\operatorname{sen}x$ é obtido pela reflexão em torno do eixo $x$ do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$. Tanto $f$ quanto $j$ tem amplitude 1: $A_j = A_f = 1$.
- O gráfico de $k(x) = -2\operatorname{sen}x$ é obtido pela reflexão e posterior "alongamento" vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de $f$ está associado a um ponto $(x_0, -2y_0)$ do gráfico de $k$. Por isso, a amplitude de $k$ é o dobro da amplitude de $f$: $A_k = 2A_f = 2 \cdot 1 = 2$.
- O gráfico de $p(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}x$ é obtido pela reflexão e posterior "compressão" vertical do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de $f$ está associado a um ponto $\left(x_0, -\frac{1}{3}y_0\right)$ do gráfico de $p$. Por isso, a amplitude de $p$ é um terço da amplitude de $f$: $A_p = \frac{1}{2}A_p = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

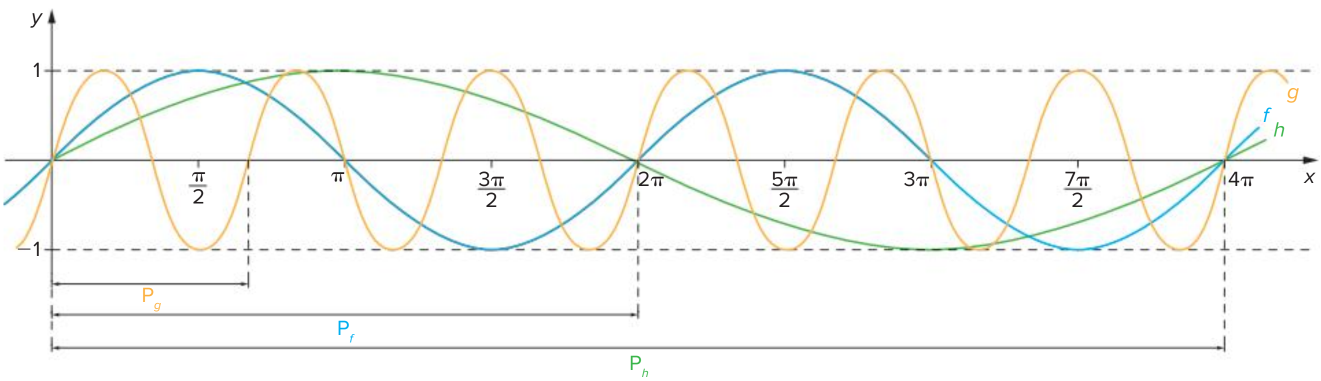
De modo geral:

> Dado $b \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, o gráfico de $g(x) = b\operatorname{sen}x$ é obtido pela reflexão em torno do eixo $x$ e posterior "alongamento" (se $|b| > 1$) ou "compressão" (se $0 < |b| < 1$) **vertical** do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}x$.
> Em ambos os casos, sendo $A_f$ e $A_g$, respectivamente, as amplitudes de $f$ e $g$, vale:
> $$A_g = |b| \cdot A_f = |b| \cdot 1 = |b|$$
> Além disso, a imagem de $g$ é dada por:
> $$\operatorname{Im}(g) = [-|b|, |b|]$$

### Parâmetro *m*

Para $m \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 3\right\}$, considere as funções de lei de formação $\operatorname{sen}(mx)$ e seus respectivos gráficos representados no mesmo plano cartesiano:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$;
- $g(x) = \operatorname{sen}(3x)$;
- $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.




- O gráfico de $g(x) = \operatorname{sen}(3x)$ é obtido pela "compressão" horizontal do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de *f* está associado a um ponto $\left(\frac{1}{3}x_0, y_0\right)$ do gráfico de *h*. Por isso, o período de *g* é um terço do período de *f*: $P_g = \frac{1}{3}P_f = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.
- O gráfico de $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ é obtido pelo "alongamento" horizontal do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$: cada ponto $(x_0, y_0)$ do gráfico de *f* está associado a um ponto $(2x_0, y_0)$ do gráfico de *h*. Por isso, o período de *h* é o dobro do período de *f*: $P_h = 2P_f = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.
  De modo geral:

> Dado $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, o gráfico de $g(x) = \operatorname{sen}(mx)$ é obtido pelo "compressão" (se $m > 1$) ou pela "alongamento" (se $0 < m < 1$) **horizontal** do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$.
> Em ambos os casos, sendo $P_f$ e $P_g$, respectivamente, os períodos de *f* e *g*, vale:
> $$P_g = \frac{1}{m} \cdot P_f = \frac{1}{m} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{m}$$

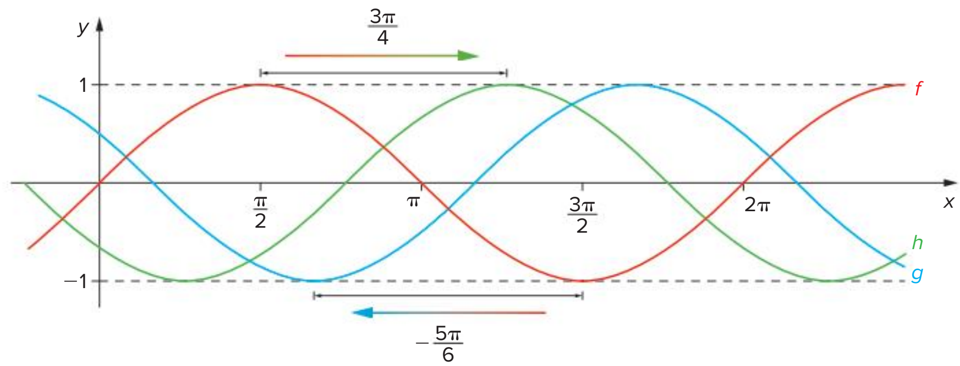
- Lembrando que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e o que foi feito para valores negativos do parâmetro *b*, temos:

> Dado $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, o gráfico de $g(x) = \operatorname{sen}(mx)$ é obtido pela reflexão em torno do eixo *x* e posterior "compressão" (se $|m| > 1$) ou "alongamento" (se $0 < |m| < 1$) **horizontal** do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$.
> Em ambos os casos, sendo $P_f$ e $P_g$, respectivamente, os períodos de *f* e *g*, vale:
> $$P_g = \frac{1}{|m|} \cdot P_f = \frac{1}{|m|} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{|m|}$$

### Parâmetro *n*

Por fim, considere $n \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{5\pi}{6}\right\}$ e as funções de lei de formação $\operatorname{sen}(x + n)$:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$;
- $g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$;
- $h(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.




- O gráfico de $g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ é obtido pela translação horizontal do gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ em $\frac{5\pi}{6}$ unidades para a esquerda.
- O gráfico de $h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ é obtido pela translação horizontal do gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ em $\frac{3\pi}{4}$ unidades para a direta.
- De modo geral:

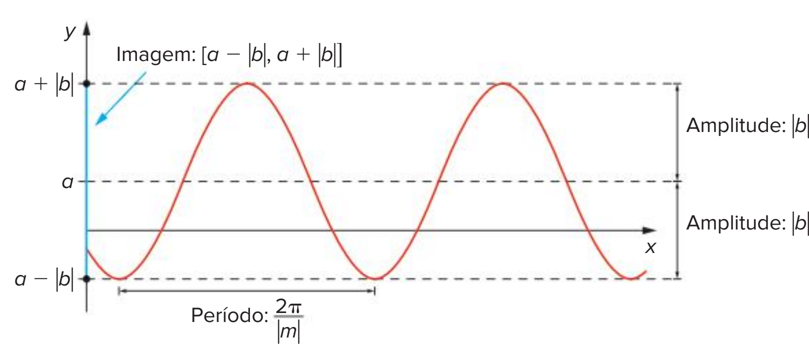
Dado $n \in \mathbb{R}$ - {0}, o gráfico de $g(x) = \text{sen}(x + n)$ é obtido pela translação horizontal em $|n|$ unidades do gráfico da função seno $f(x) = \text{sen}\,x$. Se $n > 0$, a translação é para a esquerda; se $n < 0$, a translação é para a direita.

## Imagem, amplitude e período

Do que foi visto anteriormente, podemos inferir as seguintes características das funções $y = a + b\,\text{sen}(m(x + n))$ e $y = a + b\cos(m(x + n))$, com $a$, $b$, $m$ e $n$ parâmetros reais e $b$ e $m \neq 0$:

| | |
|---|---|
| **Imagem** | $[a - \|b\|, a + \|b\|]$ |
| **Amplitude** | $\|b\|$ |
| **Período** | $\frac{2\pi}{\|m\|}$ |

Graficamente:




### Estabelecendo relações

A Ondulatória é a parte da Física que estuda o comportamento de ondas. Nessa área, é comum as ondas serem modeladas por funções do tempo $t$ e do espaço $x$ da seguinte forma:

$$y(x, t) = A\,\text{sen}(kx \pm \omega t)$$

Perceba que:

- A função onda é uma função de tempo e de espaço, pois a onda se propaga com o tempo.
- O parâmetro A é a amplitude da onda.
- Sendo $\lambda$ o comprimento de onda (a distância entre duas cristas), então $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda.
- $\omega$ é a frequência angular da onda. Se $\omega > 0$, a onda se propaga para a esquerda; se $\omega < 0$, ela se propaga para a direita.

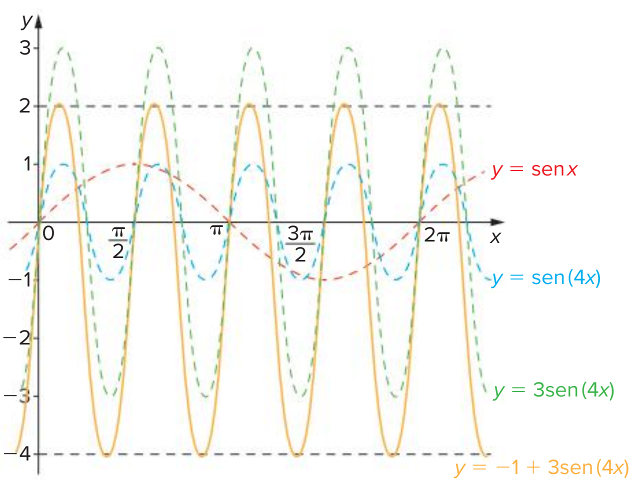
## Exercícios resolvidos

**10.** Construa o gráfico da função $f(x) = -1 + 3\text{sen}(4x)$ e determine a imagem dessa função.

**Resolução:**

Podemos obter o gráfico da função $f(x) = -1 + 3\text{sen}(4x)$ a partir do gráfico das seguintes funções:

- De $y = \text{sen}\,x$ para $y = \text{sen}(4x)$: "comprimimos" horizontalmente o gráfico, reduzindo o período para $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
- De $y = \text{sen}(4x)$ para $y = 3\text{sen}(4x)$: "alongamos" verticalmente o gráfico, aumentando a amplitude para $A = 3 \cdot 1 = 3$.
- De $y = 3\text{sen}(4x)$ para $y = -1 + 3\text{sen}(4x)$: transladamos o gráfico em 1 unidade para baixo.




A imagem da função $f$ é $\text{Im}(f) = [-4, 2]$.

**11.** Determine a imagem da função

$$f(x) = 4 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

**Resolução:**

1ª maneira:

$$f(x) = 4 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Logo, nessa função, temos os parâmetros $a = 4$ e $b = 2$.

Desse modo:

$\text{Im}(f) = [a - |b|, a + |b|] = [4 - 2, 4 + 2] = [2, 6]$

2ª maneira:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -1 \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 \leqslant 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 + 4 \leqslant 4 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \leqslant f(x) \leqslant 6$$

Logo, a imagem de $f$ é $\text{Im}(f) = [2, 6]$.

**12.** A altura da maré em uma praia varia ao longo do dia de acordo com a função $h(t) = 3 + 2\cos\left(\frac{(t-2)\pi}{6}\right)$, com $0 \leqslant t < 24$, em que $h$ é a altura da maré, em metros, e $t$ representa o horário no dia ($t = 0$ representa a hora 0h, $t = 1$ representa 1h, etc.).

Calcule:

**a)** A altura da maré às 10 horas da manhã.

**b)** A altura mínima da maré.

**c)** Os horários de maré máxima.

**Resolução:**

**a)** Para $t = 10$, temos:

$$h(10) = 3 + 2\cos\left(\frac{(10-2)\pi}{6}\right) =$$
$$= 3 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

A altura da maré às 10 horas da manhã é de 2 metros.

**b)** O valor mínimo de $h(t) = 3 + 2\cos\left(\frac{(t-2)\pi}{6}\right)$, em metros, é dado por $a - |b|$, com $a = 3$ e $b = 2$.

$$a - |b| = 3 - |2| = 1$$

Desse modo, a altura mínima é de 1 metro.

**c)** A maré alta acontece quando a função atinge seus valores máximos, o que ocorre quando o termo $\cos\left(\frac{(t-2)\pi}{6}\right)$ é igual a 1:

$$\cos\left(\frac{(t-2)\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(t-2)\pi}{6} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{(t-2)\pi}{6} = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \text{ou} \\ t = 14 \end{cases}$$

Portanto, a maré alta acontece às 2h e às 14h.

# Funções trigonométricas inversas

As funções seno e cosseno não são injetoras, já que são periódicas, nem sobrejetoras, já que estão limitadas ao intervalo $[-1, 1]$, mas seu domínio é real.

Já a função tangente é sobrejetora, mas não é injetora, pois é periódica.

Logo, as funções seno, cosseno e tangente não são bijetoras e, por isso, não admitem funções inversas.

**! Atenção**

Lembre-se:

- Uma função $f$: A → B é injetora se, para todo $x_1$, $x_2 \in$ A, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Isso significa que elementos distintos no domínio estão sempre associados a elementos distintos no contradomínio.
- Uma função $f$: A → B é sobrejetora se, para todo $y \in$ B, existe $x \in$ A tal que $f(x) = y$, ou seja, todo elemento do contradomínio está associado a pelo menos um elemento do domínio.
- Uma função $f$ é bijetora se for injetora e sobrejetora.
- Dada uma função $f$: A → B, a função inversa de $f$, se existir, é uma função $f^{-1}$: B → A tal que:

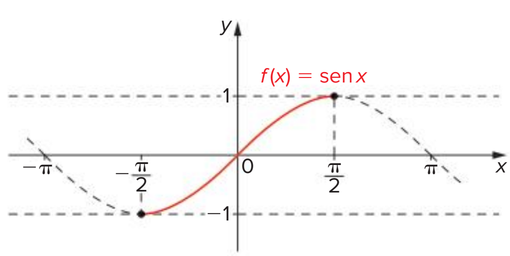
$$f(f^{-1}(y)) = y\text{, para todo } y \in \text{B}$$
$$f^{-1}(f(x)) = x\text{, para todo } x \in \text{A}$$

- Uma função $f$ admite inversa somente se $f$ for bijetora.

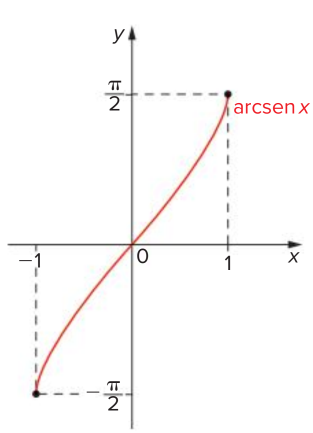
No entanto, se limitarmos o domínio dessas funções, de modo que "percorremos" todos os valores da imagem uma única vez, teremos funções bijetoras e poderemos inserir o conceito de inversa.

## Função arco seno

Considere a função $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ de lei de formação $f(x) = \text{sen}\,x$. Perceba que essa função é obtida restringindo o domínio da função seno para o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e definindo o contradomínio como igual à imagem. Assim ela é uma função injetora e sobrejetora, como mostra o gráfico abaixo:




Logo, existe a função inversa $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que é chamada de função **arco seno**, e é representada por arcsen $x$. Seu gráfico está representado abaixo.




**! Atenção**

Lembre-se de que o gráfico da função inversa $f^{-1}$ é obtido pela reflexão, em torno da bissetriz dos quadrantes ímpares, do gráfico de $f$.

Exemplos:

**a)** $\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, pois $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

**b)** $\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, pois $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e

$-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

**c)** $\text{arcsen}(0) = 0$, pois $\text{sen}(0) = 0$ e $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

**! Atenção**

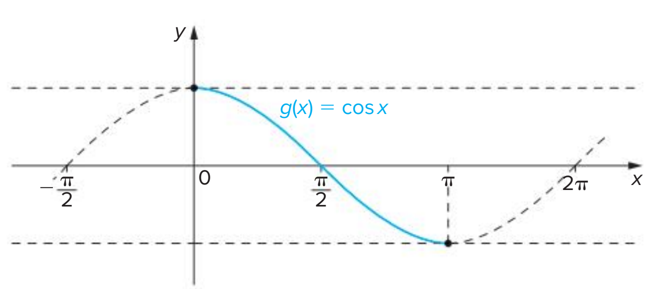
Perceba que $\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{5\pi}{6}$ pois, apesar de $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, o número $\frac{5\pi}{6}$ não pertence ao contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da função arco seno.

**Saiba mais**

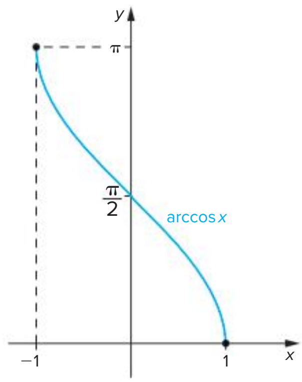
O nome arco seno para a função $y = \text{arcsen}\,x$ é inspirado na pergunta "qual é o **arco** cujo **seno** é $x$?"

## Função arco cosseno

De modo análogo ao que foi feito para a função arco seno, considere a função $g$: $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ de lei de formação $g(x) = \cos x$. Perceba que essa função é obtida restringindo o domínio da função cosseno para o intervalo $[0, \pi]$ e definindo o contradomínio como igual à imagem. Assim ela é uma função injetora e sobrejetora, como mostra o gráfico abaixo:




Logo, existe a função inversa $g^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, que é chamada de função **arco cosseno**, e é representada por arccos $x$. Seu gráfico está representado a seguir.




Exemplos:

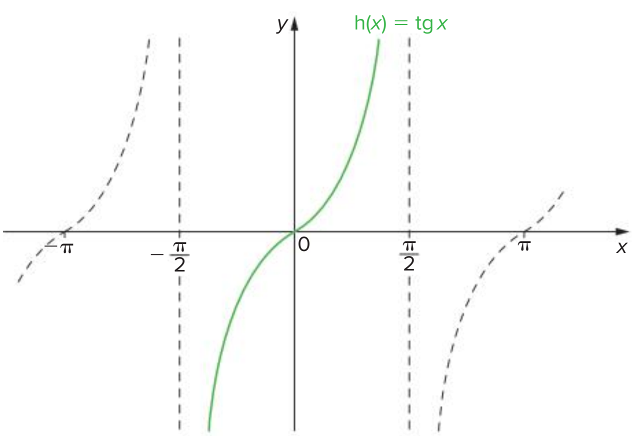
**a)** $\arccos(-1) = \pi$, pois $\cos(\pi) = -1$ e $\pi \in [0, \pi]$.

**b)** $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

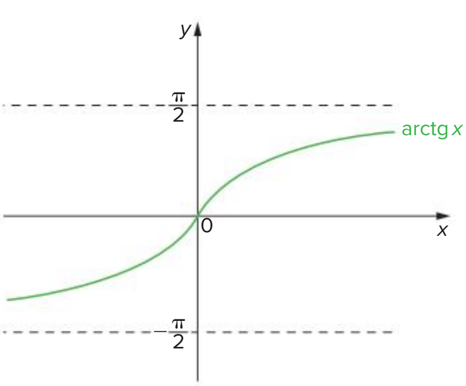
**c)** $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

## Função arco tangente

Por fim, considere a função bijetora $h: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ de lei de formação $h(x) = \text{tg}\,x$, obtida pela restrição do domínio da função tangente para o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:




A função inversa $h^{-1}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é chamada de função **arco tangente**, e é representada por $\text{arctg}\,x$. Seu gráfico está representado abaixo.




Exemplos:

**a)** $\text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, pois $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

**b)** $\text{arctg}(0) = 0$, pois $\text{tg}(0) = 0$.

**c)** $\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, pois $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

**! Atenção**

Outra notação comum para as funções $\text{arcsen}\,x$, $\arccos x$ e $\text{arctg}\,x$, principalmente em calculadoras, é, respectivamente, $\text{sen}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ e $\text{tg}^{-1}x$.

Note que:

$$\text{arcsen}\,x = \text{sen}^{-1}x \neq (\text{sen}\,x)^{-1} = \frac{1}{\text{sen}\,x} = \text{cossec}\,x$$

$$\arccos x = \cos^{-1}x \neq (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$\text{arctg}\,x = \text{tg}^{-1}x \neq (\text{tg}\,x)^{-1} = \frac{1}{\text{tg}\,x} = \text{cotg}\,x$$

## Exercícios resolvidos

**13.** Determine:

**a)** $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**b)** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**c)** $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**Resolução:**

**a)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, logo

$\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**b)** $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$, logo

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

**c)** $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

**14.** Determine $\text{sen}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

**Resolução:**

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Portanto, $\text{sen}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

# Equações trigonométricas

No capítulo anterior, estudamos algumas equações trigonométricas de resolução imediata ou com aplicação de alguma fórmula. Agora, vamos apresentar uma resolução genérica de equações que envolvem igualdades entre seno, cosseno e tangente.

## Equações do tipo sen $x$ = sen $\theta$

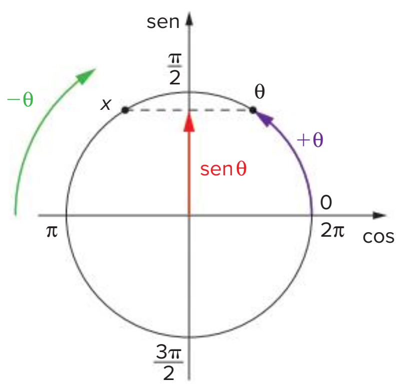
A equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\theta$ admite duas soluções gerais.

A primeiro é obtida igualando $x$ a todos os arcos côngruos a $\theta$:

$$x = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

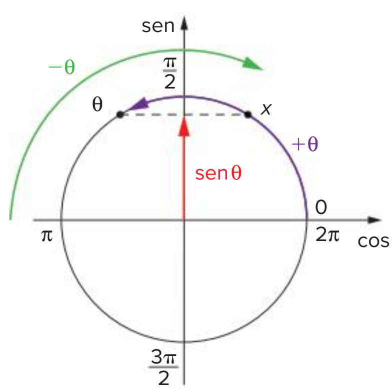
Com a circunferência trigonométrica, podemos observar outras possibilidades para a segunda solução geral.

Se $\theta$ pertence ao 1º quadrante:



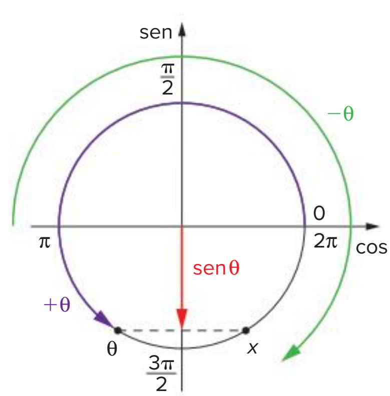

$$x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $\theta$ pertence ao 2º quadrante:



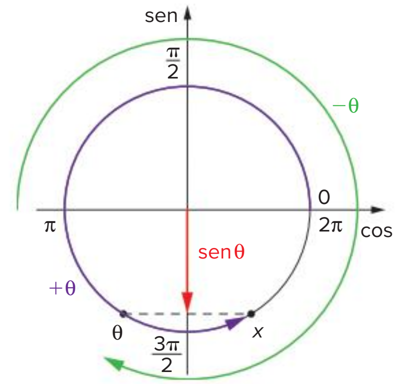

$$x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $\theta$ pertence ao 3º quadrante:




$$x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $\theta$ pertence ao 4º quadrante:




$$x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Note que em qualquer um dos quatro casos acima, temos $x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**! Atenção**

Para $\theta \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ e os respectivos ângulos côngruos, também são válidas as duas soluções gerais acima. No caso $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, as duas soluções equivalem aos mesmos números.

## Equações do tipo cos $x$ = cos $\theta$

Assim como no caso anterior, a equação $\cos x = \cos\theta$ admite duas soluções gerais:

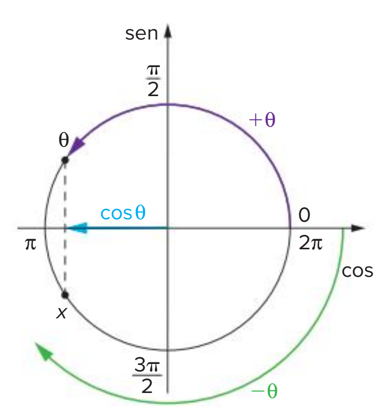
- A primeira é obtida igualando $x$ a todos os arcos côngruos a $\theta$:

$$x = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- A segunda é da forma:

$$x = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Observe a validade dessa segunda solução geral na circunferência trigonométrica representada a seguir, para o caso de $\theta$ pertencer ao 2º quadrante:



Portanto:

$$\cos x = \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## Equações do tipo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\theta$

Analogamente, a equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\theta$ admite duas soluções gerais:

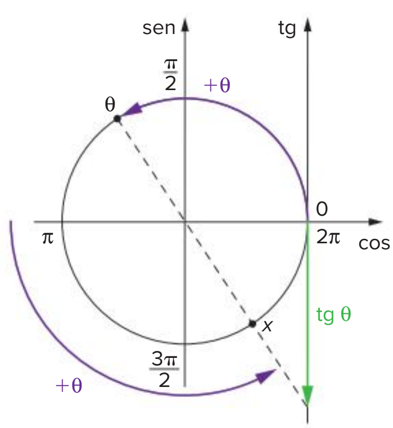
- A primeira é obtida igualando $x$ a todos os arcos côngruos a $\theta$:

$$x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- A segunda é da forma:

$$x = \theta + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Observe a validade da segunda solução geral para o caso de $\theta$ pertencer ao 2º quadrante.




Portanto:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \theta + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## Exercício resolvido

**15.** Determine o conjunto solução das equações a seguir em $\mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$

c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{tg} 3x = -1$

e) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$

**Resolução:**

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Desse modo, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\frac{5\pi}{7} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \pm\frac{5\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $\text{sen}3x = \text{sen}x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**! Atenção**

As equações estudadas no capítulo anterior são chamadas de equações imediatas. Já as técnicas aplicadas no exercício anterior servem para resolver equações mais gerais.

## Inequações trigonométricas

Inequações trigonométricas são inequações que envolvem as funções trigonométricas $\text{sen}x$, $\cos x$ ou $\text{tg}x$. Por exemplo, são inequações trigonométricas:

- $\text{sen}x < \frac{1}{3}$;
- $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{tg}^2 x - 2\text{tg}x \leqslant 1$

Para resolvê-las, podemos usar técnicas de resolução de equações trigonométricas e de inequações, além da circunferência trigonométrica, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

### Exercícios resolvidos

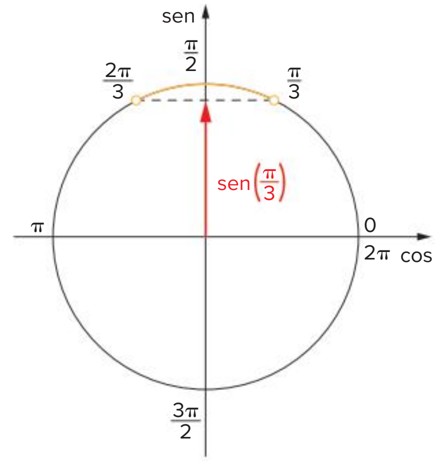
**16.** Resolva a inequação $\text{sen}x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $\mathbb{R}$.

**Resolução:**

Pelo que foi visto anteriormente, sabemos que o conjunto solução de $\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Observe as soluções $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica.




Analisando a figura acima, note que os valores de $x$ que satisfazem $\text{sen}x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ são tais que $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e seus respectivos côngruos.

Desse modo, o conjunto solução de $\text{sen}x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ é dado por:

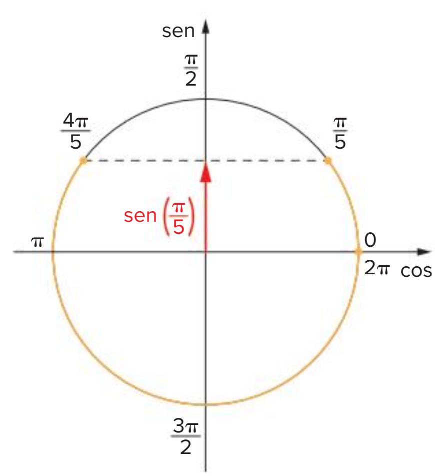
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**17.** Resolva a inequação $\text{sen}\,x \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ em $\mathbb{R}$.

**Resolução:**

As soluções de $\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ são $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Veja as soluções $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{4\pi}{5}$ na circunferência trigonométrica.




Pela figura, vemos que os valores de $x$ que satisfazem $\text{sen}\,x \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ são tais que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5}$ ou que $\frac{4\pi}{5} \leqslant x \leqslant 2\pi$ e seus respectivos côngruos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\frac{4\pi}{5} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2(k+1)\pi$$

Desse modo, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

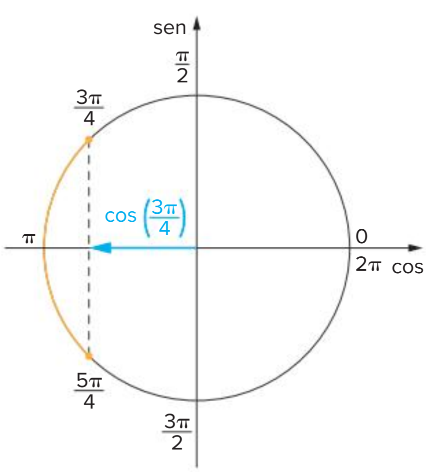
Perceba que, como $\frac{4\pi}{5} - 2\pi = -\frac{6\pi}{5}$, temos que $-\frac{6\pi}{5}$ é côngruo a $\frac{4\pi}{5}$. Logo, também podemos expressar o conjunto solução dessa inequação como:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{6\pi}{5} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**18.** Resolva a inequação $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ em $[0, 2\pi]$.

**Resolução:**

Como $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos a situação ilustrada a seguir.




Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}\right\}$$

**19.** Resolva a inequação $3\text{tg}^2\, x \geqslant 1$ em $\mathbb{R}$.

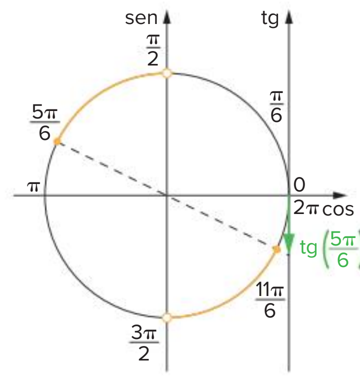
**Resolução:**

Com a mudança de incógnita $z = \text{tg}\, x$, a inequação dada se transforma em $3z^2 \geqslant 1$, cujo conjunto solução sabemos ser $S = \left\{z \in \mathbb{R} \,\middle|\, z \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Voltando à incógnita $x$, temos:

I. $z \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x \leqslant \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Como as soluções de $\text{tg}\, x = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ na 1ª volta são $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$, temos:

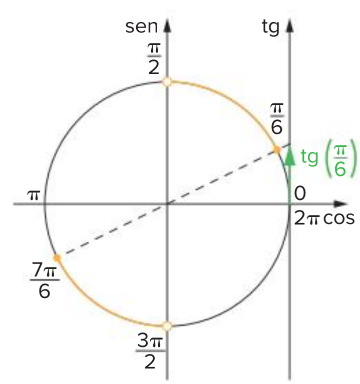



Logo, o conjunto solução de $\text{tg}\, x \leqslant \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ é dado por:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

II. $z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x \geqslant \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Como as soluções de $\text{tg}\, x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ na 1ª volta são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$, temos:




Logo, o conjunto solução de $\text{tg}\, x \geqslant \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é dado por:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação $3\text{tg}^2\, x \geqslant 1$ é dado por:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

## Revisando

1. Calcule:

a) $\text{sen}(165°)$

b) $\cos(105°)$

c) $\text{tg}(105°)$

d) $\cos 15°$

e) $\text{sen } 15°$

2. Sabendo que $\text{sen } x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$, com $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, calcule $\text{sen}(x + y)$.

3. Sabendo que $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{3}$, calcule o valor de $\cos\beta$.

4. Fatore:

a) $\cos(125°) + \cos(65°)$

b) $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \text{sen}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)$

5. Qual é o conjunto imagem da função $f(x) = 5 + 2\text{sen}(3x)$?

6. Qual é o período e o valor máximo da função $y = 1 + \text{sen } x \cdot \cos x$?

7. Dada a função de domínio real abaixo, determine sua amplitude e calcule o valor máximo e o menor valor $t$ positivo onde isso ocorre.

$$h(t) = 5 + 2\cos\left(\frac{\pi(t - 3)}{5}\right)$$

8. Calcule:

a) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**9.** Resolva as equações a seguir em $\mathbb{R}$.

a) $\text{tg}(4x) = 0$

b) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(3x) = \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)$

**10.** Resolva a equação $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

**11.** Quantas soluções tem a equação $\text{sen}(4x) = \text{sen}(2x)$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$?

**12.** Resolva as inequações a seguir.

a) $\text{sen}(2x) \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$, para $x \in [0,2\pi)$

b) $\text{tg}(3x) \geqslant 1$, para $x \in \mathbb{R}$.

c) $\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) > \frac{1}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

## Exercícios propostos

1. **EEAR-SP 2016** O valor de $\cos 735°$ é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

2. O valor de $\text{tg}\,165°$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\sqrt{3}-2$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3. Simplificando a expressão $E = \cos 200° \cdot \cos 20° + \text{sen}\,340° \cdot \text{sen}\,160°$ obtemos:

a) $-1$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

4. **UEG-GO 2015** Considerando-se que $\text{sen}\,5° = \frac{2}{25}$, tem-se que $\cos(50°)$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}+2\right)$

b) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-2\right)$

c) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(1-\sqrt{621}\right)$

d) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-1\right)$

5. **UFPR 2019** Sejam $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que $\cos(x) = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}(y) = \frac{5}{13}$. Podemos concluir que $\text{tg}(x+y)$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{7}{6}$.

c) $\frac{8}{9}$.

d) $\frac{25}{52}$.

e) $\frac{56}{33}$.

6. **Cefet-MG 2018** Os gráficos das funções reais $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \text{sen}(x)$ não coincidem. Entretanto, a partir de uma transformação, é possível fazer o gráfico de $g(x)$ coincidir com o gráfico de $f(x)$. Essa transformação é a função

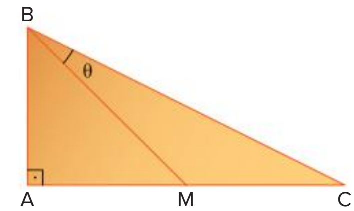
a) $h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\text{sen}\,x$.

b) $h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

c) $h(x) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $h(x) = \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

7. **Unicamp-SP 2020** A figura abaixo exibe o triângulo retângulo ABC, em que AB = AM = MC. Então, $\text{tg}\,\theta$ é igual a



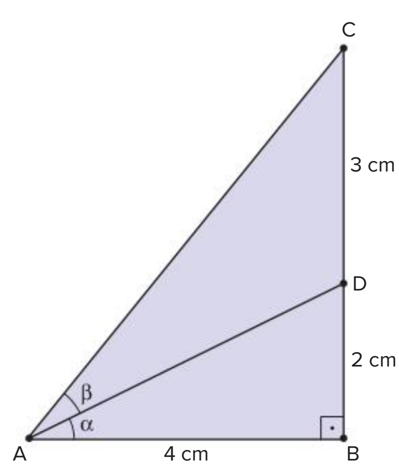

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{4}$.

d) $\frac{1}{5}$.

8. **Uefs-BA 2018** No triângulo retângulo ABC, AB = 4 cm e o segmento $\overline{AD}$ divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos de medidas $\alpha$ e $\beta$. D é um ponto do cateto $\overline{BC}$, tal que CD = 3 cm e DB = 2 cm, conforme mostra a figura.




Dada a identidade trigonométrica $\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$, o valor de $\text{tg}\,\beta$ é

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{5}{11}$

e) $\frac{6}{13}$

**9.** Sendo $\cos x = \frac{1}{3}$, calcule $\cos 2x$.

**10.** Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\operatorname{sen} 2x$.

**11.** Sendo $\operatorname{tg} x = 3$, calcule $\operatorname{tg} 2x$.

**12.** Sendo $\cos x = -\frac{7}{8}$ e $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

**13. Cefet-MG 2020** Se $\cos x = \frac{3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então é correto afirmar que

**a)** $\operatorname{tg} x < 0$
**b)** $\operatorname{sen} 2x > 0$
**c)** $\cos 2x = \frac{7}{25}$
**d)** $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{16}{25}$

**14. Fuvest-SP 2013** Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um ponto determinado do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente,

**Dados:** $\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

**a)** 7 m
**b)** 26 m
**c)** 40 m
**d)** 52 m
**e)** 67 m

**15. Mackenzie-SP 2018** Se $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = 1$, então o valor de $\operatorname{tg} 2x$ é

**a)** 2
**b)** 1
**c)** 0
**d)** −1
**e)** −2

**16.** Qual é o valor de $A = \frac{2\operatorname{sen} 20° \cdot \operatorname{sen} 70°}{3\cos 50° + \operatorname{sen} 40°}$?

**a)** $\frac{1}{3}$
**b)** $\frac{1}{4}$
**c)** $\frac{1}{5}$
**d)** $\frac{1}{2}$
**e)** 1

**17. PUC-Rio** Sabemos que $\cos x = \frac{4}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quanto vale $\operatorname{tg} 2x$?

**a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{7}{24}$ **c)** $\frac{24}{7}$ **d)** $\frac{1}{25}$ **e)** $\frac{1}{24}$

**18. Fuvest-SP 2012** O número real $x$, com $0 < x < \pi$, satisfaz a equação
$\log_3 (1 - \cos x) + \log_3 (1 + \cos x) = -2$.
Então, $\cos 2x + \operatorname{sen} x$ vale:

**a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{8}{9}$ **e)** $\frac{10}{9}$

**19.** Transforme as expressões a seguir em produto.

**a)** sen 40° + sen 20°
**b)** cos 80° + cos 40°
**c)** cos 50° − sen 80°

**20. Mackenzie-SP** Se $N = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$, então $\log_2 N$ vale:

**a)** −3
**b)** −2
**c)** −1
**d)** 2
**e)** 3

**21.** Determine a imagem das funções a seguir.

**a)** $y = 2\operatorname{sen} x$
**b)** $y = 1 + \cos x$
**c)** $y = -2 - 4\operatorname{sen} x$
**d)** $y = \cos^2 x$
**e)** $y = \operatorname{sen} 3x$
**f)** $y = 2 + \cos 2x$

**22.** Determine o período de cada uma das funções a seguir.

**a)** $y = \operatorname{sen} x$
**b)** $y = 2 + \cos x$
**c)** $y = -4\operatorname{sen}(-2x)$
**d)** $y = 2\cos 3x$
**e)** $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$
**f)** $y = \operatorname{sen}^2 x$

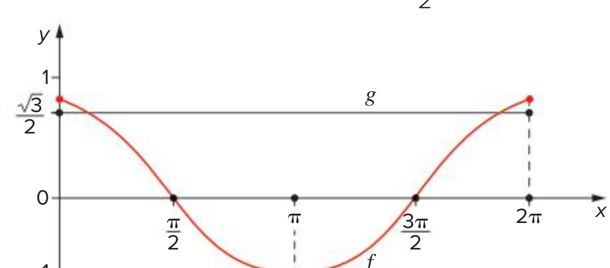
**23.** Determine a imagem e o período das seguintes funções:

**a)** $y = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
**b)** $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
**c)** $y = 1 + \operatorname{sen}(-3x) \cdot \cos(-3x)$
**d)** $y = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

**24.** Esboce o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir.

**a)** $y = 2\operatorname{sen} x$
**b)** $y = 1 + 2\cos x$
**c)** $y = -2\operatorname{sen} 3x$
**d)** $y = |\operatorname{sen} x|$
**e)** $y = 1 + 3\operatorname{sen} 2x$
**f)** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

**25. UFJF/Pism-MG 2019** No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos das funções $f: [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \cos(x)$, e $g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Os elementos do domínio dessas funções para os quais se tem $f(x) > g(x)$ são

a) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$

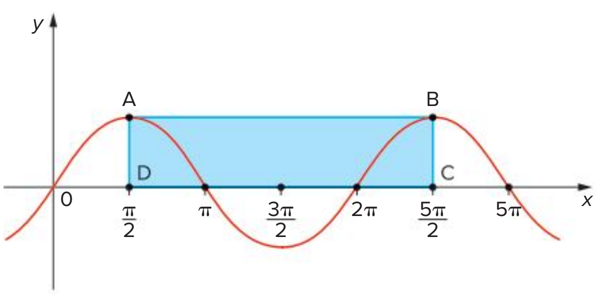
b) $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$

c) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

e) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[ \cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

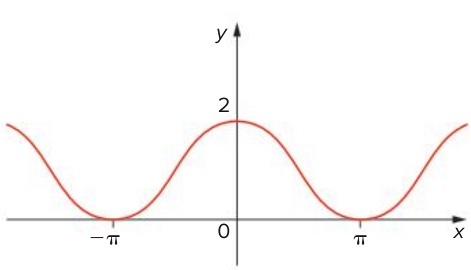
**26. Uerj 2020** O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2\text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.




A área do retângulo ABCD é:

a) $6\pi$
b) $5\pi$
c) $4\pi$
d) $3\pi$

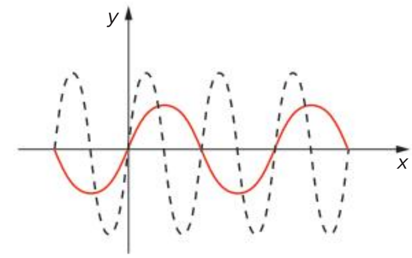
**27. EsPCEx-SP 2019** Dentre as alternativas a seguir, aquela que apresenta uma função trigonométrica de período $2\pi$, cujo gráfico está representado na figura abaixo, é




Desenho ilustrativo fora de escala

a) $f(x) = 1 - \text{sen}(\pi - x)$.
b) $f(x) = 1 + \cos(\pi - x)$.
c) $f(x) = 2 - \cos(\pi + x)$.
d) $f(x) = 2 - \text{sen}(\pi + x)$.
e) $f(x) = 1 - \cos(\pi - x)$.

**28. Fuvest-SP 2018**



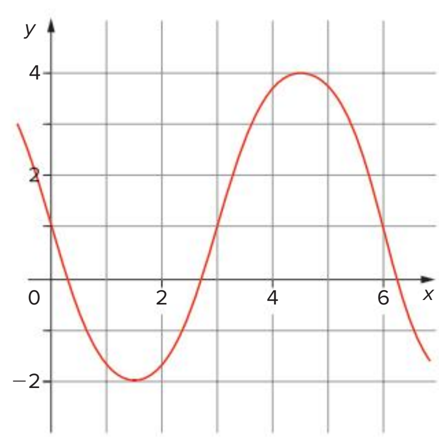

Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e que a linha contínua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha\text{sen}(\beta x)$, segue que

a) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.
b) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.
c) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.
d) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.
e) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.

**29. UPF-RS 2019** Seja $f: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, então, é verdade que

a) A função é crescente no intervalo $(-\pi, 0]$, decrescente no intervalo $[0, \pi)$ e não possui raízes reais.
b) A função é crescente no intervalo $(-\pi, 0]$, decrescente no intervalo $[0, \pi)$ e possui duas raízes reais.
c) A função é decrescente no intervalo $(-\pi, 0]$ crescente no intervalo $[0, \pi)$ e possui duas raízes reais.
d) A função é decrescente no intervalo $(-\pi, \pi)$ e não possui raízes reais.
e) A função é crescente no intervalo $[0, \pi)$ e possui uma raiz real.

**30. EsPCEx-SP 2019** Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma $y = m \cdot \text{sen}(nx) + k$, com $n > 0$.



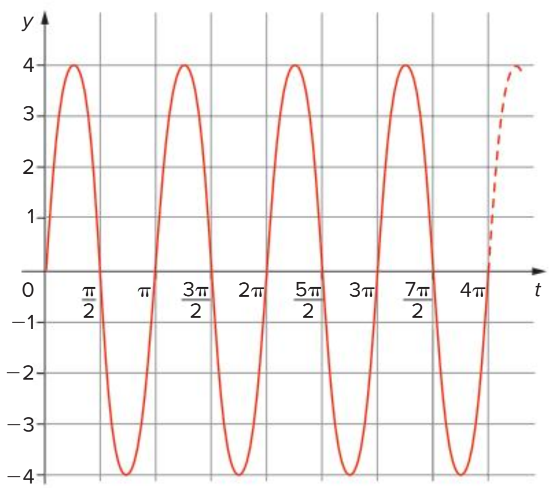

Desenho ilustrativo fora de escala

Os valores de $m$, $n$ e k são, respectivamente,

a) $3, \frac{\pi}{3}$ e $-1$.
b) $6, \frac{\pi}{6}$ e $1$.
c) $-3, \frac{\pi}{6}$ e $1$.
d) $-3, \frac{\pi}{3}$ e $1$.
e) $3, \frac{\pi}{6}$ e $-1$.

**31. Enem PPL 2019** Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A\mathrm{sen}(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; $\theta$ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

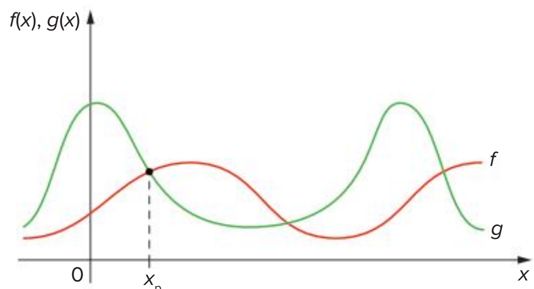
O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante $t$, conforme ilustra a figura.




A expressão algébrica que representa a posição P($t$), da cabeça do pistão, em função do tempo $t$ é

a) $P(t) = 4\mathrm{sen}(2t)$
b) $P(t) = -4\mathrm{sen}(2t)$
c) $P(t) = -4\mathrm{sen}(4t)$
d) $P(t) = 4\mathrm{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
e) $P(t) = 4\mathrm{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

**32. Famerp-SP 2018** Observe os gráficos das funções reais $f$ e $g$, definidas por $f(x) = 2^{\mathrm{sen}\,x}$ e $g(x) = 4^{\cos x}$




Considere $P(x_P, y_P)$ um ponto comum aos gráficos das funções $f$ e $g$ tal que $x_P$, em radianos, é um ângulo do primeiro quadrante. Nessas condições, $\cos x_P$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

**33. UFRGS 2018** Um ponto A, que se movimenta sobre uma circunferência, tem sua posição $p(t)$, considerada na vertical, no instante $t$, descrita pela relação $p(t) = 100 - 20\mathrm{sen}(t)$, para $t \geq 0$. Nesse caso, a medida do diâmetro dessa circunferência é

a) 30.
b) 40.
c) 50.
d) 80.
e) 120.

**34. UFRGS 2019** Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\,\mathrm{sen}(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

a) $-2, 8, \pi$
b) $8, -2, \pi$.
c) $\pi, -2, 8$.
d) $\pi, 8, -2$.
e) $8, \pi, -2$.

**35. UEG-GO 2020** Um determinado fenômeno pode ser modelado através da função $y = a + b\mathrm{sen}(cx + d)$. Se $a = 2$, $b = 1$, $c = \pi$ e $d = \frac{\pi}{2}$, a imagem da função é

a) [1, 2]
b) [1, π]
c) [1, 2π]
d) [1, 3]
e) [1, 4]

**36. Enem 2017** Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e $k$ são constantes reais positivas e $t$ representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

| | |
|---|---|
| **Pressão mínima** | 78 |
| **Pressão máxima** | 120 |
| **Número de batimentos cardíacos por minuto** | 90 |

A função P($t$) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 48\cos(t)$

**37. Fuvest-SP 2017** Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a seguinte fórmula:

$$V(t) = \log_2(5 + 2\operatorname{sen}(\pi t)),\ 0 \leq t \leq 2,$$

em que $t$ é medido em horas e $V(t)$ é medido em $m^3$. A pressão máxima do gás no intervalo de tempo [0, 2] ocorre no instante

a) $t = 0{,}4$
b) $t = 0{,}5$
c) $t = 1$
d) $t = 1{,}5$
e) $t = 2$

**38. Unioeste-PR 2018** Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há muita oferta de alimento para os predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva.

Considerando-se que a população $p(t)$ de coelhos fica bem modelada por $p(t) = 1000 - 250\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right)$, sendo $t > 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que

a) a população de coelhos é sempre menor ou igual a 1 000 indivíduos.
b) em quatro anos a população de coelhos estará extinta.
c) a população de coelhos dobrará em 3 anos.
d) a quantidade de coelhos só volta a ser de 1 000 indivíduos depois de 360 dias.
e) a população de coelhos atinge seu máximo em 1 250 indivíduos.

**39.** Determine:

a) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$

b) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}\right)$

c) $\operatorname{sen}\left(2 \cdot \operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

**40. EsPCEx 2017** Sendo $M = \operatorname{arctg}(X)$, $N = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{X}\right)$ e $P = \operatorname{tg}(M - N)$, o valor de 30P para X = 15 é

a) $\frac{224}{30}$.
b) $\frac{45}{6}$.
c) 45.
d) 224.
e) 225.

**41.** Resolva as equações a seguir para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\operatorname{sen} 2x = 1$
b) $\cos 3x = -1$
c) $\operatorname{sen} 3x = 0$
d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

**42. Cefet-MG 2019** Seja a função real definida por $f(x) = 2 + 2\operatorname{sen}(x)$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. O ponto de mínimo de $f(x)$, nesse intervalo, tem coordenadas

a) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
b) $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.
c) $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$.
d) $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

**43. UEG-GO 2019** Os valores de $x$, sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ se interceptam, são

a) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$
b) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$
c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

**44. Mackenzie-SP 2015** A soma das raízes da equação $\cos 2x + \cos 4x = 0$, no intervalo $[0, \pi]$, é

a) 0
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\pi$
d) $\frac{3\pi}{2}$
e) $\frac{2\pi}{3}$

**45. Imed-RS 2018** A atração gravitacional que existe entre a Terra e a Lua provoca, entre outros fenômenos, o da chamada maré astronômica, que se caracteriza pelo periódico aumento e diminuição do nível do mar. Medindo e tabulando essas variações, os estudiosos do assunto podem descrever matematicamente o comportamento do nível do mar em determinado local por meio de uma função.

A fórmula a seguir corresponde a medições feitas na cidade de Boston, no dia 10 de fevereiro de 1990.

$$h(t) = 1{,}5 + 1{,}4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

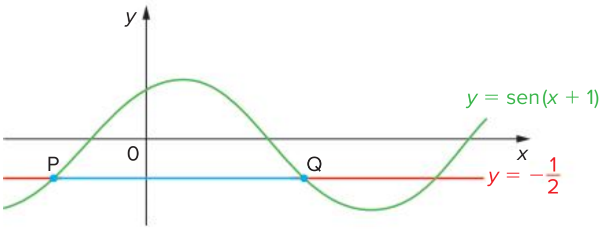
Nessa função, $h(t)$ (em metros) corresponde à altura do nível do mar, e $t$, ao tempo transcorrido desde a meia-noite (em horas). Com base nessas informações, quantas horas se passaram desde o início da medição até que o nível do mar tenha atingido 2,2 metros pela primeira vez?

a) 2 horas
b) 3 horas
c) 4 horas
d) 5 horas
e) 6 horas

**46. Mackenzie-SP 2017** O número de soluções que a equação $4\cos^2 x - \cos 2x + \cos x = 2$ admite no intervalo $[0, 2\pi]$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

**47. FGV-SP 2021** Observe a figura com a representação gráfica de uma função constante e de uma função trigonométrica, ambas definidas para todos os números reais.




Sendo P e Q os pontos de interseção dos gráficos das funções indicadas na figura, a medida de $\overline{PQ}$ em unidades de comprimento do plano cartesiano, é igual a

a) 2
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 4
e) $\frac{4\pi}{3}$

**48. Mackenzie-SP 2016** Os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ e $g(x) = \cos 3x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, se interceptam em

a) cinco pontos.
b) quatro pontos.
c) três pontos.
d) dois pontos.
e) apenas um ponto.

**49.** Resolva as inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$
b) $\cos x < -\frac{1}{2}$
c) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$
d) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

**50. UEM-PR 2013** Com base nos conhecimentos de trigonometria, assinale o que for **correto**.

01 Para todo $x$ pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{sen} x > \cos x$.

02 Não existe solução para a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ no intervalo [0, 3].

04 Para todo $x$ real, $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

08 Existe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ satisfazendo a desigualdade $x < \operatorname{sen} x$.

16 Para todo $x$ real, $-\frac{1}{2} \leqslant (\operatorname{sen} x)(\cos x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Soma:

**51. UEG-GO 2017** A inequação $\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) \leqslant 0$, no intervalo de $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $x$ real, possui conjunto solução

a) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$
b) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$
d) $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$
e) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$

Texto para as questões **52** e **53**.

Ao longo de um ano, a taxa de câmbio de uma moeda X em relação a uma moeda Y foi dada pela seguinte função:

$$f(t) = 1{,}625 + 1{,}25\cos\left(\pi\frac{(t-3)}{12}\right)$$

sendo $t$ o tempo, dado em meses desde o início do ano. Assim, $t = 9$ indica a taxa no início de outubro, que era de 1,625 unidades da moeda X para uma unidade da moeda Y (note que esse valor da taxa indica que no instante considerado a moeda X era “menos valiosa” que a moeda Y).

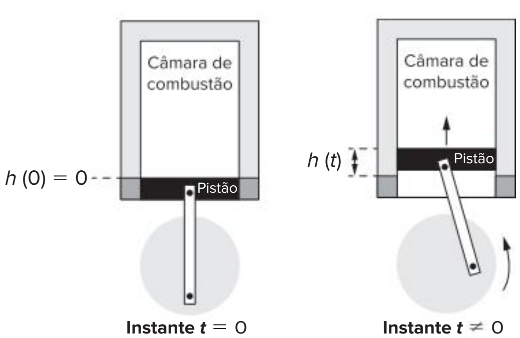
**52. Insper-SP 2016** Ao longo do ano analisado, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y atingida e o instante em que isso ocorreu foram, respectivamente,

a) 2,625 e início de janeiro.
b) 2,625 e início de março.
c) 2,875 e início de janeiro.
d) 2,875 e início de abril.
e) 2,875 e início de junho.

**53. Insper-SP 2016** Houve um intervalo de tempo ao longo do ano considerado em que a moeda X deixou de ser “menos valiosa” que a moeda Y. Esse intervalo teve duração de

a) 5 meses.
b) 4 meses.
c) 3 meses.
d) 2 meses.
e) 1 mês.

**54. Enem 2019** Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.




A função $h(t) = 4 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geqslant 0$ descreve como varia a altura $h$, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo $t$, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro $\beta$, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para $\pi$.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro $\beta$, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

**a)** 1.
**b)** 2.
**c)** 4.
**d)** 5.
**e)** 8.

## Texto complementar

### Eletricidade e funções trigonométricas

A tensão da energia elétrica que chega às nossas casas é representada graficamente por uma senoidal. Sendo essa tensão expressa por uma função seno, ela não é constante – isto é, não tem sempre o mesmo valor. Os aparelhos que medem a tensão geralmente a expressam utilizando o *valor eficaz*, que é obtido pela razão entre a tensão máxima e o valor $\sqrt{2}$:

$$U_{eficaz} = \frac{U_{máx}}{\sqrt{2}}$$

Geralmente, a tensão nos domicílios tem valor eficaz 127 V ou 220 V. Por isso, os valores máximos da tensão nesses dois casos são de $U_{máx} = 127\sqrt{2}\ V \cong 180\ V$ e de $U_{máx} = 220\sqrt{2}\ V \cong 311\ V$. Essas são as chamadas *tensão de pico*.

A corrente ou tensão alternada tem muitas vantagens em relação à continua. Quando a tensão varia, temos a variação do campo magnético, o que gera distorções e forças que fazem a maioria dos aparelhos eletrônicos funcionarem. Vários tipos de motores precisam dessa variação para que seus rotores girem e a partir daí possamos utilizar esse movimento; por exemplo, em elevadores, batedeiras e liquidificadores.

Outra vantagem ocorre em relação à perda por aquecimento. Como os fios não estão o tempo todo com a tensão máxima, eles não precisam ser tão grossos. Além disso, como o aquecimento é menor, o desgaste em interruptores e tomadas é menor também.

Existe o período da função tensão. No Brasil, a frequência da energia é de 60 Hz. Lembrando que a frequência é o inverso do período, e que 1 Hz é equivalente a 1 $s^{-1}$, o período da tensão é dado por:

$$P = \frac{1}{60\ s^{-1}} \Rightarrow P = \frac{1}{60}\ s$$

Sendo a lei de formação da tensão da forma $U(t) \cong 180\text{sen}(kt)$, para um valor eficaz de 127 V, e da forma $U(t) \cong 311\text{sen}(kt)$, para um valor eficaz de 220 V, podemos estimar o parâmetro $k$ pelo período, em segundos, da função:

$$P = \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{60} \Rightarrow k = 120\pi \Rightarrow k \cong 377$$

Desta forma, a lei de formação da tensão domiciliar é dada por:

$$U(t) \cong 180\text{sen}(377t), \text{ para 127 volts}$$
$$U(t) \cong 311\text{sen}(377t), \text{ para 220 volts}$$

Texto elaborado para fins didáticos.

## Resumindo

**Transformações trigonométricas**

Para $a$ e $b \in \mathbb{R}$, vale:

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b \pm \text{sen}\, b \cdot \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

Para $a$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $a \pm b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b}{1 \mp \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

**Arco duplo**

Para $x \in \mathbb{R}$, vale:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\text{sen}(2x) = 2\text{sen}\, x \cdot \cos x$$

Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e $2x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\text{tg}(2x) = \frac{2\,\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

**Transformação de soma em produto**

Para $p$ e $q \in \mathbb{R}$, vale:

$$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Para $p \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, e $q \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

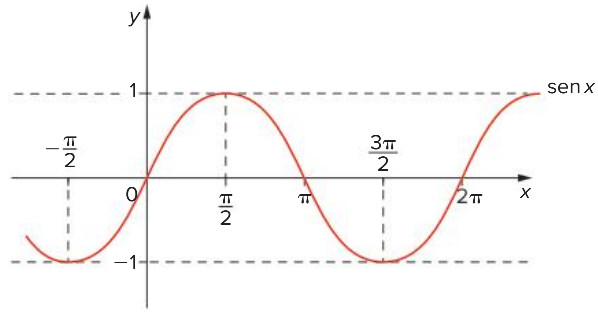
$$\text{tg}\, p + \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$
$$\text{tg}\, p - \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q},$$

**Funções trigonométricas**

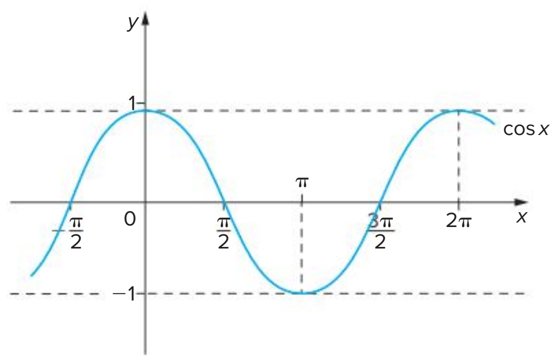
| Função | Seno<br>$y = \text{sen}\, x$ | Cosseno<br>$y = \cos x$ | Tangente<br>$y = \text{tg}\, x$ |
|---|---|---|---|
| Domínio | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| Contradomínio | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Imagem | $[-1, 1]$ | $[-1, 1]$ | $\mathbb{R}$ |
| Zeros | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| Máximos | $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | |
| Mínimos | $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | |
| Paridade | ímpar | par | ímpar |
| Período | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ |
| Amplitude | 1 | 1 | |
| Assíntotas | | | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |

**Gráficos das funções trigonométricas**

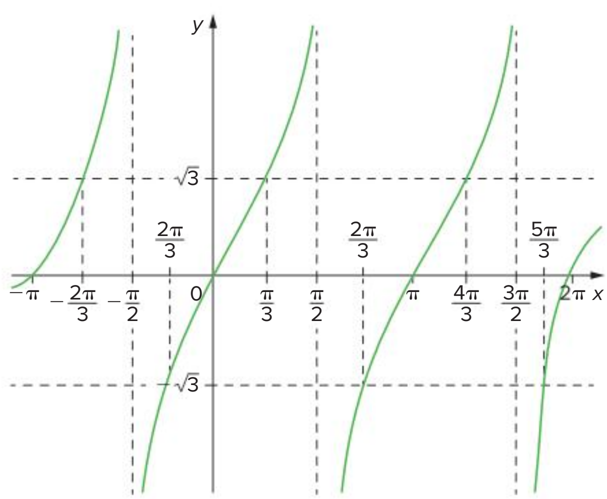
Função seno:




Função cosseno:

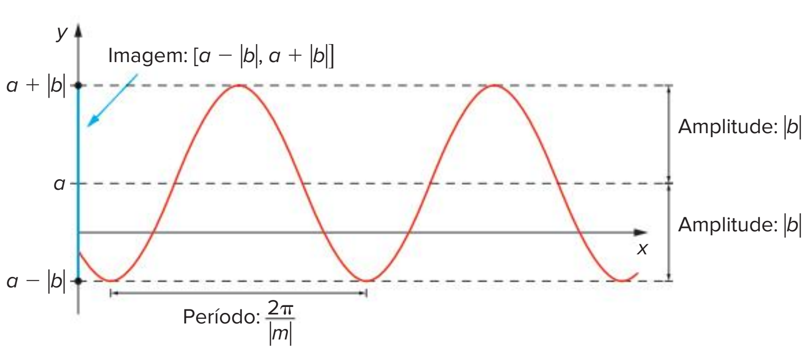



Função tangente:




**Funções trigonométricas generalizadas**

Para $y = a + b\text{sen}(m(x + n))$ e $y = a + b\cos(m(x + n))$, com $a$, $b$, $m$ e $n$ parâmetros reais e $b$ e $m \neq 0$, temos:




| | |
|---|---|
| **Imagem** | $[a - \lvert b\rvert, a + \lvert b\rvert]$ |
| **Amplitude** | $\lvert b\rvert$ |
| **Período** | $\frac{2\pi}{\lvert m\rvert}$ |

**Funções trigonométricas inversas**

Arco seno (arcsen): $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Arco cosseno (arccos): $[-1, 1] \to [0, \pi]$

Arco tangente (arctg): $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

**Equações trigonométricas**

Para $\theta \in \mathbb{R}$, vale:

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\, \theta \Rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \theta \Rightarrow x = \pm\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \theta \Rightarrow x = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Quer saber mais?**

**Livro**

*Fundamentos da Matemática I*: Aplicações das funções trigonométricas. MARQUES, Gil da Costa.
Disponível em: https://midia.atp.usp.br/impressos/lic/modulo01/fund_matematica_PLC0001/FundMat_I_top09.pdf.
Acesso em: 8 dez. 2021.

Nesse capítulo, são apresentadas aplicações das funções trigonométricas em alguns contextos da Física.

## Exercícios complementares

1. **EsPCEx-SP 2018** Considere o triângulo com ângulos internos $x$, 45° e 120°. O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$.

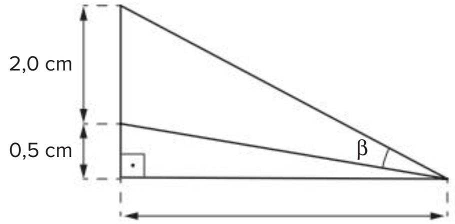
b) $4\sqrt{3} - 7$.

c) $7 - 4\sqrt{3}$.

d) $2 - \sqrt{3}$.

e) $2 - 4\sqrt{3}$.

2. **Mackenzie-SP** Na figura, $\text{tg}\,\beta$ é igual a:




a) $\frac{16}{81}$

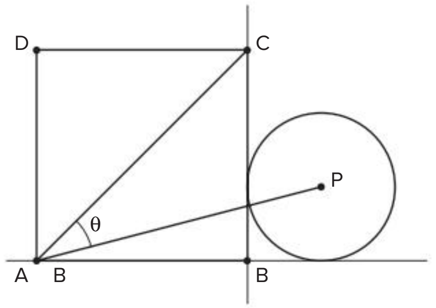
b) $\frac{8}{27}$

c) $\frac{19}{63}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{4}$

3. **Uerj 2017** No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio $r$, tangente às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. O lado do quadrado mede $3r$.




A medida $\theta$ do ângulo $C\hat{A}P$ pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha) - \text{tg}(\beta)}{1 + \text{tg}(\alpha) \times \text{tg}(\beta)}$$

O valor da tangente de $\theta$ é igual a:

a) 0,65

b) 0,60

c) 0,55

d) 0,50

4. **Mackenzie-SP 2017** Para a matriz quadrada

$$M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\, 17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\, 28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$$

o valor do determinante de $M^{10}$ é

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{32}$

c) $\frac{1}{64}$

d) $\frac{1}{128}$

e) $\frac{1}{256}$

5. **Fuvest-SP** Sejam $x$ e $y$ números reais positivos tais que $x + y = \frac{\pi}{2}$. Sabendo-se que $\text{sen}(y - x) = \frac{1}{3}$, o valor de $\text{tg}^2 y - \text{tg}^2 x$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

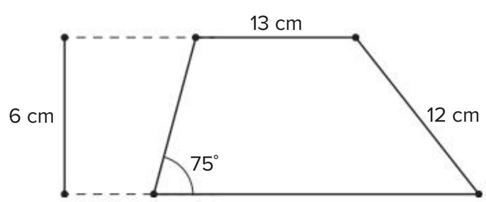
b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{8}$

6. **Col. Naval-RJ 2017** Observe a figura a seguir.




A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6 cm, com base menor medindo 13 cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12 cm. Qual é a área, em $cm^2$, desse trapézio?

a) 120
b) 118
c) 116
d) 114
e) 112

7. **ITA-SP 2019** Considere um retângulo ABCD em que o comprimento do lado $\overline{AB}$ é o dobro do comprimento do lado $\overline{BC}$. Sejam M o ponto médio de $\overline{BC}$ e N o ponto médio de $\overline{CM}$. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$.

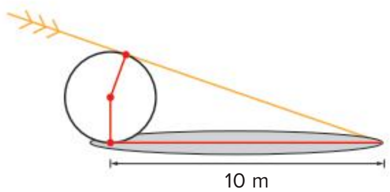
b) $\frac{2}{35}$.

c) $\frac{4}{35}$.

d) $\frac{8}{35}$.

e) $\frac{16}{35}$.

8. **FGV-SP 2017** Uma esfera de raio *r* está apoiada sobre o chão plano em um dia iluminado pelo sol. Em determinado horário, a sombra projetada à direita do ponto onde a esfera toca o chão tinha comprimento de 10 m, como indica a figura.




Nesse mesmo horário, a sombra projetada por uma vareta reta de 1 m, fincada perpendicularmente ao chão, tinha 2 m de comprimento. Assumindo o paralelismo dos raios solares, o raio da esfera, em metros, é igual a

a) $5\sqrt{5} - 10$.

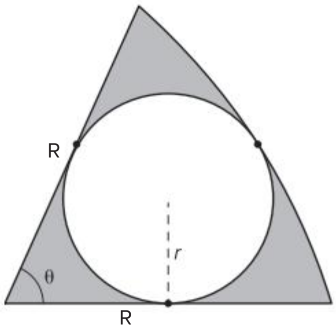
b) $10\sqrt{5} - 20$.

c) $5\sqrt{5} - 5$.

d) $5\sqrt{5} - 2$.

e) $10\sqrt{5} - 10$.

9. **Unicamp-SP 2015** A figura abaixo exibe um círculo de raio *r* que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central $\theta$.

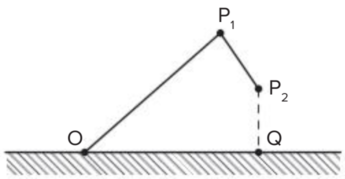



a) Para $\theta = 60°$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

FRENTE 1

**10. Fuvest-SP 2013** Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão.



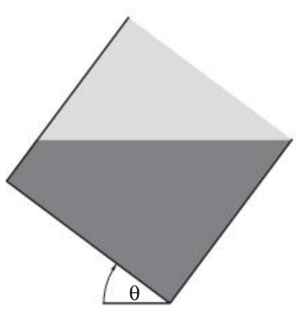

Na figura, os pontos O, $P_1$ e $P_2$ representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de $P_2$ é 2, $P_2$ está a uma altura menor do que $P_1$ e a distância de O a $P_2$ é $2\sqrt{10}$. Sendo Q o pé da perpendicular de $P_2$ ao plano do chão, determine

a) o seno e o cosseno do ângulo $P_2\hat{O}Q$ entre a reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ e o plano do chão;

b) a medida do ângulo $O\hat{P_1}P_2$ entre os braços do guindaste;

c) o seno do ângulo $P_1\hat{O}Q$ entre o braço $\overline{OP_1}$ e o plano do chão.

**11. Unicamp-SP 2013** Um recipiente cúbico de aresta $a$ e sem tampa, apoiado em um plano horizontal, contém água até a altura $\frac{3}{4}a$. Inclina-se lentamente o cubo, girando-o em um ângulo $\theta$ em torno de uma das arestas da base, como está representado na figura abaixo.




a) Supondo que o giro é interrompido exatamente antes de a água começar a derramar, determine a tangente do ângulo $\theta$.

b) Considerando, agora, a inclinação tal que $\text{tg}(\theta) = \frac{1}{4}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor numérico da expressão $\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta)$.

**12. EsPCEx-SP 2021** Se a medida do raio da circunferência circunscrita a um octógono regular é R, então a medida do raio da circunferência inscrita a esse octógono é igual a

a) $\frac{R}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

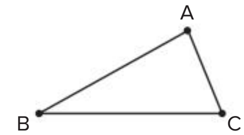
b) $\frac{R}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

c) $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

d) $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

e) $\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

**13. Fuvest-SP 2012**




No triângulo acutângulo ABC, ilustrado na figura, o comprimento do lado $\overline{BC}$ mede $\frac{\sqrt{15}}{5}$, o ângulo interno de vértice C mede $\alpha$, e o ângulo interno de vértice B mede $\frac{\alpha}{2}$. Sabe-se, também, que

$$2\cos(2\alpha) + 3\cos\alpha + 1 = 0.$$

Nessas condições, calcule

a) o valor de $\text{sen}\,\alpha$;

b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

**14. ITA-SP 2016** Se $\text{tg}\,x = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $\text{sen}\,3x$ é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$.

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$.

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

**15. Acafe-SC 2017** Se $2 + 2\text{sen}\,\theta + 2(\text{sen}\,\theta)^2 + 2(\text{sen}\,\theta)^3 + 2(\text{sen}\,\theta)^4 + \ldots = 10$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então, $|\cos(2\theta)|$ é igual a:

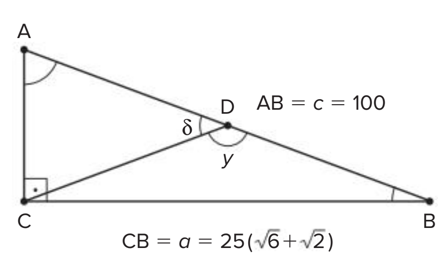
a) $\frac{17}{25}$.

b) $\frac{3}{5}$.

c) $\frac{9}{5}$.

d) $\frac{7}{25}$.

**16. UFU-MG 2015** A figura a seguir, sem escala, apresenta informações parciais de um triângulo retângulo ABC, sendo $\overline{CD}$ uma mediana e $\gamma$ um ângulo obtuso.



Com base nessas informações, determinam-se as medidas dos ângulos $\delta$ e $\gamma$ que possibilitam encontrar os ângulos internos do triângulo ABC. Esses ângulos internos são:

**Observação:** $\sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

a) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 15°$ e $B\hat{A}C = 75°$.
b) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 10°$ e $B\hat{A}C = 80°$.
c) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 20°$ e $B\hat{A}C = 70°$.
d) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 30°$ e $B\hat{A}C = 60°$.

**17.** O resultado de $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$ é:
a) 2
b) 1
c) 0
d) $-1$
e) $-2$

**18. EEAR-SP 2019** Simplificando a expressão $\text{sen}(2\pi - x) + \text{sen}(3\pi + x)$ obtém-se
a) $\text{sen}\,x$
b) $-\text{sen}\,x$
c) $2\text{sen}\,x$
d) $-2\text{sen}\,x$

**19. PUC-RS 2017** A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mm de Hg) de um cidadão porto-alegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$. Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mm de Hg, são iguais, respectivamente, a
a) 60 e 100
b) 60 e 120
c) 80 e 120
d) 80 e 130
e) 90 e 120

**20. Uece 2018** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3}{2 + \text{sen}\,x}$.
Se M e $m$ são respectivamente os valores máximo e mínimo que a função $f$ assume, o valor do produto $M \cdot m$ é
a) 2,0.
b) 3,5.
c) 3,0.
d) 1,5.

**21. IFPE 2016** Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte.
Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada. É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar L, em horas, no dia $d$ do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2{,}8\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(d - 80)\right]$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara.
a) 12,8 e 12
b) 14,8 e 9,2
c) 12,8 e 9,2
d) 12 e 12
e) 14,8 e 12

**22. Uece 2020** Se M e $m$ são respectivamente os valores máximo e mínimo que a função real de variável real $f(x) = 2\text{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 1$ assume, então, a média aritmética entre M e $m$ é igual a
a) 2,0.
b) 2,5.
c) 1,5.
d) 3,0.

**23. FGV-SP 2020** Para o ano de 2020, uma empresa prevê os seguintes valores (em milhares de reais) das receitas de venda de um de seus produtos:

$$V = 50 + 0{,}2x + 0{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

Considere que $x = 1$ representa janeiro de 2020, $x = 2$ representa fevereiro de 2020 e assim por diante.
Qual a previsão de vendas totais, em milhares de reais, para o 1º trimestre de 2020?

**Dado:** Dado: Adote para $\sqrt{3}$ o valor 1,7.

a) 152,625
b) 151,875
c) 152,375
d) 151,625
e) 152,125

**24. IFBA 2017**

Há milhares de anos, os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII.

As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e secundariamente o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

Extraído de: http://planetario.ufsc.br/mares/ em 26/08/2016.

Sendo a maré representada por uma função periódica, e supondo que a função que descreve melhor o movimento da maré em Salvador - BA é dada pela expressão:

$$A(t) = 1{,}8 + 1{,}2\,\text{sen}\,(0{,}5\pi t + 0{,}8\pi),$$

$t$ é o tempo em horas $0 \leqslant t \leqslant 24$.

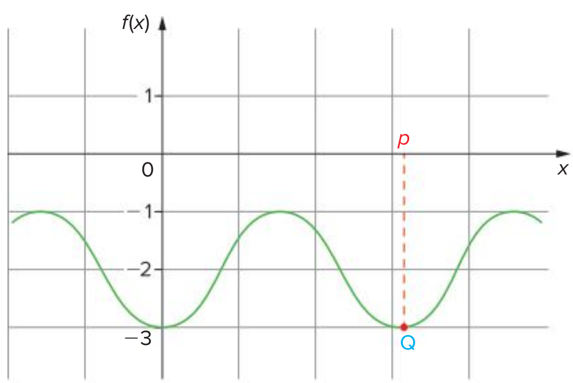
Sendo assim, as alturas máxima e mínima da maré descrita pela função $A(t)$ são, respectivamente:

**a)** 3,0 m e 0,6 m
**b)** 3,0 m e 0,8 m
**c)** 2,5 m e 0,6 m
**d)** 2,5 m e 0,8 m
**e)** 2,8 m e 0,6 m

**25. Unisc-RS 2016** Se $f$ é uma função real dada por $f(x) = 2 - \cos(2x)$, então é correto afirmar que

**a)** $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ para todo $x$ real.
**b)** O gráfico de $f$ intercepta o eixo $x$.
**c)** $f(x) \leqslant 2$ para todo $x$ real.
**d)** $f(0) = 2$
**e)** $f(x) \geqslant 3$ para todo $x$ real.

**26. FGV-SP 2018** Observe o gráfico de uma função trigonométrica cosseno, dada pela expressão $f(x) = m + n\cos(2x)$, sendo $m$, $n$ e $p$ números reais, com ponto de mínimo em $x = p$, que é a abscissa do ponto Q.

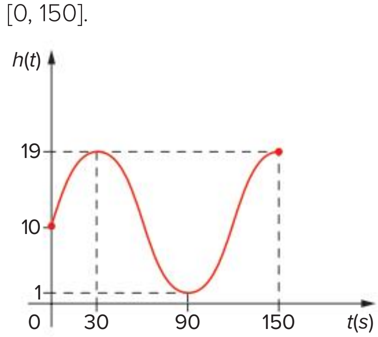



O valor de $p^{mn}$ é igual a

**a)** $\dfrac{1}{4\pi^2}$
**b)** $\dfrac{1}{\pi^2}$
**c)** $\dfrac{\pi^2}{4}$
**d)** $\pi^2$
**e)** $4\pi^2$

**27. EPCar-MG 2020** Em uma roda gigante, a altura $h$, em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante $t$, em segundos, é dada pela função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = A + B\text{sen}(Ct)$, em que A, B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo [0, 150].



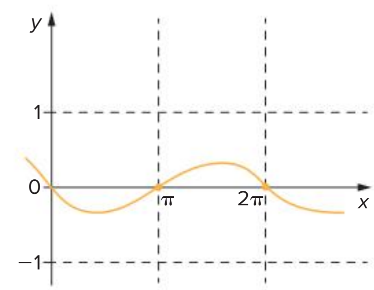

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) $|A \cdot B \cdot C| = \pi$
( ) No instante $t = 20$ s, a pessoa estará a uma altura $h$ tal que $h \in [17{,}5; 17{,}8]$.
( ) A função real $f$ definida por $f(t) = 10 - 9\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função $h$.

Sobre as proposições, tem-se que

**a)** todas são verdadeiras.
**b)** apenas duas são verdadeiras.
**c)** apenas uma é verdadeira.
**d)** nenhuma delas é verdadeira.

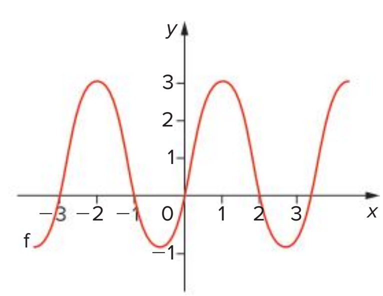
**28. Uefs-BA 2018** A figura mostra parte do gráfico da função $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x) - 2}$.




No intervalo aberto $(0, 2\pi)$ a solução de $\text{sen}(x) > f(x)$ é o conjunto

**a)** $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$
**b)** $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\right\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$
**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$
**e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

**29. Efomm-RJ 2020** Uma parte do gráfico da função $f$ está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar $f(x)$.



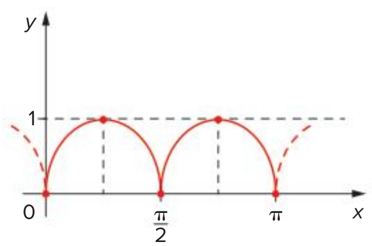

**a)** $f(x) = \text{sen}(x - \pi) + 1$
**b)** $f(x) = 2\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

c) $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

d) $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$

e) $f(x) = 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

**30. UPE/SSA 2018** Qual função trigonométrica representa o gráfico a seguir?




a) $y = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$

b) $y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 3x}$

c) $y = \frac{3}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{2x}{3}$

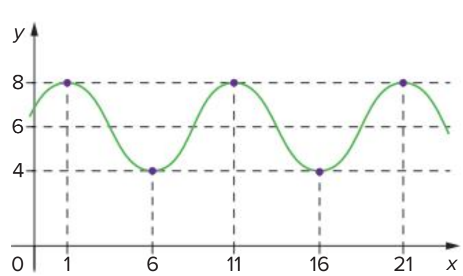
d) $y = 1 + \text{sen}\,\frac{x}{2}$

e) $y = 2 \cdot \cos 2x$

**31. FGV-SP 2017** Uma fórmula que mede a magnitude M de um terremoto pode ser escrita como $M = 0{,}67 \cdot \log E - 3{,}25$, sendo E a energia mecânica liberada pelo abalo, medida em Joules.

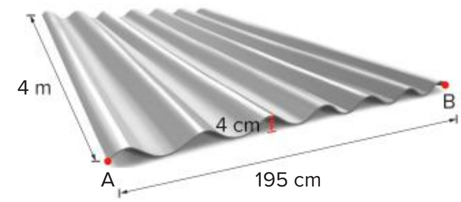
a) Calcule, por meio da fórmula dada, a energia mecânica liberada por um terremoto de magnitude 2,11.

b) A figura a seguir mostra um modelo trigonométrico que, por meio da função cosseno $y = A + B \cdot \cos(mx + n)$, ajuda a prever a magnitude de terremotos em uma ilha do Pacífico. Nesse modelo, $y$ indica a magnitude do terremoto, e $x$ indica o ano de ocorrência, sendo $x = 1$ correspondente ao ano 1980, $x = 6$ correspondente ao ano 1990, $x = 11$ correspondente ao ano 2000, e assim sucessivamente.




c) Determine domínio, imagem e período da função cujo gráfico está indicado na figura. Em seguida, determine os valores dos parâmetros A, B, $m$ e $n$ da lei dessa função.

**32. Unifesp 2018** Uma chapa retangular metálica, de área igual a 8,132 m², passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A figura mostra a telha em perspectiva.



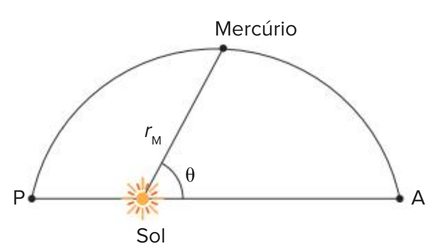

A curva que liga os pontos A e B, na borda da telha, é uma senoide.

Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em A, e de forma que as coordenadas de B, em centímetros, sejam (195, 0), a senoide apresentará a seguinte configuração:


a) Calcule o comprimento da senoide indicada no gráfico, do ponto A até o ponto B.

b) Determine a expressão da função cujo gráfico no sistema de coordenadas é a senoide de A até B. Determine o domínio, a imagem e o período dessa função.

**33. Uerj 2019** Considere a representação abaixo, de metade da órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol. A distância $r_M$ entre o Sol e Mercúrio varia em função do ângulo $\theta$, sendo $0° \leq \theta \leq 180°$.




Para o cálculo aproximado de $r_M$, em milhões de quilômetros, emprega-se a seguinte fórmula:

$$r_M = \frac{555}{10 - 2 \cdot \cos\theta}$$

Calcule a distância PA, em milhões de quilômetros.

**34. UEPG-PR 2017** Considerando a função real definida por $f(x) = a + b\text{sen}(2bx)$, onde $a$ e $b$ são números reais não nulos, assinale o que for correto.

01 Se $a = 2$ e $b = 1$, $f(x)$ tem período $2\pi$ e imagem [1, 3].

02 Se $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{3}$ e imagem $[-4, 2]$ então $a = -1$ e $b$ pode assumir dois valores.

04 Se $a = 1$, a imagem de $f(x)$ é o intervalo $[-1, 3]$, somente no caso do $b = 2$.

**08** Se $b = 2$, $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{2}$, independente do valor de $a$.
**16** Se $b = 2$, qualquer que seja o valor de $a$, o gráfico de $f(x)$ sempre intercepta o eixo $x$.

Soma:

**35. Udesc 2017** Considere a função $f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(x)$, e analise as proposições.

**I.** $f(x) = 2\operatorname{sen}(x + a)$ para algum $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**II.** $f$ possui uma raiz no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**III.** $f$ tem período $\pi$.

Assinale a alternativa **correta**.
a) Somente a proposição II é verdadeira.
b) Somente as proposições I e II são verdadeiras.
c) Somente as proposições II e III são verdadeiras.
d) Somente a proposição III é verdadeira.
e) Somente a proposição I é verdadeira.

**36. UEL-PR 2019** Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês 4 (abril), teve R$ 50 000,00 de lucro e que, no mês 6 (junho), o lucro foi de R$ 30 000,00.
Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L no mês $t$ daquele ano é definida por

$L(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$ em que $1 \leqslant t \leqslant 12$, $a > 0$ e $b > 0$.
Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

**37. UFSC 2019** O dólar americano (US$) é moeda bastante usada em transações financeiras internacionais, mas, em decorrência de vários fatores, o seu preço pode variar bastante. Em um dia de forte variação, o preço, em reais, de venda e de compra de um dólar americano comercializado no Brasil foi descrito, respectivamente, pelas funções $V(t) = 3{,}8 + 0{,}4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ e $C(t) = 3{,}5 + 0{,}5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, nas quais $t$ representa o tempo medido, em horas, sendo que $t \in \mathbb{R}$ e $8 \leqslant t \leqslant 17$.
**01** Os valores máximo e mínimo do preço do dólar para venda foram de, respectivamente, R$ 3,80 e R$ 0,40.
**02** Apenas para $t = 13$ h, o preço de compra do dólar foi de R$ 3,30.
**04** Uma pessoa que comprou US$ 130,00 quando $t = 8$ h e vendeu essa quantia quando $t = 14$ h perdeu R$ 13,00. Contudo, se a venda fosse feita quando $t = 16$ h, obteria um lucro de R$ 39,00.
**08** Usando cartão de crédito, uma pessoa comprou um produto em um *site* americano ao preço de US$ 50,00. Considerando que a cobrança da fatura do cartão de crédito ocorre segundo o preço de compra sempre às 17 h, então o produto custou mais do que R$ 175,00.
**16** Para cada $t$ pertencente ao intervalo $\{t \in \mathbb{R} \mid 12 < t < 16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior que US$ 0,30.

Soma:

**38. Uece 2019** Considerando a função real de variável real definida por $f(x) = (\cos x + \sec x + 2) \cdot \cos x$, onde $x$ é tal que $\cos x \neq 0$, é correto afirmar que a imagem de $f$ (isto é, o conjunto de valores de $f$) é
a) $[0, 4] - \{1\}$.
b) $[0, 2] - \{1\}$.
c) $[-2, 2] - \{1\}$.
d) $[-2, 4] - \{1\}$.

**39. IFBA 2016** A partir do solo, o pai observa seu filho numa roda gigante. Considere a altura A, em metros, do filho em relação ao solo, dada pela função $A(x) = 12{,}6 + 4\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi}{18}\right) \cdot (t - 26)\right]$, onde o tempo ($t$) é dado em segundos e a medida angular em radianos. Assim sendo, a altura máxima e mínima e o tempo gasto para uma volta completa, observados pelo pai, são, respectivamente:
a) 10,6 metros; 4,6 metros e 40 segundos.
b) 12,6 metros; 4,0 metros e 26 segundos.
c) 14,6 metros; 6,6 metros e 24 segundos.
d) 14,6 metros; 8,4 metros e 44 segundos.
e) 16,6 metros; 8,6 metros e 36 segundos.

**40.** O valor máximo da função trigonométrica
$f(x) = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$ é
a) $\sqrt{2}$.
b) 5.
c) 6.
d) 7
e) 8.

**41. ITA-SP 2017** O maior valor de $\operatorname{tg} x$, com

$x = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) 2.
e) 3.

**42. Fuvest-SP 2018** Considere as funções $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ e $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$. Sendo $f$ e $g$ bijetoras, existem funções $f^{-1}$ e $g^{-1}$ tais que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{id}$ e $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \text{id}$, em que id é a função identidade.

a) Para $0 \leq \alpha \leq 1$, mostre que $\left(g \circ f^{-1}\right)(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

b) Mostre que $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**43. ITA-SP 2019** Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$.

b) $\frac{245}{162}\pi$.

c) $-\frac{152}{81}\pi$.

d) $-\frac{82}{81}\pi$.

e) $-\frac{79}{162}\pi$.

**44. Unesp 2013** Sabendo-se que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, para quais valores de $x$ a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$?

**45. UFPR 2017** Considere a função $f(x) = 4\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 3$, com $x \in (-\infty, +\infty)$.

a) Qual é o valor mínimo que a função $f$ atinge?

b) Para que valores de $x$ temos $f(x) = -1$?

**46. ITA-SP 2020** Seja $a$ um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \cdot \operatorname{sen}(a + x) = \operatorname{sen} a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) $5\pi$.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

**47. ITA-SP 2019** Sejam $a$, $b$ e $c$ três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0$$

e

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

**48. UEPG-PR 2018** Dadas as funções $f(x) = 3^{\operatorname{sen}(x)}$ e $g(x) = 3^{\cos(x)}$, assinale o que for correto.

01 A imagem da função $f(x)$ é o intervalo $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

02 A imagem da função $g(x)$ é o intervalo $[0, 3]$.

04 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > g\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

08 $f\left(-\frac{13\pi}{6}\right) < g\left(\frac{19\pi}{3}\right)$.

16 Os períodos das funções $f(x)$ e $g(x)$ são iguais.

Soma:

**49. Acafe-SC 2017** Considere o caso abaixo e analise as afirmações a seguir.

Nos seres humanos a falta de vitamina D é associada ao risco de câncer, obesidade e uma série de outras doenças. Em certas épocas do ano, em determinada localidade, percebeu-se o aumento de casos de doenças associadas à falta de vitamina D. Nesse sentido, um estudo realizado modelou o número de horas com luz solar L($t$) dessa localidade, em função do dia $t$ do ano, através da função:

$$L(t) = 12 - 2{,}8\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{212}t\right)$$

Dessa forma, 1º de janeiro corresponde a $t = 1$, o dia 2 de janeiro é indicado por $t = 2$, e assim sucessivamente, até que 31 de julho corresponde a $t = 212$.

**I.** Com base na função L($t$), o dia que possui o maior número de horas com luz solar nessa localidade ocorre no mês de fevereiro.

**II.** A função L($t$) indica que o número mínimo de horas com luz solar nessa localidade, para algum dia do intervalo dado, é igual a 9,2 horas.

**III.** O dia que possui o maior número de horas com luz solar nessa localidade ocorre para $t = 159$.

**IV.** O período da função L($t$) é $2\pi$.

**Todas** as afirmações **corretas** estão em:

a) I - II - III

b) II - III - IV

c) II - III

d) III - IV

**50. Mackenzie-SP 2019** Os valores de $x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais $|\operatorname{sen} x| > \frac{1}{2}$ são

a) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

c) $0 < x < \pi$

d) $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

**51. Fuvest-SP 2020** É dada a função $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$, para todo $x \in [0, \pi]$.

a) Apresente três valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

b) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.

c) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $\frac{1}{2} f(x) + \frac{3}{8}\text{sen}(2x) \geqslant \frac{5}{8}$.

**52. ITA-SP 2013** Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função

$$f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}(4\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - 1).$$

**53. EsPCEx 2015** Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leqslant \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$.

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

**54. Mackenzie-SP 2014** Em $\mathbb{R}$, o domínio da função $f$, definida por $f(x) = \sqrt{\frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}}$, é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

## BNCC em foco

EM13MAT306

**1.** A temperatura média T, medida em graus Celsius, em uma região, é dada pela função de lei $T(m) = 25 + 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi m}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, na qual $m$ representa o mês do ano – para janeiro, $m = 1$, para fevereiro, $m = 2$, e assim por diante, até dezembro, com $m = 12$.

Os meses em que ocorre a temperatura média mínima e a máxima são, respectivamente.

a) agosto e dezembro
b) julho e dezembro
c) julho e janeiro
d) agosto e janeiro

EM13MAT306

Texto para as questões **2** e **3**.

Um eletricista observa a voltagem em uma tomada com um osciloscópio e nota que o gráfico da tensão $v$, medida em volts (V), é dado por uma função de lei $v(t) = 179\cos(120\pi t)$, na qual $t$ é o tempo, medido em segundos. Um multímetro pode medir apenas o *valor eficaz* dessa tensão, que corresponde ao valor máximo da tensão dividido por $\sqrt{2}$.

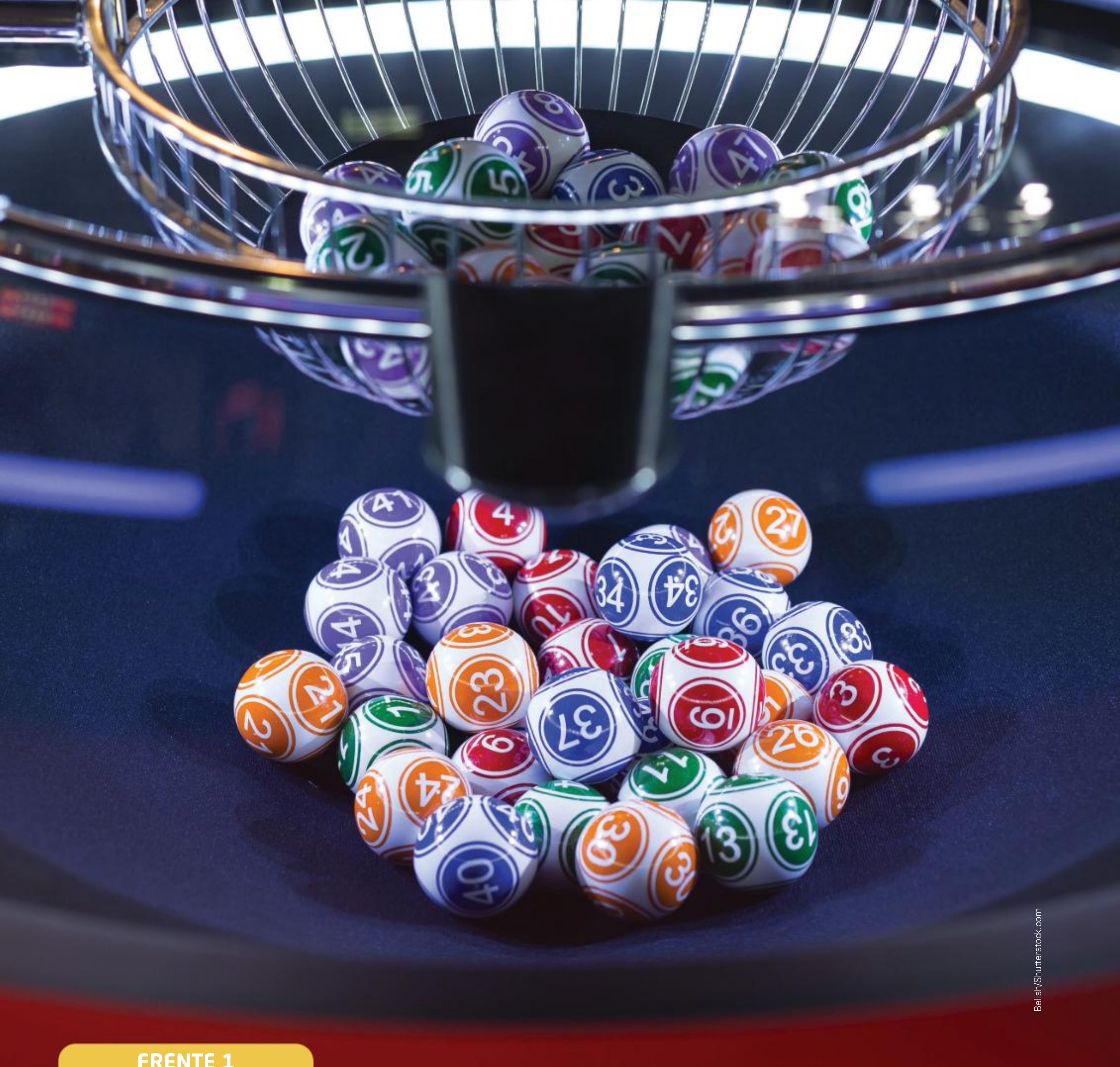
**2.** Qual é a frequência dessa tensão, medida em hertz (Hz)?

**Dado:** A frequência em hertz é o inverso do período em segundos.

a) 30 Hz
b) 45 Hz
c) 60 Hz
d) 90 Hz

**3.** Qual é, aproximadamente, o valor da tensão, em volts, medido com o multímetro?

a) 110 V
b) 127 V
c) 240 V
d) 260 V



Belish/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

11

# Análise combinatória

Usamos métodos de contagem em nosso dia a dia para verificar a quantidade de possibilidades de diversos eventos e para o cálculo de probabilidades desses eventos. Por exemplo, em uma determinada categoria de loteria, ganha-se o prêmio máximo acertando os 6 números sorteados de um total de 60 números disponíveis para a escolha. Você já pensou em quantos são os resultados possíveis desse evento? Se a chance de ganhar o prêmio máximo é alta ou baixa?

Neste capítulo, vamos organizar as ideias relacionadas aos métodos de contagem e aprimorar as técnicas para os respectivos cálculos. Esse estudo é chamado de **análise combinatória**.

# Princípio fundamental da contagem

Esse princípio da contagem é dito "fundamental", pois o entendimento dele é a base para a compreensão das técnicas de contagem específicas que serão trabalhadas neste capítulo.

Imagine que uma pessoa deseja vestir 1 bermuda e 1 camisa. Quando abre o armário, nota que há 3 bermudas e 4 camisas. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Podemos inicialmente usar a ideia de conjuntos. Sendo B o conjunto das bermudas e C o conjunto das camisas, temos:

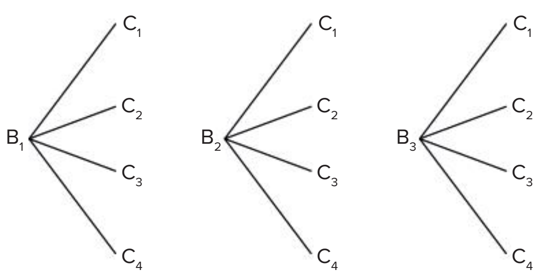
$$B = \{B_1, B_2, B_3\} \text{ e } C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

Escrevendo os pares ordenados possíveis com os elementos desses conjuntos, temos:

$$B \times C = \begin{Bmatrix} (B_1, C_1), & (B_1, C_2), & (B_1, C_3), & (B_1, C_4), \\ (B_2, C_1), & (B_2, C_2), & (B_2, C_3), & (B_2, C_4), \\ (B_3, C_1), & (B_3, C_2), & (B_3, C_3), & (B_3, C_4) \end{Bmatrix}$$

Dessa maneira, percebemos que existem $3 \cdot 4 = 12$ maneiras para essa pessoa se vestir.

Também podemos montar um *diagrama de árvore*, que nos ajuda na organização e na visualização do problema.




Para cada bermuda há 4 opções de camisa. Como há 3 bermudas, temos $4 + 4 + 4 = 12$, ou $3 \cdot 4 = 12$ opções para a pessoa se vestir.

Essa multiplicação é a base do princípio fundamental da contagem (P.F.C.) nessa situação. Observe como a **repetição da quantidade de possibilidades** de camisas para cada bermuda favorece a contagem.

E de quantas maneiras diferentes essa pessoa poderia se vestir se também quisesse escolher 1 par de sapatos, além de 1 bermuda e 1 camisa, e tivesse 2 pares de sapatos para escolher?

Considerando a ideia de conjuntos, acrescentamos o novo conjunto S de sapatos:

$$B = \{B_1, B_2, B_3\}$$

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

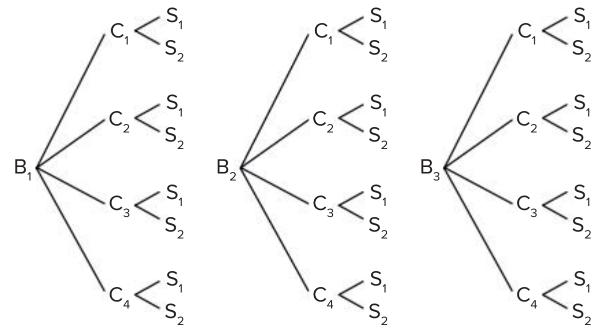
$$S = \{S_1, S_2\}$$

Escrevendo as triplas ordenadas possíveis, temos:

$$B \times C \times S = \{(B_1, C_1, S_1), (B_1, C_2, S_1), \ldots, (B_3, C_4, S_2)\}$$

Dessa maneira, temos $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ maneiras para essa pessoa se vestir.

Representando no diagrama de árvore, temos:




Novamente temos a repetição da quantidade de possibilidades de camisas e sapatos para cada bermuda. Há sempre 2 pares de sapatos para cada camisa escolhida e, então, temos $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ opções para a pessoa se vestir.

## Exercícios resolvidos

**1.** Para se servir em uma sorveteria, precisamos escolher 1 sabor de sorvete, 1 sabor de cobertura e 1 tipo de casquinha. Existem 5 sabores de sorvete, 3 tipos de cobertura e 2 tipos de casquinha. Quantos pedidos diferentes podem ser feitos?

**Resolução:**

Vamos escolher:

- 1 sabor de sorvete do conjunto com 5 sabores;
- 1 tipo de cobertura das 3 opções;
- 1 tipo de casquinha entre as 2 disponíveis.

Dessa maneira, montamos a tripla (sorvete, cobertura, casquinha) e temos, ao todo, 30 opções diferentes.

| Sorvete | | Cobertura | | Casquinha | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 3 | · | 2 | = | 30 |

**2.** Um restaurante serve um prato executivo formado por 1 salada, 1 carne e 1 acompanhamento ou com 1 salada, 1 massa e 1 molho. As opções de salada são 5 e há 3 tipos de carne, 4 acompanhamentos, 4 massas e 2 molhos. Quantos tipos de prato diferentes podem ser pedidos?

**Resolução:**

Vamos organizar a situação em duas partes, uma delas com a escolha de 1 salada, 1 carne e 1 acompanhamento e outra com 1 salada, 1 massa e 1 molho.

| Salada | | Carne | | Acompanhamento | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 3 | · | 4 | = | 60 |

| Salada | | Massa | | Molho | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 4 | · | 2 | = | 40 |

Assim, há $60 + 40 = 100$ possibilidades diferentes de pratos.

**! Atenção**

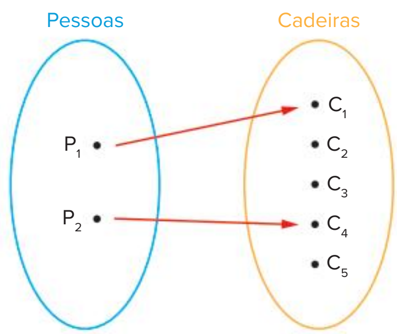
Pelo **princípio aditivo** da contagem a adição da quantidade de opções em cada parte é utilizado para **unir** os elementos de dois ou mais conjuntos. No exercício anterior, unimos o total de opções de pratos em cada parte da situação proposta.
Raciocínio análogo pode ser usado quando existem, por exemplo, 3 tipos de suco e 4 sabores de refrigerante, ou seja, são $3 + 4 = 7$ opções de bebida.

## Conectando elementos de dois conjuntos

Suponha que temos um conjunto de pessoas e outro conjunto de cadeiras dispostas em certa ordem.

Vamos conectar os elementos desses dois conjuntos para analisar quantas opções diferentes temos de pessoas sentadas ou cadeiras ocupadas.

Se temos 2 pessoas ($P_1$ e $P_2$) e 5 cadeiras ($C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ e $C_5$), vamos conectar as pessoas com as cadeiras. Por exemplo, conectando $P_1$ com $C_1$ e $P_2$ com $C_4$, como ilustrado abaixo.



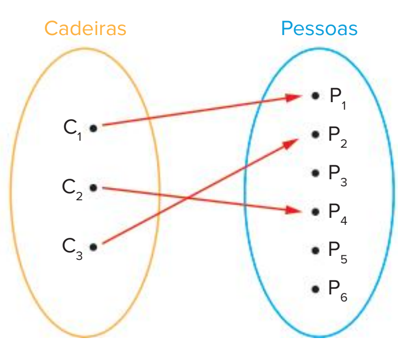

Alguns resultados possíveis para as 2 cadeiras escolhidas são $(C_1, C_4)$, $(C_2, C_3)$, $(C_3, C_1)$, ...

Note que formamos o par ordenado (cadeira de $P_1$, cadeira de $P_2$). A pessoa $P_1$ tem 5 opções de cadeira para escolher e a pessoa $P_2$ fica com 4 opções (todas as cadeiras menos aquela escolhida por $P_1$). Resumindo, podemos escrever:

| Pessoa 1 | | Pessoa 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 4 | = | 20 |

Ou seja, são 20 opções diferentes de escolha.

Analogamente, se temos 6 pessoas e 3 cadeiras, podemos conectar as cadeiras com as pessoas, pois algumas ficarão em pé.




Alguns resultados possíveis são:

$$(P_1, P_4, P_2), (P_6, P_2, P_4), (P_1, P_5, P_3), ...$$

Note que, desta vez, formamos as seguintes triplas ordenadas:

(pessoa em $C_1$, pessoa em $C_2$, pessoa em $C_3$)

Na cadeira $C_1$ podem sentar-se uma das 6 pessoas; na cadeira $C_2$ há $6 - 1 = 5$ opções de pessoas e em $C_3$ sobram $6 - 2 = 5$ pessoas possíveis. Resumindo:

| Cadeira 1 | | Cadeira 2 | | Cadeira 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 6 | · | 5 | · | 4 | = | 120 opções |

### Exercício resolvido

**3.** Queremos distribuir 7 brinquedos diferentes para 4 crianças. De quantas maneiras diferentes podemos fazer isso de modo que cada criança receba 1 brinquedo apenas?

**Resolução:**

Cada brinquedo pode ser entregue a cada uma das 4 crianças.

| Criança 1 | | Criança 2 | | Criança 3 | | Criança 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 7 | · | 6 | · | 5 | · | 4 | = | 840 |

Portanto, existem 840 maneiras diferentes para distribuirmos os brinquedos.

## Contagem de sequências com elementos de um conjunto

Nesse tipo de problema de contagem vamos trabalhar com elementos de um único conjunto para escrever determinada sequência de elementos. Quando usamos a palavra sequência queremos dizer que existe uma **ordem** para os elementos, ou seja, a inversão da posição dos elementos gera uma nova possibilidade.

Por exemplo, se temos disponíveis os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 3 algarismos podemos formar?

Podemos entender os números de 3 algarismos como sequências de 3 algarismos, ou seja, temos o conjunto dos algarismos 1 a 5 e queremos formar sequências de 3 desses algarismos. Alguns exemplos de números que podemos formar são 123, 445, 323, 111, ... Perceba que 123 é diferente de 213.

Assim, devemos preencher as "casinhas das centenas", "das dezenas" e "das unidades" com a quantidade de algarismos possíveis em cada uma delas:

| Centenas | | Dezenas | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 5 | · | 5 | = | 125 |

Logo, são 125 números diferentes.

Se quiséssemos que os números formados tivessem algarismos diferentes, teríamos:

| Centenas | | Dezenas | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 4 | · | 3 | = | 60 |

## Exercícios resolvidos

**4.** Cinco caminhos diferentes ligam as cidades A e B. Uma pessoa deseja ir de A até B e voltar para A.

**a)** De quantas maneiras diferentes ela pode fazer a viagem?

**b)** De quantas maneiras diferentes ela pode fazer a viagem se o caminho de volta tiver de ser diferente do caminho de ida?

**Resolução:**

**a)** Se nomearmos os caminhos de 1, 2, 3, 4 e 5, podemos compor os pares ordenados (ida, volta). Alguns exemplos de caminhos são (1, 1), (3, 5), (4, 2). Temos:

| Ida | | Volta | | |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 5 | = | 25 opções |

**b)** Se devemos voltar por caminhos diferentes, podemos retirar do total as 5 possibilidades com caminhos repetidos, totalizando 25 − 5 = 20 opções. Outra solução é diminuir 1 opção nos caminhos de volta (todas as opções menos aquela já usada na ida).

| Ida | | Volta | | |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | |
| 5 | · | 4 | = | 20 opções |

**! Atenção**

Quando existir alguma restrição, como no exercício anterior, devemos começar a análise da situação por ela. Caso isso não seja feito, corremos o risco de não preencher determinada posição da sequência devido a essa restrição.

**5.** Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

**Resolução:**

Se começarmos a preencher as posições na ordem centenas, dezenas e unidades, não conseguiremos calcular o total de números pois, por exemplo, colocando o algarismo 2 nas centenas e o algarismo 4 nas dezenas, ficamos sem opções de algarismos pares para a casa das unidades.

Como a restrição está na ordem das unidades (pois o número deve ser par), iniciamos pelas unidades, para qual temos 2 opções (os algarismos 2 ou 4); depois, pensando nas centenas, temos 5 − 1 = 4 opções e, finalmente, nas dezenas temos 5 − 2 = 3 opções.

| Centenas | | Dezenas | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 4 | · | 3 | · | 2 | = | 24 |

Logo, podemos formar 24 números pares de três algarismos distintos.

**! Atenção**

Normalmente não começamos os números com o algarismo 0, mas situações como senhas, números de telefone e placas de automóveis podem ter o algarismo 0 no início do número formado.

### Contagem de sequências com restrições

O princípio fundamental da contagem exige a repetição da quantidade de possibilidades. Se ocorrer uma variação desse número, devido a uma restrição na situação-problema, devemos "quebrar" a situação em partes e depois adicioná-las, como fizemos no exemplo do restaurante que serve prato executivo.

Exemplo:

Uma mãe tem 3 filhos: André, Bianca e Carla. A mãe compra um *kit* de brinquedos com 3 bolas, 4 jogos de tabuleiro e 5 quebra-cabeças. De quantas maneiras distintas a mãe pode distribuir um único brinquedo para cada criança, sendo que André não quer quebra-cabeças e que Bianca e Carla não querem jogos de tabuleiro?

Vamos relacionar cada criança com 1 brinquedo. André tem 7 opções de escolha e Bianca e Carla têm, cada uma, 8 possibilidades

Se André escolher 1 bola, as irmãs ficam com 1 opção a menos. No caso de ele escolher 1 jogo de tabuleiro, não haveria mudança na quantidade de opções de Bianca e Carla, já que elas não querem jogos de tabuleiro.

Assim, vamos "quebrar" a resolução em duas partes.

Para André escolhendo 1 bola, temos:

| André | | Bianca | | Carla | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 3 | · | 7 | · | 6 | = | 126 opções |

Para André escolhendo 1 jogo, temos:

| André | | Bianca | | Carla | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 4 | · | 8 | · | 7 | = | 224 opções |

Logo, o total de possibilidades diferentes é 126 + 224 = 350.

## Resolvendo pelo complemento

Alguns exercícios apresentam restrições complicadas para serem resolvidos diretamente.

Se o complemento da restrição for mais simples de ser montado, obtemos o resultado retirando do total esse complemento.

Exemplo:

Aline e Bárbara fazem parte de um grupo de 6 pessoas que vão ao cinema e devem ocupar 6 cadeiras enfileiradas. Se as duas não podem ocupar simultaneamente as cadeiras das extremidades, de quantos modos diferentes podem ser acomodadas essas 6 pessoas?

Vamos relacionar cada cadeira à uma pessoa.

As possibilidades permitidas são:

- Aline em uma das extremidades e Bárbara nas cadeiras do meio;
- Bárbara em uma das extremidades e Aline nas cadeiras do meio;
- Aline e Bárbara nas 4 cadeiras do meio.

Essa situação é mais fácil de ser resolvida com a ideia do complemento. Calculamos o total de opções sem nenhuma restrição e subtraímos o que não é permitido (Aline e Bárbara nas extremidades), lembrando de começar pelas cadeiras com mais restrição.

Total de possibilidades sem restrição:

| Cad. 1 | Cad. 2 | Cad. 3 | Cad. 4 | Cad. 5 | Cad. 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| 6 · | 5 · | 4 · | 3 · | 2 · | 1 | = 720 opções |

Restrição de Aline e Bárbara nas extremidades:

| Cad. 1 | Cad. 2 | Cad. 3 | Cad. 4 | Cad. 5 | Cad. 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| 2 · | 4 · | 3 · | 2 · | 1 · | 1 | = 48 opções |

Logo, o total de possibilidades, considerada a restrição, é $720 - 48 = 672$.

# Fatorial

Como a multiplicação de fatores em uma sequência de números naturais decrescente está muito presente em situações de contagem, vamos apresentar a ferramenta do **fatorial**.

O produto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ pode ser escrito como $4!$ e lê-se quatro fatorial.

Veja outros exemplos:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Note que $5!$ aparece no produto $6!$ e podemos escrever $6! = 6 \cdot 5!$. Dessa maneira, o símbolo do fatorial pode ser interpretado como uma representação simbólica do produto dos números naturais consecutivos que vai até o 1.

Veja outros exemplos:

$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!$

$25! = 25 \cdot 24 \cdot 23!$

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!$

$(p + 5)! = (p + 5) \cdot (p + 4) \cdot (p + 3)!$

A definição do fatorial n!, para $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n - 1)!, \text{ se } n > 1$$

Nos fatoriais, podemos sempre efetuar alguns produtos e parar no fatorial que nos interessar de acordo com a situação, já que o fatorial de um número natural $n$ é sempre um múltiplo do fatorial de qualquer número natural menor que $n$. Por exemplo:

$2! = 2 \cdot 1! = 2$

$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5\,040$

**! Atenção**

Não é possível calcularmos $\pi!$, $(-3)!$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)!$, pois só aplicamos o fatorial aos números naturais.

## Exercício resolvido

**6.** Simplifique as expressões a seguir:

**a)** $12! + 12!$

**b)** $12! + 11!$

**c)** $\dfrac{12!}{10!}$

**d)** $\dfrac{12! + 11!}{10!}$

**Resolução:**

**a)** $12! + 12! = 2 \cdot 12!$

**b)** $12! + 11! = 12 \cdot 11! + 11! = (12 + 1) \cdot 11! = 13 \cdot 11!$

**c)** $\dfrac{12!}{10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132$

**d)** $\dfrac{12! + 11!}{10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10! + 11 \cdot 10!}{10!} =$

$= \dfrac{(12 \cdot 11 + 11) \cdot 10!}{10!} = 132 + 11 = 143$

**! Atenção**

É fácil calcular os fatoriais de números pequenos. No entanto, com números maiores, como nos itens **a** e **b** do exercício resolvido 6 podemos deixar indicado o resultado na forma de fatorial. Por exemplo, temos:

$$12! = 479\,001\,600$$

## Tipos de agrupamento

Das técnicas de contagem de situações com estruturas comuns surgiram fórmulas que podem nos ajudar a resolver exercícios mais rapidamente.

### Arranjo simples

A partir dos elementos de um conjunto, se montarmos uma sequência com determinada quantidade de elementos distintos desse conjunto, temos um **arranjo simples**.

Exemplo:

Oito pessoas participam de uma corrida de 100 metros rasos. Sabendo que não há possibilidades de empate, de quantas maneiras podemos ter:

**a)** as 3 primeiras colocações?
**b)** as 4 primeiras colocações?
**c)** a classificação de todas as pessoas na corrida?

Resolvemos essas situações usando o P.F.C ou a ideia de arranjo simples.

**a)**

| 1ª | 2ª | 3ª |
|---|---|---|

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 8 & \cdot & 7 & \cdot & 6 & = & 336 \text{ opções} \end{matrix}$$

**b)**

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 8 & \cdot & 7 & \cdot & 6 & \cdot & 5 & = & 1\,680 \text{ opções} \end{matrix}$$

**c)**

| 1ª | 2ª | ... | 8ª |
|---|---|---|---|

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 8 & \cdot & 7 & \cdot & \dots & \cdot & 1 & = & 40\,320 \text{ opções} \end{matrix}$$

Esse exemplo nos sugere o seguinte raciocínio: temos 8 elementos e desejamos montar sequências de 3, de 4 e de 8 elementos. Assim, as quantidades de **arranjos** nesses casos são, respectivamente, $A_{8,\,3}$, $A_{8,\,4}$ e $A_{8,\,8}$, que correspondem aos cálculos:

$$A_{8,\,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!}$$

$$A_{8,\,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{8!}{4!}$$

$$A_{8,\,8} = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = \frac{8!}{0!}$$

$A_{8,\,3}$ indica quantas sequências com 3 elementos podemos formar a partir de um conjunto com 8 elementos. Lê-se "arranjo de 8 elementos, tomados 3 a 3" ou "arranjo de 8, escolhe 3".

De modo geral:

> A quantidade de arranjos de *p* elementos escolhidos de *n* elementos, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$, é dada por:
>
> $$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Também podemos usar a notação $A_n^p$ para a quantidade de arranjos de *p* elementos escolhidos de *n* elementos.

### Permutação simples

Quando tivermos certa quantidade de elementos distintos de um conjunto e montarmos uma sequência com todos eles, teremos uma **permutação simples**.

É importante notar que, em cada permutação simples, temos:

- a presença de todos os elementos;
- esses elementos apenas alternam suas posições.

Nas permutações, o que diferencia uma possibilidade da outra é a alternância de posições.

Exemplo:

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

> **! Atenção**
>
> Um anagrama de uma determinada palavra é uma sequência de letras na qual cada letra da palavra original é utilizada uma e apenas uma vez.

Alguns exemplos de anagramas da palavra AMOR são MRAO, ROMA, AORM, ... Todos os anagramas de uma palavra têm as mesmas letras, que apenas alternam suas posições. Assim, nesse exemplo, temos:

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & = & 24 \text{ anagramas} \end{matrix}$$

No exemplo acima, calculamos a quantidade de permutações das letras da palavra AMOR.

> A quantidade de permutações de *n* elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:
>
> $$P_n = n!$$

Uma permutação também pode ser interpretada como um arranjo simples, no qual montamos a sequência com **todos** os elementos do conjunto. No exemplo da quantidade de anagramas da palavra AMOR, usando a ideia de arranjo, temos $A_{4,\,4} = \frac{4!}{0!}$. De modo geral, $P_n = A_{n,\,n}$.

### Exercícios resolvidos

**7.** André, Beatriz, Carla, Diego e Emerson serão colocados lado a lado formando uma fila.

**a)** Quantas filas diferentes podemos formar?
**b)** Em quantas filas Carla ficaria junto a Diego?
**c)** Em quantas filas Carla não está ao lado de Diego?

**Resolução:**

**a)** Para formar uma fila devemos permutar as posições das cinco pessoas. Por exemplo, representando cada pessoa pela inicial de seu nome, temos, como permutações possíveis, as seguintes sequências, entre outras:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| D | B | A | E | C |
| E | B | A | D | C |

Desse modo, a quantidade de filas que podemos formar é dada por:

$$P_5 = 5! = 120$$

**b)** Se considerarmos Carla e Diego um único elemento (para que fiquem juntos), temos a permutação de 4 elementos, ou seja, $P_4 = 4! = 24$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | CD | E |
| CD | E | A | B |

Exemplos de filas com Carla antes de Diego, que totalizam $P_4 - 4! - 24$ possibilidades.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | DC | E |
| DC | E | A | B |

Exemplos de filas com Carla depois de Diego, que totalizam $P_4 - 4! - 24$ possibilidades.

Carla pode ficar antes de Diego (24 possibilidades) ou depois dele (24 possibilidades), o que resulta em um total de $2 \cdot 24 = 48$ possibilidades.

**c)** Observando Carla e Diego em uma fila, temos duas opções: eles ficam juntos ou separados. Se retirarmos do total de filas aquelas em que eles estão juntos, teremos a quantidade de filas em que estão separados, ou seja, $120 - 48 = 72$ possibilidades.

**8.** Considere a palavra FLORES.

**a)** Quantas anagramas podemos formar com essa palavra?

**b)** Quantos anagramas começam com a letra F?

**c)** Quantos anagramas começam com consoante?

**d)** Quantos anagramas terminam com vogal?

**e)** Quantos anagramas começam com consoante e terminam com vogal?

**f)** Quantos anagramas tem as letras F, L e O juntas e nessa ordem?

**g)** Quantos anagramas tem as letras F, L e O juntas?

**Resolução:**

**a)** Os anagramas são obtidos por permutações das 6 letras, ou seja, há $P_6 = 6! = 720$ anagramas.

**b)** Fixando a letra F na primeira posição, vamos alternar as demais.

| F | 5 letras |
|---|---|
| | ↓ |

$$P_5 = 5! = 120$$

**c)** Existem 4 opções de consoante para a 1ª posição e em todas elas teremos a permutação das demais letras.

| Consoante | 5 letras | |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | |
| 4 $\cdot$ | $P_5$ | $= 4 \cdot 5! = 480$ |

**d)** Há 2 opções de vogal para a última posição. Nos dois casos, permutamos as demais letras possíveis.

| 5 letras | Vogal | |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | |
| $P_5$ $\cdot$ | 2 | $= 5! \cdot 2 = 240$ |

**e)** Existem 4 opções para a 1ª posição ser consoante e 2 opções para a última ser vogal. As demais letras devem permutar nas posições restantes.

| Consoante | 4 letras | Vogal | |
|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | |
| 4 $\cdot$ | $P_4$ $\cdot$ | 2 | $= 4 \cdot 4! \cdot 2 = 192$ |

**f)** Se considerarmos as letras F, L e O, nessa ordem, como um único elemento, temos uma permutação de 4 elementos, e assim $P_4 = 4! = 24$.

Exemplos de anagramas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| FLO | R | E | S |
| R | S | FLO | E |

**g)** Alternando também as posições das letras F, L e O no "bloco" FLO do item anterior, temos as opções FLO, FOL, LOF, LFO, OFL, OLF e, em cada uma delas, temos o mesmo resultado do item anterior, ou seja, temos ao todo $P_3 \cdot P_4 = 6 \cdot 4! = 144$ possibilidades.

**9.** Possuo 9 livros de receitas culinárias: 4 sobre massas, 3 sobre carnes e 2 sobre peixes. De quantas maneiras diferentes posso colocá-los em uma prateleira mantendo juntos os livros de mesmo tema?

**Resolução:**

Inicialmente vamos considerar apenas a permutação dos 3 temas, ou seja, calcular $P_3$. Se podemos alterar os livros dentro de cada tema, vamos multiplicar esse resultado pela permutação dos livros de cada um dos temas.

| 4 massas | 3 carnes | 2 peixes |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ |

$$P_3 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 =$$
$$= 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1\,728 \text{ opções}$$

## Permutação com elementos repetidos

Quando temos alguns elementos idênticos em uma sequência, a troca de posições entre esses elementos idênticos não gera novas permutações. A esse caso damos o nome de **permutação com repetição**.

Vamos analisar o efeito dessa repetição. Suponha 4 elementos distintos:

A, B, C e D

Permutando esses elementos, temos 24 possibilidades distintas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ABCA | BACD | CABD | DABC |
| ABDC | BADC | CADB | DACB |
| ACBD | BCAD | CBAD | DBAC |
| ACDB | BCDA | CBDA | DBCA |
| ADCB | BDCA | CDBA | DCAB |
| ADBC | BDAC | CDAB | DCBA |

Se substituirmos C por D nessas possibilidades, temos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ABDD | BADD | DABD | DABD |
| ABDD | BADD | DADB | DADB |
| ADBD | BDAD | DBAD | DBAD |
| ADDB | BDDA | DBDA | DBDA |
| ADDB | BDDA | DDBA | DDAB |
| ADBD | BDAD | DDAB | DDBA |

Cada permutação aparece 2 vezes, como nos exemplos em destaque. Para acertarmos a contagem, dividimos o total de permutações por 2, ou seja, temos $\frac{24}{2} = 12$ possibilidades distintas.

Se substituirmos B e C por D na situação inicial, temos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ADDD | DADD | DADD | DADD |
| ADDD | DADD | DADD | DADD |
| ADDD | DDAD | DDAD | DDAD |
| ADDD | DDDA | DDDA | DDDA |
| ADDD | DDDA | DDDA | DDAD |
| ADDD | DDAD | DDAD | DDDA |

Note que cada sequência aparece 6 vezes, como destacado nos exemplos. Assim, ficamos com apenas $\frac{1}{6}$ das possibilidades iniciais, ou seja, $\frac{24}{6} = 4$ opções.

Para agilizarmos esse procedimento podemos resumir:

- repetindo 2 elementos, dividimos o total por $2 = 2!$;
- repetindo 3 elementos, dividimos o total por $6 = 3!$;

...

- repetindo $k$ elementos, dividimos o total por $k!$

De modo geral:

A quantidade de permutações de $n$ elementos, com $k$ elementos repetidos, tal $n, k \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$, é dada por:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

A quantidade de permutações de $n$ elementos, com $k_1$ elementos iguais entre si, outros $k_2$ elementos iguais entre si, ... e $k_j$ elementos iguais entre si, tais que $k_1, k_2, ..., k_j \in \mathbb{N}$ e $k_1 + k_2 + ... k_j \leq n$, é dada por:

$$P_n^{k_1, k_2, ..., k_j} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_j!}$$

### Exercício resolvido

**10.** Quantos anagramas podemos formar com as letras das palavras:

**a)** RABANADA? **b)** DECIDIDO?

**Resolução:**

**a)** Temos 8 letras nessa palavra, com quatro repetições da letra A, assim:

$$P_8^4 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 1680$$

**b)** Temos 8 letras com duas repetições da letra I e três repetições da letra D, logo:

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 3\,360$$

## Permutação circular

Considere um conjunto com 4 crianças: A, B, C, D.

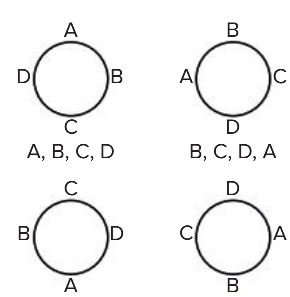
**a)** Quantas filas diferentes podemos formar com essas 4 crianças?

**b)** Se em cada fila formada as crianças derem as mãos e a primeira der a mão para a última teremos uma roda. Quantas rodas diferentes podemos formar?

Resolvemos ambos os casos usando a ideia de permutação das 4 crianças.

**a)** $P_4 = 4! = 24$

**b)** Note que as 4 filas abaixo são diferentes, mas formam a mesma roda.




A, B, C, D    B, C, D, A
C, D, A, B    D, A, B, C

De cada 4 permutações simples formamos apenas 1 diferente permutação circular. Assim, a quantidade de rodas é obtida dividindo a quantidade de filas por 4:

$$PC_4 = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6$$

Analogamente, se tivéssemos 5 crianças, a quantidade de rodas seria $PC_5 = \frac{5!}{5} = 24$.

De modo geral:

> A quantidade de permutações circulares de $n$ elementos, com $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por:
>
> $$PC_n = \frac{n!}{n}$$

Observe que, em uma permutação circular:

- há a presença de todos os elementos do conjunto;
- esses elementos apenas alternam suas posições.
- existe ordem entre os elementos;
- não há uma posição inicial.

## Exercício resolvido

**11.** Cinco casais irão sentar-se ao redor de uma mesa circular com 10 lugares. De quantas maneiras diferentes eles podem ocupar as 10 cadeiras da mesa:

**a)** sem restrições?

**b)** se cada pessoa deve sentar-se ao lado de seu cônjuge?

**Resolução:**

**a)** Temos uma permutação circular de 10 elementos, logo temos $PC_{10} = \frac{10!}{10} = 9! = 362\,880$ maneiras diferentes de eles ocuparem as cadeiras.

**b)** Nesse caso, cada casal passa a ser um elemento. Então, temos a permutação circular de 5 elementos e, em cada um deles, há uma permutação simples de 2 elementos:

$$PC_5 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = \frac{5!}{5} \cdot 2^5 = 768$$

Os casais podem se sentar de 768 maneiras diferentes.

## Combinação

É importante perceber a diferença entre conjuntos e sequências de elementos. Nos conjuntos, não existe ordem entre os elementos:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{c, b, a\} = \ldots$$

Já nas sequências, a ordem é importante. Um mesmo conjunto de elementos pode gerar várias sequências diferentes permutando a posição dos elementos das sequências.

$$(a, b, c) \neq (a, c, b) \neq (c, b, a) \neq \ldots$$

> **! Atenção**
>
> Representamos conjuntos listando seus elementos entre chaves – “{“ e “}” –, e representamos sequências listando seus elementos entre parênteses.

Já sabemos calcular quantas sequências diferentes (isto é, quantos arranjos) podemos formar com os elementos de um conjunto, usando as técnicas de contagem estudadas. Agora, vamos calcular a quantidade de subconjuntos que podemos formar com os elementos de um conjunto a partir da quantidade de sequências que podem ser formadas com os mesmos elementos.

Suponha que temos um conjunto de 5 elementos: {A, B, C, D, E}. Podemos formar vários subconjuntos de 3 elementos a partir desse conjunto e de cada subconjunto podemos gerar 3! = 6 sequências diferentes, cada uma com 3 elementos. Por exemplo:

$$\{A, B, C\} \rightarrow \begin{matrix} (A, B, C), (A, C, B), \\ (B, A, C), (B, C, A), \\ (C, A, B), (C, B, A) \end{matrix}$$

$$\{A, B, D\} \rightarrow \begin{matrix} (A, B, D), (A, D, B), \\ (B, A, D), (B, D, A), \\ (D, A, B), (D, B, A) \end{matrix}$$

...

$$\{C, D, E\} \rightarrow \begin{matrix} (C, D, E), (C, E, D), \\ (D, C, E), (D, E, C), \\ (E, C, D), (E, D, C) \end{matrix}$$

Então, podemos inverter o sentido e afirmar que, de cada 3! = 6 sequências distintas de 3 elementos, formamos 1 subconjunto de 3 elementos do conjunto original. Assim, a quantidade de subconjuntos de 3 elementos é a quantidade total de sequências de 3 elementos dividida por 3!.

A quantidade de sequências de 3 elementos, escolhidos entre os 5 elementos, é obtida da fórmula de arranjo:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Então a quantidade de subconjuntos de 3 elementos que podem ser formados é $\frac{60}{3!} = 10$, ou usando a notação de **combinação**:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

$C_{5,3}$ indica quantas combinações, isto é, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar a partir de um conjunto com 5 elementos. Lê-se “combinação de 5 elementos, tomados 3 a 3” ou “combinação de 5, escolhe 3”.

Note que a diferença entre um subconjunto de 3 elementos e outro não é a posição dos elementos no subconjunto, mas a troca de um desses elementos por outro. Os 10 subconjuntos de 3 elementos do conjunto {A, B, C, D, E} são:

{A, B, C}, {A, B, D},

{A, B, E}, {A, C, D},

{A, C, E}, {A, D, E},

{B, C, D}, {B, C, E},

{B, D, E}, {C, D, E}

Se tivéssemos um conjunto de 10 elementos para montar subconjuntos com 4 elementos, teríamos que cada subconjunto geraria 4! = 24 sequências. Assim:

$$A_{10,\,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5\,040 \text{ sequências}$$

$$C_{10,\,4} = \frac{10!}{(10-4)!4!} = 210 \text{ subconjuntos}$$

Generalizando:

> A quantidade de subconjuntos de $p$ elementos distintos que podemos formar a partir de um conjunto de $n$ elementos distintos, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$, é dado por:
>
> $$C_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Também podemos usar a notação $C_n^p$ para a quantidade de combinações de $p$ elementos escolhidos de $n$ elementos.

## Exercícios resolvidos

**12.** Considere 9 pontos distintos de uma circunferência.

**a)** Esses pontos determinam quantas retas distintas?

**b)** Quantos triângulos distintos podemos formar com vértices nesses pontos?

**c)** Quantos quadriláteros distintos podemos formar com vértices nesses pontos?

**Resolução:**

**a)** Como os pontos pertencem a uma mesma circunferência, não há, nesse conjunto de 9 pontos, 3 pontos colineares. Assim, cada subconjunto de 2 pontos distintos determina uma reta.

$$C_{9,\,2} = \frac{9!}{(9-2)! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2 \cdot 1} = 36$$

Esses pontos determinam 36 retas distintas.

**b)** Cada subconjunto de 3 pontos determina um triângulo. Assim:

$$C_{9,\,3} = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Podemos formar 84 triângulos distintos.

**c)** Cada subconjunto de 4 pontos determina um quadrilátero.

$$C_{9,\,4} = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Podemos formar 126 quadriláteros distintos.

**13.** Calcule as combinações dadas.

**a)** $C_{12,\,3}$

**b)** $C_{20,\,2}$

**c)** $C_{11,\,4}$

**Resolução:**

**a)** $C_{12,\,3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

Ou, simplesmente:

$$C_{12,\,3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

**b)** $C_{20,\,2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$

**c)** $C_{11,\,4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$

**14.** Em um encontro entre amigos, todos se cumprimentaram, totalizando 28 apertos de mão. Calcule o número de amigos presentes no evento.

**Resolução:**

Cada aperto de mão é determinado por um subconjunto de 2 amigos do conjunto formado por todos os amigos, e sabemos que o total de combinações é 28. Sendo $n$ o número de amigos, temos:

$$C_{n,\,2} = 28 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = 28 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -7 \text{ (não convém) ou } n = 8$$

O número de amigos no evento é 8.

**15.** Maria e João fazem parte de um grupo de 9 pessoas. De quantas maneiras diferentes podemos escolher um grupo de 5 pessoas:

**a)** excluindo Maria e João?

**b)** escolhendo Maria e João?

**Resolução:**

**a)** Excluindo os dois temos 7 pessoas disponíveis para formar o grupo de 5:

$$C_{7,\,5} = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$$

Podemos escolher um grupo de 5 pessoas excluindo Maria e João de 21 maneiras distintas.

**b)** Escolhendo Maria e João sobram 3 "vagas" para serem ocupadas pelas demais 7 pessoas:

$$C_{7,\,3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Podemos escolher um grupo de 5 pessoas incluindo Maria e João de 35 maneiras distintas.

**Saiba mais**

Em um conjunto de 10 elementos, escolher 7 deles é o mesmo que "deixar de escolher" 3. Dessa ideia, temos: $C_{10,7} = C_{10,3} \Leftrightarrow \frac{10!}{3!7!} = \frac{10!}{7!3!}$.

Podemos simplificar o cálculo de algumas combinações com essa ideia, que será estudada no próximo capítulo e apresentada como **binomiais complementares**. Por exemplo:

$$C_{20,18} = C_{20,2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

$$C_{9,6} = C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

## Escolhendo subconjuntos de conjuntos diferentes

Quando apresentamos o princípio fundamental da contagem, escolhemos elementos de vários conjuntos. Agora vamos escolher subconjuntos de conjuntos aplicando a mesma técnica.

Exemplo:

Se temos um grupo de 7 mulheres e 6 homens, quantos grupos podemos montar com 3 mulheres e 2 homens?

Vamos escolher:

- um subconjunto de 3 mulheres do conjunto de 7 mulheres;
- um subconjunto de 2 homens do conjunto de 6 homens.

| Subconjunto de 3 mulheres | Subconjunto de 2 homens |
|---|---|
| ↓ | ↓ |
| $C_{7,3}$ · | $C_{6,2}$ |

$$C_{7,3} \cdot C_{6,2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 525$$

### Exercício resolvido

**16.** Em uma padaria há 6 tipos de pão e 4 tipos de doce. De quantas maneiras diferentes podemos escolher 4 itens:

**a)** sem restrições?

**b)** com exatamente 3 pães e 1 doce?

**c)** com pelo menos 1 doce?

**Resolução:**

**a)** Existem 6 + 4 = 10 itens e vamos escolher um subconjunto de quaisquer 4 itens:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Podemos escolher, então, de 210 maneiras distintas.

**b)**

| Subconjunto de 3 pães | Subconjunto de 1 doce |
|---|---|
| ↓ | ↓ |
| $C_{6,3}$ · | $C_{4,1}$ |

$$C_{6,3} \cdot C_{4,1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 = 80$$

Podemos escolher de 80 maneiras distintas.

**c)** Do total de opções (item **a**), não queremos aqueles subconjuntos formados apenas por pães.

Subconjuntos só com pães:

$$C_{6,4} = C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Logo, podemos escolher de 210 − 15 = 195 maneiras distintas.

**Estabelecendo relações**

A análise combinatória é importante no cálculo de probabilidades.

No caso de loterias, por exemplo, esse ramo de estudo ajuda a relacionar o preço de cada aposta com a quantidade de números apostados.

Por exemplo, suponha que uma loteria é realizada por meio do sorteio de 6 números entre um certo total de números. Se uma aposta com 6 números custa K reais, então uma aposta com 8 números deve custar 28K, já que $C_{8,6} = \frac{8!}{2!6!} = 28$, isto é, uma aposta de 8 números é equivalente a 28 apostas de 6 números. De maneira análoga, uma aposta de 10 números deve custar 210K, pois $C_{10,6} = \frac{10!}{4!6!} = 210$, e assim por diante.

## Distribuição de elementos

Quando distribuímos elementos de um conjunto em diferentes subconjuntos, precisamos lembrar que a quantidade de elementos disponíveis diminui a partir do 1º subconjunto formado.

### Exercício resolvido

**17.** De quantas maneiras diferentes podemos guardar 10 bolas numeradas de 1 a 10 em 3 gavetas, sabendo que na 1ª gaveta devemos colocar 2 bolas, na 2ª gaveta, 3 bolas e na última, 5 bolas?

**Resolução:**

Em cada gaveta temos um subconjunto do conjunto de bolas:

| 1ª gaveta (2 bolas) | 2ª gaveta (3 bolas) | 3ª gaveta (5 bolas) |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ |
| $C_{10,2}$ · | $C_{8,3}$ · | $C_{5,5}$ |

$$C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 2\,520$$

Podemos guardar as bolas de 2 520 maneiras diferentes.

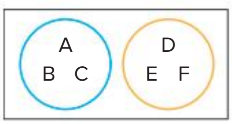
Também podemos fazer o cálculo começando pela última gaveta, obtendo o mesmo resultado:

$$C_{10,\,5} \cdot C_{5,\,3} \cdot C_{2,\,2} = 252 \cdot 10 \cdot 1 = 2520$$

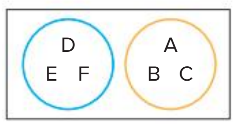
No exercício anterior, as gavetas são diferentes e nomeadas: 1ª, 2ª e 3ª gavetas. Se tivéssemos duas gavetas com 5 bolas em cada uma, mesmo que a quantidade de bolas em cada uma fosse igual, ainda teríamos a 1ª e a 2ª gavetas distintas e a solução seria $C_{10,\,5} \cdot C_{5,\,5} = 252$.

Analogamente, dividindo 10 pessoas em três grupos de 2, 3 e 5 pessoas, temos o mesmo resultado que a divisão das 10 bolas nas 3 gavetas. Em vez de gavetas, temos o grupo de 2 pessoas, o grupo de 3 pessoas e o grupo de 5 pessoas.

No entanto, se a quantidade de pessoas em cada grupo for a mesma, não temos como diferenciar esses grupos se não forem nomeados. Por exemplo, queremos dividir 6 pessoas (A, B, C, D, E, F) em 2 grupos de 3. Duas opções possível são:



Opção 1



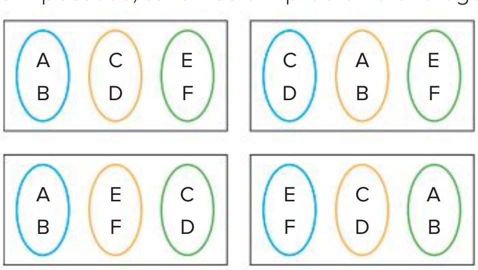
Opção 2

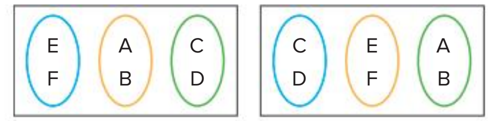
Como a única coisa que diferencia os dois grupos são seus membros, as duas opções são iguais: escolher as pessoas A, B e C primeiro e deixar D, E e F no outro grupo é o mesmo que escolher as pessoas D, E e F primeiro e deixar A, B e C no outro grupo.

Isso quer dizer que não existe ordem entre os 2 grupos e devemos dividir por 2! a quantidade de possibilidades obtida nos cálculos das combinações das pessoas nos grupos:

$$\frac{C_{6,\,3} \cdot C_{3,\,3}}{2!} = 10$$

Se quiséssemos dividir as mesmas 6 pessoas em 3 grupos de 2 pessoas, teríamos um problema análogo.




Nesses casos, mudamos a ordem dos grupos, mas o resultado é o mesmo. Como não existe ordem entre os 3 grupos, devemos dividir por 3! as quantidades de combinações:

$$\frac{C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,2} \cdot C_{2,\,2}}{3!} = 15$$

## Exercício resolvido

**18.** Dez pessoas vão participar de um torneio de xadrez. Haverá um sorteio para escolher os confrontos na primeira rodada e todos os 5 jogos acontecerão simultaneamente. Quantas possibilidades diferentes existem para essa primeira rodada?

**Resolução:**

Dividiremos as 10 pessoas em 5 grupos de 2 pessoas, sendo que não há ordem nos jogos da primeira rodada.

| 2 pessoas | 2 pessoas | 2 pessoas | 2 pessoas | 2 pessoas |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |

$$\frac{C_{10,\,2} \cdot C_{8,\,2} \cdot C_{8,\,2} \cdot C_{4,\,2} \cdot C_{2,\,2}}{5!}$$

Logo:

$$\frac{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}}{5!} = 945$$

Temos, então, 945 possibilidades diferentes para essa primeira rodada.

## Revisando

**1.** Simplifique as frações a seguir, até sua forma irredutível:

**a)** $\frac{25!}{27!} =$

**b)** $\frac{4! \cdot 5!}{7! \cdot 3!} =$

**c)** $\frac{11!}{3! \cdot 8!} =$

**d)** $\frac{n!}{(n-2)! \cdot (n-1)} =$

**2.** Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

3. Quantos números de algarismos distintos e que são divisíveis por 5 existem entre 4 000 e 9 000?

4. Considere a palavra INVERSO. Quantos anagramas podemos formar com as letras I e N juntas e nessa ordem?

5. **Enem PPL 2020** Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.
Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

a) 64.
b) 74.
c) 254.
d) 274.
e) 634.

6. Quantos anagramas formados com as letras da palavra BANANA começam com consoante?

7. Quantos subconjuntos com 5 elementos possui um conjunto com 8 elementos?

8. De um grupo de 5 rapazes e 3 moças serão selecionadas 4 pessoas. Em quantas possibilidades diferentes há pelo menos 1 moça?

9. Antônio e Carlos fazem parte de um grupo de 8 pessoas. De quantas maneiras diferentes podemos escolher 4 pessoas sem que ambos sejam selecionados simultaneamente?

10. De quantas maneiras diferentes podemos dividir 10 pessoas em 2 grupos de 5 pessoas?

## Exercícios propostos

1. **UEG-GO 2015** Numa lanchonete o lanche é composto de três partes: pão, molho e recheio. Se essa lanchonete oferece aos seus clientes duas opções de pão, três de molho e quatro de recheio, a quantidade de lanches distintos que ela pode oferecer é de:

a) 9
b) 12
c) 18
d) 24

2. **UEG-GO 2015** Érika resolve passear com a cachorrinha Kika e, antes de sair do apartamento, escolhe colocar uma roupa e uma coleira na cachorrinha. Se Kika tem 7 roupas e 3 coleiras, todas distintas, de quantas maneiras Érika pode escolher uma roupa e uma coleira para passear com a Kika?

a) 10
b) 21
c) 35
d) 42

**3. UEG-GO 2017** Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

a) 120
b) 60
c) 40
d) 20
e) 10

**4. Uece 2017** Quantos números inteiros positivos pares, com três dígitos distintos, podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7?

a) 24
b) 28
c) 32
d) 36

**5. EEAR-SP 2016** Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A partir deles, podem ser criados ______ números pares de quatro algarismos distintos.

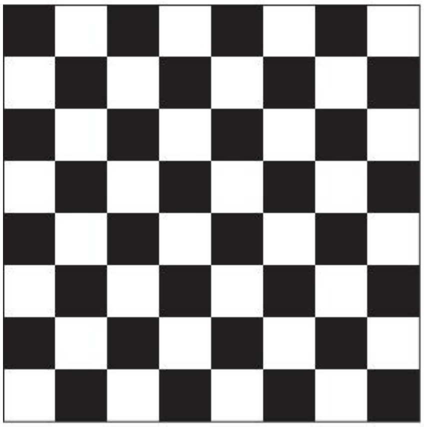
a) 60
b) 120
c) 180
d) 360

**6. Enem PPL 2019** Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por:

a) 6.
b) 8.
c) 12.
d) 16.
e) 24.

**7.** De quantas maneiras podem ser escolhidas, no tabuleiro de xadrez, 1 casa preta e 1 casa branca de modo que não estejam na mesma vertical nem na mesma horizontal?

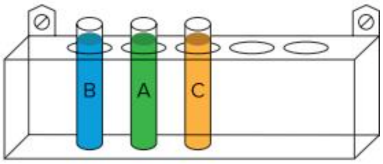


a) 120
b) 360
c) 768
d) 854
e) 1 024

**8. UPE/SSA 2018** A prova final de Geografia de uma escola é composta de 10 itens com alternativas do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

a) 20
b) 64
c) 256
d) 512
e) 1 024

**9. Famema-SP 2018** Três tubos de ensaio, com rótulos A, B e C, serão colocados em um suporte que possui cinco lugares alinhados e encontra-se fixado em uma parede. A figura mostra uma das possíveis disposições dos tubos.



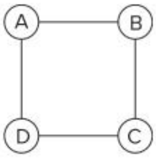

Sabendo que o tubo com o rótulo A não pode ocupar as extremidades do suporte, o número de maneiras distintas de esses tubos serem colocados nesse suporte é:

a) 12.
b) 24.
c) 36.
d) 18.
e) 30.

**10. Ifal 2018** Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

a) 4.
b) 12.
c) 16.
d) 40.
e) 120.

**11. Enem 2016** Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.




De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 72

**12. FICSAE-SP 2017** Um patrão tem 6 tarefas diferentes para serem distribuídas entre 3 empregados. Ele pode delegar todas elas a um só empregado, ou delegar apenas para alguns, ou ainda garantir que cada empregado receba pelo menos uma tarefa. O número de maneiras distintas de distribuir essas tarefas é:

a) 639.
b) 714.
c) 729.
d) 864.

**13. Fuvest-SP**

a) Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8, 9?
b) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item **a**, quantos são divisíveis por 5?
c) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item **a**, quantos são divisíveis por 4?

**14. PUC-Rio 2017** Mônica tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branca, vermelha, amarela, preta e verde. Ela também tem uma calça de cada uma das seguintes cores: preta, azul, cinza e branca.

a) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça para sair?
b) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça de cores diferentes uma da outra?
c) Na segunda-feira, Mônica usou calça azul e camisa preta. Na terça-feira, ela quer escolher uma calça e uma camisa de cores diferentes uma da outra. Sabendo que as roupas que ela usou na segunda-feira estão lavando (e apenas estas), de quantas maneiras ela pode escolher suas roupas?

**15. Fuvest-SP 2021** Um aplicativo de videoconferências estabelece, para cada reunião, um código de 10 letras, usando um alfabeto completo de 26 letras. A quantidade de códigos distintos possíveis está entre:

**Note e adote:**
$\log_{10} 13 \cong 1{,}114$
1 bilhão $= 10^9$

a) 10 bilhões e 100 bilhões.
b) 100 bilhões e 1 trilhão.
c) 1 trilhão e 10 trilhões.
d) 10 trilhões e 100 trilhões.
e) 100 trilhões e 1 quatrilhão.

**16. UFRGS 2019** Uma caixa contém 32 esferas numeradas de 1 a 32. O número de maneiras distintas de retirar 3 esferas da caixa, ordenadas como primeira, segunda e terceira, em que a esfera com o número 8 seja pelo menos a terceira a ser retirada é:

a) 27.
b) 96.
c) 2000.
d) 2017.
e) 2790.

**17. FGV-SP 2017** O total de números de cinco algarismos que possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais em sua composição é igual a:

a) 6581.
b) 9590.
c) 18621.
d) 27930.
e) 30951.

**18. ESPM-SP** Para $n \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\dfrac{(x^2-1)! \cdot x!}{(x^2-2)!(x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x - 2$
b) $(x - 2)!$
c) $(x - 1)!$
d) $x$
e) $x - 1$

**19. EsPCEx-SP 2016** A solução da equação $\dfrac{3! \cdot (x-1)!}{4 \cdot (x-3)!} = \dfrac{182 \cdot (x-2)! - x!}{2 \cdot (x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

**20. Uerj 2021** Em uma reunião, trabalhadores de uma indústria decidiram fundar um sindicato com uma diretoria escolhida entre todos os presentes e composta por um presidente, um vice-presidente e um secretário. O número total de possibilidades de composição dessa diretoria é trinta vezes o número de pessoas presentes nessa reunião.
O número de trabalhadores presentes é:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 7

**21. UEG-GO 2021** Utilizando as 7 notas musicais, um músico deseja compor uma melodia com 5 notas distintas. O número de melodias que ele pode compor é

a) 5040
b) 2520
c) 42
d) 120
e) 360

**22.** Em uma rede social, a cada usuário é atribuído um código formado por 5 caracteres distintos entre as 26 letras do alfabeto (a, b, ..., w, x, y, z). Devido ao aumento no número de novos usuários, foi decidido que os códigos continuariam sendo formados por 5 caracteres distintos, mas formados pelas 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos (0, 1, 2, ..., 9).
Com essa mudança, qual é, aproximadamente, a porcentagem de aumento na quantidade de códigos que podem ser gerados? Em seus cálculos, utilize uma calculadora.

a) 4,73%
b) 47,3%
c) 473%
d) 57,3%
e) 573%

**23.** Aline e Cláudia fazem parte de um grupo de 6 pessoas que devem ocupar 6 cadeiras enfileiradas. Se ambas não podem ocupar simultaneamente as cadeiras das extremidades, de quantos modos diferentes essas 6 pessoas podem se acomodar?

**24.** Quantos anagramas da palavra UNICAMP:
- a) começam com a letra U?
- b) começam com U e terminam com P?
- c) têm as letras UNI juntas e nessa ordem?
- d) têm as letras UNI juntas?
- e) têm as letras U e N separadas?

**25. UEG-GO 2018** O número de anagramas que se pode formar com a palavra ARRANJO é igual a:
- a) 21.
- b) 42.
- c) 5 040.
- d) 2 520.
- e) 1 260.

**26. Enem 2020** Eduardo deseja criar um *e-mail* utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O *e-mail* terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o *e-mail* eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um *e-mail* que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um *e-mail* desejado?
- a) 59
- b) 60
- c) 118
- d) 119
- e) 120

**27.** Uma moeda é lançada 10 vezes. Quantas sequências diferentes de 5 caras e 5 coroas existem?

**28. UFJF/Pism-MG 2018** Anagrama é a reordenação de letras de uma palavra para formar outras palavras.
- a) Quantos são os anagramas da palavra PARALELA?
- b) Quantos são os anagramas da palavra PARALELA que começam e terminam com a mesma letra?

**29. EsPCEx-SP 2021** Oito alunos, entre eles Gomes e Oliveira, são dispostos na primeira fileira do auditório da EsPCEx, visando assistirem a uma palestra. Sabendo-se que a fileira tem 8 poltronas, de quantas formas distintas é possível distribuir os 8 alunos, de maneira que Gomes e Oliveira não fiquem juntos?
- a) $8!$
- b) $7 \cdot 7!$
- c) $7!$
- d) $2 \cdot 7!$
- e) $6 \cdot 7!$

**30. Ifsul-RS 2017** O número de anagramas distintos que podemos formar com o termo DIREITO é:
- a) 5 040.
- b) 2 520.
- c) 120.
- d) 7.

**31. Unigranrio-RJ 2017** Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR, em que as consoantes aparecem juntas, mas em qualquer ordem?
- a) 120
- b) 720
- c) 17 280
- d) 34 560
- e) 86 400

**32. Fatec-SP 2016** No Boxe, um dos esportes olímpicos, um pugilista tem à sua disposição quatro golpes básicos: o *jab*, o *direto*, o *cruzado* e o *gancho*. Suponha que um pugilista, preparando-se para os Jogos Olímpicos do Rio, em 2016, queira criar uma sequência com 6 golpes, empregando necessariamente dois *jabs*, dois *diretos*, um *cruzado* e um *gancho*. Assim, o número máximo de sequências que ele poderá criar será de:
- a) 180.
- b) 160.
- c) 140.
- d) 120.
- e) 100.

**33. ESPM-SP 2018** O número de anagramas da palavra COLEGA em que as letras L, E e G aparecem juntas em qualquer ordem é igual a:
- a) 72.
- b) 144.
- c) 120.
- d) 60.
- e) 24.

**34. UEPG-PR 2015** A senha de um cofre é obtida permutando-se os algarismos 11233455. Se N é o número máximo de tentativas que se pode realizar para acertar a senha, assinale o que for correto.

**01** N é um número divisível por 3.

**02** $N > 5\,000$

**04** N é divisor de 1 000.

**08** N é múltiplo de 7.

Soma: ______

**35. Unicamp-SP 2020** Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a:
- a) 48.
- b) 72.
- c) 96.
- d) 120

**36. UEMG 2019** Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila.

Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos.
- a) $8!$
- b) $5! \cdot 3!$
- c) $6! \cdot 3!$
- d) $8! \cdot 3!$

**37. Acafe-SC 2020** Um grupo de seis amigos, sendo dois meninos e quatro meninas, estão comemorando a formatura do Ensino Médio. O fotógrafo solicitou ao grupo que se sentasse em um banco de seis lugares e que os meninos se sentassem nas extremidades do banco. Com essa configuração, o número de maneiras distintas que o grupo pode se sentar é de:

a) 720.
b) 24.
c) 48.
d) 120.

**38. UFMS 2019** O Sr. Asdrúbal se preocupa muito com a segurança na internet, por isso troca mensalmente a senha de seu correio eletrônico. Para não esquecer a senha, ele utiliza o ano de nascimento de seu gato e a palavra *pet* para formar sua senha, totalizando 7 caracteres. No momento de alterar a senha, ele apenas inverte a ordem da palavra e dos números. Sabendo que o gato nasceu no ano de 2009 e que as letras da palavra *pet* são mantidas juntas e nessa mesma ordem, quantas senhas distintas o Sr. Asdrúbal consegue formar?

| P | E | T | 2 | 0 | 0 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|

a) 5 040.
b) 72.
c) 720.
d) 120.
e) 60.

**39. Fuvest-SP** Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas $6! = 720$ “palavras” (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas “palavras” forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª “palavra” começa com:

a) EV.
b) FU.
c) FV.
d) SE.
e) SF.

**40. FGV-SP 2017** Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a:

a) 2 400.
b) 2 444.
c) 6 000.
d) 6 600.
e) 6 660.

**41. Uece 2019** Listando-se, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5, 6 e 7, pode-se afirmar corretamente que, nesta lista, a quantidade de números menores do que 61 573 é:

a) 74.
b) 76.
c) 75.
d) 77.

**42. Fuvest-SP** Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso,

1) a família Sousa quer ocupar um mesmo banco;
2) Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

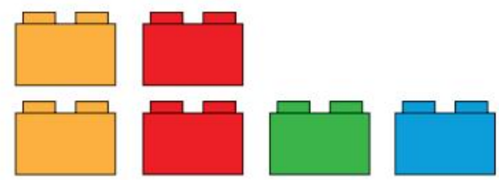
Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros na lotação é igual a:

a) 928.
b) 1 152.
c) 1 828.
d) 2 412.
e) 3 456.

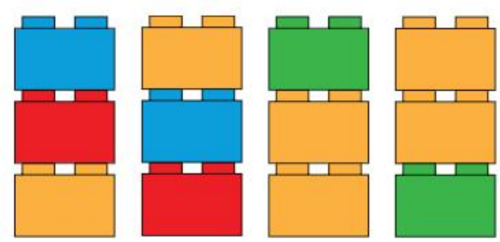
**43. Unisc-RS 2016** Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria. O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 24.
b) 36.
c) 56.
d) 72.
e) 144.

**44. Unesp** Uma criança possui 6 blocos de encaixe, sendo 2 amarelos, 2 vermelhos, 1 verde e 1 azul.



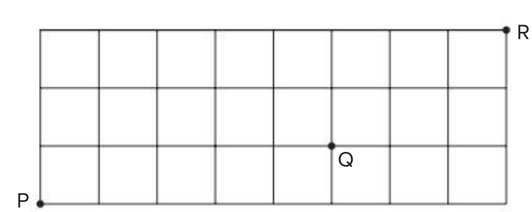
Usando essas peças, é possível fazer diferentes pilhas de três blocos. A seguir, são exemplificadas quatro das pilhas possíveis.



Utilizando os blocos que possui, o total de pilhas diferentes de três blocos, incluindo as exemplificadas, que a criança pode fazer é igual a:

a) 58. b) 20. c) 42. d) 36. e) 72.

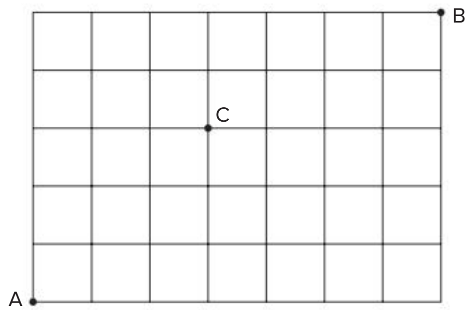
**45. EBMSP-BA 2016** Na figura, a malha é formada por quadrados do mesmo tamanho cujos lados representam ruas de determinado bairro onde o deslocamento de veículos só é permitido no sentido leste ou norte e ao longo das ruas representadas pelas linhas.




Nessas condições, o menor percurso para ir de P até R, sem passar por Q pode ser feito por um número máximo de formas distintas igual a:

a) 105.
b) 75.
c) 54.
d) 36.
e) 15.

**46.** **UFRGS 2020** Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.




O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é:

**a)** 28.
**b)** 35.
**c)** 100.
**d)** 300.
**e)** 792.

**47.** De quantas maneiras diferentes podemos colocar 4 casais sentados ao redor de uma mesa de jantar circular:

**a)** sem nenhuma restrição de posição?
**b)** de modo que cada esposa esteja ao lado do marido?
**c)** tal que os homens estejam juntos?

**48.** Em uma circunferência são marcados 8 pontos distintos. Utilizando esses pontos, determine o número de:

**a)** retas que podemos formar;
**b)** triângulos;
**c)** quadriláteros.

**49.** **Enem PPL 2020** A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:

**a)** 5.
**b)** $5 \cdot 3$.
**c)** $\frac{5!}{(5-3)!}$.
**d)** $\frac{5!}{(5-3)!2!}$.
**e)** $\frac{5!}{(5-3)!3!}$.

**50.** **UFJF/Pism-MG 2018** Em uma festa havia 21 pessoas presentes. Ao chegarem, cumprimentaram com um aperto de mão uma única vez cada uma das outras pessoas. Quantos apertos de mão ocorreram ao todo?

**a)** 42
**b)** 84
**c)** 105
**d)** 210
**e)** 420

**51.** Um torneio é disputado em 66 partidas, com todas as equipes se enfrentando uma única vez. Calcule o número de equipes.

**52.** **Famema-SP 2019** Determinado curso universitário oferece aos alunos 7 disciplinas opcionais, entre elas as disciplinas A e B, que só poderão ser cursadas juntas. Todo aluno desse curso tem que escolher pelo menos uma e no máximo duas disciplinas opcionais por ano. Assim, o número de maneiras distintas de um aluno escolher uma ou mais de uma disciplina opcional para cursar é:

**a)** 18.
**b)** 13.
**c)** 16.
**d)** 11.
**e)** 21.

**53.** **Unicamp-SP 2012** O grêmio estudantil do Colégio Alvorada é composto de 6 alunos e 8 alunas. Na última reunião do grêmio, decidiu-se formar uma comissão de 3 rapazes e 5 moças para a organização das olimpíadas do colégio. De quantos modos diferentes pode-se formar essa comissão?

**a)** 6 720
**b)** 100 800
**c)** 806 400
**d)** 1 120

**54.** Em um grupo de amigos há 6 mulheres e 5 homens. Um grupo de 4 desses amigos deve ser escolhido. Determine:

**a)** o total de grupos distintos que podem ser escolhidos;
**b)** quantos grupos tem exatamente 1 mulher;
**c)** quantos grupos tem exatamente 2 mulheres;
**d)** quantos grupos tem pelo menos 1 mulher.

**55.** **FGV-SP 2020** Dez pessoas, entre elas Gilberto e Laura, pretendem formar uma comissão com quatro membros escolhidos entre os dez.

Quantas comissões são possíveis se Gilberto e Laura podem ou não comparecer, mas nunca juntos na mesma comissão?

**a)** 182
**b)** 45
**c)** 240
**d)** 100
**e)** 70

**56. Enem PPL 2020** O governador de um estado propõe a ampliação de investimentos em segurança no transporte realizado por meio de trens. Um estudo para um projeto de lei prevê que se tenha a presença de três agentes mulheres, distribuídas entre os 6 vagões de uma composição, de forma que duas dessas agentes não estejam em vagões adjacentes, garantindo assim maior segurança aos usuários.

Disponível em: www.sisgraph.com.br. Acesso em: 29 jan. 2015 (adaptado).

A expressão que representa a quantidade de maneiras distintas das três agentes serem distribuídas nos vagões é:

a) $C_4^3 + 3!$.
b) $C_6^3$.
c) $C_4^3 \cdot 3!$.
d) $A_6^3$.
e) $A_4^3 \cdot 3!$.

**57. UEG-GO 2019** Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é:

a) 15 200.
b) 7 600.
c) 3 800.
d) 800.
e) 400.

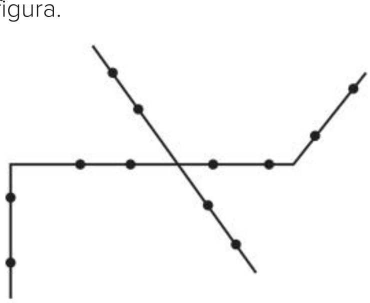
**58. Famerp-SP 2018** Lucas possui 6 livros diferentes e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. O total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita é igual a:

a) 1 040.
b) 684.
c) 980.
d) 1 120.
e) 364.

**59. Unigranrio-RJ** Considere 5 pontos distintos sobre uma reta *r* e 4 pontos distintos sobre uma reta *s*, de forma que *r* seja paralela a *s*. O número de triângulos com vértices nesses pontos é igual a:

a) 10.
b) 12.
c) 20.
d) 50.
e) 70.

**60. Fuvest-SP 2018** Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é:

a) 200.
b) 204.
c) 208.
d) 212.
e) 220.

**61. Enem 2016** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$
b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$
c) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - 2$
d) $\dfrac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$
e) $\dfrac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$

**62. Unesp 2014** Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

**Modelo de folha de resposta (gabarito)**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 01 | X | | | | |
| 02 | | | X | | |
| 03 | | X | | | |
| 04 | | | | X | |
| 05 | X | | | | |
| 06 | | | | | X |
| 07 | | | | X | |
| 08 | | | | | X |
| 09 | | X | | | |
| 10 | | | X | | |

Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será:

a) 302 400.
b) 113 400.
c) 226 800.
d) 181 440.
e) 604 800.

**63. Famerp-SP 2021** Em uma empresa, o número de pessoas atuando na limpeza em cada dia pode variar de 1 a 9, dependendo da ocupação do prédio. Para compor a equipe de cada dia, a empresa conta com 5 funcionários experientes e 4 em treinamento. Sabendo que a equipe de limpeza de um dia deve ter, necessariamente, um funcionário experiente a mais do que a quantidade de funcionários em treinamento, o total de equipes diferentes que podem ser formadas é igual a:

a) 104.
b) 116.
c) 20.
d) 126.
e) 132.

**64. Unesp** Em um jogo lotérico, com 40 dezenas distintas e possíveis de serem escolhidas para aposta, são sorteadas 4 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve acertar todas elas. Se a aposta mínima, em 4 dezenas, custa R$ 2,00, uma aposta em 6 dezenas deve custar:

a) R$ 15,00.
b) R$ 30,00.
c) R$ 35,00.
d) R$ 70,00.
e) R$ 140,00.

**65.** De quantas maneiras podemos separar 9 pessoas em:

a) 2 grupos, um deles com 5 pessoas e o outro com 4 pessoas?
b) 3 grupos com 2, 3 e 4 pessoas?
c) 3 grupos com 3 pessoas em cada um?

**66.** De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bolas, numeradas de 1 a 10, em 3 gavetas com 3 bolas na primeira, 2 bolas na segunda e 5 bolas na terceira?

**67.** De quantos modos diferentes podemos dividir 12 alunos em 4 grupos de 3 alunos em cada um?

**68. FGV-RJ 2016** Em um departamento de uma universidade, trabalham 4 professoras e 4 professores e, entre eles, estão Astreia e Gastão, que são casados. Um grupo de 3 desses professores(as) deverá ir a um congresso, sendo, pelo menos, um homem. Obrigatoriamente, um dos elementos do casal deverá estar no grupo, mas não ambos.
De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá ser organizado?

**69. Uerj 2020** Apenas com os algarismos 2, 4, 5, 6 ou 9, foram escritos todos os números possíveis com cinco algarismos. Cada um desses números foi registrado em um único cartão, como está exemplificado a seguir.

| Cartão A | Cartão B | Cartão C | Cartão D | Cartão E |
|---|---|---|---|---|
| 24644 | 45996 | 66666 | 99696 | 66969 |

Alguns desses cartões podem ser lidos de duas maneiras, como é o caso dos cartões C, D e E. Observe:

| Cartão C | Cartão D | Cartão E |
|---|---|---|
| 99999 | 96966 | 69699 |

O total de cartões que admitem duas leituras é:

a) 32
b) 64
c) 81
d) 120

**70. Enem 2012** O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

*Folha de São Paulo*. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14
b) 18
c) 20
d) 21
e) 23

**71. Insper-SP 2016** Em um programa de televisão que revela novos talentos para a música, cada candidato faz uma breve apresentação para os 4 jurados que, inicialmente, ficam de costas, apenas ouvindo. Durante a apresentação, todos os jurados que gostarem da voz daquele candidato viram-se para ele. Se pelo menos um jurado se virar, o candidato é selecionado. Em certa edição do programa, $n$ candidatos tiveram pelo menos um dos 4 jurados se virando durante sua apresentação. O conjunto de todos os jurados que se viraram, porém, nunca foi o mesmo para dois quaisquer desses $n$ candidatos. Dessa forma, $n$ pode valer, no máximo:

a) 4
b) 6
c) 12
d) 15
e) 24

**72.** João tem em seu celular as 20 músicas que mais gosta de ouvir, sendo 5 de cada um desses em quatro gêneros diferentes: *pop*, *lounge*, *blues* e clássica. Para um momento de descontração ele montou uma *playlist* com 8 das 20 músicas, sendo duas de cada gênero e com as músicas de mesmo gênero tocadas na sequência. Considerando que nessa *playlist* nenhuma das músicas se repetirá e a ordem com que as músicas são tocadas faz diferença, o número possível de *playlists* é:

a) 20.
b) 240.
c) 480.
d) $20^4$.
e) $24 \cdot 20^4$.

# Texto complementar

## Quantidade de soluções inteiras de uma equação

Para dividir 5 bolas numeradas de 1 a 5 em 3 gavetas diferentes, usamos o princípio fundamental da contagem. Como cada bola pode ser colocada em uma das 3 gavetas, temos:

| Bola 1 | | Bola 2 | | Bola 3 | | Bola 4 | | Bola 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | |
| 3 | · | 3 | · | 3 | · | 3 | · | 3 | = | 729 opções |

Trocando a bola 1 da 1ª gaveta com a bola 2 da 2ª gaveta, teremos uma nova disposição dessas bolas.

Mas, e se as bolas forem iguais? Nesse caso, a troca de bolas entre gavetas não iria criar outras opções. O que diferenciaria uma possibilidade de outra seria a quantidade de bolas em cada gaveta e o que permaneceria constante é a soma do número de bolas nas gavetas. Assim, podemos substituir esse problema por: "Quantas soluções inteiras não negativas a equação $x + y + z = 5$ tem?".

Vamos escrever algumas soluções dessa equação e apresentar ao lado uma representação gráfica, que corresponde às bolas nas gavetas.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1, 2, 2) | · | + | · | · | + | · | · |
| (1, 1, 3) | · | + | · | + | · | · | · |
| (3, 0, 2) | · | · | · | + | + | · | · |
| (0, 0, 5) | + | + | · | · | · | · | · |

Nesse esquema, a quantidade de bolas entre os símbolos "+" representa o valor das variáveis *x*, *y* e *z*:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| "valor de *x*" | + | "valor de *y*" | + | "valor de *z*" |

Trocando "•" e "+" de posição, podemos representar todas as soluções da equação.

Das 7 posições (5 posições de "•" e 2 posições de "+"), devemos escolher 2 para colocar os sinais "+" e as demais ficam para "•". Assim, a equação tem $C_{7,2} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ soluções inteiras não negativas.

Também podemos pensar em uma permutação de 7 elementos com 2 "+" repetidos e outros 5 "•" repetidos:

$$P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

Agora, vamos calcular o número de soluções inteiras positivas da equação, ou seja, nenhuma variável pode ser igual a 0 – essa situação corresponde a dividir 5 bolas iguais em 3 gavetas diferentes, sendo que nenhuma das gavetas pode ficar sem bolas.

Desta vez, fixamos os 5 "•" e vamos alternar a posição dos sinais "+" entre eles, como nos exemplos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1, 2, 2) | · | + | · | | · | + | · | | · |
| (1, 1, 3) | · | + | · | + | · | | · | | · |
| (2, 2, 1) | · | | · | + | · | | · | + | · |
| (3, 1, 1) | · | | · | | · | + | · | + | · |

Assim, os sinais "+" devem escolher 2 das 4 posições disponíveis, totalizando $C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ soluções inteiras positivas.

Com base nessa técnica, verifique que a equação $x + y + z + w = 10$ tem:

- $C_{13,3} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$ soluções inteiras não negativas;
- $C_{9,3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ soluções inteiras positivas.

Texto elaborado para fins didáticos.

## Resumindo

**Princípio fundamental da contagem (P.F.C.)**

Dados os conjuntos finitos A e B, a quantidade de maneiras diferentes de escolher 1 elemento de A e 1 elemento de B é dada por:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

**Arranjo**

Dados $n$ elementos distintos, a quantidade de **sequências** de $p$ elementos distintos, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, é dada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Permutação**

Permutação simples: Dados $n$ elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de sequências formadas com todos os elementos é dada por:

$$P_n = n!$$

Permutação com repetição: Dados $n$ elementos, com $k_1$ elementos idênticos entre si, outros $k_2$ elementos idênticos entre si, ..., e $k_j$ elementos idênticos entre si, tais que $n, k_1, k_2, ..., k_j \in \mathbb{N}$ e $k_1 + k_2 + ... + k_j \leqslant n$, a quantidade de sequências formadas com todos os $n$ elementos é dada por:

$$P_n^{k_1, k_2, ..., k_j} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_j!}$$

Permutação circular: Dados $n$ elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}^*$, a quantidade de sequências cíclicas formadas com todos os elementos é dada por:

$$PC_n = \frac{n!}{n}$$

**Combinação**

Dados $n$ elementos distintos, a quantidade de **conjuntos** formados por $p$ desses $n$ elementos, tais que $n, p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, é dada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

### Quer saber mais?

***Site***

Clubes de Matemática da OBMEP. Permutação caótica. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/permutacao-caotica-explorando-o-tema/. Acesso em: 8 fev. 2021.

Além da permutação simples e da permutação com elementos repetidos, estudadas neste capítulo, esse *site* apresenta o conceito de permutação caótica e a fórmula para calcular o número de sequências que podem ser formadas nas quais nenhum dos elementos está na posição original. Esse tipo de permutação é utilizado em *sites* que realizam, por exemplo, sorteio entre um grupo de pessoas para a escolha aleatória numa brincadeira de amigo-secreto.

## Exercícios complementares

**1. Unesp 2015** As urnas 1, 2 e 3 contêm, respectivamente, apenas as letras das palavras OURO, PRATA e BRONZE. Uma a uma são retiradas letras dessas urnas, ordenadamente e de forma cíclica, ou seja, a primeira letra retirada é da urna 1, a segunda é da urna 2, a terceira é da urna 3, a quarta volta a ser da urna 1, a quinta volta a ser da urna 2 e assim sucessivamente. Qual o número mínimo de letras retiradas das urnas dessa maneira até que seja possível formar, com elas, a palavra PRAZER?

**2. ESPM-SP 2017** Em uma classe há 25 alunos. Podemos afirmar, com certeza, que:

**a)** algum aluno faz aniversário em janeiro.
**b)** em algum mês haverá 4 aniversários.
**c)** pelo menos 3 alunos fazem aniversário no mesmo mês.
**d)** pelo menos 2 alunos aniversariam em dezembro.
**e)** no máximo 4 alunos fazem aniversário em um mesmo mês.

**3. FGV-SP 2015** Conforme indica a figura, uma caixa contém 6 letras F azuis e 5 brancas, a outra contém 4 letras G azuis e 7 brancas, e a última caixa contém 6 letras V azuis e 6 brancas.


Em um jogo, uma pessoa vai retirando letras das caixas, uma a uma, até que forme a sigla FGV com todas as letras da mesma cor. A pessoa pode escolher a caixa da qual fará cada retirada, mas só identifica a cor da letra após a retirada. Usando uma estratégia conveniente, o número mínimo de letras que ela deverá retirar para que possa cumprir a tarefa com toda certeza é:

**a)** 14. **b)** 15. **c)** 16. **d)** 17. **e)** 18.

4. **UPF-RS 2017** As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Nessas condições, é correto afirmar que o número máximo de quartos desse hotel é:

a) 18.
b) 27.
c) 90.
d) 108.
e) 216.

5. **UEG-GO 2016** Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é:

a) 64.
b) 24.
c) 12.
d) 4.

6. **UFRGS 2018** Tomando-se os números primos compreendidos entre 0 e 20, o número de frações do tipo $\frac{a}{b}$, em que $a < b$, que pode ser formado é:

a) 21.
b) 27.
c) 28.
d) 30.
e) 36.

7. **FCMMG 2020** Um hospital possui 5 salas de cirurgias eletivas, utilizadas diariamente por 8 médicos cirurgiões. Duas dessas salas destinam-se apenas aos procedimentos ortopédicos, sendo ocupadas, em todos os momentos de funcionamento do hospital, por 1 dos 2 ortopedistas que compõem a equipe.
Em certo momento, o número de possibilidades de organizações para a ocupação das salas é de:

a) 120.
b) 240.
c) 336.
d) 6 720.

8. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 podemos formar números de 3 algarismos distintos. Alguns desses números apresentam os algarismos em ordem crescente, como nos exemplos 145, 246 e 237. Quantos números existem com essa propriedade?

a) 35
b) 82
c) 145
d) 180
e) 210

9. **UEM-PR 2020** Uma escola identifica as cadeiras e as mesas das salas de aula com etiquetas alfanuméricas. A etiqueta de cada cadeira é composta de uma sequência de duas vogais (escolhidas entre as 5 possíveis) e de 4 algarismos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, e 4. A etiqueta de uma mesa, por sua vez, apresenta duas consoantes (escolhidas entre as 10 primeiras consoantes do alfabeto) e 4 algarismos escolhidos entre 5, 6, 7, 8 e 9. Por exemplo, uma possível etiqueta para uma cadeira é AU1302 e uma possível etiqueta para uma mesa é CD6787.

Com base nessas informações e em conhecimentos correlatos, assinale o que for correto.

01 O número de etiquetas distintas possíveis para as mesas é o dobro do número de etiquetas distintas possíveis para as cadeiras.

02 O número de etiquetas distintas possíveis para as mesas, com todas as letras distintas e com todos os algarismos distintos, é igual a $\frac{10!}{8!} + 5!$.

04 O número de etiquetas distintas possíveis para as cadeiras, com todas as letras distintas e com todos os algarismos distintos, é igual a $\frac{(5!)^2}{6}$.

08 O número de etiquetas distintas possíveis para as cadeiras, usando-se apenas as vogais O ou U e com todos os algarismos distintos, é igual a 480.

16 O número de etiquetas distintas possíveis para as mesas, em que os algarismos são todos idênticos, é igual a 500.

Soma: 

10. Dada a equação $x + y + z = 6$, calcule o número de soluções inteiras:

a) não negativas;
b) positivas.

11. **Unesp** Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?

a) 4
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15

12. **FGV-SP 2018** Existe quantidade ilimitada de bolas de três cores diferentes (branca, preta, azul) em um depósito, sendo que as bolas se diferenciam apenas pela cor. Oito dessas bolas serão colocadas em uma caixa. A quantidade de caixas diferentes que podem ser compostas com oito bolas é igual a:

a) $3^2$.
b) 336.
c) 56.
d) 45.
e) 25.

13. Considerando um conjunto com 6 bolas:

a) de quantas maneiras podemos distribuí-las para 3 pessoas considerando as bolas numeradas de 1 a 6?
b) de quantas maneiras podemos distribuí-las para 3 pessoas considerando as bolas iguais?

**14. UFJF/Pism-MG 2014** Quantos são os números de 7 algarismos distintos divisíveis por 5, começando com um algarismo ímpar, e tal que dois algarismos adjacentes não tenham a mesma paridade, isto é, não sejam simultaneamente pares ou simultaneamente ímpares?

a) 20 160
b) 3 600
c) 2 880
d) 1 440
e) 1 200

**15. FGV-SP 2015** O total de números pares não negativos de até quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2 e 3, sem repetir algarismos, é igual a:

a) 26.
b) 27.
c) 28.
d) 29.
e) 30.

**16. UFRGS 2018** Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é:

a) 12.
b) 14.
c) 22.
d) 24.
e) 26.

**17. Uece 2018** A quantidade de números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro é:

a) 1 136
b) 1 114
c) 1 126
d) 1 120

**18. Famema-SP 2017** Uma pessoa dispõe de 5 blocos de papel colorido nas cores azul, amarelo, verde, branco e rosa, sendo cada um deles de uma única cor, e irá utilizar 3 folhas para anotações. O número total de maneiras possíveis de essa pessoa escolher essas 3 folhas, sendo pelo menos 2 delas de uma mesma cor, é:

a) 22.
b) 12.
c) 15.
d) 18.
e) 25.

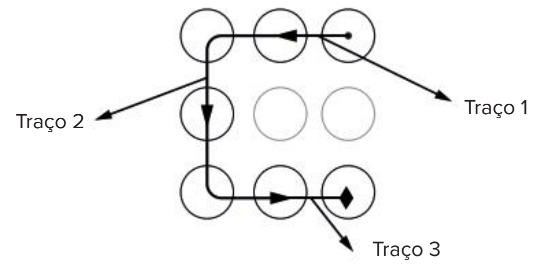
**19. CPII-RJ 2019**

### Senha de desbloqueio de usuários – ligando pontinhos

Os padrões de desbloqueio de alguns sistemas operacionais são muito previsíveis, relata um estudo da Universidade de Ciência e Tecnologia da Noruega. Em particular, as formas usadas para desbloqueio usando o liga pontinhos podem ser tão fáceis de descobrir quanto as senhas clássicas “1234”, “0000”, “9999” etc.

Disponível em: https://www.techtudo.com.br. Acesso em: 3 ago. 2019.

Suponha que um usuário queira dificultar o acesso ao seu celular criando um código a partir dos 9 pontos que aparecem na tela inicial do seu aparelho. Para isso, precisa montar uma sequência de três traços, com exatamente três pontos alinhados em cada um, que não tenham dois pontos em comum. Além disso, ao representar o código na tela inicial do celular, o usuário não pode tirar o dedo da tela, do primeiro ao último ponto. Veja o exemplo a seguir:




O número de códigos possíveis que esse usuário pode criar é

a) 16.
b) 24.
c) 32.
d) 48.

**20. Uece 2019** Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?

a) 136.
b) 200.
c) 176.
d) 194.

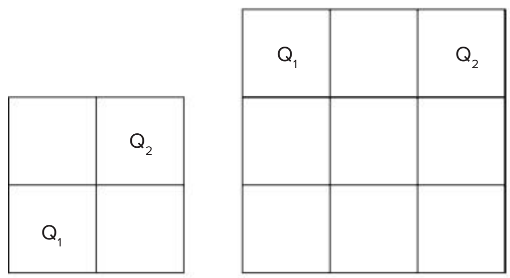
**21. Enem 2015** Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

| Quesitos | Fantasia e Alegoria | | Evolução e Conjunto | | Enredo e Harmonia | | Bateria | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jurado | A | B | A | B | A | B | A | B | |
| Escola I | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 8 | | 55 |
| Escola II | 9 | 8 | 10 | 9 | 10 | 10 | 10 | | 66 |
| Escola III | 8 | 8 | 7 | 8 | 6 | 7 | 6 | | 50 |
| Escola IV | 9 | 10 | 10 | 10 | 9 | 10 | 10 | | 68 |
| Escola V | 8 | 7 | 9 | 8 | 6 | 8 | 8 | | 54 |

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21
b) 90
c) 750
d) 1 250
e) 3 125

**22. Fuvest-SP 2017** Um quadriculado é formado por $n \times n$ quadrados iguais, conforme ilustrado para $n = 2$ e $n = 3$. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados $Q_1$ e $Q_2$ do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de $Q_1$ e chegar a $Q_2$ passando apenas por quadrados pintados de azul.




n = 2 n = 3

**a)** Se $n = 2$, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado $Q_1$ do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado $Q_2$ do canto superior direito?

**b)** Suponha que $n = 3$ e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado $Q_1$ do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado $Q_2$ do canto superior direito?

**c)** Suponha que $n = 3$. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado $Q_1$ do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado $Q_2$ do canto superior direito?

**23. Efomm-RJ 2017** Quantos anagramas é possível formar com a palavra CARAVELAS, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?

**a)** 24
**b)** 10
**c)** 480
**d)** 1 920
**e)** 3 840

**24. EPCar-MG 2018** Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo: 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco.
Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas é igual a:

**a)** 12 600.
**b)** 16 200.
**c)** 21 600.
**d)** 26 100.

**25. IFPE 2018** Os alunos do curso de Computação Gráfica do *campus* Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura:

**a)** menos de 1 minuto.
**b)** menos de 1 hora.
**c)** menos de meia hora.
**d)** menos de 10 minutos.
**e)** mais de 1 hora.

**26. PUC-Rio 2016** Seja *n* a quantidade de anagramas da palavra FILOSOFIA que possuem todas as vogais juntas. O valor de *n* é:

**a)** 1 800
**b)** 3 600
**c)** 4 800
**d)** 181 440
**e)** 362 880

**27. Epcar-MG 2019** No ano de 2017, 22 alunos da Epcar foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep).
Desses alunos, 14 ganharam medalhas, sendo 3 alunos do 3º esquadrão, 9 do 2º esquadrão e 2 do 1º esquadrão. Os demais receberam menção honrosa, sendo 2 alunos do 3º esquadrão, 4 do 2º esquadrão e 2 do 1º esquadrão.
Para homenagear os alunos premiados, fez-se uma fotografia para ser publicada pela Nascentv em uma rede social.
Admitindo-se que, na fotografia, os alunos que receberam menção honrosa ficaram agachados, sempre numa única ordem, sem alteração de posição entre eles, à frente de uma fila na qual se posicionaram os alunos medalhistas, de modo que, nesta fila:

- as duas extremidades foram ocupadas somente por alunos do 2º esquadrão que receberam medalha;
- os alunos do 1º esquadrão, que receberam medalha, ficaram um ao lado do outro; e
- os alunos do 3º esquadrão, que receberam medalha, ficaram, também, um ao lado do outro.

Marque a alternativa que contém o número de fotografias distintas possíveis que poderiam ter sido feitas.

**a)** $(72) \cdot 9!$
**b)** $(144) \cdot 9!$
**c)** $(288) \cdot 9!$
**d)** $(864) \cdot 9!$

**28. Enem 2014** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

**a)** $20 \cdot 8! + (3!)^2$
**b)** $8! \cdot 5! \cdot 3!$
**c)** $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$
**d)** $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$
**e)** $\dfrac{16!}{2^8}$

**29. UFJF/Pism-MG 2019** Em três sofás de dois lugares cada, dispostos em uma fila, deverão se assentar 3 rapazes e 3 moças. Uma expressão que permite calcular a quantidade de maneiras que essas pessoas podem se sentar nesses sofás, de modo que em cada sofá fiquem assentados um rapaz e uma moça, é

a) $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!$.
b) $2! \cdot 2! \cdot 2!$.
c) $3 \cdot 2!$.
d) $6!$.
e) $\frac{6!}{3}$.

**30. Enem 2016** Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta de quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto de vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por:

a) $10^2 \cdot 26^2$.
b) $10^2 \cdot 52^2$.
c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$.
d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.
e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

**31. Fepar-PR 2019**

Padronizar as placas de veículos dos países do Mercosul é notícia desde 2014; o padrão já foi introduzido por Argentina e Uruguai. Apenas agora o Brasil resolveu adotar as novas placas. Entre uma notícia e outra, ainda há pequenas divergências sobre o padrão de letras e números que será adotado nas placas aqui no País.

A revista *Quatro Rodas* informa que "antes com três letras e quatro números, a placa inverterá essa ordem e possuirá quatro letras e três números, dispostos agora de forma aleatória, com o último caractere sendo sempre numérico, para não interferir nos rodízios municipais. Contudo, a combinação continuará em alto relevo e será refletiva."

Tanto no sistema de emplacamento atual quanto no sistema do Mercosul, são utilizadas as 26 letras de nosso alfabeto e os 10 algarismos do sistema de numeração decimal, considerando ainda repetição de letras e algarismos.

(Adaptado do disponível em: quatrorodas.abril.com.br/noticias. Acesso em: 20 maio 2018).


Baseando-se nessas informações e lembrando que o padrão de placas atual leva três letras e quatro números (nessa ordem), avalie as sentenças a seguir.

- ☐ Levando em conta a disposição de números e letras, existem $26^3 \cdot 9\,999$ possibilidades de placas atualmente, considerando-se que placas com numeração 0000 não são utilizadas.
- ☐ A mudança no modelo de placa resultará em um aumento de 26 vezes na quantidade de placas possíveis.
- ☐ Com a nova mudança, as configurações de placas possíveis será mais do que o dobro e menos do que o triplo do modelo antigo.
- ☐ No novo modelo de placas a ser adotado no Brasil, existem $26^4 \cdot 10^3$ configurações possíveis.
- ☐ No sistema de placas do Mercosul, não levando em conta os rodízios municipais e utilizando-se somente as letras e os números da placa ABCD123, podem-se formar 5 040 placas, considerando todas as permutações simples possíveis.

**32.** **Unifesp** As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

a) PROVA.
b) VAPOR.
c) RAPOV.
d) ROVAP.
e) RAOPV.

**33.** **Mackenzie-SP 2018** Se somarmos todos os números obtidos, permutando-se os algarismos em 1234 o resultado obtido é igual a:

a) 54 320.
b) 55 990.
c) 59 660.
d) 66 660.
e) 69 960.

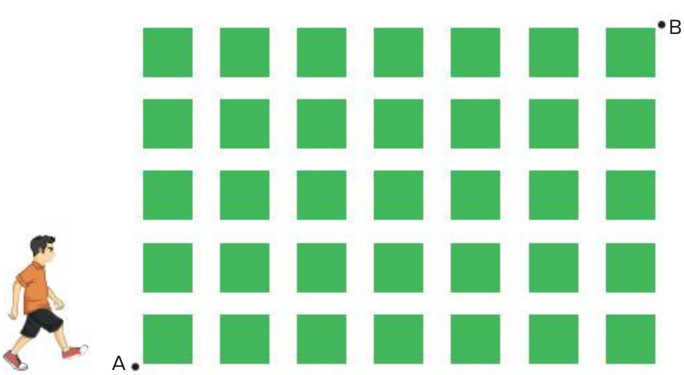
**34.** **Uece 2020** Se forem listados, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos distintos obtidos com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, é correto dizer que o número 62 437 ocupa a posição (ordem) de número:

a) 75.
b) 73.
c) 77.
d) 71.

**35.** **UPE 2015** A vendedora de roupas está arrumando os cabides da vitrine de uma loja. Ela deve pendurar 5 camisas, 3 bermudas e 2 casacos na vitrine, de modo que cada peça fique uma do lado da outra sem sobreposição. Quantas são as disposições possíveis nessa arrumação, de modo que as peças de um mesmo tipo fiquem sempre juntas, lado a lado na vitrine?

a) 30
b) 120
c) 1 440
d) 4 320
e) 8 640

**36.** **Unesp** A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade.




Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B é:

a) 95 040.
b) 40 635.
c) 924.
d) 792.
e) 35.

**37.** **Epcar-MG 2016** Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração. A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é:

a) $8 \cdot 7!$.
b) $7!$.
c) $5 \cdot 4!$.
d) $10!$.

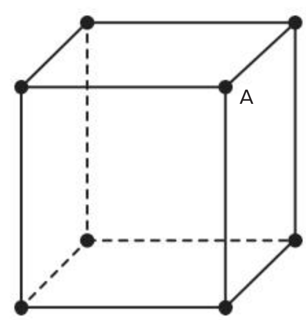
**38.** **Uece 2017** O número de cordas determinadas por 12 pontos distintos colocados sobre uma circunferência é:

a) 54.
b) 66.
c) 72.
d) 78.

**39.** **IFPE 2020** Um professor do curso de Redes de Computadores do IFPE *Campus* Palmares realizará um trabalho sobre 11 tipos de redes de computadores. Considerando que cada aluno falará sobre 2 (dois) tipos, quantos alunos, no mínimo, estão matriculados nesta turma?

a) 11
b) 22
c) 110
d) 40
e) 55

**40.** **PUC-RS** O número de triângulos que podem ser formados unindo o vértice A a dois dos demais vértices do paralelepípedo é:




a) 15.
b) 18.
c) 21.
d) 24.
e) 27.

**41.** **Enem 2017** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

| Quantidade de jogadores | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de partidas | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

**42. ESPM-RJ 2017** Em uma competição de vôlei de praia participaram *n* duplas. Ao final, todos os adversários se cumprimentaram uma única vez com apertos de mãos. Sabendo-se que foram contados 180 apertos de mãos, podemos concluir que *n* é igual a:

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.
e) 12.

**43. Enem 2018** O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

a) $A_{10}^{4}$.
b) $C_{10}^{4}$.
c) $C_4^2 \cdot C_6^2 \cdot 2 \cdot 2$.
d) $A_4^2 \cdot A_6^2 \cdot 2 \cdot 2$.
e) $C_4^2 \cdot C_6^2$.

**44. EsPCEx-SP 2020** O Sargento encarregado de organizar as escalas de missão de certa organização militar deve escalar uma comitiva composta de um capitão, dois tenentes e dois sargentos. Estão aptos para serem escalados três capitães, cinco tenentes e sete sargentos. O número de comitivas distintas que se pode obter com esses militares é igual a:

a) 630.
b) 570.
c) 315.
d) 285.
e) 210.

**45. Efomm-RJ 2019** De quantas maneiras diferentes podemos escolher seis pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, de um grupo composto de sete homens e quatro mulheres?

a) 210
b) 250
c) 371
d) 462
e) 756

**46. UEPG-PR 2018** Um grupo de profissionais é formado por seis advogados e oito engenheiros. Considerando que serão formadas comissões com cinco destes profissionais, assinale o que for correto.

01 Podem ser formadas menos que 55 comissões sem nenhum advogado.
02 Em 420 dessas comissões apenas um advogado participa.
04 Em 1946 dessas comissões pelo menos um advogado participa.
08 Podem ser formadas 120 comissões com apenas um engenheiro.
16 Podem ser formadas mais de duas mil comissões distintas.

Soma:

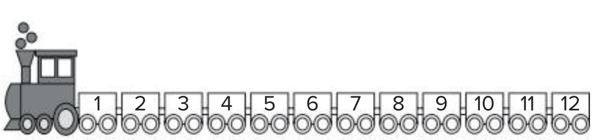
**47. UEL-PR** O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos entre 1 e 60. Um apostador escolhe 20 números distintos e faz todos os $C_{20,\,6}$ jogos possíveis de serem realizados com os 20 números. Se ele acertar os seis números sorteados, entre os vinte escolhidos, além da aposta sorteada com a sena, quantas apostas premiadas com a quina (cinco números corretos) ele conseguirá?

a) 75
b) 84
c) $C_{20,\,5}$
d) $C_{6,\,5}$
e) 70

**48. Udesc 2017** Uma loja de material para pintura fabrica tintas de cores personalizadas, usando uma máquina que mistura até 3 cores iniciais em proporções que podem ser ajustadas de 20% em 20%. Sabendo que há 4 cores iniciais para se escolher, o número de cores que podem ser oferecidas, incluindo as iniciais puras, é:

a) 48.
b) 52.
c) 28.
d) 44.
e) 76.

**49. Enem 2019** Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

a) $C_{12}^{4} \cdot C_{12}^{3} \cdot C_{12}^{3} \cdot C_{12}^{2}$.

b) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$.

c) $C_{12}^{4} \cdot 2 \cdot C_{8}^{3} \cdot C_{5}^{2}$.

d) $C_{12}^{4} \cdot 2 \cdot C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$.

e) $C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{3} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{2}^{2}$.

**50. PUC-Rio 2017** O técnico da seleção brasileira de futebol precisa convocar mais 4 jogadores, dentre os quais exatamente um deve ser goleiro. Sabendo que na sua lista de possibilidades para essa convocação existem 15 nomes, dos quais 3 são goleiros, qual é o número de maneiras possíveis de ele escolher os 4 jogadores?

a) 220
b) 660
c) 1 980
d) 3 960
e) 7 920

**51. UPE/SSA 2018** A turma de espanhol de uma escola é composta de 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?

a) 6 840
b) 6 732
c) 4 896
d) 1 836
e) 1 122

**52. IFCE 2019** Cada banca de um determinado concurso é constituída de 3 examinadores, dos quais 1 é o presidente. Duas bancas são iguais somente se tiverem os mesmos membros e o mesmo presidente. Dispondo de 20 examinadores, a quantidade de bancas diferentes que podem ser formadas é:

a) 800.
b) 1 140.
c) 6 840.
d) 600.
e) 3 420.

**53. EsPCEx-SP 2019** Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é:

a) 168.
b) 196.
c) 224.
d) 227.
e) 231.

**54. Uece 2015** Um conjunto X é formado por exatamente seis números reais positivos e seis números reais negativos. De quantas formas diferentes podemos escolher quatro elementos de X, de modo que o produto destes elementos seja um número positivo?

a) 245
b) 225
c) 235
d) 255

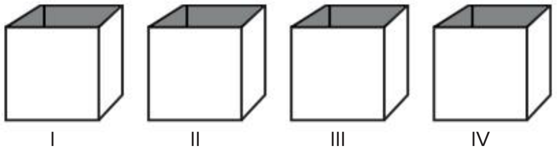
**55. EBMSP-BA 2017** Cada uma das 12 pessoas inscritas para participar de um trabalho voluntário recebeu um crachá com um número de identificação distinto (de 1 a 12) de acordo com a ordem de inscrição. Desejando-se organizar grupos formados por três pessoas que não estejam identificadas por três números consecutivos, o número máximo possível de grupos distintos que se pode formar é:

a) 230.
b) 225.
c) 220.
d) 215.
e) 210.

**56. Unifesp** O corpo clínico da pediatria de um certo hospital é composto de 12 profissionais, dos quais 3 são capacitados para atuação junto a crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de 3 profissionais, de tal maneira que 1 deles, pelo menos, tenha a capacitação referida. Quantas comissões distintas podem ser formadas nestas condições?

a) 792
b) 494
c) 369
d) 136
e) 108

**57. EPCar-MG 2014** Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:




O número de maneiras de Sr. José guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa não contenha mais do que duas bolas, é igual a:

a) 24.
b) 36.
c) 144.
d) 204.

FRENTE 1

**58. Uerj 2019** Seis times de futebol disputaram um torneio no qual cada time jogou apenas uma vez contra cada adversário. A regra de pontuação consistia em marcar 0 ponto para o time perdedor, 3 pontos para o vencedor e, no caso de empate, 1 ponto para cada time. A tabela mostra a pontuação final do torneio.

| Times | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pontos | 9 | 6 | 4 | 2 | 6 | 13 |

O número de empates nesse torneio foi igual a:

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.

**59. UEPG-PR** A primeira fase de um campeonato de futebol é disputada por 35 times, divididos em 5 grupos, com 7 times em cada grupo, os quais disputam entre si. Dois times de cada grupo são selecionados para a segunda fase desse mesmo campeonato, num total de 10 times, os quais jogam entre si. Se $p$ é o número de jogos a serem realizados na primeira fase e $q$ o número de jogos a serem realizados na segunda fase, assinale o que for correto.

01 $p > 100$
02 $p - q = 60$
04 $q$ é um múltiplo de 9.
08 $q < 50$

Soma:

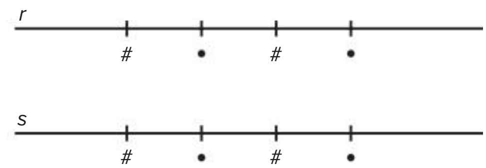
**60. Ifal 2018** Certa lanchonete possui 5 funcionários para atender os clientes durante os dias da semana. Em cada dia, pode trabalhar, no mínimo, 1 funcionário até todos os funcionários. Dentro desse princípio, quantos grupos de trabalho diário podem ser formados?

a) 5.
b) 15.
c) 16.
d) 31.
e) 32.

**61. UPF-RS 2018** Uma equipe esportiva composta de 5 jogadoras está disputando uma partida de dois tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo, podem ser feitas até 3 substituições, e, para isso, o técnico dispõe de 4 jogadoras na reserva. O número de formações distintas que podem iniciar o segundo tempo é:

a) 120.
b) 121.
c) 100.
d) 40.
e) 36.

**62. PUC-RS** Em cada uma das retas paralelas $r$ e $s$, são marcados 4 pontos representados pelos sinais # e ·, como na figura.




Na escolha de 3 desses pontos como vértices de um triângulo, sendo um deles representado por um sinal diferente, o número de triângulos que podem ser determinados é:

a) 48.
b) 46.
c) 44.
d) 42.
e) 40.

**63. Udesc 2016** A Câmara de Vereadores de uma cidade é composta de 13 vereadores, sendo que 6 destes são de partidos políticos da *situação* (aliados ao governo municipal) e os 7 restantes são de partidos da *oposição* (contrários ao governo municipal). É necessário compor uma comissão especial a ser formada por exatamente 5 vereadores, de forma que haja pelo menos dois representantes de cada um destes blocos políticos. Além disso, foi definido que o líder da *situação* e o líder da *oposição* não poderão fazer parte da mesma comissão. Sob essas condições, a quantidade de comissões distintas que pode ser constituída é igual a:

a) 945.
b) 500.
c) 620.
d) 810.
e) 310.

**64. Famema-SP 2020** Em uma classe há 9 alunos, dos quais 3 são meninos e 6 são meninas. Os alunos dessa classe deverão formar 3 grupos com 3 integrantes em cada grupo, de modo que em cada um dos grupos haja um menino. O número de maneiras que esses grupos podem ser formados é:

a) 30.
b) 60.
c) 120.
d) 90.
e) 15.

**65. Mackenzie-SP 2019** Diz-se que um inteiro positivo com 2 ou mais algarismos é "crescente", se cada um desses algarismos, a partir do segundo, for maior que o algarismo que o precede. Por exemplo, o número 134789 é "crescente" enquanto que o número 2435 não é "crescente". Portanto, o número de inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é igual a:

a) 122.
b) 124.
c) 126.
d) 128.
e) 130.

**66. Fuvest-SP** Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

**a)** 360
**b)** 420
**c)** 540
**d)** 600
**e)** 640

**67. Unesp 2019** Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de aniversário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e *tutti frutti*) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa). Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou $x$ centavos, independentemente dos sabores.

**a)** Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?
**b)** Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

**68. ESPM-SP 2019** O número de soluções naturais da equação $2^{x-1} \cdot 2^{y+7} \cdot 2^{z-6} = 32$ é igual a:

**a)** 21.
**b)** 12.
**c)** 15.
**d)** 32.
**e)** 18.

**69. Fuvest-SP (Adapt.)** Seja $n$ um número inteiro, $n \geqslant 0$.

**a)** Calcule de quantas maneiras distintas $n$ bolas idênticas podem ser distribuídas entre Luís e Antônio.
**b)** Calcule de quantas maneiras distintas $n$ bolas idênticas podem ser distribuídas entre Pedro, Luís e Antônio.

**70. Efomm-RJ 2019** Considere uma loja que vende cinco tipos de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar três refrigerantes desta loja?

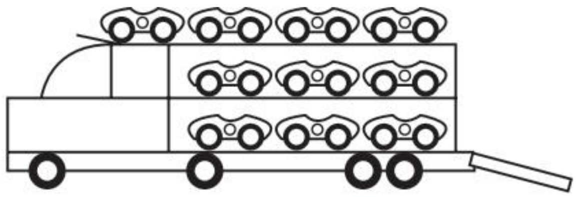
**a)** Dez.
**b)** Quinze.
**c)** Vinte.
**d)** Trinta e cinco.
**e)** Sessenta.

**71. Uefs-BA 2018** Daniela tem 5 pulseiras diferentes e as utiliza necessariamente colocando-as uma após a outra. Ela pode usar todas as pulseiras em apenas um braço ou distribuí-las entre os braços direito e esquerdo. Daniela considera como um arranjo diferente tanto o braço em que as pulseiras são colocadas quanto a ordem como elas são distribuídas. As figuras mostram três arranjos diferentes que Daniela pode fazer.

O número de arranjos diferentes que Daniela pode fazer usando todas essas pulseiras é:

**a)** 240.
**b)** 360.
**c)** 480.
**d)** 600.
**e)** 720.

**72.** **Enem 2017** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,\,4}$
b) $C_{9,\,3}$
c) $C_{10,\,4}$
d) $86^4$
e) $4^6$

## BNCC em foco

EM13MAT310

**1.** No saguão de um cinema, 8 pessoas estão aguardando a chamada do filme que irão assistir. Entre essas pessoas estão 3 amigos. Quando derem o aviso, uma fila deve ser formada para que todos entrem de maneira organizada. Quantas filas diferentes podem ser formadas com os 3 amigos juntos?

a) 2160
b) 3210
c) 4320
d) 6420

EM13MAT310

**2.** Em uma confraternização de fim de ano com 15 pessoas presentes, todos irão trocar abraços ao final da festa. Sabendo que cada pessoa abraça a outra exatamente uma vez, que todos os abraços são realizados em duplas (não há abraços coletivos) e que cada abraço dura 3 segundos, quanto tempo levará para que todos possam se abraçar?

a) Menos de 5 minutos e 30 segundos.
b) Exatamente 5 minutos e 30 segundos.
c) Exatamente 5 minutos e 45 segundos.
d) Mais de 6 minutos.

EM13MAT310

**3.** Um grupo de 7 crianças adora fazer uma brincadeira de roda. Sabendo que todas essas crianças se encontram exatamente 3 vezes por semana para brincar, e que a cada encontro elas modificam as posições em que cada uma se coloca na roda, por quanto tempo elas poderão continuar a brincadeira sem repetir as formações usadas anteriormente?

a) Menos de 2 anos.
b) Entre 2 anos e 3 anos.
c) Entre 3 anos e 4 anos.
d) Mais de 4 anos.


FRENTE 2

CAPÍTULO

7

# Noções de Estatística

A Estatística é a ciência que coleta, organiza, interpreta, analisa e representa dados de pesquisas. Além disso, possui ferramentas que facilitam esses processos e, quando corretamente aplicadas, são capazes de extrair informações a partir dos dados coletados. Assim, é possível criar escalas de tendências e dispersões que permitem, a partir da interpretação de ocorrências anteriores, inferir na tomada de decisões a respeito de acontecimentos futuros.

## Introdução

Vários povos, desde a Antiguidade, registravam o número de membros, nascimentos e óbitos e estimavam riquezas para cobrar impostos. Processos como esses fazem parte da Estatística.

A Estatística organiza e descreve os dados coletados, analisando-os e interpretando-os.

Neste capítulo utilizaremos técnicas estatísticas aplicadas em situações de diversas áreas de conhecimento que envolvem análise e coleta de dados.

## População e amostra

O conjunto de elementos ou pessoas que serão analisados em uma pesquisa estatística é denominado **população** (ou universo estatístico).

Nem sempre é possível coletar os dados de todos os elementos de uma população devido a questões logísticas, econômicas, de tempo etc. Por esse motivo, é selecionada uma parte (ou subconjunto) da população que se deseja estudar, denominada **amostra**.

Por exemplo: para avaliar uma campanha de vacinação em uma cidade, 150 pessoas foram entrevistadas.

- População: todos os habitantes da cidade;
- Amostra: 150 habitantes da cidade.

## Variáveis estatísticas

Um fenômeno estatístico é qualquer evento que se pretenda analisar em que seja possível a aplicação do método estatístico. Ele está em correspondência com o número de resultados possíveis de ser apresentado. Por exemplo:

- No fenômeno "elementos da natureza", são quatro os possíveis resultados: água, ar, terra e fogo;
- No fenômeno "países que falam português", tem-se muitos resultados possíveis: Brasil, Cabo Verde, Angola, Moçambique, Portugal, entre outros.

Chama-se **variável** o conjunto de resultados possíveis de um fenômeno. As variáveis podem ser quantitativas ou qualitativas.

### Variáveis qualitativas

São aquelas cujos valores são expressos por tipos ou atributos, por exemplo, profissão, raça, sexo, cor dos olhos, nacionalidade etc.

### Variáveis quantitativas

Os valores indicam quantidade e são expressos por números, por exemplo: idade dos alunos de uma classe, estatura das pessoas de um grupo, salários dos funcionários de uma empresa.

As variáveis quantitativas podem ser discretas ou contínuas.

#### Variáveis discretas

São aquelas cujos valores possuem características mensuráveis que podem assumir apenas um número finito ou infinito contável de valores e, assim, somente fazem sentido valores inteiros. Em geral, são o resultado de contagens. Por exemplo: o número de alunos de uma escola.

#### Variáveis contínuas

Possuem características mensuráveis de tal maneira que valores fracionados fazem sentido. Usualmente devem ser medidas por meio de algum instrumento. Exemplos: peso, altura, tempo, pressão arterial etc.

De modo geral, as medições estão relacionadas com as variáveis contínuas e as enumerações com as variáveis discretas.

### Organização dos dados

A Estatística tem como objetivo fornecer métodos para a coleta de dados e auxiliar na precisa interpretação destes. Assim, esses dados (informações) fornecidos devem ser organizados inicialmente.

Antes de organizar os dados, é preciso seguir as seguintes etapas:

1ª) Definir o problema.

Saiba exatamente aquilo que se pretende pesquisar.

2ª) Planejar.

Quais informações devem ser obtidas? Como obter essas informações?

3ª) Coletar dados.

Registre aquilo que realmente interessa na questão.

Ao final desse processo, agrupe os resultados e faça uma tabulação.

#### Dados brutos

São os dados coletados por uma pesquisa ou por um estudo que ainda não foram organizados de acordo com seus valores numéricos.

Por exemplo, uma pesquisa feita com 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio a respeito de suas alturas mostrou, em cm, os seguintes resultados:

171, 164, 170, 172, 161, 160, 170, 167, 158, 152,
163, 168, 170, 161, 175, 174, 169, 162, 173 e 166

#### Rol

É a organização dos dados por uma ordenança de valores, sejam eles crescentes ou decrescentes, facilitando assim que o maior e o menor valor, bem como a amplitude, possam ser melhor visualizados.

Do exemplo anterior, temos:

Rol: 152, 158, 160, 161, 161, 162, 163, 164, 166, 167,
168, 169, 170, 170, 170, 171, 172, 173, 174 e 175.

**! Atenção**

Essas informações podem aparecer em forma de tabelas, o que facilitará a obtenção de medidas estatísticas como a amplitude.

#### Amplitude

A amplitude de uma amostra é calculada pela diferença entre o maior e o menor dado da amostra.

No exemplo anterior, temos a seguinte amplitude:

$$175 - 152 = 23$$

**Saiba mais**

Os dados da pesquisa anterior são as alturas. A altura de cada aluno é uma classe e, como cada classe possui apenas um dado, elas são chamadas classes unitárias.

## Apresentação de dados

Uma simples observação dos dados não possibilita explicar ou concluir com precisão o comportamento das variáveis em estudo.

Após identificar a natureza dos dados brutos e classificá-los, organizando-os em um rol, cabe agora apresentá-los em uma tabela.

## Tabela de distribuição de frequências

A partir dos dados brutos, podemos construir uma tabela com o resumo das informações de cada variável, denominada tabela de distribuição de frequências (ou tabela de frequências).

A contagem dos valores de uma determinada variável é denominada **frequência absoluta**.

Em alguns casos se faz necessário conhecer a razão entre a frequência absoluta e o total de dados da variável. A essa razão damos o nome de **frequência relativa**, que estudaremos a seguir.

### Frequência relativa

A frequência relativa é a razão entre o número de valores dentro do intervalo e o número total de valores da variável.

Exemplo 1:

Considere que, em uma avenida com vários semáforos, funcionam somente o vermelho e o verde durante 20 segundos cada um. Um carro atravessa 10 semáforos num primeiro dia e encontra 7 deles verdes (abertos). Dizemos que a frequência relativa $f_1$ correspondente à ocorrência de sinais verdes é $f_1 = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

No dia seguinte, o mesmo carro passou por 16 semáforos e encontrou 10 verdes (abertos). A frequência relativa $f_2$, correspondente à ocorrência de sinais verdes, é dada por $f_2 = \frac{10}{16} = 0{,}625$.

No terceiro dia, o mesmo carro passou por 20 semáforos e encontrou 11 verdes (abertos). A frequência relativa $f_3$, correspondente à ocorrência de sinais verdes é dada por $f_3 = \frac{11}{20} = 0{,}55$.

Assim, à medida que o número de passagens por semáforos aumenta, espera-se que, o semáforo não estando desregulado (no caso, o vermelho e o verde permanecendo abertos 20 segundos cada), a frequência relativa de ocorrência de sinal verde se estabilize em torno de 0,5 ou 50%.

Esse valor é a probabilidade de se pegar o sinal aberto ou fechado.

Exemplo 2:

Uma empresa aberta há 12 anos possui hoje 250 funcionários que foram contratados ao longo de sua existência. O "tempo de casa", tempo que cada funcionário trabalha na empresa, está indicado na tabela a seguir.

**Tempo de casa dos funcionários**

| Tempo de casa | Frequência absoluta | Frequência relativa | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | $\frac{5}{250} = 0{,}02$ | 2% |
| 1 | 8 | $\frac{8}{250} = 0{,}032$ | 3,2% |
| 2 | 9 | $\frac{9}{250} = 0{,}036$ | 3,6% |
| 3 | 10 | $\frac{10}{250} = 0{,}04$ | 4% |
| 4 | 10 | $\frac{10}{250} = 0{,}04$ | 4% |
| 5 | 15 | $\frac{15}{250} = 0{,}06$ | 6% |
| 6 | 20 | $\frac{20}{250} = 0{,}08$ | 8% |
| 7 | 25 | $\frac{25}{250} = 0{,}1$ | 10% |
| 8 | 30 | $\frac{30}{250} = 0{,}12$ | 12% |
| 9 | 40 | $\frac{40}{250} = 0{,}16$ | 16% |
| 10 | 60 | $\frac{60}{250} = 0{,}24$ | 24% |
| 11 | 8 | $\frac{8}{250} = 0{,}032$ | 3,2% |
| 12 | 10 | $\frac{10}{250} = 0{,}04$ | 4% |
| TOTAL | 250 | $\frac{250}{250} = 1$ | 100% |

Dados fictícios

Para a variável "tempo" (em anos completos), os valores estão distribuídos nos intervalos de 0 a 12 anos.

É possível construir uma tabela de frequência onde os dados serão agrupados em classes.

**Tempo de casa dos funcionários**

| Tempo (em anos) | Frequência absoluta (Fa) | Frequência relativa (Fr) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| $0 \vdash 3$ | 22 | $\frac{22}{250} = 0{,}088$ | 8,8% |
| $3 \vdash 6$ | 35 | $\frac{35}{250} = 0{,}14$ | 14% |
| $6 \vdash 9$ | 75 | $\frac{75}{250} = 0{,}3$ | 30% |
| $9 \vdash\!\dashv 12$ | 118 | $\frac{118}{250} = 0{,}472$ | 47,2% |
| Total | 250 | $\frac{250}{250} = 1$ | 100% |

Dados fictícios

**Saiba mais**

1) A notação $a \vdash b$ é referente ao intervalo real $[a, b[$, onde $a$ está incluso e $b$ está excluso, ou seja:

$$a \vdash b = \{x \in \mathbb{R} / a \leqslant x < b\}$$

2) A amplitude de uma classe $a \vdash b$ é a diferença $b - a$. No exemplo anterior, a amplitude de cada classe é $3 - 0 = 3$, e a amplitude total é $12 - 0 = 12$.

## Gráficos estatísticos

Os gráficos têm como finalidade simplificar, ou seja, apresentar informações de maneira a facilitar a leitura e interpretação. Alguns tipos de gráfico são tão simples de ler e interpretar que se tornaram extremamente populares.

A maioria dos gráficos deriva do plano cartesiano; porém, eles só começaram a ser usados fora da Matemática mais de um século após a morte de René Descartes (1596-1650).

Foi graças à popularização dos gráficos por meio da imprensa que, a partir do século XIX, muitas pessoas aprenderam de maneira autônoma, sem qualquer aprendizado formal nesse sentido, a interpretar gráficos.

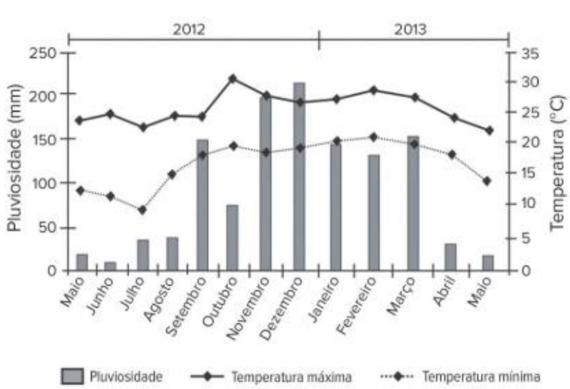
Veja a seguir algumas questões de vestibular que utilizam gráficos em seus enunciados ou alternativas.

## Exercícios resolvidos

**1. Enem 2016** O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.




Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara. O mês escolhido para o plantio foi

**a)** janeiro.
**b)** fevereiro.
**c)** agosto.
**d)** novembro.
**e)** dezembro.

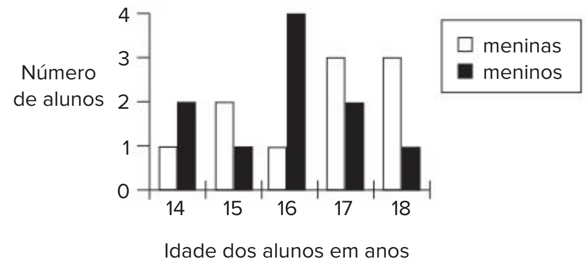
**Resolução:**

Ao analisar o gráfico, observamos que no mês de janeiro tivemos o seguinte comportamento:

- Temperatura mínima maior que 15°;
- Variação de Pluviosidade entre janeiro e fevereiro menor que 50 mm;
- Aumento da temperatura máxima entre janeiro e fevereiro menor que 5°.

Alternativa: **A**

**2. UFSCar-SP** Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte.




Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

**a)** o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades.
**b)** o número total de alunos é 19.
**c)** a média de idade das meninas é 15 anos.
**d)** o número de meninos é igual ao número de meninas.
**e)** o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idade.

**Resolução:**

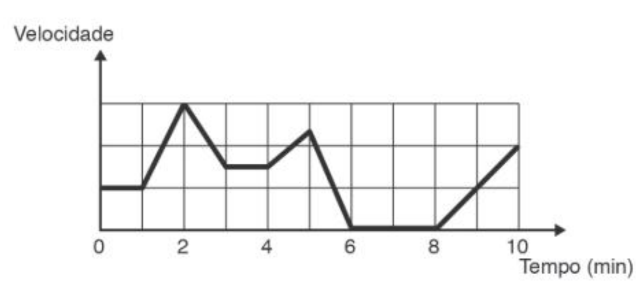
Observando o gráfico, temos:

- Quantidade de meninos: $2 + 1 + 4 + 2 + 1 = 10$;
- Quantidade de meninas: $1 + 2 + 1 + 3 + 3 = 10$.

Portanto, o curso apresenta a mesma quantidade de alunos por sexo, 10 meninos e 10 meninas.

Alternativa: **D**

**3. Enem 2017** Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.




Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

**a)** 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0

**Resolução:**

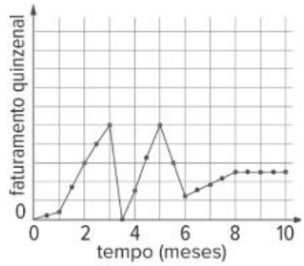
O veículo está imóvel nos instantes em que tem velocidade nula, ou seja, igual a zero.

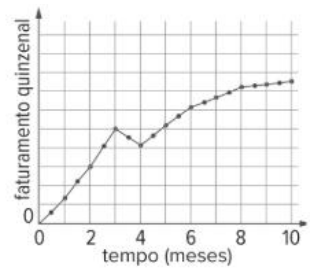
Observando o gráfico, no intervalo entre 6 a 8 minutos, a velocidade é nula e o veículo estava parado.

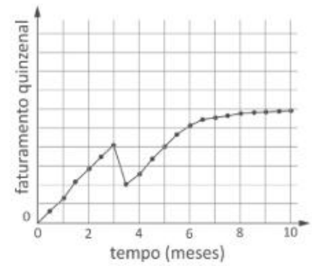
Portanto, ele ficou 2 minutos parado.

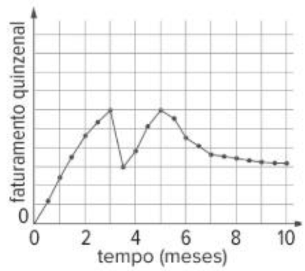
Alternativa: **C**

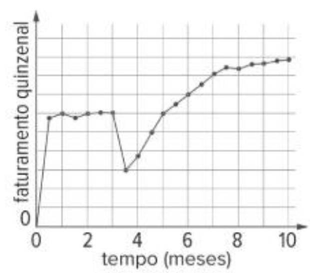
**4. Fuvest-SP 2019** Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: “Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido. Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês”.
Considerando que, na ordenada, o faturamento quinzenal está representado em unidades desconhecidas, porém uniformemente espaçadas, qual dos gráficos é compatível com a descrição do comerciante?

a)



c)



e)



b)



d)



**Resolução:**

O gráfico deve satisfazer às seguintes condições:

- Crescimento mais ou menos constante nos três primeiros meses;
- Queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que havia sido atingido;
- Retorno do crescimento, igualando, um mês e meio depois, o faturamento obtido ao final do terceiro mês;
- Ao final do décimo mês, faturamento estável em patamar, 50% acima do faturamento ao final do terceiro mês.

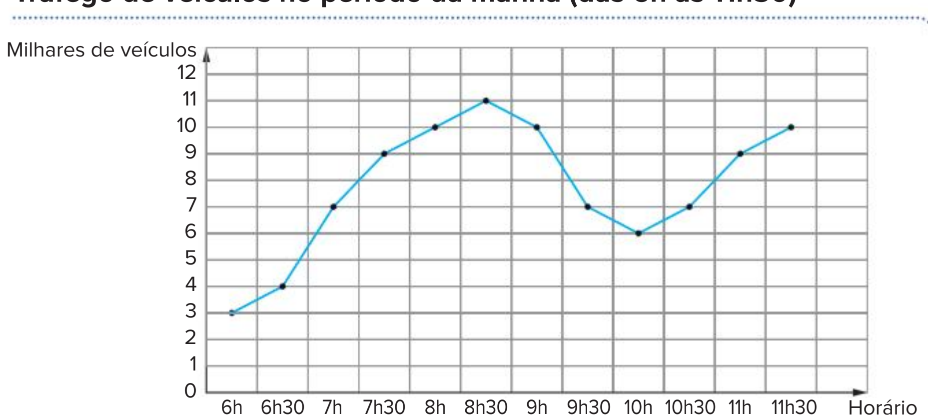
A alternativa que apresenta o gráfico com essas condições é a E.
Alternativa: **E**

## Gráfico de linha

Esse tipo de gráfico é formado por uma linha poligonal que representa uma série estatística. O gráfico em linha pode representar uma aplicação de funções num sistema de coordenadas cartesianas.

Por exemplo, o gráfico a seguir representa o número de veículos que trafegam por uma avenida dentro de um determinado intervalo de tempo.

**Tráfego de veículos no período da manhã (das 6h às 11h30)**



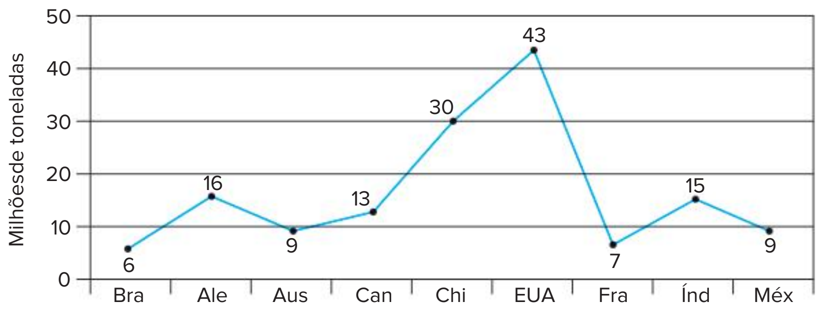

Dados fictícios

Com a simples visualização do gráfico pode-se compreender com clareza um aumento no fluxo de veículos das 6h até 8h30 (quando atinge o maior fluxo).

## Exercício resolvido

**5.** **UFRN** Embora o Brasil tenha uma das maiores jazidas de sal do mundo, sua produção anual em milhões de toneladas ainda é inferior à da Alemanha, da Austrália, do Canadá, da China, dos EUA, da França, da Índia e do México. O gráfico abaixo mostra a produção de sal nesses países, no ano 2000.

**Produção mundial de sal em 2000**




Considerando esses principais países produtores, a melhor aproximação do percentual de participação do Brasil na produção mundial de sal em 2000 foi de:

**a)** 4% **b)** 5% **c)** 6% **d)** 11%

**Resolução:**

A produção dos nove países considerados é, em milhões de toneladas, igual a $6 + 16 + 9 + 13 + 30 + 43 + 7 + 15 + 9 = 148$. Assim, a participação do Brasil nesse cenário é de $\frac{6}{148} \cong 0{,}04$ ou, aproximadamente, 4%.

Alternativa: **A**

## Gráfico de colunas (ou de barras)

Esse tipo de gráfico é formado por retângulos verticais (chamados de colunas) ou horizontais (chamados de barras).

Quando em colunas, os retângulos têm as medidas das bases iguais e as alturas são proporcionais aos respectivos dados, representando assim a frequência, ou a frequência relativa, dentro daquela classe.

As colunas são separadas umas das outras de modo a não implicar continuidade.

Por exemplo, os gráficos a seguir representam a média das notas das provas de uma turma de 3º ano no 1º bimestre letivo.

**Média das notas do 3º ano no 1º bimestre**

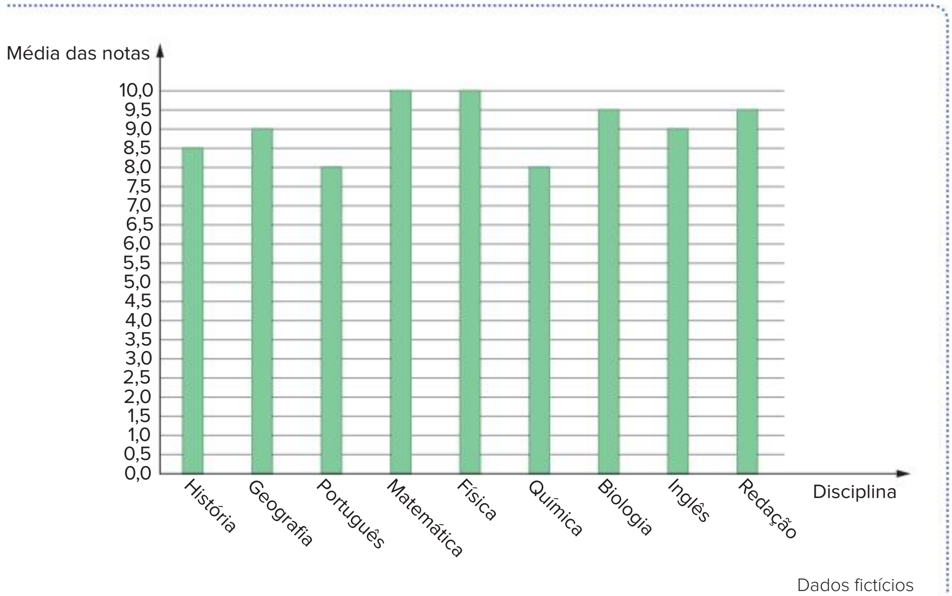



Gráfico de colunas

**Média das notas do 3º ano no 1º bimestre**

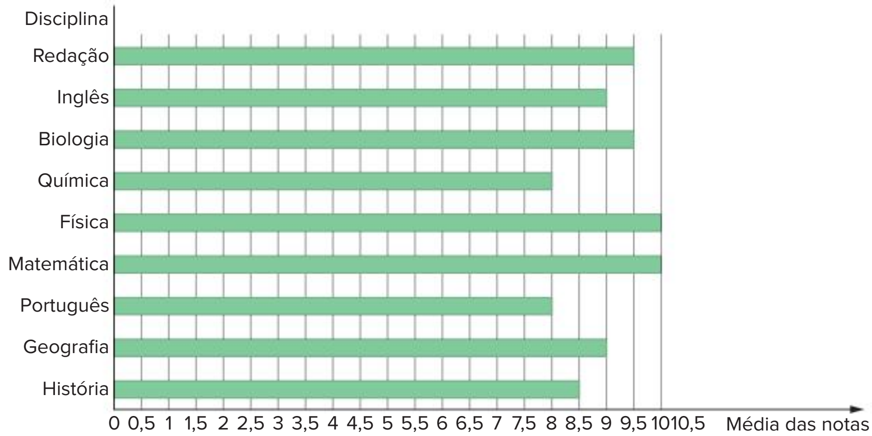



Gráfico de barras

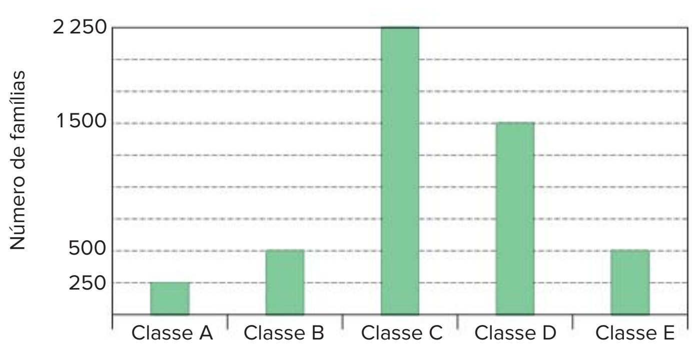
## Exercício resolvido

**6. UFPB** Segundo dados do IBGE, as classes sociais das famílias brasileiras são estabelecidas, de acordo com a faixa de renda mensal total da família, conforme a tabela a seguir.

| Classe | Faixa de Renda |
|---|---|
| A | Acima de R$ 15300,00 |
| B | De R$ 7650,01 até R$ 15300,00 |
| C | De R$ 3060,01 até R$ 7650,00 |
| D | De R$ 1020,01 até R$ 3060,00 |
| E | Até R$ 1020,00 |

Adaptado de: http://www.logisticadescomplicada.com/o-brasil-suas-classes-sociais-e-a-implicacao-na-economia. Acesso em: 18 nov. 2020.

Após um levantamento feito com as famílias de um município, foram obtidos os resultados expressos no gráfico a seguir.




Com base nas informações contidas no gráfico e no quadro, conclui-se que o percentual das famílias que têm renda acima de R$ 3.060,00 é de:

**a)** 45% **b)** 60% **c)** 70% **d)** 85% **e)** 90%

**Resolução:**

Do quadro verificamos que as famílias que têm renda acima de R$ 3.060,00 são as das classes A, B e C; do gráfico verificamos que essas famílias correspondem a um total de: 250 + 500 + 2250 = 3000 famílias.
O total de famílias envolvidas no levantamento foi de: 250 + 500 + 2 250 + 1 500 + 500 = 5000 famílias.
Então, temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} 5\,000 & — & 100\% \\ 3\,000 & — & x \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{5\,000}{3\,000} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{300\,000}{5\,000} = 60\%$$

Alternativa: **B**

FRENTE 2

## Histograma

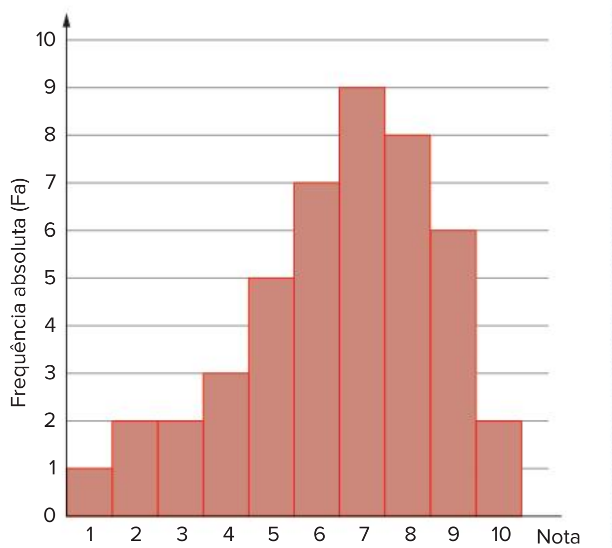
É um tipo de gráfico também formado por retângulos verticais (colunas) que indicam a distribuição de frequências (absoluta, relativa ou porcentagem).

O eixo horizontal é subdividido em intervalos (preferencialmente iguais) e a área de cada retângulo é proporcional aos dados que ele representa.

Geralmente é usado em valores de variáveis quantitativas quando estes se encontram agrupados em intervalos.

Veja, por exemplo, como estão distribuídas as notas de Matemática de um grupo de 45 alunos do 3º ano.

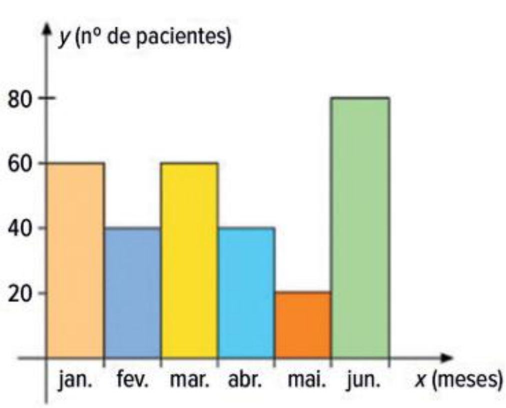
**Notas de Matemática dos alunos do 3º ano**




Dados fictícios

## Exercício resolvido

**7.** **Uerj** O gráfico a seguir representa o número de pacientes atendidos mês a mês, em um ambulatório, durante o período de 6 meses de determinado ano.




Calcule o número total de pacientes atendidos durante o semestre.

a) 300
b) 320
c) 350
d) 400
e) 510

**Resolução:**

Em janeiro foram 60 pacientes atendidos, em fevereiro foram 40, em março, 60, em abril, 40, em maio, 20 e em junho foram 80 atendidos, que totalizam:

$60 + 40 + 60 + 40 + 20 + 80 = 300$

Alternativa: **A**

## Gráfico de setores

Esse tipo de gráfico (também conhecido como gráfico de pizza) é construído a partir de um círculo e é utilizado quando se faz necessário ressaltar a proporção de cada dado em relação ao conjunto total.

O total é representado pelo círculo inteiro e os setores são definidos de forma que suas áreas sejam proporcionais aos dados.

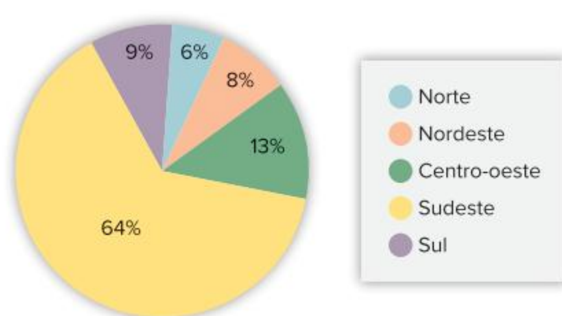
Como exemplo, observe a tabela e o gráfico correspondentes ao percentual de alunos que estudaram na turma ITA do Curso Poliedro de São José dos Campos, em 2021, naturais de algumas regiões brasileiras.

**Percentual de alunos por região**

| Região | Percentual de alunos |
|---|---|
| Norte | 6% |
| Nordeste | 8% |
| Centro-Oeste | 13% |
| Sudeste | 64% |
| Sul | 9% |

Dados fictícios

**Percentual de alunos por região**




Dados fictícios

## Exercício resolvido

**8.** A prefeitura de um pequeno município, após estabelecer metas de consumo, realizou uma pesquisa visando verificar como, de fato, a redução estaria ocorrendo. A pesquisa se restringia a uma única questão:

Sua redução de consumo em relação à meta foi:

( ) maior
( ) igual
( ) menor
( ) não sei

Tabulados os resultados, o seguinte gráfico foi gerado:

**Comparativo consumo de água nas residências**


Dados fictícios

A partir dessas informações, o ângulo do setor que corresponde às respostas "menor" mede:

**a)** 105°
**b)** 120°
**c)** 136°
**d)** 144°
**e)** 155°

**Resolução:**

O total de pesquisados foi: 340 + 300 + 105 + 155 = 900.
A porcentagem correspondente aos 340 que responderam que o consumo foi menor que a meta é igual a:

$$\left.\begin{array}{ccc} 900 & — & 100\% \\ 340 & — & x \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{900}{340} = \frac{100}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{34\,000}{900} = \frac{340}{9}\%$$

Assim, a medida em graus do setor correspondente é:

$$\left.\begin{array}{ccc} 360° & — & 100\% \\ y & — & \frac{340°}{9} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{360°}{y} = y\,\frac{100}{\frac{340}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{122\,400}{900} = 136°$$

Alternativa: **C**

# Medidas de posição ou de tendência central

Vamos estudar os dados que anteriormente analisamos graficamente, com medidas (números) que apontem como estão distribuídos os valores da variável quantitativa em questão.

As medidas de posição (ou de tendência central) são valores que representam, de algum modo, todos os valores de um conjunto de dados. Estudaremos aqui a média, a moda e a mediana.

## Média aritmética

A expressão "em média" é muito frequente em conversas cotidianas e na mídia, e remete ao mais comum e popular conceito de tendência central de distribuição de dados. Esse conceito possibilita a compreensão do entorno em que estão distribuídas as variáveis em questão. Para um melhor entendimento, vamos tomar um exemplo:

A produção leiteira de 11 vacas durante um dia está representada a seguir, em litros.

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

Hennadii H/Shutterstock.com

A média aritmética (representada por $\overline{X}$) é o quociente entre a soma de todos os valores da amostra e o número total de valores:

$$\overline{X} = \frac{15+18+20+20+20+21+23+25+26+26+28}{11}$$

$$\overline{X} = \frac{242}{11} \Rightarrow \overline{X} = 22$$

Nesse caso, como existem elementos com a mesma frequência (animais com a mesma produção leiteira), pode-se calcular a média aritmética ponderada, que nada mais é que, tendo valores iguais em uma amostra, em vez de somarmos um a um esses valores, multiplicamos esse, ou esses valores, pelo número de vezes em que eles aparecem.

A média ponderada é calculada por:

$$\overline{X} = \frac{1\cdot 15+1\cdot 18+3\cdot 20+1\cdot 21+23+1\cdot 25+2\cdot 26+1\cdot 28}{1+1+3+1+1+1+2+1}$$

$$\overline{X} = \frac{242}{11} \Rightarrow \overline{X} = 22$$

Pode-se formalizar os casos como:

1º) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os valores de $n$ variáveis, então:

$$\overline{X} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

2º) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$, os valores de $n$ variáveis com suas respectivas frequências absolutas $k_1, k_2, \dots, k_n$; então:

$$\overline{X} = \frac{a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \dots + a_n \cdot k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot k_i}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

No exemplo dado anteriormente percebe-se que, embora 22 litros mostre "mais ou menos" o entorno em que a produção se distribui, a média não mostra os extremos.

## Mediana

A média aritmética pode ser interpretada de maneira distorcida (influenciada), caso as variáveis se apresentem muito distantes de seu valor. Nesse caso, a média aritmética não é apropriada para a análise em questão.

Para melhor coerência da interpretação e consistência das informações, usamos uma medida de posição mais sólida, a chamada mediana.

A mediana, representada por Md, corresponde ao valor que se localiza exatamente no centro de todas as variáveis quando organizadas em rol (crescente ou decrescente).

Se o rol possuir um número par de variáveis, a mediana será então a média aritmética entre as duas variáveis centrais.

Vamos considerar novamente o exemplo da produção leiteira das 11 vacas.

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

Como os valores já estão em ordem crescente, temos que a mediana é a variável que ocupa a posição central do rol, ou seja, Md = 21.

Pode-se formalizar os casos como:

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os valores de $n$ variáveis:

1º) Se $n$ é ímpar, temos:

$$Md = a_{\left(\frac{1+n}{2}\right)}$$

2º) Se $n$ é par, temos:

$$Md = \frac{a_{\left(\frac{n}{2}\right)} + a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

**Atenção**

1º) Na sequência (9, 11, 12, 14, 19) temos que Md = 12.
2º) Na sequência (9, 11, 12, 14, 19, 20),
$Md = \frac{12 + 14}{2} = 13.$

Podemos observar que a mediana divide o conjunto de variáveis em duas partes com o mesmo número de elementos. Uma parte onde todos os elementos são menores ou iguais à mediana e uma outra parte onde todos os elementos são maiores ou iguais a ela.

## Moda

A moda (representada por Mo) é a variável que aparece com maior frequência absoluta. Novamente utilizando o exemplo da produção leiteira das 11 vacas:

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

Temos que Mo = 20, pois é o valor que aparece o maior número de vezes.

**Atenção**

1º) Na sequência (7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 15) temos duas modas, 8 e 11 e, nesse caso, a sequência é chamada bimodal.
2º) Na sequência (7, 8, 9, 10, 11, 15) não há moda, pois todas as variáveis aparecem com a mesma frequência e, nesse caso, a sequência é chamada amodal.

## Exercício resolvido

**9.** Uma pesquisa mostrou as estaturas, em cm, dos goleiros dos 20 times da Série A do campeonato brasileiro de futebol de 2019. Com base nas informações colhidas e apresentadas na tabela a seguir, calcule a moda, a média e a mediana dessa pesquisa.

### Estatura dos goleiros

| Clube | Jogador | Altura (cm) |
|---|---|---|
| Atlético-MG | Cleiton | 190 |
| Athletico-PR | Aderbar | 188 |
| Avaí | Vladimir | 190 |
| Bahia | Douglas Friedrich | 194 |
| Botafogo | Gatito Fernandez | 191 |
| Ceará | Diogo Silva | 192 |
| Chapecoense | Tiepo | 183 |
| Corinthians | Cássio | 196 |
| Cruzeiro | Fabio | 188 |
| CSA | Jordi | 192 |
| Flamengo | Diego Alves | 188 |
| Fluminense | Muriel | 190 |
| Fortaleza | Felipe Alves | 187 |
| Goiás | Tadeu | 184 |
| Grêmio | Paulo Victor | 187 |
| Internacional | Marcelo Lomba | 188 |
| Palmeiras | Weverton | 189 |
| Santos | Vanderlei | 195 |
| São Paulo | Tiago Volpi | 187 |
| Vasco | Fernando Miguel | 191 |

Dados fictícios.

**Resolução:**

Organizando o rol das alturas obtemos:

183, 184, 187, 187, 187, 188, 188, 188, 188, 189, 190, 190, 190, 191, 191, 192, 192, 194, 195, 196

A moda é Mo = 188 cm, pois é o valor com a maior frequência da sequência (aparece 4 vezes).

A média aritmética é:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 183 + 1 \cdot 184 + 3 \cdot 187 + 4 \cdot 188 + 1 \cdot 189 + 3 \cdot 190 + 2 \cdot 191 + 2 \cdot 192 + 1 \cdot 194 + 1 \cdot 195 + 1 \cdot 196}{1 + 1 + 3 + 4 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1}$$

$$\overline{X} = \frac{183 + 184 + 561 + 752 + 189 + 570 + 382 + 384 + 194 + 195 + 196}{20}$$

$$\overline{X} = \frac{3\,790}{20} = 189{,}5 \text{ cm}$$

Como a sequência tem 20 valores, a mediana é a média entre o 10º e o 11º, logo:

$$\text{Md} = \frac{189 + 190}{2} = \frac{379}{2} = 189{,}5 \text{ cm}$$

Observe que nessa pesquisa a média e a mediana são iguais.

**Saiba mais**

Por ser muito numeroso, a tabela do último exercício resolvido poderia ser apresentada com os valores distribuídos em classes, como mostra a tabela a seguir:

### Estatura dos goleiros

| Classes | Frequência absoluta | Frequência acumulada | Frequência relativa | Porcentagem |
|---|---|---|---|---|
| 183 ⊢ 185 | 2 | 2 | $\frac{2}{20} = 0{,}1$ | 10% |
| 185 ⊢ 187 | 0 | 2 | $\frac{0}{20} = 0$ | 0% |
| 187 ⊢ 189 | 7 | 9 | $\frac{7}{20} = 0{,}35$ | 35% |
| 189 ⊢ 191 | 4 | 13 | $\frac{4}{20} = 0{,}2$ | 20% |
| 191 ⊢ 193 | 4 | 17 | $\frac{4}{20} = 0{,}2$ | 20% |
| 193 ⊢ 195 | 1 | 18 | $\frac{1}{20} = 0{,}05$ | 5% |
| 195 ⊢ 197 | 2 | 20 | $\frac{2}{20} = 0{,}1$ | 10% |

Dados fictícios

Observação: a frequência acumulada corresponde à soma da frequência de uma classe com todas as frequências que a antecedem na distribuição.

## Exercícios resolvidos

**10. Enem 2018** A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.
Os resultados obtidos estão no quadro.

| Número de acidentes sofridos | Número de trabalhadores |
|---|---|
| 0 | 50 |
| 1 | 17 |
| 2 | 15 |
| 3 | 10 |
| 4 | 6 |
| 5 | 2 |

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

a) 0,15.
b) 0,30.
c) 0,50.
d) 1,11.
e) 2,22.

**Resolução:**

A média do número de acidentes por funcionário é igual a:

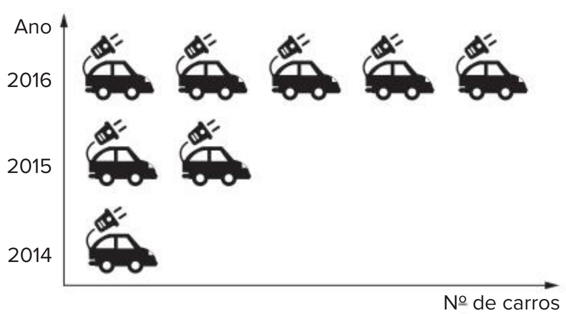
$$\bar{X} = \frac{50 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{50 + 17 + 15 + 10 + 6 + 2} =$$

$$= \frac{0 + 17 + 30 + 30 + 24 + 10}{100} = \frac{111}{100} = 1,11$$

Alternativa: **D**

**11. Enem 2018** De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.




Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de

a) 192.
b) 240.
c) 252.
d) 320.
e) 420.

**Resolução:**

No gráfico apresentado há 3 ícones a mais de 2015 para 2016, logo cada um representa um total de $\frac{360}{3} = 120$ unidades vendidas. Calculando a média dos três anos, temos:

$$\bar{X} = \frac{5 \cdot 120 + 2 \cdot 120 + 1 \cdot 120}{3} = \frac{600 + 240 + 120}{3} =$$

$$= \frac{960}{3} = 320 \text{ unidades/ano}$$

Alternativa: **D**

**12. Enem 2017** O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.


IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

a) 8,1%
b) 8,0%
c) 7,9%
d) 7,7%
e) 7,6%

**Resolução:**

Colocando em ordem crescente os 14 valores apresentados obtemos o seguinte rol:

6,8  7,5  7,6  7,6  7,7  7,9  **7,9**  **8,1**  8,2  8,5  8,5  8,6  8,9  9,0

Como a quantidade de termos é par, então, para obter a mediana, basta fazer a média aritmética dos dois termos centrais.

Logo, a mediana será: $Md = \frac{7,9 + 8,1}{2} = \frac{16,0}{2} = 8,0$.

Alternativa: **B**

## Medidas de dispersão

As medidas de posição vistas até aqui são de extrema relevância, mas em alguns casos podem não ser suficientes para uma análise adequada. Por exemplo, ao calcularmos a velocidade média de um carro em um determinado trajeto podemos encontrar o tempo exato de duração da viagem. Porém, a média pode ser inadequada ao calcularmos o “peso” de um grupo de pessoas, pois pode haver pessoas obesas, por exemplo, jogando a média para cima.

Renda *per capita* é um exemplo de medida duvidosa. Essa medida, que se usa para diferenciar países desenvolvidos ou em desenvolvimento, aponta a produção econômica do país por pessoa, porém mascara as diferenças sociais. Em 2020, por exemplo, a renda *per capita* do Brasil foi R$ 1 380,00. No entanto, isso não significa que todos os brasileiros tiveram um rendimento médio próximo desse valor.

Surge então a necessidade de definir uma medida que nos mostre um grau de variabilidade, de forma que a análise não fique comprometida.

## Desvio

O desvio (representado por $d_i$) é a diferença entre o valor de cada variável do conjunto e a média aritmética desse conjunto.

$$d_i = X_i - \bar{X}$$

Ao valor absoluto do desvio damos o nome de desvio absoluto.

$$dA_i = |X_i - \bar{X}|$$

### Desvio médio

O desvio médio (representado por $\bar{d}$), corresponde à média aritmética dos desvios absolutos.

Sendo $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, $n$ variáveis, temos:

$$\bar{d} = \frac{dA_1 + dA_2 + dA_3 + ... + dA_n}{n}$$

## Variância

A variância indica o grau de variabilidade dos dados que estão sendo estudados e corresponde a quanto os valores observados se distanciam do valor médio.

A variância de uma amostra, representada por V ou $\sigma^2$, é a média aritmética da soma dos quadrados dos desvios.

$$\sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + ... + d_n^2}{n}$$ ou

$$V = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Como exemplo, veja a tabela a seguir, que apresenta as notas de dois alunos durante os quatros bimestres de um ano letivo.

### Nota dos alunos

| Aluno | Francisco | Luiza |
|---|---|---|
| 1º bimestre | 3,0 | 5,0 |
| 2º bimestre | 10,0 | 5,0 |
| 3º bimestre | 9,0 | 8,0 |
| 4º bimestre | 2,0 | 6,0 |
| Média | 6,0 | 6,0 |

Dados fictícios

Podemos perceber claramente que, apesar de ambos apresentarem a mesma média, ela se mostra insuficiente para avaliarmos seus desempenhos. A média pode dar a falsa impressão de que os dois alunos tiveram as mesmas notas ao longo desse ano letivo.

Calculando a variância, podemos verificar que os resultados são bem diferentes.

$$\text{Francisco: } \sigma_F^2 = \frac{(3-6)^2 + (10-6)^2 + (9-6)^2 + (2-6)^2}{4} =$$
$$= \frac{(-3)^2 + 4^2 + 3^2 + (-4)^2}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

$$\text{Luiza: } \sigma_L^2 = \frac{(5-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{4} =$$
$$= \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

### Nota dos alunos

| Aluno | Francisco | Luiza |
|---|---|---|
| 1º bimestre | 3,0 | 5,0 |
| 2º bimestre | 10,0 | 5,0 |
| 3º bimestre | 9,0 | 8,0 |
| 4º bimestre | 2,0 | 6,0 |
| Média | 6,0 | 6,0 |
| Variância | 12,5 | 1,5 |

Dados fictícios

Assim, podemos verificar que a variância de Luiza é muito menor que a de Francisco, o que indica que suas notas têm uma oscilação menor em torno da média.

## Desvio padrão

O desvio padrão de uma amostra, representado por $\sigma$), é dado pela raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + ... + d_n^2}{n}}$$ ou

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

De uma maneira mais simples: $\sigma = \sqrt{V}$.

No exemplo anterior, podemos calcular o desvio padrão das notas de Francisco e Luiza:

$$\sigma_F = \sqrt{12{,}5} \Rightarrow \sigma_F \cong 3{,}5 \text{ e } \sigma_L = \sqrt{1{,}5} \Rightarrow \sigma_L \cong 1{,}2$$

**Saiba mais**

A variância é definida como uma soma de quadrados, dessa forma, se apresenta como uma medida quadrática, ou seja, sua unidade de medida é sempre o quadrado da unidade de medida da variável em estudo. Portanto, ao estudar o peso de um grupo em quilos (kg), a variância apresentará um resultado em "quilos quadrados" ($kg^2$), e é aí que calculamos o desvio padrão (raiz quadrada da variância), que devolve ao resultado estatístico sua unidade original, se apresentando de maneira uniforme e mais compreensível.

## Exercícios resolvidos

**13.** O quadro mostra o número do calçado de 10 pessoas num rol crescente.

| Pessoa | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | $P_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº do calçado | 36 | 37 | 39 | 39 | 40 | 41 | 42 | 42 | 43 | 44 |

Sobre essa sequência de valores, calcule:

a) A média e a amplitude.
b) A moda.
c) A mediana.
d) Cada desvio e o desvio médio.
e) A variância.
f) O desvio padrão.

**Resolução:**

**a)** A média $\overline{X}$ e a amplitude A são:

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 36+1\cdot 37+2\cdot 39+1\cdot 40+1\cdot 41+2\cdot 42+1\cdot 43+1\cdot 44}{1+1+2+1+1+2+1+1}=\frac{403}{10}=40{,}3$$

$$A = 44 - 36 = 8$$

**b)** A sequência é bimodal e as modas são: Mo = 39 e Mo = 42.

**c)** Como o número de termos da sequência é par, a mediana corresponde à média aritmética dos termos centrais.

Assim: $\text{Md}=\frac{40+41}{2}+\frac{81}{2}=40{,}5$ .

**d)** Os desvios são:

$d_1 = 36 - 40{,}3 = -4{,}3$ $\quad d_6 = 41 - 40{,}3 = 0{,}7$
$d_2 = 37 - 40{,}3 = -3{,}3$ $\quad d_7 = 42 - 40{,}3 = 1{,}7$
$d_3 = 39 - 40{,}3 = -1{,}3$ $\quad d_8 = 42 - 40{,}3 = 1{,}7$
$d_4 = 39 - 40{,}3 = -1{,}3$ $\quad d_9 = 43 - 40{,}3 = 2{,}7$
$d_5 = 40 - 40{,}3 = -0{,}3$ $\quad d_{10} = 44 - 40{,}3 = 3{,}7$

O desvio médio $\overline{d}$ é igual a: $\overline{d}=\frac{4{,}3+3{,}3+2\cdot 1{,}3+0{,}3+0{,}7+2\cdot 1{,}7+2{,}7+3{,}7}{10}=\frac{21}{10}=2{,}1$.

**e)** A variância $\sigma^2$ é a média aritmética da soma dos quadrados dos desvios.

$$\sigma^2=\frac{(-4{,}3)^2+(-3{,}3)^2+(-1{,}3)^2+(-1{,}3)^2+(-0{,}3)^2+(0{,}7)^2+(1{,}7)^2+(1{,}7)^2+(2{,}7)^2+(3{,}7)^2}{10}$$

$$\sigma^2=\frac{18{,}49+10{,}89+1{,}69+1{,}69+0{,}09+0{,}49+2{,}89+2{,}89+7{,}29+13{,}69}{10}$$

$$\sigma^2=\frac{60{,}1}{10}=6{,}01$$

**f)** O desvio padrão $\sigma$ é a raiz quadrada da variância, logo: $\sigma=\sqrt{6{,}01}\cong 2{,}45$ .

**14.** Às vésperas de um jogo decisivo, o técnico de uma equipe de basquete deve optar pela escalação de um entre dois jogadores, Guto ou Giovanni. Os quadros a seguir apresentam o desempenho de cada jogador nos últimos cinco jogos em que participaram:

**Guto**

| Jogo | Número de pontos |
|---|---|
| 1 | 20 |
| 2 | 22 |
| 3 | 18 |
| 4 | 20 |
| 5 | 20 |

**Giovanni**

| Jogo | Número de pontos |
|---|---|
| 1 | 30 |
| 2 | 14 |
| 3 | 20 |
| 4 | 12 |
| 5 | 24 |

**a)** Calcule a média de pontos por jogo de cada um deles.
**b)** Calcule o desvio padrão de cada um nesses cinco jogos.
**c)** Você, como técnico desse time, se tivesse que escalar um desses jogadores, num jogo onde a vitória lhe daria o título de campeão, qual deles escalaria?

**Resolução:**

**a)** A média por jogo de cada jogador é:

$$\overline{X}_{Guto} = \frac{20+22+18+20+20}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ pontos} \quad \text{e} \quad \overline{X}_{Giovanni} = \frac{30+14+20+12+24}{5} = \frac{100}{5} = 20 \textit{ pontos}$$

**b)** O desvio padrão de cada um é:

**Guto**

| Desvios | Desvio padrão |
|---|---|
| $d_1 = 20 - 20 = 0$<br>$d_2 = 22 - 20 = 2$<br>$d_3 = 18 - 20 = -2$<br>$d_4 = 20 - 20 = 0$<br>$d_5 = 20 - 20 = 0$ | $\sigma^2 = \frac{0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2}{5} = \frac{0+4+4+0+0}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \Rightarrow \sigma \cong 1{,}27$ |

**Giovanni**

| Desvios | Desvio padrão |
|---|---|
| $d_1 = 30 - 20 = 10$<br>$d_2 = 14 - 20 = -6$<br>$d_3 = 20 - 20 = 0$<br>$d_4 = 12 - 20 = -8$<br>$d_5 = 24 - 20 = 4$ | $\sigma^2 = \frac{10^2 + (-6)^2 + 0^2 + (-8)^2 + 4^2}{5} = \frac{100+36+0+64+16}{5} = \frac{216}{5} = 43{,}2 \Rightarrow \sigma \cong 6{,}57$ |

**c)** O jogador escolhido seria Guto, pois ele apresenta maior regularidade na sua pontuação.

**15. UFPR 2016** Dado um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ com $n$ elementos, definimos a média $\overline{x}$ e o desvio padrão $d$ de X por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad d = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Uma informação útil para quem analisa um conjunto de dados como X é que a maioria desses dados pertence ao intervalo $C = [\overline{x} - 2d, \overline{x} + 2d]$. Sendo $X = \left\{\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3\right\}$ um conjunto de dados:

**a)** Calcule a média $\overline{x}$ e o desvio padrão $d$.
**b)** Verifique quais dados do conjunto X pertencem ao intervalo C.

**Resolução:**

**a)** A média é igual a: $\overline{x} = \dfrac{\frac{5}{2} + 4 + \frac{7}{2} + 3}{4} = \dfrac{\frac{5+8+7+6}{2}}{4} = \dfrac{\frac{26}{2}}{4} = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$.

O desvio padrão é:

$$d = \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{2} - 3{,}25\right)^2 + (4 - 3{,}25)^2 + \left(\frac{7}{2} - 3{,}25\right) + (3 - 3{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(2{,}5 - 3{,}25)^2 + (0{,}75)^2 + (3{,}5 - 3{,}25) + (-0{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(-0{,}75)^2 + (0{,}75)^2 + (0{,}25) + (-0{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{0{,}5625 + 0{,}5625 + 0{,}0625 + 0{,}0625}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{1{,}25}{4}} \cong \frac{1{,}12}{2} \cong 0{,}56$$

FRENTE 2

**b)** O intervalo $C = [\overline{x} - 2d, \overline{x} + 2d]$ equivale ao intervalo real:

$$C = [3{,}25 - 2 \cdot 0{,}56;\ 3{,}25 + 2 \cdot 0{,}56] = [2{,}13;\ 4{,}37]$$

Logo, todos os elementos do conjunto X pertencem ao intervalo C.

**Estabelecendo relações**

Em meio à pandemia mundial da Covid-19, todo conhecimento baseado em análise, interpretação e compreensão do comportamento de números permite que cientistas e gestores com poder de decisão tracem estratégias e atuem visando minimizar os impactos que esse flagelo tem provocado em boa parte da população mundial.

Nesse processo, a Estatística é de fundamental importância para a elaboração de estudos epidemiológicos sobre os padrões de propagação do vírus, a eficácia das medidas de isolamento e dos esquemas de vacinação, entre outros aspectos que precisam ser considerados no combate à pandemia.

A aplicação das ferramentas que são oferecidas tem utilidades na maior parte dos campos de conhecimento e constituem uma linguagem comum a profissionais de áreas diversas, facilitando a interação e o trabalho em conjunto. Considerando aspectos sociais e econômicos e valendo-se de inúmeros modelos matemáticos, a Estatística permite estimar o número de casos, prever o número necessário de vagas em hospitais, bem como avaliar a necessidade e a extensão do isolamento, ajudando na redução da taxa de incidência e letalidade da doença.

## Medidas de posição e dispersão para dados agrupados

Se a situação a ser analisada sobre uma variável quantitativa apresenta seus valores agrupados em intervalos de classes, não há como saber a distribuição dos valores em cada faixa. Assim, para associar e calcular as medidas até aqui estudadas, devemos supor que, em cada intervalo, os valores foram distribuídos de forma simétrica ao redor do ponto médio de cada um deles. De uma forma prática, deve-se admitir que todos os *n* valores do intervalo são o seu próprio ponto médio.

Para entender como calcular essas medidas, atente-se aos exercícios resolvidos a seguir.

## Exercícios resolvidos

**16.** A tabela a seguir apresenta a distribuição de frequências das estaturas, em centímetros, de uma amostra de estudantes do Ensino Fundamental II.

**Distribuição de frequências das estaturas dos estudantes**

| Classe (estatura em centímetros) | Frequência (número de alunos) |
|---|---|
| 150,5 ⊢ 156,5 | 4 |
| 156,5 ⊢ 162,5 | 5 |
| 162,5 ⊢ 168,5 | 8 |
| 168,5 ⊢ 174,5 | 3 |

Dados fictícios

**a)** Qual a estatura média dos estudantes dessa amostra?

**b)** Qual o desvio padrão dessa amostra?

**Resolução:**

Classe é um subconjunto de um rol. Pode ser "unitária", quando apresenta um único elemento do rol, ou não, quando apresenta vários elementos consecutivos de um rol no intervalo dado.

No exercício, a 1ª classe 150,5 – 156,5 possui 4 elementos que podem ter alturas aleatórias, tais como 150,5, 152,7, 154,0 e 156,3, mas não sabemos exatamente quais são. O que sabemos é que:

1ª classe: 150,5 ⩽ (altura de 4 alunos) < 156,5

2ª classe: 156,5 ⩽ (altura de 5 alunos) < 162,5

3ª classe: 162,5 ⩽ (altura de 8 alunos) < 168,5

4ª classe: 168,5 ⩽ (altura de 3 alunos) ⩽ 174,5.

Para resolver qualquer exercício desse tipo, devemos obter uma classe unitária correspondente a cada classe. Para isso, basta obter o ponto médio (média aritmética) das classes dadas e trabalhar com esses valores.

### Distribuição de frequências das estaturas dos estudantes

| Classe (estatura em centímetros) | Ponto médio (média aritmética) | Frequência (número de alunos) |
|---|---|---|
| $150,5 \vdash 156,5$ | $\frac{150,5+156,5}{2}=\frac{307}{2}=153,5$ | 4 |
| $156,5 \vdash 162,5$ | $\frac{156,5+162,5}{2}=\frac{319}{2}=159,5$ | 5 |
| $162,5 \vdash 168,5$ | $\frac{162,5+168,5}{2}=\frac{331}{2}=165,5$ | 8 |
| $168,5 \vdash 174,5$ | $\frac{168,5+174,5}{2}=\frac{343}{2}=171,5$ | 3 |

Dados fictícios

**a)** A estatura média, em cm, corresponde à média aritmética dos valores, assim:

$$\overline{X}=\frac{4\cdot153,5+5\cdot159,5+8\cdot165,5+3\cdot171,5}{4+5+8+3}=\frac{614+797,5+1\,324,0+514,5}{20}+\frac{3\,250}{20}=162,5$$

**b)** A variância, em cm$^2$, é igual a:

$$\sigma^2=\frac{4\cdot(153,5-162,15)^2+5\cdot(159,5-162,15)^2+8\cdot(165,5-162,5)^2+3\cdot(171,5-162,15)^2}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{4\cdot(9)^2+5\cdot(-3)^2+8\cdot3^2+3\cdot9^2}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{324+45+72+243}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{684}{20}=34,2$$

Logo, o desvio padrão dessa amostra é $\sigma=\sqrt{34,2}\cong5,85$ cm .

**17.** Um colégio fez, no final do ano letivo, uma pesquisa com os 90 alunos da 3ª série do Ensino Médio para avaliar o grau de satisfação da turma com o colégio. Cada aluno atribuiu uma nota de 0 a 10, tendo a chance de recomendar o colégio a outra pessoa.
Os resultados estão apresentados na tabela a seguir:

### Avaliação de satisfação dos alunos da 3ª série do EM

| Nota | Frequência absoluta |
|---|---|
| $0 \vdash 2$ | 4 |
| $2 \vdash 4$ | 14 |
| $4 \vdash 6$ | 29 |
| $6 \vdash 8$ | 37 |
| $8 \vdash\!\dashv 10$ | 6 |

Dados fictícios

De acordo com essas informações, determine o desvio padrão das notas e qual é a classe modal.

**Resolução:**

Admitindo que as 4 notas do primeiro intervalo sejam 1 (ponto médio do intervalo 0 a 2), que as 14 notas do segundo intervalo sejam 3 (ponto médio do intervalo 2 a 4) e assim por diante.
Dessa forma, considerando os pontos médios 1, 3, 5, 7 e 9 de cada intervalo, podemos calcular a nota média:

$$\overline{X}=\frac{1\cdot4+3\cdot14+5\cdot29+7\cdot37+9\cdot6}{4+14+29+37+6}=\frac{4+42+145+259+54}{90}=\frac{504}{90}=5,6$$

FRENTE 2

Para calcular os desvios, a variância e o desvio padrão, devemos utilizar o mesmo critério.

Desvios absolutos

$d_1 = |1 - 5{,}6| = 4{,}6$

$d_2 = |3 - 5{,}6| = 2{,}6$

$d_3 = |5 - 5{,}6| = 0{,}6$

$d_4 = |7 - 5{,}6| = 1{,}4$

$d_5 = |9 - 5{,}6| = 3{,}4$

Desvio médio: $\bar{d} = \dfrac{4{,}6 + 2{,}6 + 0{,}6 + 1{,}4 + 3{,}4}{5} = \dfrac{12{,}6}{5} = 2{,}5$

Variância: $\sigma^2 = \dfrac{(-4{,}6)^2 \cdot 4 + (-2{,}6)^2 \cdot 14 + (-0{,}6)^2 \cdot 29 + (1{,}4)^2 \cdot 37 + (3{,}4)^2 \cdot 6}{4 + 14 + 29 + 37 + 6} =$

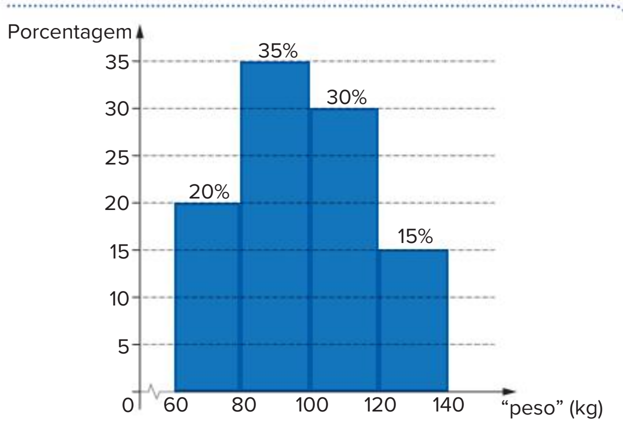
$$= \frac{84{,}64 + 94{,}64 + 10{,}44 + 72{,}52 + 69{,}36}{90} = \frac{331{,}6}{90} \cong 3{,}68$$

Desvio padrão: $\sigma \cong \sqrt{3{,}68} \cong 1{,}92$

Entendemos que a "classe modal" é o intervalo [6, 8], por ser o intervalo de maior frequência.

**18.** No histograma a seguir estão representados o "peso" de um lote de 200 bezerros antes e após o desmame.

**"Peso" dos bezerros (em kg)**




Dados fictícios

a) Quantos bezerros tinham menos de 120 kg?

b) Qual o "peso" médio de um bezerro?

c) Qual o "peso" modal de um bezerro?

d) Qual o desvio padrão dos "pesos" dessa distribuição?

**Resolução:**

Do gráfico, temos:

**"Peso" dos bezerros (em kg)**

| "Peso" (kg) | Ponto médio | Frequência absoluta |
|---|---|---|
| 60 ⊢ 80 | 70 | 20% de 200 = 40 |
| 80 ⊢ 100 | 90 | 35% de 200 = 70 |
| 100 ⊢ 120 | 110 | 30% de 200 = 60 |
| 120 ⊢ 140 | 130 | 15% de 200 = 30 |

Dados fictícios

**a)** Tinham menos de 120 kg: 40 + 70 + 60 = 170 bezerros.

**b)** O "peso" médio de um bezerro, em kg, é:

$$\overline{X} = \frac{70 \cdot 40 + 90 \cdot 70 + 110 \cdot 60 + 130 \cdot 30}{40 + 70 + 60 + 30} = \frac{2\,800 + 6\,300 + 6\,600 + 3\,900}{200} = \frac{19600}{200} = 98$$

**c)** O "peso" modal é 90 kg (ponto médio da classe de maior frequência).

**d)** O desvio padrão, em kg dos "pesos" da distribuição é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(70-98)^2 \cdot 40 + (90-98)^2 \cdot 70 + (110-98)^2 \cdot 60 + (130-98)^2 \cdot 30}{40+70+60+30}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-28)^2 \cdot 40 + (-8)^2 \cdot 70 + 12^2 \cdot 60 + 32^2 \cdot 30}{200}} = \sqrt{\frac{75\,200}{200}} = \sqrt{376} \cong 19{,}4$$

## Revisando

1. **Enem 2018** Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.
O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é
**a)** 29,8.
**b)** 71,0.
**c)** 74,5.
**d)** 75,5.
**e)** 84,0.

2. **Urca-CE 2021** Considere a série de valores 15, 3, 7, 10, 4, 8, 5, 13. A mediana da série de números dada é:
**a)** 8
**b)** 7,5
**c)** 8,5
**d)** 9
**e)** 7

3. **EPCar-MG 2019** Em uma turma de 5 alunos, as notas de um teste de matemática são números inteiros tais que a média aritmética e a mediana são iguais a 5, e nenhum aluno errou todas as questões.
Sabendo que esse conjunto de notas é unimodal, com moda igual a 8, então a diferença entre a maior nota e a menor nota é um número que é divisor de
**a)** 14
**b)** 15
**c)** 16
**d)** 18

4. **FGV-SP 2018** A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é
**a)** 6,8.
**b)** 7,2.
**c)** 7,4.
**d)** 7,5.
**e)** 8,0.

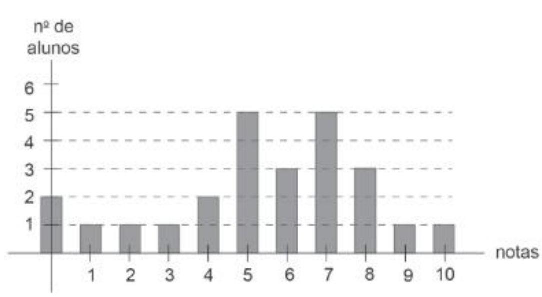
5. **UFJF/Pism-MG 2018** Uma professora fez uma pesquisa com 10 alunos de uma de suas turmas, sobre quanto tempo em média, em horas, eles passavam na internet por dia. Os dados foram colocados na tabela abaixo:

| Aluno | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Horas | 4 | 6 | 8 | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 6 | 3 |

Marque a alternativa com os valores corretos da média, moda e mediana.

a) média 4; moda 4; mediana 5.
b) média 4,5; moda 6; mediana 4,7.
c) média 4,7; moda 4; mediana 4,5.
d) média 4,7; moda 6; mediana 4,5
e) média 4,5; moda 6; mediana 5.

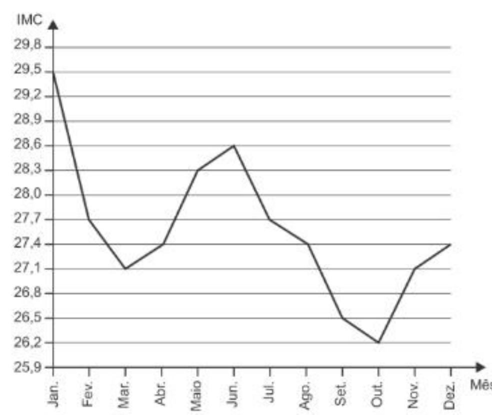
6. **PUC-Rio 2018** O gráfico de barras abaixo mostra a distribuição das notas de uma turma de alunos em uma prova de matemática. A nota é sempre um número inteiro de 0 a 10.




Assim, por exemplo, 2 alunos tiraram zero, e 1 aluno tirou dez.

a) Quantos alunos tiraram nota maior ou igual a 7?
b) Se a nota mínima para aprovação é 5, qual é a porcentagem de alunos aprovados?
c) Qual é a mediana das notas dos alunos desta turma? Lembre que a mediana é a nota N tal que pelo menos a metade dos alunos tira nota menor ou igual a N, e que pelo menos a metade dos alunos tira nota maior ou igual a N.

7. **Enem PPL 2018** O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se o indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.




De acordo com o gráfico, podemos concluir que a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa é igual a

a) 27,40.
b) 27,55.
c) 27,70.
d) 28,15.
e) 28,45.

8. Foram perguntadas as idades dos 10 primeiros alunos matriculados em determinado curso noturno e obteve-se a seguinte sequência de idades: 17, 20, 19, 18, 21, 16, 18, 21, 21 e 19.

Obtenha:

a) A média das idades.
b) A mediana.
c) A moda.
d) A variância.
e) O desvio padrão.

9. Em uma sala de aula de um curso de inglês, estão 20 alunos e o professor.
Joca, um garoto de 15 anos, tinha o objetivo de identificar a moda das idades das 21 pessoas presentes (os 20 alunos e o professor). Perguntou a idade para cada colega e obteve os seguintes valores:

28, 18, 20, 14, 22, 16, 19, 19, 17,
28, 20, 15, 19, 21, 17, 19, 18, 28, 16

No entanto, ele não perguntou a idade para o professor.
Em relação à moda das idades de todos os presentes, com os dados de que dispunha, Joca pôde concluir que:
**a)** independentemente da idade do professor, a moda é 19 anos.
**b)** dependendo da idade do professor, a moda pode ser 28 anos.
**c)** a moda é necessariamente igual a 28 anos.
**d)** o conjunto de valores não apresenta moda.
**e)** dependendo da idade do professor, a distribuição pode ter duas modas.

10. **Unifor-CE 2020** Uma turma de mecânica dos sólidos possuía oito alunos no final do semestre. Na última prova da disciplina aplicada aos alunos, as notas foram as seguintes:

| Aluno(a) | Nota |
|---|---|
| André | 6,0 |
| Paula | 8,0 |
| Cássia | 7,4 |
| Luís | 5,0 |
| Pedro | 9,0 |
| Paulo | 10,0 |
| Ana | 8,4 |
| Tiago | 9,2 |

A mediana das notas dos alunos, na última prova, foi
**a)** 7,5
**b)** 7,8
**c)** 8,0
**d)** 8,2
**e)** 8,5

## Exercícios propostos

1. **Enem 2016** O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

| Atleta | 1ª pesagem (kg) | 2ª pesagem (kg) | 3ª pesagem (kg) | Média | Mediana | Desvio padrão |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 78 | 72 | 66 | 72 | 72 | 4,90 |
| II | 83 | 65 | 65 | 71 | 65 | 8,49 |
| III | 75 | 70 | 65 | 70 | 70 | 4,08 |
| IV | 80 | 77 | 62 | 73 | 77 | 7,87 |

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas
**a)** I e III. **b)** I e IV. **c)** II e III. **d)** II e IV. **e)** III e IV.

2. **Famerp-SP 2018** Sendo $x$ um número inteiro, a mediana do conjunto {3, 7, 2, –3, 13, 9, –1, $x$} de oito números é igual a $\frac{7}{2}$. Dessa forma, $x$ é igual a
**a)** 7. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 6. **e)** 5.

3. **UFPR 2018** Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

| Lanchonete | Preço |
|---|---|
| A | R$ 10,75 |
| B | R$ 6,00 |
| C | R$ 9,50 |
| D | R$ 11,00 |
| E | R$ 5,25 |
| F | R$ 7,00 |
| G | R$ 10,50 |
| H | R$ 8,00 |

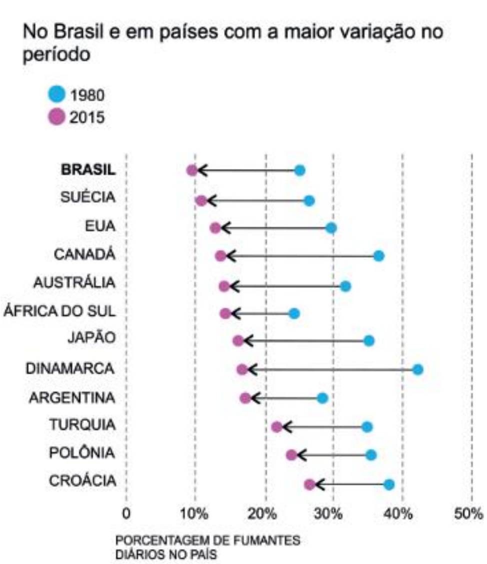
a) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.
b) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

4. **FGV-SP 2018** Uma lista de quatro números inteiros tem média 7 e diferença entre o maior e o menor dos números igual a 24. A moda e a mediana da lista são, ambas, iguais a 8. Assim, o desvio padrão da lista é igual a

a) $\sqrt{69}$
b) $\sqrt{70}$
c) $\sqrt{71}$
d) $\sqrt{72}$
e) $\sqrt{73}$

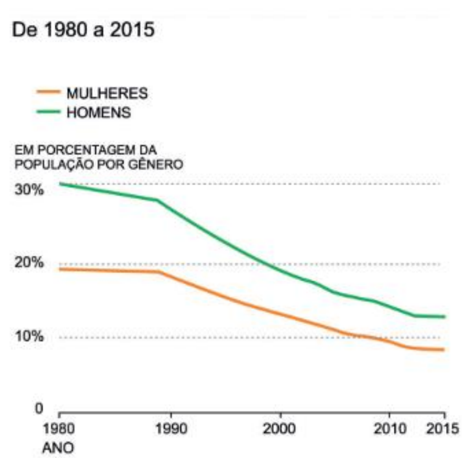
5. **Insper-SP 2018** Observe os gráficos.

**Variação da população fumante entre 1980 e 2015**




Fonte: http://www.nexojornal.com.br

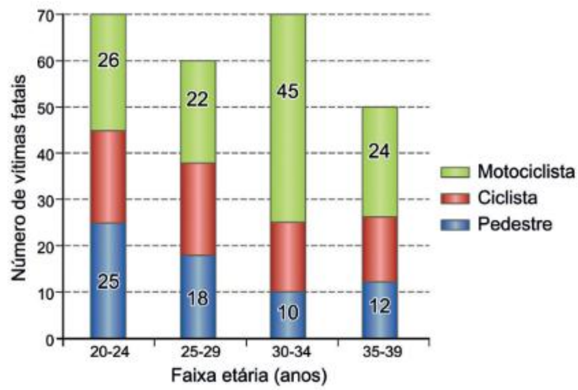
**Fumantes diários no Brasil por gênero**




Fonte: http://www.nexojornal.com.br

Utilizando apenas a análise dos dados expressos nos gráficos, é possível concluir corretamente que
a) a África do Sul foi o país que teve a maior redução na porcentagem de fumantes diários de 1980 para 2015.
b) em 2015 o Brasil tinha mais fumantes diários do que os EUA.
c) no Brasil houve uma redução maior no percentual de homens fumantes do que no de mulheres fumantes de 1980 para 2015.
d) o país com maior número de fumantes em 1980 era a Dinamarca e, em 2015, passou a ser a Croácia.
e) o Japão sempre teve mais fumantes do que o Brasil no período de 1980 a 2015.

6. **Unesp 2018** O gráfico indica o número de vítimas fatais no trânsito de uma grande cidade em 2017. Os dados estão distribuídos por quatro faixas etárias e por três categorias de locomoção dessas vítimas: pedestres, ciclistas e motociclistas.




Nesse ano, a porcentagem de vítimas fatais que se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos, em relação ao total de vítimas das quatro faixas etárias e das três categorias de locomoção, foi de

a) 15,6%.
b) 21,6%.
c) 30%.
d) 12,5%.
e) 27,2%.

7. **Enem 2015** Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

| Candidato | Média nas quatro primeiras etapas | Pontuação na quinta etapa |
|---|---|---|
| A | 90 | 60 |
| B | 85 | 85 |
| C | 80 | 95 |
| D | 60 | 90 |
| E | 60 | 100 |

A ordem de classificação final desse concurso é

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

8. **Enem 2019** Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

| Média | Mediana | Moda |
|---|---|---|
| 1,65 | 1,67 | 1,70 |

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega de sala.
Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

a) basquete, basquete, basquete, basquete.
b) futebol, basquete, basquete, basquete.
c) futebol, futebol, basquete, basquete.
d) futebol, futebol, futebol, basquete.
e) futebol, futebol, futebol, futebol.

9. **FGV-SP 2017** Removendo um número do conjunto {11, 12, 17, 18, 23, 29, 30} formamos um novo conjunto com média aritmética dos elementos igual a 18,5. A mediana dos elementos desse novo conjunto é igual a

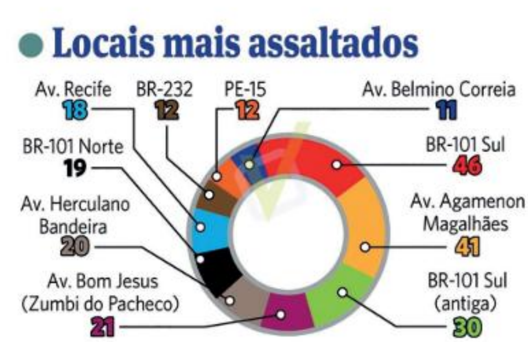
a) 26,5.
b) 26,0.
c) 20,5.
d) 17,5.
e) 14,5.

10. **EEAR-SP 2022** Em uma classe da 1ª série do Curso de Formação de Sargentos - EEAR, as idades dos alunos se distribuíam conforme tabela. Desta forma, a idade média ponderada desses alunos era de ______ anos.

| Idade (anos) | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_r$ (%) | 40 | 30 | 17 | 10 | 3 |

a) 18,81
b) 18,98
c) 19,06
d) 19,23

11. **UPE/SSA 2017** Segundo matéria do Caderno Cidades do *Jornal do Commercio*, publicada em 8 de maio de 2016, um relatório oficial de assaltos a coletivos entre janeiro e abril de 2016 apontou os locais e as linhas de ônibus que mais sofreram esse tipo de violência no período citado.
Com base nessas informações, analise o gráfico publicado na referida matéria.




O relatório vai além. Aponta que a maioria das investidas, é claro, acontece à noite – mas não tarde da noite –, e quando há mais gente nas ruas: no segundo pico, entre 18h e 20h, e no terceiro pico: de 21h às 22h. Confira vídeo no *Blog* **De Olho no Trânsito sobre a linha do medo**.

(jc.com.br/deolhonotransito)

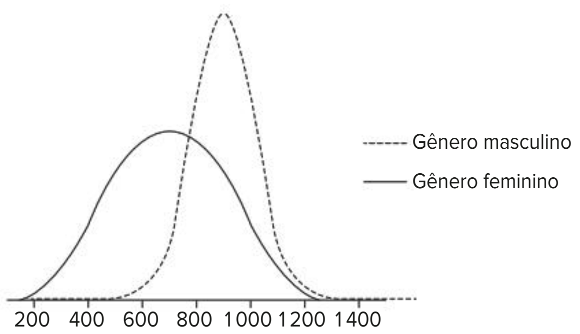
De acordo com o gráfico, a média, a mediana e a moda do número de assaltos por local são respectivamente:

a) 19; 20 e 12.
b) 23; 19,5 e 12.
c) 19; 12 e 46.
d) 23; 12 e 19.
e) 19,5; 12 e 18.

12. **FCMMG 2017** Apesar da aparente igualdade entre os sexos, os salários entre homens e mulheres continuam sendo diferentes. Uma forma de estudar o preconceito em relação às mulheres no mercado de trabalho consiste na comparação de valores salariais de ambos os gêneros. No Brasil, pesquisas sinalizam que a participação das mulheres no mercado de trabalho tem aumentado e isso se reflete também na remuneração delas. Contudo, observa-se que os homens ganham em média 30% a mais.

As curvas seguintes seguem a distribuição normal, relacionadas com as médias salariais líquidas por gênero em determinada localidade brasileira.

A linha pontilhada representa a situação do gênero masculino e a linha contínua, do gênero feminino. A variável representada no eixo horizontal indica o valor salarial em reais.




Pelos dados dessa pesquisa, pode-se concluir que:

a) O salário médio do gênero feminino, na localidade estudada, vale 700 reais e o do gênero masculino vale 910 reais, aproximadamente.
b) A possibilidade de uma mulher, nesta localidade, receber mais que 1400 reais é inexistente.
c) Os homens residentes nesta localidade recebem mais que 400 reais mensais.
d) O salário médio dos trabalhadores desta localidade é de 800 mensais.

13. **UPE 2020** Os 12 atletas do time de voleibol da Escola Viver Bem estão sendo entrevistados pelo seu treinador, para definir quais serão os jogadores titulares. Em determinado momento, o treinador perguntou o número de esportes que os atletas praticavam, além do voleibol. O resultado está apresentado no quadro a seguir:

| Atleta | Número de esportes que pratica além do voleibol |
|---|---|
| Hugo | 0 |
| Tiago | 4 |
| Pedro | 1 |
| Paulo | 1 |
| Mateus | 0 |
| Bruno | 1 |
| José | 2 |
| Manoel | 1 |
| Carlos | 2 |
| Joaquim | 1 |
| Benício | 0 |
| Vinícius | 0 |

Qual é, aproximadamente, a variância do número de esportes praticados por esses atletas, além do voleibol?

a) 0,98
b) 1,00
c) 1,08
d) 1,11
e) 1,24

14. **Enem PPL 2019** Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes. O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio padrão.

**Quadro 1**

| Tempos (em minuto) | 48 | 54 | 50 | 46 | 44 | 52 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Quadro 2**

| Variabilidade | Desvio padrão do tempo (min) |
|---|---|
| Extremamente baixa | $0 < \sigma \leq 2$ |
| Baixa | $2 < \sigma \leq 4$ |
| Moderada | $4 < \sigma \leq 6$ |
| Alta | $6 < \sigma \leq 8$ |
| Extremamente alta | $\sigma > 8$ |

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é

a) extremamente baixa.
b) baixa.
c) moderada.
d) alta.
e) extremamente alta.

15. **UFT-TO 2020** Considere o conjunto {1, 3, 4, 7, X, Y, 18, 19, 21, Z} formado por números naturais, dispostos em ordem não decrescente. Sabendo que a moda do conjunto é 7, a mediana é 9 e a média aritmética é 12, assinale a alternativa CORRETA que se refere aos valores de X, Y e Z, respectivamente.

a) 7, 11 e 29
b) 8, 12 e 30
c) 7, 12 e 29
d) 8, 11 e 29

**16. FGV-SP 2018** A média aritmética dos salários de 550 funcionários de uma empresa é R$ 4000,00.
Em uma negociação salarial, duas propostas foram feitas:
Proposta A: dar um aumento de R$ 450,00 por funcionário.
Proposta B: dar um aumento de 12% para cada salário.
Sejam:
$S_1$ a soma dos salários a serem pagos se for aceita a proposta A.
$S_2$ soma dos salários a serem pagos se for aceita a proposta B.
A diferença em valor absoluto entre $S_1$ e $S_2$ é:

a) R$ 16500,00
b) R$ 12000,00
c) R$ 14100,00
d) R$ 13800,00
e) R$ 15750,00

**17. Enem 2020** O quadro mostra o número de gols feitos pela equipe A em campeonatos estaduais de futebol, no período de 2007 a 2012.

| Ano | Número de gols |
|---|---|
| 2007 | 64 |
| 2008 | 59 |
| 2009 | 61 |
| 2010 | 45 |
| 2011 | 61 |
| 2012 | 58 |

Faltando ainda alguns jogos para o término do campeonato estadual de 2013, o número de gols marcados pela equipe B era 52. O técnico dessa equipe fez um levantamento para saber quantos gols sua equipe deveria marcar nos próximos jogos de modo que, ao final do campeonato, o número total de gols marcados pela equipe B ultrapasse a média de gols marcados pela equipe A nos campeonatos de 2007 a 2012.
Quantos gols, no mínimo, a equipe B ainda precisaria marcar?

a) 2
b) 6
c) 7
d) 9
e) 10

**18. Enem 2014** Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

**Distribuição da folha salarial**

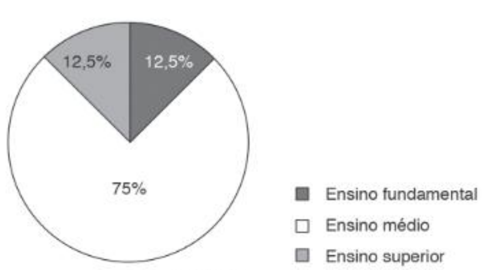



Gráfico 1

**Número de funcionários por grau de internação**

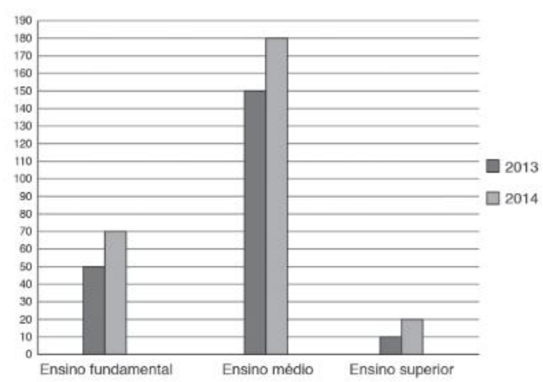



Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a) R$ 114285,00
b) R$ 130000,00
c) R$ 160000,00
d) R$ 210000,00
e) R$ 213333,00

FRENTE 2

**19.** **EPCar-MG 2020** No dia 21 de maio de 2019, comemorou-se 70 anos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

A Escola Preparatória de Cadetes do Ar é uma instituição militar de ensino médio, com missão de preparar os Alunos para ingresso no Curso de Oficiais Aviadores por meio do Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAr).

Disponível em: http://www2.fab.mil.br/epcar/. Acesso em 30 de março de 2019.

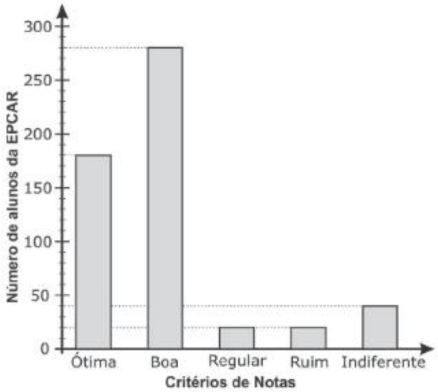
A sua história teve início em 1949, com a criação do Curso Preparatório de Cadetes do Ar (...) [Esta Escola] tem procurado cumprir sua missão de formar e honrar as suas tradições no ensino, com os pés no passado, as mãos no presente e os olhos no futuro.

Disponível em: http://www2.fab.mil.br/epcar/. Acesso em 30 de março de 2019.

Depois das comemorações dos 70 anos da EPCAR, foi feita uma pesquisa de opinião com os seus alunos sobre as atividades que ocorreram durante as comemorações.
Essas atividades foram avaliadas conforme critérios estabelecidos no seguinte quadro:

| Nota | Critérios de Notas |
|---|---|
| 5 | ÓTIMA |
| 4 | BOA |
| 3 | REGULAR |
| 2 | RUIM |
| 1 | INDIFERENTE |

Os resultados obtidos estão registrados no gráfico abaixo:




Se, nessa pesquisa, cada aluno opinou apenas uma vez, então, é **INCORRETO** afirmar que

**a)** o número que representa a quantidade de alunos que participou dessa pesquisa possui mais de 20 divisores naturais.
**b)** a nota média atribuída pelos alunos foi BOA.
**c)** exatamente 30% dos alunos considerou a programação ÓTIMA.
**d)** mais de 10% dos alunos opinaram com INDIFERENTE ou REGULAR em relação à programação.

**20.** A tabela a seguir apresenta as notas de um candidato em suas provas de um concurso público para auditor fiscal do tesouro nacional:

**Notas obtidas pelo candidato, por disciplina**

| Disciplina | Nota |
|---|---|
| Português | 7,9 |
| Matemática financeira | 8,6 |
| Estatística | 6,7 |
| Contabilidade | 6,3 |
| Direito civil | 8,2 |
| Direito tributário | 6,7 |

Dados fictícios

A nota média, a nota mediana e a nota modal desse candidato, são, respectivamente:

**a)** 7,4; 7,3; 6,7
**b)** 6,7; 7,3; 6,9
**c)** 7,7; 7,4; 6,9
**d)** 6,7; 7,3; 6,9
**e)** 7,4; 7,4; 6,7

## Texto complementar

# Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

Gabriel Zanlorenssi, Rodolfo Almeida e Gabriel Maia

**Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas**

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas. Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los:

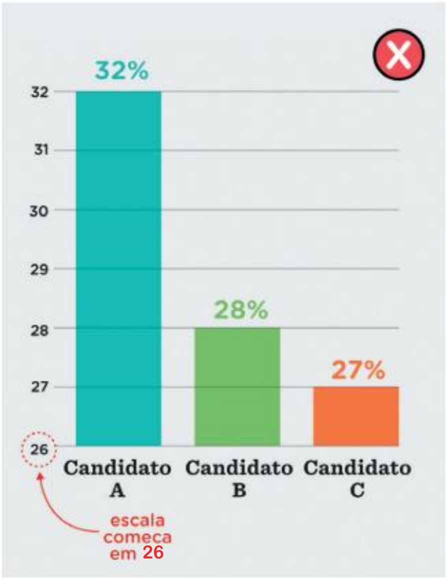
### Contas que não fecham

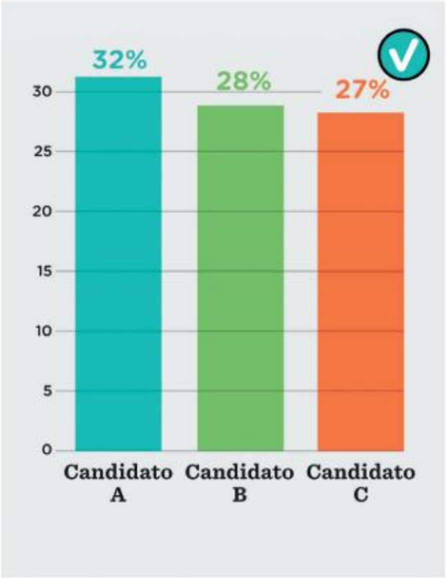


Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria. Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto).

Nestes gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio — e podiam responder mais de uma opção na pesquisa —, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais de uma vez nos dados). Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade).

### Escalas que não começam no 0




Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena.

No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

FRENTE 2

## Valores não deflacionados



Um erro bastante comum em gráficos que mostram valores monetários ao longo do tempo é não deflacionar os dados — ou seja, não ajustar os valores pela inflação, considerando a desvalorização da moeda. Esses ajustes são fundamentais para longos períodos de tempo.

Nestes gráficos, por exemplo, vemos a evolução do preço da gasolina, em R$ por litro. Observe como eles indicam tendências opostas. Isso porque, à esquerda, está demonstrado o preço nominal (ou seja, o valor que o consumidor vê na bomba) e, à direita, o preço real (deflacionado). Para fazer qualquer afirmação sobre se a gasolina está mais cara ou mais barata, deve-se utilizar o preço real.

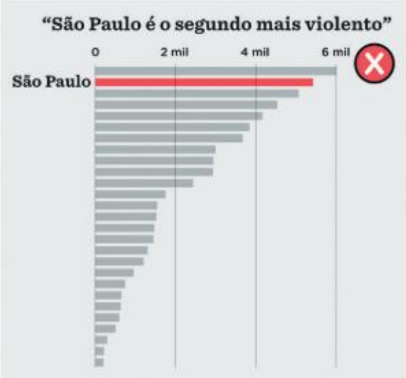
## Margens de erro

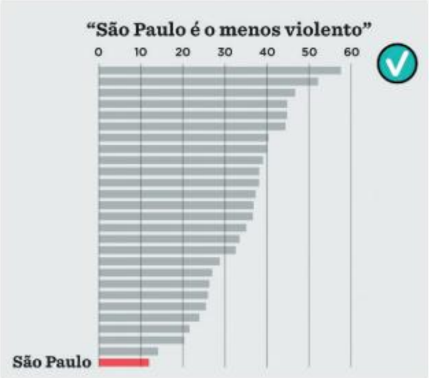


Para alguns tipos de pesquisas, especialmente as com grande número de entrevistados, existe uma margem de erro na precisão dos dados. No caso das pesquisas eleitorais, essa incerteza costuma ser de 2 pontos percentuais para mais ou para menos em cada valor. Isso quer dizer que, onde se afirma "2", por exemplo, o valor na verdade pode ser qualquer coisa entre "0" e "4".

Esse é um detalhe importante para evitar que se façam afirmações como "candidato A lidera a pesquisa de intenções de voto com 40%, seguido de B com 38%". Como a vantagem de um candidato sobre o outro está dentro da margem de erro, não é possível afirmar com certeza que há alguma vantagem. Preferencialmente, também é recomendado demonstrar essa margem de erro nos gráficos.

## Dados absolutos × Taxas



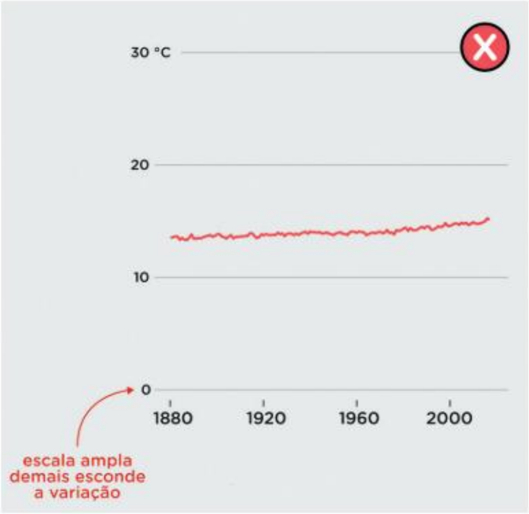



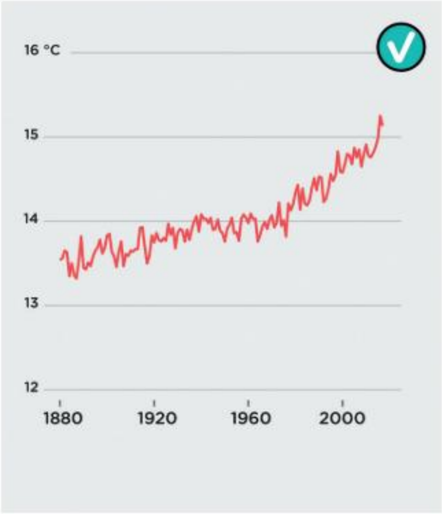

Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações. Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população.

Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015).

Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de “homicídios a cada 100 mil habitantes”.

## Escalas inadequadas



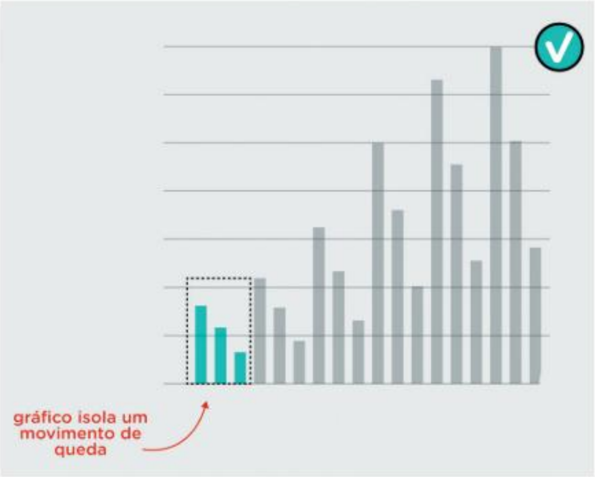




É comum encontrar gráficos de linhas que parecem indicar retas, levando a entender que não há mudança nos dados.

Nos exemplos acima, que mostram a temperatura global ao longo do tempo, a escala utilizada no gráfico da esquerda é ampla demais e esconde (ou atenua) a variação nos dados, dando a impressão de que não há mudança. Já o gráfico da direita utiliza uma escala mais adequada, dando conta da variação, sem também dramatizar demais esse aumento.

Uma alternativa, apropriada para este dado em questão, seria mostrar o quanto o dado variou em relação à média já que, se tratando de temperatura global, um aumento de apenas um grau já tem consequências climáticas significativas.

## Sazonalidade




Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano).

É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam um determinado período do tempo (como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita).

Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior — quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano.

Fontes: Pnad 2015 (IBGE); ANP (Agência Nacional do Petróleo), 2017; DataSUS 2015; e Departamento de Meteorologia dos EUA.
ZANLORENSSI, Gabriel *et.al.* *Nexo Jornal*, 22 jun. 2018. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar. Acesso em: 10 jan. 2022.

## Resumindo

**Medidas de posição ou de tendência central**

Observe o rol referente à idade de 25 estudantes de uma sala de um curso pré-vestibular.

17 17 17 17 18 18 18 18 18 18 18 18 19
19 19 19 19 19 20 20 20 21 21 21 21

**Média aritmética**

Representada por $\overline{X}$, é o quociente entre a soma de todos os valores da amostra e o número total de amostras.

$$\overline{X} = \frac{17 \cdot 4 + 18 \cdot 8 + 19 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 4}{4 + 8 + 6 + 3 + 4} = \frac{68 + 144 + 114 + 60 + 84}{25} = \frac{470}{25} = 18{,}8$$

**Moda**

A moda (Mo) consiste no valor $x_i$ de maior frequência absoluta $n_i$ ou relativa $f_i$.
No exemplo das idades dos estudantes, temos Mo = 18.

**Mediana**

Consiste no valor do termo central do rol quando a quantidade de termos for ímpar; e da média aritmética dos termos centrais do rol quando a quantidade de termos for par.
No exemplo das idades dos estudantes, a sequência tem 25 termos, logo, a mediana dessa sequência de valores corresponde ao valor do 13º termo.

$$\Big(\underbrace{17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18,}_{\text{12 termos}} \underbrace{19}_{\text{Mediana}} \underbrace{,19, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21}_{\text{12 termos}}\Big)$$

**Medidas de dispersão**
**Variância**

A variância (V ou $\sigma^2$) de uma amostra é igual ao quadrado do desvio padrão da mesma amostra:

$$V = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

**Desvio padrão**

O desvio padrão ($\sigma$) de uma amostra é igual à raiz quadrada da média quadrática das diferenças entre cada um dos dados ($x_i$) e a média aritmética $\overline{x}$ desses dados:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

### Quer saber mais?

***Sites***

PORTAL do Instituto Brasileiro e Geografia e Estatística. Disponível em: https://www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jan. 2022.
Você vai encontrar dados interessantes sobre o Brasil e sua gente, sobre economia e desenvolvimento, agricultura e urbanidades.

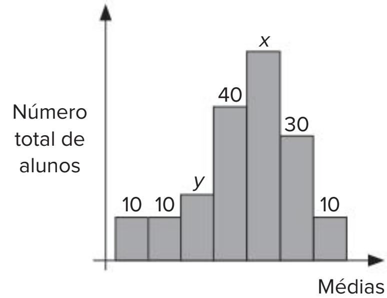
CENSO 2010 (último feito no Brasil). Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/resultados.html. Acesso em: 10 jan. 2022.
São milhares de resultados que revelam muitos hábitos do povo brasileiro.

**Filme**

O homem que mudou o jogo (*Moneyball. The Art of Winning an Unfair Game*)
Direção: Bennett Miller, 2012. Classificação indicativa: 10 anos.
Billy Beane (Brad Pitt) é o gerente geral do time de beisebol Oakland Athletics. Com pouco dinheiro e com as ideias do matemático Peter Brand (Jonah Hill) tenta reinventar seu time, desenvolvendo um sofisticado programa de estatísticas para o clube recrutando jogadores por seus resultados, mesmo que eles fossem vistos como fracos por olheiros convencionais, chegando às finais com pouco investimento, tornando o Oakland uma das principais equipes do esporte nos anos 1980 e transformando a MLB definitivamente.

## Exercícios complementares

1. **EPCar-MG 2020** No Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAR) existem 8 turmas de 25 alunos que ao final do 3º trimestre de certo ano apresentaram as médias em matemática, registradas no gráfico abaixo:




Neste ano, 60% dos alunos do CPCAR obtiveram média maior ou igual a 7. Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) $x$% do total de alunos apresentaram média maior ou igual a 6.
( ) $y$% do total de alunos apresentaram média menor que 6.
( ) A nota mediana deste resultado é maior que 7,3.

Sobre as proposições, tem-se que

**a)** todas são verdadeiras.
**b)** todas são falsas.
**c)** apenas duas são falsas.
**d)** apenas uma é falsa.

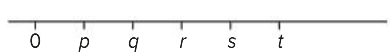
2. **FGV-SP 2018**

**a)** Nos últimos N dias, a média aritmética diária na produção de tênis de uma empresa foi de 70 unidades. Hoje, a produção de 90 unidades elevou a média aritmética para 75 unidades diárias. Qual é o valor de N?

**b)** Uma empresa produz computadores em três cidades diferentes. Mensalmente, a soma dos computadores produzidos nas três cidades é o triplo da produção de computadores de uma das cidades. É correto afirmar que a mediana das três quantidades é igual à média aritmética das três quantidades?

3. **FGV-SP 2018**

**a)** Na reta numérica dada abaixo, $p$, $q$, $r$, $s$ e $t$ são cinco números inteiros pares e consecutivos e $q + s = 24$. Qual é a média aritmética desses cinco inteiros?




**b)** Se $y$ é o menor número inteiro positivo tal que o produto dele por 3 150 é o quadrado de um número inteiro, qual é o valor de $y$?

4. **UPE/SSA 2018** Trezentos candidatos se submeteram ao teste de seleção para vaga de emprego em uma grande empresa sediada em Pernambuco. Os resultados estão agrupados na tabela a seguir:

| DESEMPENHO DOS CANDIDATOS NO TESTE DE SELEÇÃO | |
|---|---|
| **Pontuação no teste de seleção** | **Número de candidatos** |
| 80 ⊢ 90 | 20 |
| 90 ⊢ 100 | 100 |
| 100 ⊢ 110 | 120 |
| 110 ⊢ 120 | 50 |
| 120 ⊢ 130 | 10 |

Com base nessas informações, os valores aproximados da variância e do desvio padrão são respectivamente:

**a)** 103 e 10,15.
**b)** 102,5 e 10,09.
**c)** 94,6 e 9,72.
**d)** 84,9 e 9,21.
**e)** 76 e 8,71.

5. **EPCar-MG 2018** Na tabela a seguir estão relacionados os salários de todos os funcionários das classes A, B e C de uma empresa cuja média salarial é R$ 1680,00.

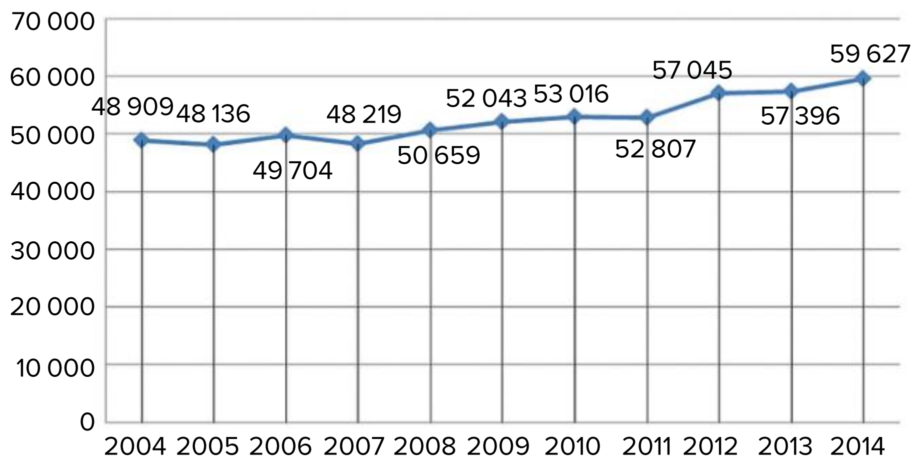
| Classes | Salários | Quantidade de funcionários |
| --- | --- | --- |
| A | 900 ⊢ 1500 | 20 |
| B | 1500 ⊢ 2100 | $x$ |
| C | 2100 ⊢ 2700 | 10 |

Se a mediana para a distribuição de frequências obtida acima é $m$, então a soma dos algarismos de $m$ é igual a

a) 10
b) 12
c) 15
d) 18

6. **UFSC 2017** O gráfico abaixo representa a evolução do número de homicídios no Brasil em função do tempo, no período de 2004 a 2014.

**A evolução do número de homicídios no Brasil em 2004 a 2014**




Fonte: Atlas da Violência IPEA 2016, 19 jul. 2016, p. 8. [Adaptado].

Com base nos dados do gráfico, responda aos itens **a** e **b**.

a) Identifique entre que anos consecutivos foi registrado o maior aumento no número de homicídios.
b) Determine o aumento percentual identificado no **item a**.
c) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 ressalta que, embora os homens representem a vasta maioria das vítimas de homicídio no Brasil, de 2004 a 2014 houve um crescimento de 11,6% da taxa de homicídios entre mulheres, apesar das políticas públicas desenvolvidas para minimizar o problema, como a Lei Maria da Penha e as medidas de prevenção à violência doméstica institucionalizadas desde 2006. Determine o número de mulheres assassinadas por dia no Brasil, tomando como referência o ano de 2014 (365 dias), em que 4 757 mulheres foram vítimas de morte por agressão.
d) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 divide a população em dois grupos disjuntos, um de negros (pretos e pardos) e outro de não negros (indivíduos brancos, amarelos e indígenas). De 2004 a 2014, há uma discrepância alarmante na evolução da taxa de homicídios entre esses dois grupos: enquanto a de negros cresceu 18,2%, a de não negros caiu 14,6%. Isso fez com que, em 2014, para cada não negro morto, 2,4 indivíduos negros fossem mortos. Através de uma fração irredutível, determine a probabilidade de que na ocorrência aleatória de um homicídio a vítima seja um indivíduo não negro.

7. **UFSC 2017** Em relação às proposições abaixo, é correto afirmar que:

01 Os juros médios no cartão de crédito chegaram, em fevereiro de 2016, ao maior patamar desde outubro de 1995, segundo levantamento da Anefac. A taxa mensal atingiu 14,72%. Logo, o montante a ser pago por um consumidor que usou R$ 2000,00 no rotativo do cartão de crédito por 30 dias é de R$ 2294,40, sem que se levem em conta os outros encargos referentes ao atraso no pagamento da dívida financiada.

02 Em 1987, o governo criou a Unidade Referencial de Preços (URP), que corrigia o salário dos três meses seguintes a partir de uma taxa prefixada com base na média geométrica da inflação dos três meses anteriores. Para os trabalhadores, teria sido mais vantajoso se o governo tivesse utilizado como base a média aritmética da inflação dos três meses anteriores, tendo em vista que a média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica, para quaisquer números positivos dados.

**04** $\sum_{n=1}^{k}(2n+2)$ é uma forma de representar a soma dos números que calculamos na expressão $2n + 2$ quando substituímos $n$ por 1, depois por 2, depois por 3 e assim sucessivamente, até $n = k$. O valor de $k$ para que $\sum_{n=1}^{k}(2n+2) = 130$ é 10.

**08** Considere uma sucessão infinita de círculos concêntricos em que cada círculo tem diâmetro igual ao dobro do diâmetro do círculo seguinte. Se o primeiro círculo tem raio de 3 cm, então a soma das áreas desses círculos é $18\pi$ cm$^2$.

**16** Suponha que na tabela estejam as estaturas da Mafalda e da sua turma (personagens da Mafalda).


Disponível em: http://blogmaniadegibi.com/2011/12/conheça-mafalda/. Acesso em: 20 out. 2016.

| Personagem | Altura (cm) |
|---|---|
| Miguelito | 117,5 |
| Susanita | 125,4 |
| Libertad | 107,3 |
| Mafalda | 120 |
| Manolito | 116,4 |
| Guille | 108,7 |
| Filipe | 117,5 |
| Mamã (mãe) | 169 |
| Papá (pai) | 179,2 |

Com base nos dados acima, é correto afirmar que a estatura média dos personagens da Mafalda é de 129 cm.

Soma:

**8. EEAR-SP 2016** A distribuição de frequência abaixo refere-se à exportação de soja realizada por uma Cooperativa no mês de abril.

| $x_i$ | Toneladas exportadas | $f_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 ⊢ 20 | 3 |
| 2 | 20 ⊢ 30 | 2 |
| 3 | 30 ⊢ 40 | 8 |
| 4 | 40 ⊢ 50 | 10 |
| 5 | 50 ⊢ 60 | 7 |
| | | $\sum f_i = 30$ |

Dados fictícios.

Com base nos dados apresentados, a mediana da distribuição pertence à

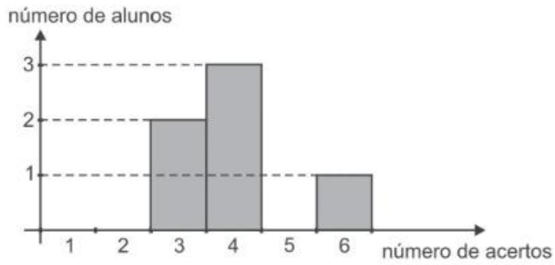
**a)** 2ª classe

**b)** 3ª classe

**c)** 4ª classe

**d)** 5ª classe

9. **AFA-SP 2016** Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico abaixo.




Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira. Essa turma do cursinho de inglês tem

a) mais de 23 alunos.
b) menos de 20 alunos.
c) 21 alunos.
d) 22 alunos.

10. **FGV-SP 2016** A tabela mostra a série de um indicador econômico de um país, em bilhões de US$, nos 12 meses de 2013.

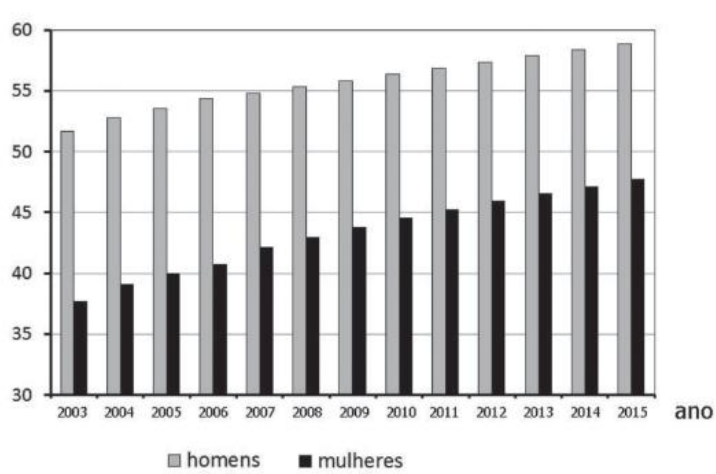
| Jan | Fev | Mar | Abr | Mai | Jun | Jul | Ago | Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 24 | 20 | 23 | 22 | 22 | 18 | 17 | 16 | 17 | 16 | 18 |

a) Calcule a média, a(s) moda(s), a mediana e a maior taxa mensal de crescimento (em porcentagem) dessa série.
b) Sabe-se que, em janeiro de 2014, esse indicador econômico atingiu um valor positivo para o qual a nova série (de janeiro de 2013 até janeiro de 2014) passou a ter mediana de 18 bilhões de US$, e um número inteiro de bilhões de US$ como média mensal. Calcule o desvio médio (DM) dessa nova série.

**Dados:** Desvio Médio $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{X}|}{n}$, sendo $\overline{X}$ a média aritmética.

11. **UFRGS 2016** O gráfico a seguir representa a população economicamente ativa de homens e mulheres no Brasil de 2003 a 2015.

**População economicamente ativa (em milhões)**




Fonte: Organização das Nações unidas para Alimentação de Agricultura.

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) no ano de 2009, a população economicamente ativa de mulheres era cerca de 50% da população economicamente ativa de homens.
b) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de homens cresceu mais do que a de mulheres.
c) em relação a 2005, a população economicamente ativa de mulheres em 2011 cresceu cerca de 5%.
d) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de mulheres cresceu mais do que a de homens.
e) em relação a 2007, a população economicamente ativa de homens em 2015 cresceu cerca de 3%.

**12.** **FGV-SP 2016** A lei de Benford, também chamada de "lei do primeiro dígito", sugere que, em vários conjuntos de dados numéricos, a ocorrência dos algarismos de 1 a 9 no início dos números (da esquerda para a direita em cada número) do conjunto de dados não é igualmente provável. A lei se verifica em diversos conjuntos de dados reais como, por exemplo, o conjunto das populações dos diversos municípios de um país, o conjunto dos dados numéricos contidos nas contas de energia elétrica da população de um município, o conjunto dos comprimentos dos rios de um país etc.
Quando a lei de Benford se aplica aos dados analisados, a probabilidade P($n$) de que o algarismo $n$ seja o primeiro algarismo em um dado numérico qualquer do conjunto de dados será $P(n) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Por exemplo, se a lei se aplica, a probabilidade de que o algarismo 1 ($n = 1$) seja o primeiro (da esquerda para a direita) em um número sorteado ao acaso do conjunto de dados é igual a log 2, ou seja, aproximadamente 30%, já que $\log 2 \cong 0{,}30$.
Admita que os dados numéricos indicados na tabela 1 tenham sido retirados da declaração de imposto de renda de um contribuinte. Também admita que a Receita Federal tenha a expectativa de que tais dados obedeçam, ainda que aproximadamente, à lei de Benford.

**Tabela 1**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1526 | 2341 | 5122 | 242 | 1444 | 788 | 4029 | 333 | 426 | 1981 |
| 2589 | 503 | 1276 | 5477 | 229 | 579 | 1987 | 719 | 1236 | 2817 |
| 456 | 886 | 1424 | 470 | 113 | 342 | 345 | 433 | 192 | 343 |

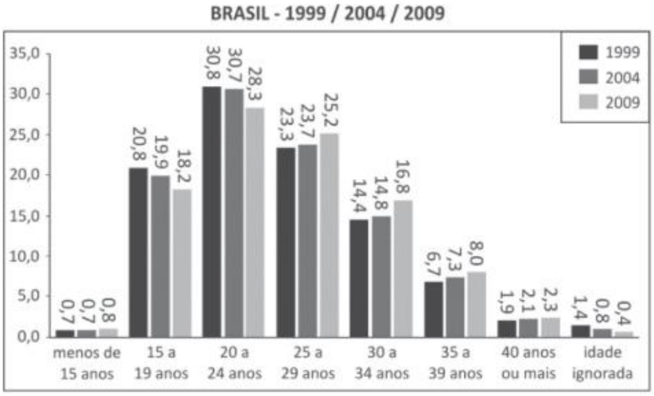
**a)** Complete a tabela, registrando a frequência do primeiro dígito (da esquerda para a direita) dos dados da tabela 1 para os casos em que $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. Registre também a frequência relativa desses algarismos (ver exemplo para o caso em que $n = 1$).

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Frequência de $n$** | 9 | | | |
| **Frequência relativa de $n$** | $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ | | | |

**b)** Admita que uma declaração de imposto de renda vai para a "malha fina" (análise mais detalhada da Receita Federal) se a diferença, em módulo, entre a frequência relativa do primeiro dígito, em porcentagem, e a probabilidade dada pelo modelo da lei de Benford, também em porcentagem, seja maior do que quatro pontos percentuais para algum $n$. Argumente, com dados numéricos, se a declaração analisada na tabela 1 deverá ou não ir para a "malha fina".
Adote nos cálculos log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.

**13.** **Fuvest-SP 2015** Examine o gráfico.

**Porcentagem de registro de nascimentos do ano, por grupos de idades da mãe**

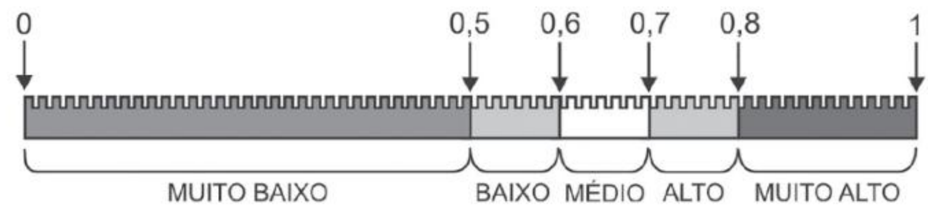



IBGE. Diretoria de Pesquisa, Coordenação de População e Indicadores Sociais, Estatísticas do Registro Civil, 1999/2004/2009. Adaptado.

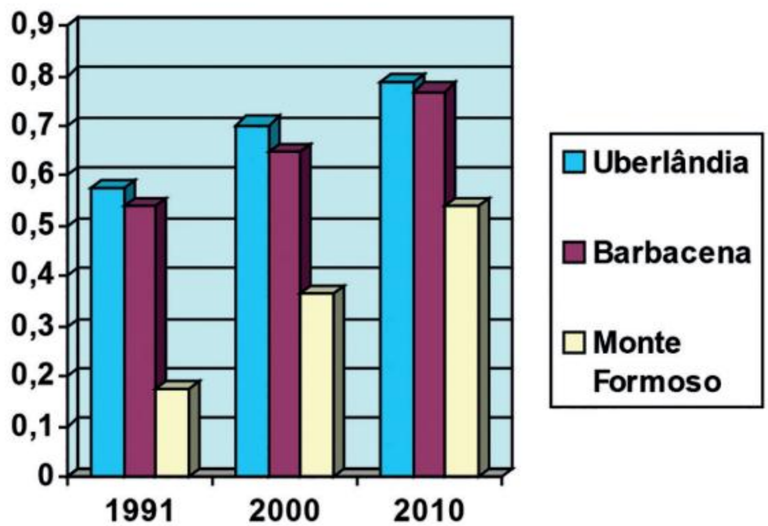
FRENTE 2

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar corretamente que a idade
a) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi maior que 27 anos.
b) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi menor que 23 anos.
c) mediana das mães das crianças nascidas em 1999 foi maior que 25 anos.
d) média das mães das crianças nascidas em 2004 foi maior que 22 anos.
e) média das mães das crianças nascidas em 1999 foi menor que 21 anos.

**14. AFA-SP 2015** No Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013 constam valores do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros.
O IDHM é um número que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme escala a seguir.




Abaixo estão relacionados o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e uma em situação intermediária, Barbacena.

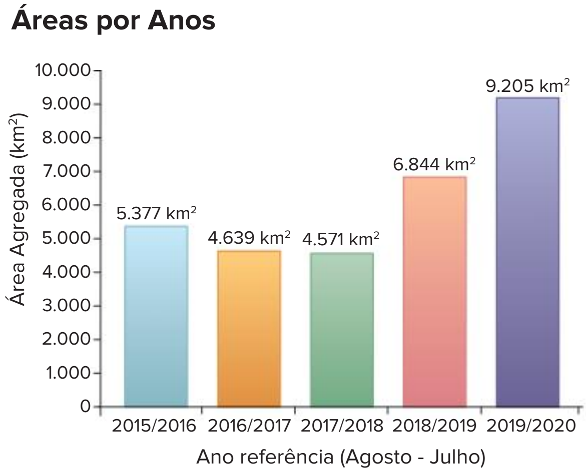



Analisando os dados acima, afirma-se que
**I.** o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso.
**II.** na última década, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia.
**III.** uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

| | Monte Formoso | Barbacena | Uberlândia |
|---|---|---|---|
| 1991 | Muito baixo | Baixo | Baixo |
| 2000 | Muito baixo | Alto | Alto |
| 2010 | Baixo | Alto | Alto |

São corretas
a) apenas I e II
b) apenas II e III
c) apenas I e III
d) I, II e III

**15. UEG-GO 2021** O desmatamento na Amazônia tem chamado a atenção de ambientalistas em todo o mundo. O gráfico a seguir mostra a evolução desse desmatamento de 2015/2016 até a projeção em 2019/2020.




Disponível em: https://jornal.usp.br/ciencias/desmatamento-da-amazonia-dispara-de-novo-em-2020/. Acesso em: 05 nov. 2020.

Observando o gráfico, nota-se que

**a)** o crescimento de 2018/2019 para 2019/2020 foi igual a duas vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

**b)** o crescimento de 2017/2018 para 2018/2019 foi igual a quatro vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

**c)** o decrescimento de 2016/2017 para 2017/2018 foi igual a duas vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

**d)** o decrescimento de 2016/2017 para 2017/2018 foi de 1003 $km^2$.

**e)** o crescimento de 2019/2020 em relação ao ano de 2015/2016 foi igual a 3 828 $km^2$.

**16. Unifesp 2021**

### Aprovado pela Anvisa, capacete reduz internações em UTI por covid-19 em 60%

Criado no início de abril como alternativa de tratamento de pacientes com covid-19, um capacete especial pode diminuir as mortes em decorrência da doença no Brasil. De acordo com os testes clínicos, o Elmo, criado no Ceará, reduz em 60% a necessidade de internação na UTI de pacientes com covid-19. O projeto já foi aprovado pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), o que permite a comercialização e produção do Elmo em escala industrial.

(Daniel Rocha. https://noticias.uol.com.br, 07.11.2020. Adaptado.)

### Estimativa de custos operacionais dos leitos de UTI adulto em consequência da covid-19

Uma pergunta que tem preocupado os gestores da rede hospitalar brasileira é quanto custará o tratamento da covid-19, em especial dos leitos de UTI adulto. Um estudo com 106 hospitais estimou os seguintes valores:

| Perfil do hospital | Quantidade de hospitais | Custo médio de diária em uma UTI adulto |
|---|---|---|
| **Filantrópico** | 35 | R$ 1 500,00 |
| **Organização social de saúde** | 57 | R$ 1 934,00 |
| **Público de administração direta** | 6 | R$ 3 442,00 |
| **Privado** | 8 | R$ 2 840,00 |

**a)** Calcule a média ponderada do custo da diária em uma UTI adulto dos hospitais públicos de administração direta e dos hospitais privados, de acordo com dados da tabela.

**b)** Um hospital filantrópico que atende apenas pacientes adultos pretende utilizar o Elmo no tratamento da covid-19 e, com isso, projeta reduzir seu número médio de internações devido à covid-19 em UTI adulta para 28 pacientes. Segundo dados desse hospital, pacientes internados com covid-19 que não vão para a UTI adulta se recuperam e têm alta hospitalar em 7 dias, em média, ao custo médio diário de R$ 900,00, enquanto que pacientes com covid-19 destinados à UTI adulta se recuperam e têm alta hospitalar, em média, em 18 dias. Determine qual é o número médio de internações devido à covid-19 nesse hospital e quanto o hospital economizará, em reais, com a adoção do Elmo para esse grupo de pacientes.

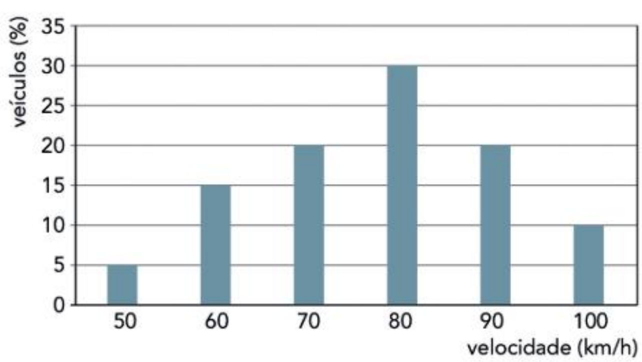
**17.** **FGV-SP 2021** Observe os dados com as alturas de 25 mudas de uma mesma planta.

| Número de mudas | Altura (em cm) |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 6 | 5 |
| 9 | 6 |
| 8 | 7 |
| 1 | 8 |

Retirando-se as duas mudas cujas alturas são valores extremos dos dados, pode-se afirmar que

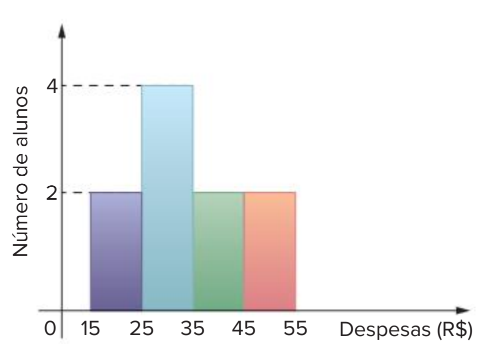
**a)** a mediana não se altera, mas a média aumenta.
**b)** a mediana não se altera, mas a média diminui.
**c)** a média não se altera, mas a mediana aumenta.
**d)** a média não se altera, mas a mediana diminui.
**e)** a média, a mediana e a moda se alteram.

**18.** **Uerj 2016** Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico abaixo:




Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

**19.** **AFA-SP 2022** Dez alunos, ao término das aulas, decidiram se reunir para um lanche. As despesas feitas por esses alunos estão representadas no histograma abaixo.




Com base nessas informações, é correto afirmar que

**a)** o gasto médio foi menor que R$ 33,50.
**b)** o valor mediano gasto superou R$ 33,00.
**c)** o gasto médio foi R$ 1,50 maior que o gasto mediano.
**d)** a soma dos gastos médio e mediano é igual a R$ 67,50.

**20.** Uma pesquisa feita com 500 funcionários de uma determinada empresa foi solicitada pelo plano de saúde que atende a esses funcionários. Entre as informações dessa pesquisa constava o número de dependentes de cada funcionário.

REDPIXEL.PL/Shutterstock.com

Os resultados desse item foram organizados de acordo com a tabela de distribuição de frequências a seguir:

**Dependentes dos funcionários da empresa**

| Número de dependentes | Número de funcionários |
|---|---|
| 0 | 120 |
| 1 | 95 |
| 2 | 90 |
| 3 | 95 |
| 4 | 35 |
| 5 | 30 |
| 6 | 20 |
| 7 | 15 |

Dados fictícios

De acordo com a tabela pode-se inferir que o número médio e o número mediano de dependentes por funcionários dessa empresa são, respectivamente, iguais a

**a)** 2 e 2,15.
**b)** 0,94 e 90.
**c)** 3,5 e 0.
**d)** 2,15 e 2.
**e)** 2,15 e 3,5.

## BNCC em foco

EM13MAT202

**1.** Os números abaixo representam as espessuras, em mm, de 50 chapas retangulares de alumínio:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,18 | 2,10 | 2,08 | 1,96 | 3,04 | 2,01 | 3,18 | 1,94 | 2,19 | 2,24 |
| 3,06 | 2,59 | 1,96 | 2,29 | 3,18 | 2,09 | 1,96 | 2,06 | 2,18 | 2,05 |
| 2,04 | 2,43 | 1,56 | 1,94 | 3,15 | 2,35 | 2,08 | 2,56 | 2,17 | 1,96 |
| 1,59 | 2,22 | 2,34 | 2,24 | 1,95 | 2,01 | 3,12 | 3,03 | 3,12 | 2,04 |
| 1,66 | 1,87 | 2,49 | 3,12 | 2,24 | 1,76 | 2,18 | 1,69 | 3,14 | 2,18 |

Podemos afirmar que a mediana e a média aritmética dessas espessuras, em mm, são respectivamente:

**a)** 2,18 e 2,29.
**b)** 2,18 e 2,18.
**c)** 2,17 e 2,29.
**d)** 2,21 e 2,29.
**e)** 2,56 e 2,18.

EM13MAT406

2. Em uma empresa alimentícia, foi observada a distribuição de funcionários do setor de produção em relação ao salário semanal, conforme mostra a tabela a seguir.

**Quantidade de funcionários do setor de produção dividida por faixa salarial**

| Salário semanal (em US$) | $f_i$ |
|---|---|
| 25 ⊢ 30 | 10 |
| 30 ⊢ 35 | 20 |
| 35 ⊢ 40 | 30 |
| 40 ⊢ 45 | 15 |
| 45 ⊢ 50 | 40 |
| 50 ⊢ 55 | 35 |
| **Total** | **150** |

Dados fictícios

A partir dos dados da tabela, podemos afirmar que o salário médio, em US$, dos funcionários é aproximadamente igual a:

a) 36
b) 39
c) 43
d) 46
e) 53

EM13MAT316

3. O risco de uma ação de determinada empresa pode ser avaliado pela variabilidade do retorno esperado. Portanto, a comparação das distribuições probabilísticas dos retornos, relativas a cada ação individual, possibilita a quem toma decisões perceber os diferentes graus de risco. Analise, abaixo, os dados estatísticos relativos aos retornos de cinco ações e verifique qual é a menos arriscada:

**Variabilidade do retorno das ações de uma empresa**

| Discriminação | Ação A | Ação B | Ação C | Ação D | Ação E |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valor esperado** | 15 | 12 | 5 | 10 | 4 |
| **Desvio padrão** | 6 | 6,6 | 2,5 | 3 | 2,6 |
| **Coeficiente de variação** | 0,40% | 0,55% | 0,50% | 0,30% | 0,65% |

Dados fictícios

a) Ação A
b) Ação B
c) Ação C
d) Ação D
e) Ação E

RossHelen/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

8

# Números complexos

Até o final do século XV, algumas equações algébricas do 3º grau eram dadas como impossíveis por grandes matemáticos. No início do século seguinte, na Universidade de Bolonha, o italiano Scipione del Ferro desenvolveu um método para resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, que anos depois levou à solução geral de equações do 3º e 4º graus. Esse período histórico foi marcado por muitas disputas acadêmicas na busca de fama e prestígio entre os matemáticos que protagonizaram essas descobertas.

Destacou-se o italiano Bombelli ao demonstrar que muitas das equações do 2º grau só podiam ser resolvidas pelos métodos de Cardano e Tartáglia, se consideradas as raízes quadradas de números negativos, que mais tarde foram chamadas, pelo francês Descartes, de imaginárias.

Assim, surgiram os números complexos, cujos significados e representações evoluíram nos anos que se seguiram tanto pela notação da unidade imaginária, proposta por Euler, quanto pelas interpretações geométricas e trigonométricas, por Gauss, Wessel, Argand e Moivre.

# A urgência de soluções para equações de grau elevado

No período histórico do final da Idade Média e início da Renascença, a Europa passava por profundas mudanças políticas, sociais e culturais. O comércio internacional ganhou força, e, com isso, a necessidade de guardar e transferir dinheiro voltou a ser imprescindível para a dinâmica da economia ocidental.

Enquanto os centros urbanos tornavam-se mais importantes que as regiões rurais concentrando uma população formada principalmente por artesãos, operários e comerciantes, surgiam os primeiros bancos, responsáveis por operações de câmbio e empréstimos a juros.

Aos poucos, banqueiros e mercadores enriqueciam e conquistavam maior poder político, emprestando dinheiro aos senhores feudais, que, por sua vez, endividavam-se cada vez mais para não abrir mão dos seus luxos e, também, financiar as despesas de suas Cruzadas.

A prática dos seguros e dos empréstimos a juros trouxe novos problemas matemáticos para a sociedade. Muitos desses problemas por vezes se traduzem em equações algébricas de grau elevado, o que ia além do conhecimento matemático da época.

Endividados, os senhores feudais viam-se obrigados a ceder politicamente, adotando medidas favoráveis ao comércio e à educação, como a criação de universidades, por exemplo.

## O problema da compra parcelada

No estudo da Matemática Financeira, o conceito de juros é algo que só pode ser aplicado a valores devidos. Se a capitalização de juros incidisse sobre valores que já foram pagos, as dívidas nunca seriam quitadas.

Por esse motivo, quando se compra algo a prazo e com parcelas periódicas, a capitalização dos juros incide apenas sobre o saldo devedor.

Assim, sejam:

- D uma dívida inicial que deverá ser paga em $n$ parcelas periódicas,
- $x$ uma taxa percentual fixa de juros capitalizados a cada período,
- $(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$ a série das parcelas que amortizam a dívida até sua quitação, e
- S o saldo devedor.

Se a primeira parcela $p_1$ for paga no ato da compra, o saldo devedor depois desse pagamento fica expresso por:

$$S = D - p_1$$

Durante o período entre os pagamentos $p_1$ e $p_2$, o saldo devedor S capitaliza com o incremento de juros equivalentes a $x\% \cdot S$.

$$S + \frac{x}{100} \cdot S$$

Fatorando a expressão:

$$S + \frac{x}{100} \cdot S = S \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Fazendo $1 + x\% = F$, aproveita-se o conceito do fator de correção para simplificar a expressão:

$$S \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = S \cdot F$$

Substituindo S pela sua expressão original, tem-se o novo saldo devedor S':

$$S' = S \cdot F = (D - p_1) \cdot F$$

Uma vez passado o período de capitalização, chega o momento de pagar a segunda parcela, fazendo com que o saldo devedor passe a ser expresso por:

$$S'' = (D - p_1) \cdot F - p_2$$

Agora, durante o período entre a 2ª e a 3ª parcela, ocorre novamente o incremento dos juros, levando a uma nova expressão para o saldo devedor:

$$S''' = ((D - p_1) \cdot F - p_2) \cdot F$$

Se a taxa de juros não sofrer alteração, esse padrão se repete até que todas as $n$ parcelas sejam pagas.

Perceba que, durante o período de pagamento das parcelas de uma compra em que são cobrados juros, o saldo devedor fica representado por uma expressão dinâmica, em que novos termos algébricos são incorporados de acordo com a passagem do tempo. Isso ocorre até o momento da quitação da dívida, quando o saldo devedor deve ficar igual a zero. Assim, tem-se a equação:

$$(...(((D - p_1) \cdot F - p_2) \cdot F - p_3) \cdot F...) - p_n = 0$$

Quando se deseja encontrar a taxa de juros adequada a uma situação dessas, percebe-se que o grau da equação aumenta de acordo com o número de parcelas.

### Duas parcelas

Se o problema consiste na compra de uma mercadoria que à vista sai por R$ 1 000,00, mas que será paga em duas parcelas de R$ 550,00 cada, sendo uma no ato e outra após 30 dias, por exemplo, então a equação é do 1º grau:

$$(1\,000 - 550) \cdot F - 550 = 0$$
$$450 \cdot F - 550 = 0$$
$$9 \cdot F - 11 = 0$$

Resolvendo a equação do 1º grau:

$$9 \cdot F - 11 = 0$$
$$9 \cdot F = 11$$
$$F = \frac{11}{9} \cong 1{,}2222$$

Substituindo a expressão para o fator de correção:

$$1 + \frac{x}{100} \cong 1{,}2222$$
$$\frac{x}{100} \cong 0{,}2222$$
$$x \cong 22{,}22$$

Portanto, nessa compra, a taxa de juros cobrada é de aproximadamente 22,22%.

### Três parcelas

Se a mesma compra for paga em 3 parcelas mensais de R$ 400,00 cada, por exemplo, a equação é do 2º grau (quadrática):

$$((1\,000 - 400) \cdot F - 400) \cdot F - 400 = 0$$
$$(600 \cdot F - 400) \cdot F - 400 = 0$$
$$600 \cdot F^2 - 400 \cdot F - 400 = 0$$
$$3 \cdot F^2 - 2 \cdot F - 2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$3 \cdot F^2 - 2 \cdot F - 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 4 + 24 = 28$$

$$F = \frac{-(-2) \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \begin{cases} F = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3} \cong 1{,}21525 \\ F = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3} \cong -0{,}54858 \end{cases}$$

Como F > 0, substituindo a expressão para o fator de correção:

$$1 + \frac{x}{100} \cong 1{,}21525 \Rightarrow \frac{x}{100} \cong 0{,}21525 \Rightarrow x \cong 21{,}525$$

Portanto, nessa compra, a taxa de juros cobrada é de, aproximadamente, 21,5%.

### Quatro parcelas

Até aqui, o conhecimento matemático da Idade Média era suficiente para resolver as equações. Mas o problema da mesma compra em quatro parcelas de, por exemplo, R$ 300,00 cada leva a uma equação do 3º grau (cúbica):

$$(((1\,000 - 300) \cdot F - 300) \cdot F - 300) \cdot F - 300 = 0$$

$$((700 \cdot F - 300) \cdot F - 300) \cdot F - 300 = 0$$

$$(700 \cdot F^2 - 300 \cdot F - 300) \cdot F - 300 = 0$$

$$700 \cdot F^3 - 300 \cdot F^2 - 300 \cdot F - 300 = 0$$

$$7 \cdot F^3 - 3 \cdot F^2 - 3 \cdot F - 3 = 0$$

Perceba que os casos usados como exemplo são mais simples, pois não há variação no valor das parcelas de cada compra, tampouco nos períodos entre os pagamentos. Equações mais sofisticadas surgem quando as parcelas e os períodos variam.

**! Atenção**

O estudo dos polinômios e das equações polinomiais com grau maior que 2 está totalmente interligado ao estudo dos números complexos, de modo que a dialética desses assuntos levou pensadores da matemática como Descartes, Leibniz, Euler e Gauss, por exemplo, a formular e tentar provar o que hoje chamamos de **teorema fundamental da Álgebra**:

"Toda equação polinomial de grau $n \geqslant 1$ possui pelo menos um número complexo (que torna possível obter uma raiz de índice par de um número negativo) como solução."

Inicialmente afirmada pelo matemático alemão Peter Roth em 1580, a primeira demonstração totalmente correta desse fato algébrico só foi publicada em 1814, por Jean-Robert Argand.

Museu do Louvre, Paris

René Descartes.

Museu Alemão de Tecnologia, Berlim

Leonhard Euler.

Museu Estatal Pushkin de Belas Artes, Moscou

Carl Friedrich Gauss.

Museu de História Natural, Londres

Jean-Robert Argand.

## Equações do 3º grau

A corrida pela descoberta dos métodos gerais para a resolução das equações algébricas de grau maior que 2 começou quando, pouco antes de falecer, em meados do século XVI, del Ferro ensinou sua técnica recém-descoberta da solução das equações do tipo $x^3 = px + q$ para um de seus alunos, chamado Antônio Maria Fior.

Em vez de publicar a descoberta de seu professor, Fior preferiu desafiar o grande matemático da época, Niccolò Fontana, também conhecido pelo apelido de Tartáglia.

Disputas públicas entre matemáticos eram bastante comuns à época, e um bom desempenho nos confrontos poderia garantir uma posição na cátedra da universidade. Mas, para a infelicidade do desafiante, quase no final do prazo, Tartáglia também conseguiu deduzir um processo similar ao descoberto por Scipione e resolver todos os problemas que lhe foram propostos. Fior não conseguiu resolver os seus, e a notícia da vitória de Tartáglia chegou a Milão, onde vivia um dos maiores intelectuais da época, Girolamo Cardano.

Cardano pediu que Tartáglia lhe ensinasse os métodos que havia descoberto para resolver os casos particulares das equações do 3º grau. Tartáglia revelou por meio de versos, mas sem dar a demonstração, como resolver as equações do 3º grau do tipo do tipo $x^3 = px + q$, que são incompletas, pois não apresentam termo do 2º grau.

Os versos de Tartáglia para essas equações levavam a uma solução da equação que, em termos algébricos, fica expressa pela seguinte fórmula:

$$x - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano procurou por uma demonstração satisfatória e começou então a dedicar-se às equações do 3º grau completas que hoje representamos por:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Ele não só conseguiu encontrar um processo para resolver essas equações como incentivou seu assistente Lodovico Ferrari a trabalhar em processos similares para as equações do 4º grau (quárticas):

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Ferrari de fato encontrou a solução das equações do 4º grau e mostrou a Cardano, que, pouco depois, publicou uma das mais importantes obras da história da matemática, intitulada *Ars Magna*.

Essa obra de Cardano contém os métodos, os primeiros descobertos, para a resolução das equações completas do 3º e 4º graus, atribuindo todos os devidos créditos aos matemáticos: Tartáglia, del Ferro e Ferrari.

Wellcome Collection, Londres

Girolamo Cardano.

Museu do Estado, Amsterdã

Niccolò Fontana (Tartáglia).

Royal Society, Londres

Scipione del Ferro.

Museu de Capodimonte, Nápoles

Lodovico Ferrari.

Com a publicação, Cardano ficou conhecido com o maior matemático de sua época. Tartáglia sentiu-se traído, pois sua fórmula acabou ficando conhecida como fórmula de Cardano. Ferrari tornou-se professor na Universidade de Bolonha.

## Revisando conhecimentos

O método de Cardano empregava diversas técnicas algébricas para resolver equações do 3º grau, como:

- Técnicas de resolução de equações quadráticas.
- Identidades polinomiais do 2º e 3º graus.
- Mudanças de variáveis.
- Sistemas de equações do tipo: soma e produto.

Por isso, recomenda-se revisar as teorias que fundamentam esses modelos matemáticos.

### Fórmula quadrática

Chama-se equação quadrática ou do 2º grau toda sentença matemática aberta do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0$$

Nessa sentença, temos os parâmetros $a$, $b$ e $c$, que são números reais denominados:

$a \rightarrow$ coeficiente principal
$b \rightarrow$ coeficiente secundário
$c \rightarrow$ termo independente

Equações quadráticas podem apresentar até duas soluções distintas, que podem ser obtidas pela fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por apresentar a operação de radiciação, as soluções das equações do 2º grau obtidas da fórmula quadrática são chamadas de raízes da equação:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ dentro da raiz é o discriminante da equação. Trata-se também de um importante parâmetro real da equação, que costuma ser representado por $\Delta$, uma letra grega maiúscula de nome delta.

O valor de $\Delta$ discrimina o número de soluções reais da equação.

- Se $\Delta > 0$, então a equação admite duas soluções reais e distintas.
- Se $\Delta = 0$, então a equação admite apenas uma solução real.
- Se $\Delta < 0$, então a equação **não** admite solução real.

Calcular previamente o valor do discriminante da equação pode poupar tempo na resolução das equações quadráticas, principalmente no caso em que esse valor é negativo.

Assim, toda equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ pode ser resolvida em até dois passos.

O primeiro passo é obter o discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$, e, quando seu valor não for negativo, o segundo passo é efetuar os cálculos da expressão simplificada: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Caso o discriminante seja negativo, não há como efetuar a radiciação no universo dos números reais, e, por isso, o conjunto solução da equação é vazio.

Veja o exemplo da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, em que:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Como o número $-4$ não possui raiz quadrada real, o conjunto solução da equação é vazio:

$$S = \varnothing$$

## Exercício resolvido

**1.** Encontre os discriminantes das seguintes equações do 2º grau e, se possível, os números reais que são suas soluções:

**a)** $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **b)** $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **c)** $x^2 + x + 2 = 0$ **d)** $x^2 + 4x + 2 = 0$

**Resolução:**

**a)** $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui duas soluções reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$$

**b)** $9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma solução real:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

**c)** $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui solução real: $S = \varnothing$.

**d)** $x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui duas soluções reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{2})}{2} \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = -2 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{-2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\right\}$$

## Identidades do 2º grau

Entre as principais identidades do 2º grau estudadas nos ensinos Fundamental e Médio estão os trinômios quadrados perfeitos, que resultam do:

- quadrado da soma: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
- quadrado da diferença: $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

Essas identidades matemáticas têm grande utilidade no estudo da Álgebra, da Aritmética e da Geometria, pois exprimem sentenças verdadeiras quaisquer que sejam os valores de suas variáveis $a$ e $b$.

Veja como a fatoração de um trinômio quadrado perfeito pode ser usada para resolver uma equação do 2º grau, por exemplo:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Com $a = x$ e $b = 3$ na identidade do quadrado da diferença, tem-se:

$$(a - b)^2 = (x - 3)^2 \equiv x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \equiv x^2 - 6x + 9$$

Observando que o trinômio obtido é exatamente 4 unidades maior que o 1º membro da equação proposta, soma-se o número 4 a ambos os membros da equação:

$$x^2 - 6x + 5 + 4 = 0 + 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4$$

Então, fatora-se o 1º membro da equação obtida e pode-se começar o processo de isolar a incógnita:

$$x^2 - 6x + 9 = 4$$
$$(x - 3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x = 3 \pm 2 \begin{array}{l} \nearrow \; x_1 = 3 + 2 = 5 \\ \searrow \; x_2 = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

Portanto: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow S = \{1, 5\}$

### Exercício resolvido

**2.** Encontre os valores de $a$, $b$ e $c$ que satisfazem à identidade: $ax^2 + bx + c \equiv (2x - 3)^2 - 4$.

**Resolução:**

Desenvolvendo o quadrado da diferença no segundo membro da identidade:

$$(2x - 3)^2 - 4 \equiv (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 4 \equiv$$
$$\equiv 4x^2 - 12x + 9 - 4 \equiv 4x^2 - 12x + 5$$

Portanto: $a = 4$, $b = -12$ e $c = 5$.

## Identidades do 3º grau

As principais identidades do 3º grau estudadas nos ensinos Fundamental e Médio são os produtos notáveis conhecidos como:

- o cubo da soma: $(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- o cubo da diferença: $(a - b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

E os casos de fatoração conhecidos como:

- a soma de cubos: $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- a diferença de cubos: $a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Todas essas expressões são sentenças verdadeiras quaisquer que sejam $a$ e $b$.

Veja como a fatoração pode ajudar a resolver equações completas do 3º grau, por exemplo:

$$x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0$$

Nessa equação, é possível reorganizar os termos de modo a ficar com uma diferença de cubos no 1º membro:

$$x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = x^2 - 2x$$

Então, fatora-se cada membro da equação obtida de acordo com seus respectivos casos.

Com $a = x$ e $b = 2$ na identidade da diferença de cubos, tem-se que o 1º membro da equação fica:

$$a^3 - b^3 \equiv x^3 - 8 \equiv (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) \equiv$$
$$\equiv (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Já no 2º membro, basta colocar o fator comum $x$ em evidência:

$$x^2 - 2x \equiv x(x - 2)$$

Depois de aplicadas as identidades, a equação proposta fica expressa por:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x(x - 2)$$

Observando que $(x - 2)$ é fator de ambos os membros da equação, conclui-se que, se $x - 2 = 0$, a sentença toda *é verdadeira*, pois zero multiplicado por qualquer número resulta em zero.

Assim, conclui-se que uma das soluções é $x = 2$.

Agora, no caso da expressão $(x - 2)$ ser diferente de zero, pode-se dividir ambos os membros da equação obtida por $(x - 2)$ e, assim, obter uma equação quadrática:

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)} = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)}$$
$$x^2 + 2x + 4 = x$$
$$x^2 + x + 4 = 0$$

O discriminante dessa equação quadrática é:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 16 = -15$$

Como $\Delta < 0$, conclui-se que a equação não possui mais soluções reais.

Portanto: $x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow S = \{2\}$.

### Exercício resolvido

**3.** Se os números reais $a$, $b$, $c$ e $d$ satisfazem à identidade $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv (5x + 2)^3$, então:

**a)** $a < b < c < d$
**b)** $d < c < b < a$
**c)** $d < c < a < b$
**d)** $a < d < c < b$
**e)** $b < a < c < d$

**Resolução:**

Desenvolvendo o cubo da soma no segundo membro da identidade:

$$(5x + 2)^3 \equiv (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5x \cdot 2^2 + 2^3 \equiv$$
$$\equiv 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$$

Portanto: $a = 125$, $b = 150$, $c = 60$ e $d = 8$.

Alternativa: **C**

No processo de resolução das equações do 3º grau, descoberto por del Ferro e Tartáglia, há uma passagem que envolve a identidade do cubo da soma em uma forma variante, em que os termos centrais do 2º membro têm seus fatores comuns colocados em evidência:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + \underbrace{3a^2b + 3ab^2}_{\text{fator comum: } 3ab} + b^3$$

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

Assim, a verdade algébrica expressa por essa identidade pode ser enunciada como:

> "O cubo da soma de dois termos equivale ao triplo do produto dos termos, vezes sua soma, mais a soma de seus cubos."
>
> $(a+b)^3 \equiv 3ab(a+b) + (a^3 + b^3)$

## Mudança de variável

Aproveitando o recurso da atribuição algébrica, as mudanças de variável proporcionam uma alternativa bastante útil na resolução de equações de grau maior ou igual a 2, como as equações biquadradas, que são equações quárticas incompletas que possuem apenas os termos de grau par.

Veja como uma mudança de variável permite, por exemplo, resolver a seguinte equação quártica como se fosse uma equação quadrática:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Como a atribuição $y = x^2$ implica $y^2 = (x^2)^2 = x^4$, as potências pares da variável $x$ podem ser substituídas pela primeira e a segunda potência da variável $y$, criando a equação:

$$\begin{array}{l} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ \downarrow \quad\;\; \downarrow \\ y^2 - 3y - 4 = 0 \end{array}$$

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

Então, da fórmula quadrática:

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow y_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow y_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}$$

Nesse momento é importante estar atento ao fato de que os números 4 e $-1$ são soluções da equação na variável $y$, não da equação proposta na variável $x$.

Então, como $x^2 = y$, há dois casos para analisar:

$$y_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = +2 \\ \searrow x_2 = -2 \end{array}$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Portanto: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow S = \{+2, -2\}$

A mudança de variável também pode ser um recurso para resolver equações quadráticas como:

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

Nessa equação, a atribuição $x = y + 4$ implica:

$$(y+4)^2 - 8(y+4) + 7 = 0$$

Efetuando o quadrado da soma e a propriedade distributiva:

$$y^2 + 8y + 16 - 8y - 32 + 7 = 0$$

Cancelando os termos $+8y$ e $-8y$, pode-se isolar $y^2$ obtendo-se:

$$y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9} \begin{array}{l} \nearrow y_1 = +3 \\ \searrow y_2 = -3 \end{array}$$

Então, como $x = y + 4$, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 4 = 3 + 4 = 7 \\ x_2 = y_2 + 4 = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow S = \{7, 1\}$.

Nos exemplos mostrados aqui, cada equação foi resolvida com apenas uma mudança de variável. Mas os processos elaborados por Cardano e Tartáglia para resolver uma equação cúbica podem fazer uso de mais mudanças de variáveis.

### Exercício resolvido

**4.** Fazendo $x = y - 2$ na equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$, obtém-se a equação:

**a)** $y^2 - y = 0$
**b)** $y^3 - y = 0$
**c)** $y^3 + y = 0$
**d)** $y^3 - 1 = 0$
**e)** $y^3 + 1 = 0$

**Resolução:**

Com a mudança de variável, tem-se:

$$(y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 12(y-2) + 9 = 0$$

$$(y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot 2 + 3 \cdot y \cdot 2^2 - 2^3) + 6(y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2) + $$
$$+ 12(y-2) + 9 = 0$$

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 12y - 24 + 9 = 0$$

$$y^3 + 1 = 0$$

Alternativa: **E**

Observação:

A solução real de $y^3 + 1 = 0$ é $y = -1$.

Então, como $x = y - 2$, conclui-se que uma solução real da equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$ é $x = -1 - 2 = -3$.

## Sistemas de equações do tipo: soma e produto

São sistemas não lineares de equações em que, dados os números reais $s$ e $p$, deseja-se encontrar outros números $x$ e $y$ tais que: $\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases}$

Sistemas assim equivalem a uma única equação do 2º grau cujas soluções são os números $x$ e $y$.

Considere uma nova variável $t$ que pode assumir tanto o valor de $x$ quanto de $y$; assim:

- Se $t = x$, então $t - x = 0$.
- Se $t = y$, então $t - y = 0$.

Multiplicando essas duas equações, temos:

$$(t - x) \cdot (t - y) = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva e reorganizando os termos dessa equação, obtemos:

$$(t - x) \cdot (t - y) = 0 \Rightarrow t^2 - t \cdot y - t \cdot x + x \cdot y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2 - t \cdot (x + y) + x \cdot y = 0$$

Então, observando as igualdades do sistema proposto, chega-se à equação quadrática equivalente:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases} \Rightarrow t^2 - s \cdot t + p = 0$$

Assim, para encontrar dois números reais cuja soma seja igual a 10 e o produto igual a 7, por exemplo, basta resolver uma equação quadrática:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 7 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 10 \cdot t + 7$$

O discriminante da equação na variável $t$ é:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 100 - 28 = 72$$

Então, supondo $x > y$, da fórmula quadrática, tem-se:

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{72}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6\sqrt{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x = 5 + 3\sqrt{2} \\ \searrow y = 5 - 3\sqrt{2} \end{array}$$

Porém, não é sempre possível encontrar dois números reais que satisfaçam sistemas como esses, pois o discriminante da equação quadrática equivalente pode ser negativo. Observe o próximo exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - t + 2 = 0$$

O discriminante da equação na variável $t$ é:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Como $\Delta < 0$, conclui-se não haver números reais $x$ e $y$ tais que sua soma seja 1 e seu produto 2.

**! Atenção**

Para determinar dois números conhecendo a soma e o produto de ambos, basta resolver uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -(\text{Soma dos números procurados}) \\ c = +(\text{Produto dos números procurados}) \end{cases}$$

Assim, a equação será:

$$1 \cdot x^2 - (\text{Soma}) \cdot x + (\text{Produto}) = 0$$

As soluções dessa equação são os números procurados.

## Exercícios resolvidos

**5.** Encontre dois números reais cuja soma é 6 e o produto é 4.

**Resolução:**

Sendo $x \geqslant y$ os números procurados, tem-se o sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$

A equação quadrática equivalente é $t^2 - 6t + 4 = 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$$

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x = 3 + \sqrt{5} \\ \searrow y = 3 - \sqrt{5} \end{array}$$

Verificando a solução:

$$\begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6 \\ x \cdot y = \left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot \left(3 - \sqrt{5}\right) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

**6.** Sendo $x$ e $y$ os números reais que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$, então:

**a)** $x : y = 6$
**b)** $x : y = -6$
**c)** $x : y = -2$
**d)** $x : y = 2$
**e)** $y : x = 6$

**Resolução:**

Elevando à 2ª potência ambos os membros da 2ª equação do sistema, obtemos:

$$(x \cdot y)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 \cdot y^2 = 16$$

Então, fazendo $X = x^2$ e $Y = y^2$, temos o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ X \cdot Y = 16 \end{cases}$$

A equação quadrática equivalente é $t^2 - 10 \cdot t + 16 = 0$.

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 100 - 64 = 36$$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2} \begin{array}{l} \nearrow X = 8 \\ \searrow Y = 2 \end{array}$$

De $x^2 = 8$, tem-se: $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

De $y^2 = 2$, tem-se: $y = \pm\sqrt{2}$.

O produto $x \cdot y$ é positivo, então os números procurados possuem o mesmo sinal.

Assim: $\begin{cases} x = +2\sqrt{2} \Rightarrow y = +\sqrt{2} \Rightarrow x : y = 2 \\ x = -2\sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \Rightarrow x : y = 2 \end{cases}$

Alternativa: **D**

## O método de Cardano e Tartáglia

Em seu trabalho, Cardano mostra como transformar as equações cúbicas completas em equações incompletas do tipo adequado ao processo que Tartáglia havia lhe ensinado.

A ideia é relativamente simples, envolvendo apenas uma mudança de variável, porém há uma quantidade considerável de cálculos envolvidos.

Uma equação do 3º grau completa possui coeficientes $a$, $b$, $c$ e $d$, não nulos, tais que:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

A atribuição $x = y - \frac{b}{3a}$ gera uma equação na variável $y$ desprovida do termo do 2º grau.

Veja como isso ocorre em um exemplo com coeficientes numéricos:

$$x^3 - 6x^2 + 18x - 13 = 0$$

Nessa equação cúbica, tem-se: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 18 \\ d = -13 \end{cases}$

Com esses valores, a mudança de variável, proposta por Cardano, fica expressa pela seguinte atribuição:

$$x = y - \frac{b}{3a} \Rightarrow x = y - \frac{-6}{3 \cdot 1} \Rightarrow x = y + 2$$

Assim, fazendo $x = y + 2$ na equação original, obtém-se:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^3 & - & 6x^2 & + & 18x & - & 13 & = & 0 \\ \overbrace{(y+2)^3} & - & 6\overbrace{(y+2)^2} & + & 18(y+2) & - & 13 & = & 0 \\ y^3 + 6y^2 + 12y + 8 & - & 6(y^2 + 4y - 4) & + & 18(y+2) & - & 13 & = & 0 \\ y^3 + 6y^2 + 12y + 8 & - & 6y^2 - 24y - 24 & + & 18y + 36 & - & 13 & = & 0 \end{array}$$

Cancelando os termos $+6y^2$ e $-6y^2$, pode-se isolar $y^3$, obtendo-se: $y^3 = -6y - 7$.

## Equação cúbica incompleta

Uma vez eliminado o termo do 2º grau em uma equação cúbica, aplica-se o método que Tartáglia ensinou a Cardano. Esse método resolve as equações do tipo:

$$x^3 = px + q$$

Em termos algébricos, o primeiro passo do método de Tartáglia consiste na comparação dos termos da equação $x^3 = px + q$ com os da identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$. Assim:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{(a+b)^3} & \equiv & 3ab & \cdot & \underbrace{(a+b)} & + & \underbrace{(a^3+b^3)} \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ x^3 & = & p & \cdot & x & + & q \end{array}$$

Aqui, a atribuição $x = a + b$ implica as igualdades: $\begin{cases} 3ab = p \\ a^3 + b^3 = q \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} (x)^3 & \equiv & \underbrace{3ab} & \cdot & (x) & + & \underbrace{a^3 + b^3} \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ x^3 & = & p & \cdot & x & + & q \end{array}$$

De fato, o que Tartáglia propõe é encontrar o valor de $x$ em duas partes, $a$ e $b$, sabendo que essas partes devem satisfazer o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ 3ab = p \end{cases}$

Para resolver o sistema, dividem-se ambos os membros da segunda equação por 3: $ab = \frac{p}{3}$.

Depois, elevam-se ao cubo ambos os membros do que foi obtido:

$$(\mathrm{ab})^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \Rightarrow a^3b^3 = \frac{p^3}{27}$$

Então, substitui-se a 2ª equação do sistema pela sua nova versão cúbica, ficando com um sistema de equações do tipo soma e produto:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ a^3 \cdot b^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

Para facilitar a observação desse fato, podem ser feitas mais duas atribuições: $\begin{cases} A = a^3 \\ B = b^3 \end{cases}$

Com essas mudanças de variáveis, o sistema terá a seguinte forma: $\begin{cases} A + B = q \\ A \cdot B = \frac{p^3}{27} \end{cases}$

A equação quadrática equivalente ao sistema é $t^2 - q \cdot t + \left(\frac{p^3}{27}\right) = 0$.

Lembrando que, nessa equação, os valores de $p$ e $q$ são conhecidos e a variável $t$ representa, simultaneamente, os valores de A e B. Então, se o discriminante não for negativo, será possível determinar os números reais A e B, por meio da fórmula quadrática.

Depois de encontrados esses valores, a solução $x$ da equação cúbica incompleta fica expressa pela soma de suas raízes cúbicas: $\begin{cases} x = a + b \\ a = \sqrt[3]{A} \\ b = \sqrt[3]{B} \end{cases}$

Assim, tem-se finalmente que: $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

**! Atenção**

De acordo com os teoremas da Álgebra, uma equação cúbica pode possuir de uma a três soluções reais diferentes, e o método de Cardano e Tartáglia, descrito neste capítulo, mostra apenas como encontrar uma delas. Para encontrar as outras soluções reais, quando elas existirem, fazemos uso de um algoritmo para divisão de polinômios conhecido como dispositivo prático de Briot-Ruffini, que, a partir da equação original e da solução encontrada pelo método de Cardano e Tartáglia, produz uma equação quadrática cujas soluções coincidem com as demais soluções da equação cúbica original. Esse processo será bastante executado no estudo dos próximos capítulos.

Voltando ao exemplo anterior, em que uma equação cúbica completa foi proposta:

$$x^3 - 6x^2 + 18x - 13 = 0$$

Por meio da atribuição $x = y + 2$, houve uma mudança de variável que levou à equação incompleta:

$$y^3 = -6y - 7$$

Comparando essa equação com a identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$, tem-se as seguintes atribuições:

$$y = a + b \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = -7 \\ 3ab = -6 \end{cases}$$

Dividindo por 3 a segunda equação: $3ab = -6 \Rightarrow ab = -2$.

Elevando ao cubo: $(a \cdot b)^3 = (-2)^3 \Rightarrow a^3 \cdot b^3 = -8$.

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, obtém-se o sistema soma e produto: $\begin{cases} A + B = -7 \\ A \cdot B = -8 \end{cases}$

A equação do 2º grau equivalente ao sistema é $t^2 + 7t - 8 = 0$.

Resolvendo pela fórmula quadrática:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 9}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 1 \\ \searrow B = -8 \end{matrix}$$

Lembrando que, das soluções da equação quadrática, tanto faz qual é o valor de A e o valor de B, pois a solução da equação do 3º grau incompleta é igual à soma das raízes cúbicas de A e B:

$$y = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-8} = 1 + (-2) = -1$$

Assim, substituindo $y = -1$ na atribuição $x = y + 2$, que promoveu a primeira mudança de variável do problema, obtém-se finalmente uma das soluções da equação original:

$$x = -1 + 2 = 1$$

Portanto, uma das soluções da equação $x^3 - 6x^2 + 18x - 13 = 0$ é $x = 1$.

## Exercícios resolvidos

**7.** Encontre uma solução real para a equação $x^3 = 6x + 9$.

**Resolução:**

Fazendo $x = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$, tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ 3ab = 6 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow a^3b^3 = 8 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ A \cdot B = 8 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 9t + 8 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 81 - 32 = 49$$

$$t = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 8 \\ \searrow B = 1 \end{matrix}$$

Assim, $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$. Portanto, $x = 3$ é uma solução real da equação proposta.

**8.** Encontre uma solução real para a equação a seguir:

$$x^3 - 15x - 30 = 0$$

**Resolução:**

Isolando o termo do 3º grau, obtemos $x^3 = 15x + 30$. Fazendo $x = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$, tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 30 \\ 3ab = 15 \Rightarrow ab = 5 \Rightarrow a^3b^3 = 125 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = 30 \\ A \cdot B = 125 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 30t + 125 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 125 = 900 - 500 = 400$$

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 20}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 25 \\ \searrow B = 5 \end{matrix}$$

De $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, tem-se que $x = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}$ é uma solução real da equação proposta.

**9.** Encontre uma solução real para a equação
$x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0$.

**Resolução:**

Por tratar-se de uma equação completa, deve ser feita a mudança de variável proposta por Cardano:

$$x = y - \frac{b}{3a} \Rightarrow x = y - \frac{(-3)}{3 \cdot 1} \Rightarrow x = y + 1$$

Então, fazendo $x = y + 1$:

$$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - 15(y + 1) - 18 = 0$$
$$(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - 3(y^2 + 2y + 1) - 15(y + 1) - 18 = 0$$
$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 - 15y - 15 - 18 = 0$$

Cancelando os termos $+3y^2$ e $-3y^2$, e isolando o termo $y^3$, obtemos $y^3 = 18y + 35$.

Fazendo $y = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$, tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ 3ab = 18 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a^3b^3 = 216 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = \text{A}$ e $b^3 = \text{B}$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{A} + \text{B} = 35 \\ \text{A} \cdot \text{B} = 216 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 35t + 216 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 216 = 1225 - 864 = 361$$

$$t = \frac{-(-35) \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm 19}{2} \begin{matrix} \nearrow \text{A} = 27 \\ \searrow \text{B} = 8 \end{matrix}$$

Assim, $y = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 3 + 2 = 5$. Substituindo $y = 5$ na atribuição $x = y + 1$, que promoveu a 1ª mudança de variável do problema, obtém-se finalmente uma das soluções da equação original: $x = 5 + 1 = 6$.

Portanto, $x = 6$ é uma solução real da equação proposta.

## A necessidade dos números complexos

Muitas equações quadráticas como $x^2 + 1 = 0$, por exemplo, não possuem soluções que sejam números reais, o que não parecia preocupar os matemáticos até o século XVI, quando um matemático italiano publicou uma obra em três volumes intitulada *L'Algebra*, que também discute a resolução de equações do 3º grau. Seu nome era Rafael Bombelli: o pai dos números complexos.

Coleção Particular

Rafael Bombelli.

Na obra, Bombelli discute a resolução da equação $x^3 = 15x + 4$ pelo método de Tartáglia e, comparando-a com a identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$, faz $x = a + b$ para obter o sistema:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 4 \\ 3ab = 15 \Rightarrow ab = 5 \Rightarrow a^3b^3 = 125 \end{cases}$$

Com $\text{A} = a^3$ e $\text{B} = b^3$, temos:

$$\begin{cases} \text{A} + \text{B} = 4 \\ \text{AB} = 125 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 4t + 125 = 0$$

Até aqui, tudo parece ocorrer normalmente, a não ser pelo fato de essa equação apresentar um discriminante negativo ($\Delta < 0$): $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 125 = 16 - 500 = -484$.

Em casos como esse, a equação do 2º grau que equivale ao sistema não admite solução real. Inicialmente, os matemáticos da época pensaram que, consequentemente, a equação cúbica original também não deveria admitir.

Se Bombelli não tivesse observado que $x = 4$ é uma solução real da equação $x^3 = 15x + 4$, ele provavelmente não teria descoberto os números complexos ($4^3 = 15 \cdot 4 + 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 64 = 60 + 4$).

Então, sabendo que $x = 4$ era de fato solução da equação $x^3 = 15x + 4$, Bombelli decidiu continuar o processo simplesmente deixando indicada a raiz quadrada do número negativo. Assim:

$$t^2 - 4t + 125 = 0 \Rightarrow \Delta = -484$$

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-484}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

Assim: $x = \sqrt[3]{\dfrac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{4 - \sqrt{-484}}{2}}$

Convencido de que a expressão aritmética obtida para o valor de $x$ da equação $x^3 = 15x + 4$ de fato representava o número 4, Bombelli tomou algumas liberdades em relação à operação da raiz quadrada, a fim de adequá-la aos radicandos negativos.

$$\sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}} = 4$$

Admitindo que a raiz quadrada fosse uma operação distributiva em relação à multiplicação de números com sinais diferentes, novas regras para a radiciação foram estabelecidas.

| **Fator $a$** | **Fator $b$** | **Como era** | **Como ficou** |
|---|---|---|---|
| Positivo | Positivo | $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ | $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ |
| Positivo | Negativo | Indefinido | $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ |
| Negativo | Positivo | Indefinido | $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ |
| Negativo | Negativo | $\sqrt{a \cdot b} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ | $\sqrt{a \cdot b} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ |

**! Atenção**

Observe que a propriedade distributiva da raiz quadrada sobre o produto de números com mesmo sinal permanece, de modo que distribuir a raiz quadrada no produto de números negativos não é válido. Muitos erros são cometidos no estudo dos números complexos quando, por distração, isso acontece.

Nesse ponto evolutivo da Matemática, a propriedade distributiva da raiz quadrada em relação à multiplicação $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, que só era válida se os fatores $a$ e $b$ fossem positivos, passou também a ser utilizada nos casos em que apenas um dos fatores é negativo.

Então, com seu conceito da radiciação estendido, Bombelli admitiu que:

$$\sqrt{-484} = \sqrt{484 \cdot (-1)} = \sqrt{484} \cdot \sqrt{-1} = 22 \cdot \sqrt{-1}$$

Sendo assim, as soluções da equação $t^2 - 4t + 125 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -484$, podem ser expressas de forma simplificada:

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-484}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 22\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{2(2 \pm 11\sqrt{-1})}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; t = 2 + 11\sqrt{-1} \\ \searrow \; t = 2 - 11\sqrt{-1} \end{array}$$

Nesse momento, Bombelli concebeu os dois primeiros números complexos da História, mas ainda era longo o caminho que esclareceu a igualdade $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 4$.

**Saiba mais**

Observe que os primeiros números complexos observados de que se tem notícia foram concebidos em pares: $2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 - 11\sqrt{-1}$.

Como esses pares de números complexos são produzidos pela fórmula quadrática, eles somente diferem no sinal (+) ou (−) na parte de seus valores que depende da raiz quadrada do número negativo. Veja outros exemplos:

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{-8}}{2} = 1 + \sqrt{-2}$

e $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{-8}}{2} = 1 - \sqrt{-2}$

$x^2 - 4x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{-12}}{2} = 2 + \sqrt{-3}$

e $x_2 = \dfrac{4 - \sqrt{-12}}{2} = 2 - \sqrt{-3}$

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{0 + \sqrt{-36}}{2} = 0 + 3\sqrt{-1}$

e $x_2 = \dfrac{0 - \sqrt{-36}}{2} = 0 - 3\sqrt{-1}$

Os números complexos $x_1$ e $x_2$ produzidos como soluções de uma mesma equação quadrática, com coeficientes reais, são denominados conjugados um do outro. Assim, o número $\dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ é o conjugado do número $\dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, que, por sua vez, também é o conjugado $\dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$. Além do fato de serem produzidos em pares conjugados, no processo de Tartáglia esses números complexos surgem para que deles sejam extraídas as raízes cúbicas.

O próximo desafio de Rafael Bombelli era encontrar as raízes cúbicas dos números complexos conjugados $2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 - 11\sqrt{-1}$ para provar que a soma de suas raízes cúbicas era igual a 4. Para isso, ele admitiu a existência de dois números reais $a$ e $b$ tais que:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = a - b\sqrt{-1}$$

Sabendo que a soma das raízes cúbicas dos números complexos encontrados deveria ser igual a 4, Bombelli concluiu que o número real $a$ deveria ser igual a 2, logo:

$$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 4$$
$$2a = 4$$
$$a = 2$$

Assim, faltava apenas encontrar o número $b$ tal que $\left(2 + b\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

Da identidade do cubo da soma, temos que:

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot b\sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(b\sqrt{-1}\right)^2 + \left(b\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$8 + 12 \cdot b\sqrt{-1} + 6 \cdot b^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Nesse momento, Bombelli novamente precisou admitir algumas propriedades a respeito desse novo número $\sqrt{-1}$, que mais tarde seria denominado unidade imaginária. Assim, foram estipulados os valores de suas primeiras potências:

$$\begin{cases} \text{Seu quadrado} \rightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \\ \text{Seu cubo} \rightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \end{cases}$$

**Atenção**

A aceitação da existência das raízes quadradas dos números negativos implicou diretamente na extensão do significado da operação de radiciação dos radicais com índices pares, de modo que as propriedades a seguir também são válidas nas raízes quartas, sextas, oitavas etc. Em relação ao cancelamento da raiz quadrada com o expoente 2, no conjunto dos números reais ocorre que:

- Se $x \geqslant 0$, então $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- Se $x \geqslant 0$, então $\sqrt{x^2} = x$.
- Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$.
- Se $x < 0$, então $\left(\sqrt{x}\right)^2$ não é uma expressão definida.

Mas no universo dos números complexos, sendo $x$ um número real positivo, negativo ou nulo, tem-se que:

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

Essas duas últimas propriedades ditam como proceder com as raízes quadradas de números reais e não devem ser aplicadas quando $x \notin \mathbb{R}$.

Dando continuidade à busca do valor do número real $b$:

$$8 + 12b\sqrt{-1} + 6b^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$8 + 12b\sqrt{-1} + 6b^2(-1) + b^3\left(-\sqrt{-1}\right) = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$8 + 12b\sqrt{-1} - 6b^2 - b^3\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$(8 - 6b^2) + (12b - b^3)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Bombelli resolveu comparar separadamente as partes que são múltiplas e não são múltiplas do número $\sqrt{-1}$.

Da comparação entre as partes não múltiplas:

$$8 - 6b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

Com $b = 1$ tem-se a confirmação da igualdade entre as partes múltiplas da unidade imaginária:

$$b = 1 \Rightarrow (12b - b^3)\sqrt{-1} = (12 - 1)\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$$

Então, com $a = 2$ e $b = 1$, Bombelli verificou que:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

E por um processo análogo concluiu também que:

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Então, finalmente, o matemático italiano conseguiu mostrar que o método de Tartáglia encontrava corretamente a solução real da equação cúbica $x^3 = 15x + 4$, mas que o processo todo passava pela extração da raiz quadrada de um número negativo, bem como a extração das raízes cúbicas de dois números complexos conjugados:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$
$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$
$$x = 4$$

## A unidade imaginária

Já no século XVII, os números complexos eram bem aceitos e amplamente utilizados pelos matemáticos europeus. Embora não houvesse consenso em relação às interpretações analítica ou geométrica da raiz quadrada de $-1$, o valor representado por $\sqrt{-1}$ ficava indicado nas resoluções apenas como recurso algébrico, que desapareceria com um posterior cancelamento dos termos $-\sqrt{-1}$ e $+\sqrt{-1}$ na operação de adição. Após o cancelamento, era encontrada a solução real de uma equação cúbica.

Somente em 1637 que o matemático e filósofo francês René Descartes referiu-se ao $\sqrt{-1}$ como sendo uma raiz imaginária, e, por isso, hoje nos referimos a $\sqrt{-1}$ como unidade imaginária.

Foi somente no final do século seguinte que o matemático suíço Leonhard Euler sugeriu o uso do símbolo $i$ para representar $\sqrt{-1}$ em uma publicação de 1794. A sugestão foi muito bem aceita por parte dos matemáticos da época. A partir de então, as expressões do tipo $\sqrt{-n}$, com $n > 0$, passaram a ser representadas por: $i \cdot \sqrt{n}$ ou $\sqrt{n} \cdot i$.

$$n > 0 \Rightarrow \sqrt{-n} = \sqrt{(-1) \cdot n} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n} = i \cdot \sqrt{n}$$

Exemplos:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1) \cdot 3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = i \cdot \sqrt{3}$$
$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$$
$$\sqrt{-8} = \sqrt{8 \cdot (-1)} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2} \cdot i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$
$$\sqrt{-16} = 4i$$
$$-\sqrt{-25} = -5i$$

## O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Multiplicando a unidade imaginária por algum número real diferente de zero, obtém-se um número denominado imaginário puro. Os números a seguir são exemplos de imaginários puros:

$$i \cdot \sqrt{3} \qquad 2i \qquad -2\sqrt{2} \cdot i \qquad 3i \qquad 0{,}4i \qquad -\frac{5}{6}i$$

O conjunto dos números imaginários puros será indicado por $i \cdot \mathbb{R}^*$.

Somando um número imaginário puro com um número real, obtém-se sempre um número complexo; além disso, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está contido no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

**Saiba mais**

Quando dois conjuntos numéricos A e B são tais que $A \subset B$, o conjunto B herda todas as propriedades aritméticas válidas do conjunto A, além de apresentar novas propriedades a respeito de seus elementos, desde que elas não entrem em contradição com alguma propriedade herdada.

O fato de $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, por exemplo, garante que todas as propriedades aritméticas válidas em $\mathbb{N}$ também devem ser válidas em $\mathbb{Z}$, que, por sua vez, possui propriedades inconcebíveis em $\mathbb{N}$, como a regra de sinais para o produto de suas unidades positiva $(+1)$ e negativa $(-1)$. Assim:

$$(+1) \cdot (+1) = +1$$
$$(-1) \cdot (+1) = -1$$
$$(+1) \cdot (-1) = -1$$
$$(-1) \cdot (-1) = +1$$

Da mesma forma, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos herda a regra de sinais válida no conjunto $\mathbb{R}$, mas apresenta algumas regras a mais, para suas unidades imaginárias positiva $(+i)$ e negativa $(-i)$. Assim:

$$(+1) \cdot (+i) = +i$$
$$(-1) \cdot (+i) = -i$$
$$(+1) \cdot (-i) = -i$$
$$(-1) \cdot (-i) = +i$$
$$(+i) \cdot (+i) = +i^2 = -1$$
$$(-i) \cdot (+i) = -i^2 = +1$$
$$(+i) \cdot (-i) = -i^2 = +1$$
$$(-i) \cdot (-i) = +i^2 = -1$$

Para construir um número complexo, basta que sejam escolhidos dois números reais, multiplicar um deles pela unidade imaginária e somar o outro número ao resultado. Os números reais escolhidos podem ser iguais ou diferentes, nulos ou não nulos.

Todo par ordenado de números reais $(a, b)$ define um número complexo $z$ no que chamamos de forma algébrica pela expressão:

$$z = a + bi$$

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos pode ser definido, a partir da forma algébrica de seus elementos:

$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Essa definição obedece à seguinte nomenclatura:
Parte real de $z$: $\text{Re}(z) = a$
Parte imaginária de $z$: $\text{Im}(z) = b$
Unidade imaginária: $i = \sqrt{-1}$

Um número complexo $z$ também pode ser representado de forma algébrica por:

$$z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$$

**! Atenção**

Embora a unidade imaginária não pertença ao conjunto dos números reais ($i \notin \mathbb{R}$), a parte imaginária de um número complexo é de fato um número real.
As partes reais e imaginárias de um número complexo podem ser interpretadas como as respectivas quantidades de unidades reais (1) e imaginárias ($i$). Assim, no número complexo $3 + 4i$, por exemplo, o número 3 indica a quantidade de unidades reais e o número 4 indica a quantidade de unidades imaginárias.

$$z = 3 + 4i = 3 \cdot (1) + 4 \cdot (i) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = 3 \\ \text{Im}(z) = 4 \end{cases}$$

## Conjugado de um número complexo

Bombelli percebeu a existência dos números complexos encontrando-os aos pares. De acordo com a história da Matemática, os dois primeiros números complexos encontrados foram:

$$z_1 = 2 + 11i$$
$$z_2 = 2 - 11i$$

Esses números, $z_1$ e $z_2$, possuem a mesma parte real:

$$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) = 2$$

Mas suas partes imaginárias têm sinais opostos:

$$\text{Im}(z_1) = +11$$
$$\text{Im}(z_2) = -11$$

Tais características decorrem do fato de esses números surgirem como soluções de uma mesma equação quadrática, com discriminante negativo ($\Delta < 0$).

Logo depois de encontrados os números complexos conjugados $z_1$ e $z_2$, foi necessário encontrar suas raízes cúbicas:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$$
$$\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$$

Observe que os números encontrados também mantêm as mesmas características:

$$\text{Re}(2 + i) = \text{Re}(2 - i) = 2$$
$$\text{Im}(2 + i) = +1$$
$$\text{Im}(2 - i) = -1$$

Dois números complexos com essas características são classificados como conjugados um do outro. Assim, sendo $z$ um número complexo, indica-se por $\bar{z}$ o seu conjugado e, dessa forma, tem-se que:

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z}) \\ \text{Im}(z) + \text{Im}(\bar{z}) = 0 \end{cases}$$

O conjugado de um número complexo é uma operação dual:

$$z = \bar{w} \Leftrightarrow w = \bar{z}$$
$$\bar{\bar{z}} = z$$

Sendo assim, é correto dizer, por exemplo, que:

- o conjugado de $2 + 11i$ é $2 - 11i \to \overline{2 + 11i} = 2 - 11i$
- o conjugado de $2 - 11i$ é $2 + 11i \to \overline{2 - 11i} = 2 + 11i$

De forma genérica, sendo $a$ e $b$ dois números reais quaisquer:

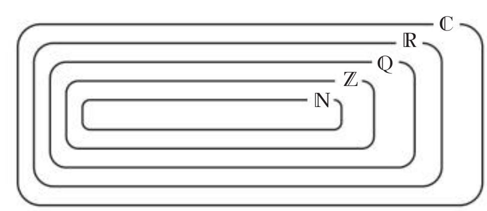
$$z = a + b \cdot i \Leftrightarrow \bar{z} = a - b \cdot i$$

Particularmente, o conjugado de um número real é ele mesmo, pois, com partes imaginárias nulas, tem-se: $a + 0 \cdot i = a - 0 \cdot i$, para todo $a$ real. Exemplo:

$$\bar{6} = \overline{6 + 0i} = 6 - 0i = 6$$

## Relações de inclusão

Com o advento do conjunto dos números complexos, a relação de inclusão entre todos os conjuntos numéricos estudados até aqui fica representada no seguinte diagrama:

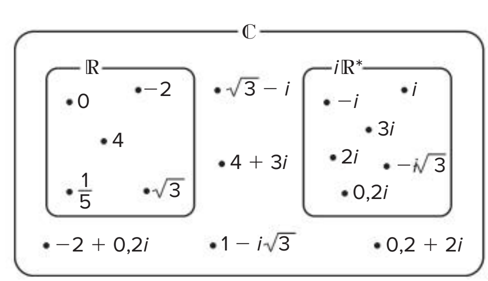



| $\mathbb{N}$ | $\subset$ | $\mathbb{Z}$ | $\subset$ | $\mathbb{Q}$ | $\subset$ | $\mathbb{R}$ | $\subset$ | $\mathbb{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | | Inteiros | | Racionais | | Reais | | Complexos |

### Subconjuntos de $\mathbb{C}$

Dois importantes subconjuntos de $\mathbb{C}$ merecem destaque em relação aos demais. São eles:

- O conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$
- O conjunto dos números imaginários puros: $i \cdot \mathbb{R}^*$




Assim, sendo $a$ e $b$ os números reais que definem o complexo $z = a + bi$, tem-se que $z$ é um número real se, e somente se, sua parte imaginária for nula.

$$a + bi \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0$$

Tem-se, ainda, que $z$ é imaginário puro se, e somente se, sua parte real for nula, mas sua parte imaginária não:

$$a + bi \in i\mathbb{R}^* \Rightarrow a = 0 \text{ e } b \neq 0$$

**Exercício resolvido**

**10.** Sendo $m$ um número real e $z = (m^2 - 9) + (m^2 - 3m)i$ um número complexo, determine $m$ tal que:

**a)** $z$ seja um número real;

**b)** $z$ seja um número imaginário puro.

**Resolução:**

As partes reais e imaginárias do número complexo $z$ são:

$\text{Re}(z) = m^2 - 9$

$\text{Im}(z) = m^2 - 3m$

**a)** $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Im}(z) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $m = 3$.

**b)** $z \in i \cdot \mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ ou } m = -3 \\ m^2 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \text{ e } m \neq 3 \end{cases}$$

Portanto, $m = -3$.

## Igualdade em $\mathbb{C}$

Os números complexos $z$ e $w$ são iguais se, e somente se, tiverem as mesmas partes reais e imaginárias.

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(w) \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(w) \end{cases}$$

Quando expressos em formas algébricas, tem-se que:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

**Exercício resolvido**

**11.** Sendo $x$ e $y$ números reais, para que os números complexos $x + (y + 1)i$ e $(2x + y) + xi$ sejam iguais é necessário que:

**a)** $x \cdot y = \frac{1}{4}$

**b)** $x \cdot y = -\frac{1}{4}$

**c)** $x \cdot y = \frac{1}{2}$

**d)** $x \cdot y = -\frac{1}{2}$

**e)** $x \cdot y = -1$

**Resolução:**

Se $x + (y + 1)i = (2x + y) + xi$, então:

- das partes reais, tem-se que: $x = 2x + y \Rightarrow x = -y$;
- das partes imaginárias, que: $y + 1 = x$.

Assim: $y + 1 = -y \Rightarrow 2y = -1$.

Portanto, $y = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Daí: $x \cdot y = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Alternativa: **B**

# Operações básicas na forma algébrica

Um número complexo fica representado em sua forma algébrica quando se deixam explícitas suas partes real e imaginária.

$$z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$$

Quando as partes real e imaginária de um mesmo número complexo forem frações de mesmo denominador, o número também pode ser representado como uma única fração.

O número complexo $z = \frac{2 + i}{5}$, por exemplo, é tal que:

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = \frac{2}{5} \\ \text{Im}(z) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Mesmo assim, recomenda-se escrever a forma algébrica separando as frações, $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, ou ainda utilizando números decimais, $z = 0{,}4 + 0{,}2 \cdot i$.

## Adição e subtração em $\mathbb{C}$

Para encontrar a soma de dois ou mais números complexos, basta efetuar separadamente a adição das partes reais e a adição das partes imaginárias dos números complexos, de modo que, sendo $z$ e $w$ dois números complexos:

A parte real de $z + w$ é a soma das partes reais de $z$ e $w$:

$$\text{Re}(z + w) = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$$

A parte imaginária de $z + w$ é a soma das partes imaginárias de $z$ e $w$:

$$\text{Im}(z + w) = \text{Im}(z) + \text{Im}(w)$$

Assim, sendo $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = \\ = (a + c) + (b + d)i$$

Da mesma maneira que na adição, encontra-se a diferença entre dois números complexos $z$ e $w$ subtraindo separadamente suas partes reais e imaginárias.

$$\text{Re}(z - w) = \text{Re}(z) - \text{Re}(w)$$

$$\text{Im}(z - w) = \text{Im}(z) - \text{Im}(w)$$

Assim, sendo $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = a - c + bi - di = \\ = (a - c) + (b - d)i$$

## Exercício resolvido

**12.** Sendo $z = 5 + 7i$ e $w = 2 + i$, assinale a alternativa que apresenta o número complexo com a maior parte imaginária.

a) $z + w$
b) $z - w$
c) $w - z$
d) $2w$
e) $2z - 5w$

**Resolução:**

a) $z + w = (5 + 7i) + (2 + i) = 5 + 2 + 7i + i = 7 + 8i$
b) $z - w = (5 + 7i) - (2 + i) = 5 - 2 + 7i - i = = 3 + 6i$
c) $w - z = (2 + i) - (5 + 7i) = 2 - 5 + i - 7i = -3 - 6i$
d) $2w = w + w = (2 + i) + (2 + i) = 4 + 2i$
e) $2z - 5w = 2 \cdot (5 + 7i) - 5 \cdot (2 + i) = 10 - 10 + 14i - 5i = 9i$

Alternativa: **E**

Tanto a adição quanto a subtração submetem-se à propriedade distributiva da conjugação de números complexos: $z \to \overline{z}$.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$
$$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

## Exercícios resolvidos

**13.** Sendo $z = 2 - 3i$ e $w = -1 + 2i$, calcule:

a) $\overline{z} + \overline{w}$
b) $\overline{z + w}$
c) $\overline{z} + w$
d) $z + \overline{w}$
e) $\overline{z + \overline{w}}$

**Resolução:**

a) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{(2 - 3i)} + \overline{(-1 + 2i)} = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$
b) $\overline{z + w} = \overline{(2 - 3i) + (-1 + 2i)} = \overline{2 - 3i - 1 + 2i} = \overline{1 - i} = 1 + i$
c) $\overline{z} + w = \overline{(2 - 3i)} + (-1 + 2i) = 2 + 3i - 1 + 2i = 1 + 5i$
d) $z + \overline{w} = (2 - 3i) + \overline{(-1 + 2i)} = 2 - 3i - 1 - 2i = 1 - 5i$
e) $\overline{z + \overline{w}} = \overline{z} + \overline{\overline{w}} = \overline{z} + w = \overline{(2 - 3i)} + (-1 + 2i) = 2 + 3i - 1 + 2i = 1 + 5i$

**14.** Da igualdade $2z - \overline{z} = 2 + 6i$, podemos afirmar que o número complexo $z = a + bi$ é

a) $2 + 6i$
b) $-2 + 2i$
c) $2 + 2i$
d) $2 + 3i$

**Resolução:**

Fazendo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, tem-se $\overline{z} = a - bi$. Assim, a equação fica:

$$2(a + bi) - (a - bi) = 2 + 6i$$
$$2a + 2bi - a + bi = 2 + 6i$$
$$a + 3bi = 2 + 6i$$

Comparando as partes reais, temos que $a = 2$. Comparando as partes imaginárias, temos: $3b = 6 \Rightarrow b = 2$. Portanto, $z = 2 + 2i$.

Alternativa: **C**

Particularmente, a soma e a diferença entre um número complexo $z$ e seu conjugado $\overline{z}$ dependem apenas de uma de suas partes.

$z + z = 2 \cdot \text{Re}(z) \Rightarrow (a + bi) + (a - bi) = a + a + bi - bi = 2a + 0i = 2a$

$z - \overline{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i \Rightarrow (a + bi) - (a - bi) = a - a + bi + bi = 0 + 2bi = 2bi$

## Multiplicação em $\mathbb{C}$

Efetua-se o produto de dois números complexos na forma algébrica obedecendo à propriedade distributiva da multiplicação. Para não cometer erros é necessário observar que:

| O produto de... | é sempre um... | Exemplo: |
|---|---|---|
| ... dois números reais | ... número real. | $2 \cdot 3 = 6$ |
| ... um número real por um imaginário puro | ... imaginário puro. | $2 \cdot 3i = 6i$ |
| ... dois números imaginários puros | ... número real. | $2i \cdot 3i = -6$ |

Assim, sendo $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se que:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di)$$
$$z \cdot w = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$z \cdot w = ac + (ad + cb)i + bd \cdot (-1)$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Com $z = 1 + 4i$ e $w = 3 - 2i$, por exemplo, tem-se o produto $z \cdot w = 11 + 10i$. Veja a seguir cada passo desse produto:

$$z \cdot w = (1 + 4i)(3 - 2i)$$
$$z \cdot w = 3 \underbrace{- 2i + 12i} - 8i^2$$
$$z \cdot w = 3 + 10i - 8 \cdot (-1)$$
$$z \cdot w = 3 + 10i + 8$$
$$z \cdot w = 11 + 10i$$

## Exercício resolvido

**15.** Sendo $x = 2 + 3i$, $y = 4 - 5i$ e $z = -1 + i$, assinale a alternativa com a operação cujo resultado é um número imaginário puro.

a) $x \cdot z$
b) $y \cdot z$
c) $x \cdot y$
d) $x^2$
e) $z^2$

**Resolução:**

**a)** $x \cdot z = (2 + 3i)(-1 + i) = -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 - i - 3 = -5 - i$
**b)** $y \cdot z = (4 - 5i)(-1 + i) = -4 + 4i + 5i - 5i^2 = -4 + 9i + 5 = 1 + 9i$
**c)** $x \cdot y = (2 + 3i)(4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 + 2i + 15 = 23 + 2i$
**d)** Usando a propriedade distributiva: $x^2 = x \cdot x = (2 + 3i)(2 + 3i) = 4 + 6i + 6i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$
Usando a identidade do quadrado da soma: $x^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$
**e)** Usando a identidade do quadrado da diferença: $z^2 = (-1 + i)^2 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Alternativa: **E**

A multiplicação também se submete à propriedade distributiva da conjugação de números complexos.

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

## Exercício resolvido

**16.** Sendo $z = 2 - 3i$ e $w = -1 + 2i$, calcule:

**a)** $\bar{z} \cdot \bar{w}$ **b)** $\overline{z \cdot w}$ **c)** $\bar{z} \cdot w$ **d)** $z \cdot \bar{w}$ **e)** $\overline{\bar{z} \cdot w}$ **f)** $z \cdot \bar{z}$ **g)** $w \cdot \bar{w}$

**Resolução:**

**a)** $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{(2 - 3i)} \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (2 + 3i) \cdot (-1 - 2i) = -2 - 4i - 3i - 6i^2 = -2 - 7i + 6 = 4 - 7i$

**b)** $\overline{z \cdot w} = \overline{(2 - 3i) \cdot (-1 + 2i)} = \overline{-2 + 4i + 3i - 6i^2} = \overline{-2 + 7i + 6} = \overline{4 + 7i} = 4 - 7i$

**c)** $\bar{z} \cdot w = \overline{(2 - 3i)} \cdot (-1 + 2i) = (2 + 3i) \cdot (-1 + 2i) = -2 + 4i - 3i + 6i^2 = -2 + i - 6 = -8 + i$

**d)** $z \cdot \bar{w} = (2 - 3i) \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (2 - 3i) \cdot (-1 - 2i) = -2 - 4i + 3i + 6i^2 = -2 - i - 6 = -8 - i$

**e)** $\overline{z \cdot \bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{w}} = \bar{z} \cdot w = -8 + i$

**f)** $z \cdot \bar{z} = (2 - 3i) \cdot \overline{(2 - 3i)} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$

**g)** $w \cdot \bar{w} = (-1 + 2i) \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (-1 + 2i) \cdot (-1 - 2i) = 1 + 2i - 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5$

Particularmente, o produto de um número complexo pelo seu conjugado resulta em um número real, que coincide com a soma dos quadrados de suas partes real e imaginária.

$$z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$$

Demonstração:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 \underbrace{-abi + abi}_{zero} - b^2 i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$$

## Exercício resolvido

**17.** Sendo $z$ o número complexo que satisfaz à equação $2z + 3\bar{z} = 10 + 4i$, então $z \cdot \bar{z}$ é igual a:

**a)** 5 **b)** 10 **c)** 20 **d)** 40 **e)** 80

**Resolução:**

Sendo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, temos que:

$$2(a + bi) + 3(a - bi) = 10 + 4i$$
$$2a + 2bi + 3a - 3bi = 10 + 4i$$
$$5a - bi = 10 + 4i$$

Comparando as partes reais: $5a = 10 \Rightarrow a = 2$.
Comparando as partes imaginárias: $-b = 4 \Rightarrow b = -4$.
Assim, temos que $z = 2 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 4i$.
Portanto: $z \cdot \bar{z} = (2 - 4i)(2 + 4i) = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$.
Alternativa: **C**

## Quociente em $\mathbb{C}$

O processo algébrico usado para encontrar o quociente entre dois números complexos parte do fato de que o símbolo $i$ representa uma raiz quadrada.

$$i = \sqrt{-1}$$

Por isso, a divisão de números complexos em suas formas algébricas é similar ao processo da racionalização de denominadores em expressões do tipo $\frac{a+bi}{c+di}$, com $a$, $b$, $c$ e $d$ reais.

Assim, multiplicam-se numerador e denominador da expressão pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

Como o produto de números complexos conjugados resulta em um número real, o denominador da fração pode ser distribuído pelas partes real e imaginária do resultado obtido no numerador da fração.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{ac+bci-adi-bd\cdot i^2}{c^2-cdi+cdi-d^2\cdot i^2} = \frac{ac+(bc-ad)i-bd\cdot(-1)}{c^2-d^2\cdot(-1)} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Sendo $z = 11 + 10i$ e $w = 3 - 2i$, por exemplo, o quociente $\frac{z}{w}$ é obtido multiplicando-se ambos esses números pelo conjugado do denominador: $\overline{w} = 3 + 2i$. Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{11+10i}{3-2i} = \frac{(11+10i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{33+22i+30i+20i^2}{9+6i-6i-4i^2} = \frac{33+52i-20}{9+4} = \frac{13+52i}{13} = \frac{13}{13} + \frac{52i}{13} = 1 + 4i$$

## Exercícios resolvidos

**18.** Sendo $z = 3 + 4i$ e $w = 1 + 2i$, calcule:

**a)** $\frac{z}{w}$

**b)** $\frac{w}{z}$

**c)** $\frac{1}{z}$

**d)** $\frac{1}{w}$

**Resolução:**

**a)** $\frac{z}{w} = \frac{3+4i}{1+2i} = \frac{(3+4i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{3-6i+4i-8i^2}{1^2+2^2} = \frac{3-2i+8}{1+4} = \frac{11-2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

**b)** $\frac{w}{z} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{3^2+4^2} = \frac{3+2i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

**c)** $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

**d)** $\frac{1}{w} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

**19.** Se $y = 3x$, sendo $x = \frac{1+i}{1-i}$ e $i = \sqrt{-1}$, o valor de $(2x + y)^2$ é:

**a)** $25i$
**b)** $-5 + i$
**c)** $-25$
**d)** $25$
**e)** $5 - i$

**Resolução:**

$$x = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Portanto, temos que $y = 3i$ e $(2x + y)^2 = (2i + 3i)^2 = (5i)^2 = 5^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$.
Alternativa: **C**

**20. Fuvest-SP** Sabendo que $\alpha$ é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero, então $\alpha$ é

a) $-4$
b) $-2$
c) 1
d) 2
e) 4

**Resolução:**

$$\frac{2+i}{\alpha+2i} = \frac{(2+i)\cdot(\alpha-2i)}{(\alpha+2i)\cdot(\alpha-2i)} = \frac{2\alpha-4i+\alpha i-2i^2}{\alpha^2+2^2} = \frac{2\alpha+(-4+\alpha)i+2}{\alpha^2+2^2} = \frac{2\alpha+2}{\alpha^2+4} + \frac{\alpha-4}{\alpha^2+4}i$$

Como Im(z) = 0, temos que: $\frac{\alpha-4}{\alpha^2+4} = 0 \Rightarrow \alpha-4=0 \Rightarrow \alpha=4$

Alternativa: **E**

**21.** Sendo $i$ a unidade imaginária e $x$ um número real, determine os valores de $x$ para os quais o número complexo $\frac{x+4i}{1+xi}$ é:

a) imaginário puro.
b) real.

**Resolução:**

Sendo $z = \frac{x+4i}{1+xi}$, temos:

$$z = \frac{x+4i}{1+xi} = \frac{(x+4i)\cdot(1-xi)}{(1+xi)\cdot(1-xi)} = \frac{x-x^2i+4i-4xi^2}{1^2+x^2} = \frac{x+(-x^2+4)i+4x}{1+x^2} = \frac{5x+(4-x^2)i}{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \frac{5x}{1+x^2} \\ \text{Im}(z) = \frac{4-x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

a) Se $z$ é imaginário puro, então Re($z$) = 0 e Im($z$) $\neq$ 0. De Re($z$) = 0, tem-se $\frac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ e, como para $x = 0$ tem-se Im($z$) = 4 $\neq$ 0, o número complexo $z = 4i$ é imaginário puro.

b) Se $z$ é real, então Im($z$) = 0. Assim: $\frac{4-x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$.

**! Atenção**

O conjunto dos números inteiros possui duas unidades distintas:

- a unidade positiva: $+1$.
- a unidade negativa: $-1$.

As unidades inteiras são números opostos, ou seja, sua soma é nula: $(+1) + (-1) = 0$.
Além disso, os números $(+1)$ e $(-1)$ são os únicos que coincidem com seus inversos multiplicativos:

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{-1} = -1$$

Já a unidade imaginária tem uma característica diferente e peculiar, que é o fato de seu inverso multiplicativo coincidir com o seu oposto, ou seja, $\frac{1}{i} = -i$.

## Exercício resolvido

**22. Uece 2015** Se os números complexos $z$ e $w$ estão relacionados pela equação $z + wi = i$ e se $z = 1 - \frac{1}{i}$, então, $w$ é igual a

a) $i$.
b) $1 - i$.
c) $-i$.
d) $1 + i$.

**Resolução:**

Como o conjugado do número $i$ é o número $-i$: $z = 1 - \frac{1}{i} = 1 - \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = 1 - \frac{-i}{1} = 1 + i$.

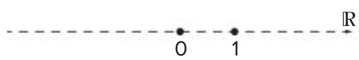
Assim: $z + wi = i \Rightarrow 1 + i + wi = i \Rightarrow wi = -1 \Rightarrow w = \frac{-1}{i} = \frac{-1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{i}{1} = i$.

Alternativa: **A**

## Representações geométricas dos números complexos

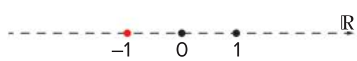
Desde a antiguidade, os números são usados para avaliar comprimentos, mas foram as ideias de René Descartes que nos levaram a usar os pontos de uma reta como representantes dos números reais, no modelo chamado de eixo real.

Tal modelo consiste na escolha de dois pontos distintos de uma mesma reta, atribuindo o valor 0 (zero) a um dos pontos e o valor 1 (um) ao outro ponto. O ponto associado ao zero passa a ser chamado de origem do eixo.




Feito isso, cada um dos demais pontos da reta fica imediatamente associado a um único número real e vice-versa.

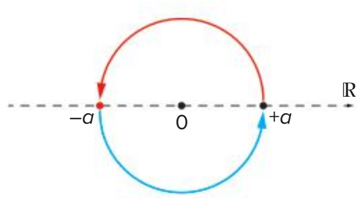
O ponto do eixo real associado à unidade negativa (−1) fica localizado de modo que a origem (0) seja o ponto médio do segmento determinado pelas duas unidades (+1) e (−1).




A origem do eixo real divide-o em duas semirretas: uma com todos os pontos associados aos números reais positivos, e a outra com os pontos associados aos números negativos.

### Rotações em torno da origem

Da forma como foi proposto, o eixo permite observar a relação entre dois números reais opostos ($+a$) e ($-a$) como se cada um deles fosse o resultado da rotação de 180° do outro, em torno da origem.




Assim, interpreta-se que a multiplicação de um número real pela unidade negativa (−1) promove uma rotação de 180° desse número em torno da origem.

$$(-1) \cdot (+a) = -a$$
$$(-1) \cdot (-a) = +a$$

A equivalência entre a multiplicação pela unidade negativa e a rotação de 180° em torno da origem do eixo real é algebricamente expressa com o auxílio da sigla "cis", que tem origem no estudo das funções trigonométricas seno e cosseno. Assim:

$$-1 = \text{cis}(180°)$$

Observe que:

**I.** Multiplicar um número real $r$ por (−1) duas vezes sucessivas equivale a multiplicá-lo por (+1).

**II.** Tomar uma figura geométrica e efetuar duas rotações sucessivas de 180° dela em torno de um mesmo ponto O equivale a efetuar uma única rotação de 360° da figura em torno de O.

**III.** Multiplicar um número por +1 não altera o valor desse número, bem como tomar uma figura e efetuar rotações de 360° não altera a posição da figura.

Assim, também se interpreta a multiplicação de um número real pela unidade positiva (+1) como uma rotação de 360° desse número em torno da origem.

Em termos algébricos, essas observações ficam expressas por:

**I.** $(-1) \cdot (-1) = +1$

**II.** $\text{cis}(180°) \cdot \text{cis}(180°) = \text{cis}(360°)$

**III.** $1 = \text{cis}(360°)$

Essas novas notações rotacionais para os números podem ser expressas em radianos:

$$-1 = \text{cis}(\pi)$$
$$+1 = \text{cis}(2\pi)$$

Seguindo esse padrão, a multiplicação pela unidade imaginária também possui uma interpretação rotacional. Observe que:

**I.** Multiplicar pela unidade imaginária ($i$) duas vezes sucessivas equivale a multiplicar por (−1).

**II.** Efetuar duas rotações sucessivas de 90° equivale a efetuar uma única rotação de 180°.

Em termos algébricos, essas observações ficam expressas por:

**I.** $(i) \cdot (i) = -1$

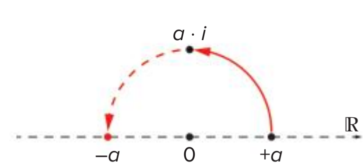
**II.** $\text{cis}(90°) \cdot \text{cis}(90°) = \text{cis}(180°)$

Conclui-se então que a multiplicação de um número qualquer pela unidade imaginária deva promover uma rotação de 90° do ponto que representa esse número em torno da origem do eixo real.

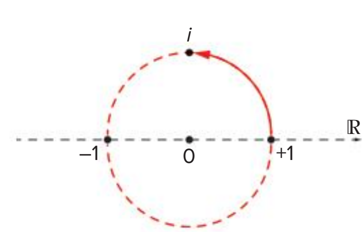
$$i = \text{cis}(90°)$$

Rotações de 180° e 360° geram o mesmo resultado, sejam elas no sentido horário ou anti-horário, mas as rotações de 90° não. Adota-se então que as rotações indicadas pela sigla cis são sempre feitas nos mesmos sentidos adotados no estudo do ciclo trigonométrico, ou seja:

- anti-horário para arcos positivos;
- horário para arcos negativos.

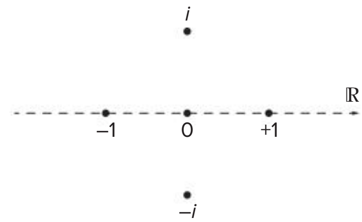



Por isso, representa-se a unidade imaginária por um ponto localizado logo acima da origem de um eixo real horizontal.



Os pontos onde se localizam as unidades (+1), (−1) e ($i$) estão todos a uma mesma distância da origem do eixo real.

O ponto associado à unidade imaginária negativa ($-i$) fica localizado de modo que a origem (0) seja o ponto médio do segmento determinado pelas duas unidades imaginárias ($+i$) e ($-i$).



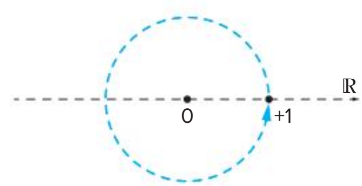

## Ciclos de potências da unidade imaginária

Tanto as unidades inteiras, positiva e negativa, quanto a unidade imaginária possuem potências de expoente inteiros que formam ciclos periódicos.

| (Base)$^{Exp}$ | ... | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (+1) | | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | |
| (−1) | | +1 | −1 | +1 | −1 | +1 | −1 | +1 | −1 | +1 | −1 | +1 | −1 | +1 | −1 | |
| ($i$) | | −1 | $-i$ | +1 | $+i$ | −1 | $-i$ | +1 | $+i$ | −1 | $-i$ | +1 | $+i$ | −1 | $-i$ | |

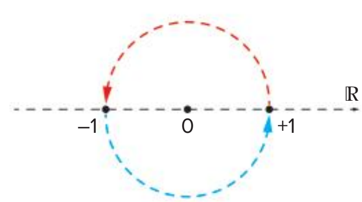
Usando as interpretações rotacionais das multiplicações pelas unidades (+1), (−1) e ($+i$) é possível perceber de maneira visual cada ciclo do quadro.

Como cada multiplicação por (+1) equivale a uma rotação de 360° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade positiva (+1) tem período de um termo:




$(+1)^n = +1$ para todo número inteiro $n$.

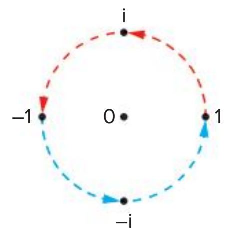
Como cada multiplicação por (−1) equivale a uma rotação de 180° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade negativa (−1) tem período de dois termos:




$$\begin{cases} (-1)^n = +1, \text{ se } n \text{ é um número par.} \\ (-1)^n = -1, \text{ se } n \text{ é um número ímpar.} \end{cases}$$

Como cada multiplicação por ($+i$) equivale a uma rotação de 90° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade imaginária ($i$) tem período de quatro termos:

$$\begin{cases} (i)^n = +1, \text{ se } n \text{ é um múltiplo de 4.} \\ (i)^n = +i, \text{ se } n \text{ deixa resto 1 quando dividido por 4.} \\ (i)^n = -1, \text{ se } n \text{ deixa resto 2 quando dividido por 4.} \\ (i)^n = -i, \text{ se } n \text{ deixa resto 3 quando dividido por 4.} \end{cases}$$




Assim, sendo $r$ o resto da divisão de um número inteiro $n$ pelo número 4, tem-se que:

$$(i)^n = (i)^r$$

## Exercícios resolvidos

**23.** O valor da soma $S = i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{10}$ é igual a

**a)** $1 + i$
**b)** $-1 + i$
**c)** $1 - i$
**d)** $-1 - i$
**e)** 0

**Resolução:**

$i^1 = i$ $\quad$ $i^5 = i^1 = i$ $\quad$ $i^9 = i^1 = i$
$i^2 = -1$ $\quad$ $i^6 = i^2 = -1$ $\quad$ $i^{10} = i^2 = -1$
$i^3 = -i$ $\quad$ $i^7 = i^3 = -i$
$i^{40} = 1$ $\quad$ $i^8 = i^4 = 1$

Somando todas essas igualdades, obtém-se:
$S = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = -1 + i$
Alternativa: **B**

**24.** Sendo $i$ a unidade imaginária, calcule o valor da expressão $E = i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$.

**a)** 0
**b)** 1
**c)** $-1$
**d)** $i$
**e)** $-i$

**Resolução:**

Dividindo 2011 por 4, obtém-se resto 3, portanto $i^{2011} = i^3 = -i$.

Dividindo 2012 por 4, obtém-se resto 0, portanto $i^{2012} = i^0 = 1$.

Dividindo 2013 por 4, obtém-se resto 1, portanto $i^{2013} = i^1 = i$.

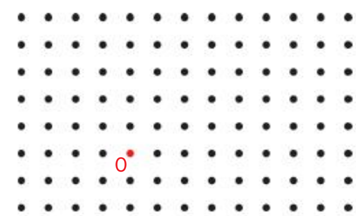
Logo: $E = i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} = -i + 1 + i = 1$.
Alternativa: **B**

## Números inteiros de Gauss

No início do século XIX, o astrônomo e matemático alemão Carl Friedrich Gauss publicou alguns artigos a respeito dos números complexos, em que tanto a parte real quanto a parte imaginária eram números inteiros.

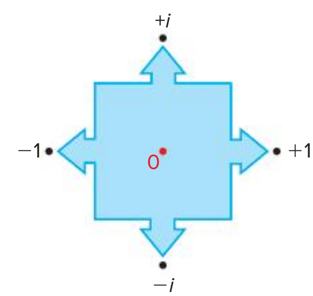
$$\{z = a + b \cdot i \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Conhecidos hoje como números inteiros de Gauss, esses números podem ser representados geometricamente em uma malha de pontos coplanares alinhados horizontalmente e verticalmente, como vértices de quadrados congruentes e adjacentes:

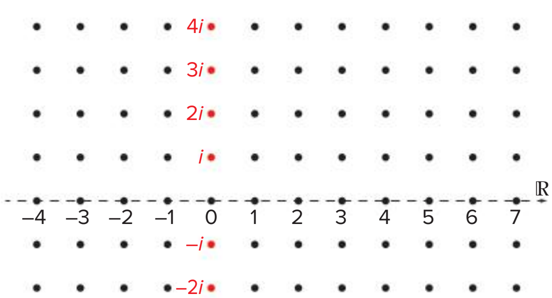



Uma vez escolhido o ponto da malha que irá representar o número zero, os quatro pontos indicados ficam representando os números:

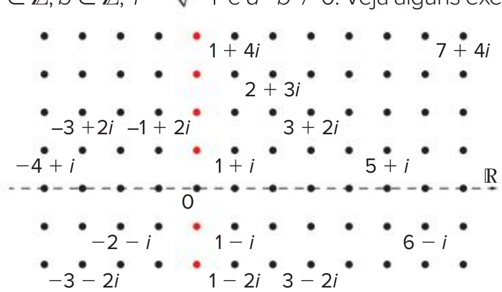
+1 à direita
−1 à esquerda
+ $i$ acima
− $i$ abaixo




Dessa forma, os demais números inteiros ficam alinhados sobre um eixo real horizontal e os demais imaginários puros, com parte imaginária inteira, ficam alinhados verticalmente acima e abaixo da origem.




Os pontos da malha, localizados fora das linhas horizontal e vertical que passam pela origem, representam os demais números inteiros de Gauss, ou seja, os complexos $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$ e $a \cdot b \neq 0$. Veja alguns exemplos:

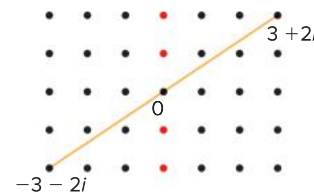



### Posições relativas

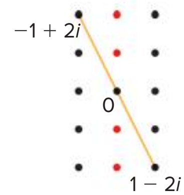
Diversas propriedades geométricas dos números complexos podem ser observadas nos pontos em destaque na figura anterior.

Números complexos opostos ocupam posições simétricas em relação à origem da malha. Exemplos:

$z = 3 + 2i \Rightarrow -z = -3 - 2i$

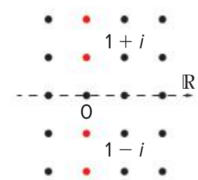



$w = 1 - 2i \Rightarrow -w = -1 + 2i$

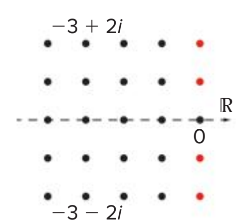



Números complexos conjugados ocupam posições simétricas em relação ao eixo dos números reais. Exemplos:

$z = 1 + i \Rightarrow \overline{z} = 1 - i$



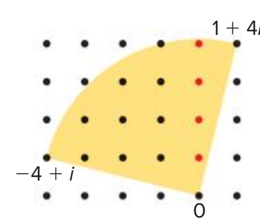

$w = -3 + 2i \Rightarrow \overline{w} = -3 - 2i$




Multiplicar um número complexo $z$ pela unidade imaginária ($i$) equivale a efetuar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem. Exemplo:

$z = 1 + 4i$

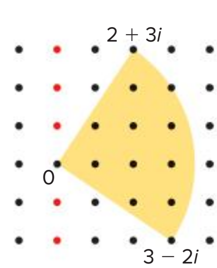
$w = z \cdot i = (1 + 4i) \cdot i = i + 4 \cdot i^2 = -4 + i$




Dividir um número complexo $z$ pela unidade imaginária ($i$) equivale a efetuar uma rotação de 90° no sentido horário em torno da origem. Exemplo:

$z = 2 + 3i$

$w = \frac{z}{i} = (2 + 3i) \cdot (-i) = -2i - 3 \cdot i^2 = +3 - 2i$



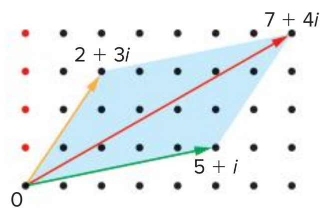

**! Atenção**

Dividir um número complexo $z$ pela unidade imaginária é o mesmo que multiplicar $z$ pelo oposto da unidade imaginária.

$$\frac{z}{i} = z \cdot (-i)$$

Se os números complexos $z$ e $w$ forem associados a dois vetores partindo da origem do sistema, percebe-se que a soma $z + w$ obedece à regra do paralelogramo para a soma vetorial. Exemplo:

$$\left.\begin{matrix} z = 2 + 3i \\ w = 5 + i \end{matrix}\right\} \Rightarrow z + w = 7 + 4i$$




## O plano de Wessel-Argand-Gauss

Dois séculos depois da descoberta dos números complexos, o conhecimento de suas propriedades evoluiu até ganharem interpretações geométricas, passando a representar localizações de pontos em um plano.

Parte da evolução dessa teoria deve-se à representação cartesiana dos números complexos, proposta pela primeira vez, em 1797, pelo topógrafo norueguês Gaspar Wessel e posteriormente pelo matemático amador Robert Argand, em 1806. Mas foi um trabalho publicado por Gauss, em 1812, que realmente difundiu o modelo do plano complexo.

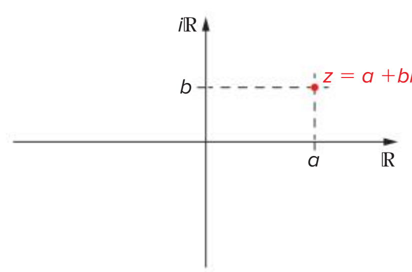
Esse modelo matemático consiste em uma adaptação do plano cartesiano tradicional, em que o eixo das abscissas continua representando o conjunto dos números reais, enquanto o eixo das ordenadas, com exceção da origem, passa a representar o conjunto dos imaginários puros.

### Afixo de um número complexo

No plano complexo, cada número $z = a + bi$ fica representado por um único ponto que é seu afixo (ou imagem) e cujas coordenadas cartesianas são $(a, b)$. Assim:

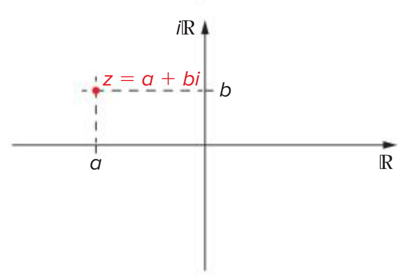
Se um número complexo tem partes real e imaginária positivas, então seu afixo se localiza no 1º quadrante do plano complexo.

$$\text{Re}(z) = a > 0$$
$$\text{Im}(z) = b > 0$$



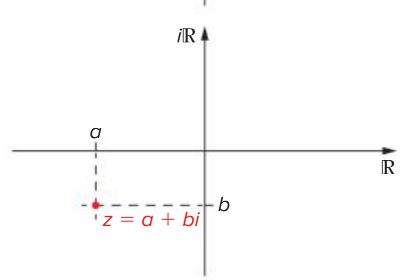

Se um número complexo tem parte real negativa e imaginária positiva, então seu afixo se localiza no 2º quadrante do plano complexo.

$$\text{Re}(z) = a < 0$$
$$\text{Im}(z) = b > 0$$



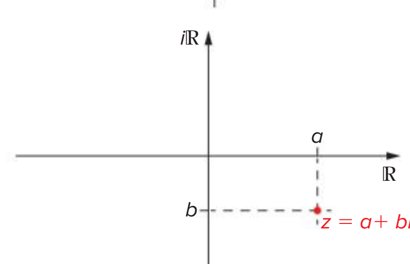

Se um número complexo tem partes real e imaginária negativas, então seu afixo se localiza no 3º quadrante do plano complexo.

$$\text{Re}(z) = a < 0$$
$$\text{Im}(z) = b < 0$$




Se um número complexo tem parte real positiva e imaginária negativa, então seu afixo se localiza no 4º quadrante do plano complexo.

$$\text{Re}(z) = a > 0$$
$$\text{Im}(z) = b < 0$$



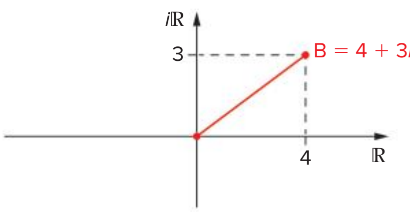
## Exercícios resolvidos

**25.** No plano complexo, os vértices A e B de um quadrado ABCD são respectivamente representados pelos afixos dos números complexos A = 0 e B = 4 + 3$i$. Sabendo que o vértice D pertence ao 2º quadrante, pode-se concluir que o vértice C é representado pelo afixo do número:

**a)** 7 + $i$
**b)** 1 + 7$i$
**c)** 2 + 6$i$
**d)** 6 + 2$i$
**e)** 3 + 3$i$

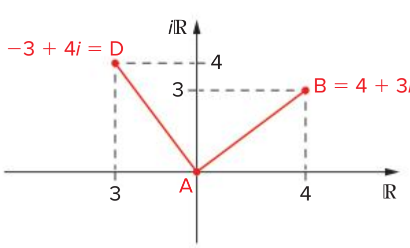
**Resolução:**

Representando os pontos A e B no plano complexo, tem-se o lado $\overline{AB}$ do quadrado:



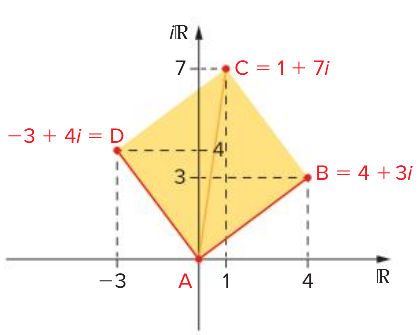

Como multiplicar um número complexo pela unidade imaginária equivale a efetuar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem e o vértice A do quadrado é a origem do sistema, para obter o vértice D no 2º quadrante, basta multiplicar B pela unidade imaginária. Assim:

$$D = B \cdot i = (4 + 3i) \cdot i = 4i + 3i^2 = -3 + 4i$$




Como quadrados também são paralelogramos, o vértice C pode ser obtido somando-se os números complexos B e D.

$C = B + D = (4 + 3i) + (-3 + 4i) = (4 - 3) + (3 + 4)i =$
$= 1 + 7i$

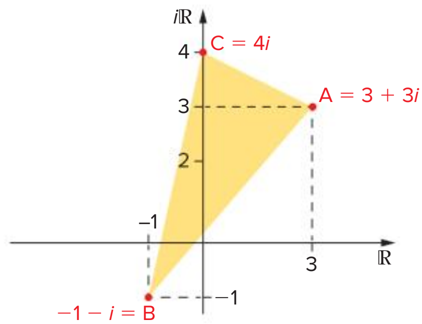



Alternativa: **B**

**26. FGV-RJ 2012** Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2(1 + i)$, em que $i$ é o número complexo tal que $i^2 = -1$. Represente, no plano complexo, o triângulo cujos vértices são os afixos dos números complexos $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ e $z_1 \cdot z_2$. Calcule a sua área.

**Resolução:**

Os vértices do triângulo são os pontos:
$A = z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 + 2i) = 1 + i + 2 + 2i = 3 + 3i$
$B = z_1 - z_2 = (1 + i) - (2 + 2i) = 1 + i - 2 - 2i = -1 - i$
$C = z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (2 + 2i) = 2 + 2i + 2i + 2i^2 = 2 +$
$+ 4i - 2 = 4i$
Representando o triângulo no plano complexo, tem-se:




Os afixos dos números complexos associados aos vértices do triângulo ABC são: A(3, 3), B(−1, −1) e C(0, 4). Assim, utilizando a regra de Sarrus, podemos determinar a área do triângulo:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 4 - 0 - 12 + 3 = -16$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-16| = \frac{16}{2} = 8 \text{ unidades de área}$$

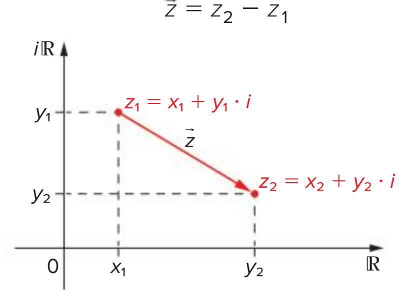
## Vetores e números complexos

Além da interpretação geométrica do número complexo $z = a + bi$ como um ponto localizado em um sistema de coordenadas cartesianas, existe também a interpretação vetorial para o resultado da subtração de dois números complexos $z_1$ e $z_2$. Assim, sendo $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ os respectivos afixos dos complexos $z_1$ e $z_2$:

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$$

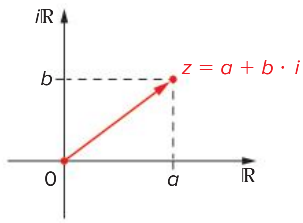
A diferença $z = z_2 - z_1$ pode ser interpretada como o vetor responsável pela translação do ponto $(x_1, y_1)$ para o ponto $(x_2, y_2)$. Nesses casos, a notação vetorial pode ser usada para distinguir as interpretações:

$$\vec{z} = z_2 - z_1$$



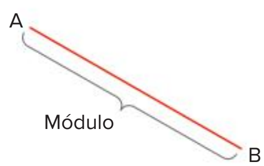
Todo número complexo pode ser geometricamente interpretado das duas formas: como localização fixa ou como o deslocamento de um ponto a outro, dependendo da necessidade do problema.

$$\vec{z} = z - 0$$

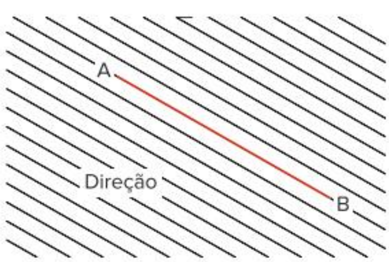



**Vetores** são entidades matemáticas definidas por três características: módulo, direção e sentido. Representando um vetor $\vec{z}$ no plano complexo como um segmento de reta $\overline{AB}$, orientado por uma seta em uma de suas extremidades, tem-se que:

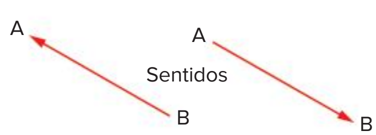
**1.** O módulo do vetor é dado pelo comprimento do segmento de reta.




**2.** A direção do vetor é dada pelo feixe de retas paralelas ao segmento.




**3.** O sentido do vetor é dado pela extremidade do segmento onde está a seta.

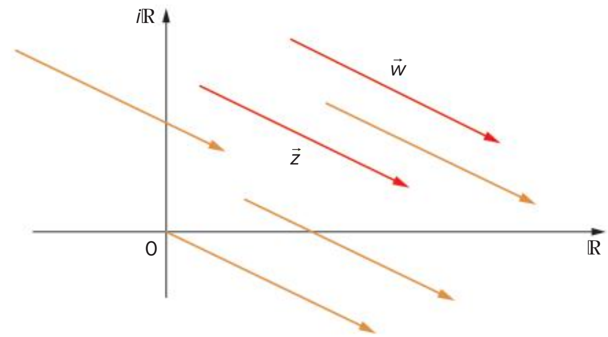



## Igualdade de vetores

A relação de equivalência entre segmentos de reta orientados é denominada equipolência. Trata-se do conceito que determina a igualdade entre dois ou mais vetores.

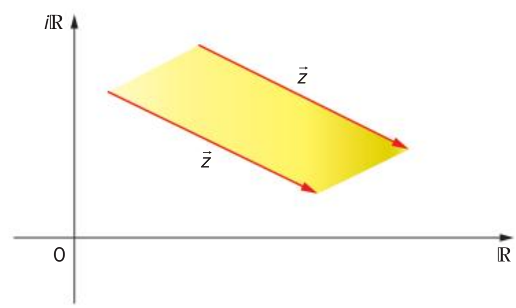
$$\vec{z} = \vec{w}$$

Vetores não nulos $\vec{z}$ e $\vec{w}$ são iguais ou equipolentes se, e somente se, tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. A localização dos segmentos de reta que os representa no plano complexo não precisa ser necessariamente a mesma, de modo que um mesmo vetor pode ser representado graficamente em várias localizações diferentes.

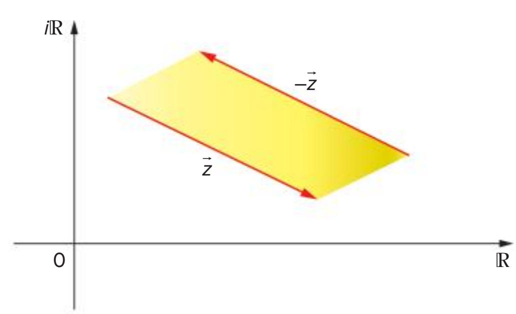



Verificando que todos os segmentos orientados da figura têm o mesmo comprimento, são paralelos entre si e têm suas setas orientadas no mesmo sentido, é correto afirmar que todos os segmentos são representações gráficas do mesmo vetor.

Quando um mesmo vetor está representado no plano complexo por dois segmentos orientados diferentes, as quatro extremidades dos segmentos determinam a figura de um paralelogramo.




Quando dois vetores opostos estão representados, as quatro extremidades dos segmentos que os representam também determinam a figura de um paralelogramo.




## Exercício resolvido

**27. Unifesp** Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é

**a)** $2 + 3i$

**b)** $3 + \frac{11}{2}i$

**c)** $3 + 5i$

**d)** $2 + \frac{11}{2}i$

**e)** $4 + 5i$

**Resolução:**

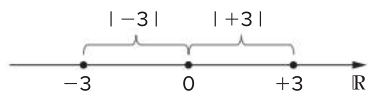
Se os afixos dos números $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$ são vértices de um paralelogramo e o afixo de $z_4$ situa-se no primeiro quadrante, então os vetores $z_1 - z_2$ e $z_3 - z_4$ são equipolentes:

$$z_1 - z_2 = z_3 - z_4 \Rightarrow -3 - 3i - 1 = -1 + \frac{5}{2}i - z_4 \Rightarrow z_4 = \frac{5}{2}i + 3 + 3i \Rightarrow z_4 = 3 + \frac{11}{2}i$$

Alternativa: **B**

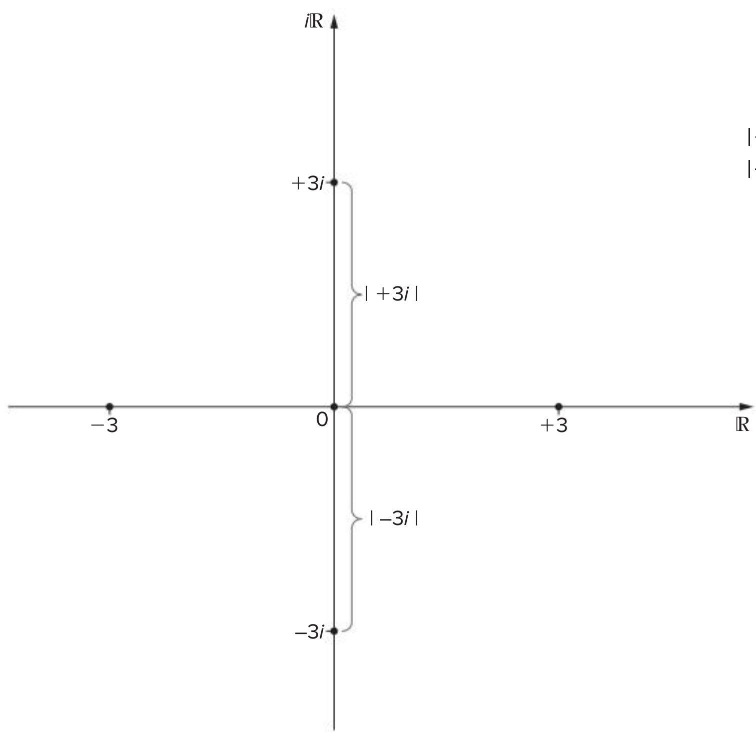
## Módulo de um número complexo

O módulo ou valor absoluto de um número real $x$, positivo ou negativo, é sempre igual ao comprimento do segmento de reta que une a origem do eixo real ao ponto que representa o número $x$. Assim, $|x|$ indica a distância de um ponto do eixo real até sua origem.




$|+3| = 3$
$|-3| = 3$

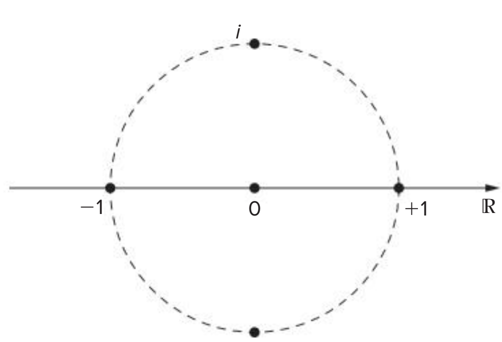
O mesmo ocorre com os números imaginários puros, positivos ou negativos. Seus módulos também são comprimentos de segmentos de reta.



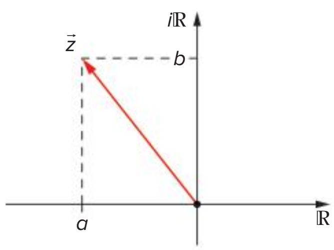

$|+3i| = 3$
$|-3i| = 3$

Particularmente, todas as unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss têm módulo unitário. Observe que os segmentos de reta com extremidades em seus afixos e na origem do eixo real são raios de uma mesma circunferência:

$|1| = 1$
$|-1| = 1$
$|i| = 1$
$|-i| = 1$



No caso de um número complexo da forma $a + bi$, com $a \cdot b \neq 0$, a interpretação vetorial de $z$ permite representá-lo por uma seta que liga a origem ao afixo $(a, b)$. A figura a seguir representa um número complexo cujo afixo está situado no 2º quadrante do plano complexo: $a < 0$ e $b > 0$.




O módulo de um número complexo $z$ é o comprimento da diagonal do retângulo cujos lados são os módulos das partes real e imaginária de $z$. Assim, do teorema de Pitágoras, temos:

$$|\vec{z}|^2 = |a|^2 + |b|^2$$

Como em $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, os quadrados dos números $a$ e $b$ não podem ser negativos; logo, a indicação de seus módulos é desnecessária. Assim:

$$\left|\vec{z}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplos:

**a)** $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

**b)** $|-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

**c)** $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

**d)** $\left|-\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

Uma fórmula mais genérica para o módulo de um número complexo pode ser expressa em função de suas partes reais e imaginárias por:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + Im(z)^2}$$

**! Atenção**

Números complexos conjugados possuem mesmo módulo:

$$|\bar{z}| = |z|$$

O produto de um número complexo $z$ pelo seu conjugado $\bar{z}$ é igual ao quadrado de seu módulo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

O módulo do produto é igual ao produto dos módulos:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

O módulo do quociente é igual ao quociente dos módulos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

O módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

## Exercícios resolvidos

**28.** Considere os números reais X e Y, tais que:

- X é o módulo da soma dos números complexos $(-4 + 3i)$ e $(2 + i)$.
- Y é a soma dos módulos dos números complexos $(-4 + 3i)$ e $(2 + i)$.

Nessas condições, é correto afirmar que:

**a)** $2Y - X = 10$
**b)** $X + 2Y = 10$
**c)** $Y - 2X = 10$
**d)** $2X + Y = 10$
**e)** $X = Y$

**Resolução:**

Como $(-4 + 3i) + (2 + i) = -2 + 4i$, tem-se que:

$$X = |-2 + 4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Como

$$\begin{cases} |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \\ |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \end{cases},$$

tem-se que $Y = 5 + \sqrt{5}$.

Logo:

$2Y - X = 2 \cdot \left(5 + \sqrt{5}\right) - 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 10.$

Alternativa: **A**

**29.** **FGV-SP 2012** O número complexo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, satisfaz $z + |z| = 2 + 8i$, com $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nessas condições, $|z|^2$ é igual a:

**a)** 68
**b)** 100
**c)** 169
**d)** 208
**e)** 289

**Resolução:**

Fazendo $z = a + bi$, tem-se:

$$z + |z| = 2 + 8i$$
$$a + bi + |a + bi| = 2 + 8i$$
$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$
$$\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) + bi = 2 + 8i$$

Comparando as partes imaginárias de ambos os membros, verificamos que $b = 8$.

Comparando as partes reais, temos que:

$a + \sqrt{a^2 + 8^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$, assim:

$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \Rightarrow \left(\sqrt{a^2 + 64}\right)^2 = (2 - a)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 64 = 4 - 4a + a^2 \Rightarrow 4a = -60 \Rightarrow a = -15$

Logo: $|z|^2 = a^2 + b^2 = (-15)^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289.$

Alternativa: **E**

**30. Unifesp** Os números complexos $z_1$, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde $a$ é um número real positivo, representam, no plano complexo, vértices de um triângulo equilátero. Dado que $|z_1 - z_2| = 2$, o valor de $a$ é:

a) 2.

b) 1.

c) $\sqrt{3}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{1}{2}$.

**Resolução:**

A sentença $|z_1 - z_2| = 2$ informa que o lado do triângulo equilátero mede 2. Sendo assim, tem-se:

$$\left|z_3 - z_2\right| = 2 \Rightarrow \left|a\sqrt{3} + ai - 2i\right| = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|a\sqrt{3} + (a-2)i\right| = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + (a-2)^2} = 2 \Rightarrow 3a^2 + a^2 - 4a + 4 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } a = 0$$

Como $a$ é um número positivo, tem-se: $a = 1$.
Alternativa: **B**

## Argumento de um número complexo

Dado um número complexo $z$, considere os arcos trigonométricos determinados pelo semieixo real positivo e o vetor associado a $z$. As medidas, em graus ou radianos, desses arcos são chamadas de argumentos do número complexo.

A menor medida não negativa $\theta$, de um argumento de $z$, é indicada pela sigla Arg e denominada argumento principal de $z$. Assim, tem-se:

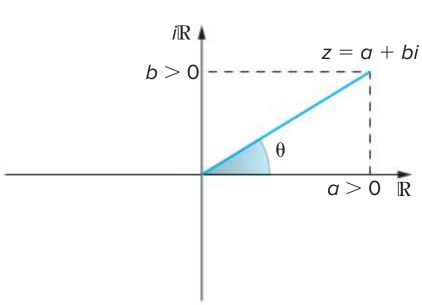
| Argumento principal | Em graus | Em radianos |
|---|---|---|
| $\theta = \text{Arg}(z)$ | $0° \leq \theta < 360°$ | $0 \leq \theta < 2\pi$ |

Cada número complexo não nulo possui uma infinidade de argumentos que, em graus, diferem em algum múltiplo de 360°. Assim, as medidas −240°, 120° e 480°, por exemplo, podem ser argumentos de um mesmo número complexo $z$. Nesse caso, o argumento principal é: $\text{Arg}(z) = 120°$.

Sendo $z$ um número complexo da forma $a + bi$, com $a \cdot b \neq 0$, há quatro casos a serem considerados a respeito da medida em graus: $\theta = \text{Arg}(z)$.

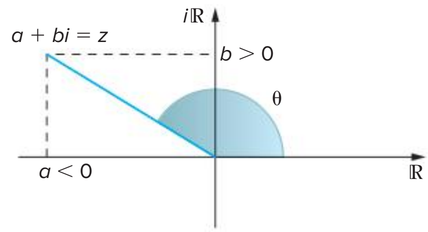
- Se o afixo $(a, b)$ pertence ao 1º quadrante, então:

$$0° < \theta < 90°$$



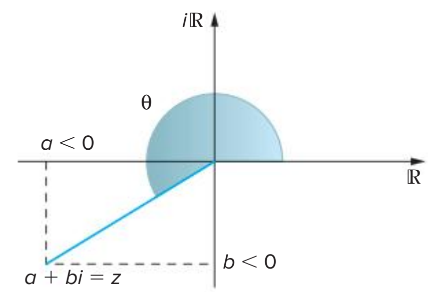

- Se o afixo $(a, b)$ pertence ao 2º quadrante, então:

$$90° < \theta < 180°$$



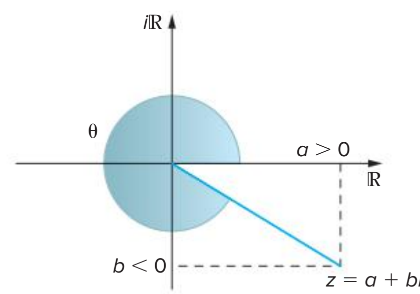

- Se o afixo $(a, b)$ pertence ao 3º quadrante, então:

$$180° < \theta < 270°$$




- Se o afixo $(a, b)$ pertence ao 4º quadrante, então:

$$270° < \theta < 360°$$




Particularmente, os números reais positivos têm argumento nulo, e os números reais negativos têm argumento em graus igual a 180°. Exemplos: $\begin{cases} \text{Arg}(+1) = 0° \\ \text{Arg}(-1) = 180° \end{cases}$

Além disso, em graus, os números imaginários puros positivos têm argumento 90°, e os imaginários puros negativos têm argumento 270°. Exemplos: $\begin{cases} \text{Arg}(+i) = 90° \\ \text{Arg}(-i) = 270° \end{cases}$

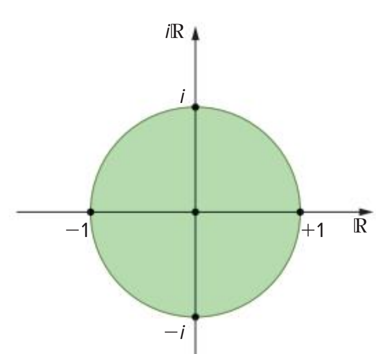
Em radianos, os argumentos principais das unidades do conjunto dos inteiros de Gauss são:

$\text{Arg}(+1) = 0$

$\text{Arg}(+i) = \frac{\pi}{2}$

$\text{Arg}(-1) = \pi$

$\text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$




FRENTE 2

## Exercício resolvido

**31.** Encontre os argumentos principais, em graus, dos seguintes números:

**a)** $z = -7$ **c)** $x = -5i$
**b)** $w = 6$ **d)** $y = 4i$

**Resolução:**

**a)** $-7$ é um número real negativo. Portanto, $\text{Arg}(-7) = 180°$.
**b)** 6 é um número real positivo. Portanto, $\text{Arg}(6) = 0°$.
**c)** $-5i$ é um imaginário puro negativo. Portanto, $\text{Arg}(-5i) = 270°$.
**d)** $4i$ é imaginário puro positivo. Portanto, $\text{Arg}(4i) = 90°$.

O valor do módulo e os valores das partes real e imaginária de um número complexo $z$ podem ser usados para exprimir as frações para as imagens das funções trigonométricas dos argumentos de $z$.

Assim, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$, tem-se:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} \qquad \cos(\theta) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$$

E, se $z$ não for imaginário puro:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$$

Na prática, o valor do argumento principal de um número complexo $z$, que não é real nem imaginário puro, pode ser mais facilmente obtido calculando primeiro o valor de sua tangente e depois observando o quadrante em que se encontra o afixo de $z$. Exemplos:

**a)** Sendo $\theta = \text{Arg}(6 + 6i)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{6}{6} = 1 \\ 6 + 6i \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45°$$

**b)** Sendo $\theta = \text{Arg}\left(-2 + 2\sqrt{3}i\right)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \\ -2 + 2\sqrt{3}i \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 180° - 60° = 120°$$

**c)** Sendo $\theta = \text{Arg}\left(-\sqrt{3} - i\right)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} - i \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 180° + 30° = 210°$$

**d)** Sendo $\theta = \text{Arg}(1 - i)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ 1 - i \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 360° - 45° = 315°$$

## Exercício resolvido

**32.** A soma dos argumentos principais dos complexos $z = -2 + 2i$ e $w = 3 + \sqrt{3}i$, em graus, é igual a:

**a)** 180° **c)** 115° **e)** 75°
**b)** 165° **d)** 90°

**Resolução:**

Sendo $\alpha = \text{Arg}(z)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\alpha) = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 180° - 45° = 135°$$

Sendo $\beta = \text{Arg}(w)$, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}(\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ w \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \beta = 30°$$

Logo, $\alpha + \beta = 135° + 30° = 165°$.
Alternativa: **B**

**Saiba mais**

Os números complexos são classificados de acordo com seus argumentos.
Sendo $\theta$ um argumento, em radianos, do número complexo $z$ e $k$ um número inteiro, temos que:

- se $z$ é um número real, então: $\theta = k\pi$.
- se $z$ é imaginário puro, então: $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

# Forma trigonométrica de um número complexo

Dado um número complexo $z$ não nulo, sendo $\theta$ um de seus argumentos, tem-se que:

$$\begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|} \Rightarrow \text{Im}(z) = |z| \cdot \text{sen}\theta \\ \cos\theta = \dfrac{\text{Re}(z)}{|z|} \Rightarrow \text{Re}(z) = |z| \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Assim, substituindo as partes real e imaginária da forma algébrica do número $z$, obtém-se:

$$z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i \Rightarrow z = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \text{sen}\theta \cdot i$$

Finalmente, colocando em evidência o módulo do complexo $z$, encontra-se a expressão que é chamada de forma trigonométrica do número complexo:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Há uma abreviação para a expressão entre parênteses na forma trigonométrica. As primeiras letras das funções cosseno e seno, intercaladas pela letra $i$, que é a unidade imaginária, geram a sigla cis:

$$\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta = \text{cis}\,\theta$$

A forma trigonométrica de um número complexo também pode ser escrita como:

$$z = |z| \cdot \text{cis}\theta$$

Quando um número complexo tem módulo unitário, sua forma trigonométrica fica expressa apenas por cis$\theta$. Assim, as formas trigonométricas das unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss são:

$1 = \text{cis}0°$ | $i = \text{cis}90°$ | $-1 = \text{cis}180°$ | $-i = \text{cis}270°$

Em alguns casos, quando o argumento principal de um número complexo é $\theta > 180°$, o maior argumento negativo equivalente costuma ser usado nas formas trigonométricas como, por exemplo:

$$-i = \text{cis}270° = \text{cis}(-90°)$$

Assim, dois números complexos conjugados podem ser representados usando-se arcos opostos nas suas formas trigonométricas:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \Rightarrow \bar{z} = |z| \cdot (\cos(-\theta) + i \cdot \text{sen}(-\theta))$$

$$\overline{\text{cis}\theta} = \text{cis}(-\theta)$$

## Exercício resolvido

**33.** Escreva os seguintes números complexos em suas formas trigonométricas:

a) 5
b) −8
c) $10i$
d) $-11i$
e) $1 - i$
f) $-2 - 2i$
g) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$
h) $-1 + i\sqrt{3}$

**Resolução:**

a) Como $|5| = 5$ e $\text{Arg}(5) = 0°$, tem-se:
$5 = 5(\cos 0° + i \cdot \text{sen}\, 0°)$

b) Como $|-8| = 8$ e $\text{Arg}(-8) = 180°$, tem-se:
$-8 = 8(\cos 180° + i \cdot \text{sen}\, 180°)$

c) Como $|10i| = 10$ e $\text{Arg}(10i) = 90°$, tem-se:
$10i = 10(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\, 90°)$

d) Como $|-11i| = 11$ e $\text{Arg}(-11i) = 270°$, tem-se:
$-11i = 11(\cos 270° + i \cdot \text{sen}\, 270°)$

e) Sendo $z = 1 - i$, tem-se:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ z \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 360° - 45° = 315°$$

Portanto: $1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i \cdot \text{sen}\, 315°)$.

f) Sendo $z = -2 - 2i$, tem-se:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 180° + 45° = 225°$$

Portanto: $-2 - 2i = 2\sqrt{2}\,(\cos 225° + i \cdot \text{sen}\, 225°)$.

g) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, tem-se:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 30°$$

Portanto: $\dfrac{\sqrt{3} + i}{2} = (\cos 30° + i \cdot \text{sen}\, 30°)$.

h) Sendo $z = -1 + i\sqrt{3}$, tem-se:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 180° - 60° = 120°$$

Portanto: $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 120° + i \cdot \text{sen}\, 120°)$.

Para obter a forma algébrica de um número complexo $z$ que é dado na forma trigonométrica, basta que se calculem os valores do cosseno e do seno do argumento e depois que seja efetuada a distributiva do módulo de $z$.

Exemplo:

$$z = 4(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\, 30°) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2} \cdot i = 2\sqrt{3} + 2i$$

## Exercício resolvido

**34.** Escreva os seguintes números complexos em suas formas algébricas:

a) cis 30°
b) 2cis 45°
c) $\sqrt{3}$ cis 60°
d) 3 cis 90°
e) 4 cis 120°
f) 5 cis $\pi$
g) $\sqrt{6}$ cis $\dfrac{7\pi}{6}$
h) 8cis 495°

**Resolução:**

**a)** $\text{cis}\,30° = \cos 30° + i \cdot \text{sen}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

**b)** $2\text{cis}\,45° = 2(\cos 45° + i \cdot \text{sen}\,45°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

**c)** $\sqrt{3}\text{cis}\,60° = \sqrt{3}(\cos 60° + i \cdot \text{sen}\,60°) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

**d)** $3\text{cis}\,90° = 3(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\,90°) = 3(0 + i \cdot 1) = 3i$

**e)** $4\text{cis}\,120° = 4(\cos 120° + i \cdot \text{sen}\,120°) = 4\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\dfrac{4}{2} + \dfrac{4\sqrt{3}}{2}i = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$

**f)** $5\text{cis}\,\pi = 5(\cos \pi + i \cdot \text{sen}\,\pi) = 5(-1 + 0i) = -5$

**g)** $\sqrt{6}\text{cis}\,\dfrac{7\pi}{6} = \sqrt{6}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{\sqrt{18}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

**h)** Dividindo 495° por 360°, obtém-se resto 135°. Assim:

$$8\text{cis}\,495° = 8\text{cis}\,135° = 8(\cos 135° + i \cdot \text{sen}\,135°) = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{2}i = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot i$$

## Operações: forma algébrica × forma trigonométrica

A forma algébrica dos números complexos é bastante eficiente para se efetuar as operações de adição e subtração. Note:

$$(3 + 3i) + (-2 + 2i) = 1 + 5i$$
$$(3 + 3i) - (-2 + 2i) = 5 + i$$

A multiplicação é um pouco mais trabalhosa, pois depende da propriedade distributiva e da substituição $i^2 = -1$:

$$(3 + 3i) \cdot (-2 + 2i) = -6 + 6i - 6i + 6i^2 = -6 + 0 - 6 = -12$$
$$(2 - 5i) \cdot (3 + 4i) = 6 + 8i - 15i - 20i^2 = 6 - 7i + 20 = 26 - 7i$$

Quocientes de números complexos dependem do processo de racionalização de denominadores, uma vez que $i = \sqrt{-1}$. Por isso, em cada divisão de complexos são efetuadas duas multiplicações. Note:

$$\frac{3 + 3i}{-2 + 2i} = \frac{(3 + 3i) \cdot (-2 - 2i)}{(-2 + 2i) \cdot (-2 - 2i)} = \frac{-6 - 6i - 6i - 6i^2}{4 + 4i - 4i - 4i^2} = \frac{-6 - 12i + 6}{4 + 0 + 4} = \frac{-12i}{8} = -\frac{3}{2}i = -1{,}5i$$

Já as potências de expoente natural dependem do teorema do binômio de Newton, que é relativamente simples quando o expoente é igual a 2 ou 3, mas, com expoentes maiores, as potenciações na forma algébrica ficam extremamente longas. Observe:

$$(3 + 3i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3i + (3i)^2 = 9 + 18i - 9 = 18i$$
$$(-2 + 2i)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot 2i + 3 \cdot (-2) \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = -8 + 24i + 24 - 8i = 16 + 16i$$

As operações de multiplicação, divisão e potenciação na forma trigonométrica envolvem algoritmos mais eficientes.

### Multiplicação na forma trigonométrica

Considere os números complexos $z$ e $w$, de argumentos $\alpha$ e $\beta$, expressos na forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$$
$$w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

Para multiplicar esses dois números complexos, basta multiplicar seus módulos e adicionar seus argumentos. Assim:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$$

**Saiba mais**

Demonstração:

$$z \cdot w = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot i \cdot \text{sen}\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot i \cdot \text{sen}\beta]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos\alpha \cdot \cos\beta + i^2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + i \cdot (\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha)]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$$

Portanto:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$$

Como as expressões cis representam números complexos de módulo unitário, para encontrar o produto dessas expressões, basta que sejam somados os argumentos dos complexos multiplicados:

$$\text{cis}\,\alpha \cdot \text{cis}\,\beta = \text{cis}(\alpha + \beta)$$

Como exemplo comparativo, considere o produto dos números $z = 3 + 3i$ e $w = -2 + 2i$, que já foi efetuado na forma algébrica, em um dos exemplos anteriores.

$$z \cdot w = (3 + 3i) \cdot (-2 + 2i) = -12$$

Na forma trigonométrica, esses números ficam expressos por:

$$z = 3\sqrt{2}\text{cis}\,45° \quad \text{e} \quad w = 2\sqrt{2}\text{cis}\,135°$$

Portanto:

$$z \cdot w = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}\text{cis}(45° + 135°) = 12\text{cis}\,180° = -12$$

**Atenção**

Veja como efetuar, na forma trigonométrica, as multiplicações de um número complexo $z = |z| \cdot \text{cis}\,\theta$ pelas unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss:

$$1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(0° + \theta)$$
$$1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(90° + \theta)$$
$$-1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(180° + \theta)$$
$$-1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(270° + \theta)$$

## Divisão na forma trigonométrica

Considere novamente os números complexos $z$ e $w$, de argumentos $\alpha$ e $\beta$, expressos na forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$$
$$w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\,\beta)$$

Para dividir um desses números pelo outro, basta dividir seus respectivos módulos e subtrair seus respectivos argumentos. Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

e

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \cdot [\cos(\beta - \alpha) + i \cdot \text{sen}(\beta - \alpha)]$$

**Saiba mais**

Demonstração:
Multiplicam-se os termos da fração pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

Como o produto de um número complexo por seu conjugado é igual ao quadrado de seu módulo:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Substituindo as formas trigonométricas de $z$ e $\overline{w}$:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot |w| \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \text{sen}(-\beta))}{|w|^2}$$

Separando os módulos das expressões cis:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \cdot |w|}{|w|^2} \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \text{sen}(-\beta))$$

Simplificando o módulo de $w$ e efetuando a multiplicação das expressões cis:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha + (-\beta)) + i \cdot \text{sen}(\alpha + (-\beta))]$$

Aplicando a regra de sinais:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Para efetuar a divisão de expressões cis, basta que sejam subtraídos os argumentos dos complexos divididos:

$$\text{cis}\alpha : \text{cis}\beta = \text{cis}(\alpha - \beta)$$

$$\text{cis}\beta : \text{cis}\alpha = \text{cis}(\beta - \alpha)$$

Como exemplo comparativo, considere o quociente do número $z = 3 + 3i$ pelo número $w = -2 + 2i$, que também já foi efetuado na forma algébrica anteriormente.

$$\frac{z}{w} = \frac{3 + 3i}{-2 + 2i} = -1{,}5i$$

Na forma trigonométrica, esses números ficam expressos por:

$$z = 3\sqrt{2}\text{cis}\,45°$$
$$w = 2\sqrt{2}\text{cis}\,135°$$

Portanto:

$$\frac{z}{w} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\text{cis}(45° - 135°) = \frac{3}{2}\text{cis}(-90°) = -1{,}5i$$

### Potenciação na forma trigonométrica

Veja como fica, na forma trigonométrica, a segunda potência de um número complexo $z$ com argumento $\theta$:

$z^2 = z \cdot z$

$z^2 = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

$z^2 = |z| \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)^2$

$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2\theta + 2 \cdot i \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta + i^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta)$

$z^2 = |z|^2 \cdot [(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) + i \cdot (2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta)]$

$z^2 = |z|^2 \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)]$

Perceba que, elevando um número complexo $z$ ao quadrado, seu argumento é duplicado.

Agora, veja como fica, na forma trigonométrica, a terceira potência de um número complexo $z$ com argumento $\theta$:

$z^3 = z^2 \cdot z$

$z^3 = |z|^2 \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)] \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

$z^3 = |z|^2 \cdot |z| \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)] \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

$z^3 = |z|^3 \cdot [\cos(2\theta + \theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta + \theta)]$

$z^3 = |z|^3 \cdot [\cos(3\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)]$

Perceba que, elevando um número complexo $z$ ao cubo, seu argumento é triplicado.

Uma indução sobre esses primeiros resultados estabelece uma regra para se obter as potências com expoentes naturais dos números complexos, na forma trigonométrica, conhecida como fórmula de Moivre.

Biblioteca do Instituto de Astronomia da Universidade de Cambridge, Cambridge

Abraham Moivre.

Sendo $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, para todo número natural $n$, tem-se:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$$

De acordo com essa fórmula, quando um número complexo $z$ é elevado a um expoente natural $n$, o módulo de $z$ também é elevado a $n$, mas o argumento de $z$ fica simplesmente multiplicado por $n$.

**Saiba mais**

Demonstração:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot \ldots \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{n \text{ fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot \ldots \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{n \text{ fatores}}$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}}) + i \cdot \text{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}})]$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$$

## Coordenadas polares

Usado desde o século II a.C. por Aristóteles e pelo astrônomo Hiparco, o sistema polar de coordenadas em um plano consiste em adotar-se um ponto de referência no plano para ser a origem de uma escala métrica.

O ponto escolhido para a origem é denominado polo, e a escala métrica adotada é denominada eixo polar.

Nesse sistema, cada ponto P do plano, diferente do polo, fica designado por um par ordenado de informações numéricas, sendo que:

- a primeira coordenada é a medida do raio da circunferência com centro no polo e que passa pelo ponto P;
- a segunda coordenada é a medida, em graus ou radianos, de um arco de circunferência determinado pelo ponto P e o eixo polar.

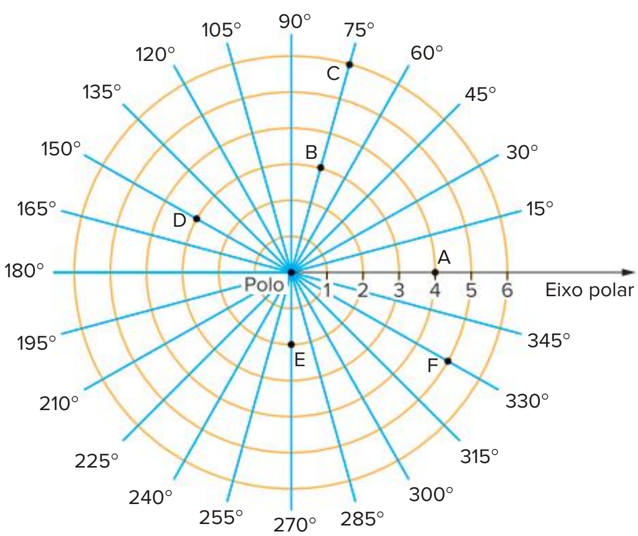
Para facilitar a transição entre os sistemas de coordenadas polares e cartesianas, o eixo polar é geralmente representado na horizontal e orientado para a direita, coincidindo com o semieixo real positivo do sistema cartesiano.

Os arcos de circunferência, usados nas coordenadas polares dos pontos do plano, devem ser medidos a partir do eixo polar, crescendo no sentido anti-horário e decrescendo no sentido horário.

Com exceção do polo, cada ponto P dessa grade pode ser designado em coordenadas polares por um par ordenado da forma $(\rho, \theta)$, em que:

- a letra grega $\rho$ (rô) designa o raio da circunferência que passa pelo ponto P;
- a letra grega $\theta$ (teta) designa algum argumento do ponto P, ou seja, a medida de um arco orientado que parte do eixo polar e, seguindo o sentido anti-horário, chega ao ponto P.

A figura apresenta uma grade de pontos de um sistema de coordenadas polares, cujos arcos que seguem crescem de 15° em 15°.



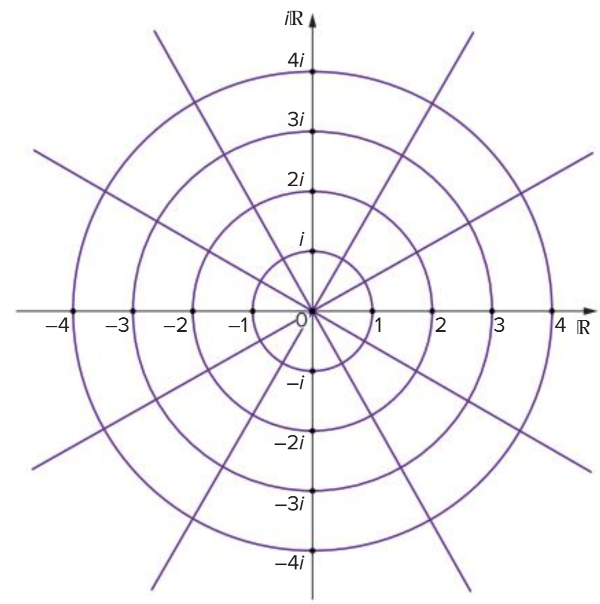

As coordenadas polares dos pontos em destaque na figura são:

| Em graus | Em radianos |
|---|---|
| A = (4, 0°) | A = (4, 0) |
| B = (3, 75°) | $B = \left(3, \frac{5\pi}{12}\right)$ |
| C = (6, 75°) | $C = \left(6, \frac{5\pi}{12}\right)$ |
| D = (3, 150°) | $D = \left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ |
| E = (2, 270°) | $E = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ |
| F = (5, 330°) | $F = \left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ |

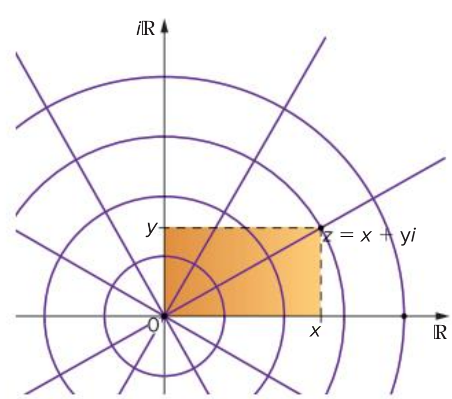
## Forma polar de um número complexo

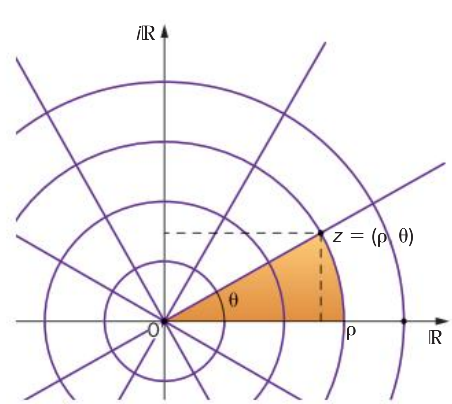
Assim como a forma trigonométrica, todo número complexo não nulo possui também uma forma polar de representação. Para isso, sobrepõem-se os sistemas de coordenadas polares e cartesianas, de modo que:

- o polo coincida com a origem do plano complexo;
- o eixo polar coincida com o semieixo real positivo do plano complexo.




Nesse modelo matemático, a localização de um número complexo pode ser feita tanto por meio de um retângulo quanto por meio de um setor circular.




FRENTE 2

No sistema cartesiano, sendo $(x, y)$ o afixo do número complexo $z$, tem-se:

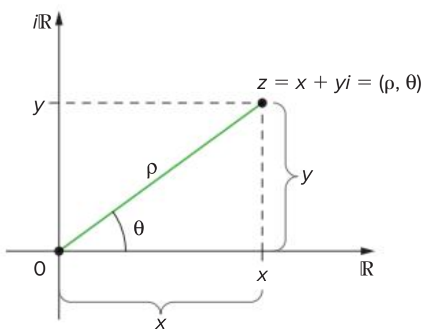
$$z = x + y \cdot i$$

Como a diagonal do retângulo de dimensões $|x|$ e $|y|$, que tem um vértice na origem do sistema e outro no afixo de $z$, é também um raio da circunferência que passa pelo afixo de $z$ e tem centro na origem do sistema, a medida $\rho$ do raio dessa circunferência é igual ao módulo do número complexo $z$:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Um argumento de $z$ é a medida $\theta$ do ângulo central do setor circular de raio $\rho$ e cujo arco tenha uma extremidade no semieixo real positivo e outra extremidade no afixo do próprio número $z$. Assim, sendo $\theta$ um argumento de $z = x + yi$:

- $\text{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$
- $\text{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho}$
- $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$




**! Atenção**

Usando arcos negativos na representação da forma polar de números complexos cujos argumentos principais têm mais do que 180°, observa-se um padrão comum às representações algébrica e trigonométrica de números complexos conjugados $z$ e $\bar{z}$.

$$\overline{a + bi} = a - bi$$
$$\overline{(\rho, \theta)} = (\rho, -\theta)$$

Em ambos os casos, o número complexo $z$ é definido por duas informações distintas. Na forma algébrica, essas informações são os valores da parte real e da parte imaginária de $z$. Na forma polar, essas informações são o módulo e o argumento.
Observe que, para encontrar o conjugado de $z$, basta mudar o sinal de sua segunda informação.

## Exercício resolvido

**35. FGV-SP** Um ponto do plano cartesiano pode ser descrito pelas suas coordenadas retangulares $(x, y)$ ou pelas suas coordenadas polares $(r, \theta)$, sendo $r$ a distância entre o ponto e a origem do sistema e $\theta$ a medida, em radianos, do arco que o eixo $x$ descreve no sentido anti-horário, até encontrar $\overline{OP}$. Em geral, $0 \leq \theta < 2\pi$. As relações utilizadas para que se passe de um sistema de coordenadas a outro são as seguintes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

As coordenadas polares do ponto P(1, 1) são:

a) $\left(\sqrt{2}, \pi\right)$

b) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

e) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

**Resolução:**

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Mas, como $\text{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$, temos que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Alternativa: **C**

## Operações com números complexos na forma polar

Considere os números complexos não nulos $z$ e $w$, de argumentos $\alpha$ e $\beta$ representados por pontos situados em circunferências com centro na origem do eixo polar e cujos raios medem $r$ e $s$, respectivamente:

$$z = (r, \alpha) \quad \text{e} \quad w = (s, \beta)$$

Lembrando que a medida do raio das circunferências citadas são os respectivos módulos desses números complexos, tem-se que:

**I.** Para obter a forma polar do produto entre os números $z$ e $w$, basta que sejam multiplicados os seus módulos e somados os seus argumentos.

$$z \cdot w = (r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha + \beta)$$

**II.** Para obter o quociente de $z$ por $w$, basta que sejam divididos os seus módulos e subtraídos os seus argumentos.

$$\frac{z}{w} = \frac{(r, \alpha)}{(s, \beta)} = \left(\frac{r}{s}, \alpha - \beta\right)$$

**III.** Para obter a $n$-ésima potência do número complexo $z$, por exemplo, basta que seu módulo seja elevado à $n$-ésima potência e que seu argumento seja multiplicado por $n$.

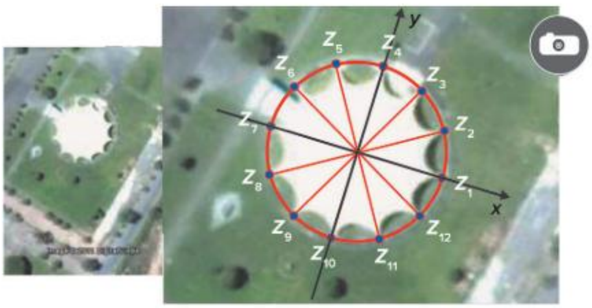
$$z^n = (r, \alpha)^n = (r^n, n \cdot \alpha)$$

Exemplos:

- $(6, 45°) \cdot (2, 30°) = (6 \cdot 2, 45° + 30°) = (12, 75°)$
- $(6, 45°) : (2, 30°) = (6 : 2, 45° - 30°) = (3, 15°)$
- $(6, 45°)^2 = (6^2, 2 \cdot 45°) = (36, 90°)$
- $(2, 30°)^5 = (2^5, 5 \cdot 30°) = (32, 150°)$

## Exercícios resolvidos

**36. UFSM-RS 2012** Observe a vista aérea do planetário e a representação, no plano de Argand-Gauss, dos números complexos $z_1, z_2, ..., z_{12}$, obtida pela divisão do círculo de raio 14 em 12 partes iguais.




Fonte: http://www.maps.google.com.br (adaptado)

Considere as seguintes informações:

**I.** $z_2 = 7\sqrt{3} + 14i$

**II.** $z_{11} = \overline{z_3}$

**III.** $z_5 = z_4 \cdot \overline{z_{11}}$

Está(ão) correta(s):

**a)** Apenas I.
**b)** Apenas II.
**c)** Apenas III.
**d)** Apenas I e II.
**e)** Apenas II e III.

**Resolução:**

Afirmativa I: incorreta. As coordenadas polares do complexo $z_2$ são (14, 30°).

Então: $z_2 = 14(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\, 30°) =$

$$= 14\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{14\sqrt{3}}{2} + \frac{14}{2}i = 7\sqrt{3} + 7i$$

Afirmativa II: correta. As coordenadas polares dos complexos $z_{11}$ e $z_3$ são (14, −60°) e (14, 60°).

Sendo assim, um deles é o conjugado do outro.

Afirmativa III: incorreta.

$z_5 = 14(\cos 120° + i \cdot \text{sen}120°)$

$z_4 = 14(\cos 90° + i \cdot \text{sen}90°)$

$\overline{z_{11}} = z_3 = 14(\cos 60° + i \cdot \text{sen}60°)$

$z_4 \cdot \overline{z_{11}} = 14 \cdot 14 \cdot [\cos(60° + 90°) + i \cdot \text{sen}(60° + 90°)] =$

$= 196(\cos 150° + i \cdot \text{sen}150°) \neq z_5$

Alternativa: **B**

**37. Unesp** Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

**a)** $-i$
**b)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
**c)** $i - 2$
**d)** $i$
**e)** $2i$

**Resolução:**

Na forma polar, temos $z = (1, 30°)$, portanto:

$z^3 = (1, 30°)^3 = (1, 90°) = i$

$z^6 = (1, 30°)^6 = (1, 180°) = -1$

$z^{12} = (1, 30°)^{12} = (1, 360°) = 1$

Logo, $z^3 + z^6 + z^{12} = i - 1 + 1 = i$.

Alternativa: **D**

**38.** Determine o menor inteiro positivo $n$ para o qual $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ seja real.

**Resolução:**

Sendo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, na forma polar temos que $z = (1, 30°)$; logo, $z^n = (1, n \cdot 30°)$.

Então, para que $z^n$ seja um número real, devemos ter que: $n \cdot 30° \in \{..., -360°, -180°, 0°, 180°, 360°, ...\}$.

Portanto, $n \in \{..., -12, -6, 0, 6, 12, ...\}$.

Logo, o menor valor inteiro positivo de $n$ é 6.

## Igualdade polar

Para resolver equações envolvendo números complexos em suas formas polares ou trigonométricas, considera-se sempre o fato de que todo número complexo possui uma infinidade de argumentos, além do argumento principal.

Assim, em radianos:

$$... = (\rho, \theta - 4\pi) = (\rho, \theta - 2\pi) = (\rho, \theta) = \rho, \theta + 2\pi) = \\ = (\rho, \theta + 4\pi) = ...$$

E, em graus:

$$... = (\rho, \theta - 720°) = (\rho, \theta - 360°) = (\rho, \theta) = (\rho, \theta + 360°) = \\ = (\rho, \theta + 720°) = ...$$

Para escrever na forma polar o número imaginário puro $-5i$, por exemplo, é necessário usar o seu módulo $\rho = 5$ e algum de seus argumentos.

Embora o argumento principal seja 270°, os arcos de −90° e 630°, por exemplo, também são argumentos do número $-5i$. Assim:

$$... = (3, -90°) = (3, 270°) = (3, 630°) = ...$$

Observando essa característica dos argumentos de um número complexo, pode-se definir a igualdade polar da seguinte maneira:

"Dois números complexos representados, em coordenadas polares ou em formas trigonométricas, são iguais se, e somente se, possuírem o mesmo módulo e argumentos que, em graus, diferem de algum múltiplo de 360°."

$$(r, \alpha) = (s, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha = \beta + k \cdot 360°, \text{ com } k \text{ inteiro} \end{cases}$$

Em radianos:

$$(r, \alpha) = (s, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha = \beta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

FRENTE 2

## Radiciação em $\mathbb{C}$

No conjunto dos números complexos, cada número real negativo possui duas raízes quadradas, que são números imaginários puros: um com parte imaginária positiva e outro com parte imaginária negativa. Por exemplo, as raízes quadradas do número −64 são: $\begin{cases} 8i, \text{ pois } (8i)^2 = 8^2 \cdot i^2 = 64 \cdot (-1) = -64 \\ -8i, \text{ pois } (-8i)^2 = (-8)^2 \cdot i^2 = 64 \cdot (-1) = -64 \end{cases}$

Um fato importante sobre o conjunto $\mathbb{C}$ é que ele não somente apresenta duas raízes quadradas para qualquer número real, mas três raízes cúbicas, quatro raízes quartas, cinco raízes quintas e assim por diante.

Mas, com $n > 2$, não é possível representar todas as raízes enésimas de um número complexo escrevendo os sinais (+) e (−) antes do radical. Então, como o uso de apenas dois sinais poderia bastar para se representar os 3 resultados de uma raiz cúbica?

Em $\mathbb{C}$, as raízes cúbicas do número 64, por exemplo, são os números: 4, $-2 + 2i\sqrt{3}$ e $-2 - 2i\sqrt{3}$, pois cada um deles é uma solução da equação $x^3 = 64$. Veja a verificação desses resultados na forma algébrica:

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$
- $\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot 2i\sqrt{3} + 3 \cdot (-2) \cdot \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + \left(2i\sqrt{3}\right)^3 =$
  $= -8 + 3 \cdot 4 \cdot 2i\sqrt{3} - 6 \cdot (-12) - 24i\sqrt{3} = -8 + 24i\sqrt{3} + 72 - 24i\sqrt{3} = 64$
- $\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot \left(-2i\sqrt{3}\right) + 3 \cdot (-2) \cdot \left(-2i\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2i\sqrt{3}\right)^3 =$
  $= -8 - 3 \cdot 4 \cdot 2i\sqrt{3} - 6 \cdot (-12) + 24i\sqrt{3} = -8 - 24i\sqrt{3} + 72 + 24i\sqrt{3} = 64$

Na forma polar, com o argumento em graus, o número 64 fica expresso por (64, 0°), e suas três raízes cúbicas expressas por (4, 0°), (4, 120°) e (4, 240°). Veja a verificação desses resultados usando a fórmula de Moivre:

- $(4, 0°)^3 = (4^3, 3 \cdot 0°) = (64, 0°)$
- $(4, 120°)^3 = (4^3, 3 \cdot 120°) = (64, 360°) = (64, 0°)$
- $(4, 240°)^3 = (4^3, 3 \cdot 240°) = (64, 720°) = (64, 0°)$

Comparando as verificações dessas raízes cúbicas nessas duas formas, fica evidente a vantagem que a forma polar leva em relação à forma algébrica. Sendo assim, para encontrar as raízes *n*-ésimas de um número complexo, recomenda-se o uso da fórmula de Moivre e do desmembramento de argumentos previstos na igualdade polar.

## Equações do tipo $z^n = w$

Para extrair as raízes quadradas de um número complexo $w$, deve-se resolver a equação binomial $z^2 = w$. Para extrair as raízes cúbicas, resolve-se a equação $z^3 = w$; para as raízes quartas, a equação $z^4 = w$; e assim por diante. Veja como extrair as raízes cúbicas do número 64, por exemplo.

Resolve-se a equação $z^3 = 64$ sem substituir $z$ por uma forma algébrica $a + bi$, representando os números $z$ e 64 em suas formas polares:

$$z = (|z|, \theta) \Rightarrow 64 = (64, 0°)$$

Assim, tem-se a equação: $(|z|, \theta)^3 = (64, 0°)$.

Aplicando a fórmula de Moivre:

$$(|z|^3, 3\theta) = (64, 0°)$$

Da relação de igualdade polar:

$$\begin{cases} |z|^3 = 64 \\ 3\theta = 0° + k \cdot 360°, \text{ com } k \text{ inteiro} \end{cases}$$

Lembrando que $|z|$ é um número real positivo:

$$|z|^3 = 64 \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{64} = 4$$

Isso garante que todas as raízes cúbicas de 64 têm o mesmo módulo igual a 4.

Da comparação entre os argumentos:

$$3\theta = k \cdot 360° \Rightarrow \theta = k \cdot 120°$$

Como são procuradas três raízes cúbicas, tomam-se os três primeiros valores não negativos do número inteiro $k$:

- $k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \cdot 120° = 0°$
- $k = 1 \Rightarrow \theta_1 = 1 \cdot 120° = 120°$
- $k = 2 \Rightarrow \theta_2 = 2 \cdot 120° = 240°$

Observe que $k = 3$ implica $\theta^3 = 3 \cdot 120° = 360°$, que é um arco côngruo ao arco nulo (0°).

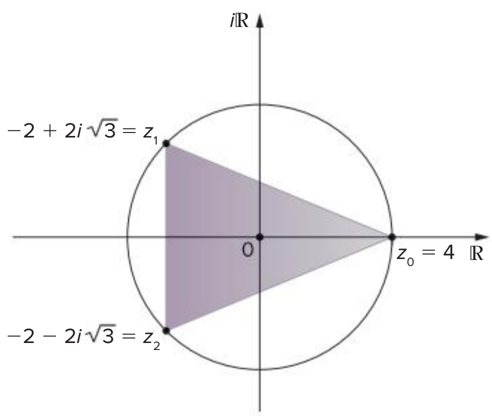
Então, $z_0$, $z_1$ e $z_2$ são as três soluções complexas da equação $z^3 = 64$ correspondentes aos argumentos $\theta_0$, $\theta_1$ e $\theta_2$:

$$z_k = (4, \theta_k) \Rightarrow \begin{cases} z_0 = (4, \theta_0) = (4, 0°) \\ z_1 = (4, \theta_1) = (4, 120°) \\ z_2 = (4, \theta_2) = (4, 240°) \end{cases}$$

Para obter a forma algébrica das raízes cúbicas de 64, basta que sejam calculados os senos e os cossenos dos argumentos de acordo com a forma trigonométrica de um número complexo. Veja o quadro abaixo.

| **Forma polar** | **Forma trigonométrica** | **Forma algébrica** |
|---|---|---|
| $z = (\lvert z\rvert, \theta)$ | $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (4, 0°)$ | $z_0 = 4(\cos 0° + i \cdot \text{sen}0°)$ | $z_0 = 4$ |
| $z_1 = (4, 120°)$ | $z_1 = 4(\cos 120° + i \cdot \text{sen}120°)$ | $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$ |
| $z_2 = (4, 240°)$ | $z_2 = 4(\cos 240° + i \cdot \text{sen}240°)$ | $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ |

No plano complexo, os três pontos que representam geometricamente as raízes cúbicas de 64 determinam os vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência polar de raio 4.




$z^3 = 64$

Sendo $n$ um número inteiro tal que $n \geq 2$, o processo apresentado neste exemplo pode ser generalizado para se resolver todas as equações do tipo $z^n = w$ no universo dos números complexos.

$$z^n = w \Rightarrow \begin{cases} \lvert z\rvert = \sqrt[n]{\lvert w\rvert} \\ \text{Arg}(z_k) = \dfrac{\text{Arg}(w) + k \cdot 360°}{n}, \ k \in \{0, 1, ..., n-1\} \end{cases}$$

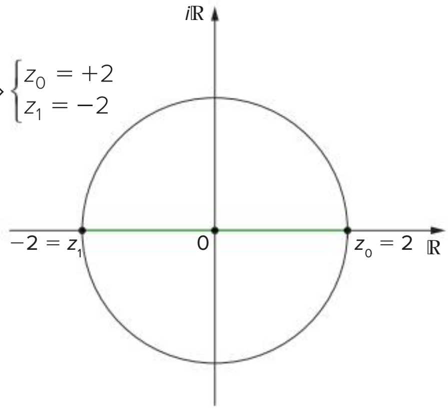
Quando representadas no plano complexo, as soluções das equações do tipo $z^n = w$ dividem uma circunferência polar em arcos de mesma medida:

- Com $n = 2$, a circunferência fica dividida em dois arcos de $\dfrac{360°}{2} = 180°$.
- Com $n = 3$, a circunferência fica dividida em três arcos de $\dfrac{360°}{3} = 120°$.
- Com $n = 4$, a circunferência fica dividida em quatro arcos de $\dfrac{360°}{4} = 90°$.
- Com $n = 5$, a circunferência fica dividida em cinco arcos de $\dfrac{360°}{5} = 72°$.
- Com $n = 6$, a circunferência fica dividida em seis arcos de $\dfrac{360°}{6} = 60°$.
- ⋮

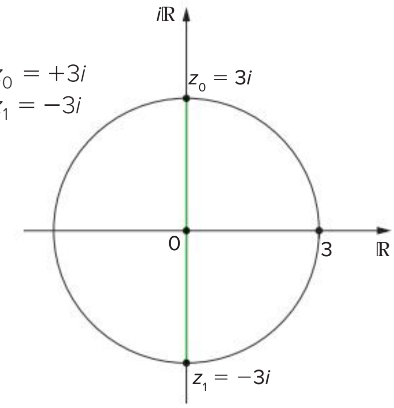
### Equações de grau 2

Particularmente, quando $n = 2$ as soluções das equações do tipo $z^2 = w$ ficam representadas, no plano complexo, por dois pontos simétricos em relação à origem, que determinam as extremidades de um diâmetro da circunferência polar de raio $\sqrt{|w|}$. Exemplos:

$$z^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = +2 \\ z_1 = -2 \end{cases}$$




$$z^2 = -9 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = +3i \\ z_1 = -3i \end{cases}$$




Os exemplos mostrados até aqui tratam apenas de casos em que $w$ é um número real. Veja, no próximo exemplo, como encontrar as raízes quadradas da unidade imaginária.

Para resolver a equação $z^2 = i$, consideram-se as formas polares de $z$ e $i$:

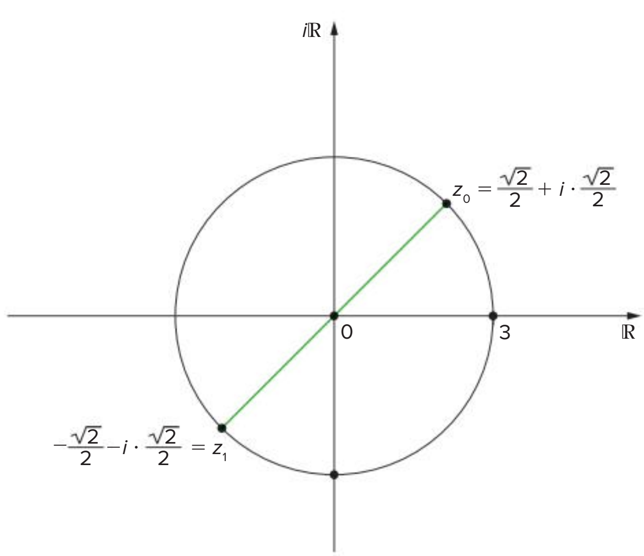
$$(|z|, \theta)^2 = (1, 90°) \Leftrightarrow (|z|^2, 2\theta) = (1, 90°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = 90° + k \cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

O quadro abaixo apresenta as soluções da equação $z^2 = i$ em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\lvert z\rvert, \theta)$ | $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (1, 45°)$ | $z_0 = 1(\cos 45° + i \cdot \text{sen} 45°)$ | $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $z_1 = (1, 225°)$ | $z_1 = 1(\cos 225° + i \cdot \text{sen} 225°)$ | $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ |

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:



**Saiba mais**

Mesmo quando $w$ é um número real, a resolução de uma equação do tipo $z^2 = w$ pode obedecer ao método das coordenadas polares.

A equação $z^2 = 4$, por exemplo, fica:

$$(|z|, \theta)^2 = (4, 0°) \Leftrightarrow (|z|^2, 2\theta) = (4, 0°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 4 \\ 2\theta = 0° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = k \cdot 180°,\ k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Veja o quadro com as soluções em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\|z\|, \theta)$ | $z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (2, 0°)$ | $z_0 = 2(\cos 0° + i \cdot \text{sen}\, 0°)$ | $z_0 = +2$ |
| $z_1 = (2, 180°)$ | $z_1 = 2(\cos 180° + i \cdot \text{sen}\, 180°)$ | $z_1 = -2$ |

A equação $z^2 = -9$, por exemplo, fica:

$$(|z|, \theta)^2 = (9, 180°) \Rightarrow (|z|^2, 2\theta) = (9, 180°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 9 \\ 2\theta = 180° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{9} = 3 \\ \theta = 90° + k \cdot 180°, k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Veja o quadro com as soluções em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\|z\|, \theta)$ | $z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (3, 90°)$ | $z_0 = 3(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\, 90°)$ | $z_0 = +3i$ |
| $z_1 = (3, 270°)$ | $z_1 = 3(\cos 270° + i \cdot \text{sen}\, 270°)$ | $z_1 = -3i$ |

## Equações de grau $n > 2$

Sempre que $n > 2$, as soluções das equações do tipo $z^n = w$ determinam, no plano complexo, os vértices de um polígono regular com exatamente $n$ lados. Assim:

- $z^3 = w$ têm soluções complexas que determinam um triângulo equilátero.
- $z^4 = w$ têm soluções complexas que determinam um quadrado.
- $z^5 = w$ têm soluções complexas que determinam um pentágono regular.
- $z^6 = w$ têm soluções complexas que determinam um hexágono regular.
- $\vdots$

Cada um desses polígonos encontra-se inscrito em uma circunferência polar cujo raio mede:

$$\rho = \sqrt[n]{|w|}$$

Veja, por exemplo, como resolver e representar graficamente as soluções da equação do 3º grau $z^3 = -8i$ pelo método das coordenadas polares.

Como $|-8i| = 8$ e $\text{Arg}(-8i) = 270°$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

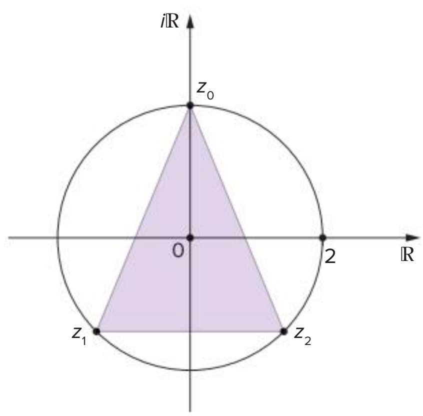
$$z^3 = -8i \Rightarrow (|z|, \theta)^3 = (8, 270°) \Rightarrow (|z|^3, 3\theta) = (8, 270°)$$

$$\begin{cases} |z|^3 = 8 \\ 3\theta = 270° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = 90° + k \cdot 120°, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

O quadro apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\|z\|, \theta)$ | $z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (2, 90°)$ | $z_0 = 2(\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)$ | $z_0 = 2i$ |
| $z_1 = (2, 210°)$ | $z_1 = 2(\cos 210° + i \cdot \text{sen} 210°)$ | $z_1 = -\sqrt{3} - i$ |
| $z_2 = (2, 330°)$ | $z_2 = 2(\cos 330° + i \cdot \text{sen} 330°)$ | $z_2 = \sqrt{3} - i$ |

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:




**Exercício resolvido**

**39. Unesp** As soluções da equação $z^3 = i$, onde $z$ é um número complexo e $i^2 = -1$, são:

a) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

b) $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

c) $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

d) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

e) $z = \pm\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -i$.

**Resolução:**

Sendo $\theta$ o argumento principal do número $z$, temos que $z = (|z|, \theta)$. Então, escrevendo-se o número $i$ na forma polar, a equação $z^3 = i$ implica:

$$(|z|^3, 3\theta) = (1, 90°) \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\theta = 90° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = 30° + k \cdot 120°,\ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Assim, temos:

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = (1, 30°) = \cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = (1, 150°) = \cos 150° + i \cdot \operatorname{sen} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = (1, 270°) = \cos 270° + i \cdot \operatorname{sen} 270° = -i$$

Alternativa: **C**

Considere a equação do 4º grau $z^4 = -16$, por exemplo, e veja como resolver e representar suas soluções pelo método das coordenadas polares.

Como $|-16| = 16$ e $\operatorname{Arg}(-16) = 180°$, sendo $\theta = \operatorname{Arg}(z)$:

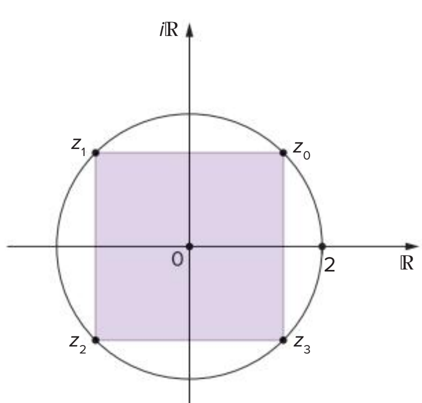
$$z^4 = -16 \Rightarrow (|z|, \theta)^4 = (16, 180°) \Rightarrow (|z|^4, 4\theta) = (16, 180°)$$

$$\begin{cases} |z|^4 = 16 \\ 4\theta = 180° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \theta = 45° + k \cdot 90°,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

O quadro abaixo apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (|z|, \theta)$ | $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (2, 45°)$ | $z_0 = 2(\cos 45° + i \cdot \operatorname{sen} 45°)$ | $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ |
| $z_1 = (2, 135°)$ | $z_1 = 2(\cos 135° + i \cdot \operatorname{sen} 135°)$ | $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ |
| $z_2 = (2, 225°)$ | $z_2 = 2(\cos 225° + i \cdot \operatorname{sen} 225°)$ | $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ |
| $z_3 = (2, 315°)$ | $z_3 = 2(\cos 315° + i \cdot \operatorname{sen} 315°)$ | $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ |

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:



Considere agora a equação do 4º grau $z^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, por exemplo.

Como $\left|\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ e $\text{Arg}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 120°$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

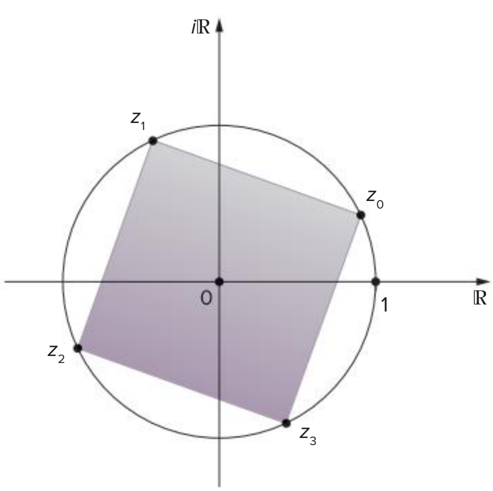
$$z^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (|z|, \theta)^4 = (1, 120°) \Rightarrow (|z|^4, 4\theta) = (1, 120°)$$

$$\begin{cases} |z|^4 = 1 \\ 4\theta = 120° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \theta = 30° + k \cdot 90°,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

O quadro abaixo apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\lvert z\rvert, \theta)$ | $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (1, 30°)$ | $z_0 = 1(\cos 30° + i \cdot \text{sen}30°)$ | $z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ |
| $z_1 = (1, 120°)$ | $z_1 = 1(\cos 120° + i \cdot \text{sen}120°)$ | $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ |
| $z_2 = (1, 210°)$ | $z_2 = 1(\cos 210° + i \cdot \text{sen}210°)$ | $z_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$ |
| $z_3 = (1, 300°)$ | $z_3 = 1(\cos 300° + i \cdot \text{sen}300°)$ | $z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ |

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções da equação:




## Exercício resolvido

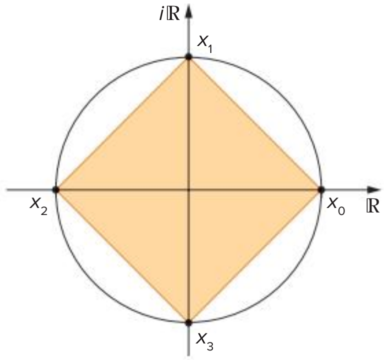
**40.** Calcule a área do polígono cujos vértices são as representações geométricas das soluções de $x^4 - 81 = 0$ no plano complexo.

**Resolução:**

$p(x) = x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i)$

$x^4 - 81 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i) = 0 \Rightarrow S = \{3, -3, 3i, -3i\}$

Sendo $x_0 = 3$, $x_1 = 3i$, $x_2 = -3$ e $x_3 = -3i$, tem-se:




O quadrilátero cujos vértices são os afixos dos complexos $x_0$, $x_1$, $x_2$ e $x_3$ é um quadrado inscrito numa circunferência de raio 3.
Portanto, o lado do quadrado mede $3\sqrt{2}$ unidades de comprimento e sua área é igual a 18 unidades de área.

Para o último exemplo, considere a equação do 6º grau $z^6 = -1$.
Como $|-1| = 1$ e $\text{Arg}(-1) = 180°$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

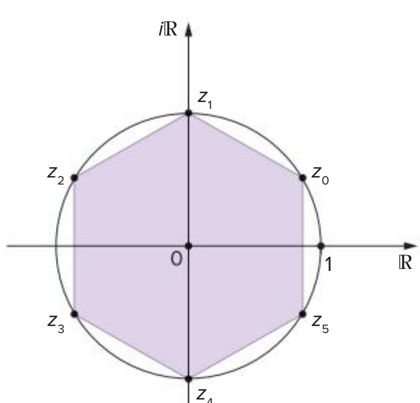
$$z^6 = -1 \Rightarrow (|z|, \theta)^6 = (1, 180°) \Rightarrow (|z|^6, 6\theta) = (1, 180°)$$

$$\begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6\theta = 180° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[6]{1} = 1 \\ \theta = 30° + k \cdot 60°,\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

O quadro abaixo apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

| Forma polar | Forma trigonométrica | Forma algébrica |
|---|---|---|
| $z = (\|z\|, \theta)$ | $z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ | $z = a + b \cdot i$ |
| $z_0 = (1, 30°)$ | $z_0 = 1(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\,30°)$ | $z_0 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$ |
| $z_1 = (1, 90°)$ | $z_1 = 1(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\,90°)$ | $z_1 = i$ |
| $z_2 = (1, 150°)$ | $z_2 = 1(\cos 150° + i \cdot \text{sen}\,150°)$ | $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$ |
| $z_3 = (1, 210°)$ | $z_3 = 1(\cos 210° + i \cdot \text{sen}\,210°)$ | $z_3 = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{2}$ |
| $z_4 = (1, 270°)$ | $z_4 = 1(\cos 270° + i \cdot \text{sen}\,270°)$ | $z_4 = -i$ |
| $z_5 = (1, 330°)$ | $z_5 = 1(\cos 330° + i \cdot \text{sen}\,330°)$ | $z_5 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$ |

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:



## Revisando

1. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$.

2. Sendo $z = 4 - 3i$ e $w = 2 + i$, determine:
   a) $z + w$
   b) $z - w$
   c) $z \cdot w$
   d) $z^2$
   e) $w \cdot w$
   f) $\frac{z}{w}$

3. **Ufam 2020** Seja $r$ um número real tal que o número complexo $z = \frac{9 - ri}{3 - i}$ é um número real. Então, o valor de $r$ é igual a:
   a) 3
   b) $-3$
   c) 9
   d) $-9$

4. **Unicamp-SP 2013** Chamamos de unidade imaginária e denotamos por $i$ o número complexo tal que $i^2 = -1$. Então, $i^0 + i^1 + i^2 + i^2 + ... + i^{2013}$ vale:
   a) 0
   b) 1
   c) $i$
   d) $1 + i$

5. Sendo $z = x + y \cdot i$ um número complexo cujo afixo é da forma $(\alpha^2 - 1, \alpha + 1)$ com $\alpha$ real. Determine $\alpha$ para que o número $z$ seja:

a) real

b) imaginário puro

6. **Fuvest-SP (Adapt.)** Sendo $i$ a unidade imaginária:

a) Determine as partes real e imaginária do número complexo $z_0 = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{1}{2i} + i$.

b) Determine os números complexos $w$ tais que $z_0 \cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 \cdot w$ sejam iguais.

7. Escreva os números $z = 1 + i$ e $w = -2 + 2i$ nas formas trigonométrica e polar.

8. Utilizando as formas trigonométricas ou as formas polares dos números complexos $z$ e $w$ obtidas no exercício anterior, determine os valores de:

a) $z \cdot w$

b) $\frac{z}{w}$

c) $z^5 + w^3$

d) $\frac{z^5}{w^3}$

FRENTE 2

9. Determine o menor inteiro positivo $n$ para o qual $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ seja real.

10. **EEAR-SP 2022** Um número complexo $z$ tem argumento $\theta = \frac{5\pi}{6}$ e módulo igual a 6. A forma algébrica de $z$ é

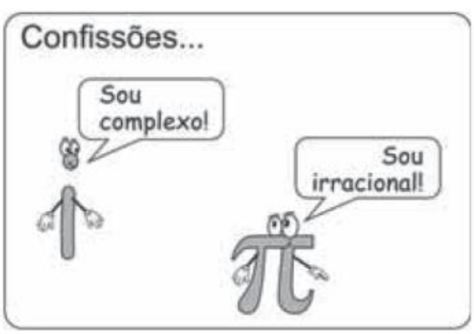
a) $-3\sqrt{3}+3i$
b) $-3\sqrt{3}+\sqrt{3}i$
c) $3\sqrt{3}-\sqrt{3}i$
d) $3\sqrt{3}-3i$

## Exercícios propostos

1. **Ifal 2017** Dentro do conjunto dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^2 + 625 = 0$ é
   a) $S = \{-5, 5\}$.
   b) $S = \{-25, 25\}$.
   c) $S = \{-5i, 5i\}$.
   d) $S = \{-25i, 25i\}$.
   e) $S = \varnothing$.

2. O conjunto solução da equação $x^2 - 5ix + 6 = 0$, em que $i$ é a unidade imaginaria, é:
   a) $S = \{2i, 3i\}$
   b) $S = \{-i, 6i\}$
   c) $S = \{-2, -3\}$
   d) $S = \{i, 6i\}$
   e) $S = \{2i, 3i\}$

3. **UEL-PR 2019** Uma estratégia para obter efeito humorístico em quadrinhos é atribuir a objetos abstratos características e ações tipicamente humanas. A figura a seguir é um exemplo de aplicação desse recurso.




Adaptado de somatematica.com.br

Supondo que cada número diga uma verdade matemática sobre si mesmo, relacione as frases (de I a IV) aos balões de diálogo (de A a D).

**I.** Meu cubo é irracional.
**II.** Sou racional.
**III.** Sou puramente imaginário.
**IV.** Meu inverso multiplicativo coincide com meu conjugado.





Assinale a alternativa que contém a associação correta.
   a) I-B, II-C, III-A, IV-D.
   b) I-C, II-B, III-A, IV-D.
   c) I-D, II-A, III-C, IV-B.
   d) I-D, II-A, III-B, IV-C.
   e) I-D, II-C, III-B, IV-A.

4. **Mackenzie-SP 2013** Em $\mathbb{C}$ o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} x+1 & x & x-1 \\ 2x & 2x & 2x \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 5$ é:
   a) $\{2 + 2i, 2 - 2i\}$
   b) $\{-1 - 4i, -1 + 4i\}$
   c) $\{1 + 4i, 1 - 4i\}$
   d) $\{-1 + 2i, -1 - 2i\}$
   e) $\{2 - 2i, 1 + 2i\}$

5. **IFCE 2016** Sendo $i$ a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$, são dados os números complexos $z_1 = 9 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$. Ao calcular corretamente o produto $z_1 \cdot z_2$, obtemos o número
   a) $21 - 6i$.
   b) $-18 - 6i$.
   c) $-18 + 3i$.
   d) $18 - 3i$.
   e) $-21 + 3i$.

6. **Ifal 2018** O quociente entre os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ é
   a) 1.
   b) $i$.
   c) 0.
   d) 2.
   e) $2i$.

7. **Mackenzie-SP 2017 (Adapt.)** O resultado da expressão $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$ na forma $x + yi$ é
   a) $-\dfrac{5}{17} + \dfrac{14}{17}i$
   b) $\dfrac{11}{15} + \dfrac{14}{15}i$
   c) $\dfrac{11}{17} - \dfrac{14}{17}i$
   d) $\dfrac{11}{15} - \dfrac{14}{15}i$
   e) $3 - \dfrac{1}{2}i$

8. **Unisc-RS 2017** A parte real do número complexo $z = \dfrac{1 + (3i)^2}{1 - i}$ é
   a) 1
   b) $-1$
   c) 2
   d) $-2$
   e) $-4$

9. **UEPB 2014** O produto dos números complexos $(3 - i)(x + 2yi)$ é um número real quando o ponto $P(x, y)$ está sobre a reta de equação:
   a) $6x + y = 0$
   b) $6x - y = 0$
   c) $x + 6y = 0$
   d) $6y - x = 0$
   e) $3y - x = 0$

FRENTE 2

**10. Uern 2015** Considere a igualdade $2z - i = \overline{z} + 1$. É correto afirmar que o número complexo $z$, da forma $z = a + bi$, é

a) $1 + \frac{i}{3}$.
b) $2 + \frac{i}{2}$.
c) $1 + 3i$.
d) $3 + 2i$.

**11. UPF-RS 2016** O número complexo $z$, tal que $5z + \overline{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) $-2 + 2i$
b) $2 - 3i$
c) $3 + i$
d) $2 + 4i$
e) $1 + 2i$

**12. EEAR-SP 2020** Seja $z = bi$ um número complexo, com $b$ real, que satisfaz a condição $2z^2 - 7iz - 3 = 0$. Assim, a soma dos possíveis valores de $b$ é

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $1$
d) $-1$

**13. PUC-SP 2018** Considere os números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = -b + ai$ e $z_3 = -b + 3i$, com $a$ e $b$ números inteiros. Sabendo que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, o valor de $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ é igual a

a) $1$.
b) $-1$.
c) $-i$.
d) $i$.

**14. Cefet-MG 2015** Considere as afirmações sobre as soluções da equação $z^2 - \overline{z} = 0$, com $z \in \mathbb{C}$:

**I.** Possui exatamente duas soluções.
**II.** A soma de todas as soluções é igual a 1.
**III.** O módulo de todas as soluções é menor ou igual a 1.

É(são) verdadeira(s) a(s) afirmação(ões):

a) I.
b) III.
c) I, II.
d) II, III.
e) I, II, III.

**15.** Sendo $a$ e $b$ números inteiros e $i$ a unidade imaginária, o número complexo $z = a + bi$ que satisfaz a igualdade $i \cdot z^2 + 6 \cdot \overline{z} = 8 \cdot i$ é tal que

a) $Re(z) > 0$
b) $Im(z) > 0$
c) $Re(z) < 0$
d) $Im(z) < 0$
e) $Im(z) = 0$

**16. Uepa 2015** Um dos resultados importantes da produção de conhecimentos reside na possibilidade que temos de fazer a interação de múltiplos saberes. O conceito de número complexo é um bom exemplo dessa possibilidade exploratória da produção científica, ao permitir relações com álgebra, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, séries e aritmética. Neste sentido, considere os números complexos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 5 + 6i$, $z_3 = -4 + 18i$ e os números reais $k_1$ e $k_2$ tais que a soma dos números complexos $k_1z_1$ e $k_2z_2$ resulta o complexo $z_3$. Nestas condições, o valor de $k_1^{k_2}$ é:

a) $9$
b) $8$
c) $1$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{9}$

**17. Uece 2020** Para o número complexo $w = x + iy$ ($x$ e $y$ são números reais e $i$ é tal que $i^2 = -1$), define-se o módulo de $w$ por $|w| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o conjugado de $w$ por $\overline{w} = x - iy$. Se $w$ é tal que $w + \overline{w} - 4$ e se $w^2 + (\overline{w})^2 - 10$, então, o valor de $|w|$ é igual a

a) $\sqrt{11}$.
b) $\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{13}$.
d) $\sqrt{7}$.

**18. Mackenzie-SP 2017** Se $\frac{2 + i}{\beta + 2i}$ tem parte imaginária igual a zero, então o número real $\beta$ é igual a

a) $4$
b) $2$
c) $1$
d) $-2$
e) $-4$

**19. EEAR-SP 2021** Considere o número complexo $z = \frac{1 + i}{1 - i}$.

O valor de $z^{1983}$ é:

a) $-1$
b) $0$
c) $i$
d) $-i$

**20. Uece 2017** Se $i$ é o número complexo cujo quadrado é igual a $-1$, então, o valor de $5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13}$ é igual a

a) $1 + i$.
b) $4i - 1$.
c) $-6i - 1$.
d) $-6i$

**21. Unicamp-SP 2014** O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

a) $\sqrt{2}$.
b) $0$.
c) $\sqrt{3}$.
d) $1$.

**22. Unicamp-SP 2016** Considere o número complexo $z = \dfrac{1 + ai}{a - i}$ onde $a$ é um número real e $i$ é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de $z^{2016}$ é igual a

a) $a^{2016}$.
b) 1.
c) $1 + 2016i$.
d) $i$.

**23. UEL-PR 2019** Leia o texto a seguir.

Foi ali no meio da praça. [...] Zuzé Paraza, pintor reformado, tossiu sacudindo a magreza do seu todo corpo. Então, assim contam os que viram, ele vomitou um corvo vivo. O pássaro saiu inteiro das entranhas dele. [...] Estivera tanto tempo lá dentro que já sabia falar.

COUTO, Mia. O último aviso do corvo falador. *In: Vozes anoitecidas*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015. p. 29.

Zuzé desafiou o corvo falador. De dentro de seu gabinete, Zuzé mostrou ao corvo a seguinte tabela.

| A | B | C |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 0 |
| 20 | 5 | 1 |
| 24 | 6 | 2 |
| 2 | 13 | 3 |

Zuzé solicita ao corvo que pense em uma equação matemática que relacione, linha a linha, os números das colunas A, B e C da tabela. Prontamente o corvo falante responde: $i^{A+B} = i^C$, onde $i$ é a unidade imaginária.

Com base na equação dita pelo corvo e sabendo que A, B e C são números naturais, considere as afirmativas a seguir.

**I.** Se A + B é múltiplo de 4 e C = 4, então A, B e C satisfazem a equação.
**II.** Se A = 26, B = 44 e C = 30, então A, B e C satisfazem a equação.
**III.** Se A = B = 1, então a única possibilidade para que A, B e C satisfaçam a equação é C = 6.
**IV.** Se A e B são números ímpares e C = 1, então A, B e C satisfazem a equação.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e II são corretas.
b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

**24. UEL-PR 2015** Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Adaptado de: CARNEIRO, J. P. "A Geometria e o Ensino dos Números Complexos". Revista do Professor de Matemática. 2004. v.55. p.18.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos P(−3, 4) e Q(2, −3) representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$
b) $-6 - 12i$
c) $-1 + i$
d) $5 + 7i$
e) $6 + 17i$

**25. Uefs-BA 2018** Dado um número complexo $z = a + bi$ com $a$ e $b$ reais, define-se afixo de $z$ como o ponto do plano complexo de coordenadas $(a, b)$. Sejam A, B e C os afixos dos números complexos $z_A = 14 + 4i$, $z_B = 6 - 2i$ e $z_C = 16 - 2i$. A área do triângulo de vértices A, B e C é

a) 18.
b) 24.
c) 30.
d) 36.
e) 40.

**26. UFRGS 2019** Dados os números complexos $z_1 = (2, -1)$ e $z_2 = (3, x)$ sabe-se que $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Então $x$ é igual a

a) − 6.
b) $-\dfrac{3}{2}$.
c) 0.
d) $\dfrac{3}{2}$.
e) 6.

**27.** A soma dos módulos dos números complexos $z = 3 + 4i$ e $w = -5 + 12i$ é

a) 14
b) 18
c) 24
d) 28
e) 32

**28.** A soma do menor argumento positivo do número complexo $u = -2 - 2i$ com o maior argumento negativo do número complexo $v = 1 - \sqrt{3}i$ é:

a) 45°
b) 60°
c) 75°
d) 135°
e) 165°

**29. EsPCEx-SP 2021** Sejam $x$ um ângulo qualquer, em radianos, e $i$ a unidade imaginária. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} \cos(2x) & -i & -\operatorname{sen}x \\ i & 1 & i\operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a

a) $-i$.
b) $i$.
c) −1.
d) 1.
e) 0.

**30. PUC-SP 2020** Considere os números complexos $z_1 = a + i$, $z_2 = b + i$, $z_3 = a + 6i$ e $z_4 = 3i$, com $a$ e $b$ números reais e $b > 0$. Se $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$, o número complexo $z_5 = a + 3bi$ é igual a

a) $-2 - i$
b) $2 - 3i$
c) $3 + i$
d) $3 + 3i$

**31. Uern 2013** Seja $z = a + bi$ um número complexo, tal que $4z - zi + 5 = -1 + 10i$. Assim, o módulo do complexo $z$ é

a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$

**32. AFA-SP 2022** Considere, no Plano de Argand-Gauss, os números complexos $z = x + yi$, em que $x$ e $y$ são números reais e $i$ a unidade imaginária. Sobre a igualdade $2z + \overline{z} = 9 + 3i$, é correto afirmar que

a) $\frac{z}{i} = \overline{z}$
b) $|z| = 2\sqrt{2}$
c) o argumento de $z$ é $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
d) $i \cdot z$ tem afixo no 3º quadrante.

**33. Uece 2014** Se $x$ e $y$ são números reais não nulos, pode-se afirmar corretamente que o módulo do número complexo $z = \frac{x - iy}{x + iy}$ é igual a

a) 1.
b) 2.
c) $x^2 + y^2$.
d) $|xy|$.

**34. Mackenzie-SP 2016** Se $w$ é um número complexo, satisfazendo $\text{Re}(w) > 0$ e $(w + i)^2 + |\overline{w} + i|^2 = 6$, então $w$ é igual a

a) $-1 - i$
b) $-1 + i$
c) $1 - i$
d) $-1$
e) $-i$

**35. UFRGS 2018** Considere as seguintes afirmações sobre números complexos.

**I.** $(2 + i)(2 - i)(1 + i)(1 - i) = 10$

**II.** $\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

**III.** Se o módulo do número complexo $z$ é 5, então o módulo de $2z$ é 10.

Quais afirmações estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e III.
e) I, II e III.

**36.** O módulo do número complexo que resulta do quociente $\frac{4 + 7i}{8 - i}$ vale

a) 10
b) 8
c) 5
d) 2
e) 1

**37. Ifal 2016** O número complexo $z = (x - 1) + (x + 6)i$ tem módulo $|z| = 13$. Sendo $x$ um número real positivo, qual o valor de $x$?

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

**38. UEPG-PR 2021** Considerando $i$ a unidade imaginária e $z_1 = \begin{vmatrix} 2 & i + 1 \\ i & 2 \end{vmatrix}$ e $z_2 = i + 1$, assinale o que for correto.

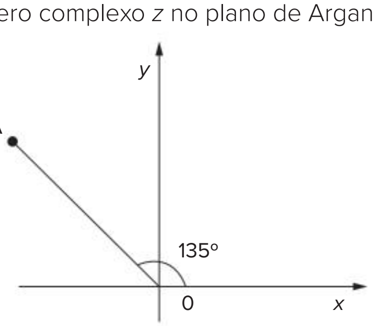
01 No plano complexo, $z_1$ encontra-se no primeiro quadrante.
02 Para que $(x + y) + (x - y)i$ seja igual a $z_2$, então $x^y = 1$.
04 $z_1 \cdot z_2 = 4i + 4$
08 $(z_2)^6 = 8$
16 $\frac{z_1}{z_2} = 2 - 3i$

Soma:

**39. UEPB 2013** O módulo e o argumento do número complexo $z = (1 + i)(1 - i)^2$ são respectivamente:

a) $\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
b) $\sqrt{2}$ e $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
c) $2\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
d) $2\sqrt{2}$ e $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
e) $2\sqrt{2}$ e $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**40. PUC-RS 2013** Na figura abaixo, o ponto A é o afixo de um número complexo $z$ no plano de Argand-Gauss.




Se a distância do ponto A até a origem O é 4, então a diferença entre $z$ e o seu conjugado é igual a

a) $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$
b) $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$
c) $-4\sqrt{2}i$
d) $4\sqrt{2}i$
e) $4\sqrt{2}$

**41.** O módulo do número complexo $z = \dfrac{10+10i}{6-8i} + \dfrac{60}{12+9i}$ é:

a) 2
b) 4
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{10}$
e) 10

**42. PUC-SP 2017** Considere os números complexos $z_1 = -1 - i$, $z^2 = k + i$, com $k$ um número real positivo e $z_3 = z_1 \cdot z_2$. Sabendo que $|z_3| = \sqrt{10}$, é correto afirmar que

a) $|z_1 + z_2| = \sqrt{7}$
b) $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{-1+i}{2}$
c) O argumento de $z_2$ é 225°.
d) $z_3 \cdot z_2 = -1 + 2i$

**43. Ufam 2020** Sejam $\theta_1$ e $\theta_2$ os argumentos de dois números complexos $z_1$ e $z_2$, respectivamente, tais que $0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta_1$ é o dobro de $\theta_2$. Se o produto de $z_1$ e $z_2$ é um imaginário puro, então o valor de $\theta_1$, em radianos, é igual a:

a) $\dfrac{\pi}{3}$
b) $\dfrac{\pi}{4}$
c) $\dfrac{\pi}{5}$
d) $\dfrac{\pi}{6}$
e) $\dfrac{\pi}{8}$

**44. UEPG-PR 2020** Considerando, no plano complexo, os números $z_1 = i$, $z_2 = 4i$ e $z_3 = 4 + 5i$, assinale o que for correto.

01 A área do triângulo definido pelos números complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ é 6 u.a.
02 A parte imaginária do número $\dfrac{z_3}{z_2}$ é $-1$.
04 O módulo do número complexo $z_3$ é um número menor do que 6.
08 A medida do lado maior do triângulo definido pelos números complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ é $4\sqrt{2}$ u.c.
16 $z_1 \cdot z_3$ pertence ao segundo quadrante.

Soma:

**45. Efomm-RJ 2021** O número complexo $\sqrt[3]{4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}}$ é igual a

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
b) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$
c) $\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$
d) $4\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
e) $\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

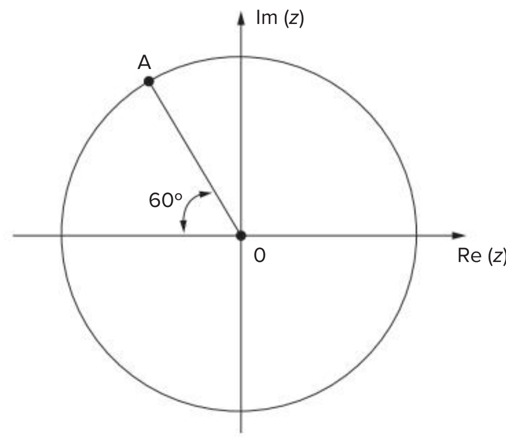
**46. PUC-SP 2017** Em relação ao número complexo $z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right)$ é correto afirmar que

a) sua imagem pertence ao 3º quadrante do plano complexo.
b) é imaginário puro.
c) o módulo de $z$ é igual a 4.
d) seu argumento é igual ao argumento do número complexo $v = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

**47. Uefs-BA 2016** Os números complexos $z$ e $w$ têm módulos $|z| = |w| = 1$. Se $z$, $w$ e seu produto $z \cdot w$ formam, no plano de Argand-Gauss, os vértices de um triângulo equilátero, é correto afirmar que

a) $z$ é real.
b) $w = \pm 1$ ou $w = \pm i$.
c) $z \cdot w$ é um imaginário puro.
d) a parte real de $w$ é positiva.
e) $z$ e $w$ são complexos conjugados.

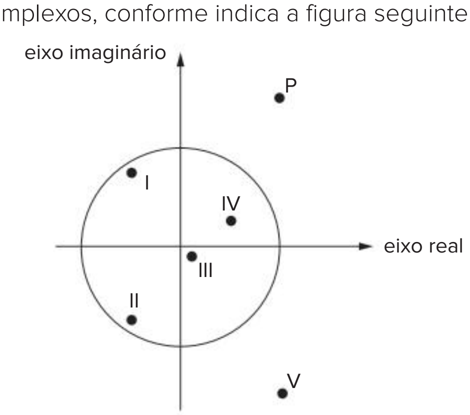
**48. PUC-SP 2015** No plano complexo de origem O, representado na figura abaixo, o ponto A é a imagem de um número complexo $u$ cujo módulo é igual a 4.




Se B é o ponto imagem do complexo $v = \dfrac{u}{i}$, então é correto afirmar que:

a) O módulo de $u + v$ é igual a $4\sqrt{2}$.
b) O módulo de $u - v$ é igual a $2\sqrt{2}$.
c) B pertence ao terceiro quadrante.
d) B pertence ao quarto quadrante.
e) O triângulo AOB é equilátero.

**49. FGV-SP 2017** Seja $z$ um número complexo cujo afixo P está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.

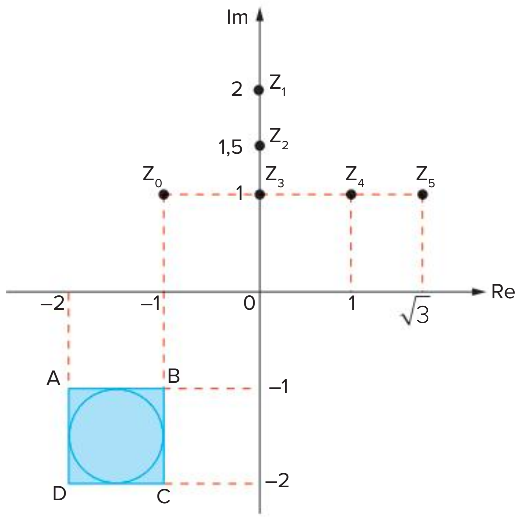



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\dfrac{1}{z}$ pode ser

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

FRENTE 2

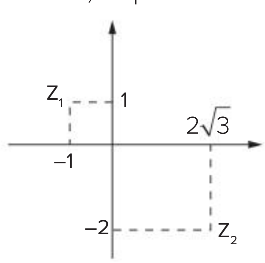
**50. FGV-SP 2013** No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos $Z_0$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ e $Z_5$.




Se o afixo do produto de $Z_0$ por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é

a) $Z_1$.
b) $Z_2$.
c) $Z_3$.
d) $Z_4$.
e) $Z_5$.

**51. UFSJ-MG 2012 (Adapt.)** Na figura abaixo, estão representados os números complexos $Z_1$ e $Z_2$ por meio de seus afixos A e B, respectivamente.




Considerando essa figura, é **CORRETO** afirmar que

a) o afixo de $(Z_1 \cdot Z_2)$ é um ponto do 2º quadrante.
b) $(Z_1)^2 = 2i$
c) $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{3}$
d) o afixo de $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ não é um ponto do 2º quadrante.

**52. Ifal 2017** Escrevendo o número complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica, temos

a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$
b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$
c) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$
d) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$
e) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$

**53. Ifal 2016** Podemos dizer que uma forma trigonométrica de representar o número complexo $\dfrac{5 + 5i}{2 - 2i}$ é

a) $Z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$
b) $Z = 5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$
c) $Z = \frac{5}{2} \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi).$
d) $Z = \frac{5}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$
e) $Z = \frac{2}{5} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$

**54.** Calculando $\dfrac{i}{1+i} - \dfrac{3}{1-i}$, obtemos o complexo:

a) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
b) $2\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
c) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
e) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

**55. Mackenzie-SP 2014** O número complexo $z = a + bi$ tal que $z$, $\dfrac{1}{z}$ e $1 - z$ tenham o mesmo módulo é

a) $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
b) $z = 2 \pm \sqrt{3}\,i$
c) $z = 1 \pm \sqrt{3}\,i$
d) $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$
e) $z = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$

**56. Uece 2016** No sistema de coordenadas cartesianas usual com origem no ponto O, considere os números complexos, na forma trigonométrica, dados por $z = 2(\cos 60° + i \cdot \operatorname{sen} 60°)$ e $w = 2(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°)$. Os pontos do plano que representam estes números e a origem O são vértices de um triângulo cuja medida da área é

a) 1,0 u.a.
b) 0,5 u.a.
c) 2,0 u.a.
d) 1,5 u.a.

**57. IFSul-RS 2017** De uma forma criativa, após um exame, o professor entregou as notas expressas por números complexos aos seus alunos. Para cada aluno descobrir sua nota, era necessário calcular o módulo (observe que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ) do número complexo descrito no seu exame.
Dessa forma, as notas representadas pelos números complexos $N_1 = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$, $N_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$ e $N_3 = \left(\frac{5}{2} + i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) - \frac{3}{4}i$ aproximados são, respectivamente,

a) 4; 3 e 3,5
b) 3; 4 e 3,5
c) 3; 4 e 5
d) 4; 3 e 5

**58. Unioeste-PR 2013** Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Assim, é correto afirmar que

a) se $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$, então $z_1 z_2 = 3 - 2i$.

b) se $z_1 = 2 + 2i$, então $|z_1| = 2\sqrt{2}$.

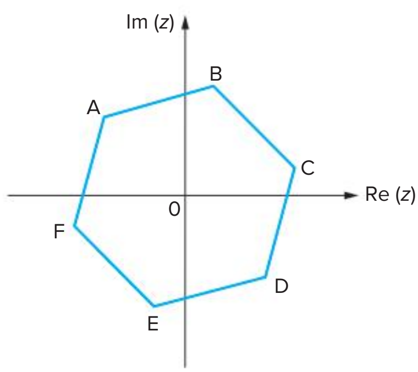
c) $z_1 + z_2 = (a + d) + (b + c)i$.

d) a forma polar de $z_1 = -1 - 2i$ é

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

e) qualquer que seja $z_1$, tem-se que $z_1{}^4 = a^4 + b^4 i$.

**59. UPF-RS 2018** Na figura abaixo, está representado, no plano complexo, um hexágono regular cujos vértices são imagens geométricas das $n$ raízes de índice $n$ de um número complexo $z$.




O vértice A tem coordenadas (−1, 1). Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D?

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

b) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$

c) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$

d) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$

e) $2\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$

**60. IFMG 2020** O número complexo $(1 + i)^8$ é igual a:

a) $i$

b) $8i$

c) 16

d) $8 + 8i$

e) $-1$

**61.** Sendo $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, então $z^{10}$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

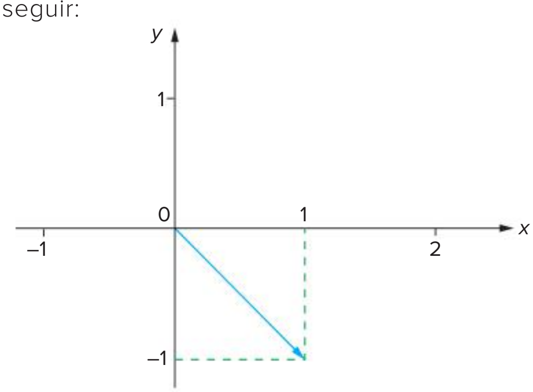
b) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$

e) $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

**62. FGV-SP 2016** Observe o plano Argand-Gauss a seguir:




Elevando-se a 2015 o número complexo indicado nesse plano de Argand-Gauss, o afixo do número obtido será um ponto desse plano com coordenadas idênticas e iguais a

a) $2^{2015}$

b) $2^{1007}$

c) 1

d) $2^{-2015}$

e) $-2^{1007}$

**63. EsPCEx-SP 2021** Simplificando-se a expressão $\frac{(2 - 2i)^{10}}{i^{2021}}$, onde $i$ é a unidade imaginária, obtém-se

a) $-2^{15}i$.

b) $2^{15}$.

c) $-2^{10}$.

d) $-2^{15}$.

e) $2^{15}i$.

**64. Uesb-BA 2020** Um hexágono regular ABCDEF está desenhado no plano complexo e a expressão do vértice A é dada por $3\left(\cos(15^\circ) + i \cdot \text{sen}(15^\circ)\right)$. Seguindo esse padrão, em que a ordem alfabética dos vértices acompanha o sentido anti-horário, pode-se afirmar que o vértice C possui expressão igual a

a) $3\left(\cos(315^\circ) + i \cdot \text{sen}(315^\circ)\right)$

b) $3\left(\cos(255^\circ) + i \cdot \text{sen}(255^\circ)\right)$

c) $3\left(\cos(195^\circ) + i \cdot \text{sen}(195^\circ)\right)$

d) $3\left(\cos(135^\circ) + i \cdot \text{sen}(135^\circ)\right)$

e) $3\left(\cos(75^\circ) + i \cdot \text{sen}(75^\circ)\right)$

**65. Uece 2017** Se $i$ é o número complexo cujo quadrado é igual a −1, e $n$ é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^n$ é um número real sempre que

a) $n$ for ímpar.

b) $n$ for um múltiplo de 4.

c) $n$ for um múltiplo de 3.

d) $n$ for um múltiplo de 5.

**66. Efomm-RJ 2020** Seja o somatório abaixo, onde $i$ é a unidade imaginária.

$$S = \sum_{j=0}^{2020} i^j$$

Sobre o valor de S, é correto afirmar que

a) $S = 1 - i$
b) $S = 1 + i$
c) $S = 1$
d) $S = i$
e) $S = i^3$

**67. Unicamp-SP 2015** Sejam $x$ e $y$ números reais tais que $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$, onde $i$ é a unidade imaginária. O valor de $x \cdot y$ é igual a

a) $-2$.
b) $-1$.
c) 1.
d) 2.

**68. EsSA-MG 2021** Para que $z = \dfrac{5 + i}{a - 2i}$ seja um imaginário puro, o valor de $a$ deve ser?

**69. Unigranrio-RJ 2017** Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$ as raízes da equação $x^3 + 1 = 0$, tomando como base o conjunto dos números complexos. Ao representarmos geometricamente essas raízes no plano de Argand-Gauss, obtemos um triângulo, cujos vértices são os afixos de $x_1$, $x_2$ e $x_3$. A área do triângulo é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
b) $\dfrac{3}{4}$
c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$
d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
e) $\dfrac{3}{2}$

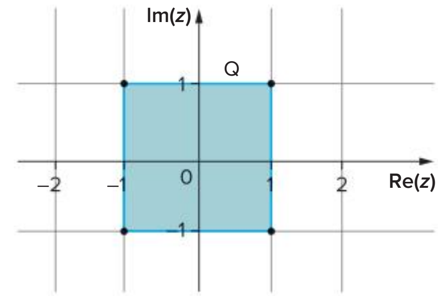
**70. PUC-RS 2015** Foi construído, no plano de Argand-Gauss, um polígono cujos vértices estão sobre as raízes do polinômio $p(z) = z^4 - 16$ em $\mathbb{C}$. A área desse polígono, em unidades de área, é

a) 64
b) 32
c) 16
d) 8
e) 4

**71.** A área do polígono determinado pelos afixos das soluções complexas da equação $x^6 = 64$ no plano de Argand-Gauss é

a) 6
b) $6\sqrt{3}$
c) 12
d) $6\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{6}$

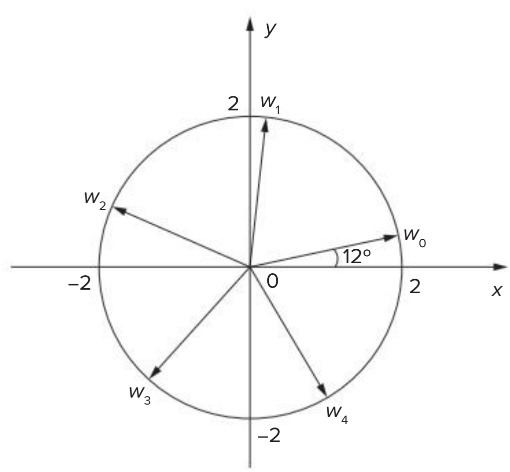
**72. FGV-SP 2021** Ligando as representações dos afixos de quatro números complexos no plano de Argand-Gauss obtém-se o quadrado destacado em cinza, indicado na figura por Q.




Multiplicando-se esses afixos pelo número complexo $1 + i$, o polígono que será obtido, ligando-se os quatro novos afixos, será um quadrado $q$. Comparando-se a transformação de Q em $q$, pode-se afirmar que houve

a) uma reflexão pelo eixo Im($z$) e outra pelo eixo Re($z$).
b) uma translação horizontal e uma vertical, ambas de uma unidade.
c) uma rotação de 45° e os comprimentos dos lados foram multiplicados por 4.
d) uma rotação de 90° e os comprimentos dos lados foram multiplicados por 2.
e) uma rotação de 45° e os comprimentos dos lados foram multiplicados por $\sqrt{2}$.

**73. Cefet-MG 2015** Considere as raízes complexas $w_0$, $w_1$, $w_2$, $w_3$ e $w_4$ da equação $w^5 = z$, onde $z \in \mathbb{C}$, representadas graficamente por




O número complexo $z$ é

a) $16i$.
b) $32i$.
c) $16 + 16i$.
d) $16 + 16\sqrt{3}\,i$.
e) $32 + 32\sqrt{3}\,i$.

**74. Unioeste-PR 2017** Considere $\theta$ um número real qualquer. Sobre os números complexos $z = \cos(2\theta) + i\text{sen}(\theta)$ e $w = \cos(\theta) + i\text{sen}(2\theta)$, pode-se afirmar que

a) $|z| + |w| = 1$.
b) $z^2 - w^2 = 0$.
c) $z = \overline{w}$.
d) $z - iw = 0$.
e) $|z|^2 + |w|^2 = 2$.

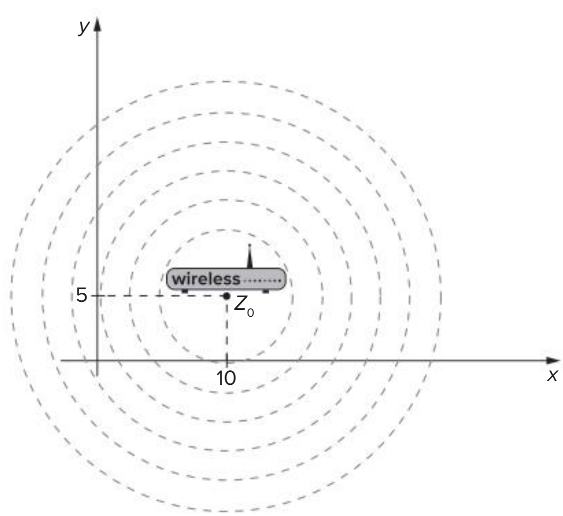
**75.** **UFSM-RS 2013** Os edifícios "verdes" têm sido uma nova tendência na construção civil. Na execução da obra desses prédios, há uma preocupação toda especial com o meio ambiente em que estão inseridos e com a correta utilização dos recursos naturais necessários ao seu funcionamento, além da correta destinação dos resíduos gerados por essa utilização.
A demarcação do terreno onde será construído um edifício "verde" foi feita através dos pontos $P_1$, $P_2$, $P_3$ e $P_4$, sendo o terreno delimitado pelas poligonais $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$ medidas em metros. Sabendo que $P_1$, $P_2$, $P_3$ e $P_4$ representam, respectivamente, a imagem dos complexos $z_1 = 20 + 40i$, $z_2 = -15 + 50i$, $z_3 = -15 - 10i$ e $z_4 = \frac{1}{16}z_1 - \frac{5}{4}\overline{z_3}$, qual é a área, em $m^2$, desse terreno?

a) 1 595.
b) 1 750.
c) 1 795.
d) 1 925.
e) 2 100.

**76.** **FICSAE-SP 2016** Sejam os números complexos $u = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \operatorname{sen} 315°)$ e $w = u^2$. Se P e Q são as respectivas imagens de $u$ e $w$, no plano complexo, então a equação da reta perpendicular a $\overline{PQ}$, traçada pelo seu ponto médio, é

a) $3x + y + 2 = 0$
b) $3x - y + 2 = 0$
c) $x + 3y + 14 = 0$
d) $x - 3y + 14 = 0$

**77.** **UFSM-RS 2014** No plano complexo, o ponto $z_0$ representa o local de instalação de uma antena *wireless* na praça de alimentação de um *shopping*.



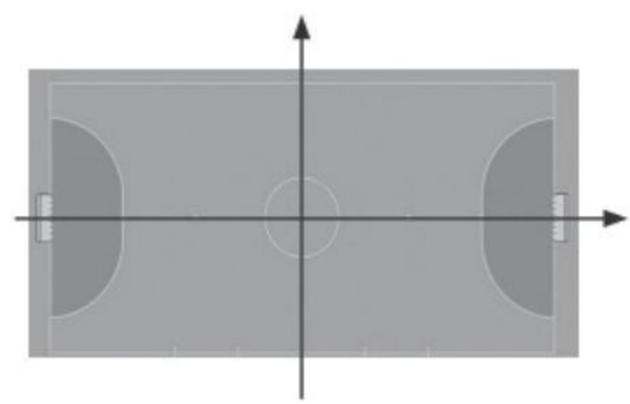

Os pontos $z = x + yi$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação $|z - z_0| = 30$. De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por

a) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$.

**78.** **PUC-RS 2014** A área da figura representada no plano de Argand-Gauss pelo conjunto de pontos $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ é

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\pi$
e) $2\pi$

**79.** **PUC-RS 2016** Uma cancha de futsal está situada sobre um sistema de coordenadas do plano complexo (Argand-Gauss), com unidades marcadas em metros e com centro sobre o ponto O(0, 0), como na figura abaixo.



Se a circunferência central possui uma área de $9\pi$ $m^2$, a expressão que melhor representa esta circunferência central, em $z \in \mathbb{C}$, é

a) $z^2 = 9$
b) $z = 3$
c) $z = 9$
d) $|z| = 3$
e) $|z| = 9$

**80.** **Insper-SP 2012** No conjunto dos números complexos, o número 1 apresenta três raízes cúbicas: 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Os pontos que correspondem às representações desses três números no plano de Argand-Gauss são vértices de um triângulo de área

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
d) $\sqrt{3}$
e) 1

# Texto complementar

## Gráficos em coordenadas polares

[...]

Como no caso de equações cartesianas, um ponto P está no gráfico da curva de equação $r = f(\theta)$ se, e somente se, $P = (r, f(\theta))$.

O uso de coordenadas polares simplifica, em alguns casos, equações de curvas.

[...]

Procedimentos para traçar gráficos em coordenadas polares

1) Verificar se existem simetrias, isto é, se a equação se altera ao trocar:
   a) $\theta$ por $-\theta$: simetria em relação à reta $\theta = 0$ (eixo $x$).
   b) $\theta$ por $\pi - \theta$: simetria em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eixo $y$).
   c) $\theta$ por $\pi + \theta$: simetria em relação ao polo. [...]
2) Verificar se a curva passa pelo polo ($r = 0$).
3) Determinar os pontos da curva variando $\theta$ a partir de $\theta = 0$.
4) Verificar a existência de pontos críticos (máximos e mínimos): $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) > 0 \Rightarrow \theta$ é um mínimo relativo; $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) < 0 \Rightarrow \theta$ é um máximo relativo.
5) Verificar se $r$ não se altera ao trocar $\theta$ por $\theta + 2\pi$. Caso não haja alteração, basta variar $\theta$ entre 0 e $2\pi$.

[...]

As seguintes relações trigonométricas serão úteis aqui:

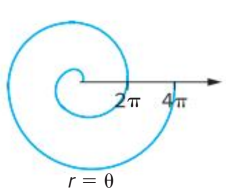
- $\cos(-\theta) = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos(2\pi + \theta)$ e $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta = \text{sen}(2\pi - \theta)$ e $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta = \text{sen}(\theta + 2\pi)$

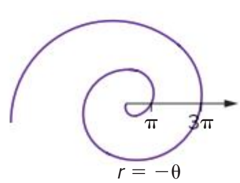
Veja alguns exemplos:

- $r = \theta$ com $\theta \geqslant 0$

Representa os pontos $P = (r, r)$ onde $r \geqslant 0$, ou seja, os pontos P tais que a distância de P ao polo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento OP.

A seguir, temos os gráficos de $r = \theta$ e $r = -\theta$, para $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$.




A equação geral da espiral é dada por $r = a\theta$, considerando $\theta \geqslant 0$.

- $r = \cos 2\theta$

Temos: $\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$;

$\cos 2(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ e

$\cos 2(\pi + \theta) = \cos(2\pi + 2\theta) = \cos 2\theta$

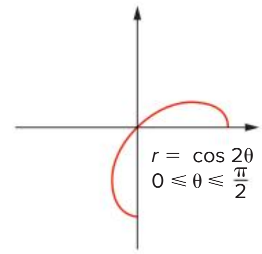
Logo, existem simetrias em relação ao polo e em relação aos eixos $x$ e $y$. [...]

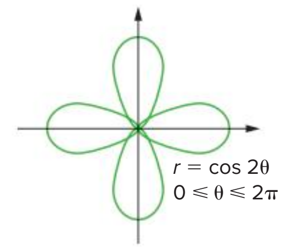
Para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 0$, ou seja, a curva passa pelo polo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Também $r$ não se altera ao trocar $\theta$ por $\theta + 2\pi$.

Assim, basta fazer o gráfico para $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ e completá-lo, a partir das simetrias.

| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 0,5 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0 |
| $\frac{\pi}{3}$ | −0,5 |
| $\frac{\pi}{2}$ | −1 |




Equações da forma $r = a \cdot \text{sen}(n\theta)$ ou $r = a \cdot \cos(n\theta)$, para $n$ inteiro positivo, representam rosáceas.

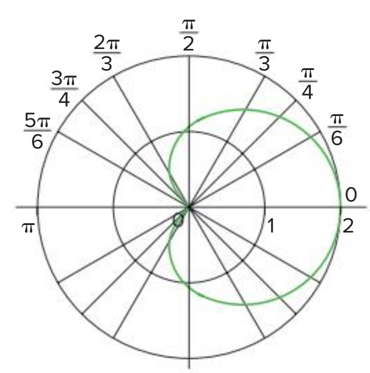
- $r = 1 + \cos\theta$

Temos: $1 + \cos\theta = 1 + \cos(-\theta) \neq 1 + \cos(\pi - \theta)$

$1 + \cos\theta \neq 1 + \cos(\pi + \theta)$

Logo, o gráfico é simétrico em relação ao eixo $x$ mas não é simétrico em relação ao eixo $y$ e nem em relação ao polo. [...]

| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| 0 | 2,00 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 1,87 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 1,71 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 1,50 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1,00 |
| $\frac{2\pi}{3}$ | 0,50 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | 0,29 |
| $\frac{5\pi}{6}$ | 0,13 |
| $\pi$ | 0,00 |




Equações da forma $r = a \cdot (1 \pm \text{sen}\,\theta)$ ou $r = a \cdot (1 \pm \cos\theta)$ representam uma categoria de curvas chamadas cardioides, por terem a forma de coração.

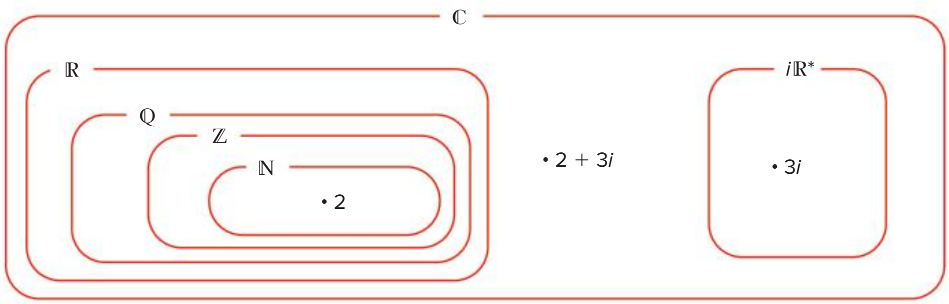
NASCIMENTO, Mauri C. Coordenadas polares. *Unesp*, [s. d.]. Disponível em: wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/Polares.pdf. Acesso em: 19 jan. 2022. (Adapt.).

## Resumindo

**O conjunto dos números complexos**

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Sendo $z = a + bi$ um número complexo, temos: $\begin{cases} \text{Parte real de } z\text{: } \operatorname{Re}(z) = a \\ \text{Parte imaginária de } z\text{: } \operatorname{Im}(z) = b \\ \text{Afixo de } z\text{: } (a, b) \\ \text{Conjugado de } z\text{: } \overline{z} = a - bi \end{cases}$




$$\underset{\text{(Naturais)}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{(Inteiros)}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{(Racionais)}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{(Reais)}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{(Complexos)}}{\mathbb{C}}$$

Se $a + bi$ for um número real, então $b = 0$ e, se for um imaginário puro, então $a = 0$ e $b \neq 0$.

**Igualdade em $\mathbb{C}$**

Dados dois números complexos em suas formas algébricas $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos que esses dois números são iguais se, e somente se, tiverem a mesma parte real e a mesma parte imaginária, ou seja:

$$z = w \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

**Adição em $\mathbb{C}$**

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

**Multiplicação em $\mathbb{C}$**

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

**Potências inteiras da unidade imaginária**

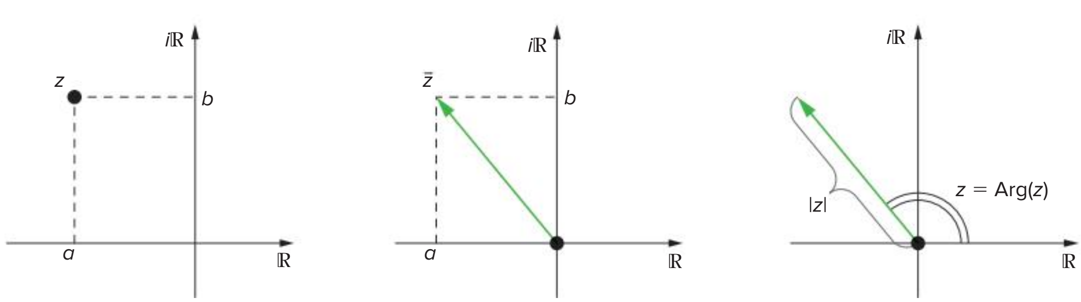
$i^n = i^r$, em que $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ é o resto da divisão de $n$ pelo número 4.

$$\begin{array}{lllll} \ldots, & i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ & i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\ & i^8 = 1, & i^9 = i, & i^{10} = -1, & i^{11} = -i, \quad \ldots \end{array}$$

**O plano de Wessel-Argand-Gauss**

Trata-se de uma adaptação do plano cartesiano tradicional, na qual o eixo das abscissas continua representando o conjunto dos números reais enquanto o eixo das ordenadas, com exceção da origem, passa a representar o conjunto dos imaginários puros. Assim, um número complexo $z = a + bi$ passa a ser representado, no plano complexo, por seu afixo: o par ordenado $(a, b)$.

A primeira das figuras a seguir apresenta um número complexo no segundo quadrante, ou seja, com parte real negativa ($a < 0$) e parte imaginária positiva ($b > 0$); a segunda figura apresenta o vetor $\vec{z}$ associado, e a terceira figura destaca o módulo e o argumento desse vetor.



**Módulo e argumento**

O módulo de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número real positivo que representa o tamanho do vetor $\vec{z}$, assim: $|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$. É correto afirmar que: $|z| = |\bar{z}|$ e $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

O argumento de um número complexo é a medida, em graus ou radianos, de um arco trigonométrico determinado pelo vetor associado ao número complexo e o semieixo dos números reais positivos.

$$\theta = \text{Arg}(z) \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|} \Rightarrow \text{Im}(z) = |z| \cdot \text{sen}\theta \\ \cos\theta = \dfrac{\text{Re}(z)}{|z|} \Rightarrow \text{Re}(z) = |z| \cdot \cos\theta \\ \text{tg}\theta = \dfrac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \end{cases}$$

Os arcos de $-240°$, $120°$ e $480°$ podem, por exemplo, ser argumentos de um mesmo número complexo, e, neste caso, seu argumento principal será igual a $120°$.

**Operações na forma trigonométrica**

Se $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$ e $w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$, temos:

$$\begin{cases} z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)] \\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)] \\ z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \alpha)) \end{cases}$$

**Operações na forma polar**

Sendo $(|z|, \alpha)$ e $(|w|, \beta)$ as coordenadas polares dos complexos $z$ e $w$: $\begin{cases} z \cdot w = (|z| \cdot |w|, \alpha + \beta) \\ \dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{|z|}{|w|}, \alpha - \beta\right) \\ z^n = (|z|^n, n \cdot \alpha) \end{cases}$

**Classificação dos números complexos de acordo com seus argumentos**

Sendo $z$ um número complexo de argumento $\alpha$ radianos, e $k$ um número inteiro, temos que:

$$\begin{cases} z \text{ é real} \Rightarrow \alpha = k \cdot \pi \\ z \text{ é imaginário puro} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \end{cases}$$

**Igualdade polar**

Se dois números complexos são iguais, então suas coordenadas polares apresentam o mesmo módulo, mas podem apresentar argumentos diferentes:

$$z = w \Rightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \alpha = \beta + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Quer saber mais?**

***Sites***

CANAL M3 Matemática Multimídia. *Um sonho complexo*. YouTube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6KTwK0aTwr0. Acesso em: 19 jan. 2022.

De forma lúdica e descontraída é apresentado um breve histórico dos números complexos, suas formas e propriedades algébricas, trigonométricas e geométricas.

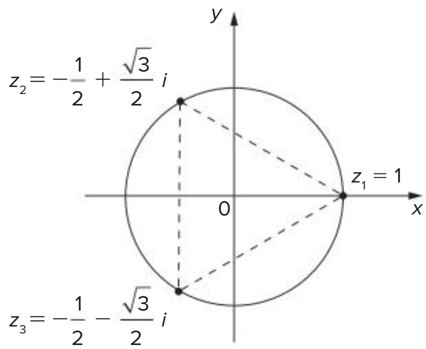
PUHL, Cassiano Scott. *Origem dos números complexos*. Matemática complexa. Disponível em: https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos. Acesso em: 19 jan. 2022.

Conheça um pouco mais a evolução dos números complexos. Além do texto, também é apresentado um vídeo que é um recorte do documentário da BBC chamado *As fronteiras do espaço*, da série A história da Matemática, e pode ser assistido na íntegra em https://www.youtube.com/watch?v=WcBnShSYCxg.

## Exercícios complementares

1. **UFPE 2013** Encontre o menor inteiro positivo $n$ tal que a potência $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real.

2. **UFPR 2013** Considere os pontos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ indicados no plano complexo abaixo, e que correspondem às raízes cúbicas de 1.




a) Qual é o menor inteiro $n > 1$ de modo que $(z_2)^n = 1$? Justifique sua resposta.
b) Calcule $(z_3)^{100}$.

3. **UFPR 2019** Considere o número complexo $z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

a) Calcule o módulo de $z$ e escreva a forma polar de $z$.
b) Calcule o valor da expressão $z^{27} + z^{24}$. (Sugestão: use a fórmula de Moivre)

4. **UEPG-PR 2019** No plano complexo, se:

- A é o afixo do número $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$,
- B do número $z_2 = 4[\cos(2\pi) + i\text{sen}(2\pi)]$ e
- C do número $z_3 = 4 + i$

assinale o que for correto.
01 A área do triângulo ABC tem medida menor que 2.
02 A reta de equação $y = -3x + 12$ passa pelos pontos A e B.
04 O perímetro do triângulo ABC tem medida maior que 7.
08 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ tem centro no ponto A e raio 1.

Soma:

5. **UEPG-PR 2018** Considerando os números complexos $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = -3 + i$, assinale o que for correto.

01 $|z_1z_2| = \sqrt{50}$.
02 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(-1+i)$.
04 $(\bar{z}_2)^2 = 8 - 6i$.
08 O módulo de $z_2$ é $\sqrt{8}$.
16 O afixo de $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ pertence ao 2º quadrante.

Soma:

6. **UEM-PR 2017** Seja $V = \{1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$ formado pelos números complexos que, no plano complexo, correspondem aos vértices de um hexágono regular cujo centro esteja situado na origem. Assinale o que for **correto**.

01 O produto de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
02 A diferença de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
04 O conjugado de todo elemento de V também pertence a V.
08 A soma de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
16 A divisão de um elemento de V por outro elemento de V sempre pertence a V.

Soma:

7. **UFSC 2017** Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica $j$. Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos $a + bi$.
Considere agora $U = 110(\cos 0° + i \cdot \text{sen} 0°)$ e $Z = 5 + 5i$.
Determine o valor da expressão $2a + b$ sendo $j = a + bi$.

8. **Fuvest-SP 2015** Resolva os três itens abaixo.

a) Calcule $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual $z^n$ seja real.
c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua $z$ como raiz e que não possua raiz real.

9. **FGV-SP 2014** Seja $f$ uma função que, a cada número complexo $z$, associa $f(z) = iz$, onde $i$ é a unidade imaginária. Determine os complexos $z$ de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de $z$.

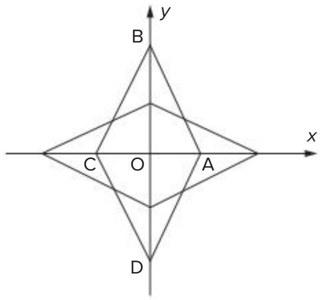
10. **UFPR 2014** Considere o número complexo $z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i}$.

a) Determine a parte real e a parte imaginária de $z_0$.
b) Determine $a$ e $b$, de modo que $z = 1 - i$ seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$.

11. **UFG-GO 2014** Considerando os números complexos $z$ e $w$ tais que $z + w = \left(9 - 3\sqrt{3}\right) + i\left(9 - 3\sqrt{3}\right)$ e $z - w = \left(-3 + 3\sqrt{3}\right) + i\left(3 - 3\sqrt{3}\right)$, determine a área do paralelogramo de lados $|z|$ e $|w|$, sabendo-se que o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{3}$.

**12. Unesp 2012** Identifique o lugar geométrico das imagens dos números complexos Z, tais que $|Z| + |3 \cdot Z| = 12$.

**13. FGV-SP**

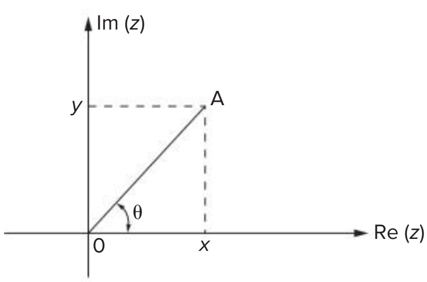



a) Calcule a área do losango ABCD cujos vértices são os afixos dos números complexos: 3, $6i$, $-3$ e $-6i$, respectivamente.

b) Quais são as coordenadas dos vértices do losango A'B'C'D' que se obtém girando 90° o losango ABCD, em torno da origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário?

c) Por qual número devemos multiplicar o número complexo cujo afixo é o ponto B para obter o número complexo cujo afixo é o ponto B'?

**14. Unifesp** No plano de Argand-Gauss (figura), o ponto A é chamado afixo do número complexo $z = x + yi$, cujo módulo (indicado por $|z|$) é a medida do segmento $\overline{OA}$ e cujo argumento (indicado por $\theta$ é o menor ângulo formado com $\overline{OA}$, no sentido anti-horário, a partir do eixo Re($z$). O número complexo $z = i$ é chamado "unidade imaginária".




a) Determinar os números reais $x$ tais que $z = (x + 2i)^4$ é um número real.

b) Se uma das raízes quartas de um número complexo $z$ é o complexo $z_0$, cujo afixo é o ponto $(0, a)$, $a > 0$, determine $|z|$.

**15. UFPE** A representação geométrica dos números complexos $z$ que satisfazem a igualdade $2|z - i| = |z - 2|$ formam uma circunferência com raio $r$ e centro no ponto com coordenadas $(a, b)$. Calcule $r$, $a$ e $b$ e assinale $9(a^2 + b^2 + r^2)$.

**16. UFSC 2020**

01 Se a reta $r$ é paralela simultaneamente aos planos $\alpha$ e $\beta$, então $\alpha$ é paralelo a $\beta$.

02 Se o número complexo $z = \dfrac{2 + i}{3 + xi}$ é um imaginário puro, então $x^2$ é divisor de 72.

04 O conjunto $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z + 3i| = 1\}$ possui dois elementos.

08 A intersecção de um plano com a superfície do cone duplo da figura a seguir somente fornecerá como secção ou um ponto, ou uma circunferência, ou uma parábola, ou uma elipse.

16 Se $i$ é a unidade imaginária, então $\dfrac{(1 + i)^{15}}{(1 - i)^{13}}$ é um número real negativo.

Soma:

**17. Esc. Naval-RJ 2020** Seja o número complexo $z$ tal que $|z - 5 - 4i| = 2$, onde $i$ é a unidade imaginária. O valor máximo de $|z + 7 + i|$ é igual a:

a) 12
b) 14
c) $6\sqrt{41}$
d) $7\sqrt{41}$
e) 15

**18. Uece 2016** O conjunto dos números complexos pode ser representado em um plano munido do sistema de coordenadas cartesianas usual. As raízes da equação $x^4 - 9 = 0$, quando representadas no plano, correspondem a pontos que são vértices de um

a) trapézio.
b) losango (não quadrado).
c) paralelogramo cuja medida do maior lado é três vezes a medida do menor.
d) quadrado.

**19. ITA-SP 2022** Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_2 \neq 0$. Considere as afirmações:

I. Se $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ e $z_1 - z_2 \in \mathbb{R}$ então $z_1 \in \mathbb{R}$ e $z_2 \in \mathbb{R}$.

II. Se $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ então $z_1 \in \mathbb{R}$ e $z_2 \in \mathbb{R}$.

III. Se $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ e $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ então $z_1 \in \mathbb{R}$ e $z_2 \in \mathbb{R}$.

É(são) sempre verdadeira(s):

a) apenas I.
b) I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II.
e) apenas III.

**20. Esc. Naval-RJ 2021** Seja $z$ um número complexo e $i$ a unidade imaginária. O conjunto dos pontos $z$ do plano complexo que satisfaz a equação $|z - i| = 2|z - 1|$ é uma circunferência. Sobre essa circunferência, assinale a opção correta.

a) A maior coordenada do centro é menor que $-\dfrac{1}{4}$.
b) O raio é número inteiro maior que 1.
c) A soma das coordenadas do centro é 1.
d) O produto das coordenadas do centro é maior que 2.
e) O raio é um número racional menor que 1.

**21. UFRR 2021** Seja $i^2 = -1$ a unidade imaginária. No plano complexo, considere uma circunferência C de raio 1 e com centro na origem e um triângulo equilátero inscrito à C onde um dos vértices é dado por $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Os outros dois vértices do triângulo são:

a) $-i$ e $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

b) $-1$ e $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

c) $-i$ e $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

d) $-1$ e $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

e) $-1$ e $-i$

**22. AFA-SP 2021** Considere no plano de Argand-Gauss os números complexos $z = x + yi$, em que $x$ e $y$ são números reais e $\sqrt{-1} = i$, tais que

$$\begin{cases} |z+i| = 5 \\ \mathrm{Im}(z) + z^2 + |\bar{z}|^2 - \mathrm{Re}(z) \cdot \left[\mathrm{Re}(z) + 2 \cdot \left(i^{1093}\right) \cdot \mathrm{Im}(z)\right] = 12 \end{cases}$$

É correto afirmar que os pontos P($x$, $y$), afixos de $z$, podem formar um

a) trapézio isósceles.

b) trapézio retângulo.

c) pentágono regular.

d) quadrado.

**23. IME-RJ 2022** Seja o número complexo $z = \left(1 - 2\sqrt{2}i\right)^{12}$.

Sabe-se que $m = |z|$. O valor de $x$ na expressão $2x = \log_m(27m)$ é:

a) $\dfrac{15}{14}$

b) $\dfrac{5}{14}$

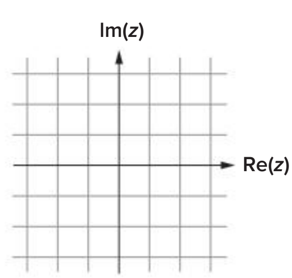
c) $\dfrac{5}{8}$

d) $\dfrac{15}{4}$

e) $\dfrac{3}{8}$

**24. Fuvest-SP 2020** Resolva os três itens abaixo:

a) Considere o conjunto formado pelos números complexos $z$ que cumprem a condição $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) abaixo, o conjunto resultante após essa transformação.




b) Determine o lugar geométrico dos pontos $z$ do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\dfrac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.

c) Determine as partes reais de todos os números complexos $z$ tais que as representações de $z$, $i$ e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

**25. AFA-SP 2020** Considere no plano de Argand-Gauss a região S formada pelos afixos P($x$, $y$) dos números complexos $z = x + yi$, em que $\sqrt{-1} = i$.

$$S = \begin{cases} |z - i| \geq 1 \\ |z| \leq 2 \\ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \end{cases}$$

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) A área de S é maior que 4,8 u.a.

( ) Se $k$ é o elemento de S de menor argumento, então $ki \in$ S.

( ) Todo $z$ pertencente a S possui seu conjugado em S.

Sobre as proposições, tem-se que

a) apenas uma é verdadeira.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) todas são verdadeiras.

d) todas são falsas.

**26. AFA-SP 2019** Considere, no plano de Argand-Gauss, os números complexos A e B, sendo $\overline{A} = x - 2i$, $x \in \mathbb{R}$ e $\overline{B} = 1 + i$.

Se no produto A · B tem-se Re(A · B) $\geqslant$ Im(A · B), então, sobre todos os números complexos A, é correto afirmar que

a) seus afixos formam uma reta.

b) nenhum deles é imaginário puro.

c) o que possui menor módulo é o que tem o maior argumento principal.

d) existe A tal que |A| = |B|.

**27. AFA-SP 2017** Resolva a equação $z^3 - 1 = 0$ no conjunto dos números complexos. Considerando as raízes encontradas, analise as proposições abaixo e classifique-as em V (Verdadeira) ou F (Falsa).

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1.

( ) Os afixos das raízes formam um triângulo equilátero cuja área é $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

( ) Duas das raízes são conjugadas.

( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo.

A sequência correta é

a) V – F – V – V

b) V – V – F – V

c) F – F – V – F

d) V – F – V – F

**28. Unicamp-SP 2017** Seja $i$ a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano com coordenadas reais ($x$, $y$) tais que $(2x + yi)(y + 2xi) = i$ é uma

a) elipse.

b) hipérbole.

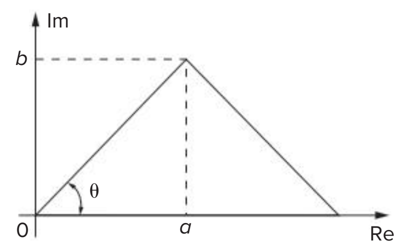
c) parábola.

d) reta.

**29. AFA-SP 2016** Considere no plano de Argand-Gauss os números $z = x + yi$, onde $i = \sqrt{-1}$ cujos afixos são os pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que
a) apenas um deles é imaginário puro.
b) todos podem ser escritos na forma trigonométrica.
c) o conjugado do que possui maior argumento é $1 + 2i$.
d) nem todos são números imaginários.

**30. AFA-SP 2012** O valor de $n$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(1 + i)^j = 31 + i$, sendo $i$ a unidade imaginária, é
a) par menor que 10
b) primo maior que 8
c) ímpar menor que 7
d) múltiplo de 9

**31. AFA-SP** O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo.




É correto afirmar que o conjugado de $z^2$ tem afixo que pertence ao
a) 1º quadrante
b) 2º quadrante
c) 3º quadrante
d) 4º quadrante

**32. ITA-SP 2021** Seja $z \in \mathbb{C}$. Se a representação dos números 4, $z + 2$ e $z^2$ no plano complexo são vértices de um triângulo equilátero, então o comprimento do seu lado é igual a:
a) 3
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt{11}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $\sqrt{13}$

**33. ITA-SP 2020** A parte real da soma infinita da progressão geométrica cujo termo geral $a_n$ é dado por

$$a_n = \frac{\cos n + i \cdot \operatorname{sen} n}{2^n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

é igual a

a) $\dfrac{-1 + 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$
b) $\dfrac{-2 + 4\cos 1}{5 - 4\cos 1}$
c) $\dfrac{4 - 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$
d) $\dfrac{1 + 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$
e) $\dfrac{2 + 4\cos 1}{5 - 4\cos 1}$

**34. ITA-SP 2020** Seja H o hexágono no plano de Argand-Gauss cujos vértices são as raízes do polinômio $p(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^6 + 64$. Determine $z \in \mathbb{C}$ sabendo que o conjunto $M = \{zx \in \mathbb{C} : x \in H\}$ é o hexágono que possui $v_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $v_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $v_3 = 5 - \sqrt{3}i$ como três vértices consecutivos.

**35. ITA-SP 2019** Sabe-se que $-2 + 2i$ é uma das raízes quartas de um número complexo $z$. Então, no plano de Argand-Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de $z$, é igual a
a) $4\left(\sqrt{3} + 1\right)$
b) $6\sqrt{3}$.
c) $8\left(\sqrt{3} - 1\right)$
d) $10\sqrt{3}$.
e) $12\sqrt{3}$.

**36. ITA-SP 2019** Determine o número complexo $z$ de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leqslant 15$.

**37. ITA-SP 2018** As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é
a) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$
c) $\sqrt{2}$.
d) $\dfrac{3\sqrt{2} + 1}{2}$.
e) $3\sqrt{2}$.

**38. ITA-SP 2017** Considere a equação $(a - bi)^{501} = \dfrac{2(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1}$.
O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é
a) 500.
b) 501.
c) 502.
d) 503.
e) 504.

**39. ITA-SP 2017** O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é
a) uma circunferência.
b) uma parábola.
c) uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas paralelas.

**40. ITA-SP 2016** Considere as afirmações a seguir:
**I.** Se $z$ e $w$ são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.
**II.** A soma de todos os números complexos $z$ que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.
**III.** Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$.
É(são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

**41. ITA-SP 2015** Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\right\}$, $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < \dfrac{7}{2}\right\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \backslash B) \cap C$ é o conjunto
a) $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$
b) $\{-3 - i, -3 + i\}$
c) $\{-3 + i\}$
d) $\{-3 - i\}$
e) $\{-3 + 3i\}$

**42. ITA-SP 2014** Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

**I.** $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

**II.** $(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 = 4z\overline{w}$;

**III.** $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\text{Re}(z\overline{w})$

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

**43. ITA-SP 2014** Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3|z|^4(z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6$ é igual a

a) $(z^2 - \bar{z}^2)^3$.
b) $z^6 - \bar{z}^6$.
c) $(z^3 - \bar{z}^3)^2$.
d) $(z - \bar{z})^6$.
e) $(z - \bar{z})^2(z^4 - \bar{z}^4)$.

**44. ITA-SP 2014**

a) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|z - 2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.
b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine $z_0$.

**45. ITA-SP 2013** Considere a equação em $\mathbb{C}$ $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se $z_0$ é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

a) $\sqrt{29}$.
b) $\sqrt{41}$.
c) $3\sqrt{5}$.
d) $4\sqrt{3}$.
e) $3\sqrt{6}$.

**46. ITA-SP 2012** Sejam $z = n^2(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$ e $w = n(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)$ em que $n$ é o menor número inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\dfrac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3} + i$.
b) $2(\sqrt{3} + i)$
c) $2(\sqrt{2} + i)$
d) $2(\sqrt{2} - i)$
e) $2(\sqrt{3} - i)$

**47. ITA-SP 2012** Se $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ então um valor para $\arg(-2iz)$ é

a) $-\dfrac{\pi}{2}$
b) $\dfrac{\pi}{4}$
c) $\dfrac{\pi}{2}$
d) $\dfrac{3\pi}{4}$
e) $\dfrac{7\pi}{4}$

**48. ITA-SP** Dado $z = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\dfrac{89}{2}\sqrt{3}i$.
b) $-1$.
c) $0$.
d) $1$.
e) $\dfrac{89}{6}\sqrt{3}i$.

**49. ITA-SP** Das afirmações abaixo sobre números complexos $z_1$ e $z_2$:

**I.** $|z_1 - z_2| \leqslant ||z_1| - |z_2||$.

**II.** $|\overline{z_1} \cdot z_2| = ||\overline{z_2}| \cdot |\overline{z_2}||$.

**III.** Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s).

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas II e III.
e) todas.

**50. ITA-SP** A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z^2| + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2.
b) $\dfrac{i}{2}$.
c) 0.
d) $-\dfrac{1}{2}$.
e) $-2i$.

**51. ITA-SP** Sejam $n \geqslant 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, ..., n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

**52. IME-RJ 2021** Sejam $z_1$ e $z_2$ dois números complexos tais que $|z_1| = 4$, $|z_2| = 3$ e $|z_1 + z_2| = 6$. O valor de $|z_1 - z_2|$ é:

a) $\sqrt{7}$
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
c) 1
d) $\sqrt{14}$
e) $2\sqrt{3}$

**53. IME-RJ 2021** Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & z \\ -z & z \end{bmatrix}$, onde $z$ é o número complexo $z = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $\bar{z}$ o seu conjugado e os ângulos estão expressos em radianos. O determinante de M é:

a) $2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
b) $2\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$
c) $2\left(\cos\left(\dfrac{8\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)\right)$
d) $\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi)$
e) $\cos(2\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(2\pi)$

**54. ITA-SP 2022** Considere o polinômio $p(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13$ e note que $p(i) = 0$. Considere no plano complexo o quadrilátero cujos vértices são as raízes de $p(z)$. Podemos afirmar a área desse quadrilátero é

a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

**55. EsPCEx-SP 2021** Considere $i$ a unidade imaginária. A soma infinita $5i - \dfrac{5}{2} - \dfrac{5i}{4} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{5i}{16} - \dfrac{5}{32} - \dfrac{5i}{64} + \cdots$, onde o n-ésimo termo é dado por $\dfrac{5i^n}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3...)$, resulta no número complexo cujas partes real e imaginária são, respectivamente, iguais a

a) 2 e 4.
b) 2 e $-4$.
c) $-4$ e 2.
d) 4 e $-2$.
e) $-2$ e 4.

FRENTE 2

**56. IME-RJ 2022** Sejam os pontos $a$ e $b$, no plano complexo, representados pelos números $a = 9 + xi$ e $b = y + 3i$, onde $i$ é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. O ponto $a$ é a rotação de 30° do ponto $b$ em torno da origem no sentido anti-horário. Determine o valor do produto $xy$.

**57. IME-RJ 2020** Seja $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leqslant |z - 3 - 4i| \leqslant 3\}$ onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. O valor do produto entre o simétrico do complexo de menor módulo do conjunto A e o conjugado do complexo de maior módulo do mesmo conjunto A é:

a) $-16$
b) $-8$
c) $-\frac{16}{5}$
d) $1$
e) $16$

**58. IME-RJ 2020** Seja uma região S no plano complexo que consiste em todos os pontos Z tais que $\frac{Z}{20}$ e $\frac{20}{\overline{Z}}$ possuem partes real e imaginária entre 0 e 1, inclusive. Determine a área da região S.

**Obs.:** $\overline{Z}$ é o conjugado do número complexo Z.

**59. IME-RJ 2019** Seja $z$ um número complexo tal que $z^{12} \in \mathbb{R}$, $z^{12} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(z) = 1$ e $\arg(z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A soma dos inversos dos possíveis valores de $|z|$ está no intervalo:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
d) $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$
e) $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

**60. IME-RJ 2019** Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$ e $\log_3(2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2$. Determine o número complexo Z.

**61. IME-RJ 2018** Determine o valor de $a$ na expressão abaixo, sabendo-se que $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{16}\log_a 256^{\operatorname{colog}_{(a^2)} 256^{\log_{(a^4)} 256^{\cdots^{\operatorname{colog}_{\left(a^{(2^{65})}\right)} 256}}}} = \operatorname{Im}(Z)$$

onde Z é um número complexo que satisfaz a equação:

$$2^{4033}Z^2 - 2^{2017}Z + 1 = 0$$

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{1}{32}$
e) $\frac{1}{64}$

**Obs.:** Im(Z) é a parte imaginária do número complexo Z.

**62. IME-RJ 2018** Seja o número complexo $z$ que satisfaz a relação $2(z - i)^{2017} = \left(\sqrt{3} + i\right)(iz - 1)^{2017}$. Determine $z$, sabendo-se que $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**63. IME-RJ 2017** Sejam $Z_1$ e $Z_2$ números complexos tais que $Z_2$ é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de $Z_1$ e $Z_2$ que atendam a essas condições tem-se que:

a) $\operatorname{Im}(Z_2) > 0$
b) $\operatorname{Im}(Z_2) \leqslant 0$
c) $|Z_1| \leqslant 2|Z_2|$
d) $\operatorname{Re}(Z_1) \geqslant 0$
e) $\operatorname{Re}(Z_1) \leqslant \operatorname{Im}(Z_2)$

**64. IME-RJ 2017** Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de $a$, $b$ e $c$, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

**65.** Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

Calcule $|z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7|$.

**66. IME-RJ 2015** O lugar geométrico no plano complexo de $w = z + \frac{1}{z}$, sendo $z$ um número complexo tal que $|z| = k$ e $k > 1$, é um(a):

a) segmento de reta
b) circunferência
c) hipérbole
d) elipse
e) parábola

**67. IME-RJ 2015** Descreva o lugar geométrico do número complexo $z$ que atende à equação

$$\arg(z - z_1) - \arg(z - z_2) - \arg(z - z_3) = k\pi,$$

em que $z_1$ é real, $z_2$ e $z_3$ são complexos conjugados com parte imaginária não nula e $k$ é um número inteiro.

**Obs.:** $\arg(z)$ é argumento do número complexo $z$.

**68. IME-RJ 2014** Para o número complexo $z$ que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade $|z - 26i| \leqslant 10$, sejam $\alpha_1$ e $\alpha_2$ os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 - \alpha_2|$ é

a) $\pi - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$
b) $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$
c) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$
d) $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$
e) $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

**69. IME-RJ 2014** Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 1-i & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

**70. IME-RJ 2013** Seja o número complexo $z = \dfrac{a}{ib(1+ib)^2}$, onde $a$ e $b$ são números reais positivos e $i = \sqrt{-1}$. Sabendo que o módulo e o argumento de $z$ valem, respectivamente, 1 e $(-\pi)$, o valor de $a$ é

**a)** $\frac{1}{4}$

**b)** $\frac{1}{2}$

**c)** 1

**d)** 2

**e)** 4

**71. IME-RJ 2013** Considere $Z_1$ e $Z_2$, complexos, que satisfazem a equação $x^2 + px + q = 0$, onde $p$ e $q$ são números reais diferentes de zero. Sabe-se que os módulos de $Z_1$ e $Z_2$ são iguais e que a diferença entre os seus argumentos vale $\alpha$, onde $\alpha$ é diferente de zero.

Determine o valor de $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ em função de $p$ e $q$.

**72. IME-RJ 2012** As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por 1, $w$ e $w^2$, onde $w$ é um número complexo. O intervalo que contém o valor de $(1 - w)^6$ é:

**a)** $(-\infty, -30)$

**b)** $(-30, -10)$

**c)** $(-10, 10)$

**d)** $(10, 30)$

**e)** $(30, \infty)$

**73. IME-RJ 2012** Seja o número complexo $Z = a + bi$, com $a$ e $b \in \mathbb{R}$ (real) e $i = \sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que $\begin{cases} a^3 = 3(1 + ab^2) \\ b^3 = 3(a^2b - 1) \end{cases}$.

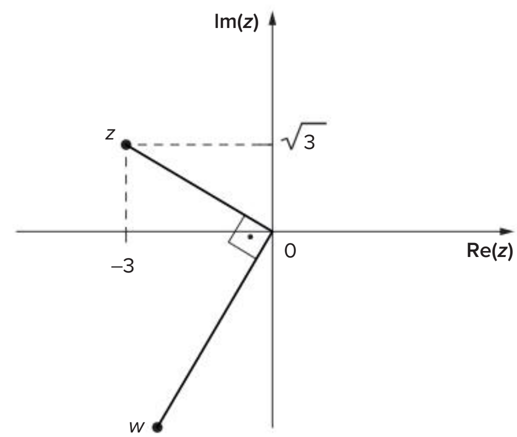
**74. IME-RJ** Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde $i$ é a unidade imaginária, e $z$ um número complexo tal que $\arg\left[\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right] = \dfrac{\pi}{4}$ determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.

**Obs.:** arg($w$) é argumento do número complexo $w$.

**75. ITA-SP 2021** Considere $z = a\left(\sqrt{3} + i\right) \in \mathbb{C}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Determine todos os números reais $a$ para os quais $z^7$ e $z^{13}$ estão à mesma distância de $z$ no plano complexo.

**76. IME-RJ 2021** Determine o lugar geométrico dos pontos $h$ do plano complexo $h = \dfrac{4 + w + 2i}{2 - wi}$, em que $w \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

**77. AFA-SP 2021** Considere no plano de Argand-Gauss os números complexos $z = A(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$ e $w = B(\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$ conforme gráfico abaixo.




Se $w = z^4$, então B é igual a

**a)** 12

**b)** $12\sqrt{3}$

**c)** 144

**d)** $144\sqrt{3}$

**78. IME-RJ** Sabe-se que $z_1 \cdot \overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + {}_4| - |z_3 - z_4| = 0$ sendo $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$ números complexos diferentes de zero. Prove que $z_1$ e $z_2$ são ortogonais.

**Obs.:** números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de $z$.

**79. IME-RJ** Seja $x$ um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

**a)** 1

**b)** 2

**c)** 3

**d)** 4

**e)** 5

**80. IME-RJ** Determine a expressão da soma a seguir, onde $n$ é um inteiro múltiplo de 4.

$$1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1)i^n$$

FRENTE 2

## BNCC em foco

Texto para as questões **1** e **2**.

Antes da internet, as pessoas dependiam dos correios para enviar uma mensagem a quem estivesse em outro lugar. Era preciso um intermediário para entregá-la fisicamente – inimaginável para quem tem acesso a e-mail e outros serviços de mensagens. Algo semelhante acontecerá com as moedas virtuais no futuro. Embora o *Bitcoin* seja a moeda digital mais conhecida, o conceito de criptomoeda é anterior a ele.

As criptomoedas podem ser usadas com as mesmas finalidades do dinheiro físico em si. As três principais funções são servir como meio de troca, facilitando as transações comerciais; reserva de valor, para a preservação do poder de compra no futuro; e ainda como unidade de conta, quando os produtos são precificados e o cálculo econômico é realizado em função dela.

*Bitcoins* são criados conforme os milhares de computadores que formam essa rede conseguem resolver problemas matemáticos complexos que verificam a validade das transações incluídas no *Blockchain*.

CRIPTOMOEDAS: um guia para dar os primeiros passos com as moedas digitais. *InfoMoney*, [*s. d.*]. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/guias/criptomoedas/. Acesso em: 15 fev. 2022.

**Blockchain** (cadeia de blocos): sistema de banco de dados que funciona de maneira distribuída e é alimentado por uma rede com inúmeros computadores. Ela permite que os dados sejam transmitidos entre todos os participantes da rede de modo descentralizado e transparente, sendo suas informações imútáveis e que, como um livro público de transações, podem ser verificadas por todos os computadores da rede.

EM13MAT302

**1.** Numa situação bem mais simples que a citada, a validade da aplicação de uma transação simples foi feita por uma sequência de quatro algarismos ABCD. Os cálculos para a obtenção desses algarismos eram os seguintes:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+i} & \dfrac{A}{2} \\ 2-i & B \end{vmatrix} = -1{,}5i \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} i^{2022} & \operatorname{cis}(90^\circ) \\ -i^{243} & i-C \end{vmatrix} = 5-(7-D)i$$

A sequência ABCD de validação é:

a) 3646
b) 6346
c) 3664
d) 6348
e) 3648

EM13MAT302

**2.** Outra situação de checagem permite a conclusão da transação, sempre que as expressões oferecidas fornecem soluções iguais. Numa checagem foram oferecidas as seguintes expressões:

$$X = \begin{vmatrix} z & -1 \\ z & z \end{vmatrix}, \text{ com } z = \operatorname{cis}(120^\circ) \quad \text{e} \quad Y = (1+i)^2 + \frac{i^3 \cdot (1+i)^2 \cdot (-1+2i)}{(1+i)\cdot(-1+i)}$$

A transação em questão foi concluída?

EM13MAT301

**3.** Mesmo desconhecendo a notação do *i* para números complexos, Rafael Bombelli já imaginava as operações de adição e multiplicação para esse tipo de números. Quase um século depois, René Descartes referiu-se ao $\sqrt{-1}$ como a unidade imaginária, e, só no final do século seguinte, Leonhard Euler sugere e passa a utilizar o símbolo *i*.

Considere as afirmações que envolvem números complexos a seguir:

**I.** Se $z = \dfrac{\overline{1+i}}{1+i}$, então $z = -i$.

**II.** O argumento principal de $w = \dfrac{8+4i}{3-i}$ é $\dfrac{\pi}{4}$.

**III.** Sendo $M = \begin{pmatrix} i & i^4 & i^7 \\ i^2 & i^5 & i^8 \\ i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}$, o determinante de M é nulo.

**IV.** Se $u = 1 + i$ e $v = -2 + 2i$, então $\dfrac{u^5}{v^3} = -\dfrac{1}{4}$.

Com o que você já conhece de números complexos, pode afirmar que, das afirmações dadas, ______ está(ão) correta(s).

a) as quatro
b) apenas três
c) apenas duas
d) apenas uma
e) nenhuma delas

R.M. Nunes/Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

10

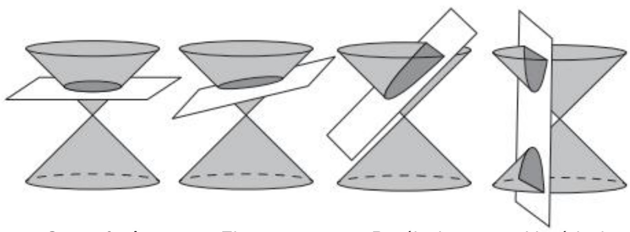
# Cônicas

As cônicas são curvas planas determinadas por cortes de uma superfície cônica por planos. Apesar dessa simples definição, as cônicas englobam diferentes tipos de curva: elipses, hipérboles e parábolas.

Cada um desses tipos de curva apresenta diferentes características e propriedades, e muitas delas são aplicadas na Arquitetura, como na Catedral de Brasília, e no cotidiano, como as antenas parabólicas. Essas curvas também são usadas para explicar fenômenos da natureza, como as elipses e as hipérboles, que podem ser usadas para descrever o movimento de corpos celestes.

## Seções cônicas

Seções cônicas, ou simplesmente cônicas, são curvas planas obtidas pela interseção de um plano de corte com uma superfície cônica. Elas podem ser de quatro tipos, conforme o ângulo formado entre o plano e o eixo do cone: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.




**Saiba mais**

Na história da Matemática, há muitos estudos gerais acercadas cônicas que datam de antes do grande matemático grego Euclides de Alexandria, que viveu no século III a.C. Acredita-se que o principal estudo da Antiguidade Grega sobre o assunto seja o de Apolônio de Perga (262-190 a.C.).

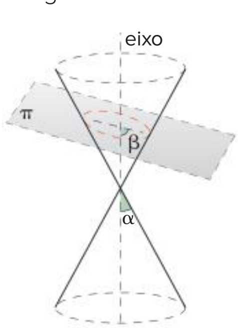
A equivalência entre as várias definições de seções cônicas pode ser encontrada na Geometria Elementar. Coube ao francês Pierre de Fermat (1607-1665) demonstrar que elas podem ser expressas por equações do 2º grau em duas variáveis, o que veremos neste capítulo.

Além disso, as cônicas têm muitas aplicações práticas. Sabemos, por exemplo, que as órbitas dos planetas, dos cometas e de outros astros são elipses, parábolas e hipérboles. As cônicas também estão presentes em lentes, espelhos, antenas e estruturas usadas na construção civil.

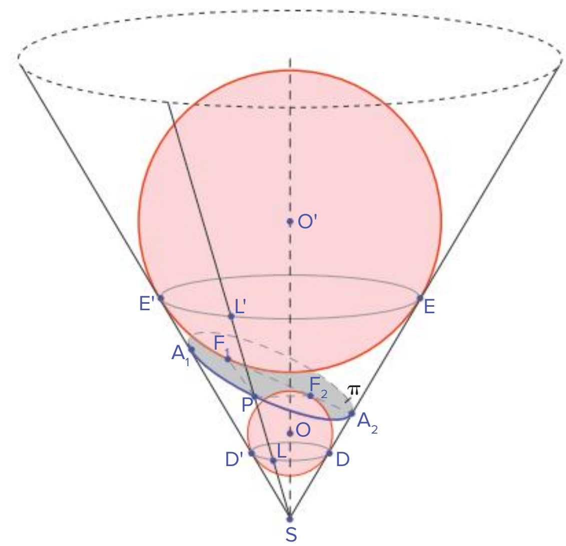
A abordagem apresentada a seguir tem como referência os métodos do matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), que, por sua vez, baseou seus estudos nas esferas inscritas na superfície cônica de revolução, utilizadas inicialmente por Lambert Adolph Jacques Quetelet (1796-1874), outro matemático belga.

### A elipse

Seja $\pi$ um plano que intercepta uma superfície cônica reta de dois ramos. Seja $\alpha$ o ângulo formado pelo eixo do cone e uma geratriz e $\beta$ o menor ângulo formado pelo plano de corte e o eixo do cone. Se $\alpha < \beta$, a interseção do plano $\pi$ com a superfície cônica é uma curva fechada chamada **elipse**, como mostra a figura.




Observe agora a figura a seguir, que representa o plano $\pi$, secante ao cone e a duas esferas inscritas no cone, chamadas de esferas de Dandelin. Sejam $F_1$ e $F_2$ os pontos de tangência de $\pi$ com as esferas.




A elipse e as esferas de Dandelin.

Se tomarmos um plano passando pelo eixo do cone e perpendicular ao plano $\pi$, veremos que esses dois planos cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$. Traçando-se a circunferência inscrita e a ex-inscrita ao triângulo $A_1SA_2$ entre as geratrizes do cone, estas tocarão $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ nos pontos $F_1$ e $F_2$, respectivamente As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano $\pi$ nos pontos $F_1$ e $F_2$.

O contato da esfera de centro O com o cone é o círculo que tem diâmetro DD', cujo plano é perpendicular ao da figura. Da mesma maneira, a esfera de centro O' tangencia o cone em um círculo de diâmetro EE' e cujo plano também é perpendicular ao da figura.

Escolhendo um ponto P qualquer sobre a elipse, podemos traçar as retas $\overleftrightarrow{PF_1}$ e $\overleftrightarrow{PF_2}$ e a geratriz $\overleftrightarrow{SP}$ que corta em L e L' os paralelos $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. A medida do segmento $\overline{PF_1}$ é igual à de $\overline{PL'}$ como par de tangentes a uma esfera traçadas do mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos $PF_2 = PL$.

Assim:

$$PF_1 + PF_2 = PL + PL' = LL'$$

Porém, $LL' = DE$, como porções de duas geratrizes compreendidas entre dois planos perpendiculares ao eixo. Portanto, para um ponto P qualquer da elipse, é válido o seguinte resultado:

$$PF_1 + PF_2 = DE$$

Em particular, se escolhermos o ponto P como $A_1$ ou $A_2$, teremos:

$$\begin{cases} A_1F_1 + A_1F_2 = DE \\ A_2F_1 + A_2F_2 = DE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = DE \\ A_2F_2 + F_1F_2 + A_2F_2 = DE \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A_1F_1 + F_1F_2 = 2A_2F_2 + F_1F_2 \Rightarrow A_1F_1 = A_2F_2$$

Em outras palavras, os pontos $A_1$ e $A_2$ são simétricos em relação a $F_1$ e $F_2$.

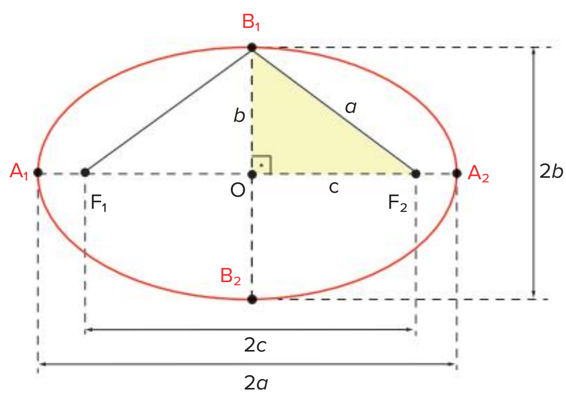
Se estabelecermos que a medida DE é igual a $2a$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, teremos:

$$PF_1 + PF_2 = DE = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1F_1 + A_1F_2 = DE = 2a \Rightarrow A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = $$
$$= 2a \Rightarrow A_1F_1 + A_2F_2 + F_1F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$$

Desse modo, podemos gerar a seguinte definição:

A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos $F_1$ e $F_2$ do mesmo plano é constante . Essa constante é representada por $2a$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.




Os pontos $F_1$ e $F_2$ são chamados de focos, nome dado por Kepler, que deriva do latim *focus* e pode significar fogueira ou lareira, e $A_1$ e $A_2$ são denominados vértices da elipse. Os focos pertencem ao segmento $\overline{A_1A_2}$, que é chamado de eixo maior ou eixo focal. A distância $F_1F_2$ (distância focal) é denominada $2c$. O ponto médio O desse eixo maior recebe o nome de centro da elipse e os focos são simétricos em relação a esse centro. Os pontos $B_1$ e $B_2$ da elipse que pertencem à perpendicular ao eixo, que passa por O, são chamados de polos da elipse e equidistam dos focos (estão na mediatriz de $\overline{F_1F_2}$). Denominamos $\overline{B_1B_2}$ de eixo menor da elipse e dizemos que ele tem medida $2b$.

O ponto $B_1$ pertence à elipse. Logo:

$$B_1F_1 = B_1F_2 = 2a \text{ e } B_1F_1 = B_1F_2 \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$$

No triângulo $B_1OF_2$, retângulo em O:

$$(B_1F_2)^2 = (B_1O)^2 + (OF_2)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Essa equação é chamada de **relação fundamental da elipse**.

Chamaremos de excentricidade a razão $e = \frac{c}{a}$, com $0 < e < 1$ para a elipse. Posteriormente, veremos outras definições equivalentes de excentricidade.

Resumindo, temos:

Definição: $PF_1 + PF_2 = 2a$ Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

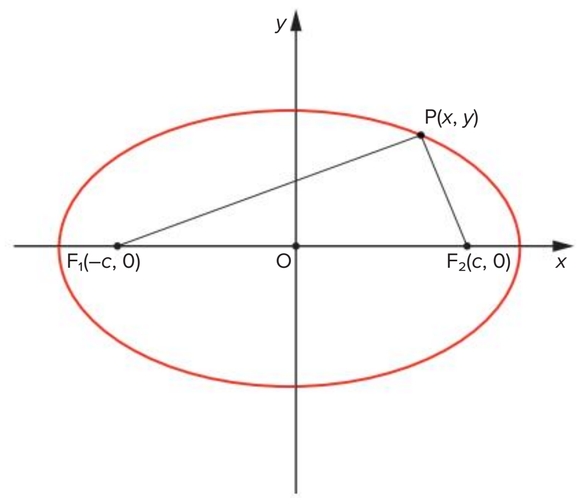
Eixo maior: $A_1A_2 = 2a$ Propriedade: $a^2 = b^2 + c^2$

Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$

## As equações cartesianas da elipse

Coloquemos, em um sistema cartesiano, uma elipse de eixo maior com medida $2a$, de modo que seu centro O coincida com a origem do sistema e seu eixo maior esteja contido no eixo $Ox$. Nesse sistema, as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.




Sendo $P(x, y)$ um ponto da elipse, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow PF_2 = 2a - PF_1$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado:

$$(PF_2)^2 = 4a^2 - 4a \cdot (PF_1) + (PF_1)^2$$
$$(x - c)^2 + (y - 0)^2 = 4a^2 - 4a \cdot (PF_1) + (x + c)^2 + (y - 0)^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a \cdot (PF_1) + x^2 + 2cx + c^2$$
$$4a \cdot (PF_1) = 4a^2 + 4cx$$
$$PF_1 = \frac{4a^2}{4a} + \frac{4cx}{4a}$$
$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x$$

Elevando de novo ao quadrado e lembrando que $b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$(PF_1)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$(x + c)^2 + (y - 0)^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$
$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(I)}$$

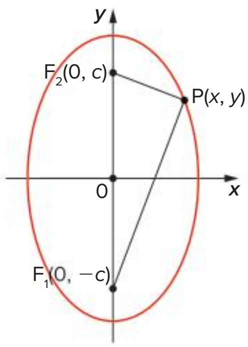
Desta forma, obtemos a **equação reduzida da elipse**.

Para rotacionar uma figura no plano cartesiano 90° em torno da origem, podemos utilizar a seguinte transformação:

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

FRENTE 3

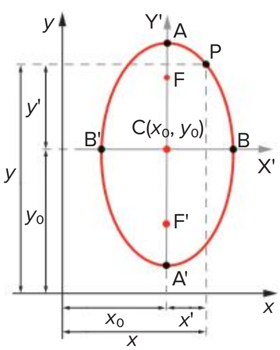
Além disso, sabemos que essa rotação leva uma elipse de centro na origem e eixo maior em O$x$ para uma elipse de centro na origem e eixo maior em O$y$, como indicado abaixo.




Desse modo, a equação dessa elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(-y)^2}{a^2} + \frac{(x)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ (II)}$$

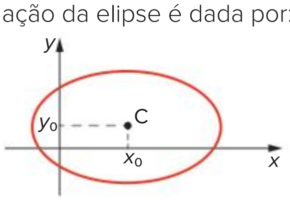
Se o centro O da elipse tiver coordenadas C($x_0$, $y_0$) e os eixos da elipse se mantiverem paralelos aos eixos coordenados, basta transladar as equações (I) e (II), ou seja, realizar a substituição ($x'$, $y'$) por ($x - x_0$, $y - y_0$), conforme a figura a seguir:




$$x' \neq x - x_0 \text{ e } y' \neq y - y_0$$

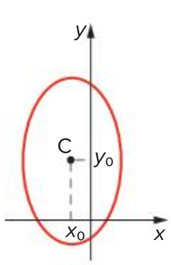
$$\frac{(y')^2}{a^2} + \frac{(x')^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} \neq 1$$

Assim, caso o eixo maior seja paralelo ao eixo O$x$, a equação da elipse é dada por:




$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

E caso o eixo maior seja paralelo ao eixo O$y$, a equação é:




$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Se desenvolvermos os quadrados nas equações $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ e $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ e rearranjarmos seus termos, podemos escrevê-las da seguinte maneira:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Essa equação é chamada **equação geral da elipse**.

Como exemplo, observe:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{3} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 7 = 0$$

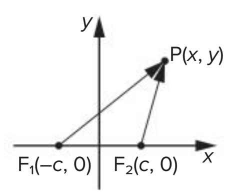
Se o eixo focal da elipse não for paralelo aos eixos O$x$ ou O$y$, teremos uma equação geral na forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

**! Atenção**

Para identificar se a elipse descrita pela equação $\frac{(x - x_0)^2}{M} + \frac{(y - y_0)^2}{N} = 1$ tem eixo focal paralelo ao eixo O$x$ ou ao eixo O$y$, basta comparar os denominadores M e N, já que $a > b$: se M > N, então $a = \sqrt{M}$, $b = \sqrt{N}$ e o eixo focal é paralelo ao eixo O$x$; se N > M, então $a = \sqrt{N}$, $b = \sqrt{M}$ e o eixo focal é paralelo ao eixo O$y$;

## A equação polar da elipse




Raio vetor é um vetor que liga o foco da elipse a qualquer ponto da própria elipse. Podemos calcular seu comprimento em função da abscissa de um ponto da elipse associado a ele.

Na dedução da equação cartesiana da elipse, mostramos que:

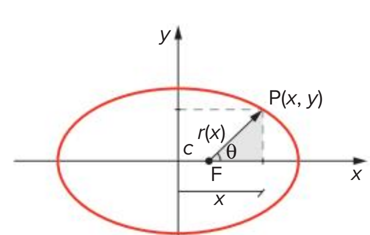
$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex$$

Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, temos:

$$PF_2 = a - ex$$

Assim, o comprimento do raio vetor $\overrightarrow{PF_2}$ é uma função de $x$ (abscissa de P). Portanto, $PF_2 = r(x) = a - ex$.

Agora, podemos deduzir a equação polar (ou trigonométrica) da elipse. Essa equação relaciona o comprimento do raio vetor ao ângulo $\theta$, que é o ângulo formado pelo raio vetor e o eixo focal, medido no sentido anti-horário.



Da figura, $x = c + r(x) \cdot \cos\theta$. Como $r(x) = a - ex$, temos:

$$r(x) = a - e \cdot (c + r(x) \cdot \cos\theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r(x) = a - e \cdot c - e \cdot r(x) \cdot \cos\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r(x) + e \cdot r(x) \cdot \cos\theta = a - ec \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + e \cdot \cos\theta) \cdot r(x) = a - \frac{c}{a} \cdot c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

A equação $r(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos\theta}$ é chamada **equação polar da elipse**.

## A área da elipse

A área da elipse de semieixos $a$ e $b$ é igual a:

$$A_{\text{elipse}} = \pi \cdot a \cdot b$$

## Exercícios resolvidos

**1.** Determine a equação reduzida da elipse com centro na origem e eixo focal paralelo ao eixo O$x$, $a = 5$ e $b = 3$. Determine também as coordenadas dos focos e a excentricidade da elipse.

**Resolução:**

Sendo o centro da elipse o ponto O(0, 0), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ainda:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

Os focos são dados por $F_1(-c, 0) = F_1(-4, 0)$ e $F_2(c, 0) = F_2(4, 0)$.

A excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

**2.** Determine a equação reduzida e os focos da elipse tangente ao eixo O$x$, com centro em (3, 4) e excentricidade $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sabendo que o eixo focal dela é paralelo ao eixo O$y$.

**Resolução:**

Como a elipse é tangente ao eixo O$x$ e tem centro em (3, 4), temos $a = 4$. Assim:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 = 16 - 8 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

O eixo focal é paralelo ao eixo O$y$. Então, a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-4)^2}{4^2} + \frac{(x-3)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(y-4)^2}{16} + \frac{(x-3)^2}{8} = 1$$

Os focos da elipse são dados por $F_1(x_0, y_0 - c) = F_1\left(3, 4 - 2\sqrt{2}\right)$ e $F_2(x_0, y_0 + c) = F_2\left(3, 4 + 2\sqrt{2}\right)$.

**3.** Determine o centro e os focos da elipse dada por $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$.

**Resolução:**

Rearranjando os termos e completando os quadrados, temos:

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2 + 24x + 9y^2 - 36y = -36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9) + 9(y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 4) =$$
$$= -36 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 4 \Rightarrow 4(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

Dividindo os dois lados por 36:

$$\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Essa equação caracteriza a elipse com centro em $(-3, 2)$, $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Os focos são dados por $F_1(x_0 - c, y_0) = F_1\left(-3 - \sqrt{5}, 2\right)$ e $F_2(x_0 + c, y_0) = F_2\left(-3 + \sqrt{5}, 2\right)$.

**4.** Determine as equações das retas que passam por P(8, 0) e são tangentes à elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$.

**Resolução:**

As as retas que passam por (8, 0) têm equações gerais dadas por:

$$y - 0 = m(x - 8) \Rightarrow mx - y - 8m = 0$$

As interseções entre a elipse e as retas são soluções do sistema $\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 & \text{(I)} \\ y = mx - 8m & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$16x^2 + 25(mx - 8m)^2 = 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (25m^2 + 16)x^2 - 400m^2x + 1\,600m^2 - 400 = 0$$

Uma reta é tangente a uma elipse quando tem apenas um ponto de interseção com ela. Logo:

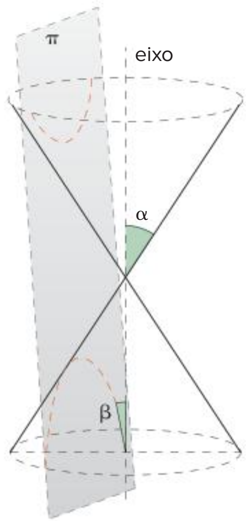
$$\Delta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-400m^2)^2 - 4 \cdot (25m^2 + 16) \cdot (1\,600m^2 - 400) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 160\,000m^4 - 160\,000m^4 + 62\,400m^2 - 25\,600 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 62400m^2 = 25600 \Rightarrow m^2 = \frac{25600}{62400} = \frac{16}{39} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{16}{39}} = \pm\frac{4\sqrt{39}}{39}$$

Assim, as retas que passam por P(8, 0) e são tangentes à elipse têm equações dadas por:

$$y = \frac{4\sqrt{39}}{39}(x - 8) \text{ e } y = -\frac{4\sqrt{39}}{39}(x - 8)$$

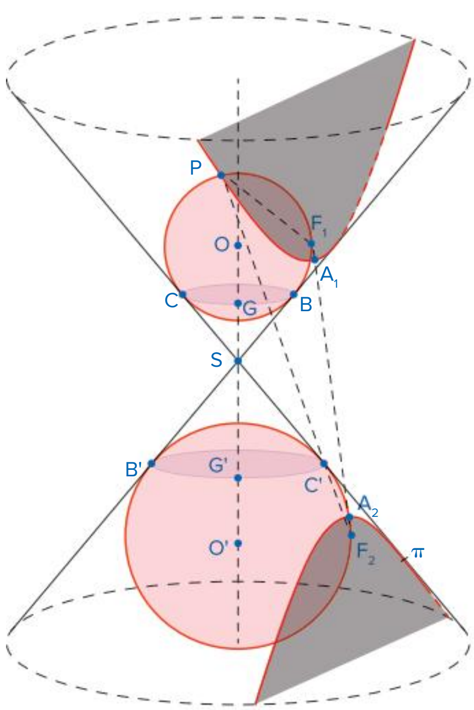
## A hipérbole

Seja $\pi$ um plano que intercepta uma superfície cônica reta de dois ramos (clepsidra ou ampulheta). Sejam $\alpha$ o ângulo formado pelo eixo do cone e uma geratriz e $\beta$ o ângulo formado pelo plano de corte e o eixo do cone. Se $\beta < \alpha$, a interseção do plano $\pi$ com a superfície cônica representa uma curva aberta de dois ramos chamada **hipérbole**, como mostra a figura.




Para $\beta < \alpha$, temos uma hipérbole.

Observe agora a figura a seguir, que representa o plano $\pi$, secante ao cone e a duas esferas inscritas no cone, chamadas de esferas de Dandelin. Sejam $F_1$ e $F_2$ os pontos de tangência de $\pi$ com as esferas.




A hipérbole e as esferas de Dandelin.

Se tomarmos um plano passando pelo eixo do cone e perpendicular ao plano $\pi$, veremos que esses dois planos cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$.

Escolhendo um ponto P qualquer sobre a hipérbole, podemos traçar os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, tangentes às esferas. Da figura, temos que $PF_2 - PF_1 = PG' - PG = GG' = BB'$ = constante, pois são tangentes às mesmas esferas por um mesmo ponto.

De maneira análoga ao que foi feito para a elipse, provamos que $A_1F_1 = A_2F_2$. Além disso, $A_1B' = A_1F_2$ e $A_1B = A_1F_1$, pois são pares de segmentos tangentes às mesmas esferas. Dessa maneira:

$$BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1 =$$
$$= (A_1A_2 + A_2F_2) - A_1F_1 = A_1A_2$$

Portanto, se P é um ponto do ramo de cima da hipérbole da figura, temos:

$$PF_2 - PF_1 = A_1A_2$$

Analogamente, se P é um ponto do ramo de baixo da hipérbole, temos:

$$PF_1 - PF_2 = A_1A_2$$

Resumindo as duas condições, se P é um ponto qualquer da hipérbole, então:

$$|PF_2 - PF_1| = A_1A_2$$

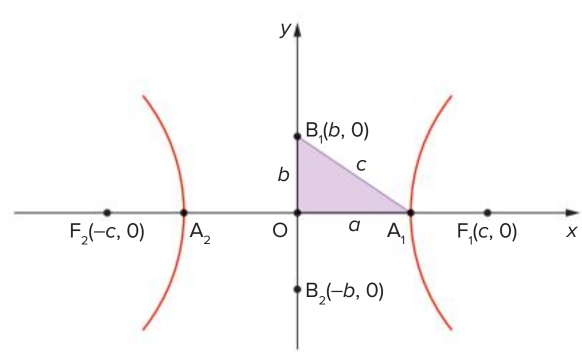
Da mesma maneira que fizemos para a elipse, vamos estudar a hipérbole como uma curva plana, identificando e nomeando seus elementos.

Considere dois pontos $F_1$ e $F_2$ no plano cartesiano cuja distância entre eles seja $2c$. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ cuja diferença (em módulo) das distâncias a esses pontos fixos é constante e vale $2a$ (com $2a < 2c$).

Em símbolos:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$

A figura a seguir representa uma hipérbole cujos focos são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. O centro da hipérbole é ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, que, na figura, é o ponto O(0, 0).




A reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ intersecta a hipérbole nos pontos $A_1$ e $A_2$. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é denominado **eixo real** da hipérbole. Das propriedades da hipérbole, resulta que $A_1A_2 = 2a$, pois, como $A_1$ pertence à hipérbole, temos:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow (A_1A_2 + A_2F_2) - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1A_2 = 2a$$

Considere agora uma reta perpendicular ao eixo maior pelo centro da hipérbole. Sobre essa reta, sejam $B_1$ e $B_2$ os pontos cujas distâncias a $A_1$ e $A_2$ sejam iguais a $c$. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é denominado **eixo imaginário** da hipérbole. A medida do eixo imaginário é $B_1B_2 = 2b$.

Os pontos O, $B_1$ e $A_1$ formam um triângulo retângulo com catetos de medidas $a$ e $b$ e hipotenusa de medida $c$. Assim:

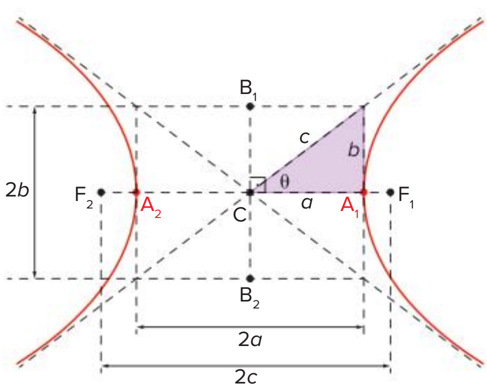
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Essa equação é denominada **relação fundamental da hipérbole**.

Chamamos de excentricidade a razão $e = \frac{c}{a}$. Para a hipérbole, temos sempre $e > 1$. Assim, quanto mais próximo de 1 for o valor da excentricidade, menor será a abertura dos ramos da hipérbole (a hipérbole fica mais "fechada"). Por outro lado, quanto maior for o valor da excentricidade, maior será a abertura dos ramos da hipérbole (a hipérbole fica mais "aberta").

O retângulo cujos pontos médios dos lados são $A_1$, $B_1$, $A_2$ e $B_2$ está relacionado à geometria da hipérbole. As retas que contêm as diagonais do retângulo têm comportamento assintótico em relação à hipérbole, sendo, por isso, denominadas **assíntotas**. Quando tomamos pontos mais afastados da hipérbole, a distância entre esses pontos e as assíntotas diminui. No entanto, é importante perceber que essa distância nunca será zero.

Resumindo, temos:




A hipérbole e seus elementos.

Definição: $|PF_2 - PF_1| = 2a$
Distância focal: $F_1F_2 = 2c$
Eixo real: $A_1A_2 = 2a$
Propriedade: $c^2 = a^2 + b^2$
Eixo imaginário: $B_1B_2 = 2b$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

## As equações cartesianas da hipérbole

Considere uma hipérbole com centro O na origem e $F_1$ e $F_2$ no eixo Ox, cujas coordenadas são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Assim, tomando um ponto genérico pertencente à hipérbole, podemos usar a definição:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$

$$PF_2 - PF_1 = \pm 2a \Rightarrow PF_2 = PF_1 \pm 2a$$

Elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$(PF_2)^2 = (PF_1)^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$(x + c)^2 + (y - 0)^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$\pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) = 4a^2 - 4cx$$

$$PF_1 = \frac{4a^2}{\pm 4a} - \frac{4cx}{\pm 4a}$$

$$PF_1 = \pm a \pm \frac{c}{a}x$$

Elevando de novo ao quadrado, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, temos:

$$(PF_1)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$(x - c)^2 + (y - 0)^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$c^2 - a^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2$$

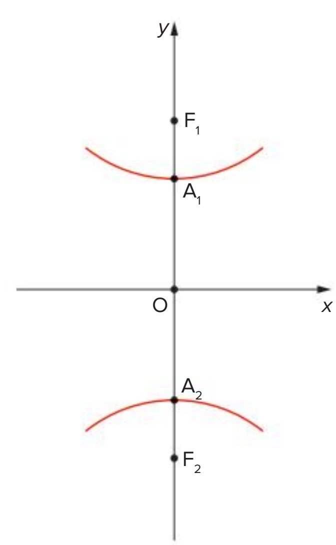
$$c^2 - a^2 = \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2$$

$$b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

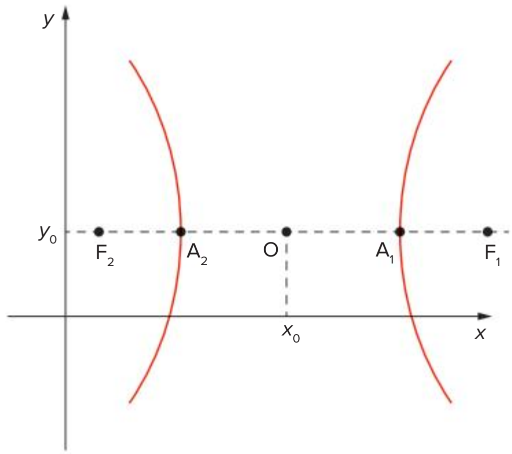
Para obter as equações da hipérbole com centro na origem e focos no eixo $y$, basta trocar $x$ por $y$ e $y$ por $-x$, como fizemos para a elipse.




Assim, obtemos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Equações da hipérbole com centro fora da origem e eixo focal paralelo ao eixo O$x$:




Hipérbole centrada em ($x_0$, $y_0$) e eixo focal paralelo ao eixo O$x$.

Assim, a equação da hipérbole torna-se:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)x^2}{b^2} = 1$$

Equações da hipérbole com centro fora da origem e eixo paralelo ao eixo O$y$:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Quando $a = b$, dizemos que a hipérbole é equilátera. Nesse caso, temos $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$, e a excentricidade é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

## As assíntotas da hipérbole

Um resultado do cálculo diferencial é que uma assíntota oblíqua em relação a uma curva possui coeficiente angular dado por:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

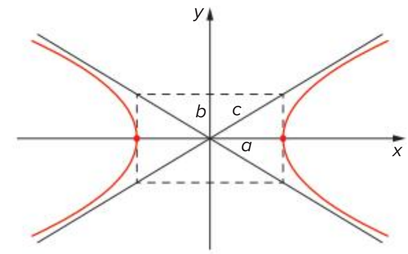
Para a hipérbole centrada na origem de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Assim, $m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{x} = \pm\frac{b}{a}$.

As assíntotas passam pela origem e têm equações:

$$y = -\frac{b}{a}x \text{ e } y = \frac{b}{a}x$$

As assíntotas a uma hipérbole na forma canônica são as diagonais do retângulo com lados de medidas iguais ao eixo real e ao eixo imaginário da hipérbole, conforme a figura a seguir:



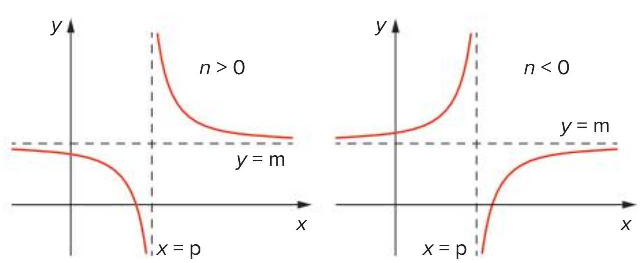

Assíntotas da hipérbole que se encontra centrada na origem.

Se a hipérbole está centrada em ($x_0$, $y_0$), as equações das assíntotas são dadas por:

$$\begin{cases} y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \rightarrow \text{hipérbole com eixo real paralelo ao eixo O}x \\ y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0) \rightarrow \text{hipérbole com eixo real paralelo ao eixo O}y \end{cases}$$

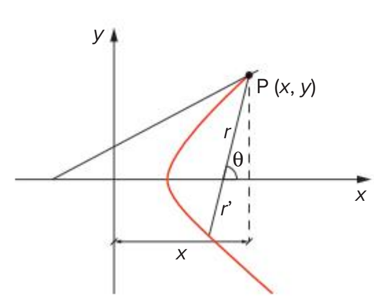
Para hipérboles equiláteras ($b = a$) centradas na origem, temos as assíntotas $y = \pm x$ (bissetrizes dos quadrantes). Assim, uma hipérbole equilátera centrada na origem, quando rotacionada em 45° em relação ao eixo O$x$, assume uma equação cartesiana na forma $x \cdot y = k$. Se transladarmos seu centro, teremos equações na forma $y = m + \frac{n}{x - p}$, com $n \neq 0$.

O domínio e a imagem dessas funções informam as posições das assíntotas da hipérbole. Portanto, sendo $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = p\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y = m\}$, cada função desse tipo admite um dos seguintes gráficos:




## A equação polar da hipérbole

De maneira análoga ao que fizemos para a elipse, podemos demonstrar que as equações dos raios vetores da hipérbole são dadas por $r(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - e \cdot \cos\theta}$ e $r'(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos\theta}$, com $e > 1$.




Forma polar da hipérbole.

## Exercícios resolvidos

**5.** Determine os elementos da hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

**Resolução:**

Eixo real: paralelo ao eixo O$x$

Centro: C(0, 0)

Semieixo real: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

Semieixo imaginário: $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Semidistância focal: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 5$

Focos: $F_1(c, 0) = F_1(5, 0)$ e $F_2(-c, 0) = F_2(-5, 0)$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Assíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\frac{3}{4}x$

**6.** Determine os elementos da hipérbole de equação $\frac{(y - 8)^2}{9} - (x - 1)^2 = 1$.

**Resolução:**

Eixo real: paralelo ao eixo O$y$

Centro: C(1, 8)

Semieixo real: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

Semieixo imaginário: $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

Semidistância focal: $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \sqrt{10}$

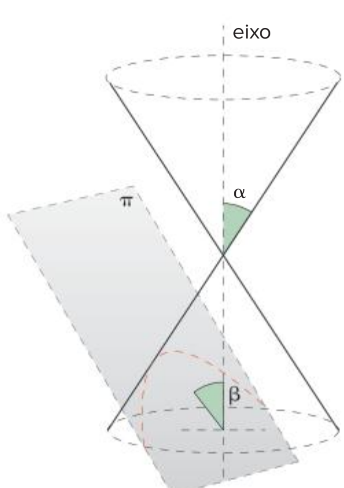
Focos:
$F_1(x_0, y_0 + c) = F_1\left(1, 8 + \sqrt{10}\right)$ e $F_2(x_0, y_0 - c) =$
$= F_2\left(1, 8 - \sqrt{10}\right)$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

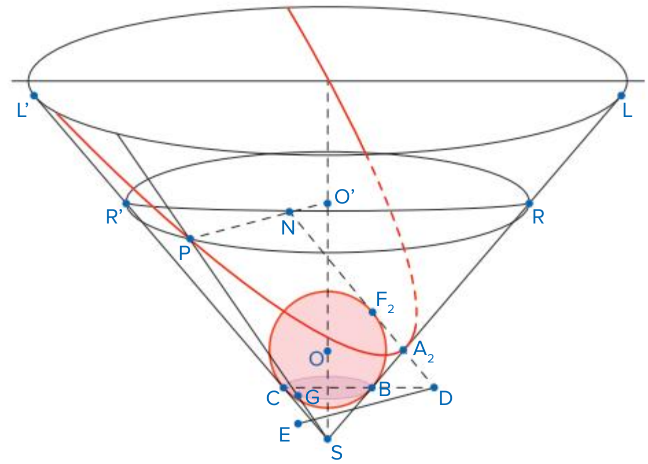
Assíntotas: $y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0) \Rightarrow y - 8 = \pm 3(x - 1)$

## A parábola

Quando o plano $\pi$ que corta a superfície cônica for paralelo a uma das geratrizes do cone (ou seja, quando os ângulos $\alpha$ e $\beta$ forem iguais), a interseção do plano $\pi$ e do cone será uma curva aberta conhecida como **parábola**.




Na figura a seguir, o plano de corte $\pi$ encontra o plano da circunferência de tangência da esfera com a superfície cônica na reta $\overleftrightarrow{DE}$, que chamaremos de reta diretriz da parábola. A esfera tangente ao cone toca o plano $\pi$ em $F_2$.



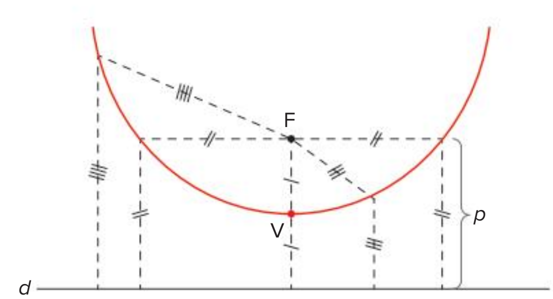

A parábola, a esfera de Dandelin e a reta diretriz.

Na figura, P é um ponto qualquer da parábola. Traçam-se, então, a reta $\overleftrightarrow{PF_2}$ e a geratriz $\overleftrightarrow{SP}$, que corta em G o paralelo $\overleftrightarrow{BC}$ da superfície do cone. Assim, temos $PF_2 = PG$ como tangentes a uma esfera pelo mesmo ponto P.

Do mesmo modo, PG = BR, pois são geratrizes do mesmo tronco de cone. Os triângulos $A_2NR$ e $A_2BD$ são semelhantes ao triângulo SLL'; portanto, ambos são isósceles e semelhantes entre si. Concluímos, então, que ND = BR e, consequentemente, $PF_2 = ND$. Finalmente, no retângulo PNDE, temos ND = PE e $PF_2 = PE$.

Essa propriedade define a parábola como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um foco ($F_2$) e de uma reta diretriz ($\overleftrightarrow{DE}$). Assim, temos a seguinte definição:

> Considere no plano cartesiano um ponto fixo F e uma reta *d*. A parábola é o conjunto de pontos do plano que equidistam de F e *d*. O ponto F é denominado foco da parábola e a reta *d* é denominada diretriz da parábola. Em símbolos:
>
> $$d(P, F) = d_{P,\,d}$$



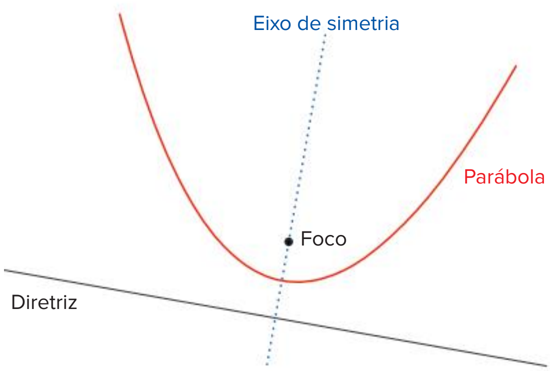

Na figura, a distância $p$ entre o foco e a reta diretriz é chamada de **parâmetro da parábola**, e o ponto médio **V** do menor segmento que une o foco da parábola à sua reta diretriz é chamado de **vértice da parábola**.

FRENTE 3

Nesse caso, dado que o vértice pertence à parábola, temos:

$$d(\mathrm{V}, \mathrm{F}) = d_{\mathrm{V},\, d} = \frac{p}{2}$$

As parábolas são curvas geométricas abertas dotadas de apenas um eixo de simetria. Este, por sua vez, é uma reta perpendicular à diretriz da parábola e que passa pelo seu foco.

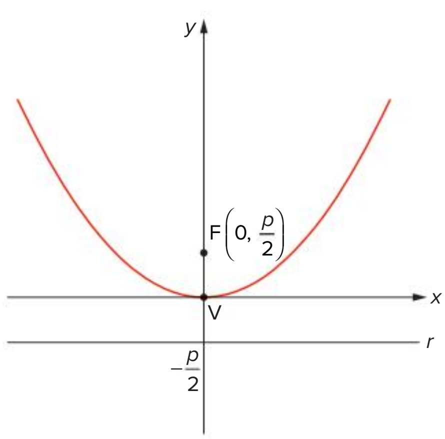



A parábola e o eixo de simetria.

Se definirmos a excentricidade ***e*** como a razão entre as distâncias de um ponto ao foco e desse ponto à diretriz, temos, para parábolas, que $e = 1$.

## Equações cartesianas da parábola

Vamos, inicialmente, deduzir a equação de uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo O$x$, conforme figura a seguir:




Nesse caso, o foco é $\mathrm{F}\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e a equação da reta diretriz é $y = -\frac{p}{2}$. Tomando um ponto genérico P($x$, $y$) pertencente à parábola, temos:

$$d_{\mathrm{P},\, r} = d(\mathrm{P}, \mathrm{F})$$

$$\left|y + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow$$

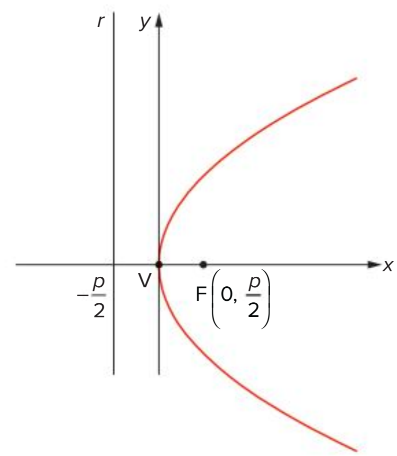
$$\Rightarrow 2py = x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$$

Do mesmo modo, podemos deduzir a equação da parábola de vértice na origem e concavidade para baixo, obtendo:

$$y = -\frac{1}{2p}x^2$$

Nos dois casos, a equação assume a forma $y = ax^2$, com $a = \pm\frac{1}{2p}$. Se $a > 0$, a concavidade da parábola estará voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade da parábola estará voltada para baixo.

### Parábola com vértice na origem e diretriz vertical




Rotacionando a parábola em 90° no sentido horário, o que significa trocar $y$ por $x$ e $x$ por $-y$ na equação anterior, obtemos:

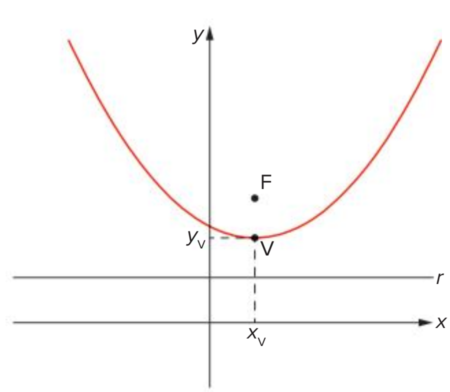
$$x = \frac{1}{2p}y^2$$

Se a concavidade for voltada para a esquerda, teremos:

$$x = -\frac{1}{2p}y^2$$

Essas equações são da forma $x = ay^2$.

### Equações da parábola com centro fora da origem e diretriz horizontal




Seja o vértice V de coordenadas ($x_V$, $y_V$). A parábola com vértice na origem e concavidade para cima tem equação $y = \frac{1}{2p}x^2$. Fazendo a mudança de variável (translação), $x' = x - x_V$ e $y' = y - y_V$, temos:

$$(y - y_V) = \frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \quad \text{(I)}$$

Se a concavidade da parábola for voltada para baixo, teremos:

$$(y - y_V) = -\frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \quad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II), chamadas **canônicas**, podem ser colocadas na forma $y = ax^2 + bx + c$. Para isso, desenvolvendo (I):

$$(y - y_V) = \frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_V = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{1}{2p}2 \cdot x \cdot x_V + \frac{1}{2p}x_V^2$$

Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, temos:

$$y = ax^2 - 2ax_Vx + ax_V^2 + y_V$$

Dessa maneira: $a = \frac{1}{2p}$, $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$.

Isolando $x_V$ e $y_V$, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

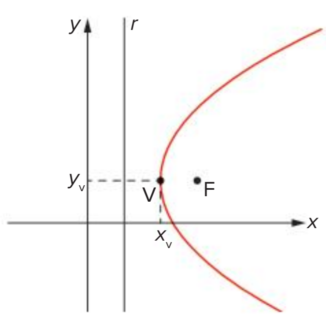
$$y_V = c - ax_V^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

O parâmetro p é dado por: $a = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2a}$.

### Vértice fora da origem e diretriz vertical




Considere agora uma parábola cujo vértice é o ponto $V(x_V, y_V)$ e cuja diretriz é uma reta vertical.

Quando a parábola tem a concavidade voltada para a direita, sua equação é:

$$(x - x_V) = \frac{1}{2p}(y - y_V)^2$$

Quando a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda, sua equação é:

$$(x - x_V) = -\frac{1}{2p}(y - y_V)^2$$

Essas equações podem ser escritas na forma $x = ay^2 + by + c$, que é especialmente útil nos problemas em que já se conhece a equação da parábola e, a partir dela, deseja-se obter seus elementos. Nesse caso, as coordenadas do vértice da parábola são:

$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ y_V = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Rightarrow V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

### A parábola como função do 2º grau

Quando a parábola tem diretriz paralela ao eixo Ox (eixo de simetria paralelo a Oy), sua equação assume a forma $y = ax^2 + bx + c$ e pode ser interpretada como uma função de domínio e contradomínio real.

Como vimos no capítulo sobre funções do 2º grau, se a parábola tiver raízes reais $x_1$ e $x_2$, ela pode ser expressa da seguinte maneira:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

## Exercícios resolvidos

**7.** Determine a equação da parábola com foco no ponto F(0, 6) e diretriz no eixo Ox.

**Resolução:**

Seja $P(x, y)$ um ponto da parábola de diretriz $d$. Pela definição de parábola, temos:

$$d_{P,\,d} = d(P, F) \Rightarrow y - 0 = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 6)^2}$$

$$y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y = x^2 + 36 \Rightarrow y = \frac{1}{12}x^2 + 3$$

**8.** Identifique os elementos da parábola de equação $8x = y^2 + 8$.

**Resolução:**

Temos: $8x = y^2 + 8 \Rightarrow x = \frac{1}{8}y^2 + 1$.

A parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo Ox e concavidade voltada para a direita, com $\frac{1}{2p} = \frac{1}{8} \Rightarrow p = 4$.

O vértice é dado por:

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) = V\left(-\frac{0^2 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1}{4 \cdot \frac{1}{8}}, -\frac{0}{2 \cdot \frac{1}{8}}\right) = V(1, 0)$$

O foco é dado por: $F\left(x_V + \frac{p}{2}, y_V\right) = F\left(1 + \frac{4}{2}, 0\right) =$
$= F(3, 0)$

A diretriz é dada por: $x = x_V - \frac{p}{2} \Rightarrow x = 1 - \frac{4}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1$

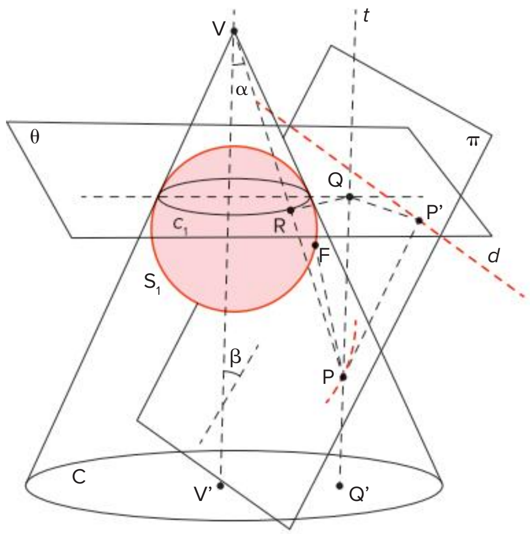
FRENTE 3

## Excentricidade e diretrizes das cônicas

No estudo da parábola, há uma reta chamada diretriz. A seguir, veremos que, de maneira similar, também podemos definir diretrizes para a hipérbole e a elipse.

Assim, sejam a superfície cônica, um plano $\pi$ secante à superfície cônica e uma esfera tangente ao cone e ao $\pi$ no ponto F (esfera de Dandelin). Como vimos anteriormente, F é um foco da cônica determinada pela interseção de $\pi$ com o cone.

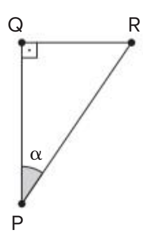
Seja o plano $\theta$ que contém a circunferência de tangência da esfera e do cone. A reta d, interseção de $\pi$ e $\theta$ será denominada diretriz da cônica.



Uma cônica e sua diretriz.

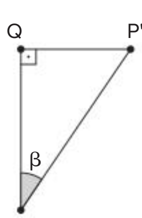
De acordo com a figura apresentada, seja P um ponto da cônica, $\overleftrightarrow{PV}$ uma geratriz do cone, P' a projeção ortogonal de P sobre *d* e Q a projeção ortogonal de P sobre $\theta$.

Como a reta *t* que contém $\overline{QP}$ é paralela ao eixo do cone, temos que $\text{med}(Q\hat{P}R) = \alpha$ (alternos internos). No triângulo QPR, temos que $PR = \dfrac{PQ}{\cos\alpha}$.




Como PR = PF, temos que PR é igual à distância de P ao foco, ou seja: $\dfrac{PQ}{\cos\alpha} = d(P, F)$.

De novo, como a reta t, que contém $\overline{QP}$, é paralela ao eixo do cone, temos $\text{med}(Q\hat{P}P') = \beta$ (ângulo de inclinação de $\pi$ em relação ao eixo do cone). No triângulo QPP': $PP' = \dfrac{PQ}{\cos\beta}$.




Como PP' representa a distância do ponto P à diretriz *d*, temos: $\dfrac{PQ}{\cos\beta} = d_{P,\,d}$.

Assim: $\dfrac{d(P, F)}{d_{P,\,d}} = \dfrac{\dfrac{PQ}{\cos\alpha}}{\dfrac{PQ}{\cos\beta}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

Os ângulos $\alpha$ e $\beta$ só dependem da superfície cônica escolhida e do plano secante $\pi$. Assim, para uma dada cônica, a razão $\dfrac{d(P, F)}{d_{P,\,d}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ é constante. Chamaremos essa razão de excentricidade e, ou seja, $e = \dfrac{d(P, F)}{d_{P,\,d}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

Decorre dessa discussão que as cônicas também podem ser definidas como os lugares geométricos do plano cuja razão entre as distâncias de seus pontos a um ponto fixo e a uma reta fixa é uma constante.

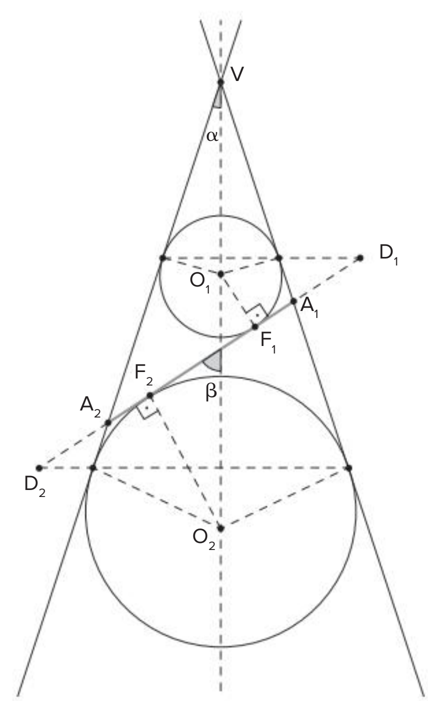
Para a elipse: $\alpha < \beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$.

Para a parábola: $\alpha = \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$.

Para a hipérbole: $\alpha > \beta \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$.

A seguir, veremos que essa definição de excentricidade é equivalente às definições apresentadas anteriormente neste capítulo.

Para a elipse, seja *d* a distância do centro da elipse a uma das diretrizes.




Para o vértice $A_1$, temos:

$$\frac{d(A_1, F_1)}{d(A_1, D_1)} = e \Rightarrow \frac{a - c}{d - a} = e \Rightarrow a - c = e(d - a) \quad \text{(I)}$$

Para o vértice $A_2$, temos:

$$\frac{d(A_2,F_1)}{d(A_2,D_1)} = e \Rightarrow \frac{a+c}{d+a} = e \Rightarrow a + c = e(d + a) \quad \text{(II)}$$

Fazendo (II) − (I):

$$(a + c) - (a - c) = e(d + a) - e(d - a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2c = 2ea \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

Fazendo (I) + (II):

$$(a - c) + (a + c) = e(d - a) + e(d + a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a = 2ed \Rightarrow e = \frac{a}{d}$$

Essas duas últimas relações são as usuais para a excentricidade.

Procedendo de maneira similar para a hipérbole, chegamos aos mesmos resultados. Para a parábola, a excentricidade é sempre 1, e não se definem os parâmetros a, b e c, pois ela não possui centro.

## Gráficos de relações de duas variáveis

No capítulo 8, estudamos as equações de retas e verificamos que toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $a$, $b$ e $c$ reais e com $a$ ou $b$ não nulos, representa uma reta no plano cartesiano, ou seja, os pontos que satisfazem essa equação, se representados em um plano cartesiano, formam uma reta.

Vimos também outras equações, como as que representam circunferências e cônicas.

Agora, estudaremos o caso das inequações com até duas variáveis. Vamos começar com as inequações do 1º grau.

**Lei da tricotomia**

Seja $x$ um número real. Uma, e apenas uma, das afirmações a seguir é verdadeira:

I. $x = 0$ II. $x > 0$ III. $x < 0$

### Inequações da forma $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$

Observe o teorema:

Dada uma equação de reta $r$: $ax + by + c = 0$, verifica-se que, para todo par $(x_0, y_0)$, se:

- $ax_0 + by_0 + c = 0$, então o ponto $(x_0, y_0)$ pertence à reta.
- $ax_0 + by_0 + c > 0$, então o ponto $(x_0, y_0)$ pertence a um dos semiplanos determinados pela reta.
- $ax_0 + by_0 + c < 0$, então o ponto $(x_0, y_0)$ pertence ao outro semiplano determinado pela reta.

Diante disso, podemos adotar o seguinte método prático para resolver inequações do tipo $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$:

**a)** Construímos o gráfico da reta $ax + by + c = 0$.

**b)** Tomamos um ponto externo à reta, substituímos suas coordenadas na expressão $ax + by + c$ e verificamos se tal expressão é positiva ou negativa (ou seja, se satisfaz a inequação ou não).

**c)** Caso o ponto satisfaça a inequação, dizemos que o semiplano que o contém é a solução da inequação; caso não satisfaça, dizemos que é o semiplano oposto a solução da inequação. Tal solução pode ser representada graficamente.

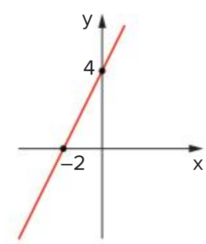
## Exercícios resolvidos

**9.** Resolva a inequação $2x - y + 4 > 0$.

**Resolução:**

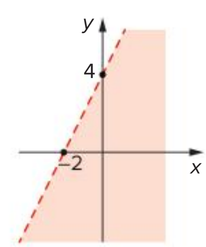
**a)** Primeiro, construímos o gráfico de $2x - y + 4 = 0$:

$$2x - y + 4 = 0 \Rightarrow 2x - y = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2x}{-4} - \frac{y}{-4} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$$




**b)** Note que a origem (0, 0) não pertence à reta, mas vamos trabalhar com ela. Assim, substituindo a origem na expressão, temos $2 \cdot 0 - 0 + 4 = 4$.

**c)** Como $4 > 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) pertence à solução, pois a inequação é satisfeita. Logo, a solução será representada pela seguinte região:



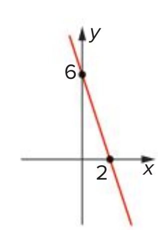

Note que a reta está tracejada, pois seus pontos não pertencem à solução.

**10.** Resolva a inequação $3x + y - 6 \geq 0$.

**Resolução:**

**a)** Primeiro, construímos o gráfico de $3x + y - 6 = 0$:

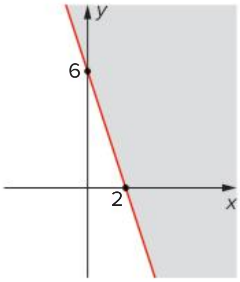
$$3x + y - 6 = 0 \Rightarrow 3x + y = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{y}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$$




**b)** Note que a origem (0, 0) não pertence à reta. Substituindo a origem na expressão, temos $3 \cdot 0 + 0 - 6 = -6$.

FRENTE 3

**c)** Como $-6 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) não pertence à solução, pois a inequação não é satisfeita. Logo, a solução será representada pela seguinte região:




Note agora que a reta não está mais tracejada, pois seus pontos pertencem à solução, uma vez que a expressão também pode ser igual a 0.

## Outras inequações com duas variáveis

Dada uma inequação com duas variáveis, devemos adotar o seguinte método geral:

**a)** Construímos o gráfico da equação obtida, considerando a desigualdade como uma igualdade.

**b)** Tomamos um ponto não pertencente à curva obtida em uma das regiões do plano definidas pelo gráfico, substituímos suas coordenadas na inequação e verificamos se ela é satisfeita ou não.

**c)** Caso o ponto satisfaça a inequação, dizemos que a região que o contém é a solução da inequação; caso não satisfaça, dizemos que a região que o contém não é a solução da inequação. As soluções de inequações desse tipo podem ser representadas graficamente.

## Exercícios resolvidos

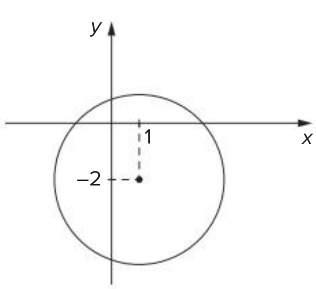
**11.** Resolva a inequação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 \geqslant 0$.

**Resolução:**

**a)** Primeiro, construímos o gráfico de $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:

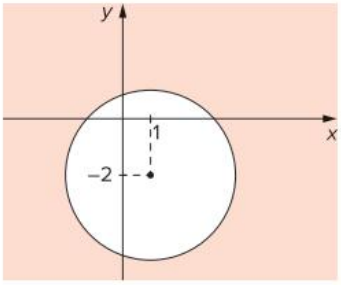
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4x + 4 = 4 + 1 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Assim, temos uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 3.




**b)** Note que a origem (0, 0) pertence à região interna da circunferência. Substituindo a origem na expressão, temos: $0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$.

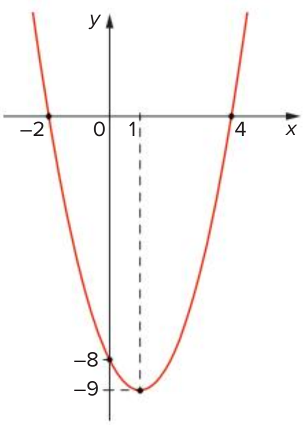
**c)** Como $-4 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) não pertence à solução, pois a inequação não é satisfeita. Logo, a solução será a região externa à circunferência.




**12.** Resolva a inequação $x^2 - 2x - y - 8 \leqslant 0$.

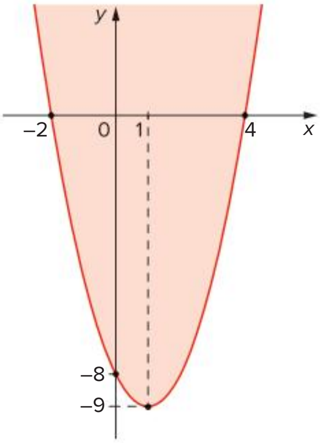
**Resolução:**

**a)** Primeiro, construímos o gráfico de $x^2 - 2x - y - 8 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 2x - 8$.
Assim, são pontos da parábola: $(-2, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -8)$ e o vértice $(1, -9)$.




**b)** Note que a origem (0, 0) pertence à região "interna" da parábola. Substituindo a origem na expressão, temos: $0^2 - 2 \cdot 0 - 0 - 8 = -8$.

**c)** Como $-8 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) pertence à solução, pois a inequação é satisfeita, uma vez que $0^2 - 2 \cdot 0 - 0 - 8 \leqslant 0$. Logo, a solução será a região "interna" da parábola.



## Sistemas de inequações com duas variáveis

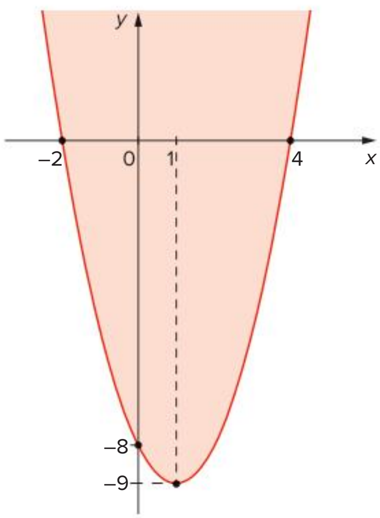
Em sistemas de inequações com duas variáveis, devemos aplicar o mesmo método que utilizamos anteriormente. Assim, basta resolver as inequações do sistema separadamente e, em seguida, verificar qual a interseção das regiões encontradas como soluções. A solução do sistema será a que for comum a todas as inequações.

### Exercício resolvido

**13.** Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} x^2 - 2x - y - 8 \leqslant 0 \\ 3x + y - 4 \geqslant 0 \end{cases}$.

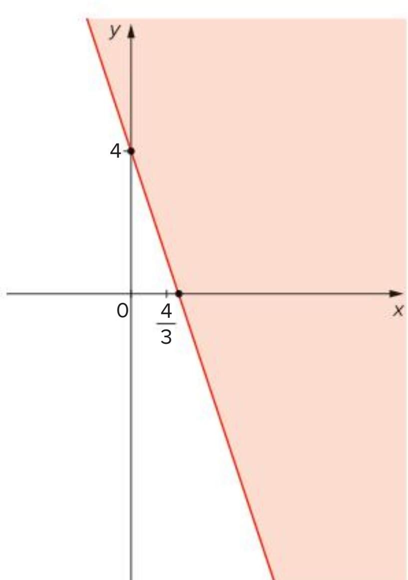
**Resolução:**

Resolvendo a 1ª inequação, apresentada no exercício resolvido 12, obtemos:




Resolvendo a 2ª inequação, obtemos:

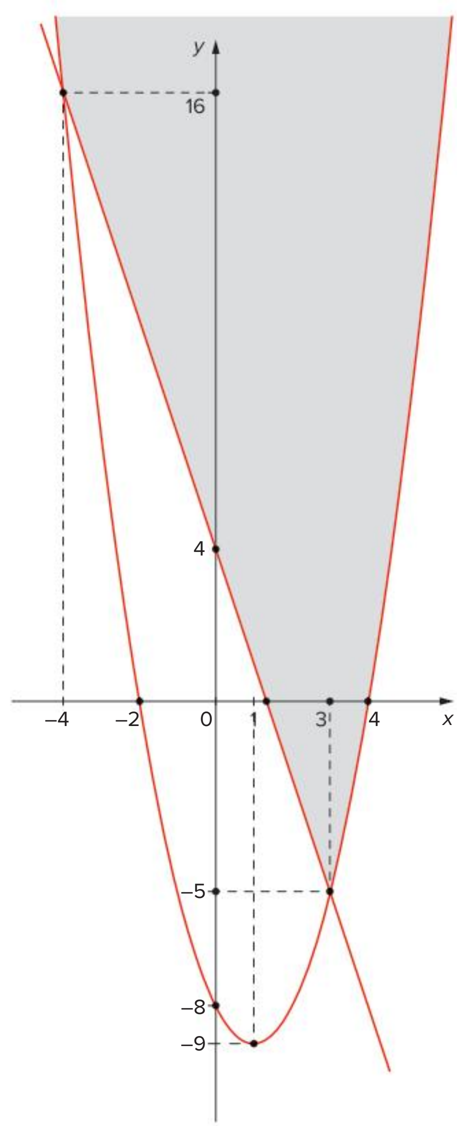
$$3x + y - 4 = 0 \Rightarrow 3x + y = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1$$




Em seguida, determinamos os pontos de interseção entre a reta e a parábola, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y - 8 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos $x^2 + x - 12 = 0$, concluindo, assim, que $x = 3$ ou $x = -4$. Substituindo cada valor de $x$ na equação da reta, obtemos, para $x = 3$, $y = -5$, e, para $x = -4$, $y = 16$. Logo, os pontos de interseção são $(3, -5)$ e $(-4, 16)$. Com isso, podemos construir o gráfico com a solução do sistema.




FRENTE 3

## Revisando

1. **UFPE** Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:
   a) circunferência
   b) parábola
   c) hipérbole
   d) elipse
   e) reta

2. **PUC-Campinas (Adapt.)**

### Visões do multimundo

Agora que assinei a TV a cabo, pressionado pelos filhos adolescentes (e pela curiosidade minha, que não lhes confessei), posso "ampliar o mundo sem sair da poltrona". Foi mais ou menos isso o que me disse, em tom triunfal, a prestativa atendente da empresa, com aquela vozinha treinada que imita à perfeição uma secretária eletrônica. Não é maravilhoso você aprender a fazer um suflê de tubérculos tropicais ou empadinhas e em seguida saltar para um documentário sobre o tribunal de Nuremberg? Se Copérnico (ou foi Galileu?) estivesse vivo, reformularia sua tese: o sol e a terra giram em torno da TV a cabo.

Aprendo num programa que elipses e hipérboles (além de serem figuras de linguagem) têm a ver com equações reduzidas... Num outro me garante um economista que o nacionalismo é uma aberração no mundo globalizado (será que isso vale também para as nações do Primeiro Mundo?). Tenho que ir mais devagar com este controle remoto (que, aliás, nunca saberei exatamente como funciona: nem fio tem!).

[...]

(Cândido de Castro, inédito)

O autor do texto aprendeu que elipses e hipérboles têm equações reduzidas. A expressão $\left(\dfrac{x^2}{100}\right) + \left(\dfrac{y^2}{36}\right) = 1$ é a equação reduzida de uma elipse de

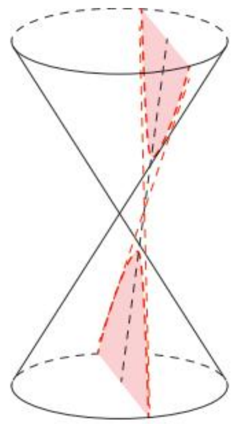
a) excentricidade $\dfrac{5}{3}$.
b) distância focal 16.
c) eixo menor igual a 6.
d) eixo maior igual a 10.
e) centro no ponto (5, 6).

**3. Unirio** A área do triângulo $PF_1F_2$, em que $P(2, -8)$ e $F_1$ e $F_2$ são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, é igual a:

a) 8
b) 16
c) 20
d) 32
e) 64

**4. UnB-DF** O cometa Halley tem uma órbita elíptica com eixo maior e eixo menor iguais a $540 \cdot 10^7$ km e $140 \cdot 10^7$ km, respectivamente. Sabendo que o Sol está em um dos focos da elipse, calcule o valor $\frac{d}{10^7}$, em que d é a menor distância entre o Sol e o cometa, medida em quilômetros. Desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

5. A curva destacada a seguir é uma das curvas conhecidas como cônicas.



Essa curva tem várias aplicações práticas, como o uso em arcos arquitetônicos, presentes na Catedral de Brasília, no Planetário de Saint Louis, nas torres de refrigeração de usinas nucleares, entre outros.

R.M. Nunes/Shutterstock.com

Catedral de Brasília, Distrito Federal.

Joseph Sohm/Shutterstock.com

Planetário de Saint Louis, Estados Unidos.

DanielPrudek/iStockphoto.com

Torres de refrigeração de usina nuclear.

A curva mencionada é uma:

**a)** parábola, lugar geométrico dos pontos que equidistam de um foco e uma reta.
**b)** hipérbole, lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias em relação aos focos fixos é constante.
**c)** hipérbole, lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias em relação aos focos fixos é constante.
**d)** elipse, lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias em relação aos dois focos fixos é constante.
**e)** elipse, lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias em relação aos dois focos fixos é constante.

6. Uma hipérbole tem centro na origem, eixo imaginário medindo 10, focos no eixo O$y$ e excentricidade $\frac{3}{2}$. Determine sua equação reduzida.

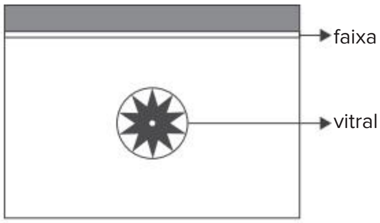
7. Uma hipérbole de eixo real horizontal e centro C(9, 7) tem eixo imaginário medindo $2b = 4$ e eixo real medindo $2a = 8$. Obtenha:

a) a equação reduzida da hipérbole.

b) as equações das assíntotas da hipérbole.

FRENTE 3

8. **UFF** Na parede retangular de um palácio renascentista, há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, uma estreita faixa reta, conforme a figura




Essa parede foi ornamentada com um elemento decorativo em forma de uma curva, que tem a seguinte característica: cada ponto da curva está situado a igual distância do centro do vitral e da faixa. Pode-se afirmar que o elemento decorativo tem a forma de um arco:

a) de elipse.
b) de hipérbole.
c) de parábola.
d) de circunferência.
e) de senoide.

9. Considere uma parábola cujo foco é F(4, 4) e cuja reta diretriz é $r$: $x = -3$. Determine:

a) a equação da parábola.
b) o vértice V.

**10.** Considere uma parábola de equação $y = 2x^2 - 8x + 6$. Determine:

**a)** as coordenadas do vértice.

**b)** as coordenadas do foco.

**c)** a equação da diretriz.

**d)** equação do eixo.

**11.** Resolva a inequação $2x + y - 5 < 0$.

**12.** Resolva a inequação $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4$.

FRENTE 3

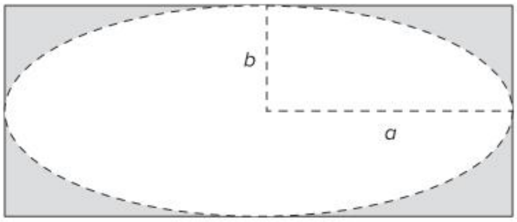
13. Resolva a inequação $x - y^2 \geqslant 0$.

## Exercícios propostos

1. A nova tela de televisão *Super Widescreen* exibe as imagens em formato 21:9, mas também apresenta, no menu de opções, os formatos de tela tradicionais 16:9 e 4:3. Quando a regulagem do formato de tela é alterada, a imagem do televisor é dilatada nas direções horizontal e vertical de maneira independente, de acordo com a proporção do novo formato.
Como atualmente há poucas transmissões de filmes no formato *Super Widescreen*, os aparelhos costumam ser assistidos com adaptações em formato que inutiliza parte da tela do televisor, como mostram as figuras a seguir:

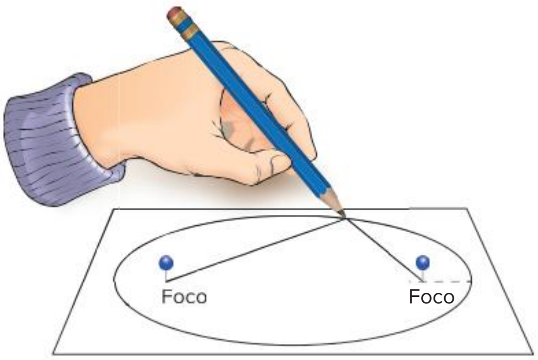

Se o descanso da tela de um televisor como esse mostra uma circunferência quando está regulada no formato 4:3, então, quando for regulada no formato 16:9 essa tela mostrará
a) uma circunferência maior.
b) uma circunferência menor.
c) uma elipse com o eixo maior na horizontal.
d) uma elipse com o eixo maior na vertical.
e) uma hipérbole.

2. Um fabricante de utensílios feitos de aço inoxidável quer lançar no mercado bandejas elípticas que serão recortadas de chapas retangulares de acordo com o seguinte esquema:




Para estimar a quantidade de metal dispensado em cada corte, o fabricante calculou a área da elipse segundo a expressão $\pi \cdot a \cdot b$, em que $a$ e $b$ representam, respectivamente, a maior e a menor distância do centro da elipse até um de seus pontos. Então, observando que tanto a elipse quanto o retângulo do esquema têm os mesmos eixos de simetria, o fabricante calculou a diferença entre a área da chapa retangular e a área da bandeja elíptica, depois substituiu $\pi$ por 3,14 em seu resultado. Dessa forma, se ele efetuou seus cálculos corretamente, deve ter concluído que a quantidade de metal dispensado em cada corte representa apenas
a) 21,5% da área da chapa retangular.
b) 12,5% da área da chapa retangular.
c) 32,5% da área da chapa retangular.
d) 6,25% da área da chapa retangular.
e) 1,25% da área da chapa retangular.

3. O astrônomo e matemático Johannes Kepler descobriu que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas e têm o Sol em um de seus focos. As elipses podem ser desenhadas em tábuas de madeira usando-se dois pregos e um barbante, como mostra a ilustração:




Nessas condições, os pontos onde os pregos foram fixados determinam os focos da elipse. A excentricidade de uma elipse pode ser calculada dividindo-se a distância entre os pregos e o comprimento do barbante.
A tabela a seguir apresenta as excentricidades das órbitas dos planetas do Sistema Solar.

**Excentricidade da órbita de planetas do Sistema Solar**

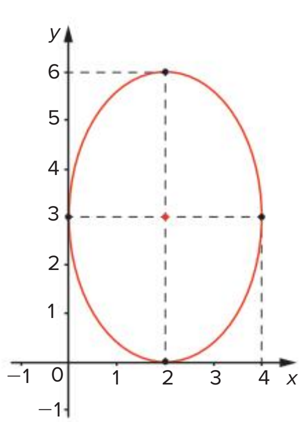
| Planeta | Mercúrio | Vênus | Terra | Marte |
|---|---|---|---|---|
| Excentricidade | 0,2 | 0,07 | 0,02 | 0,09 |
| Planeta | Júpiter | Saturno | Urano | Netuno |
| Excentricidade | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,009 |

Fonte: www.sbfisica.org.br/fne/Vol4/Num2/v4n2a06.pdf.

Quando o formato de uma elipse está próximo do formato de uma circunferência, dizemos tratar-se de uma elipse arredondada; caso contrário, é uma elipse alongada.
Então, de acordo com a tabela, no nosso Sistema Solar, o planeta que tem a órbita mais arredondada e o que tem a órbita mais alongada são, respectivamente:

a) Saturno e Marte.
b) Urano e Marte.
c) Vênus e Júpiter.
d) Netuno e Mercúrio.
e) Netuno e Terra.

4. **Unesp 2014** A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.
Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

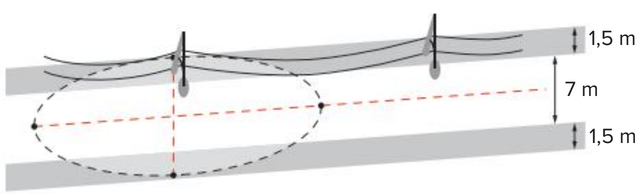



5. **Unesp** A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

**I.** os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;
**II.** o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;
**III.** o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

**Dados:** $0,943^2 \cong 0,889$ e $\sqrt{0,111} \cong 0,333$




a) 35
b) 30
c) 25
d) 20
e) 15

6. **UEG-GO 2021** A elipse com focos $F_1(0, -3)$ e $F_2(0, 3)$ e comprimento do eixo menor igual a 2 tem equação igual a

a) $x^2 + \dfrac{y^2}{10} = 1$

b) $x^2 - \dfrac{3y^2}{10} = 1$

c) $-3x^2 + \dfrac{3y^2}{5} = 1$

d) $-x^2 - \dfrac{y^2}{10} = -3$

e) $x^2 + \dfrac{y^2}{5} = 3$

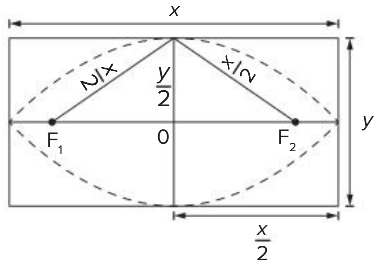
7. **Uece 2020** No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos P(5, 0) e Q(0, *y*) estão sobre o gráfico da elipse cujos focos são os pontos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$. Nessas condições, o perímetro do triângulo $QF_1F_2$, em u.c., é

**Dado:** u.c. = unidade de comprimento

a) 20
b) 18
c) 22
d) 16

FRENTE 3

**8. UEPB 2012** Deseja-se construir uma praça em forma de elipse em um terreno retangular de dimensões $x$ metros e $y$ metros, com $x > y$, de perímetro 300 m e área 5 000 m$^2$, conforme nos mostra a figura.



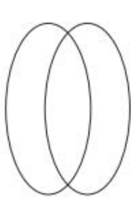

Estando previstas as instalações de duas torres de iluminação, uma em cada foco da elipse, $F_1$ e $F_2$, local de melhor distribuição e aproveitamento das mesmas, concluímos que a distância em metros entre as torres é

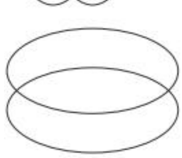
a) $100\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $50\sqrt{3}$
d) $40\sqrt{3}$
e) $30\sqrt{3}$

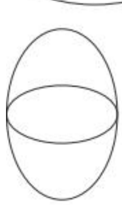
**9. Acafe-SC 2019** Se a elipse de equação $3x^2 + 2y^2 - 12 = 0$ intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B, e o eixo das ordenadas nos pontos C e D, então a área do quadrilátero de vértices A, B, C e D é:

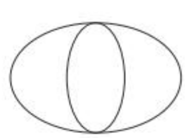
a) $8\sqrt{6}$ unidades de área
b) $\sqrt{6}$ unidades de área
c) $2\sqrt{6}$ unidades de área
d) $4\sqrt{6}$ unidades de área

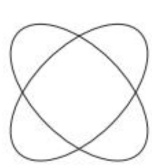
**10.** Um *webdesigner* foi contratado para fazer o *site* de uma instituição educacional dedicada à astronomia chamada "Elipse". Os diretores da instituição decidiram que a logomarca presente no *site* deveria ser a figura formada pelos gráficos das equações $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $4x^2 + y^2 = 4$ em um mesmo sistema cartesiano tradicional, com o eixo x na horizontal. Então, o *webdesigner* digitou corretamente essas equações em um de seus programas de computação gráfica e descobriu que a imagem da logomarca da instituição no *site* seria:

a)


b)


c)


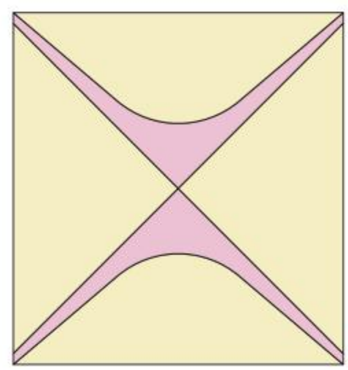
d)


e)


**11. FGV-SP 2013** Sendo $m$ o maior valor real que $x$ pode assumir na equação analítica $(x - 2)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$, e $n$ o maior valor real que $y$ pode assumir nessa mesma equação, então, $m + n$ é igual a

a) 8.
b) 7.
c) 6.
d) 4.
e) 3.

**12.** A comissão de formatura da turma do último ano de uma faculdade de Arquitetura está discutindo a estampa da camiseta comemorativa de conclusão do curso. A figura a seguir ilustra uma proposta de uma estampa em duas cores separadas por retas perpendiculares e dois arcos simétricos um ao outro, que se aproximam das retas perpendiculares sem tocá-las:



Essa estampa deverá ser computada em um *software* que aceita como entradas as equações analíticas das curvas cônicas. Assim, para que o *software* compute os arcos que separam as cores apresentadas, os estudantes deverão digitar a equação de uma:

a) reta.
b) circunferência.
c) elipse.
d) parábola.
e) hipérbole.

**13. UFPI** O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole são:

a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
b) $(2, 0)$ e $(-2, 0)$
c) $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ e $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$
d) $\left(0, \sqrt{2}\right)$ e $\left(0, -2\sqrt{2}\right)$
e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

**14.** Uma hipérbole equilátera tem centro na origem e focos no eixo O$x$. Sabendo que sua distância focal é 6, dê sua equação.

**15.** **UEL-PR** Considere o círculo $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ de raio $r$ e a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.
Nesse caso, pode-se afirmar que:

**a)** se $r < 1$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.

**b)** se $r = 1$, então as curvas têm quatro pontos em comum.

**c)** se $r = 1$, as curvas se intersectam em $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

**d)** se $r = \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam apenas nos pontos $\left(3, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-3, -2\sqrt{2}\right)$.

**e)** se $r > \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.

**16.** **EsPCEx-SP 2019** Uma hipérbole tem focos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$ e passa pelos pontos $P(3, 0)$ e $Q(4, y)$, com $y > 0$. O triângulo com vértices em $F_1$, P e Q tem área igual a

**a)** $\dfrac{16\sqrt{7}}{3}$

**b)** $\dfrac{16\sqrt{7}}{5}$

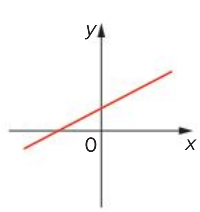
**c)** $\dfrac{32\sqrt{7}}{3}$

**d)** $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$

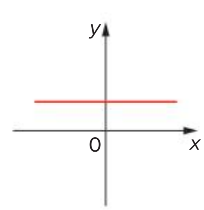
**e)** $\dfrac{8\sqrt{7}}{5}$

**17.** **UFRGS** O produto de duas variáveis reais, $x$ e $y$, é uma constante. Portanto, dentre os gráficos abaixo, o único que pode representar essa relação é

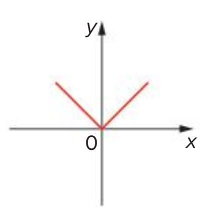
**a)**



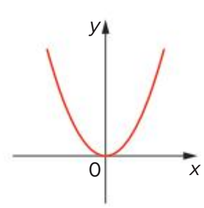

**d)**



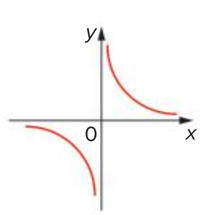

**b)**




**e)**




**c)**




**18.** A hipérbole cujo eixo real é paralelo a um dos eixos coordenados tem equação $3x^2 - y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$. Determine sua equação reduzida.

**19.** As mais modernas máquinas de cortar chapas de aço-carbono, aço inoxidável, alumínio e cobre utilizam a tecnologia do corte a plasma, que é feito por um braço robótico cujos movimentos são programados em um computador. Uma maneira eficiente de se programar os movimentos do braço dessa máquina é introduzir os dados dos cortes que se deseja fazer na forma de equações analíticas, como:

**I.** $x^2 - y^2 = 1$

**II.** $4x^2 + y^2 = 4$

**III.** $x^2 + 4y^2 = 4$

**IV.** $x^2 + y^2 = 4$

**V.** $x^2 + 4y = 4$

Assim, para programar um corte circular e um corte parabólico, pode-se usar as seguintes equações analíticas:

**a)** I e IV. **c)** III e IV. **e)** I e V.

**b)** II e III. **d)** IV e V.

**20.** Para a parábola de equação $x = \frac{1}{8}y^2 - y + 5$, determine:

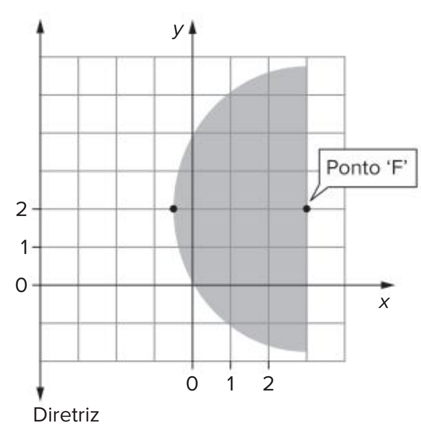
**a)** as coordenadas do vértice.

**b)** as coordenadas do foco.

**c)** a equação da diretriz.

**d)** a equação do eixo.

**21.** **Uema 2014** Uma família da cidade de Cajapió-MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida abaixo, coberta com uma folha quadriculada.




Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será

**a)** $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$.

**b)** $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$.

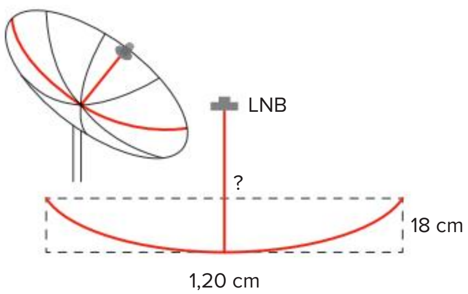
**c)** $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$.

**d)** $(y - 2)^2 = -7\left(2x - \dfrac{1}{7}\right)$.

**e)** $(y + 3)^2 = \dfrac{12}{7}(x - 1)$.

FRENTE 3

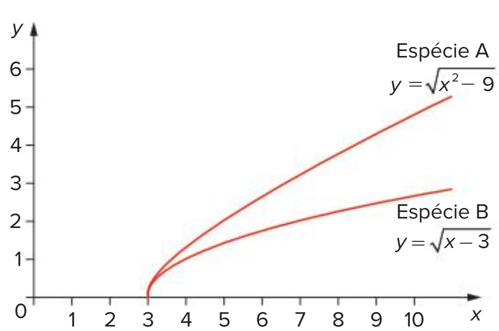
**22.** As antenas parabólicas, utilizadas para recepção de sinais de rádio e televisão, têm a forma geométrica de um paraboloide de revolução que reflete feixes paralelos de radiação eletromagnética vindos do espaço, concentrando-os no foco da antena onde fica localizado o receptor chamado LNB (*Low-Noise Block*). A figura a seguir mostra uma antena parabólica com 1,2 m de diâmetro e uma de suas seções meridianas:




A seção da antena tem a forma de um arco de parábola inscritível em um retângulo de 1,2 m por 18 cm, em cujo eixo de simetria fica localizada uma **haste** de alumínio presa ao vértice da parábola que serve para manter o receptor LBN posicionado no foco da parábola.
Sabendo que a distância entre o vértice e o foco de uma parábola de equação $y = ax^2$ é dada pela expressão $\frac{1}{4|a|}$, pode-se estimar o comprimento da **haste** dessa antena em:

a) 20 cm
b) 30 cm
c) 40 cm
d) 50 cm
e) 60 cm

**23.** Dois arbustos de espécies diferentes foram plantados no mesmo dia e brotaram três dias depois. O gráfico a seguir compara o crescimento, em centímetros, dos dois arbustos em função do número *x* de dias após o plantio:




De acordo com as expressões algébricas que modelam o crescimento das espécies A e B, pode-se concluir que as curvas apresentadas no gráfico são arcos de:

a) parábola (espécie A) e elipse (espécie B).
b) hipérbole (espécie A) e parábola (espécie B).
c) elipse (espécie A) e parábola (espécie B).
d) elipse (espécie A) e hipérbole (espécie B).
e) hipérbole (espécie A) e elipse (espécie B).

**24. Unicamp-SP 2019** No plano cartesiano, considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ e a parábola de equação $3x^2 - y + 1 = 0$. Essas duas curvas se interceptam em

a) um ponto.
b) dois pontos.
c) três pontos.
d) quatro pontos.

**25. UFPR 2019** Em quantos pontos do plano cartesiano a circunferência de equação

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

e a parábola de equação

$$y = -2x^2 + 8x - 6$$

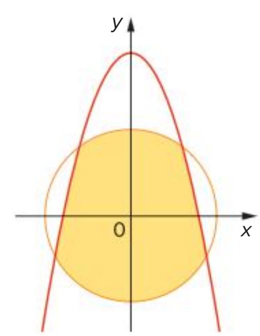
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

**26. ESPM-SP 2018** Seja A o vértice da parábola de equação $y = x^2 - 4x + 6$. A reta que passa pela origem O do plano cartesiano e pelo ponto A intercepta a parábola também num ponto B. Pode-se afirmar que:

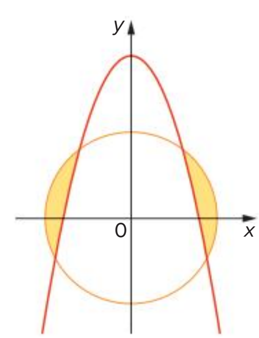
a) OA = AB
b) OA = 2 · AB
c) AB = 2 · OA
d) AB = 3 · OA
e) OA = 3 · AB

**27. FGV-SP 2018** A solução gráfica do sistema de inequações $\begin{cases} 3x^2 + y^2 \leqslant 2 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$ é a região sombreada em

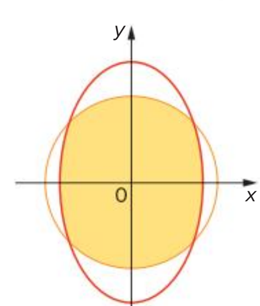
a)



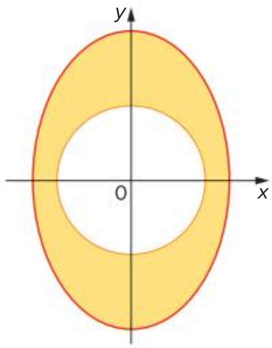

b)



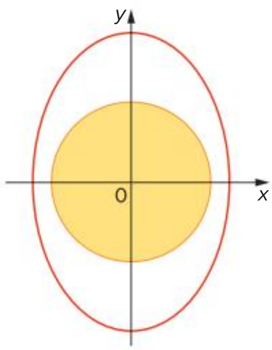

c)



d)




e)




**28.** Resolva graficamente as inequações:

**a)** $2x - y \leqslant 0$

**b)** $2x - 4y + 4 \geqslant 0$

**29.** Resolva graficamente as inequações:

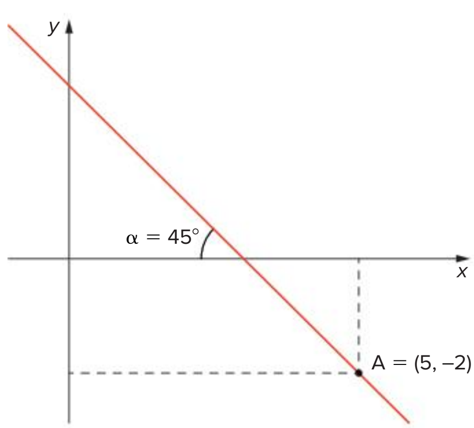
**a)** $x^2 + y^2 < 16$

**b)** $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 \geqslant 0$

**30.** **UFSC 2020** Some os números associados às proposições corretas.

**01** Se os pontos A(2, 0), B(0, 3) e P($a$, $b$) são colineares, e se os pontos C(1, 3), D(0, 1) e P são também colineares, então $\frac{a}{b} < 1$.

**02** Se $r$ é a reta da figura a seguir,




então sua equação geral pode ser escrita por $9x + 5y - 35 = 0$.

**04** A equação $3x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 19 = 0$ representa uma elipse com centro $(2, -2)$ e com o eixo maior paralelo ao eixo das abcissas.

**08** Se $\lambda$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e $r$ é a reta de equação $2x + 3y + 7 = 0$, então $\lambda$ interseção com $r$ é um conjunto unitário.

**16** Se as retas $r$ e $s$ têm equações $r$: $ax + by + c = 0$ e $s$: $ax + by + d = 0$, então a distância entre as retas é $\frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**32** Seja S a região do plano descrita pelas inequações

$$\begin{cases} x - y \leqslant 0 \\ x + y \geqslant 0 \\ y \geqslant 2 \\ y \leqslant 5 \end{cases}.$$

A região S descreve um trapézio de área 21.

Soma:

**31.** Resolva graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x + 3y < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

**32.** Determine graficamente os pontos P($x$, $y$) do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} y \geqslant 1 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

**33.** Determine graficamente a solução dos sistemas de inequações:

**a)** $\begin{cases} 6x + 3y - 6 \leqslant 0 \\ 3x + 6y \geqslant -12 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x + 5y < 10 \\ y \leqslant 2 \end{cases}$

**34.** Resolva graficamente a inequação:

$$\frac{x - y - 2}{x + y - 2} \geqslant 0$$

**35.** Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 4 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 > 16 \end{cases}$$

**36.** Resolva a inequação $\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{9} \leqslant 1$.

**37.** Resolva a inequação $y > x^2 - 5x + 4$.

**38.** Resolva a inequação $x \leqslant y^2 - 3y - 4$.

**39.** Resolva o sistema de inequações:

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 > 9 \\ y \geqslant 2 \end{cases}$$

**40.** Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} y > x^2 - 5x + 4 \\ x + y \leqslant 2 \end{cases}$.

## Textos complementares

# Kepler e a órbita elíptica

[...] Copérnico calculou as distâncias dos planetas ao Sol no pressuposto de que eles se deslocassem com velocidades constantes em órbitas circulares centradas no Sol. Os dados de observação, entretanto, eram insuficientes para comprovar isso. [...] Essa insuficiência de dados precisos era uma das dificuldades maiores para se decidir qual dos [...] modelos planetários correspondia à realidade. E quem compreendeu bem o problema e empenhou toda uma vida para superar essas dificuldades foi o dinamarquês Tycho Brahe [...].

Tycho Brahe (1546-1601) tornou-se apaixonado da Astronomia aos 14 anos de idade [...]. Dos 17 aos 26 anos de idade, Tycho adquiriu vários instrumentos de observação e construiu muitos outros, maiores e cada vez mais precisos [...].

[...] Era chegada "a vez e a hora de Tycho Brahe". Ele acabara de construir um novo sextante, cujos braços mediam quase dois metros de comprimento! E que se articulavam com precisão num eixo de bronze que não permitia folga. O arco do instrumento possuía uma escala graduada, não apenas em graus, mas também em minutos de graus! [...]

[...] Tycho Brahe sempre contou com o irrestrito apoio do rei Frederico II da Dinamarca. [...] [Este] ofereceu-lhe então a Ilha de Huen, no canal que separa a Dinamarca da Suécia, para que ali construísse o observatório de seus sonhos, casa para morar, oficinas, fábrica de papel, impressora, tudo à custa do reino! [...] Ali passou os próximos 20 anos de sua vida, coletando o mais rico acervo de observações astronômicas até então conseguido.

[...] De posse dessa riqueza de dados, Tycho Brahe podia concluir com segurança que o sistema heliocêntrico, tal qual exposto por Copérnico, era insustentável. [...]

In: BRAHE, Tycho. Astronomiae Instauratae Mechanica.Nurembergue: Levinus Hulsius, 1602.

Tycho Brahe aparece nesse mural em meio a seus instrumentos, na companhia de seus assistentes e de seu inseparável cão [...].

Frederico II morreu em 1588. [...] [Tycho] fixou residência no castelo de Benatek, próximo à cidade de Praga, como "matemático imperial" do imperador Rodolfo II da Boêmia. Essa mudança aproximava Tycho Brahe da personagem principal da nossa história [...].

Johannes Kepler (1571-1630) [...] nasceu no sudoeste da Alemanha, em Weil-der-Stadt, um lugarejo situado 30 km a oeste de Stuttgart, a capital de Württenberg. [...]

[...] Não seriam seus pais que iriam bem cuidar de seus estudos, mas o Estado, cujo sistema educacional localizava e encaminhava os meninos inteligentes. Se pobres, como era o caso de Kepler, não faltavam bolsas que os dotavam dos meios necessários para se dedicarem ao trabalho escolar sem preocupações. Foi assim que Kepler, cuja brilhante inteligência revelou-se precocemente, embarcou numa carreira de estudo que o levaria da escola elementar ao seminário e deste a universidade.

Aos 23 anos de idade, quando ainda estudante de Teologia em Tübingen, Kepler foi indicado para preencher o posto vago de Professor de Astronomia e Matemática na universidade protestante de Graz, na Áustria. [...]

Johannes Kepler.

Tycho Brahe.

[...] O primeiro livro do jovem astrônomo, intitulado *Mysterium Cosmographicum*, [foi] publicado em Tübingen em 1596.

Tycho Brahe, como vimos, era exímio observador. Mas não tinha competência matemática para trabalhar os dados de suas observações. Quando recebeu e examinou o livro de Kepler, logo reconheceu em seu autor um talento matemático singular, que ele, Tycho, não possuía, e de que necessitava para ajudá-lo a aperfeiçoar sua nova teoria planetária. [...] Eles trocaram correspondência por cerca de dois anos, e, decerto, perceberam o quanto cada um necessitava do outro. Foram esses interesses mútuos que acabaram fazendo de Kepler um assistente de Tycho Brahe, em Benatek, a partir de fevereiro de 1600.

Tycho Brahe morreu em outubro de 1601, sem que o sistema planetário de seus sonhos pudesse ser concluído. [...]

Com a morte de Tycho Brahe, Kepler foi logo nomeado seu sucessor, no posto de Matemático Imperial, onde permaneceu até a morte de Rodolfo II, em 1612. Nos seis primeiros anos de sua permanência em Benatek, ele descobriu suas duas primeiras leis planetárias, que aparecem no seu segundo livro, publicado em 1609, sob o título *Astronomia Nova*. Seu trabalho foi intenso e árduo, envolvendo séries intermináveis de longos e laboriosos cálculos, procurando acertar hipóteses que frequentemente levavam a conclusões falsas e exigiam recomeçar tudo de novo. As dificuldades vinham de preconceitos antigos. Desde Aristóteles, firmara-se a convicção de que os corpos celestes, dada sua perfeição, só podiam mover-se em círculos, pois eram essas as únicas órbitas “perfeitas”; e moviam-se com velocidade uniforme, pois uma variação na velocidade seria uma imperfeição. Presos a esses "dogmas", os astrônomos tinham de recorrer a artifícios geométricos para explicar os movimentos observados nos céus. [...] Em seus intermináveis cálculos e tentativas de ajustar teoria à realidade, Kepler foi abandonando esses artifícios e finalmente os dogmas da órbita circular e do movimento uniforme. [...]

Desde sua chegada a Benatek, Kepler concentrou-se no planeta Marte, e por uma razão muito simples, sendo o primeiro dos planetas exteriores, ele se move mais rapidamente em sua órbita, retornando logo à posição inicial, o que facilita seu estudo. Ele é também aquele cuja órbita é mais elíptica e que, portanto, mais difere de um círculo. [...]

Kepler verificou que a órbita de Marte era uma elipse de excentricidade $e \approx 0{,}093$. Isso nos dá [...] $b \approx 0{,}99a$.

Assim, se desenharmos a órbita de Marte com semieixo maior igual a 10 cm, o semieixo menor será [...] apenas 1 mm a menos que o semieixo maior. Isto mostra que é impossível perceber visualmente que a órbita de Marte não é circular! [...]

Kepler estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, que descobrira para o planeta Marte, a qual ficou conhecida como sua 1ª lei e que assim se enuncia:

*Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.*

[...] Kepler encontrara outra regularidade interessante no movimento dos planetas. [...] Conhecida como sua 2ª lei, e tem o seguinte enunciado:

*Os raios vetores que unem um planeta ao Sol varrem áreas iguais em tempos iguais.*

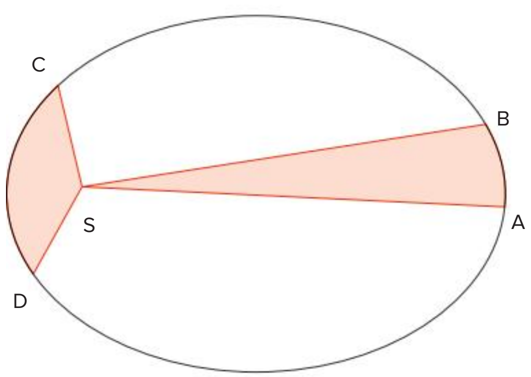



Ilustração das leis de Kepler.

[...] Caberia a Isaac Newton (1642-1727) redescobrir no emaranhado dos escritos de Kepler suas três leis e nelas identificar os fundamentos da Mecânica Celeste, sintetizados em sua Lei da Gravitação Universal.

ÁVILA, Geraldo. Kepler e a órbita elíptica. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, 15. ed. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/15/2.htm. Acesso em: 14 jan. 2022.

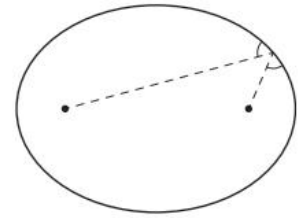
## A elipse, a parábola e a hipérbole – propriedades e aplicações

A elipse, a parábola e a hipérbole são curvas que possuem propriedades que as tornam importantes em várias aplicações. Aqui vamos ocupar-nos apenas das chamadas propriedades de reflexão dessas curvas, relacionadas com pontos especiais chamados focos.

**O caso da elipse**

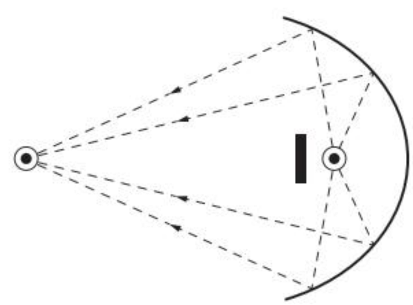
[...] A propriedade de reflexão da elipse é a seguinte: a partir de um dos focos tracemos um segmento de reta qualquer. Este segmento encontra a elipse num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco.

(Nota: Os ângulos com as curvas são os ângulos com as respectivas tangentes nos pontos em causa.)



Propriedade de reflexão da elipse.

Esta propriedade faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas. Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

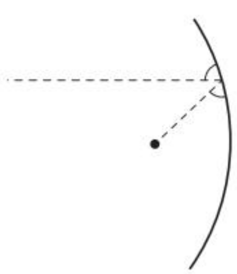


Instrumento óptico elíptico.

Uma ilustração acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de meio elipsoide (um elipsoide é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos). Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas “galerias de murmúrios”) em vários edifícios públicos [...].

**O caso da parábola**

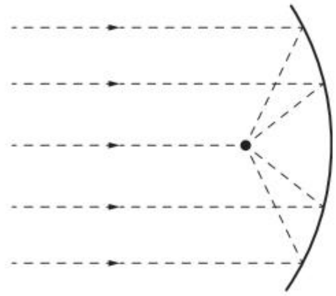
[...] A propriedade de reflexão da parábola é a seguinte: a partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo da parábola. Este segmento encontra a parábola num ponto, e se a partir dele traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo foco.



Propriedade de reflexão da parábola.

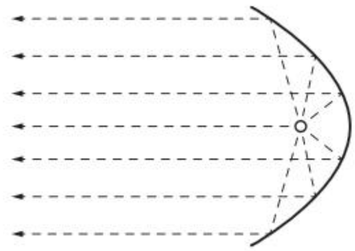
FRENTE 3

Esta propriedade faz com que a parábola tenha várias aplicações práticas. Um exemplo são as vulgares antenas parabólicas, que concentram num aparelho receptor os sinais vindos de um satélite de televisão.



Antena ou espelho parabólico.

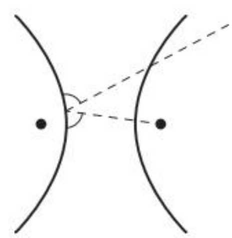
Uma aplicação óptica são os faróis dos automóveis e das motocicletas, que são espelhados por dentro e em que se coloca a lâmpada no foco.



Farol parabólico.

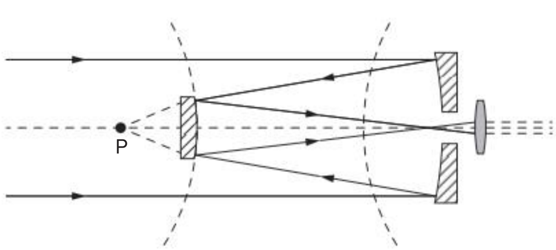
**O caso da hipérbole**

[...] A propriedade de reflexão da hipérbole é a seguinte: a partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole. Este segmento encontra o correspondente ramo da hipérbole num ponto, e se a partir dele traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco.



Propriedade de reflexão da hipérbole.

[...] Um exemplo de uma aplicação óptica é o chamado **telescópio de reflexão**. É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado **primário**, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos focos da segunda.




Telescópio de reflexão com seu espelho primário parabólico (à direita) e o secundário hiperbólico (à esquerda).

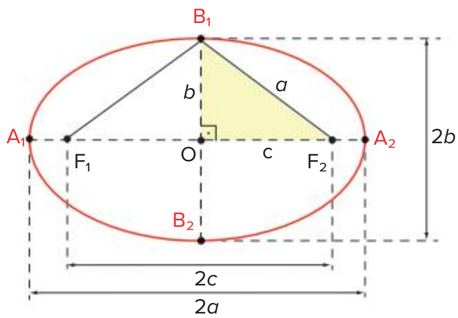
Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica.

A vantagem desse tipo de telescópio reside no fato de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação. [...]

QUEIRÓ, João Filipe. A elipse, a parábola e a hipérbole — propriedades e aplicações. *Universidade de Coimbra*. Disponível em: www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf. Acesso em: 14 jan. 2021.

## Resumindo

**Elipse**




Definição: $PF_1 + PF_2 = 2a$
Centro: $O(x_0, y_0)$
Eixo maior: $A_1A_2 = 2a$
Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$
Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$

Propriedade: $a^2 = b^2 + c^2$

**Equações da elipse**

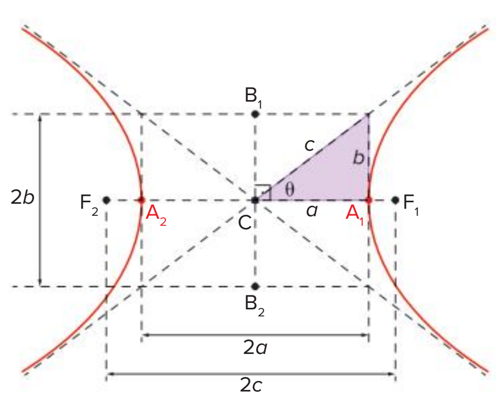
Eixo focal paralelo ao eixo O$x$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eixo focal paralelo ao eixo O$y$:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

**Hipérbole**




Definição: $|PF_1 - PF_2| = 2a$
Centro: $C(x_0, y_0)$
Eixo real: $A_1A_2 = 2a$
Eixo imaginário: $B_1B_2 = 2b$
Distância focal: $F_1F_2 = 2c$
Propriedade: $c^2 = a^2 + b^2$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

**Equações da hipérbole**

Eixo focal paralelo ao eixo O$x$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eixo focal paralelo ao eixo O$y$:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

**Equações das assíntotas da hipérbole**

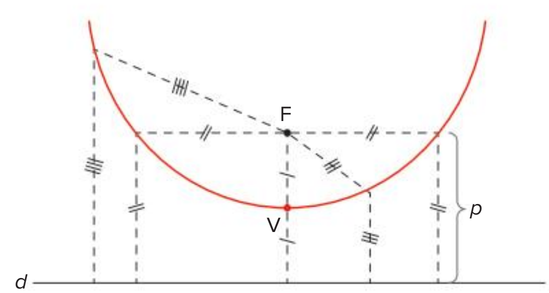
Eixo real paralelo ao eixo O$x$:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

Eixo real paralelo ao eixo O$y$:

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$$

**Parábola**




Definição: $d(P, F) = d_{P,\,d}$
Diretriz: $d$
Parâmetro: $p = d_{F,\,d}$
Vértice: $V(x_V, y_V)$

**Parábola com diretriz horizontal**

$$(y - y_V) = \pm \frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$a = \pm \frac{1}{2p}$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

**Parábola com diretriz vertical**

$$(x - x_V) = \pm \frac{1}{2p}(y - y_V)^2 \Rightarrow x = ay^2 + by + c$$

$$a = \pm \frac{1}{2p}$$

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

## Quer saber mais?

***Sites***

Quem foi Johannes Kepler? *Revista SuperInteressante*, 8 mar. 2013. Disponível em: https://super.abril.com.br/historia/johannes-kepler/. Acesso em: 3 fev. 2022.

Leia uma breve biografia do astrônomo Johannes Kepler (1571-1630), autor das leis de Kepler e um dos primeiros a identificar o formato elíptico das órbitas dos planetas.

Derivando a Matemática. *Curvas na Arquitetura:* Elipse. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/elipse-na-arquitetura/. Acesso em: 13 jan. 2021.

Nesse *site*, são mostradas construções arquitetônicas que utilizam curvas cônicas, como a Sagrada Família, em Barcelona.

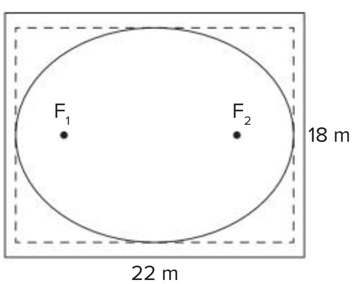
**Livros**

SAGAN, Carl. *Cosmos*. São Paulo: Companhia das Letras, 2017.

Escrito pelo cientista e divulgador científico Carl Sagan, esse livro aborda diversos assuntos sobre ciência, incluindo as diferentes visões sobre o movimento dos corpos celestes.

## Exercícios complementares

**1. UFRN 2013** Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.




O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos. Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

**a)** 3 m.
**b)** 4 m.
**c)** 5 m.
**d)** 6 m.

**2. AFA-SP 2018** No plano cartesiano, os pontos P($x$, $y$) satisfazem a equação

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

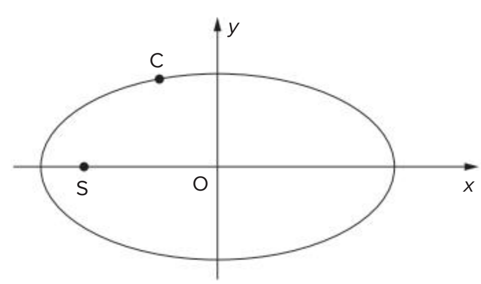
da curva $\lambda$. Se $F_1$ e $F_2$ são os focos de $\lambda$, tais que a abscissa de $F_1$ é menor que a abscissa de $F_2$, é INCORRETO afirmar que

**a)** a soma das distânca de P a $F_1$ e de P a $F_2$ é igual a 10.
**b)** $F_1$ coincide com o centro da curva $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.
**c)** $F_2$ é exterior a $x^2 + y^2 = 25$
**d)** O ponto de abscissa máxima de $\lambda$ pertence à reta $y = x - 8$.

**3. Efomm-RJ 2019** A equação $\left(\frac{x^2}{144}\right) + \left(\frac{y^2}{225}\right) = 1$ representa

**a)** Elipse com focos em (0, 9) e (0, −9).
**b)** Circunferência de raio igual a 9.
**c)** Parábola.
**d)** Hipérbole.
**e)** Elipse com centro em (12, 15).

**4. UnB-DF 2012**



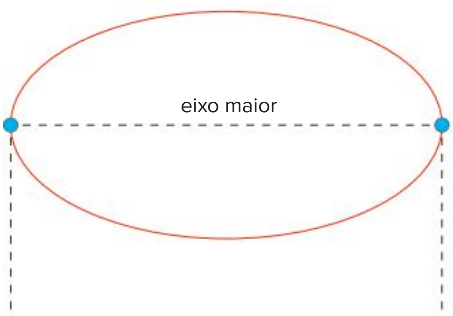

A figura acima ilustra a situação em que um cometa (C) percorre uma órbita elíptica de centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $xOy$. Nessa órbita elíptica, o Sol (S) aparece em um dos focos. Considere que a elipse seja representada pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em que $a > b > 0$, e tenha excentricidade igual a 0,96. Nesse caso, se a distância mínima desse cometa ao Sol for igual a 0,58 UA (unidade astronômica), em que 1 UA $= 150 \times 10^6$ km é a distância média da Terra ao Sol, então a distância máxima do cometa ao Sol, **em milhões de km**, será

**a)** inferior a 3 700.
**b)** superior a 3 700 e inferior a 4 000.
**c)** superior a 4 000 e inferior a 4 300.
**d)** superior a 4 300.

**5. Unesp 2018** A terceira Lei de Kepler sobre o movimento de planetas, aplicada a um certo sistema planetário, afirma que o período P da órbita elíptica de um planeta, em dias, está relacionado ao semieixo maior $\alpha$ da elipse, em milhões de quilômetros, pela fórmula $P = 0{,}199 \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$. Nos cálculos a seguir, considere 1 ano = 365 dias.

**a)** Sabendo que o período da órbita de um planeta é 1,99 ano, calcule o valor de $\alpha^{\frac{3}{2}}$.

**b)** Calcule o período P de um planeta desse sistema planetário cuja órbita elíptica está representada na figura a seguir.




**6. EsPCEx-SP 2014** Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

**a)** Seu centro é $(-2, 1)$.

**b)** A medida do seu eixo maior é 25.

**c)** A medida do seu eixo menor é 9.

**d)** A distância focal é 4.

**e)** Sua excentricidade é 0,8.

**7. ITA-SP 2021** Considere a curva plana definida pela equação $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$. O ponto $P = (0, 0)$ é vértice de um retângulo circunscrito à curva. Então a equação da circunferência circunscrita ao retângulo é:

**a)** $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

**b)** $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

**c)** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

**d)** $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

**e)** $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$

**8. IME-RJ 2014** Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semidistância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero ABCD é

**a)** 8

**b)** 16

**c)** $\frac{16}{3}$

**d)** $\frac{16}{5}$

**e)** $\frac{16}{7}$

**9. IME-RJ 2013** Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo $x$ positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo $y$, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo $x$, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

**a)** $49x^2 + 9y^2 - 280x + 120y - 441 = 0$

**b)** $49x^2 - 406x - 49y^2 + 441 = 0$

**c)** $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$

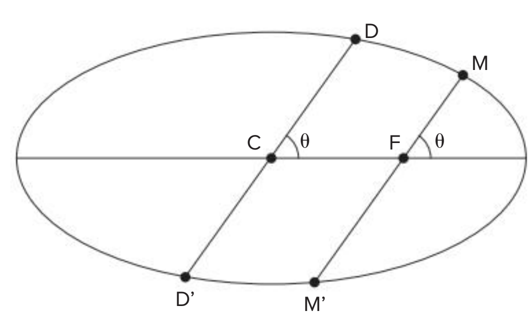
**d)** $9x^2 + 9y^2 + 120y - 441 = 0$

**e)** $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

**10.** Considere no plano $xOy$ a elipse de focos $F_1(-1, 1)$ e $F_2(1, -1)$ e semieixo maior igual a 2. Calcule a medida do outro semieixo da elipse e determine a interseção dela com a reta de equação $x = 1$.

**11. ITA-SP 2019** Seja F o foco da parábola de equação $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$, e sejam A e B os focos da elipse de equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

**12. IME-RJ 2018** Considere a elipse abaixo, onde $\overline{DD'}$ é uma corda passando pelo seu centro, $\overline{MM'}$ uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$.
Prove que: $(DD')^2 = MM' \cdot 2a$



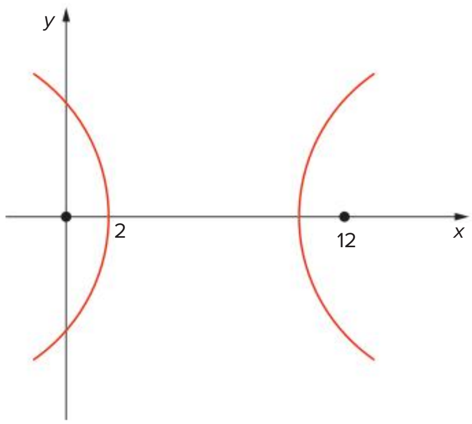

**13. IME-RJ** Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede $b$ e seu ângulo oposto $\hat{B} = 120°$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias às outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

FRENTE 3

**14.** Os trechos de duas estradas diferentes assumem uma forma hiperbólica que, representada em um determinado sistema de coordenadas, é tal que:

- o foco de um de seus ramos é a origem do sistema O(0, 0);
- o vértice desse ramo é o ponto (0, 2);
- o foco do outro ramo da hipérbole é o ponto (12, 0).

Veja a figura:




Determine:

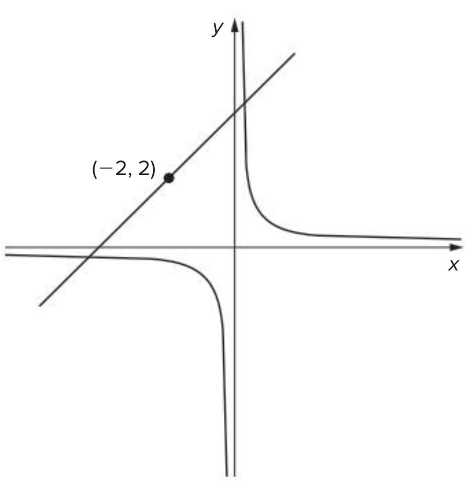
**a)** as coordenadas do outro vértice da hipérbole.

**b)** a medida do eixo imaginário da hipérbole.

**c)** a equação da hipérbole.

**d)** os pontos em que a hipérbole intercepta o eixo das ordenadas.

**15. PUC-Rio 2015** Considere a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$ mostrada na figura abaixo:




**a)** Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = x + 2$.

**b)** Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = -x - 2$.

**c)** Para quais valores do parâmetro real m a reta de equação $y - 2 = m(x + 2)$ intersecta a hipérbole em exatamente um ponto?

**16.** Considere a hipérbole de equação $2x^2 - y^2 = 2$ e a reta r de equação $3x - y + 5 = 0$. Determine as equações das retas que são paralelas à r e tangentes à hipérbole.

**17. IME-RJ 2019** Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

**a)** $xy = 2$

**b)** $x^2 + xy - y^2 = 4$

**c)** $x^2 - y^2 = 2$

**d)** $xy = -2$

**e)** $x^2 - y^2 = -2$

**18. IME-RJ** Uma reta, com coeficiente angular $a_1$, passa pelo ponto (0, −1). Uma outra reta, com coeficiente angular $a_2$, passa pelo ponto (0, 1). Sabe-se que $a_1^2 + a_2^2 = 2$. O lugar geométrico percorrido pelo ponto de interseção das duas retas é uma:

**a)** hipérbole de centro (0, 0) e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

**b)** circunferência de centro $(a_1, a_2)$ e raio $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

**c)** hipérbole de centro (0, 0) e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

**d)** elipse de centro (0, 0) e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

**e)** elipse de centro $(a_1, a_2)$ e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

**19. AFA-SP 2019** No plano cartesiano, os focos $F_1$ e $F_2$ da elipse $\alpha: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ são pontos diametralmente opostos da circunferência $\lambda$ e coincidem com as extremidades do eixo real de uma hipérbole equilátera $\beta$.

É INCORRETO afirmar que:

**a)** $\alpha \cap \beta \cap \lambda = \varnothing$

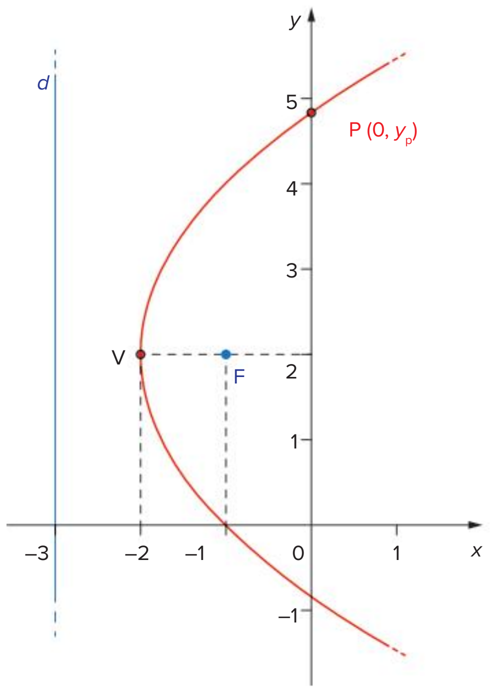
**b)** $\lambda \cap \beta = \{F_1, F_2\}$

**c)** $\alpha \cap \beta = \{A, B, C, D\}$, sendo A, B, C e D pontos distintos.

**d)** $\alpha \cap \lambda \neq \varnothing$

**20. IME-RJ 2021** Considere as retas que contêm o ponto C(3, 3) e interceptam os eixos coordenados x e y nos pontos A e B, respectivamente. O ponto P pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a sua distância do ponto A é a terça parte do comprimento do segmento $\overline{AB}$. Identifique o lugar geométrico do ponto P e escreva a sua equação.

**21. Unesp 2016** Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d, de equação $x = -3$, e um ponto F, de coordenadas $(-1, 2)$. Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta *d* forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V, de coordenadas $(-2, 2)$, e o ponto P, de coordenadas $(0, y_P)$.




Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P. Em seguida, calcule $y_P$.

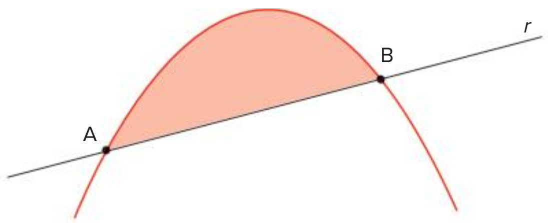
**22. Fuvest-SP 2014** Considere a circunferência $\lambda$ de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e a parábola $\alpha$ de equação $y = 4 - x^2$.

**a)** Determine os pontos pertencentes à interseção de $\lambda$ com $\alpha$.

**b)** Desenhe em um plano cartesiano a circunferência $\lambda$ e a parábola $\alpha$. Indique, no seu desenho, o conjunto dos pontos $(x, y)$ que satisfazem, simultaneamente, as inequações $x^2 + y^2 - 4y \leqslant 0$ e $y \geqslant 4 - x^2$.

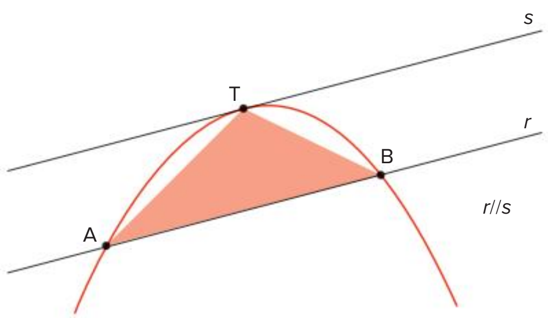
**23. ITA-SP 2020** Sejam *a* e *b* dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais *k* para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números *a* e *b*.

**24. Esc. Naval-RJ 2021** Um dos mais brilhantes trabalhos do matemático grego Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) foi a quadratura da parábola. Através do método da exaustão, Arquimedes calculou a área de um segmento parabólico (região compreendida entre a parábola e uma linha reta *r*), conforme a figura a abaixo.



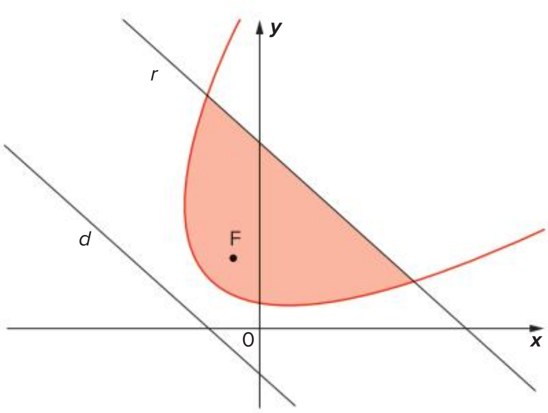

Segmento Parabólico (região hachurada)

Essa área do segmento parabólico equivale a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ABT seguinte, inscrito no segmento parabólico, sendo as retas *r* e *s* paralelas e T o ponto de tangência.




Seja *p* uma parábola com foco $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e reta diretriz $d: x + y + \sqrt{2} = 0$.

A parábola é seccionada pela reta $r: \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y - 8 = 0$, originando a região da figura abaixo.




Com bases nas informações apresentadas, é correto afirmar que a área da região hachurada é igual a

**a)** $\frac{52}{3}$.

**b)** $\frac{64}{3}$.

**c)** 24.

**d)** 30.

**e)** $\frac{128}{3}$.

**25.** **ITA-SP 2016** Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e P($a$, $b$) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se distância de P a S, $d$(P, S), como a menor das distâncias $d$(P, Q), com Q $\in$ S:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) | Q \in S\}$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ e } y \geqslant 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

**a)** Determine $d(P, S_1)$ quando P(1, 4) e $d(Q, S_1)$ quando Q(−3, 0).

**b)** Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de $S_1$ e de $S_2$.

**26.** **IME-RJ 2012** É dada uma parábola de parâmetro $p$. Traça-se a corda focal $\overline{MN}$, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda $\overline{MN}$ intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de $p$, sabendo que N encontra-se no interior do segmento $\overline{MR}$.

**27.** Resolva graficamente a inequação $|x| > 1$.

**28.** Resolva graficamente a inequação $|x - y| \leqslant 1$.

**29.** Resolva graficamente a inequação $|x + y| < 1$.

**30.** Determine graficamente os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a desigualdade:

$$|x| + y > 1$$

**31.** Determine graficamente os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a desigualdade:

$$|x| + |y| \leqslant 1$$

**32.** Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

$$y - 2 > 0 \text{ e } |x| \leqslant 1$$

**33.** Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

$$1 < |y| < 2 \text{ e } 1 < |x| < 3$$

**34.** Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação produto $(3x - y + 6)(2x + 4y - 12) < 0$.

**35.** Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação quociente

$$\frac{x + y - 1}{2x - y + 2} \geqslant 0.$$

**36.** Determine graficamente os pontos do plano cartesiano que são soluções do sistema $\begin{cases} \dfrac{x + y - 2}{x - y + 1} \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

**37.** **Fuvest-SP 2017** Um caminhão deve transportar, em uma única viagem, dois materiais diferentes, X e Y, cujos volumes em $m^3$ são denotados por $x$ e $y$, respectivamente. Sabe-se que todo o material transportado será vendido. A densidade desses materiais e o lucro por unidade de volume na venda de cada um deles são dados na tabela a seguir.

| Material | Densidade | Lucro |
|---|---|---|
| X | 125 kg/m³ | R$ 120,00/m³ |
| Y | 400 kg/m³ | R$ 240,00/m³ |

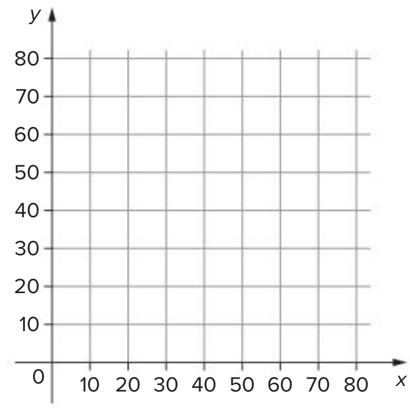
Para realizar esse transporte, as seguintes restrições são impostas:

**I.** o volume total máximo de material transportado deve ser de 50 $m^3$;

**II.** a massa total máxima de material transportado deve ser de 10 toneladas.

Considerando essas restrições:

**a)** esboce, no plano cartesiano preparado a seguir, a região correspondente aos pares $(x, y)$ de volumes dos materiais X e Y que podem ser transportados pelo caminhão;




**b)** supondo que a quantidade transportada do material Y seja exatamente 10 $m^3$, determine a quantidade de material X que deve ser transportada para que o lucro total seja máximo;

**c)** supondo que a quantidade total de material transportado seja de 36 $m^3$, determine o par $(x, y)$ que maximiza o lucro total.

**38. ITA-SP 2017** Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant ||x| - 1|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 1)^2 \leqslant 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

**a)** $\dfrac{25\pi}{4} - 2.$

**b)** $\dfrac{25\pi}{4} - 1.$

**c)** $\dfrac{25\pi}{4}.$

**d)** $\dfrac{75\pi}{4} - 1.$

**e)** $\dfrac{75\pi}{4} - 2.$

**39. FGV-SP 2016** No plano cartesiano, a área do polígono determinado pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \dfrac{-4x + 12}{3} \leqslant y \leqslant 2x + 4 \end{cases}$$

é igual a

**a)** 12.

**b)** 12,5.

**c)** 14.

**d)** 14,5.

**e)** 15.

**40.** Represente graficamente o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente as desigualdades:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4 \\ 1 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$

FRENTE 3

## BNCC em foco

EM13MAT101

**1.** Um satélite assume uma órbita elíptica em torno de um planeta. Em um plano cartesiano que contém a órbita desse satélite, é possível modelar essa órbita com a equação

$$144x^2 - 1440x + 169y^2 = 20\,736$$

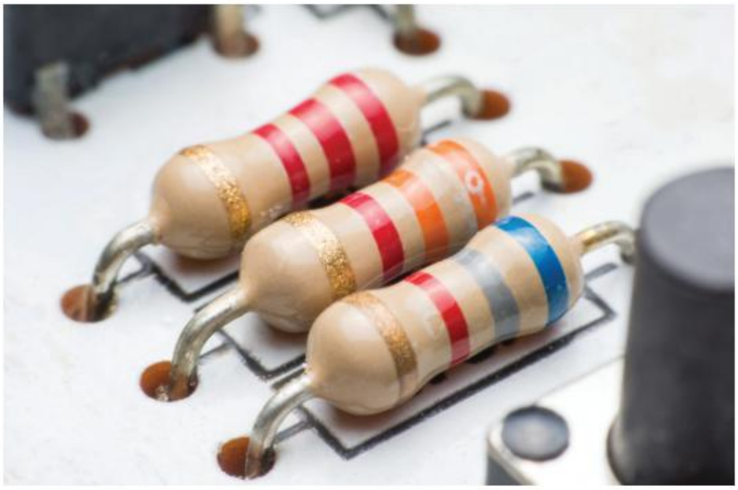
Nessa equação, cada unidade do plano cartesiano corresponde a 100 km, e o foco de menor abscissa corresponde à posição do planeta.

Nessas condições, a maior distância entre o satélite e o planeta, em km, é

**a)** 1 200 **b)** 1 400 **c)** 1 600 **d)** 1 800

EM13MAT101

**2.** A lei de Ohm expressa a relação entre a resistência R, em ohm, a tensão elétrica V, em volt, e a corrente I, em ampere, em um condutor ôhmico, pela equação $R = \frac{V}{I}$.



Natee Photo/Shutterstock.com

Resistores (também conhecidos como resistências) ôhmicos, quando parte de um circuito elétrico, estão sujeitos à lei de Ohm, e são usados nesses circuitos para reduzir a intensidade da corrente elétrica.

Mantendo a voltagem constante, a relação entre resistência e corrente, quando expressa no plano cartesiano, é representada por parte de

**a)** uma reta. **b)** uma parábola. **c)** uma hipérbole. **d)** uma elipse.

EM13MAT301

**3.** Considere o conjunto S dos pontos P(*x*, *y*) do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente as seguintes inequações:

$$4y \leqslant 3x + 12$$

$$y \leqslant -2x + 14$$

$$5y \geqslant -3x + 25$$

Os elementos de S com menor e maior abscissa são, respectivamente,

**a)** $\left(\frac{40}{9}, \frac{37}{9}\right)$ e $\left(\frac{45}{7}, \frac{8}{7}\right)$

**b)** $\left(\frac{40}{27}, \frac{37}{9}\right)$ e $\left(\frac{45}{7}, \frac{8}{7}\right)$

**c)** $\left(\frac{45}{27}, \frac{8}{9}\right)$ e $\left(\frac{40}{7}, \frac{37}{7}\right)$

**d)** $\left(\frac{45}{9}, \frac{37}{27}\right)$ e $\left(\frac{40}{7}, \frac{37}{7}\right)$


gustavofrazao/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

11

# Posições relativas no espaço

A Geometria é a área da Matemática que estuda formas, tamanhos e posições, como vimos nos capítulos sobre Geometria Plana Euclidiana e Geometria Analítica. Agora, conheceremos a Geometria Espacial.

Este capítulo é dedicado ao estudo das posições relativas entre as entidades geométricas no espaço. Assim, será apresentado um novo vocabulário visando complementar o que já foi estabelecido pela Geometria Plana, bem como alguns novos conceitos inerentes ao espaço tridimensional.

Sem esse vocabulário e esses conceitos, ficaria difícil definir os formatos das figuras sólidas ou compreender as expressões usadas para calcular as grandezas métricas próprias dessas figuras.

# Geometria Posicional

Por volta de 300 a.C., Euclides compilou tudo o que se conhecia da Geometria em livros chamados *Os elementos*. Essas obras apresentam a estrutura utilizada até hoje para construir as teorias de primeira ordem, os entes primitivos, que são uma série de afirmações denominadas **postulados de Euclides**. A partir deles, podemos deduzir as afirmações mais importantes da Geometria: os teoremas. Vamos conhecer esses postulados a seguir.

## Entes primitivos

Vimos que, em seus livros, Euclides apresentou o que chamamos hoje de entes primitivos, que são todos os entes de uma teoria que não têm definição. Na teoria dos conjuntos, por exemplo, não definimos o que são conjuntos e elementos nem a noção de inclusão – embora tenhamos uma boa ideia do que sejam. Na Geometria, por sua vez, há três entes primitivos: o ponto, a reta e o plano.

O **ponto** é uma figura geométrica sem dimensões, ou seja, não tem comprimento, largura e altura. Geralmente, os pontos são representados pela interseção entre duas linhas.

A **reta** é uma figura geométrica que possui uma única dimensão e, embora não tenha definição, pode ser entendida como o conjunto de todos os infinitos pontos que estão alinhados em uma mesma direção. É importante notar que, ao representar uma reta, indicamos apenas um pedaço finito dela, denominado segmento de reta. Este pode ser estendido nos dois sentidos, fazendo com que a reta seja “infinita” em seu comprimento.

O **plano** é uma figura geométrica que possui apenas duas dimensões e pode ser entendido como uma superfície lisa e infinita em todas as direções contidas nela. Desse modo, ele é representado por um pedaço dessa superfície lisa.

**! Atenção**

A norma da notação geométrica para os entes primitivos obedece às seguintes convenções:

- Letras maiúsculas para pontos: A, B, C, P, Q, ...
- Letras minúsculas para retas: *r*, *s*, *t*, ...
- Letras gregas para planos: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...

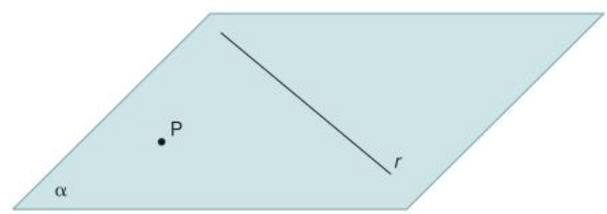
# Os postulados de Euclides

Para construir uma teoria, depois dos entes primitivos, é necessário revelar os postulados, que são afirmações sobre os entes consideradas verdadeiras sem a necessidade de demonstração.

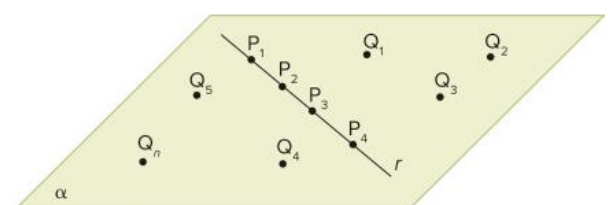
Euclides apresentou seus postulados para a Geometria em *Os elementos*, mas foi em 1759, em um trabalho sobre Geometria Euclidiana, que o matemático escocês John Playfair publicou os postulados como são conhecidos atualmente. A seguir, vamos separá-los em quatro categorias: existência, determinação, divisão e inclusão.

## Postulados da existência

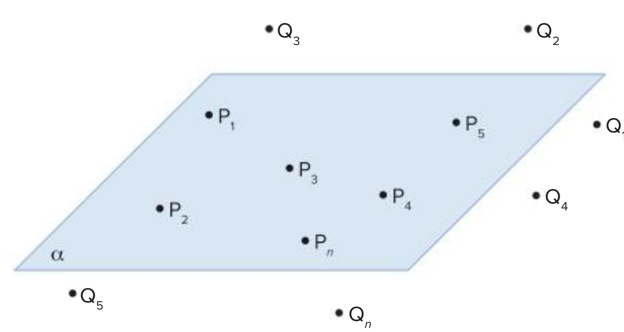
1. Existem ponto, reta e plano.




2. Em uma reta e fora dela, existem infinitos pontos.

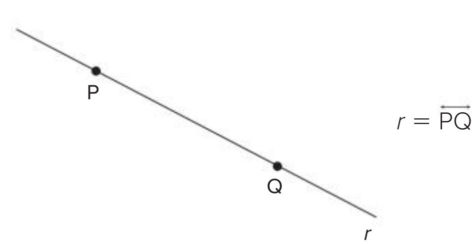



3. Em um plano e fora dele, existem infinitos pontos.



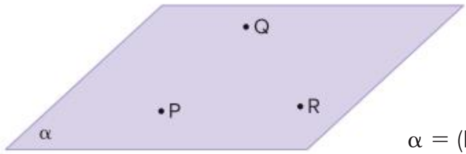

## Postulados da determinação

1. Dois pontos distintos determinam uma reta.




Devido a esse postulado, é possível dar nome às retas. Por exemplo, se uma reta passa por dois pontos distintos P e Q, podemos chamá-la de $\overleftrightarrow{PQ}$.

2. Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.




$\alpha = (PQR)$

Devido a esse postulado, é possível dar nome aos planos. Por exemplo, se um plano contém três pontos distintos e não colineares P, Q e R, podemos chamá-lo de (PQR).

## Exercícios resolvidos

1. **Unicamp-SP** É comum encontrarmos mesas com quatro pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firmes. Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

   **Resolução:**

   Isso não acontece com uma mesa de três pernas porque três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, o tampo da mesa fica apoiado em três pontos e, portanto, mantém-se em um único plano. Já as mesas com quatro pernas têm seus tampos apoiados em quatro pontos, que podem determinar até seis planos distintos. Desse modo, o tampo pode ficar variando entre dois desses planos.

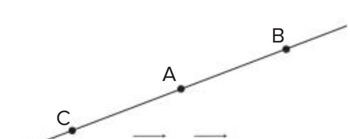
2. **FEI-SP** Assinale a alternativa **falsa**:
   **a)** Dados dois pontos distintos A e B, existe um plano que os contém.
   **b)** Por um ponto fora de uma reta existe uma única paralela à reta dada.
   **c)** Existe um e um só plano que contém um triângulo dado.
   **d)** Duas retas não coplanares são reversas.
   **e)** Três pontos distintos determinam um e um só plano.

   **Resolução:**

   Três pontos distintos podem ser colineares; nesse caso, eles não determinam um plano, e sim uma reta que pode estar contida em "infinitos" planos.
   Alternativa: E

## Postulados da divisão

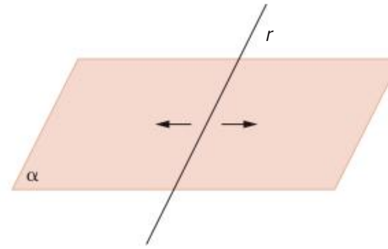
1. Todo ponto de uma reta divide-a em duas figuras congruentes chamadas semirretas.




$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas.

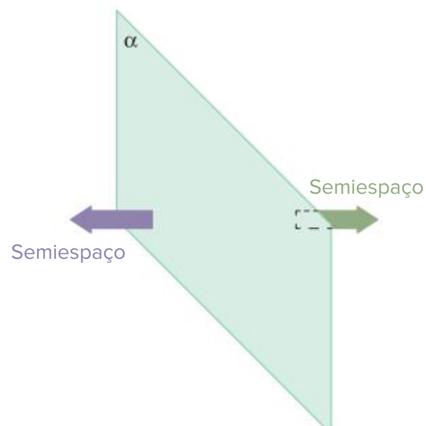
Note que a posição do ponto A na reta não interfere na congruência das semirretas determinadas em função da infinitude de suas extensões.

2. Toda reta de um plano divide-o em duas figuras congruentes chamadas semiplanos.




Note que a posição da reta *r* no plano não interfere na congruência dos semiplanos determinados em função da infinitude de suas extensões.

3. Todo plano divide o espaço em dois semiespaços congruentes.

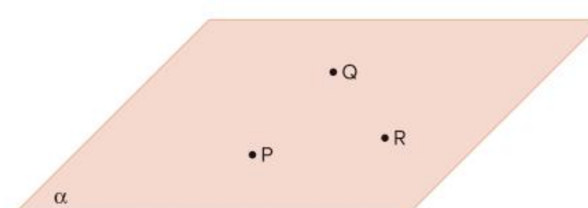



## Postulado da inclusão

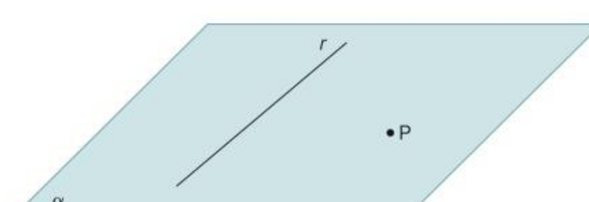
Se dois pontos distintos de uma reta pertencerem a um mesmo plano, então essa reta estará contida nesse plano.

### Determinação de plano

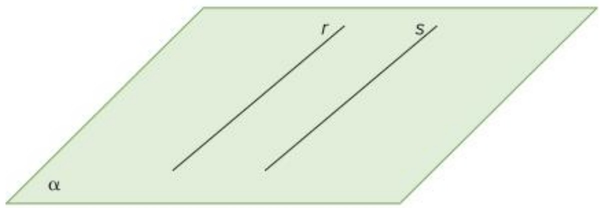
- Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.



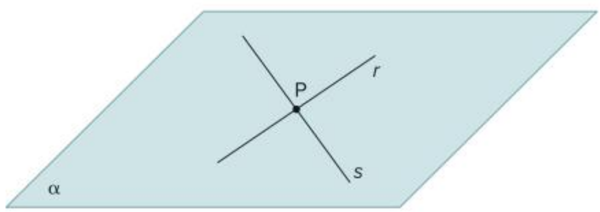

- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.



- Duas retas paralelas determinam um plano.

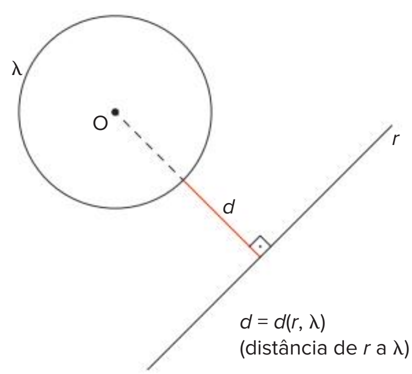



- Duas retas concorrentes também determinam um plano.



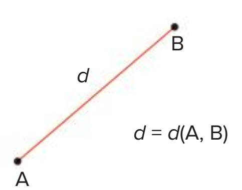

## Distâncias

A palavra “distância” geralmente é usada para representar o comprimento de caminhos necessários para ir de um lugar a outro. Na geometria métrica, porém, há uma definição mais precisa: a distância entre duas figuras geométricas é o comprimento do menor segmento de reta que tenha uma extremidade em cada figura.

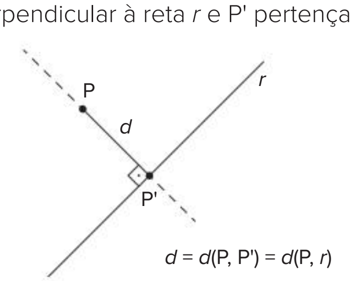



Assim:

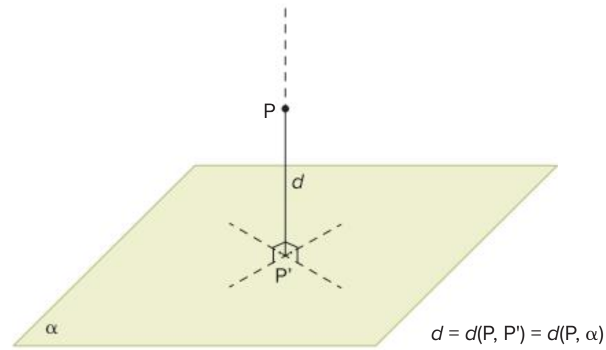
- A distância entre dois pontos A e B é igual ao comprimento do segmento de reta que une esses pontos.




- A distância de um ponto P a uma reta *r* é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{PP'}$, de modo que $\overline{PP'}$ seja perpendicular à reta *r* e P' pertença à reta *r*.




- A distância de um ponto P a um plano $\alpha$ é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{PP'}$, de modo que $\overline{PP'}$ seja perpendicular ao plano $\alpha$ e P' pertença ao plano $\alpha$.




## Posições relativas entre duas retas

No espaço, duas retas podem, a princípio, ser **coplanares** ou **não coplanares**. Quando são coplanares, recebem o nome de **paralelas** ou **concorrentes**. Elas são paralelas quando determinam uma mesma direção, podendo ser **distintas** ou **coincidentes**.

Retas paralelas são distintas quando não têm pontos em comum, ou seja, quando a interseção entre elas é vazia, e coincidentes quando possuem todos os seus pontos em comum.

Retas concorrentes são denominadas perpendiculares quando formam ângulos de 90° e oblíquas quando determinam um par de ângulos agudos e outro de ângulos obtusos.

Quando duas retas são não coplanares, dizemos que se trata de um par de retas **reversas**. Assim, duas retas serão reversas se, e somente se, não houver plano que as contenha.

A interseção entre duas retas reversas também é um conjunto vazio, portanto elas não têm pontos em comum e não são paralelas.

As retas reversas são denominadas **ortogonais** quando têm inclinação relativa de 90° e **oblíquas** quando possuem inclinação relativa diferente de 90°.

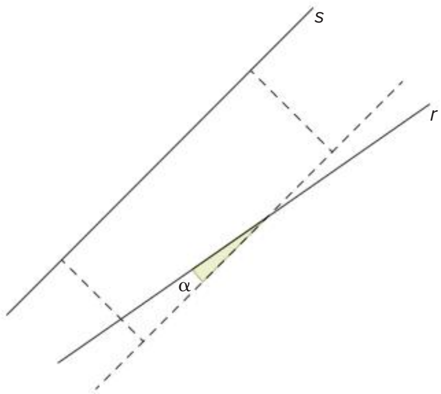
Resumindo, duas retas podem ser:

- Coplanares
  - Paralelas
    - Coincidentes
    - Distintas
  - Concorrentes
    - Oblíquas
    - Perpendiculares
- Reversas
  - Oblíquas
  - Ortogonais

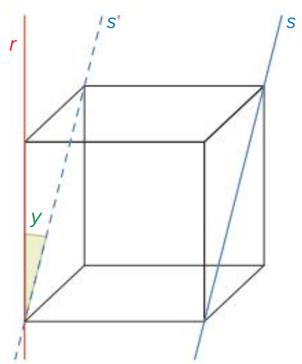
## Ângulo entre duas retas reversas

Sabemos que duas retas reversas não se interceptam e também não são paralelas. Desse modo, os ângulos formados por elas não são geométricos, e sim aparentes, pois não têm vértice. Mesmo assim, precisamos interpretar a inclinação relativa entre essas retas.

Então, vamos definir o ângulo entre duas retas reversas *r* e *s* como o ângulo plano formado entre *r* e uma terceira reta paralela à *s* e concorrente à *r*.



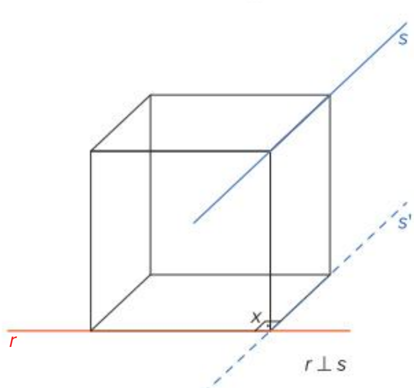

Observe este exemplo no cubo:




O ângulo *y* representa o ângulo entre as retas *r* e *s*. Note que, para representá-lo, traçamos uma reta paralela à *s* e concorrente à *r*, a reta *s*'.

**! Atenção**

Quando duas retas reversas têm ângulo de inclinação de 90°, elas são denominadas **ortogonais**.




## Posições relativas entre uma reta e um plano

No espaço, uma reta e um plano podem, a princípio, assumir três posições relativas diferentes.

A reta está contida no plano quando todos os pontos dela também pertencem ao plano. Vale lembrar que, de acordo com o postulado da inclusão, para garantir que uma reta esteja contida em um plano, basta encontrar nela dois pontos distintos que também pertençam ao plano.

A reta é paralela ao plano quando nenhum dos pontos dela pertence ao plano. Nesse caso, todos os pontos da reta estão a uma mesma distância *d* do plano. Assim, existe um valor $d > 0$ que exprime a distância entre o plano e a reta paralela a ele.

Além desses casos, a reta pode ser concorrente (ou secante) ao plano. Isso ocorre quando há apenas um ponto dela que pertence ao plano. Esse ponto comum a ambos é denominado **traço da reta no plano**.

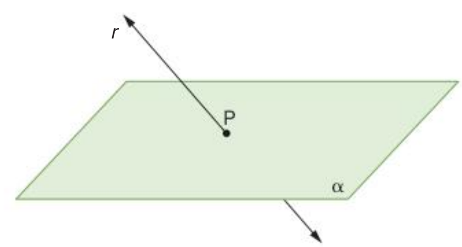
Quando uma reta é concorrente a um plano, ela tem uma inclinação relativa a ele que pode ou não ser igual a 90°. Se for igual, dizemos que a reta é perpendicular ao plano; se for diferente, dizemos que é oblíqua ao plano.

Resumindo, em relação a um plano, uma reta pode ser:

- Contida
- Paralela
- Secante
  - Oblíqua
  - Perpendicular

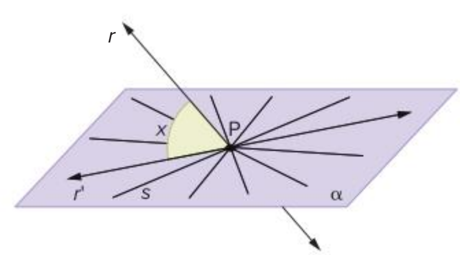
## Ângulo entre uma reta e um plano

Agora, vamos medir o ângulo formado por um plano e uma reta secante a ele.




Vamos representar o ângulo entre a reta e o plano com vértice no ponto de interseção entre essas figuras. Porém, como existem "infinitos" ângulos que podemos tomar entre a reta e o plano com esse vértice, utilizaremos o menor ângulo possível.

Note que o menor ângulo ocorrerá entre a reta e sua projeção ortogonal no plano.



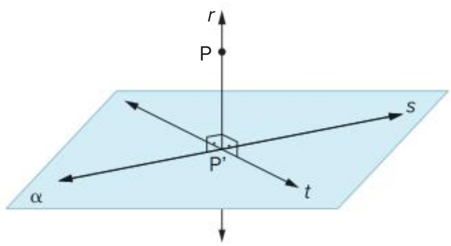

Dizemos que uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, ela for perpendicular a toda reta do plano que passa pelo seu traço e ortogonal a todas as outras retas contidas nele.

Existem alguns teoremas que tratam dessa perpendicularidade e podem auxiliar na resolução de problemas.

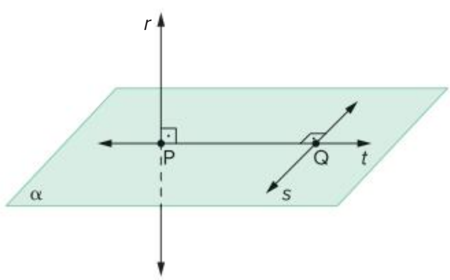
## Teorema fundamental da perpendicularidade

> Uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, formar ângulos retos com duas retas concorrentes contidas nesse plano.

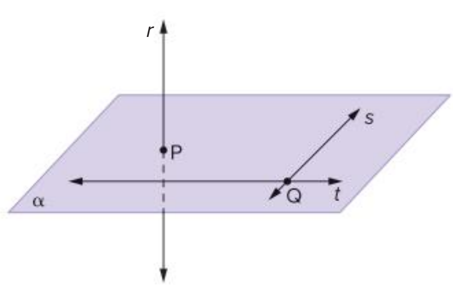
Veja as três situações possíveis:




Se uma reta *r* for perpendicular a duas retas concorrentes *s* e *t* de um mesmo plano, então *r* será, necessariamente, perpendicular ao plano.

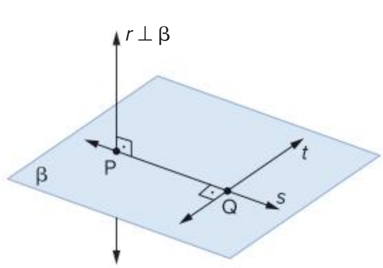



Se uma reta *r* for perpendicular a uma reta *t* de um plano e ortogonal a outra reta *s* desse mesmo plano, então *r* será perpendicular ao plano.

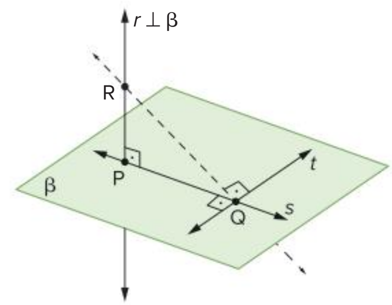



Se uma reta *r* for ortogonal a duas retas concorrentes *r* e *s* de um mesmo plano, então *r* também será perpendicular ao plano.

## Teorema das três perpendiculares




Sejam um plano β, uma reta *r* perpendicular a β no ponto P, uma reta *s* contida em β passando por P e uma reta *t* perpendicular à *s* por um ponto Q distinto de P. Nessas condições, se tomarmos um ponto R de *r*, $\overleftrightarrow{RQ}$ será perpendicular à *t*.




Para demonstrar esse teorema, considere que α seja o plano determinado pelos pontos P, Q e R e que ele contenha, portanto, as retas *r*, *s* e $\overleftrightarrow{RQ}$.

Como a reta *t* é perpendicular à *s* e ortogonal à *r*, podemos afirmar que ela é, necessariamente, perpendicular ao plano α. Assim, a reta *r* deve formar um ângulo reto com qualquer reta contida em α.

Então, como a reta $\overleftrightarrow{RQ}$ é concorrente à *t* e está contida em α, concluímos que as retas *t* e $\overleftrightarrow{RQ}$ são perpendiculares entre si.

**Saiba mais**

Com relação à perpendicularidade entre uma reta e um plano, há outros teoremas que podem ser úteis na resolução dos exercícios que serão apresentados nos próximos capítulos. São eles:

a) Se uma reta *r* for perpendicular a um plano α, então essa reta também deverá ser perpendicular a todas as retas de α que passem pelo traço de *r* em α.

b) Se uma reta *r* for perpendicular a um plano α, então essa reta também deverá ser ortogonal a todas as retas de α que não passem pelo traço de *r* em α.

c) Se uma reta *r* for perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de *r* no plano α deverá coincidir com o ponto que representa o traço de *r* em α.

## Posições relativas entre dois planos

Dois planos no espaço podem ser considerados paralelos ou concorrentes – esses últimos também são chamados de secantes.

Quando são paralelos, a distância entre eles é indicada por um valor $d \geqslant 0$, tal que:

**a)** Se $d \neq 0$, então os planos paralelos também são coincidentes.

**b)** Se $d > 0$, então os planos paralelos são distintos.

Planos coincidentes têm todos os seus pontos em comum e também podem ser chamados de planos iguais. Já os planos paralelos distintos não possuem nenhum ponto em comum, ou seja, a interseção entre eles é o conjunto vazio.

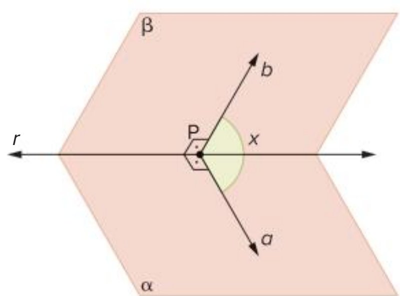
O conjunto dos pontos de interseção entre dois planos secantes tem a forma de uma reta, que também é denominada traço de um plano no outro. Assim, se $\alpha \cap \beta = r$, então $r$ é o traço de $\alpha$ em $\beta$ e vice-versa.

Resumindo, dois planos podem ser:

- Paralelos
  - Coincidentes
  - Distintos
- Secantes
  - Oblíquos
  - Perpendiculares

## Diedros

Chamamos **diedro** a figura formada por dois semiplanos com origem em uma mesma reta. Esses semiplanos são denominados **faces do diedro**, e a reta é chamada de **aresta do diedro**.



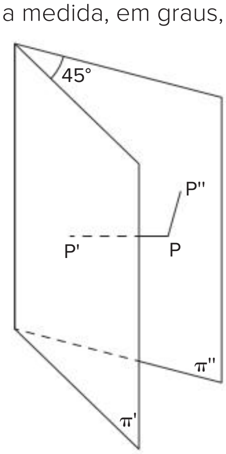

Na figura, $x$ é a medida do ângulo diedro de aresta $r$:

$$x = \text{med}(\alpha\hat{r}\beta)$$

O ângulo diedro deve ser medido tomando-se duas retas concorrentes, uma em cada face do diedro, de modo que ambas sejam perpendiculares à aresta do diedro.

### Exercício resolvido

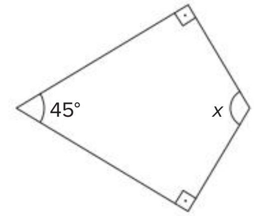
**3. Fuvest-SP** Sejam $\pi'$ e $\pi''$ as faces de um ângulo diedro de 45° e P um ponto interior a esse diedro. Sejam P' e P'' as respectivas projeções ortogonais de P sobre $\pi'$ e $\pi''$. Então a medida, em graus, do ângulo $P'\hat{P}P''$ é:




**a)** 30 **b)** 45 **c)** 60 **d)** 90 **e)** 135

**Resolução:**

Podemos fazer um corte na figura e obter o quadrilátero a seguir:



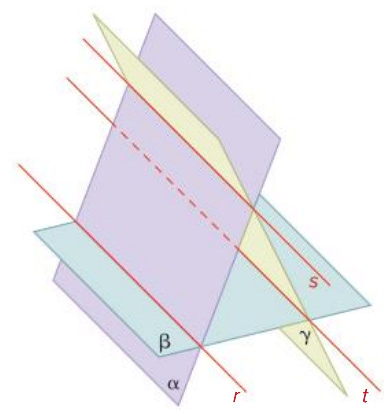

Assim, concluímos que $x + 45° \neq 180°$, logo $x \neq 135°$.

Alternativa: E

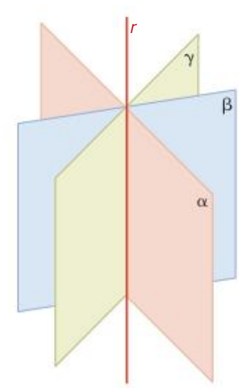
## Triedros

Se tomarmos três planos distintos que se intersetam dois a dois, teremos três situações distintas:

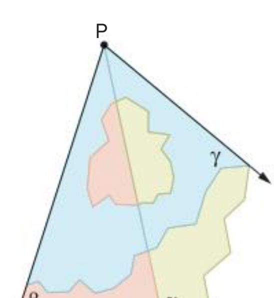
**a)** As três retas serão paralelas.




**b)** As três retas coincidirão.




**c)** As três retas se intersetarão em um único ponto.

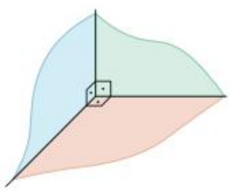


A figura formada no terceiro caso é chamada de **triedro**.

Os triedros são superfícies poliédricas abertas dotadas de:

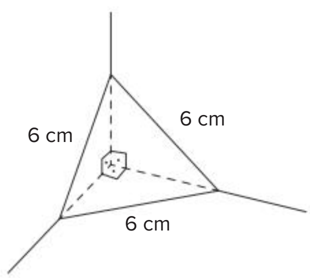
- 1 vértice, que, na figura anterior é o ponto P;
- 3 arestas, que são as retas nas quais os planos se intersetam;
- 3 faces em forma de ângulos geométricos, respectivamente contidas nos planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.

O triedro trirretângulo é o mais comum, pois forma três ângulos retos nas faces.



## Exercício resolvido

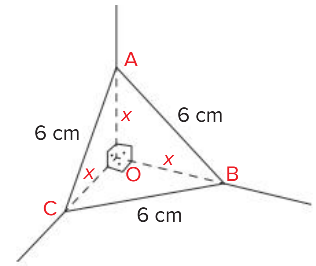
**4.** Um arquiteto resolveu esconder as quinas de um cômodo, como mostra a figura a seguir:




Determine a distância entre o vértice do triedro e cada um dos vértices do triângulo equilátero que surgiu na quina do cômodo.

**Resolução:**

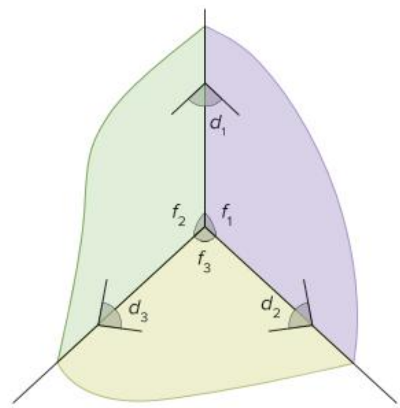
Em primeiro lugar, devemos notar que aparecem três triângulos (OAB, OAC e OBC), retângulos e congruentes pelo caso cateto-hipotenusa, o que nos leva a concluir que cada um deles é isósceles.




Chamando de $x$ cada uma das arestas pedidas, temos:

$$6^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Não é possível construir um triedro com quaisquer medidas angulares. Veja a figura:




Os ângulos $f_1$, $f_2$ e $f_3$ são chamados de faces do triedro.

Assim, temos: $\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases}$.

Além disso, $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$.

Os ângulos $d_1$, $d_2$ e $d_3$ são os **ângulos diédricos**. Assim, temos: $\begin{cases} d_1 + 180° < d_2 + d_3 \\ d_2 + 180° < d_1 + d_3 \\ d_3 + 180° < d_1 + d_2 \end{cases}$.

Além disso, $180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$.

## Revisando

**1.** A respeito do número de dimensões dos entes primitivos, responda:

**a)** Quantas dimensões tem um único ponto?

**b)** Quantas dimensões tem uma reta?

**c)** Quantas dimensões tem um plano?

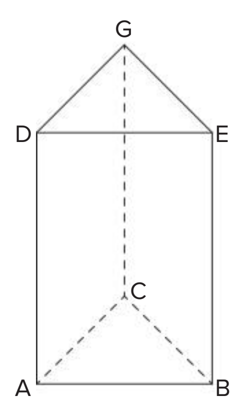
**d)** Quantas dimensões tem o espaço geométrico?

2. **FEI-SP** Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:
a) duas retas distintas.
b) uma reta e um ponto.
c) três pontos distintos.
d) duas retas concorrentes.
e) duas retas reversas.

3. **ITA-SP** Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta determinam um plano.
c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então é paralela a qualquer reta deste plano.
e) Se $\alpha$ é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano, que é paralela à r, não será paralela à reta s.

4. **Mackenzie-SP** A reta *r* é paralela ao plano $\alpha$. Então:
a) Todas as retas de $\alpha$ são paralelas a *r*.
b) A reta *r* não pode ser coplanar com nenhuma reta de $\alpha$.
c) Existem em $\alpha$ retas paralelas a *r* e também existem em $\alpha$ retas reversas a *r*.
d) Existem em $\alpha$ retas paralelas a *r* e também retas perpendiculares a *r*.
e) Todo plano que contém *r* é paralelo a $\alpha$.

5. **Fuvest-SP** Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice

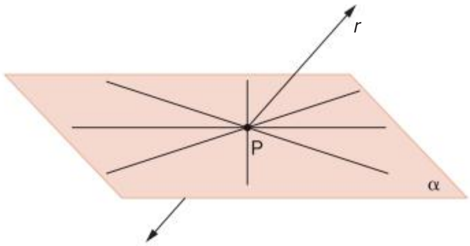



a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

FRENTE 3

6. Quais são as possíveis posições relativas entre dois planos $\alpha$ e $\beta$ do espaço? Liste todas elas e determine, em cada caso, a forma da figura que resulta da interseção entre $\alpha$ e $\beta$, se houver.

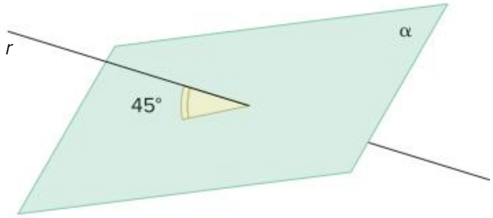
7. A figura a seguir apresenta uma reta *r* que intercepta um plano $\alpha$ em um ponto P:




Para se ter certeza de que *r* é perpendicular ao plano $\alpha$, o número mínimo de retas contidas em $\alpha$ passando pelo ponto P que se deve verificar é:

**a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

8. Uma agulha representada pela reta *r* perfura um tecido esticado representado pelo plano $\alpha$, formando um ângulo de 45°, como ilustra a figura:

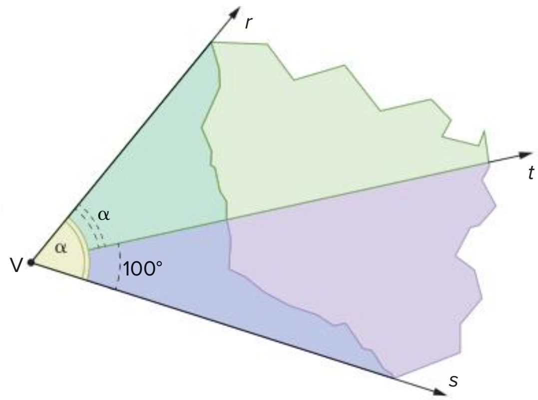



Nessas condições, é correto afirmar que nenhuma semirreta do plano $\alpha$ é capaz de determinar, com a reta *r*, um ângulo de:

**a)** 60° **b)** 90° **c)** 120° **d)** 135° **e)** 150°

**9.** Dois ângulos das faces de um triedro medem 140° e 160°. Determine o intervalo de variação do ângulo da terceira face.

**10.** A figura a seguir apresenta um triedro **V**$rst$ em que duas das faces têm medida angular $\alpha$ e a terceira face mede 100°.



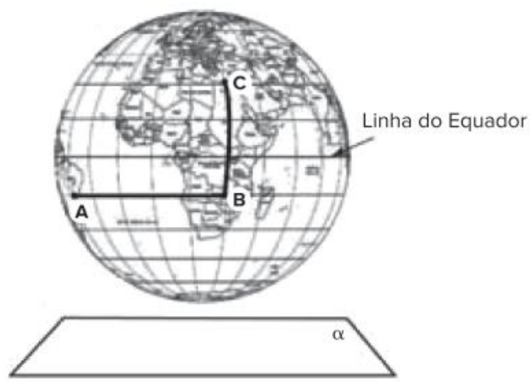

Nessas condições, a medida angular $\alpha$ é tal que:

**a)** $\alpha < 50°$
**b)** $50° < \alpha < 100°$
**c)** $50° < \alpha < 130°$
**d)** $100° < \alpha < 130°$
**e)** $\alpha > 130°$

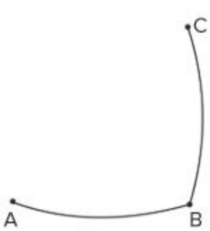
FRENTE 3

## Exercícios propostos

1. **Enem 2016** A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B, e o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C.
Considere que o plano $\alpha$ é paralelo à linha do equador na figura.




A projeção ortogonal, no plano $\alpha$, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a) 

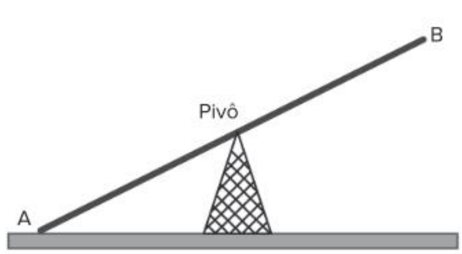

b) 


c) 


d) 


e) 


2. **Enem 2013** Gangorra é um brinquedo que consiste em uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:




A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 


b) 

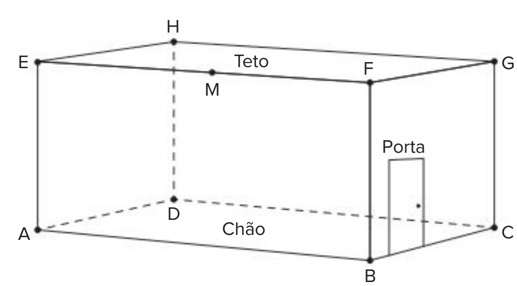

c) 


d) 


e) 

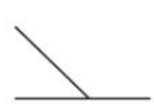

3. **EsPCEx-SP 2017** Considere dois planos $\alpha$ e $\beta$ perpendiculares e três retas distintas $r$, $s$ e $t$ tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t \neq \alpha \cap \beta$.
Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que
   a) as retas $r$ e $s$ somente definirão um plano se forem concorrentes com $t$ em um único ponto.
   b) as retas $r$ e $s$ podem definir um plano paralelo à reta $t$.
   c) as retas $r$ e $s$ são necessariamente concorrentes.
   d) se $r$ e $s$ forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a $\alpha$ e $\beta$.
   e) o plano definido por $r$ e $t$ é necessariamente paralelo a $s$.

4. **Enem 2017** Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



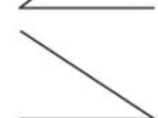

A lagartixa parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento **EF**. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto **M** até o ponto **H**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

**5. Enem 2016** Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 1

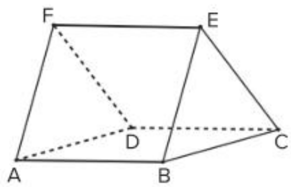


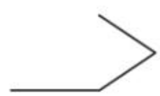

Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos.
A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

**6. UFJF-MG 2015** Sejam $r$ uma reta e $\beta_1$ e $\beta_2$ dois planos no espaço, considere as seguintes afirmações:

**I.** Se $r \cap \beta_1 \neq \{P_1\}$ e $r \cap \beta_2 \neq \{P_2\}$, com $P_1$ e $P_2$ pontos distintos, então $\beta_1$ é paralelo a $\beta_2$.
**II.** Se $r \cap \beta_1 \neq \varnothing$ e $r \cap \beta_2 \neq \varnothing$, então $\beta_1$ é paralelo a $\beta_2$ ou $\beta_1$ é coincidente de $\beta_2$.
**III.** Se existem dois pontos distintos em $r \cap \beta_1$, então $r \cap \beta_1 \neq r$.

É **CORRETO** afirmar que:
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Apenas I e II são verdadeiras.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

**7. UEM-PR 2019** Assinale o que for correto.
**01** Dois planos que têm 3 pontos distintos em comum coincidem.
**02** Quaisquer 4 pontos distintos e não colineares sempre determinam dois planos distintos que se interceptam.
**04** Retas reversas nunca são coplanares.
**08** Se dois planos distintos $\alpha$ e $\beta$ são paralelos, então existe uma reta de $\alpha$ que intercepta $\beta$.
**16** Se uma reta $r$ é perpendicular a um plano, então essa reta forma um ângulo de 90° com todas as retas contidas nesse plano e que interceptam $r$.

Soma:

**8. EsPCEx-SP 2013** Considere as seguintes afirmações:
**I.** Se uma reta $r$ é perpendicular a um plano $\alpha$, então todas as retas de $\alpha$ são perpendiculares ou ortogonais a $r$;
**II.** Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano $\alpha$ é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com $\alpha$ um ângulo de 60°;
**III.** Dados dois planos paralelos $\alpha$ e $\beta$, se um terceiro plano $\gamma$ intercepta $\alpha$ e $\beta$, as interseções entre esses planos serão retas reversas;
**IV.** Se $\alpha$ e $\beta$ são dois planos secantes, todas as retas de $\alpha$ também interceptam $\beta$.

Estão corretas as afirmações
a) apenas I e II
b) apenas II e III
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

**9. ITA-SP 2021** Considere as seguintes afirmações:
**I.** Se a medida do ângulo agudo entre uma reta $r$ e um plano $\alpha$ é 45°, então existe uma reta $s$ contida em $\alpha$ tal que a medida do ângulo agudo entre $r$ e $s$ é 30°.
**II.** Se uma reta $r$ é perpendicular a duas retas distintas $s$ e $t$ contidas em um plano $\alpha$, então $r$ é perpendicular a $\alpha$.
**III.** Sejam $r$, $s$ e $t$ as três retas distintas determinadas por três pontos não colineares. Então, existe um único ponto equidistante de $r$, $s$ e $t$.
**IV.** Se P e Q são pontos à mesma distância de um plano $\alpha$, então o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ pertence a $\alpha$.

É(são) VERDADEIRA(S):
a) nenhuma.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas III e IV.
e) apenas II, III e IV.

**10. EsPCEx-SP** Considere as seguintes afirmações:
**I.** Se dois planos $\alpha$ e $\beta$ são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.
**II.** Se $\alpha$ e $\beta$ são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que $r_1$ e $r_2$ são paralelas.
**III.** Se uma reta $r$ é perpendicular a um plano $\alpha$ no ponto P, então qualquer reta de $\alpha$ que passa por P é perpendicular a $r$.

Dentre as afirmações acima, é(são) verdadeira(s)
a) Somente II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) I, II e III

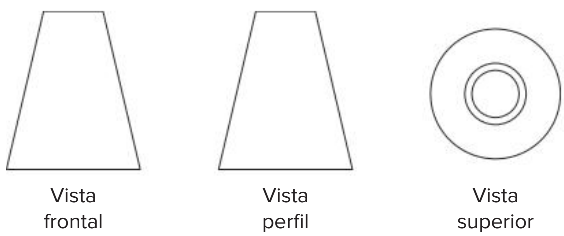
**11. EsPCEx-SP** Considere um plano $\alpha$ e os pontos A, B, C e D tais que

- O segmento $\overline{AB}$ tem 6 cm de comprimento e está contido em $\alpha$.
- O segmento $\overline{BC}$ tem 24 cm de comprimento, está contido em $\alpha$ e é perpendicular a AB.
- O segmento $\overline{AD}$ tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a $\alpha$.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{CD}$ é

a) 26 cm
b) 28 cm
c) 30 cm
d) 32 cm
e) 34 cm

**12. Enem PPL 2020** No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois.
A figura representa as vistas de uma torre.




Disponível em: www.uems.br. Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre?

a) 

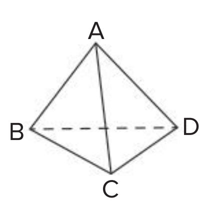
b) 

c) 

d) 

e) 

**13. Unifesp** Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é



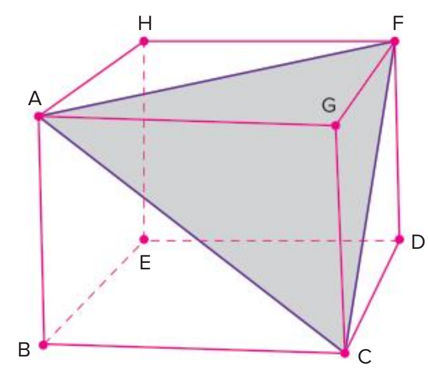

a) 6.
b) 3.
c) 2.
d) 1.
e) 0.

**14. UFSCar-SP** Considere um plano $\alpha$ e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a $\alpha$, a interseção dessa reta com $\alpha$ é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre $\alpha$. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre $\alpha$ é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano $\alpha$ qualquer fixado, pode-se dizer que:

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

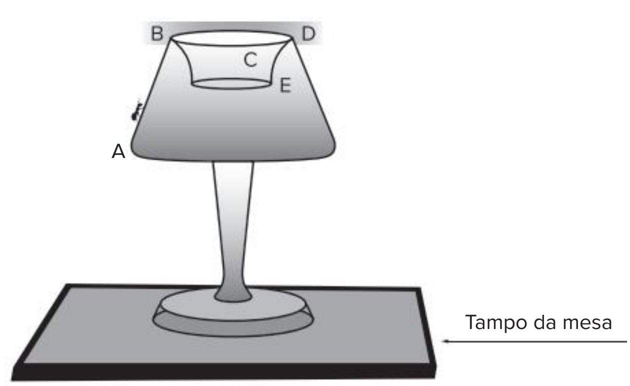
**15. Uerj 2020** A imagem a seguir representa um cubo com aresta de 2 cm. Nele, destaca-se o triângulo AFC.



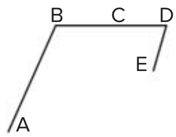

A projeção ortogonal do triângulo AFC no plano da base BCDE do cubo é um triângulo de área *y*. O valor de *y*, em $cm^2$, é igual a:

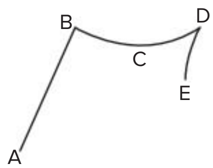
a) 1
b) $\frac{3}{2}$
c) 2
d) $\frac{5}{2}$

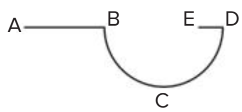
**16. Enem PPL 2020** Uma formiga move-se sobre um castiçal de vidro transparente, do ponto A para B em linha reta, percorre o arco circular BCD, sendo C localizado na parte da frente do castiçal, e desce o arco DE, como representado na figura.



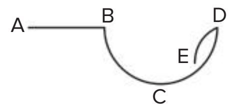

Os pontos A, B, D e E estão sobre um mesmo plano perpendicular à mesa sobre a qual se encontra o castiçal. A projeção ortogonal, sobre o plano da mesa, do trajeto percorrido pela formiga, do ponto A até o ponto E, é melhor representada por

a) 

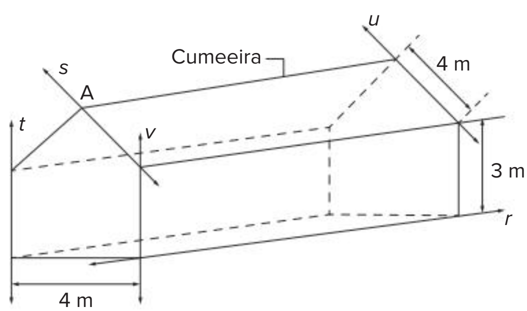

b) 


c) 


d) 


e) 

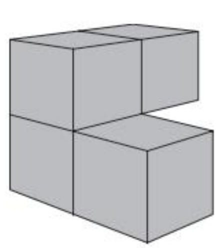

**17.** **Faap-SP** O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.




Das retas assinaladas podemos afirmar que:

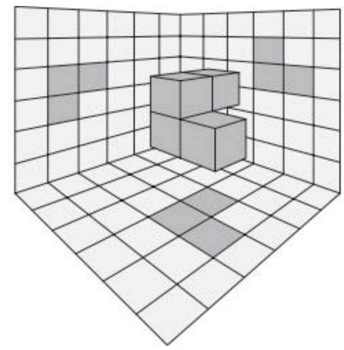
**a)** *t* e *u* são reversas
**b)** *s* e *u* são reversas
**c)** *t* e *u* são concorrentes
**d)** *s* e *r* são concorrentes
**e)** *t* e *u* são perpendiculares

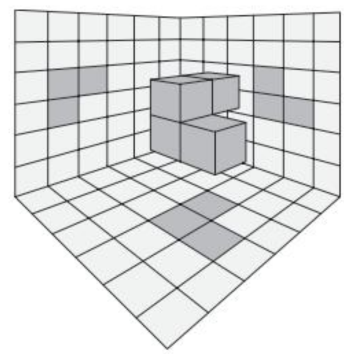
**18.** **Enem 2020** Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

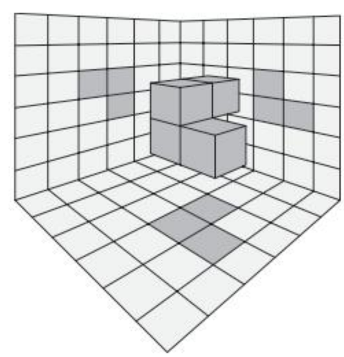


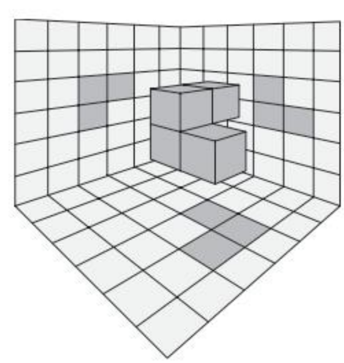
Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

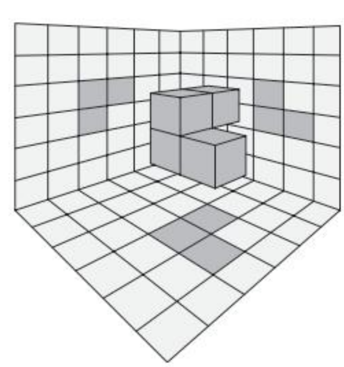
A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é

**a)** 

**b)** 

**c)** 

**d)** 

**e)** 

## Texto complementar

### O que um ser de quatro dimensões veria ao olhar para você

Ele veria todo o seu corpo, a parte de trás e da frente. E também seus órgãos internos. Tudo ao mesmo tempo.

Apesar de jamais podermos de fato visualizar a quarta dimensão, podemos entender a lógica por trás da progressão de dimensões, e tentar assimilar a possibilidade de alguém conseguir ver o interior de outra pessoa. Tudo pelo puro exercício de visualização matemática.

Vivemos em um mundo de três dimensões: altura, largura e profundidade. Tem gente que diz que o tempo é a quarta dimensão, e viveríamos em um mundo de três dimensões + tempo, e outras pessoas dizem que o tempo seria como uma camada 3D de uma quarta dimensão espacial mesmo. Mas esse post fala das três dimensões espaciais com as quais lidamos diariamente.

Para começar, como de costume, quando se fala de dimensões mais altas, é preciso usar analogias, porque dimensões mais altas são inacessíveis para nós e só conseguimos imaginá-las assim – percebendo o que as nossas três dimensões têm em comum, e como poderíamos aplicar essas características a uma próxima dimensão.

Primeiro vamos imaginar que também existem mundos de 1, 2 e 4 dimensões, cada um deles habitado por seres geométricos.

Os habitantes do mundo 1D seriam linhas, podemos chamar a única dimensão de seus mundos de “largura”, por exemplo. Então eles não teriam nem altura nem profundidade. Em seus mundos de só uma dimensão eles poderiam se movimentar somente para a direita ou para a esquerda, um pouquinho, até atingirem o vizinho. Eles jamais poderiam ultrapassar seus vizinhos, porque seria impossível pular por cima ou caminhar pelo lado deles sem acessar uma segunda dimensão.

É interessante perceber que habitantes desse universo de uma dimensão, com um olho em uma de suas extremidades, enxergariam só pontos, ao olharem para seus vizinhos. Eles, apesar de terem uma dimensão, enxergariam o mundo em zero dimensão.

Nós, por outro lado, podemos ver o mundo 1D de fora. Ou seja, vemos os seres inteiros, inclusive seus “interiores”.



Dois seres de uma dimensão vistos por algum ser com mais de uma dimensão.

Da mesma forma, seres vivendo na segunda dimensão seriam planos, mas eles mesmos não conseguiriam enxergar os seus conterrâneos inteiros, e só veriam linhas retas (1D). Teriam que caminhar (?) ao redor de cada forma para saber se se trata de um triângulo ou quadrado, por exemplo.

Assim é um quadrado de duas dimensões, visto da terceira dimensão:

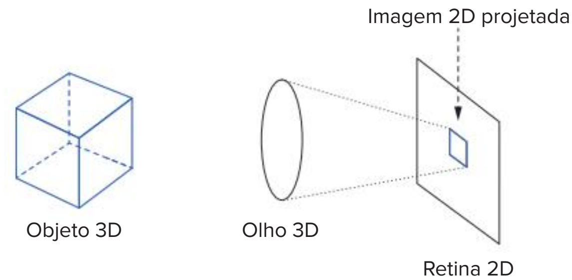
E essa seria a aparência do mesmo quadrado visto por um ser de duas dimensões:



A ideia-chave aqui é perceber que sempre enxergamos uma dimensão inferior àquela na qual estamos inseridos.

Seres de uma determinada dimensão sempre conseguem ver o interior dos seres da dimensão abaixo, mas só conseguem ver a superfície de seres com o mesmo número de dimensões que eles próprios. Por exemplo, nós, seres de três dimensões, conseguimos ver o interior de um quadrado de duas dimensões, porque a luz tem outra dimensão por onde passar, mas o próprio quadrado só conseguiria ver a superfície, o contorno, dos objetos do seu mundo.

Então nós, seres de três dimensões, seguindo essa progressão lógica, na verdade vemos apenas duas dimensões por vez, mas conseguimos deduzir através de várias outras informações, (experiências passadas, visão binocular, incidência da luz) a profundidade de cada objeto.



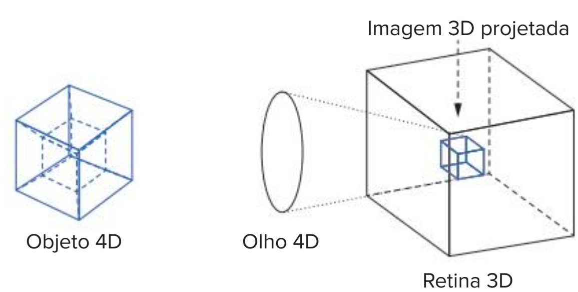

A luz é projetada na nossa retina, que é um plano.

Apesar de lidarmos diariamente com três dimensões, estamos presos nessas dimensões, e a luz não tem por onde passar para poder nos mostrar mais do que a superfície de cada coisa. Mas, se adicionássemos uma nova dimensão, que crescesse a um ângulo de 90 graus de todas as outras, poderíamos ver o lado de trás e o lado da frente e o interior dos objetos ao mesmo tempo.

Então, resumindo, a respeito da quarta dimensão, podemos deduzir que:

1 A retina dos seres da quarta dimensão poderia ver três dimensões por vez.
2 Os seres da quarta dimensão poderiam ver também o interior de objetos da terceira dimensão.
3 As superfícies dos objetos de quatro dimensões são formadas por três dimensões.

Então ao olhar para um cubo, por exemplo, nós vemos só o lado do cubo que está voltado para nós, [...] nós vemos um plano, mas seres de quatro dimensões poderiam ver os seis lados do cubo ao mesmo tempo, e seu interior. E um ser de quatro dimensões, ao olhar para um hipercubo, veria um cubo, que é o achatamento 3D do hipercubo 4D.




Então, ao olhar para uma pessoa, um ser de quatro dimensões poderia ver todos os seus órgãos internos, e vasos sanguíneos, e o interior dos vasos sanguíneos, e o interior de tudo. De uma forma inconcebível para nós, algo como uma camada 3D de tudo que forma aquela pessoa, e não só sua superfície.

BARRUECO, Caroline. O que um ser de quatro dimensões veria ao olhar para você. *Noosfera*, 19 ago. 2015. Disponível em: https://noosfera.com.br/o-que-um-ser-de-quatro-dimensoes-veria-ao-olhar-para-voce/. Acesso em: 2 fev. 2022.

## Resumindo

### Os postulados de Euclides

**Postulados da existência**

1. Existem ponto, reta e plano.
2. Existem infinitos pontos em uma reta e fora dela.
3. Existem infinitos pontos em um plano e fora dele.

**Postulados da determinação**

1. Dois pontos distintos determinam uma reta.
2. Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.

**Postulados da divisão**

1. Todo ponto de uma reta divide-a em duas figuras congruentes chamadas semirretas.
2. Toda reta de um plano divide-o em duas figuras congruentes chamadas semiplanos.
3. Todo plano divide o espaço em dois semiespaços congruentes.

**Postulado da inclusão**

Se dois pontos distintos de uma reta pertencerem a um mesmo plano, então essa reta estará contida nesse plano.

**Determinação de plano**

- Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.
- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
- Duas retas paralelas determinam um plano.
- Duas retas concorrentes também determinam um plano.

**Posições relativas no espaço**

- Entre retas
  - Coplanares
    - Paralelas
      - Coincidentes
      - Distintas
    - Concorrentes
      - Oblíquas
      - Perpendiculares
  - Reversas
    - Oblíquas
    - Ortogonais

- Entre reta e plano
  - Contida
  - Paralela
  - Secante
    - Oblíqua
    - Perpendicular

- Entre planos
  - Paralelos
    - Coincidentes
    - Distintos
  - Secantes
    - Oblíquos
    - Perpendiculares

**Ângulo entre duas retas reversas**

Definimos o ângulo entre duas retas reversas, *r* e *s*, como o ângulo plano formado entre *r* e uma terceira reta paralela à *s* e concorrente à *r*.

### Teorema fundamental da perpendicularidade

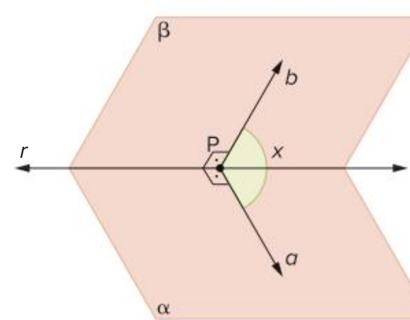
Uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, formar ângulos retos com duas retas concorrentes contidas nesse plano.

### Teorema das três perpendiculares

Seja um plano $\beta$, uma reta *r* perpendicular a $\beta$ no ponto P, uma reta *s* contida em $\beta$ passando por P e uma reta *t* perpendicular à *s* por um ponto Q distinto de P. Nessas condições, se tomarmos um ponto R de *r*, $\overleftrightarrow{RQ}$ será perpendicular à *t*.

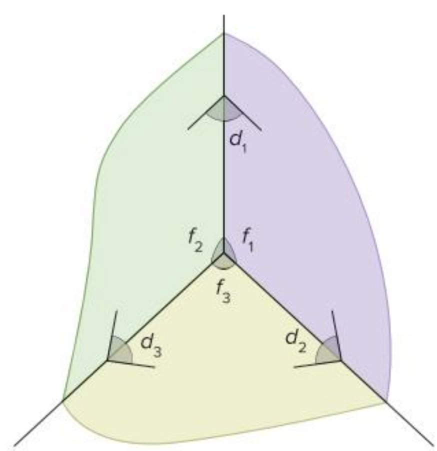
**Diedros**

Diedro é a figura formada por dois semiplanos com origem em uma mesma reta. Esses semiplanos são denominados **faces do diedro**, e a reta é chamada de **aresta do diedro**.




Na figura, *x* é a medida do ângulo diedro de aresta *r*: $x = \text{med}(\alpha\hat{r}\beta)$.

**Triedros**




$$\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f_3 - f_2| < f_1 < f_2 + f_3 \\ |f_3 - f_1| < f_2 < f_1 + f_3 \\ |f_2 - f_1| < f_3 < f_1 + f_2 \end{cases} \text{ e } f_1 + f_2 + f_3 < 360°$$

$$\begin{cases} d_1 + 180° < d_2 + d_3 \\ d_2 + 180° < d_1 + d_3 \\ d_3 + 180° < d_1 + d_2 \end{cases} \text{ e } 180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

## Quer saber mais?

***Site***

Portal da Obmep. *IMPA*. Geometria espacial 1 - Fundamentos: pontos, retas e planos. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=27. Acesso em: 3 fev. 2022.

Neste *site* há uma sequência de seis videoaulas que abordam e ampliam o estudo dos conceitos primitivos da Geometria (ponto, reta e plano).

## Exercícios complementares

1. **UEM-PR 2018** Sobre geometria espacial, assinale o que for correto.

**01** Dois planos sempre se interceptam.
**02** Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
**04** Dado um ponto qualquer P em um plano $\pi$, existe uma única reta passando por P perpendicular ao plano.
**08** Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.
**16** Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

Soma:

2. **ITA-SP 2020** Considere as seguintes afirmações:

**I.** Sejam $\pi_1$, $\pi_2$ e $\pi_3$ três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas *r*, *s* e *t*. Se $r \cap s \neq \varnothing$ então $r \cap s \cap t \neq \varnothing$.
**II.** As projeções ortogonais de duas retas paralelas *r* e *s* sobre um plano $\pi$ são duas retas paralelas.
**III.** Para quaisquer retas *r*, *s* e *t* reversas duas a duas, existe uma reta *u* paralela à *r* e concorrente com *s* e com *t*.

É(são) VERDADEIRA(S):

**a)** apenas I.
**b)** apenas II.
**c)** apenas I e II.
**d)** apenas I e III.
**e)** nenhuma.

3. **Enem 2016** Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

Qual é o esboço obtido pelos alunos?

**a)** 

**b)** 

**c)** 

**d)** 

**e)** 

4. **Enem 2018** Uma torneira do tipo $\frac{1}{4}$ de volta é mais econômica, já que seu registro abre e fecha bem mais rapidamente do que o de uma torneira comum. A figura de uma torneira do tipo $\frac{1}{4}$ de volta tem um ponto preto marcado na extremidade da haste de seu registro, que se encontra na posição fechado, e, para abri-lo completamente, é necessário girar a haste $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti-horário. Considere que a haste esteja paralela ao plano da parede.


Disponível em: www.furkin.com.br. Acesso em: 13 nov. 2014.

Qual das imagens representa a projeção ortogonal, na parede, da trajetória traçada pelo ponto preto quando o registro é aberto completamente?

**a)** 

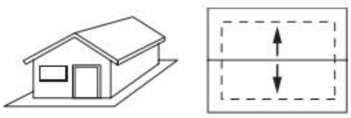
**b)** 

**c)** 

**d)** 

**e)** 

**5. Enem 2020** A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.

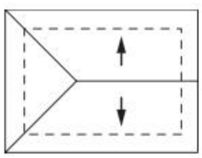


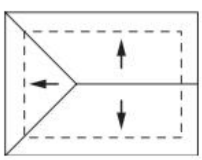
(a) Casa (b) Planta do telhado

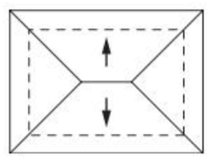
Figura 1

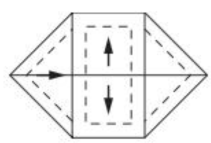
Figura 2

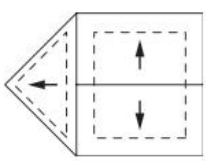
A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é

a) 

b) 

c) 

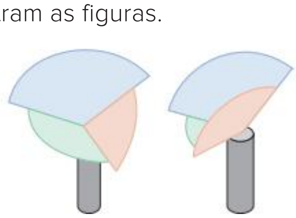
d) 

e) 

**6. IME-RJ 2016** Sejam dois quadrados de lado $a$ situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância $d$, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido **S**. Qual a distância entre estes planos distintos em função de $a$, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$
b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$
d) $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$
e) $\frac{a\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}$

**7.** Pretende-se montar uma escultura metálica composta de três chapas com a forma de setores circulares soldadas entre si e sobre um pedestal cilíndrico, como mostram as figuras.



Para fazê-la, um escultor pode usar cinco chapas com diferentes raios e ângulos internos:

| Tipo | Raio | Ângulo central |
|---|---|---|
| A | 1,3 m | 85° |
| B | 1,5 m | 115° |
| C | 1,4 m | 125° |
| D | 1,1 m | 165° |
| E | 1,8 m | 170° |

Como a escultura apresenta características espaciais, pois as três placas soldadas formam um vértice triédrico, o escultor deverá, necessariamente, usar a combinação:

a) A, B e D.
b) B, C e D.
c) C, D e A.
d) A, B e C.
e) E, A e C.

**8. Enem 2019** Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.

**PINE**

Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.


Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo.

A sombra projetada no solo é

a) 

b) 

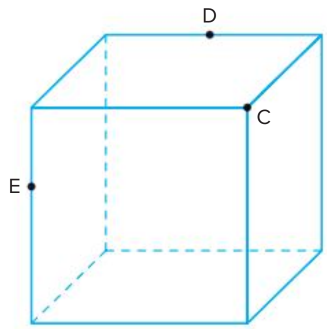
c) 

d) 

e) 

FRENTE 3

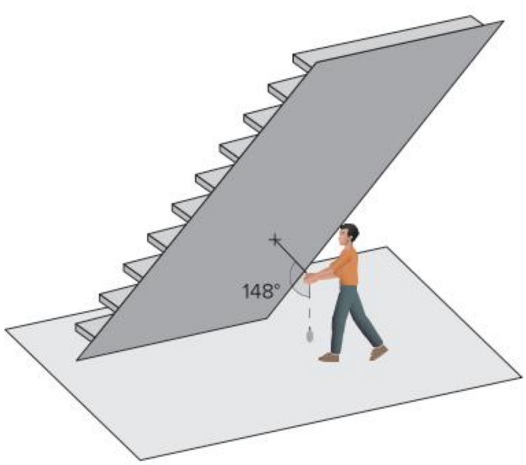
**9.** **UPF-RS 2019** Na figura abaixo, está representado um cubo.




A seção produzida no cubo pelo plano CDE tem a forma de

**a)** triângulo
**b)** trapézio
**c)** retângulo
**d)** pentágono
**e)** hexágono

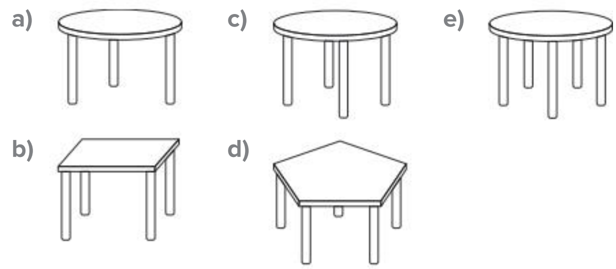
**10.** Um chefe de construção deseja verificar a medida do ângulo de inclinação de uma escada em relação ao solo. Para isso, ele se posiciona sob a rampa de concreto que sustenta a escada dispondo de um objeto de madeira, capaz de ser apoiado em qualquer superfície plana de modo que uma de suas hastes fique perpendicular ao plano de apoio. Em uma extremidade do objeto, um barbante é amarrado, e, na outra, um peso faz com que o barbante fique esticado como um fio de prumo.




O operário mede, com um transferidor, o ângulo entre a haste e o barbante e encontra 148°. Assim, ele pode concluir que o ângulo de inclinação da escada em relação ao solo mede:

**a)** 148°
**b)** 58°
**c)** 48°
**d)** 45°
**e)** 32°

**11.** Algumas vezes, pequenas imprecisões nas medidas das pernas de uma mesa fazem com que ela balance um pouco, mesmo quando apoiada em um piso perfeitamente plano. Isso acontece porque os pés da mesa não determinam pontos de apoio que sejam coplanares. Uma fábrica de móveis produz diversos tipos de mesas de madeira, e as alternativas a seguir ilustram cinco modelos diferentes produzidos por essa fábrica. Assinale a que mostra um modelo de mesa que não balança quando apoiada em um piso perfeitamente plano, mesmo que haja pequenas imprecisões nos comprimentos de suas pernas:



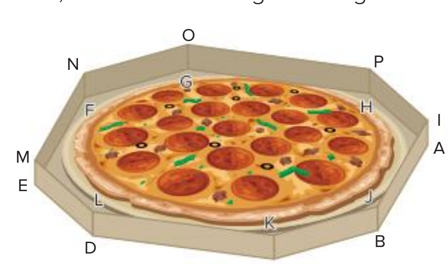

**12.** Embora destinada a ficar na vertical, a Torre de Pisa começou a inclinar-se logo após o início de sua construção, em 1173, devido à sua fundação, construída em um solo mal compactado. Após ser fechada em 1990 por causa do aumento da inclinação, várias propostas foram feitas para aprumar a torre até que uma foi aceita, reduzindo a inclinação em 40 cm.


S_A_N/iStockphoto.com

Imagine que a inclinação da torre em relação à vertical seja de 6° 17'. No momento em que os raios de sol projetam a sombra da torre no solo horizontal, a medida, em graus, do ângulo formado entre a torre e sua sombra:

**a)** não pode ser de 90°, pois a torre não está perfeitamente na vertical.
**b)** não pode ultrapassar 93° 43' qualquer que seja o horário do dia.
**c)** não pode ultrapassar 96° 17' qualquer que seja o horário do dia.
**d)** pode assumir qualquer valor entre 80° e 100° dependendo da hora do dia.
**e)** pode assumir qualquer valor entre 90° e 110° durante o período da manhã.

**13.** Uma pizzaria entrega suas *pizzas* em caixas de papelão cujo formato é o de um prisma reto de bases octogonais, como mostra a figura a seguir:



Considere que os vértices dessa caixa determinam as retas declaradas na seguinte tabela:

| **Reta** | *r* | *s* | *t* | *u* | *v* |
|---|---|---|---|---|---|
| **Vértices** | A e B | F e G | D e L | J e K | M e N |

Sabendo que os ângulos internos dos octógonos ABCDEFGH e IJKLMNOP têm todos a mesma medida, determine qual é a posição relativa entre a reta *r* e cada uma das retas a seguir, justificando sua resposta:

**a)** *s* **b)** *t* **c)** *u* **d)** *v*

**14.** Um pedaço de cartolina é recortado na forma de um losango com lado medindo 6 cm e ângulos internos de 60° e 120°, como mostra a figura 1. Esse pedaço é dobrado, formando um vinco sobre sua diagonal menor, de modo que forma um ângulo diedro, como mostra a figura 2.

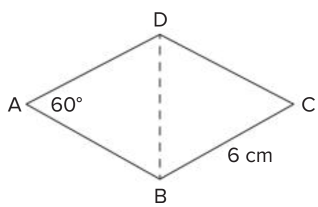



Figura 1

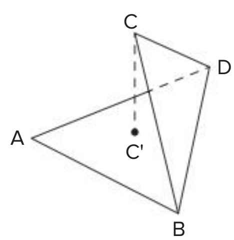
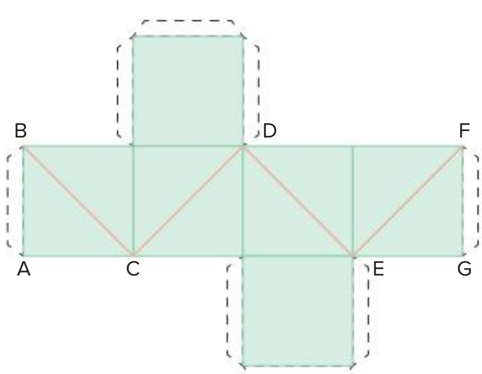


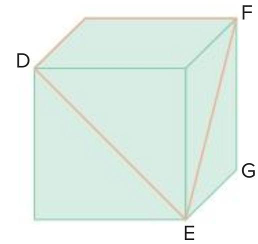

Figura 2

Sabendo que, na figura 2, o ponto C', projeção ortogonal do ponto C no plano determinado pelos pontos A, B e D, é o centro do triângulo equilátero ABD, qual é o valor do cosseno do ângulo diedro formado pelos triângulos ABD e BCD?

**15.** Uma papelaria vende caixas cúbicas desmontadas para presentes. Essas caixas são de papelão estampado e apresentam um friso BCDEF em zigue-zague, que indica quais serão as faces laterais da caixa depois de montada.



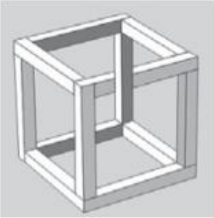

Considere as medidas *x*, *y* e *z* dos ângulos DÊG, DÊF e GÊF, respectivamente, e observe que, enquanto a caixa está desmontada e esses ângulos são coplanares, verifica-se a relação $x = y + z$, mas, quando a caixa for montada, fazendo-se coincidir as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, esses ângulos deixarão de ser coplanares, e suas medidas passarão a verificar a relação $x < y + z$.



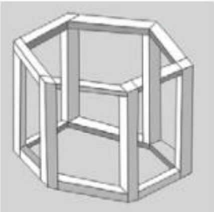

Determine as medidas *x*, *y* e *z* dos ângulos DÊG, DÊF e GÊF depois de montada a caixa.

**16. Enem** Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, reproduzida a seguir.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

**a)**


**b)**


**c)**


**d)**


**e)**


FRENTE 3

**17.** Um queijo parmesão de formato cilíndrico deverá ser dividido em oito partes congruentes.


vovashevchuk/iStockphoto.com

O menor número de cortes planos suficientes para se efetuar essa divisão é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

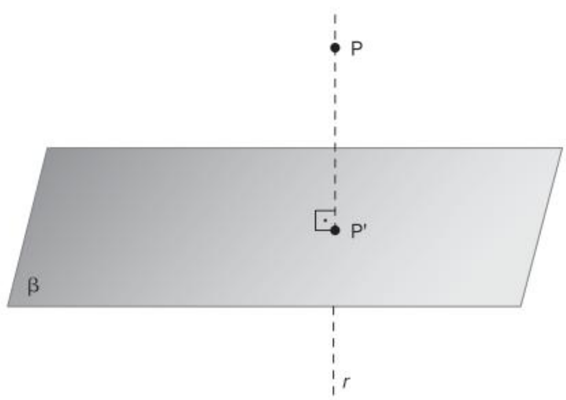
**18.** Determine os comprimentos das arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ de um triedro trirretângulo em que AB ≠ 5 cm, BC ≠ 6 cm e AC ≠ 7 cm.

## BNCC em foco

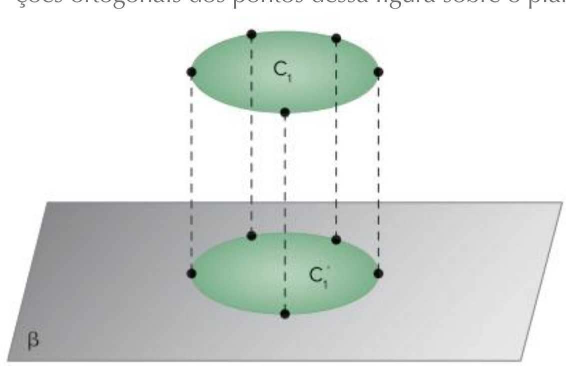
Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.

### Projeção ortogonal sobre um plano

- Projeção de um ponto: Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. O plano é dito plano de projeção e a reta é a reta projetante do ponto.



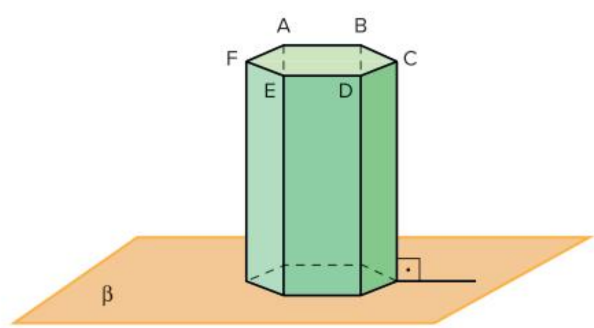

- Projeção de uma figura: Chama-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.




Departamento de Matemática – Universidade Federal de Viçosa. Disponível em: http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20250/2017-II/slides/Capitulo%20IV%20-%20MAT%20250%20-%202017-II.pdf. Acesso em: 21 jan. 2022.

EM13MAT309

**1.** Considere dois planos paralelos, α e β, que distam um do outro 8 cm, e um hexágono regular ABCDEF, de 2 cm de lado, contido em α. Ao esboçar a projeção ortogonal desse hexágono no plano β, a projeção e o hexágono delimitam um prisma, como mostra a figura a seguir. A área total desse prisma é:




a) $96 \text{ cm}^2$.
b) $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
c) $12(8 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.
d) $6(16 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

EM13MAT309

**2.** O volume do prisma delimitado pelo hexágono regular ABCDEF e por sua projeção sobre o plano β é:

a) $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$
b) $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$
c) $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$
d) $192\sqrt{3} \text{ cm}^3$

EM13MAT308

**3.** Considere duas retas, *s* e *t*, sendo a reta *s* pertencente ao plano α e *t* perpendicular a α no ponto A. São marcados um ponto B na reta *t* a 5 cm do ponto A e um ponto C na reta *s*. Sabendo que a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ em *s*, mede 6 cm e que o ponto A está a 8 cm de distância de *s*, nessas condições, a medida do segmento $\overline{BC}$ é:

a) $\sqrt{5}$ cm.
b) $5\sqrt{5}$ cm.
c) 10 cm.
d) 12 cm.

imaginima/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

# 12

# Paralelepípedos

Se você está em um lugar fechado, provavelmente ele é cercado por quatro paredes laterais planas, um piso ou teto plano. Portanto, você deve estar dentro de uma forma geométrica espacial cercada por seis retângulos ao todo. Em qualquer ambiente como esse, é possível observar oito vértices triédricos, cada um com três ângulos retos, além de uma dúzia de arestas determinadas pelo encontro de duas paredes ou de uma parede com o plano do teto ou do piso. Os comprimentos podem ser iguais ou diferentes dependendo das dimensões do lugar. Além disso, cada retângulo caracteriza uma superfície fechada e, portanto, dotada de área.

Todos esses elementos – vértices, arestas e faces, que dão forma geométrica ao ambiente – cercam e estabelecem os limites de uma porção do espaço, o interior dele, que é ocupado por móveis, objetos, pessoas, ar etc.

# A grandeza volume

Além das grandezas angulares, lineares e superficiais, há um último tópico na Geometria Métrica a ser estudado, que é a grandeza espacial. Toda forma dotada de largura, comprimento e profundidade possui essa grandeza. Mas isso não se restringe aos corpos sólidos; até mesmo líquidos ou gases ocupam porções do espaço e, por isso, possuem uma grandeza espacial a ser medida.

As porções do espaço que são ocupadas por algum tipo de matéria, tanto sólida quanto líquida ou gasosa, podem ser medidas e comparadas entre si, de acordo com os valores numéricos de suas grandezas espaciais. O nome dessa grandeza é volume.

Essa grandeza, ao mesmo tempo física e geométrica, que chamamos de volume, avalia a extensão de porções do espaço tridimensional e deve ser expressa por um número real positivo, devidamente acompanhado de uma unidade de volume.

Neste capítulo, estudaremos como calcular os volumes de algumas formas tridimensionais.

## Unidades de volume

No Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI), a principal unidade de medida adotada para expressar o volume é o metro cúbico ($m^3$).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza comprimento, o metro cúbico também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

- O quilômetro cúbico:

  $1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^9 \text{ m}^3$

- O hectômetro cúbico:

  $1 \text{ hm}^3 = 1\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ m}^3$

- O decâmetro cúbico:

  $1 \text{ dam}^3 = 1\,000 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ m}^3$

- O decímetro cúbico:

  $1 \text{ dm}^3 = 0{,}001 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$

- O centímetro cúbico:

  $1 \text{ cm}^3 = 0{,}000001 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$

- O milímetro cúbico:

  $1 \text{ mm}^3 = 0{,}000000001 \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$

Perceba que 1 metro cúbico tem 1 milhão de centímetros cúbicos ($1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$) e que 1 centímetro cúbico tem mil milímetros cúbicos ($1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$), por exemplo. Para compreender as transformações de unidades, observe os exercícios resolvidos a seguir.

## Exercícios resolvidos

**1.** Transforme em metros cúbicos o volume de $0{,}3 \text{ km}^3$.

**Resolução:**

Considerando que cada quilômetro possui mil metros (1 km = 1000 m):

$$0{,}3 \text{ km}^3 = 0{,}3 \cdot (1 \text{ km})^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 0{,}3 \cdot (1000 \text{ m})^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 0{,}3 \cdot 1000^3 \text{ m}^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 0{,}3 \cdot 1\,000\,000\,000^3 \text{ m}^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 300\,000\,000 \text{ m}^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo da relação $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$:

$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^{-1} \cdot (1 \text{ km})^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^{-1} \cdot (10^3 \text{ m})^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{3 \cdot 3} \text{ m}^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^9 \text{ m}^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^{-1+9} \text{ m}^3$$
$$0{,}3 \text{ km}^3 = 3 \cdot 10^8 \text{ m}^3$$

**2.** Transforme em metros cúbicos o volume de $280\,000 \text{ cm}^3$.

**Resolução:**

Considerando que cada centímetro equivale a um centésimo do metro (1 cm = 0,01 m):

$$280\,000 \text{ cm}^3 = 280\,000 \cdot (1 \text{ cm})^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 280\,000 \cdot (0{,}01 \text{ cm})^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 280\,000 \cdot (0{,}01)^3 \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 280\,000 \cdot 0{,}000001 \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 0{,}28 \text{ m}^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo da relação $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$:

$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot (1 \text{ cm})^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2 \cdot 3} \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{5-6} \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 2{,}8 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$
$$280\,000 \text{ cm}^3 = 0{,}28 \text{ m}^3$$

**3.** Transforme em milímetros cúbicos o volume de $0{,}0741\ hm^3$.

**Resolução:**

Considerando que cada hectômetro possui cem metros (1 hm = 100 m) e que cada metro possui mil milímetros (1 m = 1000 mm):

$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot (1\ hm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot (100\ m)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot (100\,000\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot 100\,000^3\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \cdot 74\,100\,000\,000\,000\ mm^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo das relações $1\ hm = 10^2\ m$ e $1\ m = 10^3\ mm$:

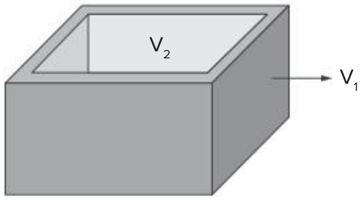
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot (1\ hm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot (10^2\ m)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot (10^2 \cdot 10^3\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{2+3}\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot (10^5\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{5 \cdot 3}\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{-2+15}\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \cdot 10^{13}\ mm^3$$

# A grandeza capacidade

Além do volume, outra grandeza física é usada para avaliar porções de espaço tridimensional: a capacidade. Alguns formatos tridimensionais côncavos, como o de copos de vidro ou caixas térmicas de isopor, têm dois volumes a serem avaliados:

1. O da porção de espaço cercada pela superfície da forma geométrica, que coincide com o volume do material usado na confecção desse objeto (no caso dos copos, o volume de vidro; e no caso das caixas térmicas, o de isopor).
2. O da concavidade ou concavidades dos objetos sólidos que são capazes de armazenar matéria líquida ou gasosa. Esse volume é denominado capacidade do objeto.

O termo capacidade serve para designar o volume $V_2$ da porção de espaço cercada pelas superfícies internas da concavidade de um sólido como a caixa de isopor ilustrada a seguir.




Nesse exemplo:

- $V_1$ é o volume de isopor presente na caixa;
- $V_2$ é a capacidade de armazenamento da caixa.

## Unidades de capacidade

Para expressar a grandeza capacidade, o Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI) também admite a unidade litro, que deve ser indicada pela letra L (maiúscula) ou $\ell$ (minúscula cursiva).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza comprimento, o litro também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

- O quilolitro: $1\ kL = 1\,000\ L = 10^3\ L$
- O hectolitro: $1\ hL = 100\ L = 10^2\ L$
- O decalitro: $1\ daL = 10\ L = 10^1\ L$
- O decilitro: $1\ dL = 0{,}1\ L = 10^{-1}\ L$
- O centilitro: $1\ cL = 0{,}01\ L = 10^{-2}\ L$
- O mililitro: $1\ mL = 0{,}001\ L = 10^{-3}\ L$

Por ser uma grandeza simples, transformações entre múltiplos e submúltiplos do litro seguem as mesmas regras das grandezas lineares, como o metro. Assim, cada quilolitro possui mil litros (1 kL = 1 000 L), e cada litro possui 100 centilitros (1 L = 100 cL), por exemplo. Observe as transformações de unidades apresentadas nos exercícios resolvidos a seguir.

## Exercícios resolvidos

**4.** Transforme em litros a capacidade de 0,05 kL.

**Resolução:**

Considerando que 1 kL = 1 000 L:

$$0{,}05\ kL = 0{,}05 \cdot 1\ kL$$
$$0{,}05\ kL = 0{,}05 \cdot 1000\ L$$
$$0{,}05\ kL = 50\ L$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica.

$$0{,}05\ kL = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1\ kL$$
$$0{,}05\ kL = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3\ L$$
$$0{,}05\ kL = 5 \cdot 10^{-2+3}\ L$$
$$0{,}05\ kL = 5 \cdot 10^1\ L$$

FRENTE 3

**5.** Transforme em litros a capacidade de 20 cL.

**Resolução:**

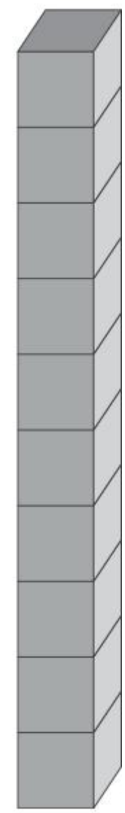
Considerando que 1 cL = 0,01 L:

$$20\text{ cL} = 20 \cdot 1\text{ cL} \Rightarrow 20\text{ cL} = 20 \cdot 0{,}01\text{ L} \Rightarrow 20\text{ cL} = 0{,}2\text{ L}$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica:

$$20\text{ cL} = 2 \cdot 10^1 \cdot 1\text{ cL} \Rightarrow 20\text{ cL} = 2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-2}\text{ L} \Rightarrow 20\text{ cL} = 2 \cdot 10^{1-2}\text{ L} \Rightarrow 20\text{ cL} = 2 \cdot 10^{-1}\text{ L}$$

## Comparando volume e capacidade



Embora ambas as grandezas sirvam para medir porções do espaço, o volume possui unidades de medida compostas, enquanto a capacidade possui unidades de medida simples.

No SI, a unidade composta para a medição de volumes é o metro cúbico. No entanto, fora do SI há outras opções, como a polegada cúbica ou a jarda cúbica. Já a unidade simples para a medição de capacidades, no SI, é o litro; fora do SI há o dracma, a onça, o barril ou o galão, por exemplo.

Como vimos nos exemplos anteriores, o uso de uma unidade de medida simples facilita as transformações entre múltiplos e submúltiplos, ao contrário do que ocorre com as unidades compostas, como o metro cúbico, cujas transformações dependem das relações entre múltiplos e submúltiplos da unidade primitiva, nesse caso, o metro.

Do mesmo modo que 1 $m^3$ é a medida da porção de espaço ocupada por um único cubo cujas arestas medem 1 m, também ocorre que 1 $dm^3$ é a medida do espaço ocupado por um único cubo cujas arestas medem 1 dm e que 1 $cm^3$ é a medida do espaço ocupado por um único cubo cujas arestas medem 1 cm. Assim:

$$\mathbf{1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3}$$

Suponha que dez pequenos cubos com arestas de 1 cm sejam colocados um sobre o outro, como mostra a figura. O sólido formado por esses cubos ocupará um espaço que mede 10 $cm^3$. Assim, embora 1 dm = 10 cm, não é correto assumir que 1 $dm^3$ seja equivalente a 10 $cm^3$.

O espaço de 1 $dm^3$ equivale ao volume de um cubo com 1 dm = 10 cm de aresta. Esse é o volume que se define como sendo equivalente ao litro (L), grandeza simples em que as transformações seguem o padrão das grandezas lineares:

$$\mathbf{0{,}001\ kL = 0{,}01\ hL = 0{,}1\ daL = 1\ L = 10\ dL = 100\ cL = 1000\ mL}$$

Observe que, nesse exemplo, cada cubo tem 1 mililitro de capacidade, portanto o sólido formado pelos dez cubos tem 10 mililitros de capacidade, o que equivale ao centilitro.

Assim, comparando o comportamento dos valores dessas unidades simples e compostas, para transitar rapidamente entre os múltiplos e submúltiplos do litro (unidade simples), uma sugestão é escrever todos eles em ordem decrescente e considerar duas regras para as unidades consecutivas:

1. Da esquerda para a direita, multiplica-se a medida por **10** para trocar de unidade.

$$\text{kL} \xrightarrow[\times 10]{} \text{hL} \xrightarrow[\times 10]{} \text{daL} \xrightarrow[\times 10]{} \text{L} \xrightarrow[\times 10]{} \text{dL} \xrightarrow[\times 10]{} \text{cL} \xrightarrow[\times 10]{} \text{mL}$$

2. Da direita para a esquerda, divide-se a medida por **10** para trocar de unidade.

$$\text{kL} \xleftarrow[:10]{} \text{hL} \xleftarrow[:10]{} \text{daL} \xleftarrow[:10]{} \text{L} \xleftarrow[:10]{} \text{dL} \xleftarrow[:10]{} \text{cL} \xleftarrow[:10]{} \text{mL}$$

Para transitar entre os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico (unidade composta), pode-se escrever todos eles em ordem decrescente e considerar duas outras regras para as unidades consecutivas:

1. Da esquerda para a direita, multiplica-se a medida por **1 000** para trocar de unidade.

$$\text{km}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{hm}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{dam}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{m}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{dm}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{cm}^3 \xrightarrow[\times 1\,000]{} \text{mm}^3$$

2. Divide-se a medida por **1 000** para trocar de unidade da direita para a esquerda.

$$\text{km}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{hm}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{dam}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{m}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{dm}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{cm}^3 \xleftarrow[:1\,000]{} \text{mm}^3$$

## Mudança de unidade

Para transformar em metros cúbicos o valor em litros de uma porção de espaço, ou o contrário, recomenda-se memorizar que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico ($1\ L = 1\ dm^3$), mas também é interessante observar que 1 mililitro equivale a 1 centímetro cúbico ($1\ mL = 1\ cm^3$) e que 1 quilolitro equivale a 1 000 litros ou 1 metro cúbico ($1\ kL = 1\ m^3$).

Quando se trata dessas grandezas, as unidades mais usadas no cotidiano são o metro cúbico, o litro e o centímetro cúbico. Como a razão entre elas é igual a 1 000, também é relativamente simples e bastante útil memorizar que em 1 metro cúbico cabem 1 000 litros e que em 1 litro cabem 1 000 centímetros cúbicos.

$$1\ m^3 = 1\,000\ L$$

$$1\ L = 1\,000\ cm^3$$

$$1\ L = 1\ dm^3$$

$$1\ mL = 1\ cm^3$$

### Exercícios resolvidos

**6.** Que volume, em centímetros cúbicos, comporta um recipiente com capacidade de 25 cL?

a) 2 500
b) 250
c) 25
d) 0,25
e) 0,00025

**Resolução:**

$25\ c\ell = (25 : 100)\ L = 0{,}25\ L = 0{,}25\ dm^3 =$
$= (0{,}25 \cdot 1\,000)\ cm^3 = 250\ cm^3$
Alternativa: B

**7.** Uma lata de 36 dL de tinta é oferecida por R$ 127,80. Qual o preço do metro cúbico dessa tinta?

a) R$ 35 500,00
b) R$ 3 550,00
c) R$ 355,00
d) R$ 35,50
e) R$ 3,55

**Resolução:**

$36\ dL = (36 : 10)\ L = 3{,}6\ L = 3{,}6\ dm^3 =$
$= (3{,}6 : 1\,000)\ m^3 = 0{,}0036\ m^3$
Assim, o preço do metro cúbico da tinta é igual a:

R$ 127,80 : 0,0036 = R$ 35 500,00

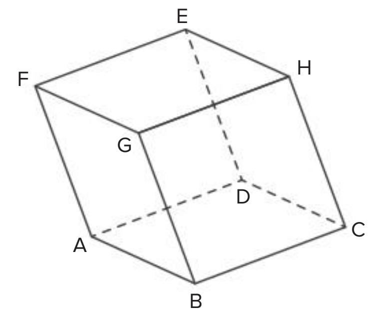
Alternativa: A

## Unidades arbitrárias

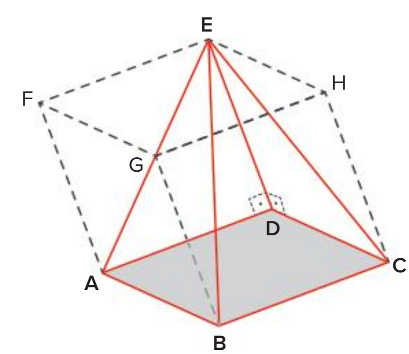
Mesmo existindo diversas opções de unidades para medir volumes e capacidades, muitos problemas que tratam de comparações dessas grandezas em diferentes formas geométricas espaciais podem ser respondidos adotando-se como unidade de medida o volume de uma das figuras ou de parte dela. Depois de escolhida a unidade, usa-se esse volume para medir os volumes das demais formas geométricas, podendo-se, assim, estabelecer as razões entre eles.

Quando a unidade de comparação é adotada especificamente para um problema e escapa do sistema métrico ou de outros sistemas existentes, ela pode ser representada por $\mathbf{u}^3$ ou, ainda, por **u.v.** (unidades de volume).

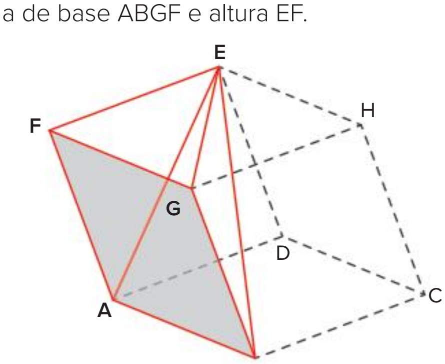
Desse modo, é possível observar, por exemplo, que o volume de um cubo é o triplo do volume de uma pirâmide com mesma base e altura do cubo. Para verificar essa afirmação, considere o cubo ABCDEFGH.



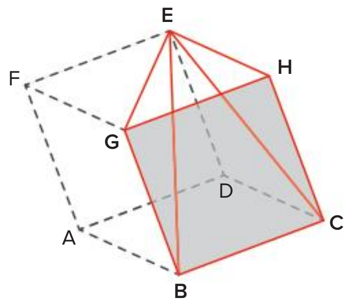

Como qualquer face do cubo pode ser considerada sua base e qualquer uma de suas dimensões coincide com sua altura, uma pirâmide com mesma base e altura que o cubo pode ser a de base ABCD e altura ED.




Outra pirâmide com mesma base e altura que o cubo pode ser a de base ABGF e altura EF.



Uma terceira pirâmide com mesma base e altura que o cubo e disjunta das outras duas é a de base BCHG e altura EH.




O fato de essas três pirâmides serem congruentes entre si pode ser verificado observando-se a simetria de rotação espacial que existe entre elas. Isso porque cada uma delas pode ser obtida a partir da rotação de qualquer outra em torno de um mesmo eixo, que, nesse caso, é a reta que passa pelos vértices E e B do cubo.

Assim, se o espaço ocupado por uma das pirâmides for adotado como unidade de medida de volume, veremos que os volumes $V_I$, $V_{II}$ e $V_{III}$ de cada uma das pirâmides é unitário:

$$V_I = V_{II} = V_{III} = 1\ u^3$$

Então, sabendo que as pirâmides não se sobrepõem, ou seja, que não ocupam espaço comum, e sim todo o espaço do cubo, pode-se concluir que o volume desse cubo equivale à soma dos volumes dessas pirâmides:

$$V_{CUBO} = V_I + V_{II} + V_{III}$$
$$V_{CUBO} = 1\ u^3 + 1\ u^3 + 1\ u^3$$
$$V_{CUBO} = 3\ u^3$$

## Exercício resolvido

**8.** **Enem** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

**Revista Veja**. Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

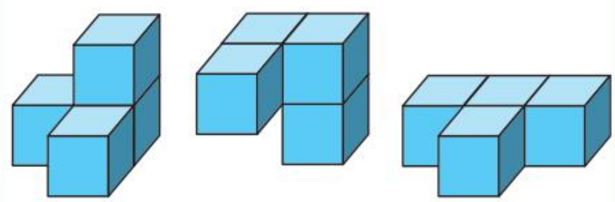
a) 406
b) 1 334
c) 4 002
d) 9 338
e) 28 014

**Resolução:**

Adotando o volume da Terra como sendo a unidade de medida dos volumes dos demais planetas, tem-se:
Terra = 1 u.v.
Netuno = 58 u.v.
Júpiter = 23 Netunos = 23 · 58 u.v. = 1 334 u.v.
Cabem 1 334 Terras dentro de Júpiter.
Alternativa: B

**! Atenção**

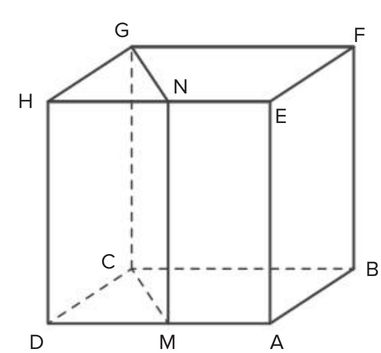
O conceito geométrico de equivalência entre figuras depende do número de dimensões das figuras mensuradas. Assim, ângulos equivalentes têm a mesma medida, linhas equivalentes têm o mesmo comprimento, formas bidimensionais equivalentes têm a mesma área e formas tridimensionais têm o mesmo volume. Desse modo, sólidos geométricos são equivalentes quando suas superfícies cercam porções de espaço com o mesmo volume.



Observe como formas geométricas espaciais obtidas pela justaposição de uma coleção de pequenos cubos podem ter formatos muito diferentes e, mesmo assim, ter o mesmo volume. Isso ocorre porque os sólidos que compõem cada uma são congruentes aos que compõem as outras.

## Exercícios resolvidos

**9.** A figura a seguir apresenta o cubo ABCDEFGH e, no interior dele, o sólido ABCMEFGN.

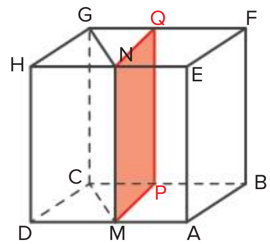



Se M e N são os pontos médios das arestas $\overline{AD}$ e $\overline{HE}$, então a razão entre o volume do sólido e o volume do cubo é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

**Resolução:**

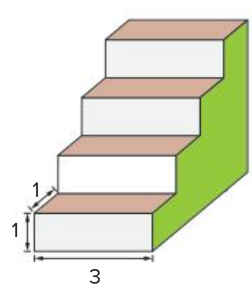
Considere os pontos médios P e Q das arestas $\overline{BC}$ e $\overline{GF}$ do cubo, bem como o plano determinado pelos pontos P, Q, M e N.




Como o plano MPQN divide o cubo em dois sólidos simétricos e congruentes (MDCPNHGQ e MABPNEFQ), conclui-se que o volume de cada um deles corresponde à metade do volume do cubo.
Como o plano MCGN divide uma dessas metades em dois outros sólidos simétricos e congruentes (MDCNHG e CPMGQN), conclui-se que o volume de cada um desses dois novos sólidos ocupa metade da metade do volume do cubo, ou seja, a quarta pate do volume do cubo.
Portanto, o volume do sólido ABCMEFGN equivale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$ do volume do cubo.

Alternativa: D

**10.** Considere uma escada de quatro degraus em que a largura de cada um meça o triplo da altura e da profundidade, como mostra a ilustração a seguir.

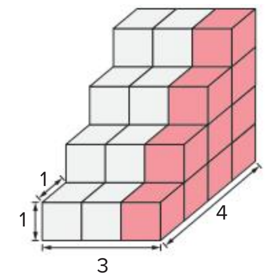



Se essa escada é um sólido geométrico de volume V, qual é o volume de uma escada com cinco degraus em que a altura e a profundidade de cada um tenham as mesmas medidas dos degraus da escada ilustrada, mas a largura seja o quádruplo desse valor?

**a)** 6V
**b)** 5V
**c)** 4V
**d)** 3V
**e)** 2V

**Resolução:**

Decompondo a escada em pequenos cubos por meio de planos paralelos aos das faces da escada e adotando o espaço ocupado por um desses cubos como unidade de volume, obtém-se a seguinte figura:




Observando que essa figura possui três seções verticais congruentes, e que a que está em destaque é formada por 1 + 2 + 3 + 4 = 10 pequenos cubos unitários, tem-se que:

$$V = 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 3 \cdot 10 = 30 \text{ u.v.}$$

Desse modo, é correto inferir que, em uma escada como a mencionada no enunciado, que tenha quatro seções verticais congruentes, cada seção é formada por 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 cubos. Assim, sendo X o volume dessa escada, tem-se:

$$X = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 4 \cdot 15 = 60 \text{ u.v.}$$

Portanto, X = 2V.

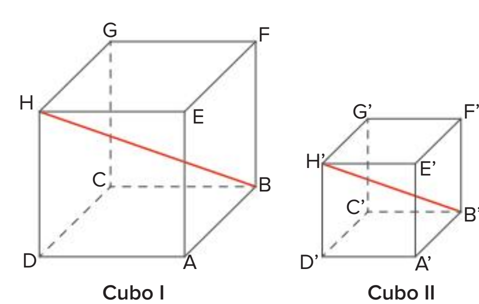
Alternativa: E

## Razão de semelhança no espaço

No estudo da Geometria, o conceito de figuras semelhantes se estende às figuras espaciais. Assim, havendo uma correspondência biunívoca ponto a ponto entre duas figuras espaciais, a relação de semelhança entre elas fica garantida quando todas as medidas angulares determinadas por pontos correspondentes das figuras forem iguais entre si.

Desse modo, dividindo qualquer comprimento de uma figura pelo comprimento correspondente na outra, sempre na mesma ordem, obtem-se um quociente constante, denominado razão de semelhança.

Considerando que, por serem formas geométricas regulares, todos os cubos são semelhantes entre si, observe os cubos I e II de tamanhos diferentes e a correspondência biunívoca de cada ponto X do cubo maior para cada ponto X' do cubo menor.




Assim, dividindo o comprimento da aresta do cubo maior pelo comprimento da aresta do cubo menor, encontra-se um quociente *k*:

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

FRENTE 3

Então, dividindo o comprimento da diagonal do cubo maior pelo comprimento da diagonal do cubo menor, encontra-se o mesmo quociente $k$:

$$\frac{HB}{H'B'} = k$$

O mesmo ocorre com os comprimentos das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ das bases dos cubos. No entanto, isso não acontece, por exemplo, quando se divide a área do quadrado que é base do cubo maior pela área do quadrado correspondente no cubo menor. Nesse caso, o quociente produzido é igual a $k^2$, ou seja, o quadrado da razão de semelhança.

$$\frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = k^2$$

Isso se deve ao fato de que o comprimento é uma grandeza geométrica de uma única dimensão (dim = 1), enquanto a área é uma grandeza geométrica de duas dimensões (dim = 2).

Como o volume é uma grandeza geométrica de três dimensões (dim = 3), quando se divide o volume $V_I$ do cubo maior pelo volume $V_{II}$ do cubo menor, o quociente produzido é igual a $k^3$, ou seja, o cubo da razão de semelhança.

$$\frac{V_I}{V_{II}} = k^3$$

**Teorema:** Se dois sólidos geométricos são semelhantes entre si e $k$ é a razão dessa semelhança, então a razão entre os volumes desses sólidos é igual a $k^3$.

Desse teorema decorre, por exemplo, que, duplicando as arestas de um cubo, o volume desse cubo fica multiplicado por 8, pois $2^3 = 8$. Do mesmo modo, triplicando as arestas, o volume fica multiplicado por 27, pois $3^3 = 27$, e assim por diante.

**! Atenção**

Indicando por **dim** o número de dimensões de um elemento pertencente a um sólido geométrico e pela letra **K** a razão de semelhança entre dois sólidos geométricos, a relação algébrica entre as medidas dos elementos correspondentes entre esses sólidos pode ser resumida da seguinte maneira:

$$\text{Sólido 1} \sim \text{Sólido 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\begin{array}{c}\text{medida de um elemento}\\ \text{qualquer do sólido 1}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{medida do elemento}\\ \text{correspondente no sólido 2}\end{array}\right)} = k^{\text{dim}}$$

Indicando por (') as medidas dos elementos do sólido 2 correspondentes às medidas do sólido 1, os casos contidos na expressão geral são:

$$\text{dim} = 1 \Rightarrow \frac{\text{comprimento}}{\text{comprimento}'} = k$$

$$\text{dim} = 2 \Rightarrow \frac{\text{área}}{\text{área}'} = k^2$$

$$\text{dim} = 3 \Rightarrow \frac{\text{volume}}{\text{volume}'} = k^3$$

## Exercícios resolvidos

**11.** O que acontecerá com a área e com o volume de um cubo se todas as suas dimensões forem aumentadas em 20%?

**a)** Ambos também aumentarão em 20%.
**b)** Ambos aumentarão em 44%.
**c)** A área aumentará em 40% e o volume em 60%.
**d)** A área aumentará em 44% e o volume aumentará aproximadamente em 66%.
**e)** A área aumentará em 44% e o volume aumentará aproximadamente em 73%.

**Resolução:**

Com um aumento de 20%, o comprimento $\ell$ de cada aresta do cubo original passará a valer $1{,}2\ell$. Assim, a razão de semelhança entre os cubos será $k = \frac{1{,}2\ell}{\ell} = 1{,}2$.

Assim, a razão entre as áreas desses cubos será $k^2 = (1{,}2)^2 = 1{,}44$, o que indica um aumento de 44% na área do cubo; e a razão entre os volumes será $k^3 = (1{,}2)^3 = 1{,}728$, o que indica um aumento de 72,8% no volume do cubo.

Alternativa: E

**12.** Se dois cubos são tais que o volume do maior é 64 vezes o volume do menor, então a diagonal do cubo maior é igual ao:

**a)** dobro da diagonal do cubo menor.
**b)** triplo da diagonal do cubo menor.
**c)** quádruplo da diagonal do cubo menor.
**d)** quíntuplo da diagonal do cubo menor.
**e)** sêxtuplo da diagonal do cubo menor.

**Resolução:**

Sendo V o volume do cubo menor e $k$ a razão de semelhança entre os cubos:

$$k^3 = \frac{64 \cdot V}{V} \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = \sqrt[3]{64} \Rightarrow k = 4$$

Portanto, a diagonal do cubo maior mede o quádruplo da diagonal do cubo menor.

Alternativa: C

**13.** Duas caixas de papelão em formato de cubo são tais que a área da superfície da caixa maior mede o dobro da área da superfície da caixa menor. Nesse caso, a razão entre as capacidades dessas caixas é igual a:

**a)** $2\sqrt[3]{4}$
**b)** $2\sqrt{2}$
**c)** $2\sqrt[3]{2}$
**d)** 4
**e)** 8

**Resolução:**

Sendo S o valor da área da superfície do cubo menor e $k$ a razão de semelhança entre os cubos:

$$k^2 = \frac{2 \cdot S}{S} \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

Portanto, a razão entre as capacidades dessas caixas é $k^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

Alternativa: B

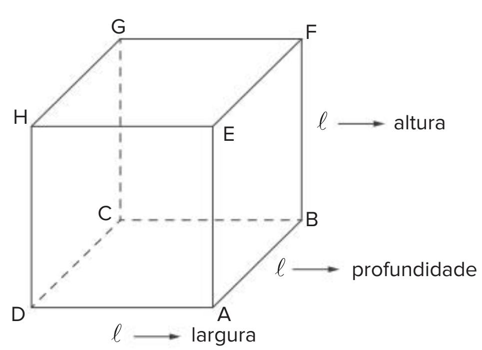
## Fórmulas básicas para o cálculo de volumes

A capacidade de avaliar corretamente volumes de figuras espaciais cercadas por superfícies planas pode ser desenvolvida a partir da memorização de um número razoável de fórmulas algébricas, como as que expressam os volumes de prismas e pirâmides.

Entre os sólidos que chamamos de prismas estão os paralelepípedos (ou prismas quadrangulares) e, entre estes, estão os cubos.

### Volume do cubo

Cercados por seis quadrados congruentes, oito vértices triédricos e trirretângulos e doze arestas de mesmo comprimento que coincidem com as medidas de suas três dimensões (largura, profundidade e altura), os cubos podem ser considerados paralelepípedos ou até mesmo prismas, de acordo com as definições dessas figuras.




Seu formato caracteriza, ainda, um dos cinco únicos tipos de poliedros regulares pela definição de Platão, segundo a qual, por apresentarem exatamente seis faces, os cubos também são chamados de hexaedros regulares.

Entretanto, mais importante do que sua denominação é o fato de que os cubos são as formas geométricas que usamos como unidade de volume. Desse modo, se as arestas de um cubo possuírem exatamente uma unidade de comprimento, o espaço cercado pelas faces dele terá exatamente uma unidade de volume.

- Aresta do cubo = 1 km $\Leftrightarrow$ Volume do cubo = 1 $km^3$
- Aresta do cubo = 1 m $\Leftrightarrow$ Volume do cubo = 1 $m^3$
- Aresta do cubo = 1 dm $\Leftrightarrow$ Volume do cubo = 1 $dm^3$ (capacidade de 1 litro)
- Aresta do cubo = 1 cm $\Leftrightarrow$ Volume do cubo = 1 $cm^3$

Dividindo o comprimento $\ell$ das arestas de um cubo qualquer pelo comprimento da aresta de um cubo unitário, obtém-se uma razão de semelhança entre eles igual a $k = \frac{\ell}{1}$.

Assim, sendo V o volume de um cubo de aresta $\ell$, pelo teorema da razão de semelhança, tem-se $\frac{V}{1} = k^3$.

Substituindo $k$ na última expressão: $\frac{V}{1} = \left(\frac{\ell}{1}\right)^3$.

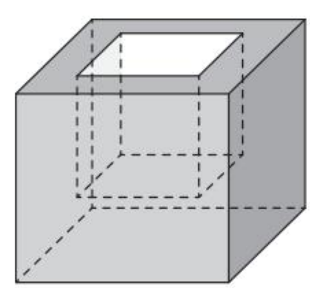
Logo, conclui-se que a fórmula para o volume de um cubo em função do comprimento de suas arestas é a fórmula mais básica para o cálculo de volumes:

$$V_{Cubo} = \ell^3$$

Perceba que até o modo como nos referimos à terceira potência deriva da forma de se calcular o volume desse sólido geométrico.

## Exercícios resolvidos

**14. Enem (Adapt.)** Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

**a)** 12 $cm^3$
**b)** 64 $cm^3$
**c)** 96 $cm^3$
**d)** 1 216 $cm^3$
**e)** 1 728 $cm^3$

**Resolução:**

O volume do cubo maior é: $V = 12^3 = 1728\ cm^3$.
O volume do cubo menor é: $V' = 8^3 = 512\ cm^3$.
O volume de madeira no porta-lápis é:

$$V - V' = 1728 - 512 = 1216\ cm^3$$

Alternativa: D

**15. PUC-Rio 2017** Um cubo de aresta $a$ tem volume 24.

Assinale o valor do volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$.

**a)** $\frac{8}{9}$
**b)** $\frac{9}{3}$
**c)** 8
**d)** 24
**e)** 72

**Resolução:**

O volume do primeiro cubo citado é: $V = a^3 = 24$.
Já o volume do segundo cubo é:

$$V' = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{3^3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

Alternativa: A

**16.** Quanto mede a aresta de um cubo com volume de $2\sqrt{2}$ m$^3$?

**a)** 2 m

**b)** $2\sqrt[3]{2}$ m

**c)** $\sqrt[6]{2}$ m

**d)** $\sqrt[3]{2}$ m

**e)** $\sqrt{2}$ m

**Resolução:**

Sendo $\ell$ a medida, em metros, da aresta do cubo:

$$\ell^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$$

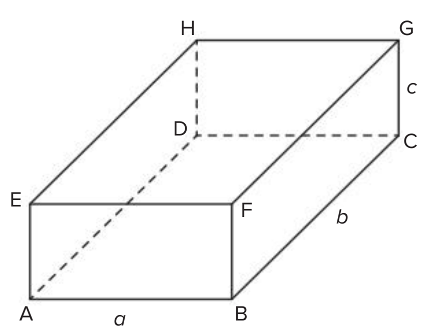
Como $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, por substituição tem-se:

$$\ell = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt{2}\text{ m}$$

Alternativa: E

## Volume do paralelepípedo reto

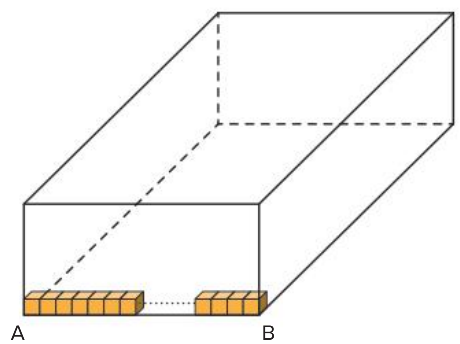
Paralelepípedos são sólidos geométricos cercados por três pares de faces paralelas. Quando essas faces são compostas de seis retângulos, o volume dessas formas geométricas tridimensionais equivale ao produto das medidas de suas três dimensões.




Um paralelepípedo como o mostrado na imagem será retangular se suas bases ABCD e EFGH forem retângulos congruentes entre si. Ele também será denominado reto se suas arestas laterais $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ forem perpendiculares aos planos das bases.

Caso seja retangular e reto, todos os vértices do paralelepípedo serão triedros trirretângulos. Nesse caso, o paralelepípedo poderá ser completamente preenchido por determinada quantidade de cubos. Assim, a soma dos volumes desses cubos será igual ao volume do paralelepípedo.

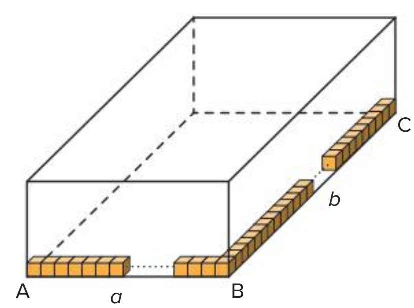
Considere que as dimensões do paralelepípedo sejam representadas pelos números inteiros *a*, *b* e *c*, em alguma unidade de comprimento. Então, pode-se dizer que *a* é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, e sobre o comprimento da aresta $\overline{AB}$, por exemplo.



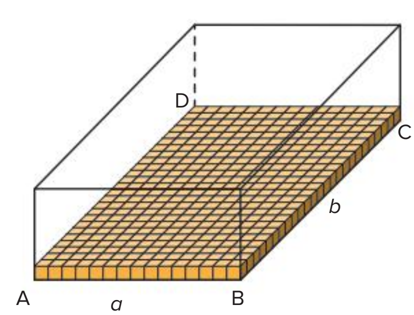

A soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, é

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{a \text{ parcelas}} = 1 \cdot a = a\,.$$

Do mesmo modo, pode-se dizer que *b* é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, mas agora sobre o comprimento da aresta $\overline{BC}$, por exemplo.

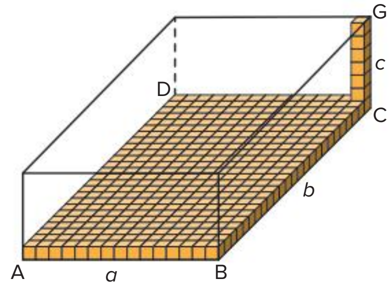



Logo, o produto $a \cdot b$ representa a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, sobre sua base ABCD.




Assim, a soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, é $\underbrace{a + a + a + a + \dots + a + a}_{b \text{ parcelas}} = a \cdot b\,.$

Também pode-se dizer que *c* é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, mas agora sobre o comprimento da aresta $\overline{CG}$, por exemplo.




Caso seja colocada uma quantidade $c$ de camadas formadas por uma quantidade $a \cdot b$ de pequenos cubos unitários dentro do paralelepípedo, o volume dele ficará completamente preenchido. Nesse caso, a soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, será o próprio volume do paralelepípedo:

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = \underbrace{a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + \ldots + a \cdot b + a \cdot b}_{c \text{ parcelas}}$$

Portanto, a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo em função das medidas de suas dimensões $a$, $b$ e $c$ é:

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$

Nos próximos capítulos, em que estudaremos o princípio de Cavalieri no espaço, veremos demonstrações dessa relação que contemplam outros formatos de paralelepípedo, como os oblíquos, e casos em que as dimensões do paralelepípedo não podem ser expressas por números inteiros em nenhuma unidade de medida.

## Exercícios resolvidos

**17.** Um paralelepípedo retangular e reto tem 12 cm de largura e suas outras dimensões diferem apenas 2 cm uma da outra. Sabendo que o volume desse paralelepípedo é de 420 cm$^3$, pode-se concluir que a soma de suas dimensões, em centímetros, é igual a:

**a)** 28 cm
**b)** 24 cm
**c)** 20 cm
**d)** 14 cm
**e)** 12 cm

**Resolução:**

Sendo $x$ e $(x - 2)$ as outras dimensões do paralelepípedo, temos:

$$12 \cdot x \cdot (x - 2) = 420 \Rightarrow 12x^2 - 24x - 420 = 0$$

Dividindo a equação por 12 e resolvendo-a, obtemos:

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) = 4 + 140 = 144$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} x = 7 \\ x' = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 12 cm, 7 cm e 5 cm, cuja soma é 24 cm.
Alternativa: B

**18. Enem 2016** O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a "reflexão" da água (o movimento contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

Disponível em: <http://desporto.publico.pt>. Acesso em: 6 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de:

**a)** 20%
**b)** 25%
**c)** 47%
**d)** 50%
**e)** 88%

**Resolução:**

O volume atual da piscina do clube em metros cúbicos é $V = 50 \cdot 20 \cdot 2 = 2\,000$ m$^3$.
O volume que a piscina passará a ter após a reforma será $V' = 50 \cdot 25 \cdot 3 = 3\,750$ m$^3$.
O aumento no volume será $V' - V = 3\,750 - 2\,000 = 1\,750$ m$^3$.
Portanto, a taxa de aumento será igual a $\frac{1\,750}{2\,000} = 0{,}875 = 87{,}5\%$.
Alternativa: E

**19. Enem 2014** Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.
A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

**a)** $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{8}{7}$ **d)** $\frac{8}{9}$ **e)** $\frac{9}{8}$

**Resolução:**

Como o custo com o material é proporcional ao volume das portas, para mantê-lo é necessário que a nova porta tenha o mesmo volume da porta anterior.
Sendo $x$, $y$ e $z$ as medidas da altura, largura e espessura da porta anterior, tem-se que:

I. A altura da nova porta é igual a $x + \frac{x}{8} = \frac{9x}{8}$.

II. A espessura da nova porta também é igual a $z$.

Então, sendo $y'$ a largura da nova porta, da igualdade entre os volumes, tem-se que:

$$\frac{9x}{8} \cdot y' \cdot z = x \cdot y \cdot z \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{8}{9}$$

FRENTE 3

Portanto, a razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é $\frac{8}{9}$.

Alternativa: D

**Atenção**

Se um paralelepípedo tem suas dimensões representadas por números inteiros *a*, *b* e *c* em alguma unidade de comprimento, então a aresta $\ell$ do maior cubo que pode ser usado para preencher completamente o paralelepípedo, como foi mostrado anteriormente, deve ter uma medida igual ao máximo divisor comum dos valores das três dimensões do paralelepípedo. Assim:

$$\ell = \text{mdc}(a, b, c)$$

## Exercício resolvido

**20.** Um bloco de madeira na forma de um paralelepípedo reto com base de dimensões 36 cm por 52 cm e com 72 cm de altura foi dividido em cubos idênticos e de maior aresta possível. Nessas condições, o volume de cada cubo é:

**a)** 64 cm³
**b)** 125 cm³
**c)** 216 cm³
**d)** 343 cm³

**Resolução:**

Nas condições do enunciado, o comprimento da aresta do maior cubo, em centímetros, é:

$$\ell = \text{mdc}\ (36, 52, 72) = 4$$

Portanto, o volume de cada cubo é $V = 4^3 = 64\ \text{cm}^3$.
Alternativa: A

## Média geométrica no espaço

Algebricamente, a média geométrica de três números reais positivos (*a*, *b* e *c*) é expressa pela raiz cúbica do produto desses números, ou seja, $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

Já geometricamente, essa média corresponde ao comprimento da aresta de um cubo, cujo volume coincide com o volume de um paralelepípedo de dimensões *a*, *b* e *c*. Assim, sendo $\ell$ o comprimento da aresta desse cubo:

$$V_{\text{Cubo}} = V_{\text{Paralelepípedo}}$$
$$\ell^3 = a \cdot b \cdot c$$

Nesse caso, dizemos que $\ell$ é a média geométrica de *a*, *b* e *c*:

$$\ell = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

## Exercício resolvido

**21.** Considere um paralelepípedo retorretângulo de dimensões 6 m por 90 cm por 10,8 dm. Quanto mede a aresta de um cubo que possui o mesmo volume que esse paralelepípedo?

**a)** 180 cm **c)** 360 cm **e)** 600 cm
**b)** 240 cm **d)** 450 cm

**Resolução:**

As dimensões do paralelepípedo, em centímetros, são:

$$600 \times 90 \times 108$$

Portanto, a aresta do cubo mede, em centímetros:

$$\ell = \sqrt[3]{600 \cdot 90 \cdot 108}$$

Decompondo em fatores primos os valores dessas dimensões:

$$\ell = \sqrt[3]{\underbrace{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2}_{600} \cdot \underbrace{2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1}_{90} \cdot \underbrace{2^2 \cdot 3^3}_{108}} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3}$$

Simplificando a raiz cúbica, tem-se:

$$\ell = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180\ \text{cm}$$

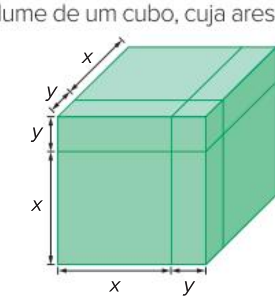
Alternativa: A

**Saiba mais**

O produto notável para o cubo da soma é uma importante identidade algébrica, que pode ser representada geometricamente pela justaposição de cubos e paralelepípedos retos de bases quadradas.

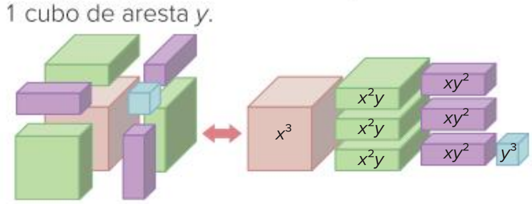
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

O primeiro membro dessa identidade representa geometricamente o volume de um cubo, cuja aresta mede $x + y$.



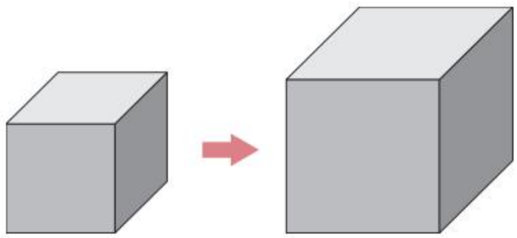

Dessa maneira, a identidade enuncia que em um cubo como esse cabem:

- 1 cubo de aresta *x*;
- 3 paralelepípedos cujas bases são quadradas, de lado *x*, e cujas alturas medem *y*;
- 3 paralelepípedos cujas bases são quadradas, de lado *y*, e cujas alturas medem *x*;
- 1 cubo de aresta *y*.



## Exercício resolvido

**22.** Sabe-se que um aumento de 1 cm nas arestas de um determinado cubo faz com que seu volume aumente para 91 cm$^3$. Determine o comprimento inicial da aresta desse cubo.



**Resolução:**

Sendo $x$ o comprimento inicial da aresta do cubo, em cm:

$(x + 1)^3 = x^3 + 91 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 91 \Rightarrow$

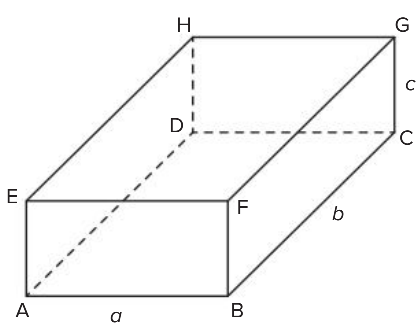
$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 90 = 0$

Dividindo a equação por 3 e resolvendo-a, tem-se:

$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 11}{2} \begin{cases} \nearrow x = 5 \\ \searrow x' = -6 \end{cases}$$

Portanto, o cubo tem, inicialmente, 5 cm de aresta.

# Elementos do paralelepípedo




O paralelepípedo retangular e reto da figura possui:

- **8** vértices, que são triedros trirretângulos: A, B, C, D, E, F, G e H.
- **12** arestas, cujas medidas coincidem com algumas das suas dimensões:

$$\begin{cases} \text{largura: } AB = CD = EF = GH = a \\ \text{profundidade: } AD = BC = EH = FG = b \\ \text{altura: } AE = BF = CG = DH = c \end{cases}$$

- **6** faces retangulares: $\begin{cases} [ABCD] = [EFGH] = a \cdot b \\ [ADHE] = [BCGF] = b \cdot c \\ [ABFE] = [DCGH] = a \cdot c \end{cases}$

- **12** diagonais sobre a sua superfície:

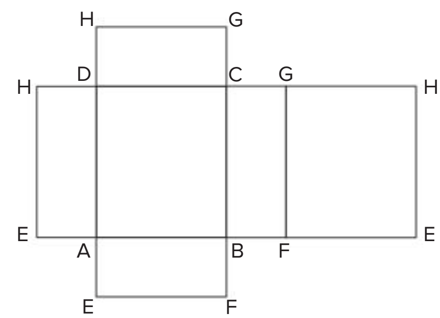
$$\begin{cases} AC = BD = EG = FH = \sqrt{a^2 + b^2} \\ AF = BE = CH = DG = \sqrt{a^2 + c^2} \\ AH = BG = CF = DE = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

- **4** diagonais no seu interior:

$$AG = BH = CE = DF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

## Planificação do paralelepípedo

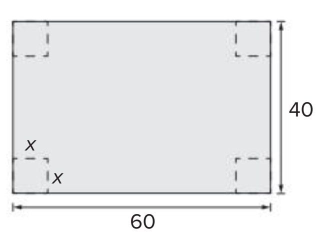
O conjunto de seis retângulos justapostos ilustrado a seguir representa a planificação de um paralelepípedo retangular reto. Os pontos indicados com as mesmas letras representam o mesmo vértice no sólido espacial.



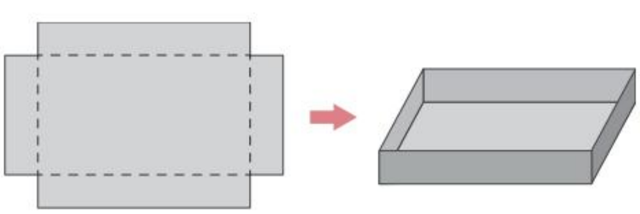

Para montar o paralelepípedo, basta recortar o polígono formado por todos esses retângulos, dobrar o recorte sobre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$, formando diedros retos, e fazer coincidir os pontos E, F, G e H no espaço.

## Exercício resolvido

**23.** Dos quatro vértices de um pedaço de cartolina retangular, com dimensões 60 cm por 40 cm, recortam-se quadrados de lado $x$, como mostra a figura a seguir:




Com a finalidade de se obter uma caixa com a forma de um paralelepípedo de faces retangulares, o pedaço restante de cartolina é dobrado nas linhas pontilhadas, como aparece na próxima figura:



FRENTE 3

Assinale a alternativa em que o polinômio V(*x*) representa o volume dessa caixa em função da medida *x*, em centímetros, do lado de cada um dos quadrados que foram recortados do pedaço original de cartolina.

**a)** $V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2\,400x$

**b)** $V(x) = x^3 - 20x^2 + 24x$

**c)** $V(x) = 4x^3 + 200x^2 + 240$

**d)** $V(x) = x^3 - 2\,400x^2 + 200x$

**e)** $V(x) = 4x^2 - 200x + 2\,400$

**Resolução:**

De acordo com o enunciado, as dimensões da base da caixa são $(60 - 2x)$ por $(40 - 2x)$, e a altura do prisma, que resulta da montagem da caixa, é $x$.
Portanto, o volume da caixa é dado pela função:

$$V(x) = (60 - 2x) \cdot (40 - 2x) \cdot x$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se:

$$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2\,400x$$

Alternativa: A

A planificação de um sólido geométrico permite observar com mais clareza como calcular as áreas das diversas partes de sua superfície. Assim, sendo *a* e *b* as dimensões da base de um paralelepípedo de altura *c*, tem-se:

$$\begin{cases} \text{Área da base} = ab \\ \text{Área lateral} = 2ac + 2bc = 2(ac + bc) \\ \text{Área total} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc) \end{cases}$$

## Exercícios resolvidos

**24. PUC-Rio 2018** Uma caixa de chocolate, com a forma de paralelepípedo, tem dimensões 4 cm × 4 cm × 16 cm. Quantos $cm^2$ de papel são necessários para cobrir completamente a caixa?

**a)** 256

**b)** 272

**c)** 288

**d)** 304

**e)** 320

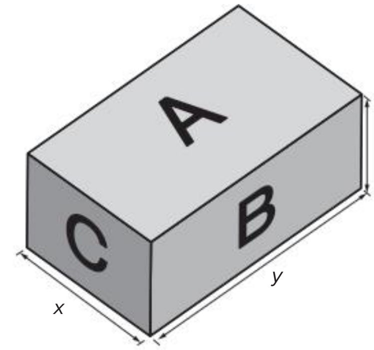
**Resolução:**

Com $a = 4$, $b = 4$ e $c = 16$, a área total desse paralelepípedo, em $cm^2$, mede:

$$A_{Total} = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot (4 \cdot 4 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16) =$$
$$= 2 \cdot (16 + 64 + 64) = 2 \cdot 144 = 288 \text{ cm}^2$$

Alternativa: C

**25. Insper-SP 2016** A figura indica um bloco maciço com formato de paralelepípedo retorretângulo. As áreas das faces indicadas por A, B e C são, respectivamente, 48 $cm^2$, 32 $cm^2$ e 24 $cm^2$.




O número de blocos como esse que devem ser mergulhados em um tanque completamente cheio de água para que haja um transbordamento de exatamente 4,8 litros de líquido é igual a:

**a)** 28

**b)** 25

**c)** 24

**d)** 20

**e)** 18

**Resolução:**

De acordo com o enunciado e a ilustração, tem-se o seguinte sistema:

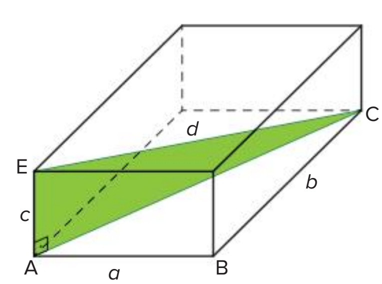
$$\begin{cases} x \cdot y = 48 & \text{(I)} \\ y \cdot z = 32 & \text{(II)} \\ x \cdot z = 24 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando as equações (I) e (II), obtém-se $x \cdot z \cdot y^2 = 48 \cdot 32$.
Substituindo o valor de $x \cdot z$ dado pela equação (III), obtém-se $24 \cdot y^2 = 48 \cdot 32$.
Dividindo a última equação por 24, chega-se a $y^2 = 64$ e, como $y > 0$, conclui-se que $y = 8$.
Então, multiplicando a equação (III) por $y$, obtém-se $x \cdot z \cdot y = 24 \cdot 8 = 192$.
Portanto, o volume do bloco é $V = 192$ $cm^3$.
O volume de água que deve transbordar é $V' = 4{,}8 \cdot 1\,000 \text{ cm}^3 = 4\,800 \text{ cm}^3$.
Logo, devem ser mergulhados $\frac{V'}{V} = \frac{4\,800}{192} = 25$ blocos

Alternativa: B

## Diagonais internas de um paralelepípedo

A expressão para o cálculo do comprimento *d* das diagonais internas de um paralelepípedo retangular reto de dimensões *a*, *b* e *c* é consequência do teorema de Pitágoras.



Primeiro, no triângulo ABC contido na base do paralelepípedo:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = a^2 + b^2$$

Depois, no triângulo ACE contido no interior do paralelepípedo:

$$CE^2 = AC^2 + AE^2$$

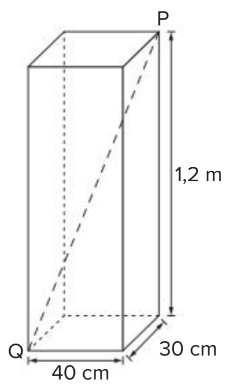
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Portanto:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

## Exercício resolvido

**26.** Uma caixa em forma de paralelepípedo tem todas as suas faces retangulares, como mostra a figura. Se que as dimensões da caixa são 30 cm × 40 cm × 1,2 m, qual é, em centímetros, o comprimento da diagonal PQ?




**a)** 100
**b)** 125
**c)** 130
**d)** 135
**e)** 140

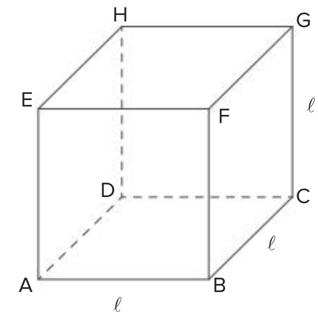
**Resolução:**

Ao escrever as dimensões da caixa em decímetros, tem-se: $a = 4$, $b = 3$ e $c = 12$.
Então, usando a fórmula da diagonal do paralelepípedo, obtém-se:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ dm}$$

Convertendo a medida para centímetros, nota-se que 13 dm = 130 cm.
Alternativa: C

# Elementos do cubo




O cubo ABCDEFGH da figura possui:

- **8** vértices que são triedros trirretângulos: A, B, C, D, E, F, G e H.
- **12** arestas de mesma medida $\ell$:

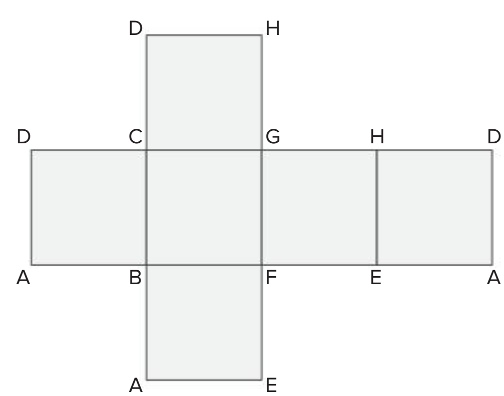
$$\begin{cases} \text{largura: } AB = CD = EF = GH = \ell \\ \text{profundidade: } AD = BC = EH = FG = \ell \\ \text{altura: } AE = BF = CG = DH = \ell \end{cases}$$

- **6** faces quadradas de mesma área $\ell^2$:
[ABCD] = [EFGH] = [ADHE] = [BCGF] = [ABFE] = = [DCGH] = $\ell^2$
- **12** diagonais sobre a sua superfície, todas com o mesmo comprimento $\ell\sqrt{2}$:
AC = BD = EG = FH = AF = BE = CH = DG = AH = = DE = BG = CF = $\ell\sqrt{2}$
- **4** diagonais no seu interior, todas com o mesmo comprimento $\ell\sqrt{3}$:

$$AG = BH = CE = DF = \ell\sqrt{3}$$

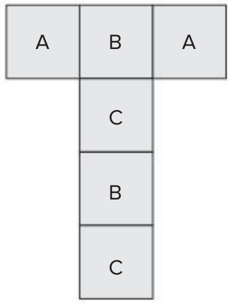
## Planificação do cubo

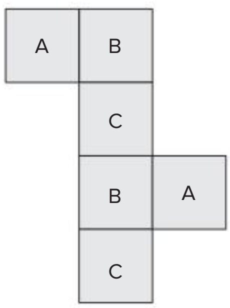
O conjunto de seis quadrados congruentes ilustrado a seguir retrata a mais comum entre as possíveis planificações de um cubo. Os pontos indicados com as mesmas letras representam o mesmo vértice no sólido espacial.

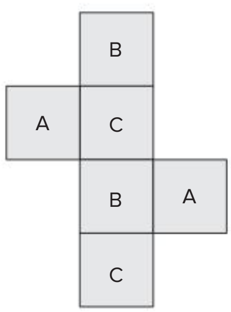


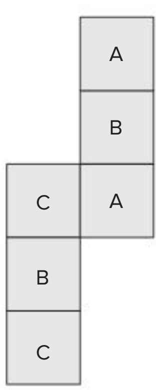

Para montar o cubo, bastaria recortar desta página o polígono formado por todos esses quadrados, dobrar o recorte sobre os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{FG}$ e $\overline{EH}$ para formar diedros retos e fazer coincidir no espaço os pontos A, E, D e H.

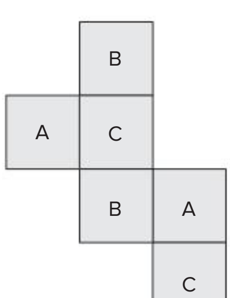
Mas existem outras dez possibilidades para o formato da planificação de um cubo em que nenhuma das faces é seccionada. Veja a seguir a ilustração de cada uma delas, em que as faces que são opostas em cada cubo estão marcadas com as mesmas letras.

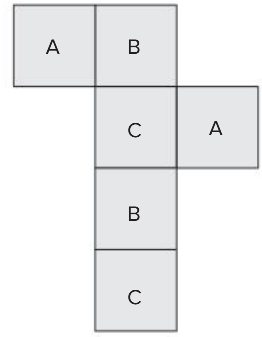


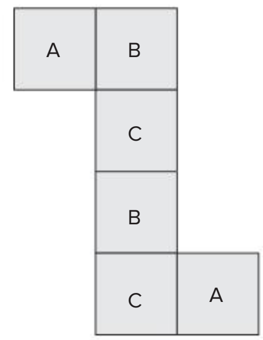



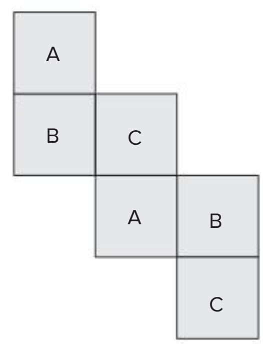



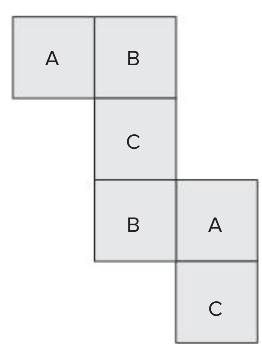



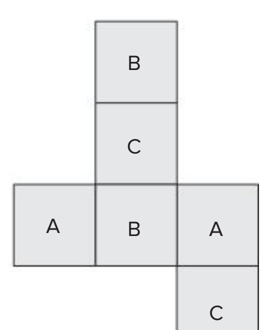



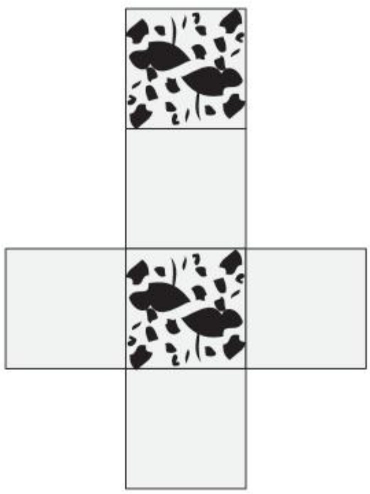



As áreas das superfícies do cubo de aresta $\ell$ podem ser obtidas das seguintes expressões:

$$\begin{cases} \text{Área da base} = \ell^2 \\ \text{Área lateral} = 4\ell^2 \\ \text{Área total} = 6\ell^2 \end{cases}$$

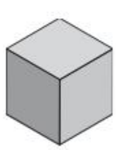
## Exercício resolvido

**27. UFJF-MG 2018** Qual sólido geométrico representa a planificação abaixo?



a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

**Resolução:**

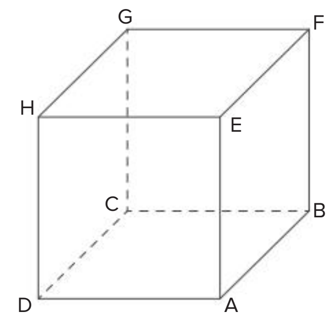
Como só há duas faces pintadas na planificação, a alternativa E não pode estar correta.

Ao observar que as faces pintadas na planificação devem ficar opostas quando o cubo é montado, podem ser eliminadas as alternativas B, C e D. Resta apenas a alternativa A, que deve ter a base pintada para representar o sólido.

Alternativa: A

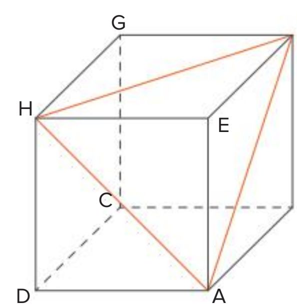
## Triângulos no cubo

Dado um cubo ABCDEFGH de aresta $\ell$, considere todas as combinações de 3 de seus 8 vértices. São um total de $C_{8,3} = 56$ combinações e, como entre os vértices de um cubo não há três pontos alinhados, cada combinação corresponde a um único triângulo, contido na superfície ou no interior do cubo.




Como os lados desses triângulos podem coincidir com as arestas do cubo que medem $\ell$, as diagonais de suas faces que medem $\ell\sqrt{2}$ ou as diagonais interiores que medem $\ell\sqrt{3}$, não há muitos formatos diferentes entre esses triângulos.

Na verdade, só há três formatos de triângulos entre todas essas combinações e muitos deles são congruentes ao triângulo AFH, por exemplo, que é equilátero, pois todos os seus lados são diagonais de quadrados congruentes.

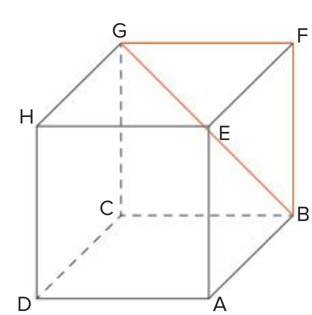



Os lados desse triângulo medem $AF = AH = FH = \ell\sqrt{2}$.

Os ângulos internos do triângulo AFH medem

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{F}) = \text{med}(\hat{H}) = 60°$.

Outros triângulos entre as combinações são congruentes ao triângulo BFG, por exemplo, que é retângulo, além de isósceles.



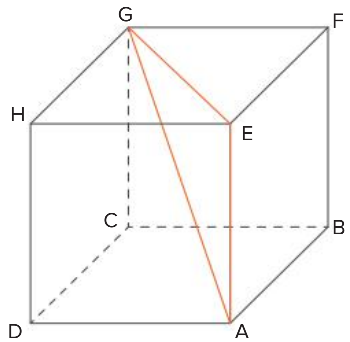

FRENTE 3

Os lados desse triângulo medem $BF = GF = \ell$ e $BG = \ell\sqrt{2}$.

Os ângulos internos desse triângulo medem

$$med(\hat{B}) = med(\hat{G}) = 45° \text{ e } med(\hat{F}) = 90°$$

E ainda há triângulos congruentes ao triângulo AEG, que é retângulo e escaleno.

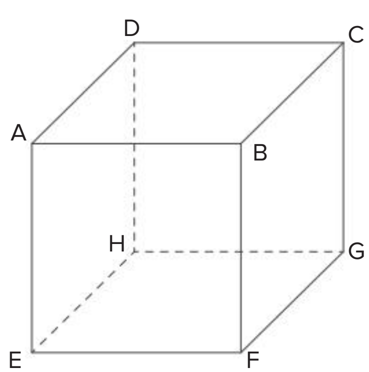



Os lados desse triângulo medem $AE = \ell$, $EG = \ell\sqrt{2}$ e $AG = \ell\sqrt{3}$. O ângulo de vértice E desse triângulo é reto $\left(med\left(\hat{E}\right) = 90°\right)$, mas seus ângulos agudos não possuem medidas notáveis em graus ou radianos. Essas medidas ficam expressas por funções trigonométricas, como:

$$\begin{cases} \hat{A} = \text{arctg}\left(\sqrt{2}\right) \\ \hat{G} = \text{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

## Exercícios resolvidos

**28.** Quanto mede a área do triângulo ABG, determinado pelos vértices do cubo de volume 216 $cm^3$, ilustrado a seguir?




a) $36\sqrt{3}\ cm^2$

b) $36\sqrt{2}\ cm^2$

c) $18\sqrt{3}\ cm^2$

d) $18\sqrt{2}\ cm^2$

e) $18\ cm^2$

**Resolução:**

A aresta do cubo mede: $\ell = \sqrt[3]{216} = 6$ cm.
A aresta $\overline{AB}$ é perpendicular à face do cubo que contém a diagonal $\overline{BG}$. Portanto, o triângulo ABG é retângulo no vértice B. Os catetos desse triângulo medem $AB = \ell = 6$ cm e $BG = \ell\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Logo, sua área é igual a $\dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}\ cm^2$.

Alternativa: D

**29.** Calcule o seno do ângulo formado por duas diagonais interiores de um cubo.

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

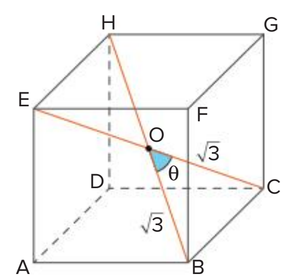
c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\dfrac{1}{3}$

**Resolução:**

Como o seno desse ângulo não depende do tamanho do cubo, pode-se estipular uma unidade de medida para a aresta deste, que, no caso, será $\ell = 2$.




Assim, as diagonais desse cubo medem $EC = BH = 2\sqrt{3}$. Como o centro O do cubo é ponto médio dessas diagonais, podemos afirmar que $OB = OC = \sqrt{3}$. Então, do teorema dos cossenos no triângulo OBC, tem-se:

$$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\theta)$$
$$4 = 3 + 3 - 6\cos(\theta)$$
$$6\cos(\theta) = 6 - 4$$
$$\cos(\theta) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Substituindo esse valor na relação fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}$$

Como os senos dos ângulos internos de qualquer triângulo são estritamente positivos, tem-se que:

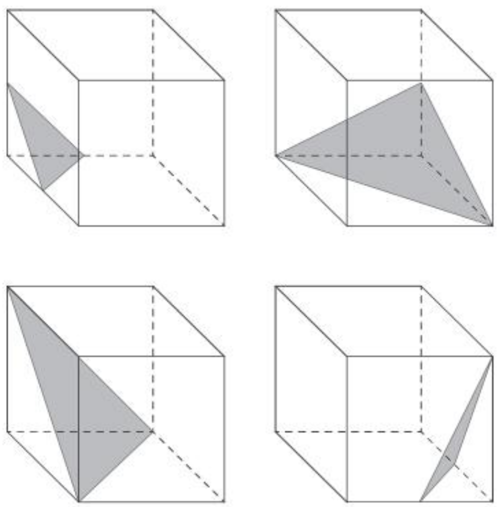
$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Alternativa: A

## Seções do cubo

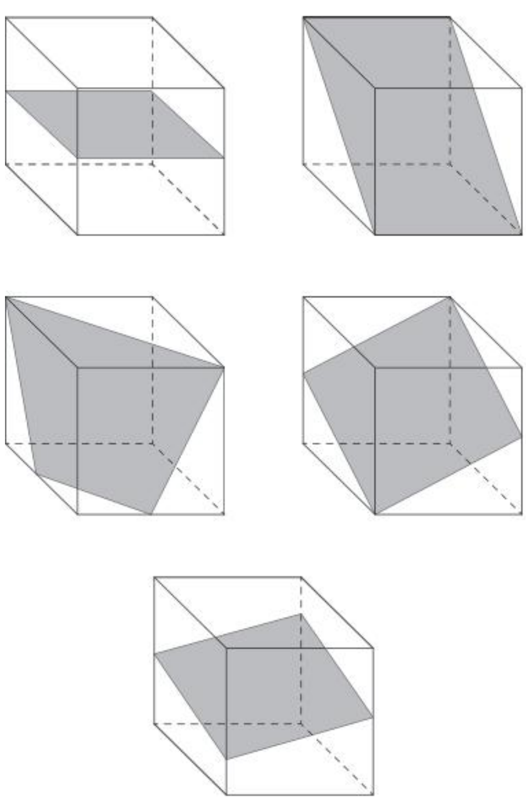
Se um plano intercepta um sólido geométrico, então a região comum ao plano e ao sólido é denominada seção plana do sólido. As seções planas dos sólidos podem assumir diversas formas e, no caso do cubo, por exemplo, podem ser triângulos, quadriláteros, pentágonos ou até hexágonos. Veja a seguir:

- Seções triangulares



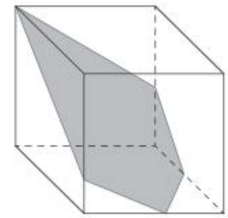
É possível obter triângulos escalenos, isósceles ou equiláteros por meio de seções planas de um cubo, porém todos esses triângulos são acutângulos. Não é possível obter triângulos retângulos, nem obtusângulos, pelas seções planas de um cubo.

- Seções quadrangulares



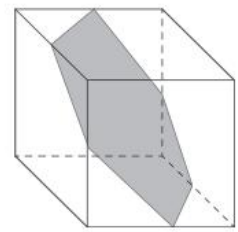
Pode-se obter quadrados, retângulos trapézios, losangos e paralelogramos por meio de seções planas de um cubo.

- Seção pentagonal



Não é possível obter um pentágono regular pela seção plana de um cubo.

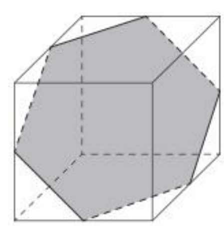
- Seção hexagonal



Pela seção plana de um cubo, é possível obter um hexágono regular, desde que o plano intercepte as arestas do cubo em seus respectivos pontos médios.

### Exercício resolvido

**30. UPE 2018** Qual é, aproximadamente, a medida da área do hexágono regular obtido ao seccionarmos um cubo de aresta 4 cm por um plano que contém os pontos médios de seis arestas, opostas duas a duas, conforme apresentado na figura ao lado? Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$.



**a)** 5 $cm^2$
**b)** 10 $cm^2$
**c)** 20 $cm^2$
**d)** 25 $cm^2$
**e)** 45 $cm^2$

**Resolução:**

A distância entre os pontos médios de duas arestas consecutivas de um cubo é igual à metade do comprimento da diagonal do quadrado, que é face do cubo.

Assim, o lado do hexágono mede $\ell = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Como a área de um hexágono regular equivale a 6 vezes a área de um triângulo equilátero com o mesmo lado, a área dessa seção do cubo deve medir:

$$S = 6 \cdot \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{8 \cdot 1{,}7}{4} = 20{,}4\ cm^2$$

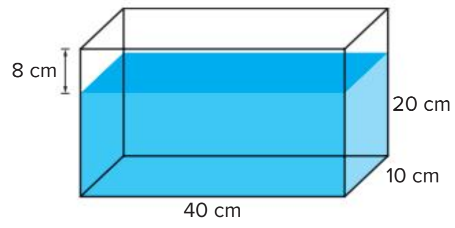
Alternativa: C

## Revisando

1. **CPII-RJ 2020** Uma das etapas de tratamento da água de piscinas e também das águas para consumo humano é a adição de "cloro", etapa denominada **cloração**. Porém, é interessante notar que nem sempre se adiciona cloro puro na água. Na maioria das vezes, adiciona-se uma solução de hipoclorito de sódio, conhecida como "cloro líquido". Dependendo do objetivo que se pretende, são utilizadas soluções com concentrações diferentes. No tratamento de água para consumo humano, a solução de hipoclorito de sódio adicionada tem concentração em massa de 0,4 mg/L.

Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br. Acesso em: 30 jun. 2019 (adaptada).

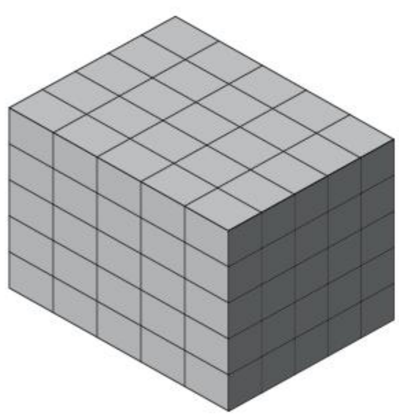
Considere um recipiente no formato de um paralelepípedo, com medidas internas de 40 cm (comprimento), 10 cm (largura) e 20 cm (altura), conforme a figura a seguir. Observe que a altura da água dentro do recipiente não atinge os 20 cm, sobrando 8 cm de altura sem água.




Sabendo que a água contida nesse recipiente será destinada, exclusivamente, para consumo humano e atende às recomendações de tratamento mencionadas no texto inicial, a quantidade (em mg) de hipoclorito de sódio que deve ser adicionada é de

a) 1,92
b) 2,48
c) 3,96
d) 4,80

2. **Enem 2014** Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: 25 cm de comprimento; 10 cm de altura e 15 cm de profundidade. O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de 125 caixas dispostas conforme a figura.



Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

a) 3 750 $cm^3$
b) 18 750 $cm^3$
c) 93 750 $cm^3$
d) 468 750 $cm^3$
e) 2 343 750 $cm^3$

**3. Enem 2014** O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100 foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

a) 6
b) 600
c) 6 000
d) 60 000
e) 6 000 000

**4. Enem 2017** Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm;
- Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm;
- Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm;
- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm;
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm.

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

**5. UFRGS 2016** Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por

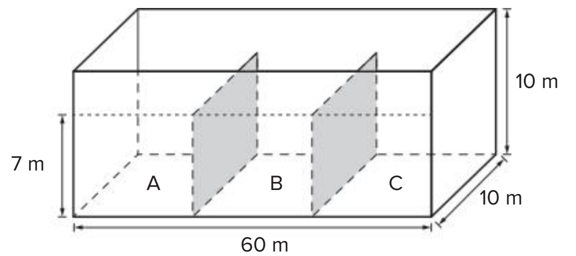
$$x, x + 4 \text{ e } x - 1.$$

Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são:

a) 1, 1 e 12.
b) 1, 2 e 6.
c) 1, 3 e 4.
d) 2, 2 e 3.
e) 2, 3 e 4.

FRENTE 3

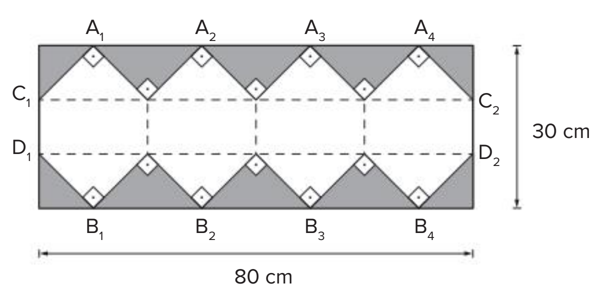
**6.** **Enem 2016** Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.




Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima; ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.
Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.
Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

**a)** $1{,}4 \cdot 10^3$ m³. **b)** $1{,}8 \cdot 10^3$ m³. **c)** $2{,}0 \cdot 10^3$ m³. **d)** $3{,}2 \cdot 10^3$ m³. **e)** $6{,}0 \cdot 10^3$ m³.

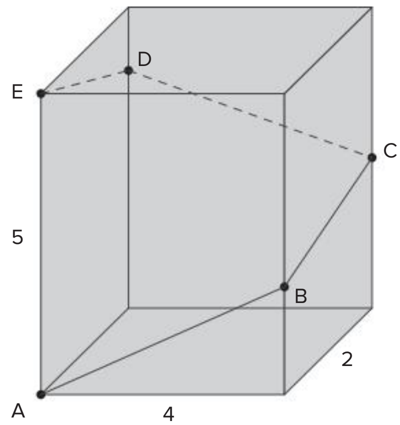
**7.** Para fazer uma embalagem, um pedaço de papelão retangular de 80 cm × 30 cm será recortado, dobrado e colado. A figura a seguir esboça as características do recorte, que tem o propósito de excluir os triângulos retângulos e isósceles pintados. Depois disso, serão feitas dobras sobre as linhas tracejadas, como mostra a figura.




Após recortado e dobrado, a superfície do sólido deve ser obtida ao se fazer coincidir os pontos $A_1$, $A_2$ e $A_3$ com $A_4$, bem como os pontos $B_1$, $B_2$ e $B_3$ com $B_4$. O ponto $C_1$ deve coincidir com $C_2$, e o ponto $D_1$ com $D_2$.

**a)** Faça um esboço do formato tridimensional da embalagem, indicando as medidas das suas dimensões.
**b)** Quanto mede a superfície exterior dessa caixa?
**c)** Qual é o volume, em centímetros cúbicos, e a capacidade, em litros, dessa embalagem?
**d)** Qual é a maior distância entre dois pontos situados na superfície dessa embalagem?

**8. ESPM-SP 2017** Em volta do paralelepípedo retorretângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D. De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:

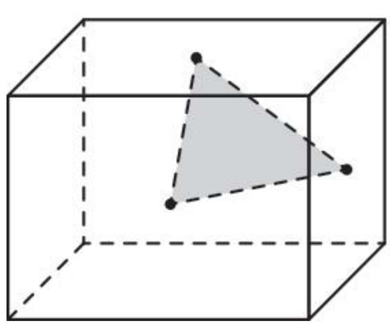



a) 15 b) 13 c) 16 d) 14 e) 17

**9. Enem 2014** A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo retorretângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura) de, respectivamente, 4,0 m, 3,0 m e 2,5 m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de 17 700 $cm^2$ e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.
Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a:

a) 9 b) 13 c) 19 d) 25 e) 45

**10. Unicamp-SP 2019** Considere um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm comprimento 6 cm, 8 cm e 10 cm, e um triângulo cujos vértices são os centros (interseção das diagonais) de três faces de dimensões distintas, como ilustra a figura a seguir. O perímetro P desse triângulo é tal que



a) $P < 14$ cm. b) $14 \text{ cm} < P < 16$ cm. c) $16 \text{ cm} < P < 18$ cm. d) $P > 18$ cm.

FRENTE 3

## Exercícios propostos

**1. Enem**

**Café no Brasil**

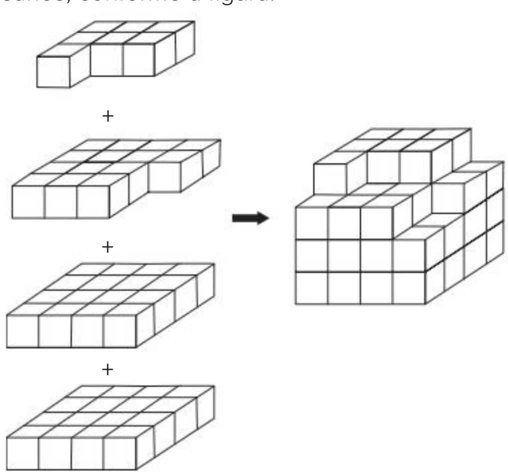
O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior. De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

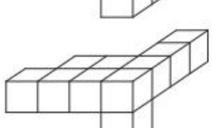
**a)** 8 bilhões de litros.
**b)** 16 bilhões de litros.
**c)** 32 bilhões de litros.
**d)** 40 bilhões de litros.
**e)** 48 bilhões de litros.

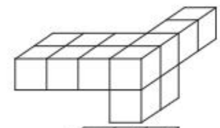
**2. Enem 2018** *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.
Um jogador deseja construir um cubo com dimensões 4 × 4 × 4. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

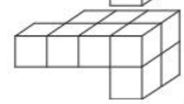


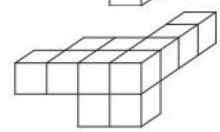
Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo 4 × 4 × 4 é:

**a)**

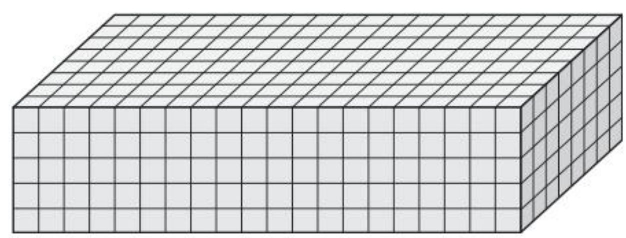

**b)**


**c)**


**d)**


**e)**


**3. Unicamp-SP 2012** Um queijo tem o formato de paralelepípedo, com dimensões 20 cm × 8 cm × 5 cm. Sem descascar o queijo, uma pessoa o divide em cubos com 1 cm de aresta, de modo que alguns cubos ficam totalmente sem casca, outros permanecem com casca em apenas uma face, alguns com casca em duas faces e os restantes com casca em três faces. Nesse caso, o número de cubos que possuem casca em apenas uma face é igual a:



**a)** 360 **b)** 344 **c)** 324 **d)** 368

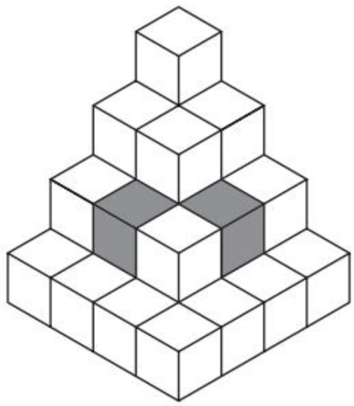
**4. Fuvest-SP 2021** Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 60 cm × 24 cm × 18 cm, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medias das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?

**a)** 60
**b)** 72
**c)** 80
**d)** 96
**e)** 120

**5. UFPR 2017** A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

**a)** 37 500 litros.
**b)** 375 000 litros.
**c)** 3 750 000 litros.
**d)** 37 500 000 litros.
**e)** 375 000 000 litros.

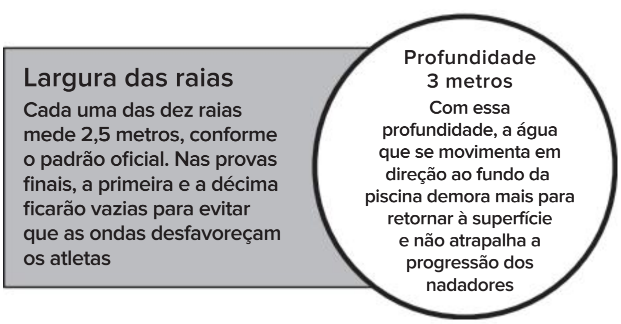
6. **FGV-SP 2021** A figura mostra um sólido composto por 30 cubos idênticos. Quando os cubos destacados em cinza são retirados, a área total do sólido aumenta em 144 $cm^2$.



O volume do sólido original, sem a retirada dos cubos destacados em cinza, é igual a

a) 1 920 $cm^3$.
b) 2 733,75 $cm^3$
c) 3 750 $cm^3$.
d) 4 991,25 $cm^3$
e) 6 480 $cm^3$.

7. **Enem PPL 2017** Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:




Veja, n. 2 278, jul. 2012 (adaptado).

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

a) 3 750
b) 1 500
c) 1 250
d) 375
e) 150

8. **Enem 2017** Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.
A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:

a) 11,25
b) 27,00
c) 28,80
d) 32,25
e) 49,50

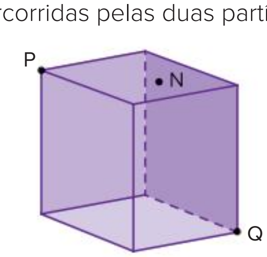
9. **PUC-RS 2017** Muitos prédios que estão sendo construídos em nossa cidade possuem caixas-d'água com a forma de um paralelepípedo. Um construtor quer adquirir duas delas que tenham internamente a mesma altura, mas diferindo na base, que deverá ser quadrada em ambas. A primeira deverá ter a capacidade para 16 000 litros, e a segunda para 25 000 litros. A razão entre a medida do lado da base da primeira e da segunda é:

a) 0,08
b) 0,60
c) 0,75
d) 0,80
e) 1,25

10. **Enem 2014** Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 $cm^3$ cada, que ficarão totalmente submersas no aquário.
Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário.
O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a:

a) 48
b) 72
c) 84
d) 120
e) 168

11. **UFPR 2021** Considere o cubo de aresta 2 cm na figura abaixo, em que os pontos P e Q são vértices do cubo e N é o centro de uma das faces. Duas partículas A e B se deslocam sobre a superfície do cubo, percorrendo o caminho mais curto possível. A partícula A inicia sua trajetória em P e encerra em Q, e a partícula B vai do ponto P ao ponto N e em seguida ao ponto Q. Qual é a diferença em módulo, em cm, entre as distâncias percorridas pelas duas partículas?

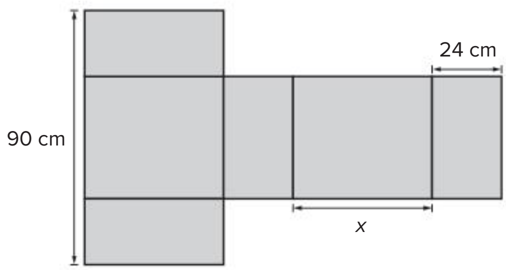



a) $6 + \sqrt{2} - \sqrt{5}$
b) $2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$
c) $4 + \sqrt{2}$
d) $4 + 2\sqrt{2}$
e) $\sqrt{2} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}$

FRENTE 3

**12.** **Enem 2014** Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

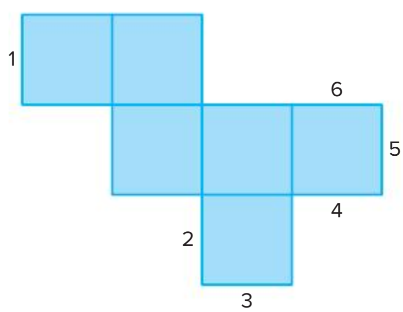
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.




O maior valor possível para $x$, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

**a)** 25
**b)** 33
**c)** 42
**d)** 45
**e)** 49

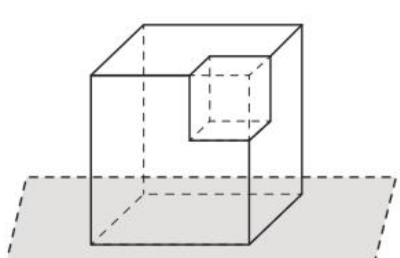
**13.** **UFJF/Pism-MG 2020** A figura a seguir apresenta uma planificação de um cubo:




Nesta figura estão numerados de 1 a 6 alguns lados dos polígonos que formam essa planificação. Ao se reconstituir o cubo a partir dessa planificação, qual dos lados formará a mesma aresta que o lado 1?

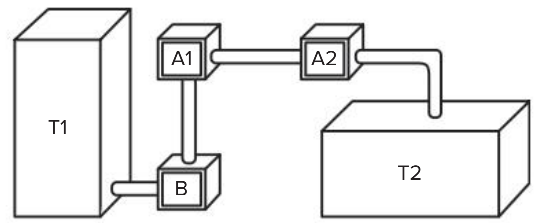
**a)** 2
**b)** 3
**c)** 4
**d)** 5
**e)** 6

**14.** **UPE 2017** Um sólido foi construído removendo-se um cubo menor de um cubo maior, como mostra a figura a seguir. Se a diferença entre as medidas das arestas dos dois cubos é de 4 cm e a medida do volume do sólido é 208 cm$^3$, qual a medida da área lateral da superfície do sólido?



**a)** 136 cm$^2$.
**b)** 144 cm$^2$.
**c)** 160 cm$^2$.
**d)** 204 cm$^2$.
**e)** 216 cm$^2$.

**15.** **Enem 2020** Um processo de aeração, que consiste na introdução de ar num líquido, acontece do seguinte modo: uma bomba B retira o líquido de um tanque T1 e o faz passar pelo aerador A1, que aumenta o volume do líquido em 15%, e em seguida pelo aerador A2, ganhando novo aumento de volume de 10%. Ao final, ele fica armazenado num tanque T2, de acordo com a figura.



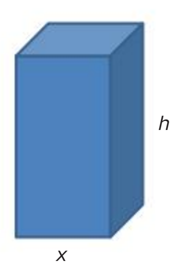

Os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares, sendo que a base de T1 tem comprimento $c$ e largura L , e a base de T2 tem comprimento $\frac{c}{2}$ e largura 2L.

Para finalizar o processo de aeração sem derramamento do líquido em T2, o responsável deve saber a relação entre a altura da coluna de líquido que já saiu de T1, denotada por $x$, e a altura da coluna de líquido que chegou a T2, denotada por $y$.

A equação que relaciona as medidas das alturas $y$ e $x$ é dada por

**a)** $y = 1{,}265x$
**b)** $y = 1{,}250x$
**c)** $y = 1{,}150x$
**d)** $y = 1{,}125x$
**e)** $y = x$

**16.** **PUC-PR 2017** Considere uma caixa de leite na forma de um paralelepípedo de base quadrada, cujo volume é de 1 litro. O custo de fabricação da tampa e da base da caixa é de R$ 4,00 por cm$^2$, e o das faces laterais é de R$ 2,00 por cm$^2$; considere desprezível o custo da tampinha de plástico. Determine uma função $C(x)$ que expresse o custo de fabricação da caixa em função da aresta da base que vale $x$.

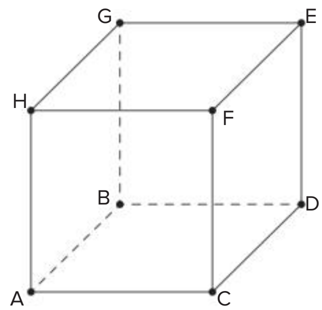



**a)** $C(x) = 8\left(x^2 + \frac{1000}{x}\right)$
**b)** $C(x) = 8\left(x^2 + \frac{1000}{x^2}\right)$
**c)** $C(x) = 4\left(x^2 + \frac{1000}{x^2}\right)$
**d)** $C(x) = 4x^2 + 2x$
**e)** $C(x) = 4x + 2$

**17.** **Unicamp-SP 2017** Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 $cm^2$, 3 $cm^2$ e 4 $cm^2$. O volume desse paralelepípedo é igual a:

a) $2\sqrt{3}$ $cm^3$.
b) $2\sqrt{6}$ $cm^3$.
c) 24 $cm^3$.
d) 12 $cm^3$.

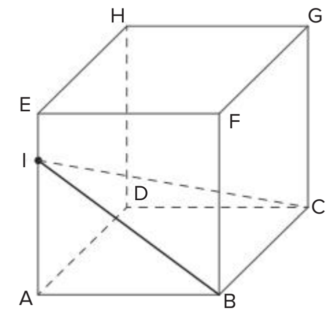
**18.** **UFRGS 2018** Uma partícula parte do ponto A e chega ao ponto H percorrendo a poligonal ABCDEFGH no cubo de aresta unitária, representado na figura abaixo.




A distância percorrida pela partícula é:

a) 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) 7.
d) $5 + 2\sqrt{2}$.
e) $5 + 2\sqrt{3}$.

**19.** **PUC-RS 2017** No cubo abaixo, de aresta igual a 8, o segmento $\overline{EI}$ mede a quarta parte do segmento $\overline{AE}$.




A área do triângulo BCI é igual a:

a) 24
b) 36
c) 40
d) 48
e) 80

**20.** **Uefs-BA 2018** Um cubo de isopor foi cortado em dois paralelepípedos retorretângulos congruentes, cada um com área total igual a 144 $cm^2$. A medida da aresta desse cubo é:

a) 6 cm.
b) 8 cm.
c) 12 cm.
d) 18 cm.
e) 24 cm.

## Texto complementar

### Bonaventura Cavalieri e algumas de suas ideias

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão por volta de 1598. Foi membro de uma ordem religiosa (os Jesuados). No ano de 1616, ele foi para Pisa, onde estudou Filosofia e Teologia. Conheceu o padre Benedito Castelli (1577-1644) que o apresentou a Galileu (1564-1642), do qual veio a tornar-se discípulo. Em 1629, foi indicado à cadeira de professor em Bolonha. Ocupou esse cargo até sua morte, em 1647 [...]. Podemos dizer que esse intelectual foi um padre e estudioso da Matemática, tendo estudado e publicado vasto material em Matemática pura e aplicada. Dentre os assuntos em que ele trabalhou podemos citar: geometria, trigonometria, astronomia. Ele é considerado como um dos responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa. [...] Em 1632, Cavalieri apresentou seu livro *Directorium universale uranometricum*, onde publicou tabelas de seno, tangentes e secantes, junto com seus logaritmos, até oito casas.

Durante o ano de 1635, Cavalieri apresentou a primeira versão da obra que lhe deu muito destaque, a famosa *Geometria indivisibilibus continuorum*. Nesse trabalho, ele apresenta seu método dos indivisíveis. Em seu livro de *Introdução à História da Matemática*, o autor Howard Eves diz que o método dos indivisíveis de Cavalieri tem raízes que remontam a Demócrito e Arquimedes, mas cuja motivação direta, talvez, se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

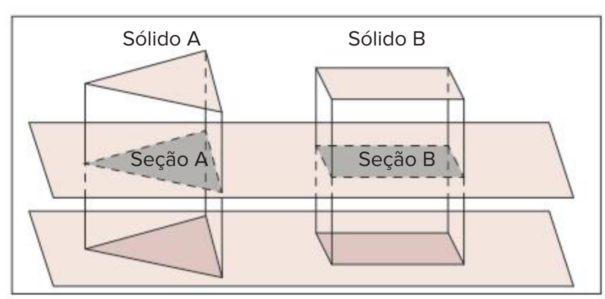
Segundo Boyer, o autor diz que na obra dos indivisíveis de Cavalieri, o argumento em que ele se baseia é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu, que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis.

[...] Cavalieri entendia por indivisível [...] de uma porção plana é uma corda dessa porção e, um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido. Podemos considerar que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de seções planas paralelas.

As ideias desenvolvidas por Cavalieri deram origem a dois princípios, denominados princípios de Cavalieri, um relativo ao cálculo de áreas e o outro que é muito utilizado para o cálculo de volumes. [...]

**O princípio de Cavalieri para volumes**

[...] Considere dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes V(A) e V(B) é essa constante.




Princípio de Cavalieri.

O princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas, para isso, devemos comparar as áreas das seções obtidas nos sólidos por planos paralelos ao plano das suas bases, sendo que esses sólidos deverão ter mesma altura e devem ser considerados apoiados sobre o mesmo plano. Se a razão entre as áreas de seções correspondentes é constante, então a razão entre os volumes dos sólidos considerados é essa mesma constante. Esse fato nos leva a entender que, se as áreas das seções correspondentes são iguais, os sólidos têm o mesmo volume.

PRIMO, Márcio Eduardo. *O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2013. p. 202-2.

## Resumindo

**Unidades de volume e capacidade**

1 L equivale a 1 $dm^3$

1 L equivale a 1 000 $cm^3$

1 $m^3$ equivale a 1 000 L

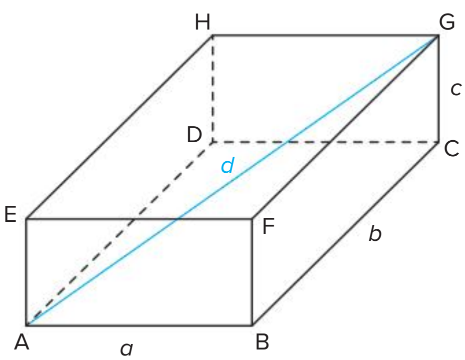
1 mL equivale a 1 $cm^3$

**Teorema da razão de semelhança no espaço**

Se dois sólidos geométricos são semelhantes um ao outro e $k$ é a razão dessa semelhança, então:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{comprimento}'} = k \qquad \frac{\text{área}}{\text{área}'} = k^2 \qquad \frac{\text{volume}}{\text{volume}'} = k^3$$

**Paralelepípedo retorretângulo**

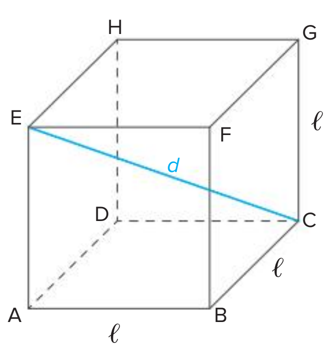



Volume: $V = a \cdot b \cdot c$

Área total: $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**Cubo**




Volume: $V = \ell^3$

Área total: $A_{total} = 6\ell^2$

Diagonal: $d = \ell\sqrt{3}$

### Quer saber mais?

**Livro**

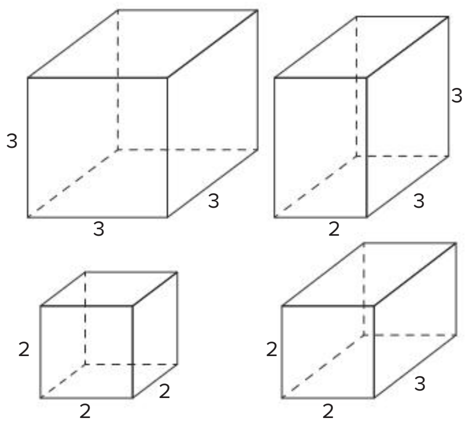
Crease, Robert P. *A medida do mundo*: a busca por um sistema universal de pesos e medidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

Nesse livro, o filósofo e historiador Robert P. Crase aborda detalhes da história da invenção de diversas unidades de medida e as relaciona com contextos históricos e necessidades humanas.

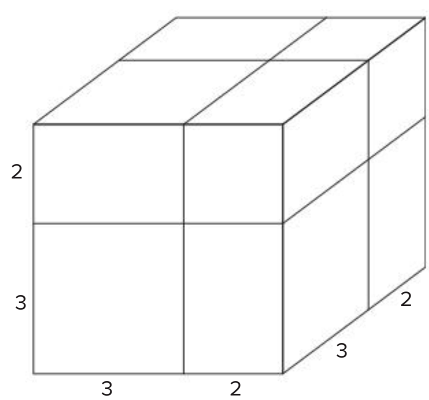
## Exercícios complementares

**1. UFJF-MG 2017** Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

- 01 peça cúbica com 2 cm de lado;
- 01 peça cúbica com 3 cm de lado;
- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 2 cm × 2 cm × 3 cm;
- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 3 cm × 3 cm × 2 cm.




Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo 5 × 5 × 5 conforme ilustração abaixo.




Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

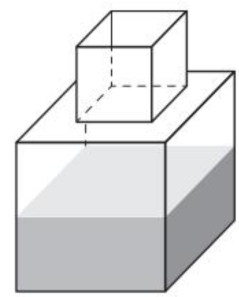
a) cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.
b) cúbicas totalizam 5 faces pintadas.
c) 2 × 2 × 3 totalizam 16 cm$^2$ de área de faces não pintadas.
d) 3 × 3 × 2 totalizam 63 cm$^2$ de área de faces não pintadas.
e) não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.

**2. Enem 2015** Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm$^3$ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar. O volume máximo, em cm$^3$, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450
b) 500
c) 600
d) 750
e) 1 000

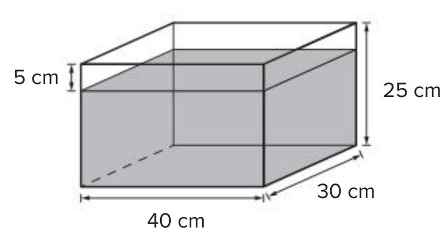
**3. Enem 2014** Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8 b) 10 c) 16 d) 18 e) 24

**4. Enem 2012** Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.




O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm$^3$?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

**5. Efomm-RJ 2019** Duas caixas cúbicas e retangulares perfeitas têm seis faces de quadrados perfeitos. As faces da primeira caixa têm 3 $m^2$ de área, e cada face da segunda caixa tem 9 $m^2$ de área. A razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é

a) $3^{\frac{1}{2}}$

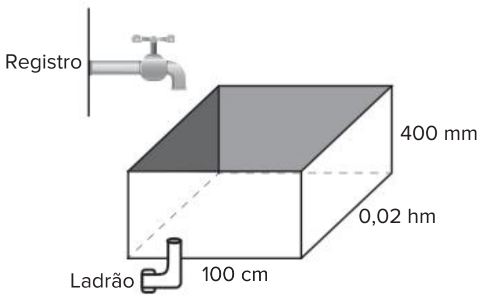
b) $3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{-\frac{3}{2}}$

d) $3^{\frac{3}{2}}$

e) $3^{-\frac{2}{3}}$

**6. EPCar-MG 2022** Uma caixa-d'água no formato de paralelepípedo reto retângulo, como ilustrado na figura abaixo, está inicialmente vazia.




Abre-se um registro com capacidade de 100 cL/min para encher a caixa-d'água. Quando ela está cheia, abre-se um ladrão com capacidade de esvaziá-la a 0,04 hL/min e fecha-se simultaneamente o registro.
A diferença entre o tempo de encher e esvaziar a caixa-d'água, nessa ordem, em horas, é

a) menor que 10
b) exatamente 10
c) maior que 10 e menor que 20
d) maior que 20

**7. UPE/SSA 2018** Um engenheiro construiu uma piscina em formato de bloco retangular a qual mede 7 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de profundidade. Após encher a piscina completamente, o engenheiro abriu um ralo que tem a capacidade de esvaziá-la à razão de 20 litros por minuto. Utilizando esse ralo, em quanto tempo o nível da água dessa piscina vai baixar em 10 centímentros?

a) 40 minutos.
b) 1 hora e 40 minutos.
c) 1 hora e 58 minutos.
d) 2 horas e 20 minutos.
e) 2 horas e 46 minutos.

**8. UEM/PAS-PR 2019** Considere um paralelepípedo reto retângulo cujos vértices da base superior (A, B, C, D) determinam as arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ dessa base. Considere ainda que $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ sejam as arestas laterais. Em relação a esse paralelepípedo, assinale o que for correto.

01 Se a altura desse paralelepípedo é $7\mu$ e se a projeção ortogonal de $\overline{CE}$ sobre a base inferior mede $24\mu$, então $CE = 25\mu$.

02 As retas que contém os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{GH}$ são reversas.

04 Se as dimensões desse paralelepípedo são diretamente proporcionais aos números 1, 2 e 3 e se a área total desse paralelepípedo e $550\mu^2$, então sua diagonal vale $3\sqrt{13}\mu$.

08 Se esse paralelepípedo for um cubo de aresta medindo $a$, então o perímetro do triângulo BEH é $\left(a + 2a\sqrt{2}\right)$

16 Se o volume desse paralelepípedo é $128\mu^3$ e se a área da base de vértices (A, B, C, D) é o dobro da área da face quadrada de vértices (A, B, E, F), então a aresta $\overline{AD}$ mede $8\mu$.

Soma:

**9. Enem PPL 2012** Em um terreno, deseja-se instalar uma piscina com formato de um bloco retangular de altura 1 m e base de dimensões 20 m × 10 m. Nas faces laterais e no fundo desta piscina será aplicado um líquido para a impermeabilização. Esse líquido deve ser aplicado na razão de 1 L para cada 1 $m^2$ de área a ser impermeabilizada. O fornecedor A vende cada lata de impermeabilizante de 10 L por R$ 100,00, e o B vende cada lata de 15 L por R$ 145,00.
Determine a quantidade de latas de impermeabilizante que deve ser comprada e o fornecedor a ser escolhido, de modo a se obter o menor custo.

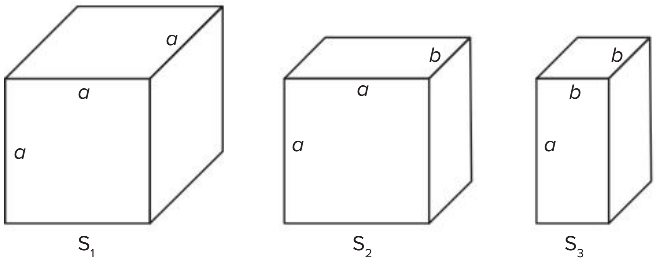
a) Fabricante A, 26 latas.
b) Fabricante A, 46 latas.
c) Fabricante B, 17 latas.
d) Fabricante B, 18 latas.
e) Fabricante B, 31 latas.

**10. UEPG-PR 2016** Três cubos idênticos foram colados entre si formando um paralelepípedo, cuja área total vale 350 $cm^2$. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01 O volume do paralelepípedo é 475 $cm^3$.
02 A área total de cada cubo é 150 $cm^2$.
04 O volume de cada cubo é 125 $cm^3$.
08 A soma das arestas do paralelepípedo é 80 cm.

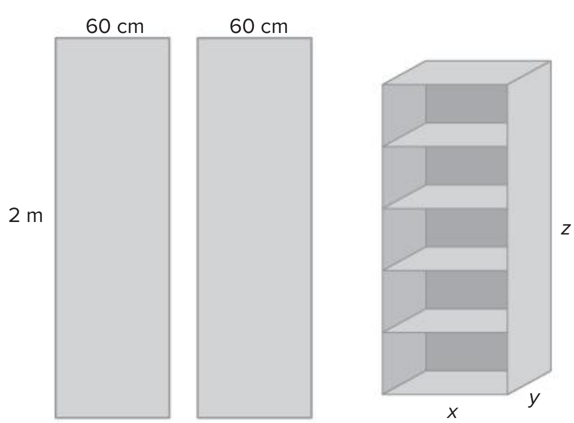
Soma:

**11. Unicamp-SP 2016** Considere os três sólidos exibidos na figura abaixo, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, $a$ e $b$, são tais que $a > b > 0$.




a) Determine a razão $r = \frac{a}{b}$ para a qual o volume de $S_1$ é igual à soma dos volumes de $S_2$ e $S_3$.
b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60 cm, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos.

**12. ESPM-SP 2018** Um marceneiro dispunha de 2 placas de madeira iguais, medindo 60 cm por 2 m. Sem sobrepor as placas, ele fez exatamente 7 cortes retilíneos, dividindo-as em peças retangulares, com as quais construiu a estante mostrada ao lado, sem sobra alguma de material.



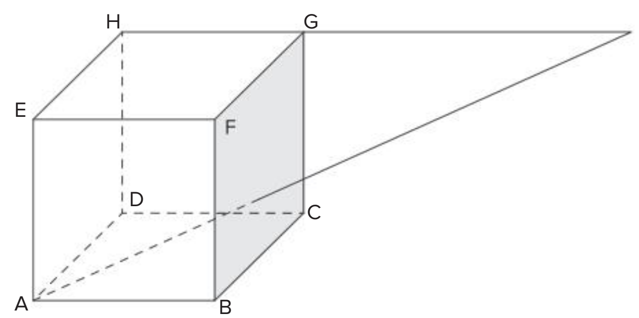

Supondo desprezíveis as espessuras dos cortes e das placas, podemos afirmar que o volume $V = x \cdot y \cdot z$ ocupado pela estante, em $cm^3$ é igual a:
a) 264 000
b) 176 000
c) 198 000
d) 236 000
e) 218 000

**13. UEG-GO 2016** Alterando-se as dimensões de uma caixa retangular de altura $h$, as dimensões da base serão multiplicadas por $k$ e as da altura somado $k$, em que $k$ é uma constante positiva e não nula. Logo, verifica-se que o volume da nova caixa será em relação à anterior

a) $k^3$ vezes maior.
b) $k^2 + kh$ vezes maior.
c) $k^2 + \frac{k^3}{h}$ vezes maior.
d) $k^3 + \frac{\sqrt{h}}{k}$ vezes maior.

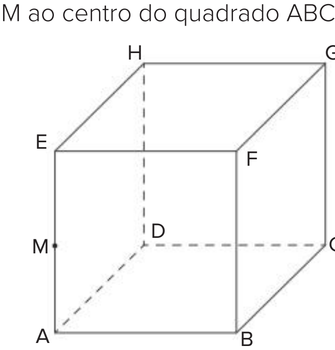
**14. IFSul-RS 2016** Um tanque vazio, com formato de paralelepípedo retorretângulo, tem comprimento de 8 metros, largura de 3 metros e altura de 1,5 metros. Esse tanque é preenchido com óleo a uma vazão de 1 000 litros a cada 15 minutos.
Nesse sentido, após duas horas do início do preenchimento, a altura de óleo no interior do tanque atingirá, aproximadamente,
a) 24 cm.
b) 33 cm.
c) 1,05 m.
d) 1,15 m.

**15. UPE 2018** Na figura representada a seguir, em que o segmento GP mede 6 cm, e o ângulo $A\hat{P}H$ tem tangente igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}$, qual é o volume do cubo ABCDEFGH?




a) 6 $cm^3$.
b) 8 $cm^3$.
c) 27 $cm^3$.
d) 64 $cm^3$.
e) 125 $cm^3$.

**16. Fuvest-SP** O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimento $a$. Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta $\overline{AE}$, então a distância do ponto M ao centro do quadrado ABCD é igual a




a) $\frac{a\sqrt{3}}{5}$
b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
d) $a\sqrt{3}$
e) $2a\sqrt{3}$

FRENTE 3

**17.** **UFJF-MG 2017** Gui ganhou um aquário em forma de paralelepípedo retangular, e quer enchê-lo com 640 mL de água. Gui resolveu colocar o aquário em cima da mesa. Ao apoiar a face A em cima da mesa, a água atingiu altura de 4 cm. Ao apoiar a face B em cima da mesa, a altura que a água atingiu foi de 8 cm. Ao colocar a face C em contato com a mesa, a água atingiu a altura de 10 cm.

a) Determine as medidas das dimensões do aquário.
b) Determine a medida da área da menor face do aquário.
c) Determine a medida do volume do aquário, em litros.

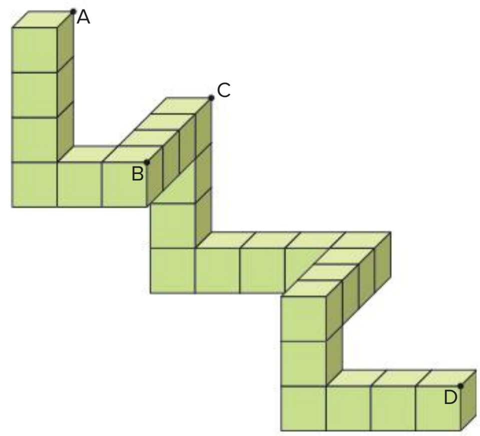
**18.** **EsPCEx-SP 2015** As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida de sua área total, em $cm^2$, é:

a) 752
b) 820
c) 1 024
d) 1 302
e) 1 504

**19.** **IME-RJ 2018** Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 $cm^2$. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm
b) $\sqrt{19}$ cm
c) $\sqrt{21}$ cm
d) $2\sqrt{7}$ cm
e) $\sqrt{29}$ cm

**20.** **Unifesp 2017** Um sólido é formado por 24 cubos idênticos, conforme a figura. O contato entre dois cubos contíguos sempre se dá por meio da sobreposição perfeita entre as faces desses cubos. Na mesma figura também estão marcados A, B, C e D, vértices de quatro cubos que compõem o sólido.




a) Admitindo-se que a medida de $\overline{AB}$ seja $2\sqrt{7}$ cm, calcule o volume do sólido.
b) Calcule a medida de $\overline{CD}$ admitindo-se que a medida da aresta de cada cubo que compõe o sólido seja igual a 2 cm.

## BNCC em foco

EM13MAT504

**1.** Dois paralelepípedos têm as seguintes dimensões.

- 10 cm × 2 dm × 0,5 m
- 0,2 m × 0,0008 hm × 500 mm

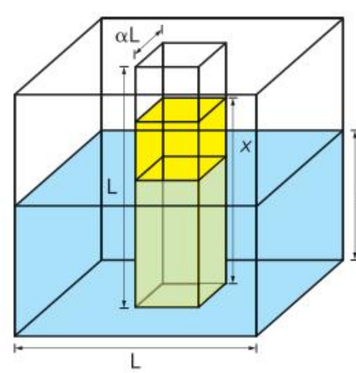
Qual é a diferença entre o volume do maior e do menor paralelepípedo, em $m^3$?

a) 0,001
b) 0,008
c) 0,002
d) 0,016

Use as informações a seguir para responder aos exercícios **2** e **3**.

Em um recipiente de formato cúbico de aresta L e espessura desprezível, aberto na face superior, é inserido um recipiente com formato de paralelepípedo reto, também com espessura desprezível e aberto na face superior. Esse segundo recipiente tem base quadrada de aresta $\alpha L$ e altura L, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$.

O recipiente interno é preenchido com uma altura $x$ de água, com $0 < x < L$, e o recipiente externo é preenchido com o mesmo volume de água, atingindo uma altura $y$, como mostra a figura.




EM13MAT504

**2.** Qual é a lei da função que relaciona as alturas $y$ e $x$?

a) $y = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha}x$
b) $y = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2}x$
c) $y = \dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}x$
d) $y = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha^2}x$

EM13MAT504

**3.** Para qual valor de $\alpha$ a altura $x$ é sempre o dobro da altura $y$?

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Juan Roballo/Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

13

# Poliedros

Neste capítulo, estudaremos os poliedros, que são sólidos geométricos cercados por superfícies planas. São poliedros os sólidos estudados no capítulo anterior, os paralelepípedos. Além deles, são também poliedros sólidos como as pirâmides, os prismas, os octaedros, entre outros.

O estudo dos poliedros envolve diversos assuntos, como o cálculo de áreas e volumes. Um dos mais importantes é a característica de Euler, uma função que associa cada poliedro a um número inteiro, que é constante para os poliedros convexos.

# Introdução

Qualquer sólido geométrico cercado exclusivamente por superfícies planas é denominado poliedro. A palavra, que vem do grego antigo, é a junção de "*poli*", que significa muitos, e "*hedros*", que significa planos.

Alguns poliedros são abertos, como os diedros (dois planos) e os triedros (três planos), que já estudamos. Embora também existam poliedros abertos formados por mais de três planos, o foco deste capítulo será o estudo dos poliedros fechados, ou seja, aqueles cuja superfície cerca completamente uma região do espaço e, portanto, são dotados da grandeza do volume.

## Métrica dos poliedros fechados

Poliedros fechados são formas geométricas compostas de **vértices**, **arestas** e **faces**. Cada vértice de um poliedro possui, no mínimo, três medidas angulares. A cada aresta, que pertence a duas faces que determinam um ângulo diedro, além do comprimento, podemos associar uma medida angular. Cada face é um polígono que possui ângulos internos, perímetro, diagonais (se não for uma face triangular) e, principalmente, área.

O conjunto de todas as faces de um poliedro determina o que chamamos de superfície. Esta também possui uma área, que denominamos **área total**. Assim, a área total de um poliedro equivale à soma das áreas de todas as suas faces.

Sendo $A_F = (A_1, A_2, A_3, ...)$ a sucessão dos valores das áreas de cada face de um poliedro fechado, a área total desse poliedro é expressa por:

$$A_{total} = \sum A_F = A_1 + A_2 + A_3 + ...$$

Em alguns tipos de poliedros, como as pirâmides e os prismas, uma ou mais faces (poligonais) podem ser chamadas de base ou bases. As pirâmides, por exemplo, possuem apenas uma base; os prismas possuem duas bases com mesma área; e os troncos de pirâmide possuem duas bases com áreas diferentes. Nesses casos, sobre a superfície do poliedro, podem ser definidas as seguintes áreas:

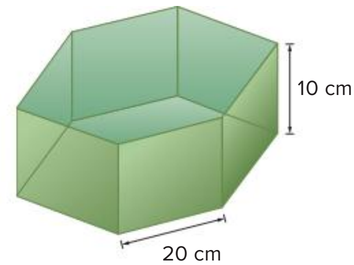
| | | |
|---|---|---|
| Área da base | Área lateral | Área total |

A área total de um poliedro é definida como a soma das áreas laterais (todas as faces que não são bases) com a área das bases (ou da base, quando for o caso).

Por fim, todo poliedro fechado possui volume.

### Exercício resolvido

**1.** Uma caixa de madeira tem o formato de um poliedro aberto cuja base é um hexágono regular de lado 20 cm e as faces laterais são retângulos com 10 cm de altura.




Usando $\sqrt{3} = 1{,}73$, encontre os valores aproximados:

**a)** da área da base da caixa.
**b)** da área da superfície lateral exterior da caixa.
**c)** da área total da superfície exterior da caixa.

**Resolução:**

**a)** A área de um hexágono regular de lado $\ell$ é dada por $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$, assim, como $\ell = 20$ cm, a base do poliedro tem uma área, em $cm^3$, de:

$$\frac{3 \cdot 20\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} = 600 \cdot 1{,}73 = 1038$$

**b)** A área da face lateral desse poliedro mede:

$$20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

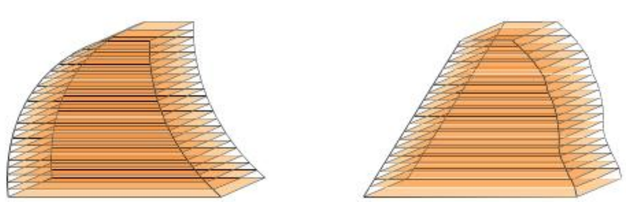
Então, como o poliedro possui seis faces laterais congruentes, sua área lateral é de $6 \cdot 200 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ cm}^2$.

**c)** Como a caixa é um poliedro aberto com apenas uma base, a área total, em $cm^2$, é dada por:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 1200 + 1038 = 2\,238$$

## Princípio de Cavalieri no espaço

Outra ideia presente no pensamento de Eudoxo e Arquimedes, formalizada como conhecemos atualmente pelo trabalho do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, é a de que porções limitadas do espaço podem ser cobertas por uma infinidade de figuras planas paralelas postas umas sobre as outras.



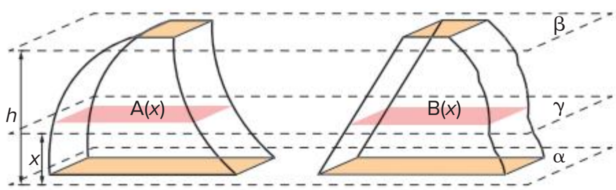
De acordo com o princípio de Cavalieri, dadas duas regiões espaciais inscritas em um mesmo par de planos paralelos $\alpha$ e $\beta$, sendo $V_1$ e $V_2$ seus respectivos volumes, temos que:

- Se todo plano $\gamma$ paralelo a $\alpha$ e $\beta$ que intercepta as duas regiões determinar seções planas de mesma área, então essas duas regiões terão o mesmo volume.

$$A(x) = B(x) \Rightarrow V_1 = V_2$$

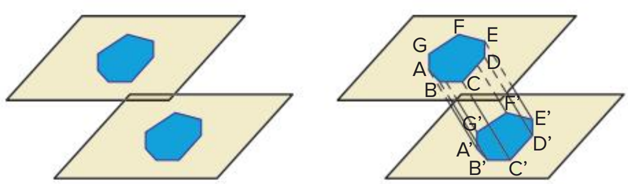
- Se todo plano $\gamma$ paralelo a $\alpha$ e $\beta$ que intercepta as duas regiões determinar seções planas cujas áreas estão em uma razão constante, então os volumes dessas duas regiões também estarão nessa razão.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = k \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = k$$



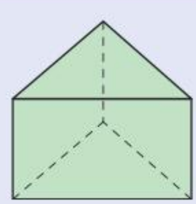
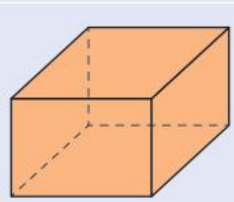
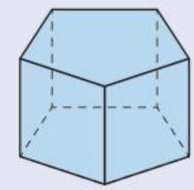
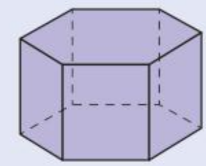

## Prismas

Considere dois polígonos congruentes que pertençam a planos paralelos e estabeleça uma correspondência entre os pontos que os definem. Se os segmentos de reta que unem cada par de pontos correspondentes forem paralelos uns aos outros, o formato geométrico determinado por esses segmentos, junto aos polígonos tomados, será denominado **prisma**.




Um prisma possui duas bases e algumas faces laterais. Os dois polígonos congruentes situados em planos paralelos são as bases do prisma. O número de lados dos polígonos que são as bases do prisma será designado por $n$. Assim, no caso apresentado, $n = 7$; isso significa que as bases do prisma são heptagonais.

O número de lados das bases dos prismas permite classificá-los em diversas categorias distintas:

| Tipo de prisma | Número de lados das bases | Imagem possível |
|---|---|---|
| **Prisma triangular** | $n = 3$ |  |
| **Prisma quadrangular** | $n = 4$ |  |
| **Prisma pentagonal** | $n = 5$ |  |
| **Prisma hexagonal** | $n = 6$ |  |

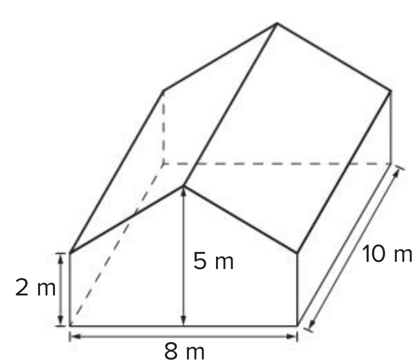
Os elementos de um prisma que não pertencem aos planos das bases são chamados de laterais. Por isso, as arestas paralelas que ligam os vértices de uma base a outra são chamadas de arestas laterais do prisma, e os paralelogramos determinados por essas arestas denominados faces laterais do prisma.

**! Atenção**

Para determinar se um poliedro é ou não um prisma, devemos verificar as seguintes condições:
- A existência de dois polígonos congruentes opostos um ao outro.
- O paralelismo entre os planos que contém esses dois polígonos (bases).
- O paralelismo entre as arestas laterais.

## Exercício resolvido

**2.** A figura a seguir representa o projeto para a construção de um galpão, dotado de simetria bilateral, que ocupará um terreno retangular de 8 m por 10 m.




Sabendo que, depois de construído, o galpão terá o formato de um prisma reto, responda às seguintes perguntas:

**a)** Que altura terá o galpão?
**b)** Que altura terá o prisma que dá forma ao galpão?

**Resolução:**

**a)** De acordo com a figura, o galpão terá 5 m de altura na parte mais alta e 2 m de altura nas regiões próximas às suas paredes laterais.

**b)** Como as bases do prisma são os pentágonos e a altura de um prisma equivale à distância entre essas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma ao galpão terá 10 m de altura.

Os **prismas quadrangulares** também são chamados de **hexaedros**, por terem exatamente seis faces, e de **paralelepípedos**, quando todas essas faces são paralelogramos.

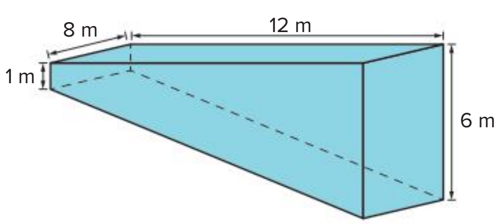
Os paralelogramos são os únicos tipos de prismas cujo qualquer par de faces opostas pode ser considerado como o par de bases do prisma.

Quando houver, em um hexaedro, faces que não são paralelogramos (sendo trapézios, por exemplo), estas deverão ser consideradas bases do prisma.

Em prismas que possuem um número de faces diferente de seis, sempre há um par de faces opostas que não possuem quatro lados, sendo, por exemplo, triangulares ou hexagonais. Nesses casos, as faces não quadrangulares devem ser consideradas bases do prisma.

## Exercício resolvido

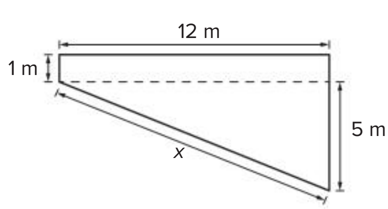
**3.** O hexaedro a seguir representa o formato de uma piscina de mergulho com 8 m de largura por 12 m de comprimento e profundidade variando de 1 m na parte rasa a 6 m na parte funda.




Sabendo que, uma vez cheia, a água dentro dessa piscina assume o formato de um prisma reto, calcule o perímetro da base desse prisma.

**Resolução:**

A base do prisma formado pela piscina é o trapézio retângulo representado pela figura a seguir:




Traçando uma reta paralela ao lado de 12 m, dividimos o trapézio em duas figuras: um retângulo de 1 m × 12 m e um triângulo retângulo de catetos 12 m e 5 m.

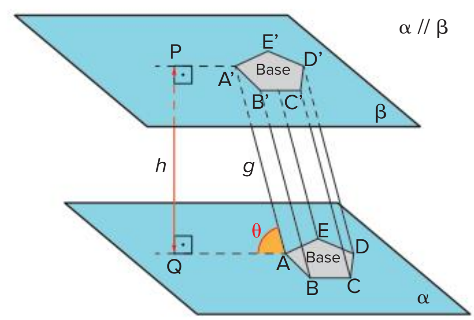
Sendo $x$ a medida da hipotenusa desse triângulo, do teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 12^2 + 5^2, \text{ com } x > 0, \text{ logo } x = 13 \text{ m}$$

Portanto, o perímetro da base do prisma mede: 1 m + 12 m + 6 m + 13 m = 32 m.

## Inclinação e altura

Considere um prisma de bases ABCDE e A'B'C'D'E', respectivamente contidas nos planos paralelos $\alpha$ e $\beta$.




Os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são denominados arestas laterais do prisma, uma vez que não estão contidos nos planos de suas bases.

Sobre as arestas laterais de um prisma, sabe-se que:

- Têm o mesmo comprimento:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$$

- São paralelas:

$$AA' \,//\, BB' \,//\, CC' \,//\, DD' \,//\, EE'$$

Por serem paralelas entre si, as arestas laterais de um prisma formam ângulos de mesma medida com os planos que contêm as bases dele. A medida $\theta$ desses ângulos, como mostrado na figura acima, é denominada inclinação do prisma.

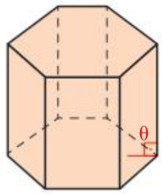
O valor da inclinação de um prisma permite classificá-lo em duas categorias distintas: prismas retos ou prismas oblíquos.

Os prismas retos possuem 90° de inclinação, e os prismas oblíquos não.

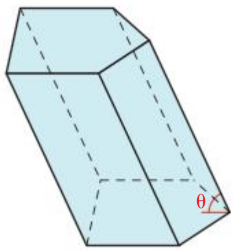
| Tipo de prisma | Inclinação |
|---|---|
| Prisma reto | $\theta = 90°$ |
| Prisma oblíquo | $\theta \neq 90°$ |

Assim, os prismas devem ser classificados considerando o número de lados de suas bases e o valor de sua inclinação.

Um **prisma hexagonal reto**, por exemplo, possui hexágonos como bases e inclinação de 90°.




Já um **prisma pentagonal oblíquo** possui pentágonos como bases e inclinação diferente de 90°.




A altura de um prisma tem medida $h$ que coincide com a distância entre os planos onde estão localizadas as bases do prisma.

$$h = d(\alpha, \beta)$$

Essa altura também pode ser calculada multiplicando o comprimento de uma aresta lateral pelo seno do ângulo de inclinação do prisma.

$$h = AA' \cdot \text{sen}\,(\theta)$$

Como o seno de 90° é unitário, as alturas dos prismas retos coincidem com os comprimentos de suas arestas laterais: $h = AA'$.

## Exercício resolvido

**4.** Qual a altura de um prisma triangular oblíquo com 45° de inclinação cujas arestas laterais medem 8 cm e os lados da base medem 2 cm?

**a)** $4\sqrt{3}$ cm.

**b)** $4\sqrt{2}$ cm.

**c)** 4 cm.

**d)** $2\sqrt{2}$ cm.

**e)** 2 cm.

**Resolução:**

$$h = 8\text{ cm} \cdot \text{sen}\,45^\circ = 8\text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

Observação: o comprimento dos lados da base não interfere no valor da altura do prisma.

Alternativa: **B**

### Estabelecendo relações

Podemos observar na natureza diversas estruturas que lembram entes matemáticos, como os prismas. As abelhas, por exemplo, constroem os favos, utilizados como ninho e para guardar mel e pólen. Eles são divididos em alvéolos e cada um tem uma forma que lembra um prisma, como podemos ver na imagem abaixo.

BigBlueStudio/Shutterstock.com

Foto de um favo de abelha.

Uma teoria que justifica a ocorrência de uma base hexagonal para os alvéolos é que o hexágono permite o "ladrilhamento" do plano com o menor gasto possível de cera na construção das paredes do alvéolo.
Outra ocorrência na natureza que lembra prismas é a Calçada dos Gigantes, na Irlanda do Norte.

Bencemor/Shutterstock.com

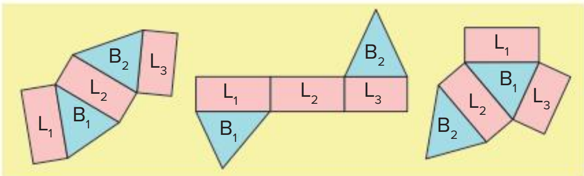
Calçada dos Gigantes, na Irlanda do Norte.

Essa estrutura é formada por colunas de basalto cujo formato lembra prismas, a maioria de base hexagonal. Acredita-se que esse formato se deve ao fato de as colunas terem sido formadas pela ação de atividade vulcânica, que empurrou basalto líquido em altas temperaturas até o solo e, conforme esse material resfriava, ele endurecia formando as colunas, em um processo semelhante ao ressecamento de lama.

## Planificações dos prismas

As planificações de um prisma são figuras geométricas planas formadas pela justaposição de polígonos congruentes às faces do prisma.

As figuras a seguir, formadas por três retângulos e dois triângulos congruentes, são possíveis planificações de um mesmo prisma triangular reto, por exemplo.




Planificações como essas permitem que todas as faces do prisma sejam observadas simultaneamente para que se compreendam melhor as relações entre as áreas da superfície desse tipo de sólido.

FRENTE 3

Sendo $L_i = (L_1, L_2, L_3, ...)$ a sucessão das áreas das faces laterais de um prisma e $B_1$ e $B_2$ as áreas das demais faces, sobre a superfície desse prisma, temos que:

Área da base: $B_1 = B_2$

Área lateral: $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

Área total: $2 \cdot$ (Área da base) + (Área lateral)

## Exercícios resolvidos

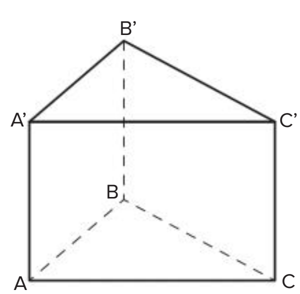
**5.** Calcule, em metros quadrados, a área lateral de um prisma reto com 20 cm de altura cuja base é o triângulo retângulo ABC de catetos AB = 30 cm e AC = 40 cm.

**a)** $2\,600\ m^2$.
**b)** $2\,400\ m^2$.
**c)** $26\ m^2$.
**d)** $24\ m^2$.
**e)** $0{,}24\ m^2$.

**Resolução:**

Do teorema de Pitágoras, temos que o lado $\overline{BC}$, que é a hipotenusa da base ABC desse prisma triangular reto, mede:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC^2 = 2\,500 \text{ com } BC > 0 \Rightarrow BC = 50 \text{ cm}$$




Sendo A', B' e C' os vértices da outra base do prisma de modo que as arestas laterais sejam $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, como se trata de um prisma reto, sua altura tem o mesmo comprimento dessas arestas laterais:

$$h = AA' = BB' = CC' = 20 \text{ cm}$$

As faces laterais do prisma são o retângulo:

- ABB'A' de área: $AB \cdot h = 30 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 600 \text{ cm}^2$.
- ACC'A' de área: $AC \cdot h = 40 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2$.
- BCC'B' de área: $BC \cdot h = 50 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^2$.

Portanto, a área lateral do prisma mede, em $cm^2$:

$600 + 800 + 1000 = 2\,400\ cm^2$.

Fazendo a conversão de unidades:

$2400\ cm^2 = 2400 \cdot (10^{-2}\ m)^2 = 2400 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 0{,}24\ m^2$

Alternativa: **E**

**6.** Qual é a área total do mesmo prisma da questão anterior, em $cm^2$?

**a)** $3\,600\ cm^2$.
**b)** $2\,400\ cm^2$.
**c)** $36\ cm^2$.
**d)** $24\ cm^2$.
**e)** $0{,}24\ cm^2$.

**Resolução:**

As bases desse prisma são triângulos retângulos cujos catetos medem 30 cm e 40 cm, portanto a área de cada base, em $cm^2$, é igual a $\frac{30 \cdot 40}{2} = 600$.

Como a área lateral do prisma é de $2\,400\ cm^2$ e prismas são dotados de duas bases congruentes, a área total do sólido é igual a $2 \cdot 600\ cm^2 + 2\,400\ cm^2 = 3\,600\ cm^2$.

Alternativa: **A**

**7.** A base de um prisma reto é um pentágono regular com 1,2 m de lado. Se a altura desse sólido for de 80 cm, então sua área lateral deverá medir:

**a)** $4\,800\ m^2$.
**b)** $480\ m^2$.
**c)** $48\ m^2$.
**d)** $4{,}8\ m^2$.
**e)** $0{,}48\ m^2$.

**Resolução:**

O prisma descrito possui cinco faces laterais congruentes em forma de retângulos com dimensões de 1,2 m por 80 cm. Assim, a área lateral desse prisma, em metros quadrados, é igual a: $5 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8$.

Alternativa: **D**

## Volume do prisma

Para se obter o volume de um prisma, basta multiplicar a área de uma das bases pelo comprimento da altura. Assim, sendo **B** a medida da área da base de um prisma de altura $h$, seu volume **V** é expresso por:

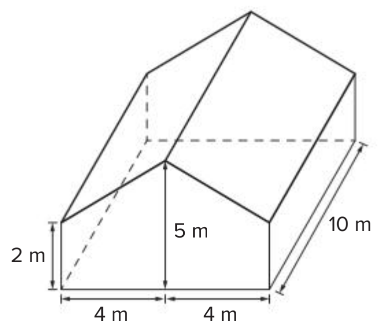
$$V = B \cdot h$$

A veracidade dessa expressão, para qualquer tipo de prisma, pode ser comprovada pelo princípio de Cavalieri para volumes. Considere um paralelepípedo retangular reto de dimensões $a$, $b$ e $c$, tais que o produto das medidas $a$ e $b$, por exemplo, seja equivalente à área da base de determinado prisma ($B = a \cdot b$) e que a medida $c$ coincida com a altura desse mesmo prisma ($h = c$). Nesse caso, do princípio de Cavalieri para volumes, temos que o paralelepípedo e o prisma têm o mesmo volume:

$$V = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = B \cdot h$$

## Exercícios resolvidos

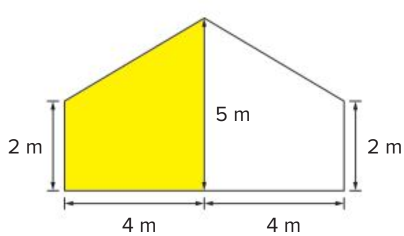
**8.** A figura a seguir representa o projeto de construção de um galpão, dotado de simetria bilateral, que ocupará um terreno retangular de 8 m por 10 m.




Calcule o volume, em metros cúbicos, desse galpão.

**Resolução:**

As bases do prisma que dá forma ao galpão são pentágonos, também dotados de simetria bilateral. Por isso, elas podem ser decompostas em dois trapézios retângulos congruentes, como mostra a figura:




A área de cada trapézio mede, em m$^2$:

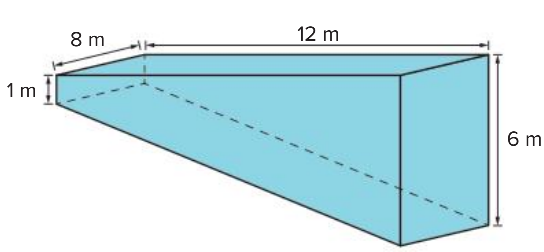
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(2+5)\cdot 4}{2} = \frac{7\cdot 4}{2} = 14$$

Assim, a área de cada base é: $A_{\text{base}} = 2\cdot 14\text{ m}^2 = 28\text{ m}^2$.

Como a altura de um prisma equivale à distância entre os planos de suas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma ao galpão tem altura $h = 10$ m. Portanto, o volume do galpão é igual a:

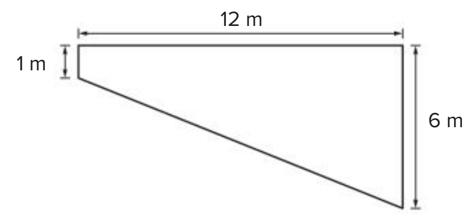
$$A_{\text{base}}\cdot h = 28\text{ m}^2\cdot 10\text{ m} = 280\text{ m}^3$$

**9.** Calcule a capacidade, em litros, de uma piscina com a forma do prisma reto representado pela figura a seguir:




**Resolução:**

As bases do prisma têm a forma do trapézio retângulo a seguir:




Portanto, a área da base desse prisma é, em m$^2$:

$$A_{\text{base}} = \frac{(1+6)\cdot 12}{2} = \frac{7\cdot 12}{2} = 42$$

Como a altura de um prisma equivale à distância entre os planos de suas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma à piscina tem altura $h = 8$ m. Assim, o volume da piscina, em m$^3$:

$$V_{\text{piscina}} = A_{\text{base}}\cdot h = 42\cdot 8 = 336$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que a piscina tem capacidade para 336 000 litros de água.

## Prismas regulares

Dizemos que um prisma é regular se, e somente se, forem satisfeitas as duas condições a seguir:

1. As bases do prisma são polígonos regulares.
2. O prisma é reto.

Da primeira condição, concluímos que todas as arestas da base têm o mesmo comprimento. Da segunda, concluímos que a altura do prisma tem o mesmo comprimento de suas arestas laterais.

Combinando as informações das duas condições, temos que todas as faces laterais do prisma são retangulares e congruentes umas às outras. Assim, dado um prisma regular de altura $h$ em que cada base possui $n$ lados de comprimento $\ell$, sua área lateral é expressa por:

$$A_{\text{lateral}} = n\cdot \ell\cdot h$$

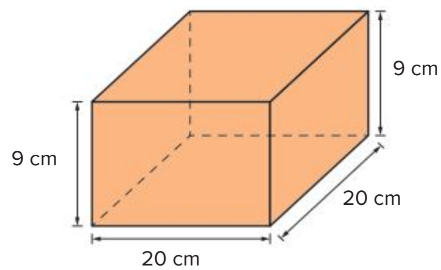
Assim, temos:

| Tipo de prisma | Área lateral |
|---|---|
| Triangular regular | $3\cdot \ell\cdot h$ |
| Quadrangular regular | $4\cdot \ell\cdot h$ |
| Pentagonal regular | $5\cdot \ell\cdot h$ |
| Hexagonal regular | $6\cdot \ell\cdot h$ |

## Exercícios resolvidos

**10.** Calcule a capacidade, em litros, de um prisma quadrangular regular cujas arestas da base medem 20 cm e as arestas laterais medem 9 cm.

**Resolução:**




As bases do prisma são quadrados de lados com 20 cm. Portanto, a área da base desse prisma, em $cm^2$, é:

$$A_{base} = 20^2 = 400$$

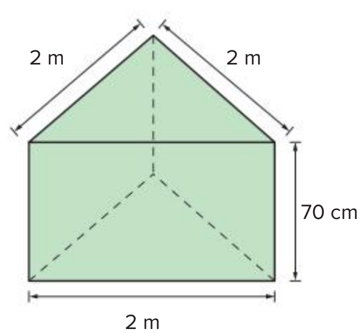
Como a altura de um prisma regular equivale ao comprimento de suas arestas laterais, temos que $h = 9$ cm. Assim, o volume do prisma, em $cm^3$, é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 400 \cdot 9 = 3600$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que o prisma tem 3,6 litros de capacidade.

**11.** Calcule a capacidade, em litros, de um prisma triangular regular cujas arestas da base medem 2 m e a altura mede 70 cm.

**Resolução:**




As bases do prisma são triângulos equiláteros de lados medindo 2 m = 200 cm.
Portanto, a área da base desse prisma, em $cm^2$, é:

$$A_{base} = \frac{200^2\sqrt{3}}{4} = \frac{40000\sqrt{3}}{4} = 10000\sqrt{3}$$

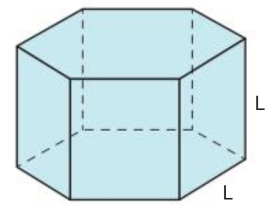
A altura do prisma é $h = 70$ cm. Assim, seu volume, em $cm^3$, é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 10000\sqrt{3} \cdot 70 = 700000\sqrt{3}$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que o prisma tem $700\sqrt{3}$ litros de capacidade.

**12.** Um prisma hexagonal regular tem todas as suas arestas do mesmo comprimento. Determine a área lateral desse prisma sabendo que sua capacidade é de $1500\sqrt{3}$ $cm^3$.

**Resolução:**




As bases do prisma são hexágonos regulares de lado L.

Portanto, a área da base desse prisma é $A_{base} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

A altura do prisma é $h = L$. Assim, seu volume é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot L = \frac{3L^3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, temos a equação:

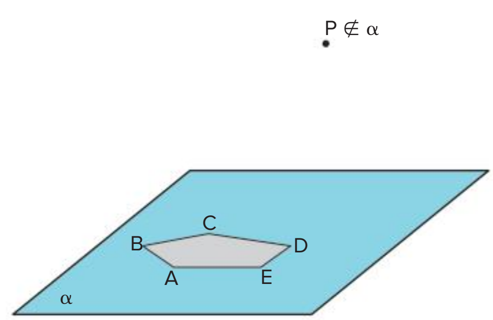
$$\frac{3L^3\sqrt{3}}{2} = 1500\sqrt{3} \Rightarrow L^3 = \frac{2 \cdot 1500}{3} \Rightarrow L^3 = 1000 \Rightarrow L = 10 \text{ cm}$$

As seis faces laterais do prisma são quadrados de lado 10 cm. Portanto, sua área lateral mede:

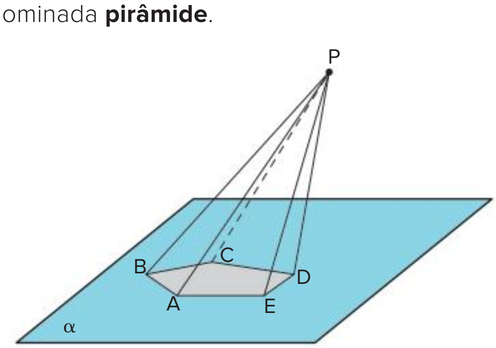
$$6 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$$

## Pirâmides

Considere um polígono qualquer e um único ponto que não pertença ao plano do polígono.

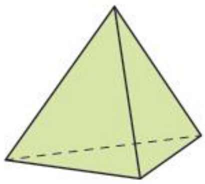



Unindo esse ponto, por meio de segmentos de reta, a todos os vértices do polígono tomado, a forma geométrica determinada por esses segmentos junto com o polígono é denominada **pirâmide**.



Acrescentando o ponto tomado fora do plano do polígono aos vértices do polígono, obtemos o conjunto dos vértices da pirâmide.

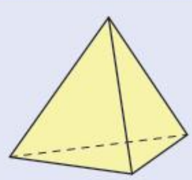
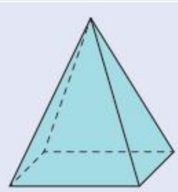
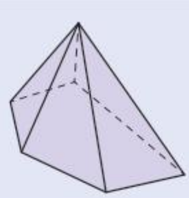
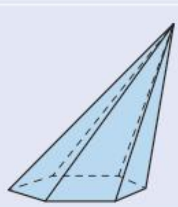
As pirâmides com exatamente quatro vértices também são chamadas de tetraedros, pois esses vértices determinam quatro faces planas. Todas as faces de um tetraedro são triangulares e qualquer uma delas pode ser considerada como a base do sólido.



Em uma pirâmide com mais de quatro vértices, é sempre possível identificar um plano $\alpha$ que contenha mais vértices do que qualquer outro. Além disso, pirâmides com mais de quatro vértices têm apenas uma base, que é, necessariamente, o polígono contido nesse plano $\alpha$. Portanto, em uma pirâmide, só pode haver no máximo uma face que não seja triangular; quando houver, essa face será a base da pirâmide.

O número de lados do polígono que é base da pirâmide é designado por $n$. Assim, se $n = 5$, por exemplo, significa que a base da pirâmide é um pentágono.

O número de lados da base de uma pirâmide permite classificá-la em diversas categorias distintas:

| Tipo de pirâmide | Número de lados da base | Imagem possível |
|---|---|---|
| **Pirâmide triangular** | $n = 3$ |  |
| **Pirâmide quadrangular** | $n = 4$ |  |
| **Pirâmide pentagonal** | $n = 5$ |  |
| **Pirâmide hexagonal** | $n = 6$ |  |

O único vértice que não pertence ao plano da base de uma pirâmide é chamado de vértice da pirâmide; os demais são chamados de vértices da base. Outros elementos de uma pirâmide que não pertencem ao plano de sua base são denominados laterais. As arestas que ligam o vértice da pirâmide a algum vértice da base são chamadas de arestas laterais da pirâmide. As faces triangulares que possuem o vértice da pirâmide são denominadas faces laterais.

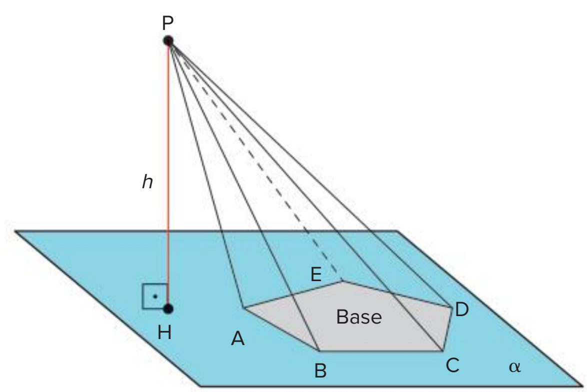
**! Atenção**

Para determinar se um poliedro é ou não uma pirâmide, devemos verificar as seguintes condições:

- Existem pelo menos quatro faces triangulares.
- Existe, no máximo, uma face que não seja triangular.
- Existem pelo menos quatro vértices triédricos.
- Existe, no máximo, um vértice que não seja triédrico.

## Altura da pirâmide

Considere uma pirâmide de vértice P e base ABCDE contida no plano $\alpha$.




Os segmentos de reta $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$, $\overline{DP}$ e $\overline{EP}$ são denominados arestas laterais da pirâmide, uma vez que não estão contidos no plano da base.

A altura de uma pirâmide tem medida $h$ que coincide com a distância do vértice da pirâmide ao plano onde está localizada sua base.

$$h = d(P, \alpha)$$

Para determinar essa distância, é necessário encontrar um ponto H pertencente ao plano $\alpha$ tal que H seja a projeção ortogonal do vértice P da pirâmide no plano que contém a sua base. Esse ponto H também é chamado de "pé da altura" da pirâmide. Assim:

$$\left.\begin{array}{l} H \in \alpha \\ \overline{PH} \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow h = d(P, H)$$

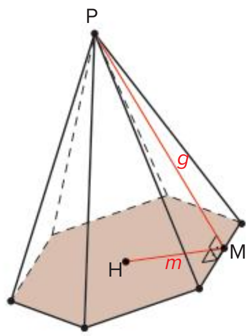
## Pirâmides regulares

Para determinar se uma pirâmide é ou não regular, devemos verificar as seguintes condições:

- A base da pirâmide é um polígono regular.
- O pé da altura coincide com o centro da base.
- As faces laterais são triângulos isósceles congruentes uns aos outros.

A terceira condição permite concluir que a área lateral de uma pirâmide regular pode ser obtida a partir da área de uma única face lateral multiplicada pelo número de lados de sua base.

Pirâmides regulares possuem outros importantes elementos denominados apótemas, que são de dois tipos: apótemas da base e apótemas laterais, também chamados de apótemas da pirâmide.




Para encontrar os apótemas desses sólidos, é necessário considerar os pontos médios das arestas de sua base. Assim, sendo P o vértice de uma pirâmide regular, H o centro de sua base e M o ponto médio de uma aresta dessa base, temos que:

- O segmento $\overline{PM}$ é um apótema da pirâmide ou apótema lateral.
- O segmento $\overline{HM}$ é um apótema da base.

Os apótemas laterais de uma pirâmide regular são também as alturas de suas faces laterais, por isso seu comprimento é usado no cálculo das áreas lateral e total.

Assim, dada uma pirâmide regular cuja base possui $n$ lados de comprimento $\ell$ e cujos apótemas laterais têm comprimento $g$, sua área lateral é expressa por:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{n \cdot \ell \cdot g}{2}$$

Portanto, temos:

| Tipo de pirâmide | Área lateral |
|---|---|
| Triangular regular | $\frac{3 \cdot \ell \cdot g}{2} = 1{,}5 \cdot \ell \cdot g$ |
| Quadrangular regular | $\frac{4 \cdot \ell \cdot g}{2} = 2 \cdot \ell \cdot g$ |
| Pentagonal regular | $\frac{5 \cdot \ell \cdot g}{2} = 2{,}5 \cdot \ell \cdot g$ |
| Hexagonal regular | $\frac{6 \cdot \ell \cdot g}{2} = 3 \cdot \ell \cdot g$ |

Os comprimentos dos apótemas das bases também podem ser usados no cálculo da área da base. Assim, sendo $m$ o comprimento dos apótemas da base de uma pirâmide regular, a área da base dessa pirâmide é expressa por:

$$A_{\text{base}} = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2}$$

**! Atenção**

Observando que a expressão $\frac{n \cdot \ell}{2}$ presente nas fórmulas das áreas (lateral e da base) de uma pirâmide regular representa o semiperímetro (p) de sua base, as fórmulas das áreas das superfícies das pirâmides regulares podem ser memorizadas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{llll} & \text{Área da base} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{apótema da base} & = p \cdot m \\ + & \text{Área lateral} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{apótema da pirâmide} & = p \cdot g \\ \hline & \text{Área total} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{soma dos apótemas} & = p(m + g) \end{array}$$

## Exercícios resolvidos

**13.** Determine os comprimentos dos apótemas de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que as arestas de sua base medem 6 cm e que suas arestas laterais medem 5 cm.

**Resolução:**

A base dessa pirâmide é um quadrado de lado 6 cm. Como os apótemas de um quadrado têm a metade do comprimento de seus lados, então os apótemas da base da pirâmide medem $m = \frac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$ cada um.

As faces laterais dessa pirâmide são triângulos isósceles de lados 6 cm, 5 cm e 5 cm e os apótemas da pirâmide são as alturas desses triângulos. Esses apótemas dividem as faces laterais em dois triângulos retângulos ocupando o lugar de um dos catetos. Então, como a hipotenusa desses triângulos retângulos mede 5 cm e o outro cateto mede $\frac{6\text{ cm}}{2} = 3$ cm, sendo $g > 0$, o comprimento dos apótemas da pirâmide, do teorema de Pitágoras, é:

$$3^2 + g^2 = 5^2 \Rightarrow g^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow g = 4\text{ cm}$$

Portanto, os apótemas dessa pirâmide medem 4 cm.

**14.** Quanto mede a área lateral de uma pirâmide triangular regular cujas arestas da base medem 10 cm e os apótemas medem 12 cm?

**Resolução:**

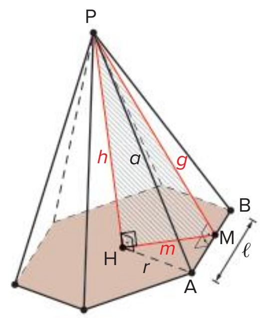
A base dessa pirâmide é um triângulo equilátero de lado 10 cm, e as faces laterais são triângulos isósceles de bases 10 cm e alturas 12 cm, pois os apótemas da pirâmide são as alturas de suas faces laterais.

Assim, a área lateral dessa pirâmide mede:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{3 \cdot \ell \cdot g}{2} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 180 \text{ cm}^2$$

## Pirâmides regulares e o teorema de Pitágoras

Considere uma pirâmide regular de vértice P cuja base de centro H tem um lado $\overline{AB}$ e o ponto médio M desse lado $\overline{AB}$.




Entre os elementos dessa pirâmide, temos os seguintes segmentos:

$\overline{PH}$ é a altura da pirâmide $\rightarrow$ PH = $h$

$\overline{PA}$ é uma aresta lateral da pirâmide $\rightarrow$ PA = $a$

$\overline{PM}$ é um apótema lateral da pirâmide $\rightarrow$ PM = $g$

$\overline{AB}$ é uma aresta da base da pirâmide $\rightarrow$ AB = $\ell$

$\overline{HM}$ é um apótema da base da pirâmide $\rightarrow$ HM = $m$

$\overline{HA}$ é o raio do círculo circunscrito à base $\rightarrow$ HA = $r$

Como a altura de uma pirâmide é perpendicular ao plano da base da pirâmide, ambos os triângulos PHM e PHA são retângulos no vértice H. Assim, do teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \triangle PHM \Rightarrow g^2 = h^2 + m^2 \\ \triangle PHA \Rightarrow a^2 = h^2 + r^2 \end{cases}$$

Como cada apótema de um polígono regular é perpendicular a um lado do polígono, o triângulo AMH é retângulo no vértice M. Do teorema das três perpendiculares, temos que o triângulo AMP também é retângulo no vértice M. Assim, novamente do teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \triangle AMP \Rightarrow a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ \triangle AMH \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \end{cases}$$

## Exercícios resolvidos

**15.** Quanto mede a altura de uma pirâmide regular cujos apótemas medem 5 cm e 13 cm?

**a)** 14 cm.
**b)** 13 cm.
**c)** 12 cm.
**d)** 11 cm.
**e)** 10 cm.

**Resolução:**

Como o apótema da base de uma pirâmide é, necessariamente, menor do que o apótema lateral, temos que:

- o apótema da base mede $m = 5$ cm.
- o apótema da pirâmide mede $g = 13$ cm.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

(Apótema da pirâmide)$^2$ = (Altura)$^2$ + (Apótema da base)$^2$

Assim, sendo $h > 0$, a medida da altura da pirâmide, em centímetros, é:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

Alternativa: **C**

**16.** Quanto mede, aproximadamente, a aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular em que as arestas da base medem 10 cm e a altura mede 4 cm?

**a)** 7 cm.
**b)** 8 cm.
**c)** 9 cm.
**d)** 10 cm.
**e)** 11 cm.

**Resolução:**

Como o raio do círculo que circunscreve um quadrado equivale à metade da diagonal do quadrado, temos que esse raio mede $r = 5\sqrt{2}$ cm.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

(Aresta lateral)$^2$ = (Altura)$^2$ + (Raio da base)$^2$

Assim, sendo $a > 0$, temos:

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 16 + 50 = 66 \Rightarrow a = \sqrt{66} \text{ cm} \cong 8 \text{ cm}$$

Alternativa: **B**

**17.** Quanto mede a aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular em que a altura mede 2 cm e as arestas laterais medem $\sqrt{5}$ cm?

**a)** 1 cm.
**b)** $\sqrt{2}$ cm.
**c)** $\sqrt{3}$ cm.
**d)** 2 cm.
**e)** $\sqrt{5}$ cm.

**Resolução:**

Como o lado de um hexágono regular equivale ao raio do círculo que o circunscreve ($r > 0$), basta encontrarmos a medida $r$ desse raio. Assim:

(Aresta lateral)$^2$ = (Altura)$^2$ + (Raio da base)$^2$

Logo:

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + r^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow r = 1 \text{ cm}$$

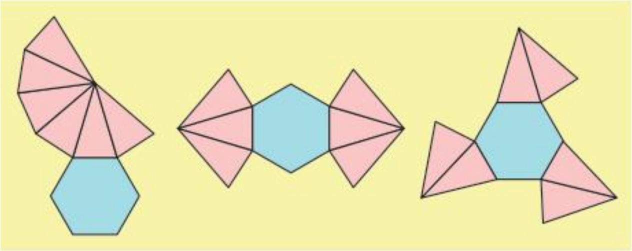
Alternativa: **A**

FRENTE 3

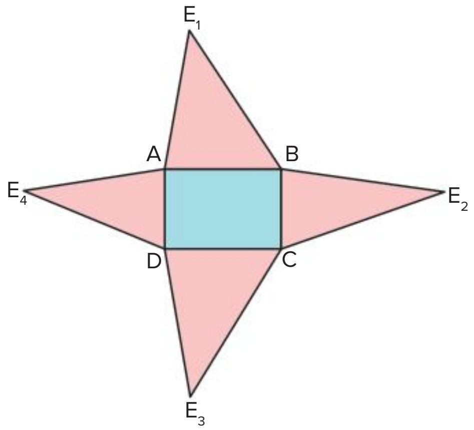
## Planificações das pirâmides

Semelhante ao que ocorre com os prismas, as planificações de uma pirâmide são figuras geométricas planas formadas pela justaposição de polígonos congruentes às faces da pirâmide.

As figuras a seguir, formadas por seis triângulos isósceles e um hexágono regular, são possíveis planificações de uma pirâmide hexagonal regular, por exemplo.



A figura a seguir é uma planificação possível de uma pirâmide retangular irregular:




Para que as relações entre as áreas da superfície desse tipo de sólido sejam mais bem compreendidas, planificações como essas permitem que todas as faces da pirâmide sejam observadas simultaneamente.

Sendo $L_i = (L_1, L_2, L_3, ...)$ a sucessão das áreas das faces laterais de uma pirâmide, sobre a superfície dessa pirâmide, temos que:

Área lateral: $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

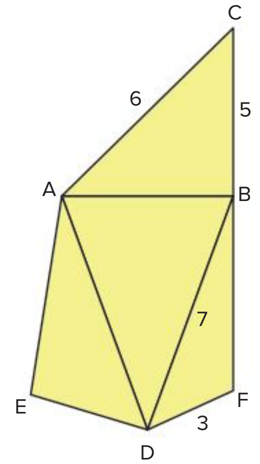
Área total: (Área da base) + (Área lateral)

Observe também, na planificação da pirâmide irregular, que a base é o retângulo ABCD. Como só pode haver um vértice que não pertença ao plano da base de uma pirâmide, os pontos indicados por $E_1$, $E_2$, $E_3$ e $E_4$ devem ser coincidentes no sólido real. Assim, para que essa figura seja realmente a planificação de uma pirâmide irregular, é necessário haver a igualdade entre as medidas dos seguintes pares de segmentos:

$AE_1 = AE_4$  $BE_1 = BE_2$  $CE_2 = CE_3$  $DE_3 = DE_4$

### Exercício resolvido

**18.** Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura a seguir.




Os triângulos ABC e ABD são isósceles de bases $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. As medidas dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DF}$ estão indicadas na figura. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é:

**a)** 33
**b)** 34
**c)** 43
**d)** 47
**e)** 48

**Resolução:**

No triângulo isósceles ABC, temos: AB = BC = 5.
No triângulo isósceles ABD, temos: AD = BD = 7.
Quando o tetraedro for montado, os vértices C, E e F coincidirão, assim como os seguintes pares de arestas: $\overline{AC}$ com $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ com $\overline{BF}$ e $\overline{DE}$ com $\overline{DF}$.
Portanto, a soma dos comprimentos das seis arestas do tetraedro será: 3 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 = 33.
Alternativa: **A**

## Volume da pirâmide

Para obter o volume de uma pirâmide, basta multiplicar a área de sua base pelo comprimento de sua altura e dividir o resultado por 3. Assim, sendo **B** o valor da área da base de uma pirâmide de altura *h*, seu volume **V** é expresso por:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

A veracidade dessa expressão, para qualquer tipo de pirâmide, também pode ser comprovada retomando alguns dos conceitos vistos neste capítulo e no anterior, como o fato de que os cubos podem ser decompostos em três pirâmides congruentes e a aplicação do princípio de Cavalieri para volumes.

## Exercícios resolvidos

**19. Uece 2017** A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar que a medida do volume dessa pirâmide, em $m^3$, é igual a

a) 60
b) 30
c) 15
d) 45

**Resolução:**

Sendo $x$ a medida, em metros, dos catetos do triângulo isósceles que é base dessa pirâmide, do teorema de Pitágoras temos: $x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18$. Como triângulos retângulos isósceles equivalem à metade da área de um quadrado cujo lado coincide com os catetos do triângulo, a área da base dessa pirâmide, em metros quadrados, é: $A_{base} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Então, o volume da pirâmide, em $m^3$, é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 10}{3} = 30.$$

Alternativa: **B**

**20.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular de altura 8 cm sabendo que as arestas de sua base medem 6 cm.

**Resolução:**

A área da base dessa pirâmide, em $cm^2$, é:

$$A_{base} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Então, seu volume, em $cm^3$, é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 24\sqrt{3}$$

**21.** Uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas da base medem 60 cm e arestas laterais medem 50 cm tem volume equivalente a:

a) 10 litros.
b) $10\sqrt{3}$ litros.
c) $10\sqrt{5}$ litros.
d) 12 litros.
e) $12\sqrt{7}$ litros.

**Resolução:**

A área da base dessa pirâmide, em $cm^2$, é:

$$A_{base} = 60^2 = 3600$$

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

$$\left(\begin{matrix}\text{Aresta}\\ \text{lateral}\end{matrix}\right)^2 = \left(\begin{matrix}\text{Apótema}\\ \text{da pirâmide}\end{matrix}\right)^2 + \left(\frac{\text{Aresta da base}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50^2 = g^2 + \left(\frac{60}{2}\right)^2 \Rightarrow g = 40 \text{ cm}$$

O apótema da base dessa pirâmide é $m = \frac{60 \text{ cm}}{2} =$ $= 30$ cm.

Outra aplicação do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

$$(\text{Apótema da pirâmide})^2 = (\text{Altura})^2 + (\text{Apótema da base})^2$$

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 40^2 = h^2 + 30^2 \Rightarrow h = 10\sqrt{7} \text{ cm}$$

O volume dessa pirâmide, em $cm^3$, é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{3600 \cdot 10\sqrt{7}}{3} = 12000\sqrt{7}$$

Fazendo a conversão de unidades, temos que esse volume equivale a $12\sqrt{7}$ litros.

Alternativa: **E**

**22. PUC-Rio 2017** Numa pirâmide de base quadrada, todas as arestas medem $x$. Quanto vale o volume da pirâmide?

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3$
b) $\pi x^3$
c) $x^3 + x^2 + x + 1$
d) $x^3$
e) $\frac{\sqrt{6}}{3}x^3$

**Resolução:**

A área da base dessa pirâmide é $A_{base} = x^2$.

Como o raio do círculo que circunscreve um quadrado equivale à metade da diagonal do quadrado, temos que, em centímetros, esse raio mede $r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

$$(\text{Aresta lateral})^2 = (\text{Altura})^2 + (\text{Raio da base})^2$$

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \text{h} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Então, o volume dessa pirâmide é

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}x^3.$$

Alternativa: **A**

FRENTE 3

**23.** **UTFPR 2017** Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume da barraca medem, respectivamente:

a) $6\sqrt{3}\ \text{m}^2$ e $6\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

b) $3\sqrt{3}\ \text{m}^2$ e $3\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

c) $5\sqrt{3}\ \text{m}^2$ e $2\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

d) $2\sqrt{3}\ \text{m}^2$ e $5\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

e) $4\sqrt{3}\ \text{m}^2$ e $8\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

**Resolução:**

A área da base dessa pirâmide, em m², é:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Assim, seu volume, em m³, é:

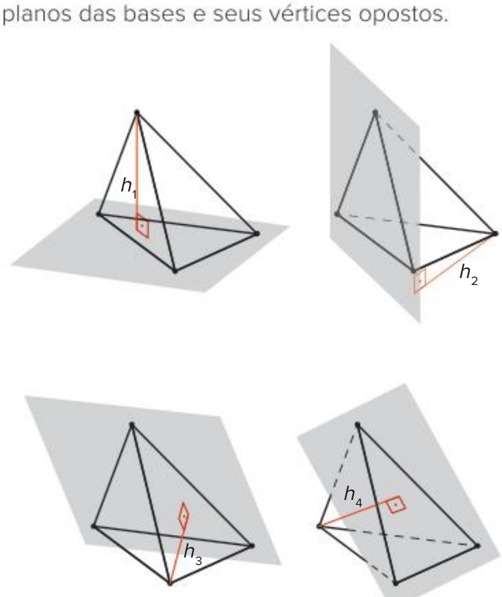
$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3}{3} = 6\sqrt{3}$$

Alternativa: **A**

**Saiba mais**

Os tetraedros são pirâmides cercadas por apenas quatro faces triangulares. Nesses casos, como não há face com mais do que três lados, qualquer uma delas pode ser considerada base da pirâmide.

Assim, um tetraedro é um tipo especial de pirâmide que possui quatro bases $B_1$, $B_2$, $B_3$ e $B_4$, além de quatro alturas $h_1$, $h_2$, $h_3$ e $h_4$, que são as respectivas distâncias entre os planos das bases e seus vértices opostos.




Portanto, também há quatro maneiras diferentes de se encontrar o volume de um tetraedro:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot B_3 \cdot h_3 = \frac{1}{3} \cdot B_4 \cdot h_4$$

# Elementos dos poliedros

Todos os poliedros são compostos de três entes primitivos da Geometria: os pontos, as retas e os planos. Entre os principais planos de um poliedro estão os que contêm suas faces, mas também há os que contêm suas seções. Entre as principais retas de um poliedro estão as que contêm suas arestas, mas também há as que contêm suas diagonais, por exemplo. E entre os principais pontos de um poliedro estão os seus vértices.

As faces de um poliedro são os polígonos planos que o cercam. As arestas de um poliedro são os segmentos de retas determinados pela interseção de duas faces adjacentes. Os vértices de um poliedro são os pontos determinados pela interseção de três ou mais faces adjacentes.

Indicamos por (F) o número de faces de um poliedro, mas, como essas faces podem ser polígonos com quantidades diferentes de lados, como triângulos, quadriláteros ou pentágonos, usamos uma notação indexada ($F_i$), com $i \geqslant 3$, para indicar as quantidades de faces de cada tipo. Então:

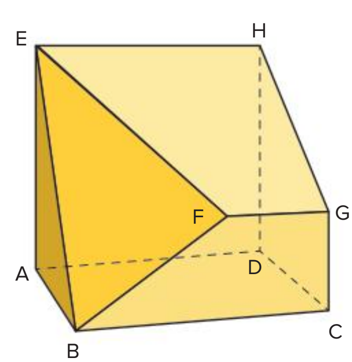
- $F_3$ indica o número de faces triangulares do poliedro.
- $F_4$ indica o número de faces quadrangulares do poliedro.
- $F_5$ indica o número de faces pentagonais do poliedro.
- $F_6$ indica o número de faces hexagonais do poliedro.

E assim por diante.

Dessa maneira, temos que:

$$F = \sum_{i=3}^{\infty} F_i = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots$$

É claro que, para alguns valores de $i$, temos $F_i = 0$, uma vez que os poliedros fechados possuem um número finito de faces. Vejamos, por exemplo, o caso do poliedro irregular a seguir, que possui apenas faces triangulares e quadrangulares:




Observe que as faces ABE e BEF desse poliedro são triangulares e que as demais faces ABCD, CDHG, ADHE, BCGF e EFGH são todas quadrangulares. Então:

- $F_3 = 2$ significa que o poliedro possui exatamente 2 faces com 3 lados cada.
- $F_4 = 5$ significa que o poliedro possui exatamente 5 faces com 4 lados cada.

Como esse poliedro não possui outras faces, $F_i = 0$ para $i \geqslant 5$. Logo:

- $F_5 = 0$ significa que o poliedro não possui faces com 5 lados.
- $F_6 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui faces com 6 lados.

E assim por diante.
Portanto, nesse exemplo, temos:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + ...$$
$$F = 2 + 5 + 0 + 0 + ...$$
$$F = 7$$

Indicamos por (A) o número de arestas de um poliedro e, como cada aresta pertence a exatamente duas faces, podemos concluir que o dobro do número de arestas de um poliedro é igual à somatória do número de lados de todas as suas faces.

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + ...$$

Aplicando essa fórmula ao exemplo anterior, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + ...$$
$$2A = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + ...$$
$$2A = 6 + 20 + 0 + 0 + ...$$
$$2A = 26$$
$$A = 13$$

## Exercícios resolvidos

**24.** Determine o número de arestas de um poliedro fechado, cercado por exatamente dois octógonos e dezesseis triângulos.

**Resolução:**

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + 8 \cdot F_8 + 9 \cdot F_9 + ...$$
$$2A = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 0 + ...$$
$$2A = 48 + 0 + 0 + 0 + 0 + 16 + 0 + ...$$
$$2A = 64$$
$$A = 32$$

**25.** Prove que não existe poliedro fechado que seja cercado por exatamente dois pentágonos, três quadriláteros e sete triângulos.

**Resolução:**

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + 8 \cdot F_8 + 9 \cdot F_9 + ...$$
$$2A = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + ...$$
$$2A = 21 + 12 + 10 + 0 + 0 + 0 + 0 + ...$$
$$2A = 43$$

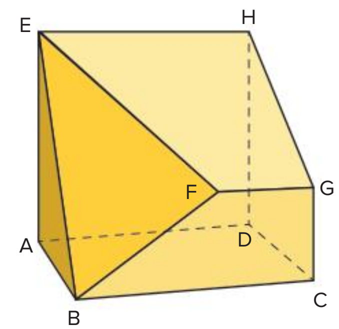
Logo, não existe poliedro com essas características, pois, como A é um número inteiro, é necessário que 2A seja um número par, mas 43 é um número ímpar.

Indicamos por (V) o número de vértices de um poliedro. Como, desses vértices, podem partir quantidades diferentes de arestas – alguns podem ser triédricos (de onde partem três arestas), outros tetraédricos (de onde partem quatro arestas) e assim por diante –, utilizamos uma notação indexada ($V_i$), com $i \geqslant 3$, para indicar as quantidades de vértices de cada tipo. Então:

- $V_3$ indica o número de vértices triédricos do poliedro.
- $V_4$ indica o número de vértices tetraédricos do poliedro.
- $V_5$ indica o número de vértices pentaédricos do poliedro.
- $V_6$ indica o número vértices hexaédricos do poliedro.

E assim por diante.
Portanto, temos

$$V = \sum_{i=3}^{\infty} V_i = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + ...$$




Observe que, na figura do exemplo discutido, os vértices A, C, D, F, G e H são todos triédricos, ou seja, cada um desses vértices é extremidade de exatamente três arestas. Já os vértices B e E são tetraédricos, ou seja, cada um deles é extremidade de exatamente quatro arestas. Logo:

- $V_3 = 6$ significa que o poliedro possui exatamente 6 vértices de onde partem 3 arestas.
- $V_4 = 2$ significa que o poliedro possui exatamente 2 vértices de onde partem 4 arestas.

Como esse poliedro não possui outros vértices, $V_i = 0$ para $i \geqslant 5$. Então:

- $V_5 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui vértices de onde partem 5 arestas.
- $V_6 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui vértices de onde partem 6 arestas.

E assim por diante.
Portanto, nesse exemplo, temos:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + ...$$
$$V = 6 + 2 + 0 + 0 + ...$$
$$V = 8$$

FRENTE 3

O mesmo raciocínio usado para relacionar o número de arestas de um poliedro ao número de faces de cada tipo pode ser usado para relacionar o número de arestas ao número de vértices de cada tipo. Assim, como cada aresta liga exatamente dois vértices, o dobro do número de arestas de um poliedro é igual à somatória do número de arestas que partem de todos os seus vértices.

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot V_i = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + \ldots$$

Aplicando essa fórmula ao exemplo em discussão, temos:

$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + \ldots$
$2A = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + \ldots$
$2A = 18 + 8 + 0 + 0 + \ldots$
$2A = 26$
$A = 13$

## Exercícios resolvidos

**26.** Um poliedro fechado possui ao todo 24 vértices e de cada vértice partem exatamente três arestas. Quantas arestas esse poliedro possui?

**Resolução:**

Da relação entre o número de arestas e o conjunto dos vértices do poliedro, temos:

$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + \ldots$
$2A = 3 \cdot 24 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + \ldots$
$2A = 72 + 0 + 0 + 0 + \ldots$
$A = 36$

**27.** Em um poliedro de 30 arestas, há dois vértices hexaédricos e os demais vértices são todos tetraédricos. Quantos vértices esse poliedro possui?

**Resolução:**

Sendo $x$ o número de vértices tetraédricos desse poliedro:

$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + 7 \cdot V_7 + \ldots$
$2 \cdot 30 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot x + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + \ldots$
$60 = 0 + 4x + 0 + 12 + 0 + \ldots$
$48 = 4x$
$x = 12$

Portanto, o poliedro possui $V = x + 2 = 12 + 2 = 14$ vértices.

A partir das relações entre os números A, V e F de arestas, vértices e faces mostrados até aqui, podemos verificar que, em todo poliedro, esses números também obedecem às seguintes relações de ordem: $\begin{cases} 2A \geqslant 3F \\ 2A \geqslant 3V \end{cases}$.

Veja a demonstração da primeira relação de ordem desse sistema:

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i$$

$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + \ldots$
$2A = 3 \cdot F_3 + 3 \cdot F_4 + 3 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + \ldots + F_4 + 2 \cdot F_5 + + 3 \cdot F_6 + \ldots$
$2A = \underbrace{3 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots)} + F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + \ldots$
$2A = \qquad 3F \qquad + F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + \ldots$

Então, como $F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + \ldots \geqslant 0$, concluímos que $2A \geqslant 3F$.

A demonstração da relação de ordem $2A \geqslant 3V$ é análoga a essa.

## Exercício resolvido

**28.** Prove que não existe poliedro fechado com exatamente 9 vértices e 13 arestas.

**Resolução:**

Uma condição necessária para a existência de um poliedro fechado é que seus números V e A de vértices e arestas obedeçam à relação $2A \geqslant 3V$, ou seja, o dobro do número de arestas deve ser maior ou igual ao triplo do número de vértices.

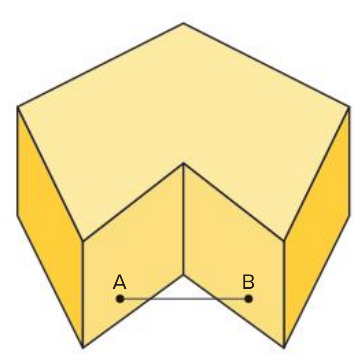
No caso, com $A = 13$ e $V = 9$, temos $2A = 2 \cdot 13 = 26$, que é menor do que $3V = 3 \cdot 9 = 27$.

Portanto, nessas condições, não existe poliedro fechado.

## Poliedros côncavos e convexos

Quando um poliedro tem todos os seus pontos no mesmo semiespaço, determinado por qualquer plano que contenha uma de suas faces, ele é convexo. Mas, se existir um plano que contenha alguma face do poliedro e o secione em sólidos situados em semiespaços opostos, esse poliedro será côncavo.

Os poliedros são côncavos quando possuem pelo menos uma concavidade. Para observá-la, basta encontrar dois pontos da superfície do poliedro tais que o segmento de reta com extremidades nesses pontos passe por fora desse sólido.



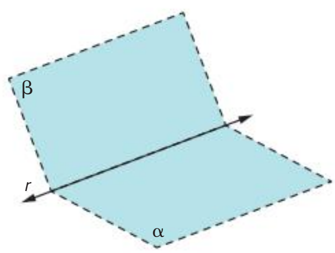
Observe, na figura apresentada, que os pontos A e B pertencem à superfície do poliedro, mas que o segmento de reta $\overline{AB}$ está situado na região exterior ao sólido, a qual é denominada concavidade do poliedro.

Se não for possível encontrar dois pontos sobre a superfície de um poliedro, que determinem um segmento que passe por fora do sólido, então ele será necessariamente convexo, ou seja, um poliedro desprovido de concavidades é um poliedro convexo.

## Relação de Euler

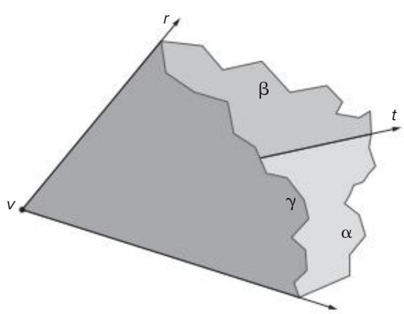
Sendo S uma superfície poliédrica tridimensional, aberta ou fechada, côncava ou convexa, define-se a característica de Euler de S como o número inteiro $\chi(S)$ tal que $\chi(S) = V - A + F$, em que **V** representa o número de vértices, **A** o número de arestas e **F** o número de faces da superfície poliédrica.

Todo diedro é uma superfície poliédrica D em que $V = 0$, $A = 1$ e $F = 2$. Portanto, a característica de Euler dessa superfície poliédrica é unitária.




$$\chi(D) = V - A + F = 0 - 1 + 2 = 1$$

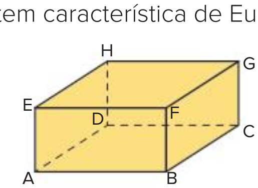
Os triedros são superfícies poliédricas em que $V = 1$, $A = 3$ e $F = 3$. A característica de Euler dos triedros também é unitária.




$$\chi(T) = V - A + F = 1 - 3 + 3 = 1$$

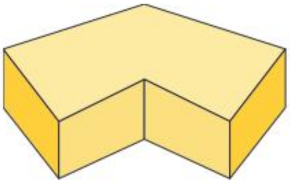
Não é coincidência que o resultado desses dois exemplos seja o mesmo. Ambos, diedros e triedros, são superfícies convexas e abertas. A característica de Euler de qualquer superfície convexa e aberta é igual a 1.

Nas superfícies de um paralelepípedo ou de um prisma quadrangular, os números de vértices, arestas e faces são: $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. Portanto, a superfície P de um paralelepípedo tem característica de Euler igual a 2.




$$\chi(P) = V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

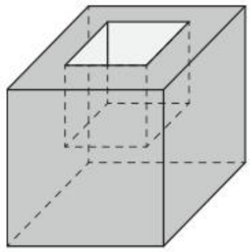
Quando a característica de Euler da superfície de um poliedro é igual a 2, dizemos que o poliedro é euleriano. Sobre a superfície do prisma dado como exemplo de poliedro côncavo, temos $V = 12$, $A = 18$ e $F = 8$. Portanto, esse prisma é um poliedro euleriano.



$$\chi(P) = V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$$

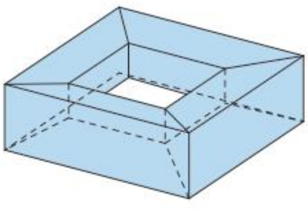
Todos os poliedros convexos são eulerianos, mas isso não ocorre com todos os poliedros côncavos. Quando, em um poliedro, há uma ou mais faces onde o perímetro não é cercado por uma única linha contínua, a característica de Euler de suas superfícies pode não ser igual a 2.

No poliedro do exemplo a seguir, em que uma concavidade é cercada por cinco faces, a face superior tem seu perímetro cercado por dois quadrados.



$$\left.\begin{array}{l} V = 16 \\ A = 24 \\ F = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(S) = V - A + F = 16 - 24 + 11 = 3$$

Quando, em um poliedro, há uma concavidade que atravessa inteiramente o sólido, a característica de Euler de sua superfície também pode não ser igual a 2. Veja o exemplo a seguir que mostra uma concavidade cercada por quatro faces:



$$\left.\begin{array}{l} V = 16 \\ A = 32 \\ F = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(S) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

**! Atenção**

Embora a característica de Euler dos poliedros côncavos varie de um sólido para outro, a dos poliedros convexos é constante e igual a 2. Portanto, se um poliedro é convexo, então:

$$V - A + F = 2$$

Essa expressão é conhecida como relação ou fórmula de Euler para os poliedros convexos.

## Exercícios resolvidos

**29.** Determine o número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces e 30 arestas.

**Resolução:**

Da relação de Euler, temos que $V - A + F = 2$. Logo:

$$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 2 + 30 - 12 \; V = 20$$

Portanto, o polígono tem 20 vértices.

**30.** Determine o número de vértices de um poliedro convexo cercado por exatamente dois pentágonos e dez quadriláteros.

**Resolução:**

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + \ldots$$
$$2A = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + \ldots$$
$$2A = 0 + 40 + 10 + 0 + 0 + \ldots$$
$$2A = 50$$
$$A = 25$$

O poliedro tem exatamente dois pentágonos e dez quadriláteros, logo possui 12 faces. Da relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 25 + 12 = 2 \Rightarrow V = 15$$

Portanto, o poliedro tem 15 vértices.

Aplicando a fórmula de Euler, podemos verificar que em, todo poliedro convexo, os números V, A e F de vértices, arestas e faces também estabelecem as relações de ordem:

$\begin{cases} 3F \geqslant A + 6 \\ 3V \geqslant A + 6 \end{cases}$. A seguir, veja a demonstração da primeira relação de ordem.

Primeiro, isolamos o número de vértices na fórmula de Euler:

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow V = A - F + 2$$

Depois, substituímos a expressão de V na relação $2A \geqslant 3V$, que é válida para qualquer poliedro:

$$2A \geqslant 3(A - F + 2)$$
$$2A \geqslant 3A - 3F + 6$$
$$3F \geqslant A + 6$$

Novamente, a demonstração da segunda relação de ordem do sistema é análoga a essa.

Assim, podemos garantir que os números V, A e F de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo satisfazem as seguintes relações de ordem crescente:

$$\begin{cases} A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A \\ A + 6 \leqslant 3V \leqslant 2A \end{cases}$$

## Exercícios resolvidos

**31.** Determine o número de faces de um poliedro convexo que possui exatamente oito arestas.

**Resolução:**

Uma condição necessária para a existência de um poliedro fechado é que seus números F e A de faces e arestas obedeçam à relação $A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$. Assim, com $A = 8$, temos:

$$8 + 6 \leqslant 3F \leqslant 2 \cdot 8$$
$$14 \leqslant 3F \leqslant 16$$

Como F é número inteiro, 3F deve ser, necessariamente, um número múltiplo de três. Como o único múltiplo de três no intervalo de 14 a 16 é o número 15, temos que $3F = 15 \Rightarrow F = 5$.
Portanto, o poliedro possui exatamente 5 faces.

**32.** Prove que não existe poliedro convexo com exatamente sete arestas.

**Resolução:**

Com $A = 7$, a relação $A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$ fica:

$$7 + 6 \leqslant 3F \leqslant 2 \cdot 7$$
$$13 \leqslant 3F \leqslant 14$$

Como não há número múltiplo de três no intervalo de 13 a 14, concluímos que, nessas condições, não existe poliedro convexo.

**Saiba mais**

Os números V, A e F de vértices, arestas e faces dos prismas e das pirâmides podem ser expressos em função do número *n* de lados de suas bases.

Nos prismas, temos necessariamente que: $\begin{cases} V = 2n \\ A = 3n \\ F = n + 2 \end{cases}$.

Nas pirâmides, temos que: $\begin{cases} V = n + 1 \\ A = 2n \\ F = n + 1 \end{cases}$

## Soma dos ângulos das faces

A soma das medidas em graus dos ângulos internos de qualquer polígono pode ser expressa pela fórmula $S_n = (n - 2) \cdot 180°$, em que $n \geqslant 3$ indica o número de lados do polígono.

Assim, considerando a sucessão $(F_3, F_4, F_5, F_6, \ldots)$ dos números de faces de cada tipo que cercam um mesmo poliedro convexo, a soma das medidas em graus dos ângulos de todas essas faces pode ser expressa por:

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} S_n \cdot F_n$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) \cdot 180° \cdot F_n$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} (180° \cdot n \cdot F_n - 360° \cdot F_n)$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} 180° \cdot n \cdot F_n - \sum_{n=3}^{\infty} 360° \cdot F_n$$

$$S_F = 180° \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot F_n - 360° \cdot \sum_{n=3}^{\infty} F_n$$

Lembrando que $\sum_{n=3}^{\infty} F_n = F$ e que $\sum_{n=3}^{\infty} n \cdot F_n = 2A$, temos:

$$S_F = 180° \cdot 2A - 360° \cdot F$$

$$S_F = 360° \cdot (A - F)$$

Como a relação de Euler nos poliedros convexos $V - A + F = 2$ implica $V - 2 = A - F$, temos finalmente que a soma das medidas, em graus, dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo pode ser expressa unicamente em função do seu número de vértices:

$$\boxed{S_F = (V - 2) \cdot 360°}$$

Em radianos, essa relação fica expressa por:

$$\boxed{S_F = (V - 2) \cdot 2\pi}$$

**! Atenção**

O uso da expressão em radianos pode facilitar consideravelmente os cálculos, mas, para isso, é necessário observar que:

- a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a $\pi$ radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $2\pi$ radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é igual a $3\pi$ radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é igual a $4\pi$ radianos.

E assim por diante.

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de $n$ lados é igual a $(n - 2)\pi$ radianos.

## Poliedros de Platão

Platão dedicou parte de seus estudos à busca da perfeição geométrica, analisando as características dos poliedros convexos. Assim, ele propôs que, para satisfazer essa perfeição, independentemente das dimensões ou grandezas, um poliedro deveria admitir uma regularidade cardinal nas quantidades de elementos determinados pelos entes primitivos da Geometria.

Isso significa que o poliedro deve ter uma regularidade no número de arestas que partem de cada vértice e no número de arestas que cercam cada face. Desse modo, Platão impôs as seguintes características aos sólidos estudados:

I. Todas as faces devem ter o mesmo número $x$ de lados, com $x \geqslant 3$.

II. Todos os vértices devem ser extremidades do mesmo número $y$ de arestas, com $y \geqslant 3$.

III. O poliedro deve ser convexo.

Da primeira imposição, temos, na relação $F = \sum_{i=3}^{\infty} F_i$, que só há uma parcela não nula, a parcela $F_x$, ou seja, $F_i = 0$ para todo $i = x$. Portanto, nos poliedros de Platão, $F = F_x$ e:

$$\sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i = 2A$$

$$0 + 0 + ... + x \cdot F_x + 0 + 0 + 0 + ... = 2A$$

$$x \cdot F_x = 2A$$

$$F_x = \frac{2A}{x} \Rightarrow F = \frac{2A}{x}$$

Analogamente, da segunda imposição, temos, da relação $V = \sum_{i=3}^{\infty} V_i$, que $V = V_y$ e, da relação $\sum_{i=3}^{\infty} i \cdot V_i = 2A$, que $V = \frac{2A}{y}$.

Então, da terceira imposição, temos $V - A + F = 2$, na qual podemos substituir as expressões obtidas para V e F até aqui, chegando à equação:

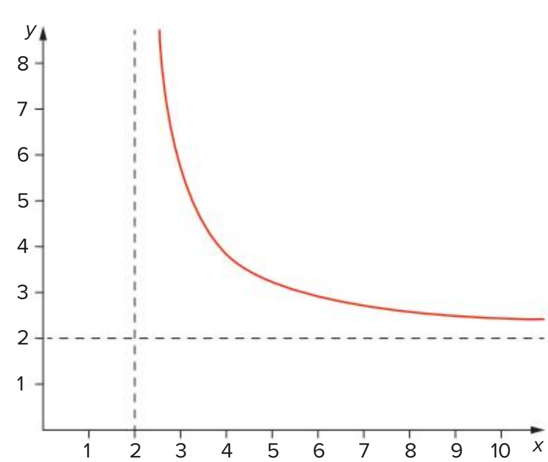
$$\frac{2A}{x} - A + \frac{2A}{y} = 2 \Rightarrow A\left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{2}{y}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} - 1 + \frac{2}{y} = \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{A} + 1$$

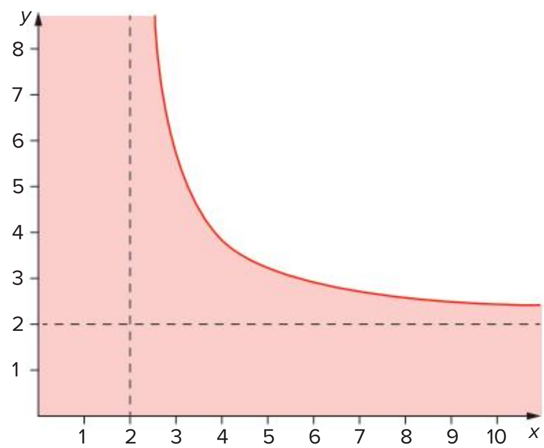
Considerando que o valor da fração $\frac{2}{A}$ é necessariamente positivo, podemos concluir que o primeiro membro dessa última equação é maior que 1, ou seja, que os valores de $x$ e $y$ satisfazem a seguinte inequação:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 1$$

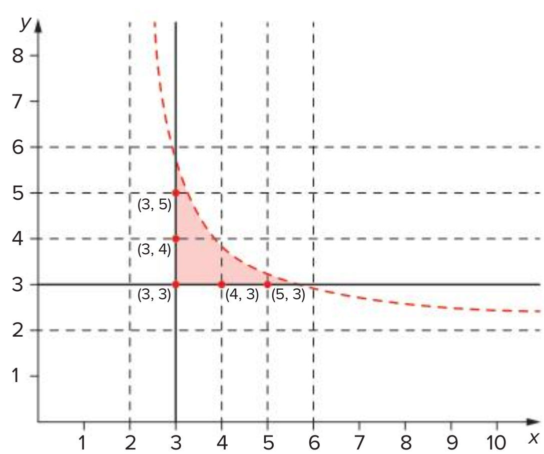
Observe o gráfico da curva de equação $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1$ no primeiro quadrante do plano cartesiano:



Os pontos desse quadrante que satisfazem a inequação $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 1$ estão situados à esquerda e abaixo desse gráfico, pois, quanto maiores forem os valores de $x$ e $y$, menor será o valor do primeiro membro da inequação.




Lembrando que $x \geqslant 3$ e $y \geqslant 3$, a região do primeiro quadrante que contém as soluções inteiras da inequação $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 1$ fica limitada pelas retas de equações $x = 3$ e $y = 3$.




Nessa região, podem ser observadas as cinco únicas soluções inteiras do sistema de inequações gerado pelas imposições de Platão. Essas soluções são os pares ordenados (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3) e (3, 5).

Como, nas equações $F = \frac{2A}{x}$ e $V = \frac{2A}{y}$, os números de faces e vértices desses poliedros dependem dos seus números de arestas, da equação $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{A} + 1$ vamos extrair uma função para obter os números de arestas de cada tipo de poliedro de Platão:

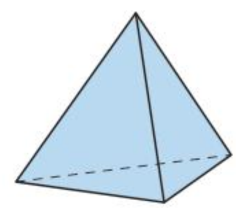
$$\frac{2}{A} + 1 = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{2}{A} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - 1 \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{2x + 2y - xy}{2xy} \Rightarrow A = \frac{2xy}{2x + 2y - xy}$$

Assim, na primeira solução, temos $x = 3$ e $y = 3$ e, portanto, as faces do poliedro são triangulares, os vértices são triédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3} = \dfrac{18}{6 + 6 - 9} = \dfrac{18}{3} = 6 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = \dfrac{12}{3} = 4 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = \dfrac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

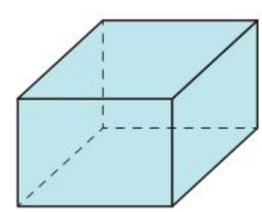
Como o prefixo do nome do poliedro deve indicar seu número de faces, com $V = 4$, $A = 6$ e $\mathbf{F = 4}$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **tetra**edro.



Na segunda solução do sistema, temos $x = 4$ e $y = 3$, portanto as faces do poliedro são quadrangulares, os vértices são triédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 3} = \dfrac{24}{8 + 6 - 12} = \dfrac{24}{2} = 12 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2 \cdot 12}{3} = \dfrac{24}{3} = 8 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2 \cdot 12}{4} = \dfrac{24}{4} = 6 \end{cases}$$

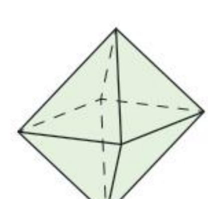
Com $V = 8$, $A = 12$ e $\mathbf{F = 6}$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **hexa**edro.



Na terceira solução do sistema, temos $x = 3$ e $y = 4$, portanto as faces do poliedro são triangulares, os vértices são tetraédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4} = \dfrac{24}{6 + 8 - 12} = \dfrac{24}{2} = 12 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2 \cdot 12}{4} = \dfrac{24}{4} = 6 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2 \cdot 12}{3} = \dfrac{24}{3} = 8 \end{cases}$$

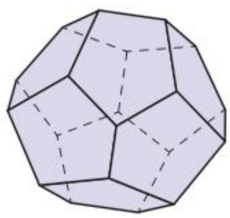
Com $V = 6$, $A = 12$ e $\mathbf{F = 8}$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **octa**edro.



Na quarta solução do sistema, temos $x = 5$ e $y = 3$, portanto as faces do poliedro são pentagonais, os vértices são triédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3} = \dfrac{30}{10 + 6 - 15} = \dfrac{30}{1} = 30 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2 \cdot 30}{3} = \dfrac{60}{3} = 20 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2 \cdot 30}{5} = \dfrac{60}{5} = 12 \end{cases}$$

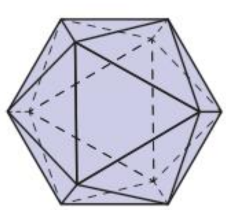
Com V = 20, A = 30 e **F = 12**, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **dodeca**edro.



Na quinta e última solução do sistema, temos $x = 3$ e $y = 5$, portanto as faces do poliedro são triangulares, os vértices são pentaédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5} = \dfrac{30}{6 + 10 - 15} = \dfrac{30}{1} = 30 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2 \cdot 30}{5} = \dfrac{60}{5} = 12 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2 \cdot 30}{3} = \dfrac{60}{3} = 20 \end{cases}$$

Com V = 12, A = 30 e **F = 20**, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **icosa**edro.



**! Atenção**

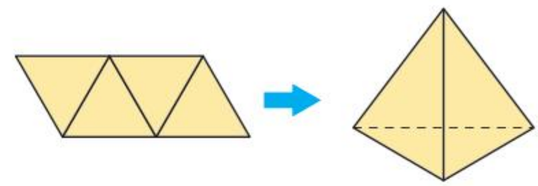
Veja as características dos cinco tipos de poliedros de Platão no seguinte quadro:

| Nome | Faces | Arestas | Vértices |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | 4 triangulares | 6 | 4 triédricos |
| Hexaedro | 6 quadrangulares | 12 | 8 triédricos |
| Octaedro | 8 triangulares | 12 | 6 tetraédricos |
| Dodecaedro | 12 pentagonais | 30 | 20 triédricos |
| Icosaedro | 20 triangulares | 30 | 12 pentaédricos |

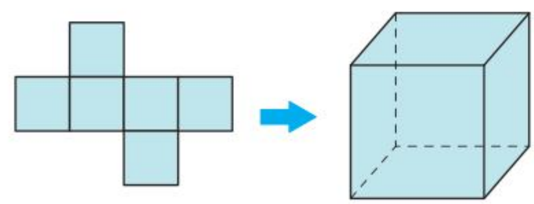
## Poliedros regulares

São todos os poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares, ou seja, polígonos em que todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos têm a mesma medida.

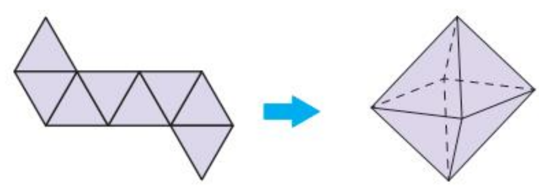
Assim, o tetraedro regular é cercado por quatro triângulos equiláteros.



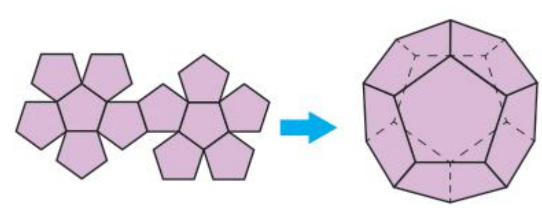
O hexaedro regular (cubo) é cercado por seis quadrados.



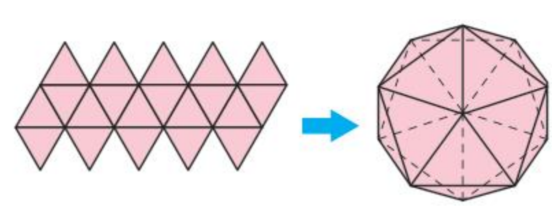
O octaedro regular é cercado por oito triângulos equiláteros.



O dodecaedro regular é cercado por doze pentágonos regulares.



O icosaedro regular é cercado por vinte triângulos equiláteros.

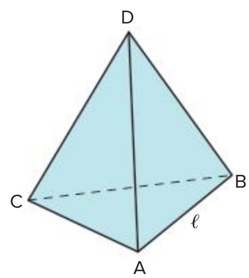


## Tetraedros regulares

São os poliedros de Platão que possuem a menor quantidade de elementos definidos pelos entes primitivos da Geometria: quatro vértices triédricos, seis arestas de mesmo comprimento e quatro faces triangulares.

Depois dos cubos, os tetraedros provavelmente são os poliedros regulares com maior incidência nas questões de vestibulares. Por isso, é recomendável conhecer previamente algumas relações métricas particulares desses sólidos.

Primeiramente, devemos observar que todos os ângulos internos das faces de um tetraedro medem 60°, pois essas faces são triângulos equiláteros. Depois, devemos considerar que os valores de sua área, seus apótemas, suas alturas e seu volume podem ser todos expressos em função do comprimento $\ell$ de suas arestas.



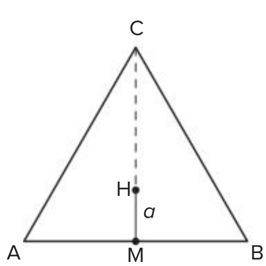

Na figura, os triângulos ABC, ABD, ACD e BCD são equiláteros e congruentes entre si. Portanto:

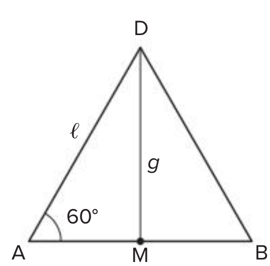
$$AB = AC = AD = BC = BD = CD = \ell$$

Como a área de um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento $\ell$ é dada pela expressão $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e o tetraedro é cercado por quatro desses triângulos, sua área total é expressa por:

$$A_{total} = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_{total} = \ell^2\sqrt{3}}$$

Considerando o triângulo ABC como a base desse tetraedro e tomando os pontos H e M, respectivamente, como centro da base e ponto médio da aresta $\overline{AB}$, podemos observar uma relação entre os comprimentos dos apótemas do tetraedro.




Sendo $a$ o comprimento do apótema da base $\overline{HM}$, o teorema do baricentro do triângulo garante que os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{CM}$ medem, respectivamente, o dobro e o triplo de HM. Assim:

$$\begin{cases} HM = a \\ CH = 2a \\ CM = 3a \end{cases}$$

Da congruência entre os triângulos ABC e ABD, concluímos que o comprimento $g$ do apótema $\overline{DM}$ do tetraedro é o mesmo da mediana $\overline{CM}$ de sua base, ou seja, $DM = g = 3a$.

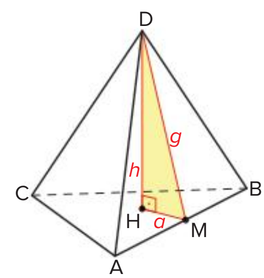
Contido na face lateral ABD, o triângulo AMD é retângulo no vértice M e seu ângulo interno de vértice A mede 60°. Assim, no triângulo AMD:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{DM}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{g}{\ell} \Rightarrow 2g = \ell\sqrt{3} \Rightarrow g = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

E, da relação $g = 3a$, entre os apótemas do tetraedro regular, temos:

$$3a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}}$$

Observando agora as posições desses apótemas no sólido espacial, podemos perceber a existência do triângulo retângulo DHM, em que $\overline{DH}$ é a altura do tetraedro.




Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DHM, temos:

$$a^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow a^2 + h^2 = (3a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + h^2 = 9a^2 \Rightarrow h^2 = 8a^2$$

Substituindo $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ na última relação:

$$h^2 = 8 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{24\ell^2}{36} \Rightarrow h^2 = \frac{2\ell^2}{3}$$

Assim, a altura do tetraedro regular pode ser expressa em função do comprimento das arestas:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Há também a versão racionalizada dessa expressão, que é:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}}$$

Porém, o uso da primeira forma, não racionalizada, torna mais simples a dedução da fórmula para o volume do tetraedro regular, que, por ser uma pirâmide, tem seu volume igual a um terço do produto da área de sua base pela medida da sua altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}}$$

## Exercícios resolvidos

**33. Uece 2018** Assinale a opção que corresponde à medida da altura do tetraedro regular cuja medida da aresta é igual a 3 m.

a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m

b) $\sqrt{6}$ m

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m

**Resolução:**

Usando a versão racionalizada da fórmula da altura do tetraedro: $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$ m $\Rightarrow h = \frac{3\sqrt{6}}{3}$ m $= \sqrt{6}$ m.

Alternativa: **B**

**34. Uece 2015** A medida da aresta de um tetraedro regular com altura igual a cinco metros é

a) $5\sqrt{2{,}5}$ m

b) $5\sqrt{1{,}5}$ m

c) $2\sqrt{1{,}5}$ m

d) $3\sqrt{2{,}5}$ m

**Resolução:**

Usando a versão não racionalizada da fórmula da altura do tetraedro $h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, temos, em metros:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow 5 = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{1{,}5}$$

Alternativa: **B**

**35. Fuvest-SP 2016** Cada aresta do tetraedro regular ABCD mede 10. Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano a paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dado que AP = 3, o quadrilátero determinado pelas interseções de a com as arestas do tetraedro tem área igual a:

a) 21

b) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

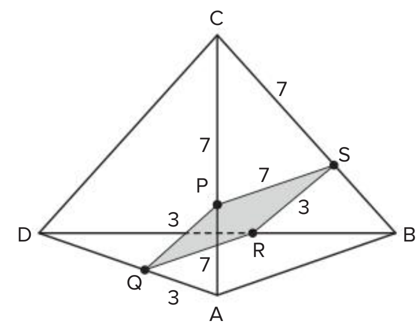
c) 30

d) $\frac{30}{2}$

e) $\frac{30\sqrt{2}}{2}$

**Resolução:**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte situação:



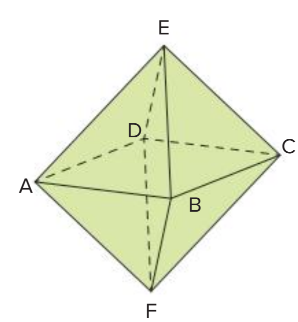

Como as arestas $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ são ortogonais, o quadrilátero PSRQ formado é um retângulo de dimensões 3 e 7.
Assim, a área vale 21.
Alternativa: **A**

### Octaedros regulares

São os poliedros de Platão que possuem seis vértices tetraédricos, 12 arestas de mesmo comprimento e oito faces em forma de triângulos equiláteros.

Além dos cubos e dos tetraedros, há uma incidência considerável desse tipo de poliedro entre as questões de vestibulares. Por isso, também é recomendável conhecer previamente algumas relações métricas particulares desses sólidos.

Quanto aos ângulos internos das faces, novamente temos todos medindo 60°, pois as faces do octaedro regular são triângulos equiláteros. As medidas da área, das diagonais e do volume também podem ser expressas em função do comprimento $\ell$ de suas arestas.

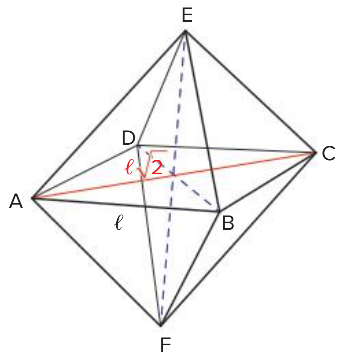



Na figura, os triângulos ABE, ABF, ADE, ADF, BCE, BCF, CDE e CDF são equiláteros e congruentes entre si. Portanto, AB = AD = AE = AF = BC = BE = BF = CD = CE = CF = = DE = DF = $\ell$.

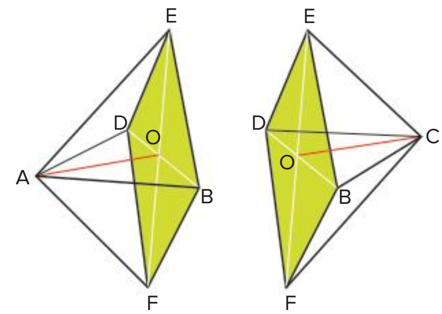
Como a área de um triângulo equilátero de lado $\ell$ é dada pela expressão $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e o octaedro é cercado por oito desses triângulos, sua área total é expressa por:

$$A_{total} = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_{total} = 2\ell^2\sqrt{3}}$$

Ainda na figura, os quadriláteros ABCD, AECF e BEDF são quadrados congruentes. Portanto, as diagonais do octaedro medem $AC = BD = EF = \ell\sqrt{2}$.




Agora, para encontrar o volume desse sólido, basta observar que qualquer plano que contenha um dos quadrados mencionados divide-o em duas pirâmides quadrangulares regulares. A figura a seguir considera, por exemplo, o plano que contém o quadrado BEDF para dividir o octaedro nas pirâmides congruentes ABEDF e CBEDF, cujas alturas são os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{CO}$ que ligam os vértices dessas pirâmides ao centro de suas bases:




A base dessas pirâmides é o quadrado BEDF de lado $\ell$, cuja área é $\ell^2$.

Como o centro do octaedro é o ponto médio de suas diagonais, as alturas das pirâmides obtidas pela seção medem a metade da diagonal de um quadrado de lado $\ell$.

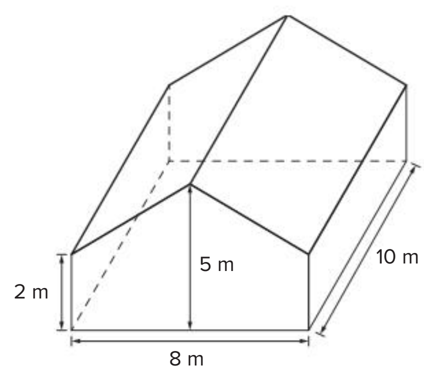
Assim, $h = AO = CO = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

O volume do octaedro regular é igual ao dobro do volume de uma dessas pirâmides:

$$V = \frac{2}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{3}}$$

## Revisando

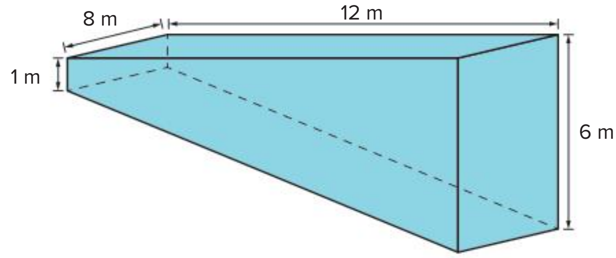
1. A figura a seguir representa o projeto de um galpão em forma de um prisma reto cuja fachada tem o formato de um pentágono irregular, o qual possui simetria bilateral, dois lados verticais com 2 m de comprimento e um lado horizontal com 8 m de comprimento.




Depois de construída, a superfície exterior do teto do galpão será pintada com uma tinta impermeável que é vendida somente em galões de 5 litros ao custo de R$ 96,00 cada galão. Sabendo que um litro dessa tinta é suficiente para pintar uma área de 8 metros quadrados, quanto será gasto na compra da tinta para a pintura do teto do galpão?

a) R$ 80,00
b) R$ 120,00
c) R$ 144,00
d) R$ 240,00
e) R$ 288,00

**2.** A figura a seguir representa uma piscina de mergulho no formato de um prisma reto.

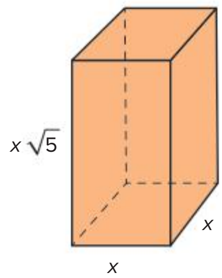



Essa piscina tem 8 m de largura por 12 m de comprimento, e a profundidade varia de 1 m na parte rasa até 6 m na parte funda.

Sabendo que o revestimento da superfície interna dessa piscina custa R$ 20,00 o metro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor do custo total desse revestimento.

a) R$ 4 500,00
b) R$ 4 620,00
c) R$ 4 750,00
d) R$ 4 880,00
e) R$ 5 000,00

**3.** A base de um paralelepípedo reto é um quadrado de lado *x* metros, a altura é igual a $x\sqrt{5}$ metros, e seu volume é igual a 0,2 $m^3$.

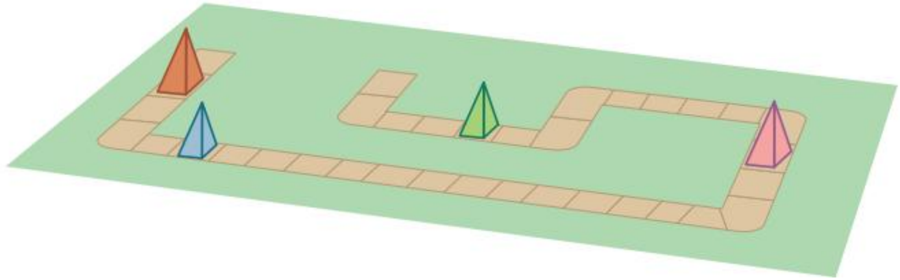



Sabendo que para calcular o volume de um paralelepípedo basta multiplicar a área de sua base pelo valor de sua altura, pode-se concluir que o valor de *x*, em metros, é igual a:

a) $\sqrt{5}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
c) $\sqrt[3]{5}$
d) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5}$
e) $\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

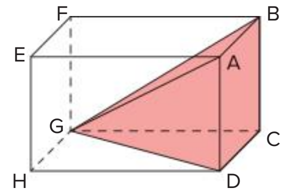
Texto para as questões de **4** a **6**.

As peças de um jogo de tabuleiro têm a forma de uma pirâmide irregular, como mostra a figura a seguir.



FRENTE 3

A empresa que fabrica esse jogo obtém as peças efetuando dois cortes planos em um bloco sólido que tem a forma de um prisma reto cuja base é um quadrado de lado 3 cm e cuja altura mede 4 cm. A figura a seguir ilustra o formato da peça:




A pirâmide GABCD é obtida a partir do prisma ABCDEFGH efetuando-se, primeiro, um corte pelo plano que passa pelos pontos A, B e G e, depois, um corte pelo plano que passa pelos pontos A, D e G.

**4.** O volume de cada peça desse jogo é igual a:

**a)** 9 $cm^3$
**b)** 12 $cm^3$
**c)** 18 $cm^3$
**d)** 24 $cm^3$
**e)** 36 $cm^3$

**5.** Se o material de que é feito cada bloco pode ser derretido e reutilizado, então, a partir de duas centenas de blocos, pode-se obter até:

**a)** 600 peças.
**b)** 400 peças.
**c)** 300 peças.
**d)** 200 peças.
**e)** 100 peças.

**6.** Na regra desse jogo, vence quem conseguir posicionar, na mesma casa do tabuleiro, o número mínimo de peças necessárias para montar uma pirâmide regular. Esta deve ser obtida fazendo-se coincidir faces congruentes de peças diferentes. Qual é esse número mínimo de peças?

**a)** 2
**b)** 3
**c)** 4
**d)** 5
**e)** 6

**7.** Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular cujas arestas da base medem $2\sqrt{3}$ cm e as arestas laterais medem $2\sqrt{7}$ cm.

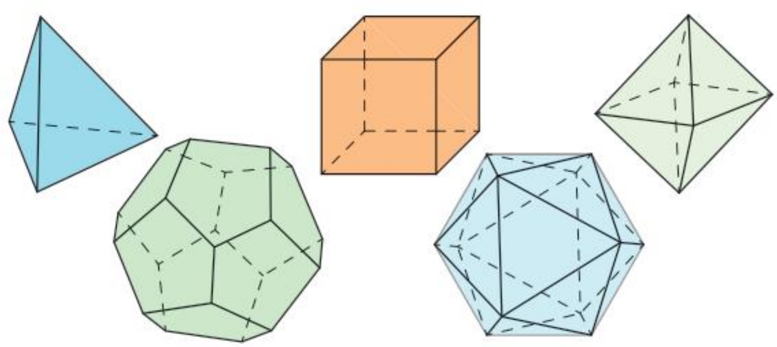
8. A tradicional bola de futebol é, primeiramente, construída como um poliedro de faces pentagonais (pretas) e hexagonais (brancas). Essas faces são recortadas em couro e costuradas umas nas outras ao longo de suas arestas envolvendo uma bexiga de borracha.


Barcin/iStockphoto.com

Depois, ao encher a bexiga com ar, as peças de couro se deformam e o poliedro costurado em couro assume um aspecto esférico.
Sabendo que uma bola de futebol tem em sua formação 12 peças pentagonais e 20 peças hexagonais, determine o número de costuras sobre as arestas do sólido que dá forma à bola de futebol.

**a)** 100
**b)** 90
**c)** 80
**d)** 70
**e)** 60

9. Sabe-se que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. As figuras a seguir representam cada um deles:



Considerando que todos os poliedros representados por essas figuras têm suas arestas com a mesma medida, então as áreas das superfícies dos poliedros regulares que têm suas faces triangulares são diretamente proporcionais aos números:

**a)** 2, 3 e 5.
**b)** 2, 3 e 4.
**c)** 1, 2 e 5.
**d)** 1, 3 e 4.
**e)** 1, 4 e 5.

10. Quanto mede a aresta de um tetraedro regular de altura $10\sqrt{3}$ cm?

FRENTE 3

## Exercícios propostos

1. **Enem 2017** Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.


Figura 1

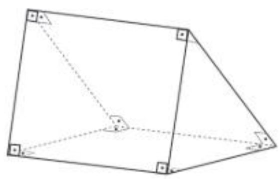


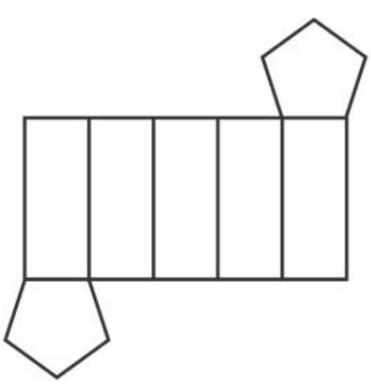
Figura 2

Romero, L. Tendências. *Superinteressante*, *n*. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

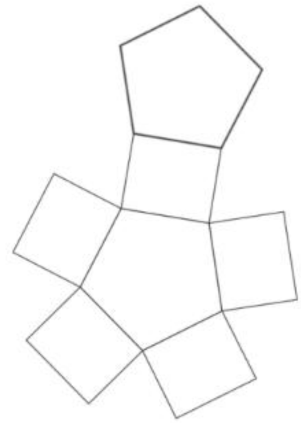
2. **Enem 2014** Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.



Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 16

3. **IFSP 2016** A figura abaixo representa a planificação de um poliedro P:



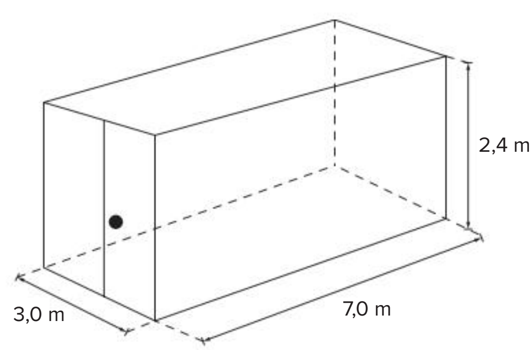
Avalie as afirmações I, II e III sobre o poliedro representado pela planificação:

**I.** O número de arestas do poliedro P corresponde a uma vez e meia o número de vértices.
**II.** O poliedro P tem, pelo menos, duas faces paralelas.
**III.** O poliedro P pode ser classificado como pentágono.

Contém uma afirmação verdadeira:

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

4. **Enem PPL 2019** Uma empresa especializou-se no aluguel de contêineres que são utilizados como unidades comerciais móveis. O modelo padrão alugado pela empresa tem altura de 2,4 m e as outras duas dimensões (largura e comprimento), 3,0 m e 7,0 m, respectivamente.



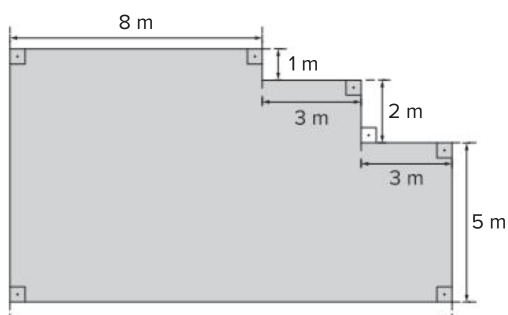

Um cliente solicitou um contêiner com altura padrão, porém, com largura 40% maior e comprimento 20% menor que as correspondentes medidas do modelo padrão. Para atender às necessidades de mercado, a empresa também disponibiliza um estoque de outros modelos de contêineres, conforme o quadro

| Modelos com altura de 2,4 m | Largura (em metro) | Comprimento (em metro) |
|---|---|---|
| I | 4,2 | 8,4 |
| II | 4,2 | 5,6 |
| III | 4,2 | 5,8 |
| IV | 5,0 | 5,6 |
| V | 5,0 | 8,4 |

Dos modelos disponíveis, qual atende às necessidades do cliente?

**a)** I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

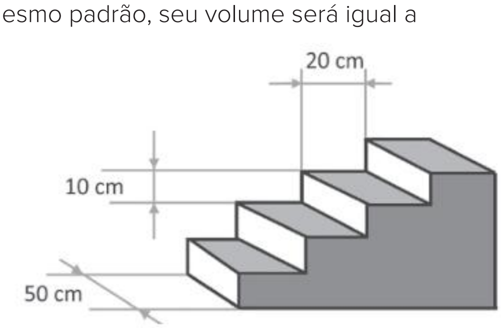
**5.** **Enem 2019** Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 $m^3$, 5 $m^3$ e 10 $m^3$ de concreto.




Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

**a)** Dez caminhões com capacidade máxima de 10 $m^3$.
**b)** Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 $m^3$.
**c)** Um caminhão com capacidade máxima de 5 $m^3$.
**d)** Dez caminhões com capacidade máxima de 2 $m^3$.
**e)** Um caminhão com capacidade máxima de 2 $m^3$.

**6.** **Fuvest-SP 2019** A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a




**a)** 2,1 $m^3$. **c)** 3,0 $m^3$. **e)** 6,0 $m^3$.
**b)** 2,3 $m^3$. **d)** 4,2 $m^3$.

**7.** **Uece 2020** Considere um prisma hexagonal regular cuja medida da altura é igual à medida da aresta da base. Se o ponto que está no centro de uma das bases do prisma é ligado aos vértices da outra base determinando o contorno de uma pirâmide regular cuja medida do volume é igual a $108\sqrt{3}$ $m^3$ então, a medida, em metros, da aresta da base do prisma é igual a

**a)** 7,0
**b)** 5,0
**c)** 6,5
**d)** 6,0

Texto para as questões **8** e **9**.

Contêiner é um equipamento utilizado para o transporte de cargas em navios e trens e consiste em uma grande caixa de metal em forma de paralelepípedo.


zentilia/iStockphoto.com

As seis faces retangulares de um container são bastante espessas e, juntas, ocupam de 13% a 15% do volume do paralelepípedo. A base é a de maior espessura, pois tem que sustentar a carga. A face frontal, onde fica a entrada, tem espessura ligeiramente maior que a do fundo, e as duas faces laterais têm a mesma espessura. O quadro a seguir apresenta algumas das principais características de três tipos distintos de contêineres marítimos.

| | | Tipo I | Tipo II | Tipo III |
|---|---|---|---|---|
| Medidas externas (mm) | Comprimento | 6058 | 12192 | 12192 |
| | Largura | 2438 | 2438 | 2438 |
| | Altura | 2591 | 2591 | 2895 |
| Medidas internas (mm) | Comprimento | 5910 | 12044 | 12032 |
| | Largura | 2340 | 2342 | 2350 |
| | Altura | 2388 | 2380 | 2695 |
| Entradas (mm) | Largura | 2326 | 2337 | 2338 |
| | Altura | 2282 | 2280 | 2585 |
| Peso (kg) | Vazio | 2080 | 3550 | 4150 |
| | Carga máxima | 21920 | 26930 | 26330 |
| | Total | 24000 | 30480 | 30330 |

**8.** Entre os tipos I, II e III de contêiner, o de maior capacidade de carga, o de maior capacidade cúbica e o que tem as faces laterais de maior espessura são, respectivamente, os tipos:

**a)** I, II e III. **c)** III, II e II. **e)** II, III e II.
**b)** III, II e I. **d)** II, III e I.

**9.** As remessas periódicas de peças automotivas para o Brasil, feitas por certa montadora italiana, costumavam ser transportadas em 8 contêineres do tipo II, todos no limite de sua carga máxima.
Depois de um tempo, esses contêineres precisaram de manutenção e, como esta seria demorada, a montadora precisou alugar outras unidades para continuar fazendo suas remessas para o Brasil.
Qual é o número mínimo de contêineres do tipo I necessário para enviar uma remessa equivalente à de costume?

**a)** 9 **c)** 11 **e)** 13
**b)** 10 **d)** 12

**10. Enem PPL 2019** Uma empresa de transporte disponibiliza, para embalagem de encomendas, caixas de papelão no formato de paralelepípedo retoretângulo, conforme dimensões no quadro.

| Modelo da caixa | Comprimento (cm) | Largura (cm) | Altura (cm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 12 | 13 |
| 2 | 23 | 20 | 25 |
| 3 | 25 | 25 | 25 |
| 4 | 26 | 25 | 24 |
| 5 | 23 | 26 | 26 |

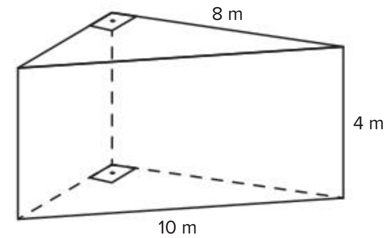
Para embalar uma encomenda, contendo um objeto esférico com 11 cm de raio, essa empresa adota como critério a utilização da caixa, dentre os modelos disponíveis, que comporte, quando fechada e sem deformá-la, a encomenda e que possua a menor área de superfície total.
Desconsidere a espessura da caixa.
Nessas condições, qual dos modelos apresentados deverá ser o escolhido pela empresa?

**a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

**11. UEMG 2018** Um *design* projetou um chaveiro no formato de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos corretos, obtém-se que a área total desse prisma mede

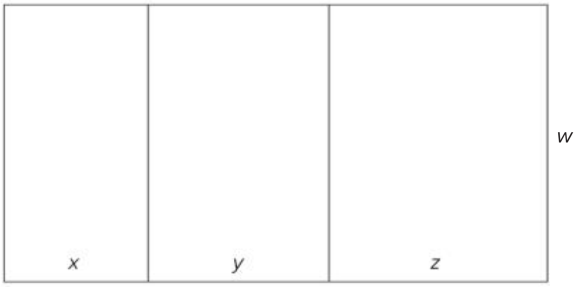
**a)** 336 cm$^2$. **c)** 316 cm$^2$.
**b)** 324 cm$^2$. **d)** 312 cm$^2$.

**12. UPE 2018** Qual é a capacidade, em litros, de uma cisterna que tem a forma da figura abaixo?




**a)** $3,2 \times 10^4$ **d)** $9,6 \times 10^4$
**b)** $5,2 \times 10^3$ **e)** $10,5 \times 10^4$
**c)** $6,4 \times 10^3$

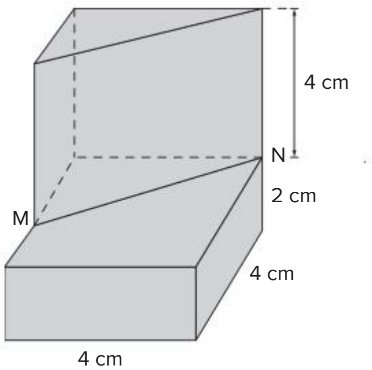
**13. ESPM-SP 2018** A figura abaixo representa a planificação da superfície lateral de um prisma triangular reto, onde as medidas *x*, *y*, *z* e *w* são números inteiros consecutivos, nessa ordem.




Se a soma das medidas de todas as arestas desse prisma é 42 cm, podemos afirmar que seu volume é de:

**a)** 36 cm$^3$ **c)** 48 cm$^3$ **e)** 60 cm$^3$
**b)** 42 cm$^3$ **d)** 54 cm$^3$

**14. UPE 2016** O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm de altura a um paralelepípedo reto de dimensões 4 cm, 4 cm e 2 cm, conforme a figura. Se M é ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido?
Adote $\sqrt{5} \cong 2,2$.




**a)** 99,6 cm$^2$ **d)** 107,6 cm$^2$
**b)** 103,6 cm$^2$ **e)** 109,6 cm$^2$
**c)** 105,6 cm$^2$

**15.** **UEPG-PR 2017** Uma caixa A tem a forma de um prisma regular triangular e uma caixa B tem a forma de um prisma hexagonal regular. Se o lado da base da caixa A tem o dobro da medida do lado da base da caixa B, assinale o que for correto.

**01** A razão entre as áreas da base de A e B é $\frac{2}{3}$.

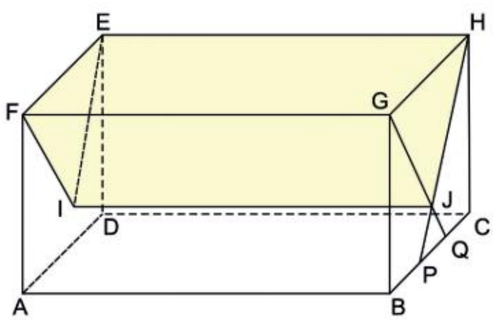
**02** Se a altura de A for a metade da altura de B, então, o volume de B é igual ao triplo do volume de A.

**04** Para que os volumes sejam iguais, a altura de B deve ser o dobro da altura de A.

**08** Se as alturas das caixas são iguais, a área lateral de B é o dobro da de A.

Soma:

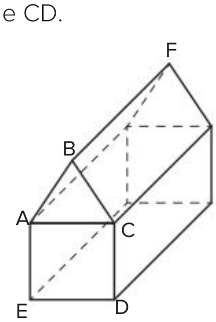
**16.** **FGV-SP 2018** Sobre a face quadrada BCHG do paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH foram traçados $\overline{GQ}$ e $\overline{HP}$, intersectando-se em J, com P e Q dividindo $\overline{BC}$ em três segmentos congruentes tais que BP = PQ = QC. Sabe-se ainda que HE = 8 cm e que GJHEFI é um prisma reto de volume 81 cm$^3$.




O volume do paralelepípedo ABCDEFGH, em cm$^3$, é igual a

**a)** 243.
**b)** 216.
**c)** 192.
**d)** 96.
**e)** 72.

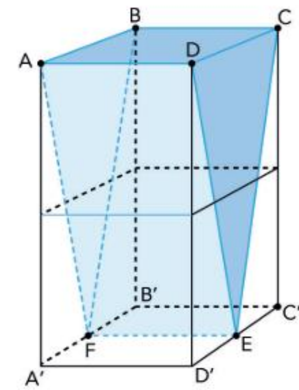
**17.** Na figura a seguir, os pontos A, B e C formam um triângulo equilátero de lado 4 cm, os pontos A, C, D e E formam um quadrado e o segmento $\overline{BF}$ tem o dobro do tamanho de $\overline{CD}$.




Considerando que a figura representa um prisma reto, com os dados apresentados, verifica-se que o quadrado da distância do ponto F ao ponto E é, em cm$^2$:

**a)** $8\sqrt{3}$
**b)** $8(\sqrt{3}-1)$
**c)** $4(4+\sqrt{3})$
**d)** $64\sqrt{3}$
**e)** $16(6+\sqrt{3})$

**18.** **Uerj 2017** Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A'B' e C'D', respectivamente. A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.



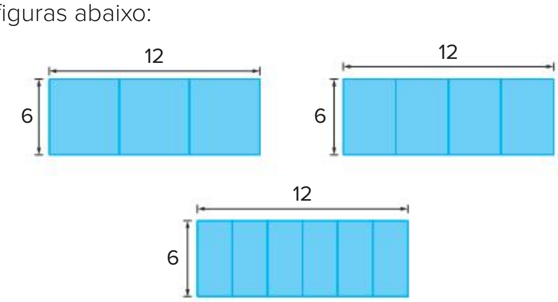

O volume do sólido ABCDEF, em cm$^3$, é igual a:

**a)** 4
**b)** 6
**c)** 8
**d)** 12

**19.** **Uepa 2014** A natureza é uma fonte inesgotável de comunicação de saberes necessários à sobrevivência da espécie humana, por exemplo, estudos de apicultores americanos comprovam que as abelhas constituem uma sociedade organizada e que elas sabem qual o formato do alvéolo que comporta a maior quantidade de mel.

(Texto Adaptado: "Contador", Paulo Roberto Martins. A Matemática na arte e na vida – 2ª Ed. rev. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.)

Um professor de matemática, durante uma aula de geometria, apresentou aos alunos 3 pedaços de cartolina, cada um medindo 6 cm de largura e 12 cm de comprimento, divididos em partes iguais, conforme figuras abaixo:




Dobrando os pedaços de cartolina nas posições indicadas, obtemos representações de prismas retos com as mesmas áreas laterais e base triangular, quadrangular e hexagonal. Sendo $\mathbf{V_3}$ o volume do prisma de base triangular, $\mathbf{V_4}$ o volume do prisma de base quadrangular e $\mathbf{V_6}$ o volume do prisma de base hexagonal, é correto afirmar que:

Adote: $\sqrt{3} = 1,7$.

**a)** $V_3 < V_6 < V_4$
**b)** $V_3 < V_4 < V_6$
**c)** $V_4 < V_3 < V_6$
**d)** $V_6 < V_3 < V_4$
**e)** $V_6 < V_4 < V_3$

**20.** Considere o quadro de informações sobre dois prismas regulares A e B, de mesmo volume:

| | Base | Aresta da base | Altura |
|---|---|---|---|
| **Prisma A** | quadrada | 30 cm | $10\sqrt{3}$ cm |
| **Prisma B** | hexagonal | 20 cm | $x$ |

Nessas condições, a altura do prisma B é igual a:

a) 12 cm
b) 13 cm
c) 14 cm
d) 15 cm
e) 16 cm

**21. Acafe-SC 2018** Uma caixa-d'água em formato cúbico tem a capacidade de armazenar 8 000 litros de água. Devido a problemas nessa caixa-d'água, foi realizada a troca por outra em formato de prisma hexagonal regular.
Sabendo que a altura e a capacidade das duas caixas não se alteraram, qual o perímetro da base desse novo reservatório?

Considere: $\sqrt[4]{12} \cong 1{,}86$.

a) 4,54 metros.
b) 6,44 metros.
c) 8,54 metros.
d) 7,44 metros.

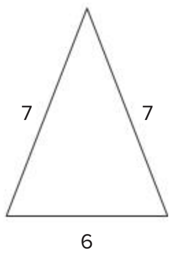
**22. Enem PPL 2019** Para decorar sua casa, uma pessoa comprou um vaso de vidro em forma de um paralelepípedo retangular, cujas medidas internas são: 40 cm de comprimento, 35 cm de largura e 60 cm de altura. Em seguida, foi até uma floricultura e escolheu uma planta aquática para colocar nesse vaso. Segundo uma proposta do gerente do local, essa pessoa avaliou a possibilidade de enfeitar o vaso colocando uma certa quantidade de pedrinhas artificiais brancas, de volume igual a 100 cm$^3$ cada uma delas, que ficarão totalmente imersas na água que será colocada no vaso. O gerente alertou que seria adequado, em função da planta escolhida, que metade do volume do vaso fosse preenchido com água e que, após as pedrinhas colocadas, a altura da água deveria ficar a 10 cm do topo do vaso, dando um razoável espaço para o crescimento da planta. A pessoa aceitou as sugestões apresentadas, adquirindo, além da planta, uma quantidade mínima de pedrinhas, satisfazendo as indicações do gerente.
Nas condições apresentadas, a quantidade de pedrinhas compradas foi

a) 140
b) 280
c) 350
d) 420
e) 700

**23. Enem 2015** Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.
Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

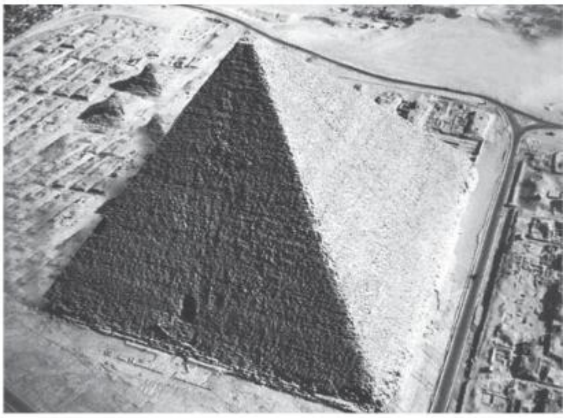
**24. FGV-SP 2020** Uma pirâmide regular tem base quadrada de lado 6, e 4 faces triangulares congruentes com o triângulo abaixo:




O volume da pirâmide é:

a) $14\sqrt{31}$
b) $12\sqrt{31}$
c) $15\sqrt{31}$
d) $13\sqrt{31}$
e) $11\sqrt{31}$

**25. Enem 2016** A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.



Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com. Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

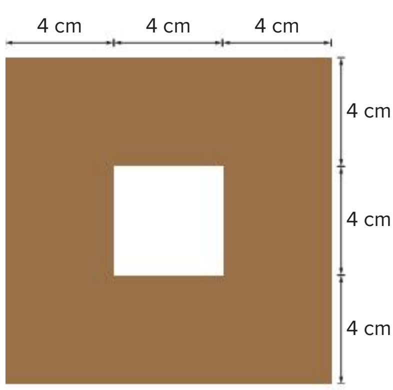
a) 97,0.
b) 136,8.
c) 173,7.
d) 189,3.
e) 240,0.

**26.** Considere uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 13 cm e cuja aresta da base mede 10 cm. Qual o volume, em $cm^3$, dessa pirâmide?

**27. Uece 2020** Considere um sólido que possui exatamente cinco vértices dos quais quatro são os vértices da base (face inferior) de um cubo e o quinto é um dos vértices da face superior desse cubo. Se a medida da aresta do cubo é 9 m, então, a medida do volume desse sólido, em $m^3$, é igual a

a) 241
b) 243
c) 245
d) 247

**28. FICSAE-SP 2018** Uma peça tem a forma de uma pirâmide reta, de base quadrada, com 15 cm de altura e é feita de madeira maciça. A partir da base dessa peça, foi escavado um orifício na forma de um prisma de base quadrada. A figura mostra a visão inferior da base da peça (base da pirâmide).



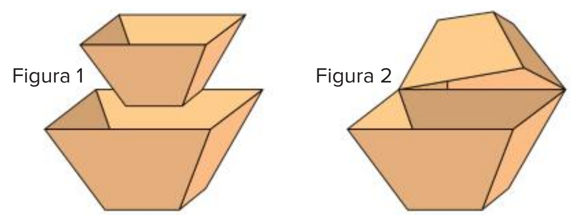

Esse orifício tem a maior profundidade possível, isto é, sem atravessar as faces laterais da pirâmide. O volume de madeira, em $cm^3$, que essa peça contém é

a) 560.
b) 590.
c) 620.
d) 640.

**29. FICSAE-SP 2017** Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3 m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.
Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será
Utilize $\sqrt{10} \cong 3{,}2$.

a) 285
b) 301
c) 320
d) 333

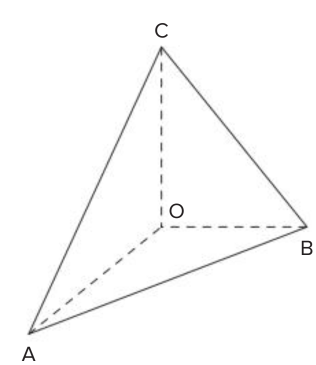
**30.** Uma floricultura vende vasos de flores em dois tamanhos distintos. Os vasos têm o formato de um tronco de pirâmide quadrangular e são todos semelhantes, como mostra a figura 1:




Um cliente quis estimar a razão entre seus volumes e, para isso, posicionou um vaso de cada tamanho de forma a perceber que a diagonal da abertura do vaso menor coincidia com uma das arestas da abertura do vaso maior, como mostra a figura 2.
Sendo assim, esse cliente deve concluir que o volume do vaso maior é, aproximadamente, igual ao:

a) dobro do volume do vaso menor.
b) triplo do volume do vaso menor.
c) quádruplo do volume do vaso menor.
d) quíntuplo do volume do vaso menor.
e) sêxtuplo do volume do vaso menor.

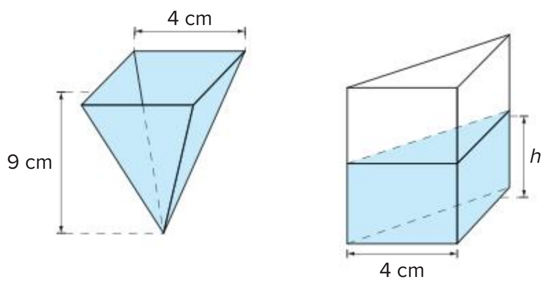
**31. Fuvest-SP 2018 (Adapt.)** Para responder à questão, considere a figura correspondente.




Num tetraedro OABC, os ângulo $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$ medem 90°. Sendo $a$ e $b$ as medidas dos ângulos $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}O$, respectivamente, expresse o cosseno do ângulo $A\hat{C}B$ em função de $a$ e $b$.

FRENTE 3

**32. Uerj 2021** Um recipiente com a forma de uma pirâmide de base quadrada foi completamente preenchido com um líquido. Sua aresta da base mede 4 cm e a altura, 9 cm. Em seguida, todo esse líquido foi transferido para outro recipiente, com a forma de um prisma reto, sendo sua base um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 4 cm. Observe as imagens:




Considere que as espessuras dos recipientes são desprezíveis e que as bases estão em planos horizontais, sendo as alturas definidas em relação às bases.
A altura *h*, em centímetros, que o líquido atingirá no segundo recipiente é:

a) 10
b) 8
c) 6
d) 4

**33. UEM-PR 2020** Considere um prisma triangular reto, cuja base é um triângulo equilátero ABC com lados de medida 2 cm. Sejam $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ as arestas laterais, todas de medida 4 cm. Assinale o que for **correto**.

01 O plano determinado pelos pontos B, C e A' divide o prisma em dois sólidos de mesmo volume.

02 Existe um único plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ simultaneamente.

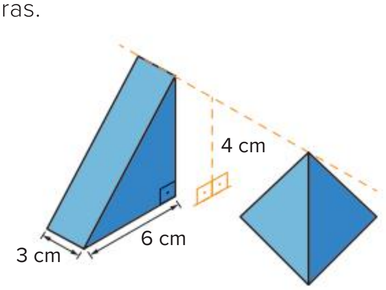
04 A área lateral do prisma é 8 $cm^2$.

08 O volume do prisma é menor do que o volume da esfera de centro no ponto A e que passa pelo ponto B.

16 Existe um plano contendo as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ simultaneamente.

Soma:

**34. Famerp-SP 2018** A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 *cm*, como indicam as figuras.




Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

**35.** Qual é a medida da altura de uma pirâmide triangular regular cuja aresta da base mede 4 e cujo volume é igual ao volume de um cubo de aresta $2\sqrt{3}$?

**36. Enem 2016** É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.
Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.
b) Triângulos e quadrados, apenas.
c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

**37. Uece 2018** Considere uma pirâmide regular hexagonal reta cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em $m^2$, é

a) $115\sqrt{39}$.
b) $150\sqrt{39}$.
c) $125\sqrt{39}$.
d) $140\sqrt{39}$.

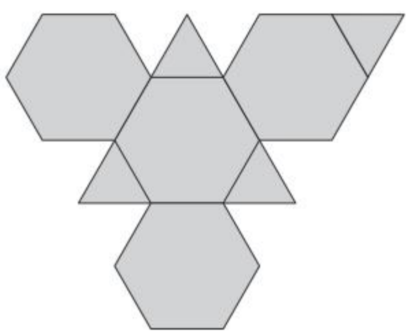
**38. EsPCEx-SP 2020** Um poliedro possui 20 vértices. Sabendo-se que de cada vértice partem 3 arestas, o número de faces que o poliedro possui é igual a:

a) 12
b) 22
c) 32
d) 42
e) 52.

**39. Enem 2016** Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.
Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

**a)** $2V - 4F = 4$
**b)** $2V - 2F = 4$
**c)** $2V - F = 4$
**d)** $2V + F = 4$
**e)** $2V + 5F = 4$

**40. UFJF-Pism-MG 2019** A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



O número de vértices desse poliedro é

**a)** 12
**b)** 18
**c)** 21
**d)** 30
**e)** 36

**41. Enem 2016** Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

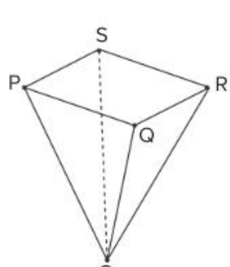


Figura 1

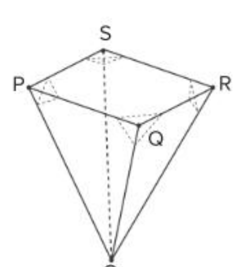


Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

**a)** 9, 20 e 13.
**b)** 3, 24 e 13.
**c)** 7, 15 e 12.
**d)** 10, 16 e 5.
**e)** 11, 16 e 5.

**42.** Uma forma geométrica obtida na lapidação de pedras preciosas consiste em um poliedro convexo com exatamente 97 faces, sendo 32 triângulos, 64 quadriláteros e 1 octógono.

Frederik Christoffersen/ iStockphoto.com

Quantos vértices este poliedro possui?

**a)** 80
**b)** 83
**c)** 85
**d)** 88
**e)** 90

**43. Enem 2017** O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

**a)** 10.
**b)** 12.
**c)** 25.
**d)** 42.
**e)** 50.

**44. UEPG-PR 2018** Dois poliedros regulares são construídos utilizando folhas de cartolina. Um desses poliedros tem faces pentagonais e o outro tem faces triangulares. Se a soma de todas as faces desses poliedros é 20, assinale o que for correto.

**01** A soma dos ângulos de todas as faces do poliedro que tem faces pentagonais é 6 480°.
**02** O poliedro com faces triangulares tem 8 vértices a menos que o outro.
**04** Os dois poliedros têm o mesmo número de arestas.
**08** A soma de todas as arestas desses poliedros é maior que 40.

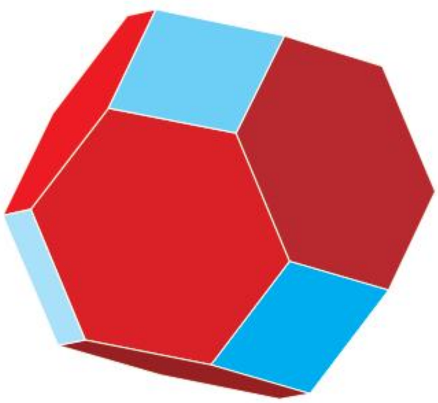
Soma:

FRENTE 3

**45. UFJF/Pism-MG 2020** Um poliedro convexo tem oito vértices e apenas faces triangulares e quadrangulares. O número de faces triangulares é o quádruplo das quadrangulares. O número de arestas desse poliedro é

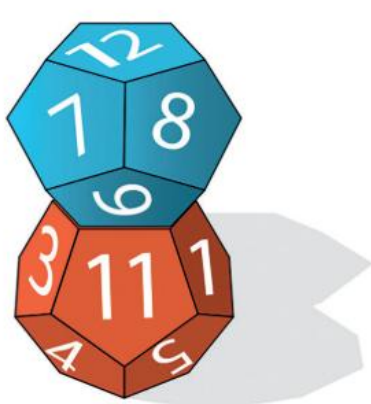
a) 32
b) 20
c) 16
d) 10
e) 8

**46. UPF-RS 2015** O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:



a) 2 160°
b) 5 760°
c) 7 920°
d) 10 080°
e) 13 680°

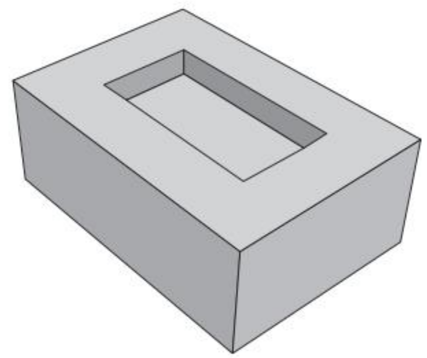
**47. Uerj 2016** Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.




Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.
A soma V + F + A é igual a:

a) 102
b) 106
c) 110
d) 112

**48. Enem PPL 2019** No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): V + F = A + 2. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares.



Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

a) V + F = A
b) V + F = A – 1
c) V + F = A + 1
d) V + F = A + 2
e) V + F = A + 3

**49. Uece 2016** Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3 600 graus, então, a base da pirâmide é um polígono com:

a) 9 lados.
b) 10 lados.
c) 11 lados.
d) 12 lados.

**50. Fuvest-SP 2013** Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{3}$
e) 6

**51. Mackenzie-SP 2017** A altura, em cm, de um tetraedro regular cuja área total mede $48\sqrt{3}$ cm$^2$ é:

a) $2\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

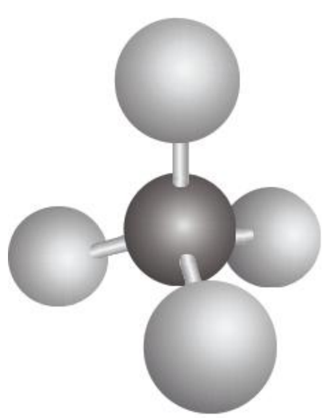
e) 6

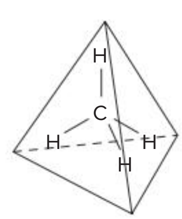
**52. FGV-RJ 2016** Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.
A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

a) 56.
b) 32.
c) 30.
d) 36.
e) 48.

**53. UEL-PR 2015** Na molécula do Metano $(CH_4)$, o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio.

Molécula do Metano






Tetraedro

Considerando que as arestas $\ell$ do tetraedro regular medem 6 cm e que a altura mede $h = \frac{1}{3}\ell\sqrt{6}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o volume desse tetraedro.

a) $3\sqrt{3}$ cm$^3$

b) $18\sqrt{2}$ cm$^3$

c) $18\sqrt{3}$ cm$^3$

d) $36\sqrt{2}$ cm$^3$

e) $54\sqrt{2}$ cm$^3$

**54. Unicamp-SP 2020** Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$
b) $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$
d) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$

**55. Uern 2015** Um tetraedro regular é um tipo particular de pirâmide regular no qual qualquer uma de suas faces pode ser considerada base, haja vista ser formado por quatro regiões triangulares congruentes e equiláteras. Considerando essa informação, a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm é, em cm$^2$:

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

a) 27,2.
b) 42,5.
c) 61,2.
d) 83,3.

**56. Uepa 2015** Leia o texto para responder à questão.

A arte é uma forma de expressão da racionalidade humana. O origami é uma técnica japonesa baseada em juntar módulos individuais de papel dobrando para criar prismas e cubos, conforme ilustra a figura abaixo.

Fonte: http://noticias.br.msn.com/fotos/escocesa-explora-varia%c3%a7%c3%b5es--tonais-de-luz-sobre-papel-em-esculturas-de-origami-2?page=2#image=2

Todas as pirâmides ilustradas na composição artística acima são tetraedros regulares de base triangular de aresta L = 1 dm ligados uns aos outros, por meio de suas arestas e mantendo suas bases sobre um mesmo plano. Nestas condições, a área total, em dm$^2$, de um desses tetraedros regulares é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

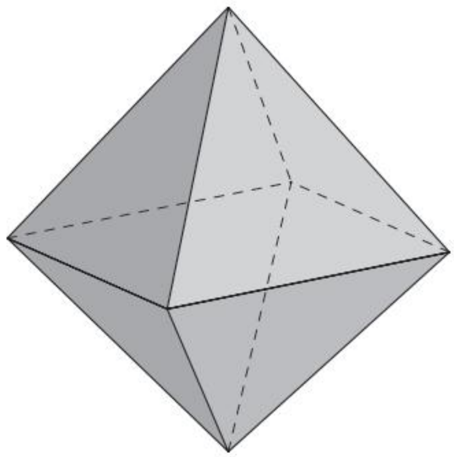
c) $\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) $2\sqrt{3}$

FRENTE 3

**57.** **UFJF/Pism-MG 2020** O octaedro regular apresentado na figura a seguir será seccionado por um plano que passará por pontos do interior desse octaedro.



Quais tipos de polígonos poderão ser produzidos por este tipo de secção?

**a)** Apenas quadriláteros, pentágonos, hexágonos e octógonos.

**b)** Apenas triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

**c)** Apenas quadriláteros.

**d)** Apenas quadriláteros e hexágonos.

**e)** Apenas quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

**58.** **Uece 2020** O volume, em $m^3$, de um poliedro convexo, cujos vértices são os centros das faces de um cubo, cuja medida da aresta é igual a 1 m, é

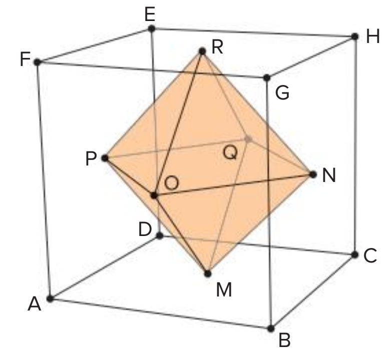
**a)** $\frac{1}{6}$

**b)** $\frac{1}{2}$

**c)** $\frac{1}{3}$

**d)** $\frac{2}{3}$

**59.** Um cristal de quartzo foi cortado em forma de um octaedro regular, MNOPQR, e teve seus vértices fixados nos centros das faces de uma caixa cúbica ABCDEFGH de acrílico com 12 *cm* de aresta, como mostra a figura:




Considerando esse cristal de quartzo, determine:

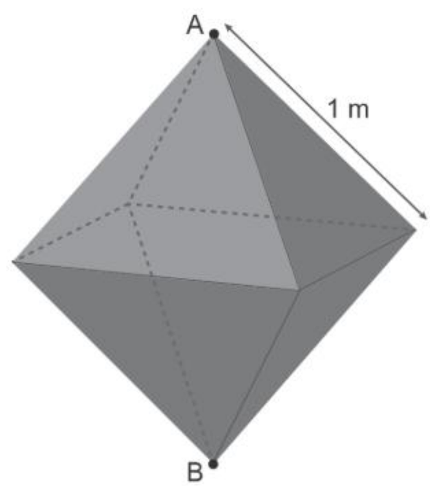
**a)** a medida MN da aresta.

**b)** a área da superfície total.

**c)** a medida PN da diagonal.

**d)** o volume.

**60.** **FMP-RJ 2016** A Figura mostra uma peça metálica que tem a forma de um octaedro regular, cujas arestas medem 1 metro.




A medida da distância entre os vértices A e B, em metros, é

**a)** 1

**b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** 2

**d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**e)** $\sqrt{2}$

## Texto complementar

# Topologia dos poliedros

**O que é a Característica de Euler?**

Todos sabemos que o número de vértices mais o número de faces dos poliedros usuais é igual ao número de arestas mais dois. Porém, será que esta relação se verifica para todo o poliedro? Tem algum tipo de aplicação ou trata-se de uma propriedade anedótica? Com a introdução de um invariante numérico básico em topologia, a característica de Euler, é possível encontrar respostas para todas estas indagações.

Em 1750, numa carta dirigida a Christian Goldbach, Leonhard Euler escreve:

"Em todo o sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de vértices excede em dois o número de arestas".

Com esta afirmação, Euler identifica três tipos de "peças" diferentes na superfície de tal sólido, de dimensões 0, 1 e 2 (vértices, arestas e faces) e estabelece a relação:

$$b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

onde $b_k$ designa o número de "peças $k$-dimensionais", $k = 0, 1, 2$. A soma alternada $b_0 - b_1 + b_2$ chama-se característica de Euler do poliedro (da superfície do poliedro, para sermos mais exatos) e a propriedade anterior enuncia-se como "a superfície de um poliedro convexo tem característica de Euler igual a 2". Não é difícil pensar numa extensão da definição anterior: se um objeto está construído a partir de "peças" de dimensões 0, 1, ..., $n$, chamamos característica de Euler desse objeto à soma alternada do número de "peças" em cada dimensão.

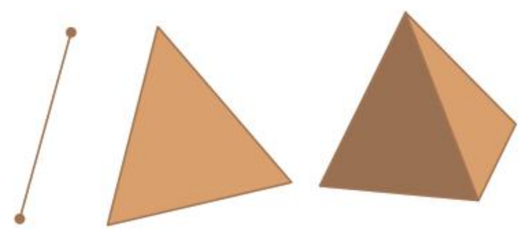


Figura 1

- Uma peça 1-dimensional com vértices $A_0$ e $A_1$ é um segmento de reta.
- Uma peça 2-dimensional com vértices $A_0$, $A_1$ e $A_2$ é um triângulo plano.
- Uma peça 3-dimensional com vértices $A_0$, $A_1$, $A_2$ e $A_3$ é um tetraedro sólido.

Um poliedro $n$-dimensional ou complexo simplicial $n$-dimensional é a reunião de um número finito de peças de dimensão menor ou igual a $n$ de tal modo que duas peças diferentes têm interseção vazia ou intersectam-se ao longo de outra peça de dimensão inferior. A característica de Euler de um poliedro $n$-dimensional K, representada normalmente pela letra $\chi$, é a soma alternada:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b2 - ... + (-1)^n \times b_k$$

onde $b_k$ designa o número de "peças $k$-dimensionais", $k = 0, 1, 2, ..., n$.

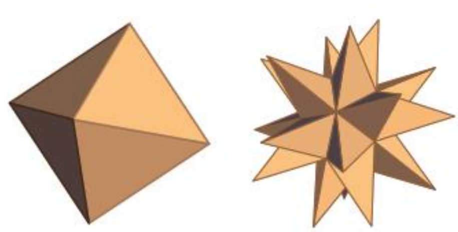


Figura 2

As superfícies do octaedro e do grande dodecaedro estrelado apresentados na figura 2 são bidimensionais com característica de Euler igual a 2, pois o valor de $k$ varia de 0 até 2.

No caso da superfície do octaedro:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 = 8 - 12 + 6 = 2.$$

No caso da superfície do poliedro estrelado:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 = 32 - 66 + 36 = 2.$$

Mas se consideramos, por exemplo, o octaedro sólido tridimensional com característica de Euler igual a 1, pois o valor de $k$ agora deve variar de 0 até 3 e $b_3 = 1$ representa o próprio sólido:

No caso do octaedro sólido:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 8 - 12 + 6 - 1 = 1.$$

A definição de poliedro bidimensional parece mais restritiva que a definição usual de poliedro, pois só consideramos como "peças bidimensionais" os triângulos e não quaisquer polígonos. Na realidade, como todo o polígono pode decompor-se em triângulos, essa restrição não faz qualquer diferença.

FRENTE 3

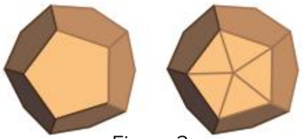


Figura 3

Além do mais, se partimos de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces poligonais e fizermos subdivisões baricêntricas nas faces, como mostra a figura 3, a característica de Euler (V – A + F) da superfície do poliedro resultante (que agora tem faces triangulares) continuará com o mesmo valor. [...]

Ao dividir baricentricamente cada polígono com $n$-lados em $n$ triângulos estamos criando mais 1 vértice, $n$ arestas e $(n - 1)$ faces a serem computados na soma alternada. Como $1 - n + (n - 1) = 0$, o resultado V – A + F permanece o mesmo.

As superfícies dos poliedros convexos como prismas e pirâmides têm característica de Euler igual a 2, mas há exemplos de superfícies poliédricas mais exóticas como a do cubo truncado perfurado (Figura 4).

Figura 4

O cubo truncado perfurado tem 32 faces (12 quadrados, 4 octógonos e 16 triângulos), 64 arestas e 32 vértices pelo que a sua característica de Euler é 0. [...]

A propriedade fundamental da característica de Euler (que explica, por exemplo, porque todas as superfícies poliédricas convexas têm a mesma característica) é que se trata de uma invariante topológica. Isto é, se K e K' são poliedros $n$-dimensionais tais que existe uma bijeção contínua entre eles com inversa também contínua, então $\chi(K) = \chi(K')$. O matemático francês Henri Poincaré provou este resultado nada trivial usando argumentos difíceis de explicar sucintamente.

Não é fácil dar uma ideia intuitiva exata do que significa uma bijeção contínua, mas costuma dizer-se que dois objetos estabelecem esse tipo de bijeção quando se pode deformar continuamente um deles até que se transforme no outro. Por exemplo, se imaginarmos as superfícies dos poliedros feitos de um material elástico, de modo que possam ser infladas, algumas dessas superfícies, com as dos poliedros regulares, prismas, e pirâmides, por exemplo, poderiam ser transformadas em superfícies esféricas; outra, como a do cubo truncado perfurado, poderiam ser transformadas na superfície de uma boia de praia, entre outras possibilidades.

O teorema de Poincaré diz que todos os poliedros que podem se deformar continuamente, até resultarem em um mesmo objeto, têm a mesma característica de Euler. [...]

Embora a demonstração geral seja difícil de resumir, é fácil apresentar um argumento bastante convincente de que todo o poliedro que pode ser deformado continuamente até assumir o formato de uma esfera tem uma superfície com característica de Euler igual a 2. Recordemos que podemos supor o poliedro formado por triângulos e imaginemos o poliedro construído em material elástico. Se o poliedro se deformar continuamente numa esfera, as suas arestas deformam-se em arcos que definem um mapa da esfera com regiões triangulares (Figura 5).

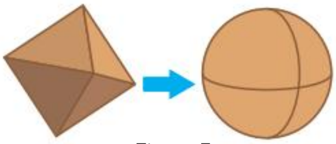


Figura 5

Estes tipos de mapas na esfera podem ser desenhados a partir de um "triângulo inicial na esfera", realizando sucessivamente alguma das operações seguintes:

(a) adicionar um novo vértice e uma nova aresta;

(b) unir dois vértices que já existem criando uma nova face.

O triângulo inicial determina na esfera um mapa com duas regiões triangulares (uma interior ao triângulo e outra exterior), 3 arestas e 3 vértices. Isto é, o mapa inicial tem característica de Euler igual a 2, de modo que as operações (a) e (b) não alteram a característica de Euler do mapa e, portanto, o mapa final também terá característica de Euler igual a 2.

A característica de Euler tem inúmeras aplicações. Umas compatíveis com o estudo da matemática no ensino médio e outras vistas apenas no ensino superior. Aqui temos uma lista com algumas delas.

1. A característica de Euler permite demonstrar que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares;
2. Coloração de mapas: o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa numa superfície depende da característica de Euler dessa superfície;
3. A característica de Euler pode ser utilizada para verificar se um grafo é ou não é plano;
4. A característica de Euler restringe a curvatura de uma superfície através do teorema de Gauss-Bonnet.

FERNÁNDEZ-SUÁREZ, Lucía. O que é a Característica de Euler?. *Gazeta de Matemática*, 20 ago. 2009. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=251. Acesso em: 26 jan. 2022. (Adapt.).

## Resumindo

| Prismas | |
|---|---|
| **Volume = Área da base × altura** | |
| Prismas oblíquos | Prismas retos |
| Altura = aresta lateral × seno da inclinação | Altura = aresta lateral<br>Área lateral = Perímetro da base × altura<br>Área total = 2 × Área da base + Área lateral |

| Pirâmides |
|---|
| Volume = $\frac{1}{3}$ × Área da base × altura |
| **Pirâmides regulares** |
| $(\text{altura})^2 + (\text{apótema da base})^2 = (\text{apótema da pirâmide})^2$<br>Área lateral = Semiperímetro da base × apótema da pirâmide<br>Área da base = Semiperímetro da base × apótema da base<br>Área total = Área da base + Área lateral |

| Poliedros | | |
|---|---|---|
| Número de vértices<br>$V = V_3 + V_4 + V_5 + ...$ | Número de faces<br>$F = F_3 + F_4 + F_5 + ...$ | Número de arestas<br>$2 \cdot A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + ...$<br>$2 \cdot A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + ...$ |

| Poliedros convexos | |
|---|---|
| Relação de Euler:<br>$V - A + F = 2$ | Soma dos ângulos das faces:<br>$S_F = (V - 2) \cdot 360°$ |

**Poliedros regulares**

| Nome | Faces | Arestas | Vértices |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | 4 triangulares | 6 | 4 triédricos |
| Hexaedro | 6 quadrangulares | 12 | 8 triédricos |
| Octaedro | 8 triangulares | 12 | 6 tetraédricos |
| Dodecaedro | 12 pentagonais | 30 | 20 triédricos |
| Icosaedro | 20 triangulares | 30 | 12 pentaédricos |

| Tetraedro regular de aresta $\ell$ | Octaedro regular de aresta $\ell$ |
|---|---|
| Apótema da base = $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$<br>Apótema lateral = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$<br>Volume = $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$<br>Altura = $\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$<br>Área total = $\ell^2\sqrt{3}$ | Diagonais = $\ell\sqrt{2}$<br>Área total = $2\ell^2\sqrt{3}$<br>Volume = $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{3}$ |

## Quer saber mais?

***Sites***

WAGNER, Eduardo. V −A + F = 2. Existe poliedro? *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 47. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/47/2.htm. Acesso em: 27 jan. 2022.

Nesse artigo, o professor Eduardo Wagner identifica e demonstra as condições necessárias para que três números naturais V, A e F correspondam à quantidade de vértices, arestas e faces, respectivamente, de um poliedro convexo.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza C.; COSTA, Marianna Perrone M. A fórmula do volume do icosaedro. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 74. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/74/10.html. Acesso em: 27 jan. 2022.

Nesse artigo, é deduzida a fórmula do volume de um icosaedro em função da medida de sua aresta.

## Exercícios complementares

**1. Unesp 2016** Um cubo com aresta de medida igual a *x* centímetros foi seccionado, dando origem ao prisma indicado na figura 1. A figura 2 indica a vista superior desse prisma, sendo que AEB é um triângulo equilátero.

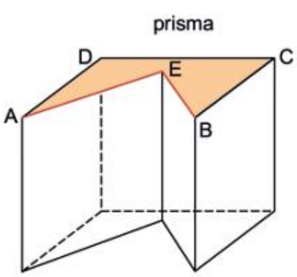



FIGURA 1

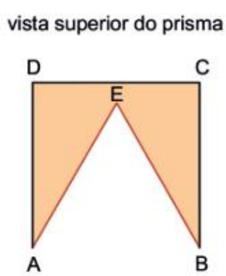
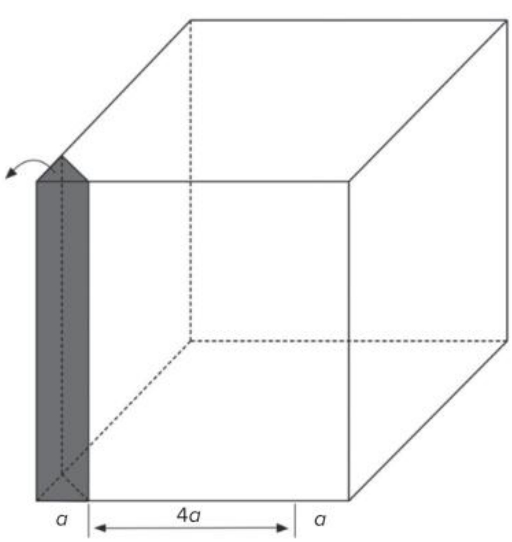



FIGURA 2

Sabendo que o volume do prisma da figura 1 é igual a $2(4 - \sqrt{3})\ \text{cm}^3$, *x* é igual a

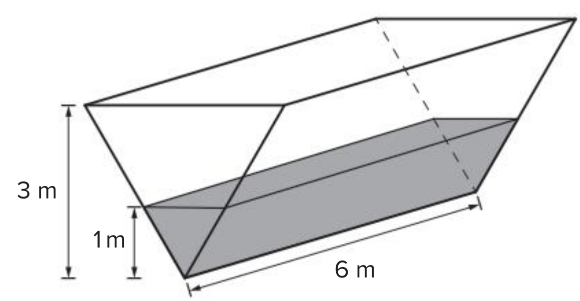
a) 2
b) $\frac{7}{2}$
c) 3
d) $\frac{5}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

**2. FGV-SP 2016** Os quatro cantos de um cubo de aresta 6a são cortados, obtendo-se um novo sólido geométrico sem os quatro prismas retos, como o prisma indicado como exemplo na figura abaixo.




a) Qual é a área do sólido geométrico formado em termos de *a*?
b) Qual é o volume do novo sólido geométrico formado em termos de *a*?

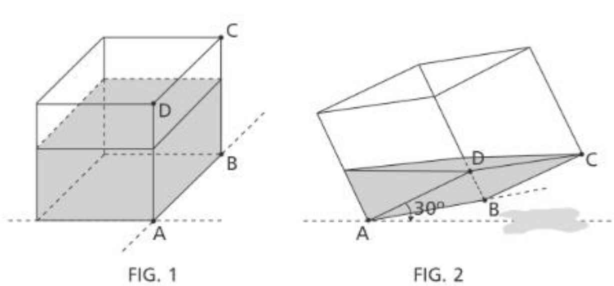
**3. Insper-SP 2016** Um tanque, inicialmente vazio, tem a forma de prisma triangular regular e suas paredes têm espessuras desprezíveis. Após algum tempo despejando água no tanque, um cano de vazão $3\sqrt{3}\ \text{m}^3$ por minuto o encheu parcialmente, tendo a água ocupado o espaço de um prisma triangular regular, conforme indicado na figura.




Funcionando na mesma vazão, o tempo necessário para que o cano acabe de encher o tanque é de 5 minutos e *t* segundos, sendo que *t* é um número no intervalo

a) [1, 12].
b) [13, 24].
c) [25, 36].
d) [37, 48].
e) [49, 59].

**4. Cefet-MG 2015** Uma caixa sem tampa no formato de um cubo, cuja aresta mede 3 metros, está sobre uma superfície plana e com água até uma altura de 2 metros em relação à sua base conforme mostra a FIG. 1.



A caixa será inclinada de tal forma que a aresta $\overline{AB}$ ficará totalmente em contato com a superfície plana e haverá perda no volume de água, conforme a FIG. 2.
Sabendo-se que o ângulo formado, após a inclinação, entre a face ABCD e a superfície plana é de 30° e, desprezando-se a espessura das faces da caixa, a quantidade de água que sobrará na caixa, em $m^3$, é de:

a) 9
b) 18
c) $4\sqrt{3}$
d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{17\sqrt{3}}{4}$

5. **UPF-RS 2018** A medida de cada aresta do cubo da Figura 1 é 2 cm, e os pontos A, B e C são pontos médios de três arestas. Seccionando o cubo por um plano que passe por ABC, podemos retirar o sólido que se forma em seu vértice. Se repetirmos esse procedimento em todos os vértices do cubo, obtemos um cubo truncado, como mostra a Figura 2.

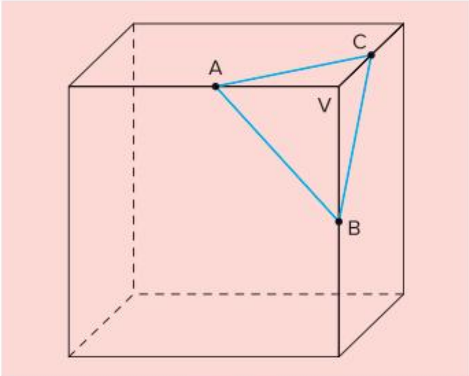


Figura 1

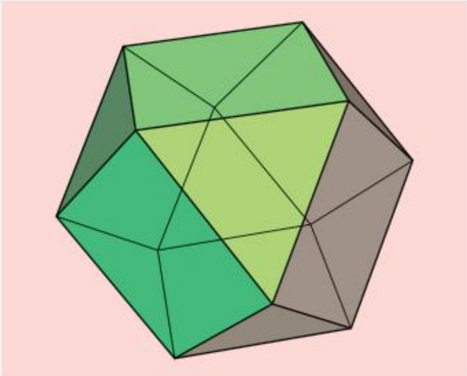
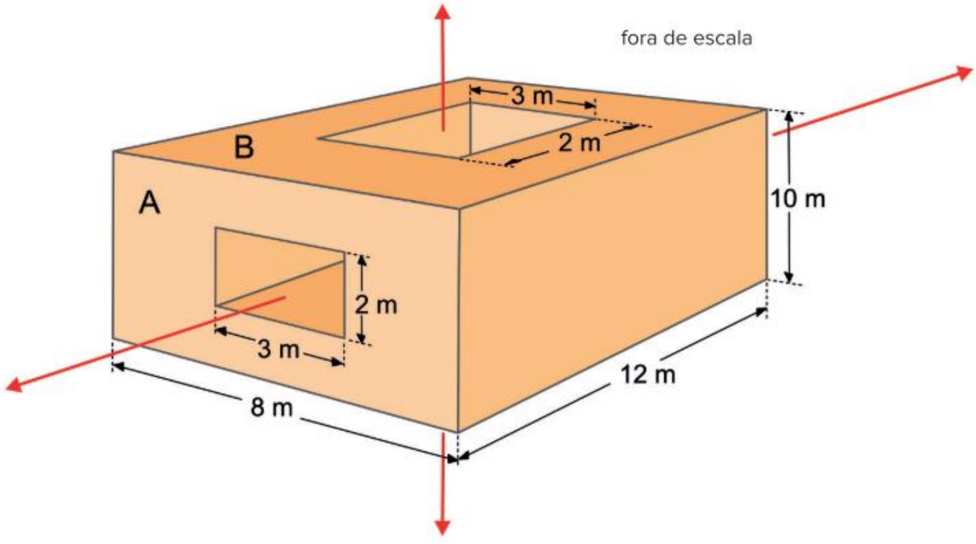


Figura 2

O volume do cubo truncado, em $cm^3$, é

a) $\frac{10}{9}$
b) $\frac{16}{3}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{47}{6}$
e) $\frac{20}{3}$

6. **Unesp 2015** Um bloco maciço com a forma de paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões 8 m, 12 m e 10 m. Em duas de suas faces, indicadas por A e B na figura, foram marcados retângulos, de 2 m por 3 m, centralizados com as faces do bloco e com lados paralelos às arestas do bloco. Esses retângulos foram utilizados como referência para perfurar totalmente o bloco, desde as faces A e B até as respectivas faces opostas a elas no bloco.




Calcule o volume e a área total do novo sólido, que resultou após a perfuração do bloco.

**7. EBMSP-BA 2016**

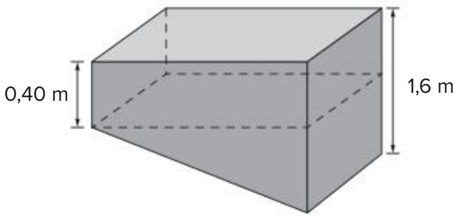



Figura 1

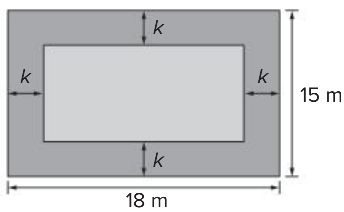
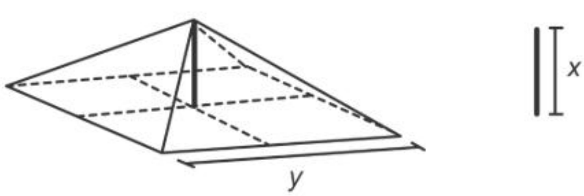



Figura 2

Uma piscina deve ser construída, como representada na Figura 1, em um terreno retangular de dimensões 18,0 m por 15,0 m. Sabendo que a piscina foi projetada tendo cada um dos lados paralelos aos lados do terreno, como indicado na Figura 2, calcule o valor de $k$ – distância do lado do terreno à borda da piscina – para que a capacidade máxima da piscina seja igual a 18,0 m$^3$.

**8. Enem 2016** A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base $y$. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida $x$. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.




A área da superfície da cobertura da tenda, em função de $y$ e $x$, é dada pela expressão

a) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

b) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

e) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

**9. Unisc-RS 2016** Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado $q$. Sabendo que as faces laterais dessa pirâmide são triângulos equiláteros, pode-se afirmar que o seu volume é

a) $q^3\sqrt{2}$

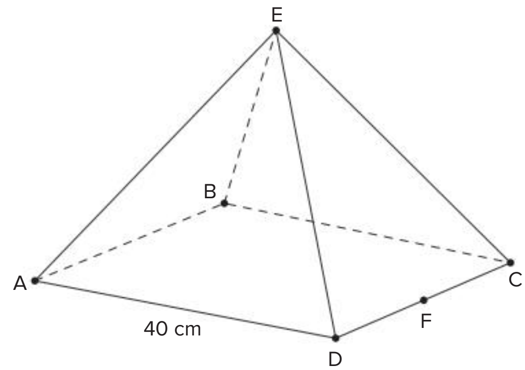
b) $\frac{q^3\sqrt{2}}{6}$

c) $\frac{q\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{q^3\sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{q^3\sqrt{3}}{3}$

**10. UFU-MG 2017** Um *designer* de jogos virtuais está simulando alguns deslocamentos associados com uma pirâmide quadrangular regular, em que o lado do quadrado da base mede 40 cm.




(Figura ilustrativa e sem escalas)

Ele simula a trajetória de um lagarto pelas faces da pirâmide. Inicialmente o lagarto desloca-se de A até E e, posteriormente, de E até F, em que F é o ponto médio de $\overline{CD}$. Cada um desses dois trechos da trajetória ocorre em linha reta.

A projeção perpendicular dessa trajetória em ABCD, presente no plano da base da pirâmide, descreve uma curva R, a qual é a união de dois segmentos.

Nessas condições, o comprimento de R, em cm, é igual a

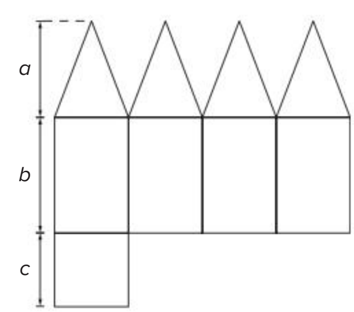
a) $20\sqrt{2}$

b) $40\sqrt{2}$

c) $40(1 + \sqrt{2})$

d) $20(1 + \sqrt{2})$

**11. Unicamp-SP 2020** A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos $a$, $b$ e $c$.

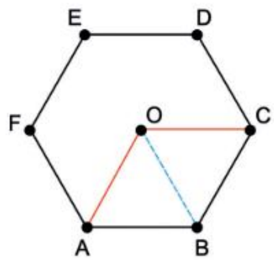



a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

**12. FGV-SP 2016** Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular ABCDEF de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O. O hexágono é recortado, e, em seguida, faz-se um recorte no raio $\overline{OB}$.

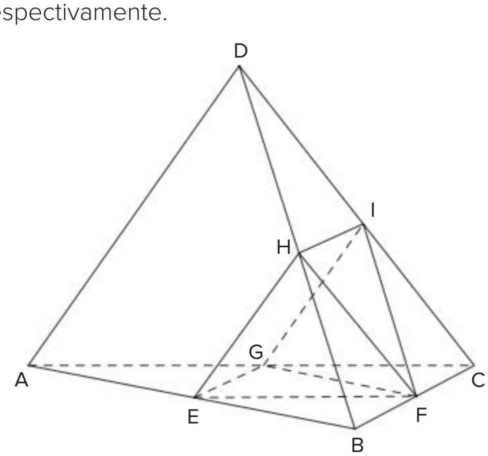
A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O. Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD, e dos triângulos OAF e OBC.




O volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em $cm^3$, é igual a

**a)** $3\sqrt{2}$
**b)** $3\sqrt{3}$
**c)** $4\sqrt{2}$
**d)** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
**e)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

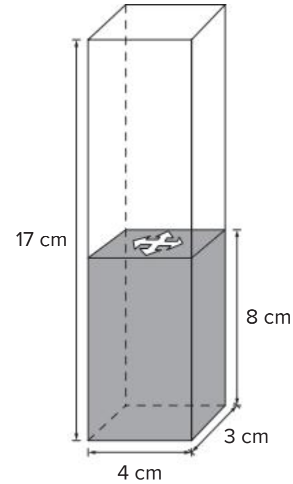
**13. Fuvest-SP 2017** Considere um tetraedro regular ABCD cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.




**a)** Determine a área do triângulo EFH.
**b)** Calcule a área do quadrilátero EGIH.
**c)** Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o quadrilátero EGIH.

**14. Enem 2020** Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.

Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 $cm^3$ cada, que ficarão totalmente submersas.




O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

**a)** 14
**b)** 16
**c)** 18
**d)** 30
**e)** 34

**15. EBMSP-BA 2017** Uma pesquisa realizada durante 75 anos nos Estados Unidos mostrou que não é uma carreira de sucesso, a fama ou os bens adquiridos durante a vida a fórmula da felicidade para uma jornada tranquila. Segundo o estudo, as pessoas que participam de grupos sociais, se relacionam bem com a família, com os amigos e com a comunidade são mais felizes, fisicamente mais saudáveis e vivem mais tempo do que as pessoas que têm menos relações sociais.

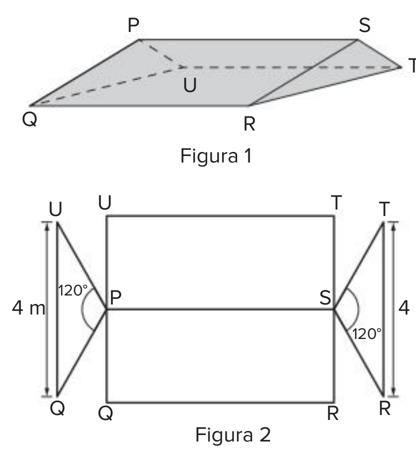



Figura 1



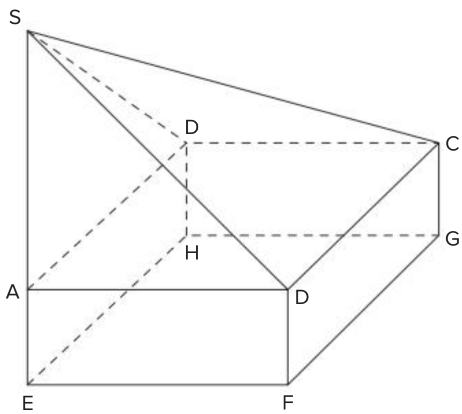
Figura 2

Uma pessoa para realizar um evento ao ar livre, com familiares e amigos, está planejando instalar um toldo cuja cobertura tem a forma do sólido, de volume igual a $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ $m^3$, representado na figura 1.

Com base nessa informação, calcule a área total da planificação dessa cobertura, constituída por dois retângulos congruentes e dois triângulos, representada na figura 2.

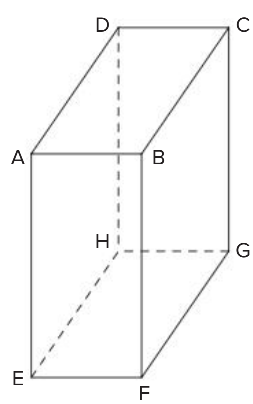
FRENTE 3

**16. Fuvest-SP 2015** O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que AE = 2 cm, AD = 4 cm e AB = 5 cm. A medida do segmento que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é



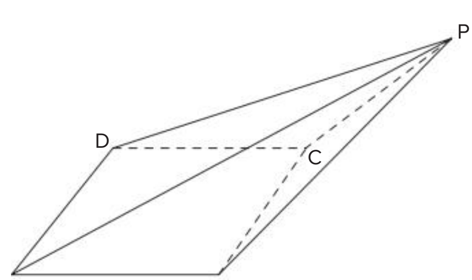

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

**17. Fuvest-SP 2013** No paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH da figura, tem-se AB = 2, AD = 3 e AE = 4.




a) Qual é a área do triângulo ABD?
b) Qual é o volume do tetraedro ABDE?
c) Qual é área do triângulo BDE?
d) Sendo Q o ponto do triângulo BDE mais próximo do ponto A, quanto vale AQ?

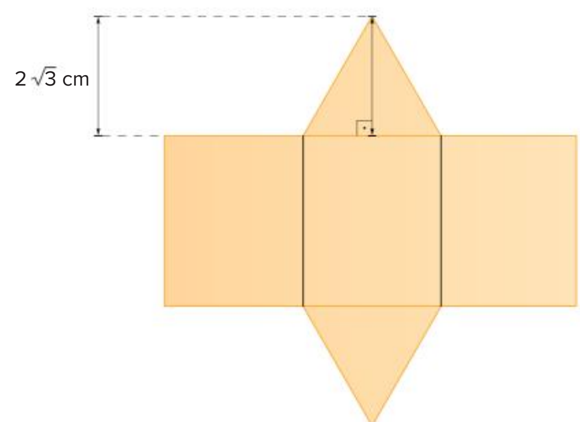
**18. Fuvest-SP 2012**




A base do tetraedro PABCD é o quadrado ABCD de lado $\ell$, contido no plano $\alpha$. Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano $\alpha$ está no semiplano de $\alpha$ determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$. Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano $\alpha$, um ângulo $\theta$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Sendo $PB = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$, determine, em função de $\ell$ e $\theta$,

a) o volume do tetraedro PABCD;
b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;
c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

**19. UFSC 2020** Uma fábrica precisa embalar seus produtos para comercialização. Para tanto, deve construir caixas no formato de prisma regular reto, conforme a planificação apresentada a seguir.



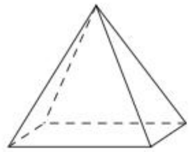

Seja *a* cm a medida da aresta da base do prisma. Se a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ cm, determine o volume desse prisma, em cm$^3$.

**20. UEM-PR 2020** Considere três pirâmides, de mesmo volume, cujas bases são polígonos regulares. A base de uma delas é um triângulo, a base da segunda é um quadrado e a base da terceira é um hexágono, e todas as bases possuem o mesmo perímetro. Assinale o que for correto.

**01** A altura da pirâmide de base quadrada é a maior das três.
**02** A pirâmide cuja base possui a maior área é a pirâmide de base hexagonal.
**04** Existe um valor referente ao volume das pirâmides (em centímetros cúbicos) para o qual os comprimentos das três alturas (em centímetros) são números racionais.
**08** A medida da altura da terceira pirâmide é igual a dois terços da medida da altura da primeira pirâmide.
**16** Sendo ABCD a base da segunda pirâmide e sendo V o vértice dessa pirâmide, se o segmento $\overline{AV}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ então todas as faces triangulares dessa pirâmide são triângulos retângulos.

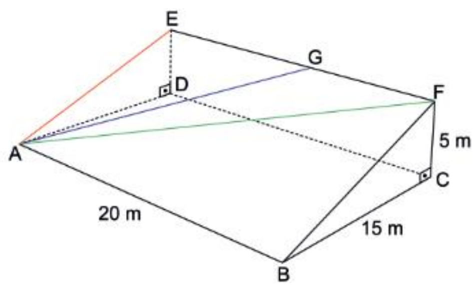
Soma:

**21. UFPR 2020** A pirâmide regular a seguir tem 12 cm de altura e sua base é um quadrado com 10 cm de lado.



a) Calcule o volume da pirâmide.
b) Calcule a área total da pirâmide.

**22. Unesp 2018** Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que AB = 20 m, BC = 15 m e CF = 5 m. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos $\overline{AE}$, $\overline{AG}$ e $\overline{AF}$, com G sendo um ponto de $\overline{EF}$, como mostra a figura.




a) Calcule a medida do segmento $\overline{AF}$. Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho $\overline{AG}$ seja igual a $\frac{1}{4}$ e calcule a medida do segmento $\overline{EG}$.

b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

| *a* | 7,1° | 11,3° | 14,0° | 18,4° |
|---|---|---|---|---|
| tg *a* | 0,125 | 0,200 | 0,250 | 0,333 |

Comparando-se o caminho $\overline{AF}$ com o caminho $\overline{AE}$, nota-se que o ângulo de inclinação de $\overline{AF}$ e de $\overline{AE}$, em relação ao plano que contém o retângulo ABCD, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.

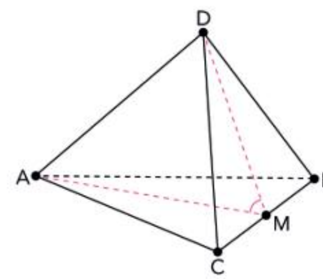
**23. UCPel-RS 2017** A área de um quadrado de lado *x* cm aumenta em 28 cm$^2$ se o seu lado for aumentado em 2 cm. Considerando que a medida da aresta de um tetraedro regular é igual ao lado *x* deste quadrado, então a altura *h* deste tetraedro vale

a) $2\sqrt{6}$ cm
b) $2\sqrt{3}$ cm
c) $2\sqrt{2}$ cm
d) $3\sqrt{2}$ cm
e) $4\sqrt{6}$ cm

**24. Uece 2015** Se, em um tetraedro, três das faces que possuem um vértice comum V, são limitadas por triângulos retângulos e as medidas das arestas da face oposta ao vértice V são, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 12 cm, então, as medidas, em cm, das outras três arestas são

a) $3\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.
b) $\sqrt{6}$, $5\sqrt{3}$, 9.
c) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{6}$, 8.
d) $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$.

**25. Uerj 2017** Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta $\overline{BC}$ é M.



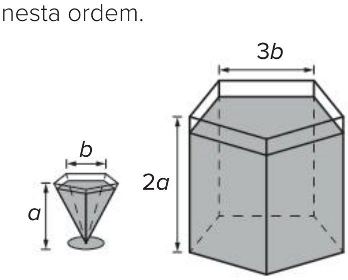

O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{2}{5}$

**26. FGV-RJ 2021** Considere uma pirâmide quadrangular regular, VABCD, com altura medindo 4 cm e com aresta da base ABCD medindo também 4 cm. Sobre a medida do ângulo $A\hat{V}C$ é correto afirmar que

a) é menor do que 30°.
b) está entre 60° e 90°.
c) está entre 30° e 45°.
d) está entre 45° e 60°.
e) é maior do que 90°.

**27.** Uma taça de sorvete e um aquário têm as respectivas formas de uma pirâmide regular e um prisma regular, como ilustrado a seguir. A altura da pirâmide e a do prisma medem, respectivamente, ***a*** e **2*a***, e os lados das bocas pentagonais, da taça e do aquário, medem ***b*** e **3*b***, nesta ordem.




Um garoto quer encher o aquário que fica na sala, transportando a água da pia, que fica na cozinha, usando uma única taça. Se a cada transporte, o garoto levar a taça completamente cheia e, sem derramar uma gota no caminho, despejar toda água no aquário, então o aquário irá transbordar quando o garoto despejar a água pela:

a) 19ª vez.
b) 28ª vez.
c) 35ª vez.
d) 55ª vez.
e) 71ª vez.

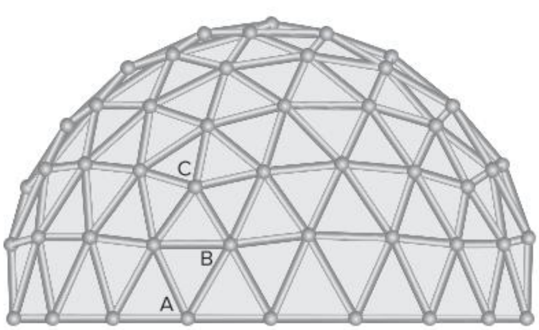
**28.** **UFJF-MG 2020** Um aluno dispõe de quatro folhas retangulares, todas de dimensões 10 cm por 23 cm, para recortar os polígonos que serão utilizados como faces de uma pirâmide quadrangular regular. De uma dessas folhas, ele recortou um quadrado de área máxima e, em seguida, uma das faces triangulares do restante da folha, também com área máxima. As demais faces laterais foram recortadas das outras três folhas disponíveis. Em seguida montou a pirâmide fixando esses polígonos com fita adesiva sem afetar a superfície dos polígonos recortados.

a) Calcule o volume, em centímetros cúbicos, dessa pirâmide.

b) Determine a medida da área, em centímetros quadrados, do papel que sobrou das folhas utilizadas após os recortes.

**29.** As cúpulas geodésicas, ou domos geodésicos, são construções que imitam calotas esféricas. Essas construções, concebidas pelo arquiteto americano Richard Buckminster Fuller, apresentam extraordinária leveza e resistência. Formados por barras de qualquer material, os domos geodésicos podem ser feitos em qualquer tamanho, desde que os comprimentos de suas barras sejam calculados corretamente.

A figura a seguir representa uma construção geodésica que apresenta 20 pontos como A, em que estão presas quatro barras; 69 pontos como B, em que estão presas seis barras; e mais 6 pontos como C, em que estão presas cinco barras.



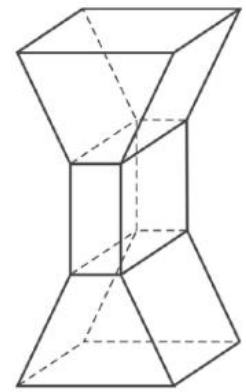

O número total de barras necessárias para se construir um domo como esse é de:

a) 262
b) 323
c) 464
d) 524
e) 646

**30.** **AFA-SP 2019** Um objeto de decoração foi elaborado a partir de sólidos utilizados na rotina de estudos de um estudante de matemática.

Inicialmente, partiu-se de um cubo sólido de volume igual a 19 683 cm$^3$.

Do interior desse cubo, retirou-se, sem perda de material, um sólido formado por dois troncos de pirâmide idênticos e um prisma reto, como mostra o esquema da figura a seguir.



Sabe-se que:

- as bases maiores dos troncos estão contidas em faces opostas do cubo;
- as bases dos troncos são quadradas;
- a diagonal da base maior de cada tronco está contida na diagonal da face do cubo que a contém e mede a sua terça parte;
- a diagonal da base menor de cada tronco mede a terça parte da diagonal da base maior do tronco; e
- os troncos e o prisma têm alturas iguais.

Assim, o volume do objeto de decoração obtido da diferença entre o volume do cubo e o volume do sólido esquematizado na figura acima, em $cm^3$, é um número do intervalo

a) [17 200, 17 800]
b) ]17 800, 18 400]
c) ]18 400, 19 000]
d) ]19 000, 19 600]

**31.** **AFA-SP 2017** Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi$ cm$^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm$^3$, é igual a

a) $\frac{45}{7}$

b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$

d) $\frac{135}{7}$

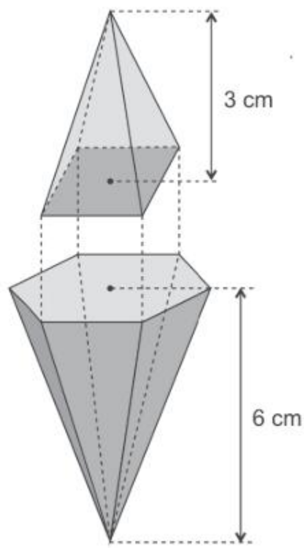
**32.** **AFA-SP 2014** Considere uma pirâmide regular ABCDV de base ABCD. Sendo $2\sqrt{2}$ cm a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}$ cm a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral $\overline{VC}$ é

a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 4
d) $\sqrt{3}$

**33. AFA-SP 2013** Uma pirâmide regular ABCV, de base triangular ABC, é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede 3 cm.
Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

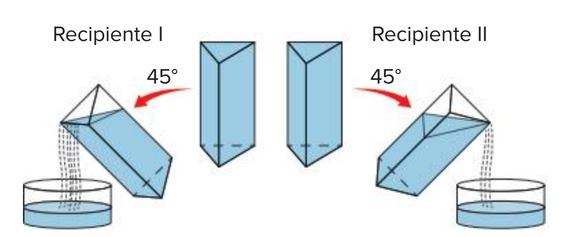
a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
d) $2\sqrt{2}$

**34. AFA-SP 2012** Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}$ cm, então, o volume do sólido obtido, em cm$^3$, é igual a




a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

**35.** Dois recipientes, I e II, congruentes em forma de prisma, cujas bases são triângulos equiláteros e as faces laterais são retangulares, estão completamente cheios de água quando são inclinados a 45°, despejando parte de seus conteúdos nos recipientes cilíndricos III e IV, inicialmente vazios:




Se, durante esse processo, um dos recipientes inclinados despeja água por uma de suas arestas, e o outro por um de seus vértices, como mostram as figuras, então, ao final do processo, os respectivos volumes de água ($V_3$ e $V_4$) nos recipientes III e IV serão tais que:

a) $V_3 = 3V_4$
b) $3V_3 = V_4$
c) $V_3 = V_4$
d) $V_3 = 2V_4$
e) $2V_3 = V_4$

**36. ITA-SP 2018** Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm$^3$:

a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 20.
e) 30.

**37. ITA-SP 2014** Uma pirâmide de altura $h = 1$ cm e volume $V = 50$ cm$^3$, tem como base um polígono convexo de $n$ lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n - 3$ diagonais que o decompõem em $n - 2$ triângulos cujas áreas $S_i$, $i = 1, 2, ..., n - 2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}$ cm$^2$ e $S_6 = 3$ cm$^2$. Então $n$ é igual a

a) 22.
b) 24.
c) 26.
d) 28.
e) 32.

**38. ITA-SP 2013** Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm$^3$, do sólido VABC é

a) 2.
b) 4.
c) $\sqrt{17}$.
d) 6.
e) $5\sqrt{10}$.

**39. ITA-SP 2013** Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a 10 cm$^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.
b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

FRENTE 3

**40. ITA-SP 2012** As interseções das retas $r: x - 3y + 3 = 0$, $s: x + 2y - 7 = 0$ e $t: x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

**41. ITA-SP** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Então, o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{13}{3}$.

c) $\frac{15}{4}$.

d) $2\sqrt{3}$.

e) $\frac{10}{3}$.

**42. ITA-SP 2020** Considere as seguintes afirmações:

**I.** Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

**II.** Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

**III.** Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

**43. Esc. Naval-RJ 2021** Suponha que a base de um paralelepípedo reto seja um paralelogramo de lados $a$ e $b$. Suponha, ainda, que o ângulo obtuso desse paralelogramo seja $\beta$. Sabendo que a menor diagonal do paralelepípedo é igual à maior diagonal do paralelogramo, assinale a opção que apresenta o volume do paralelepípedo em função de $a$, $b$ e $\beta$.

a) $2ab(\text{sen}(\beta))\sqrt{-ab \cdot \cos(\beta)}$

b) $2ab(\text{sen}(\beta))\sqrt{ab \cdot \text{sen}(\beta)}$

c) $2ab(\cos(\beta))\sqrt{-ab \cdot \text{sen}(\beta)}$

d) $2ab(-\cos(\beta))\sqrt{-ab \cdot \cos(\beta)}$

e) $2ab(-\text{sen}(\beta))\sqrt{ab \cdot \cos(\beta)}$

**44. ITA-SP 2018** Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão –5. Determine o número de vértices do poliedro.

**45. IME-RJ 2018** Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 $cm^2$. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm

b) $\sqrt{19}$ cm

c) $\sqrt{21}$ cm

d) $2\sqrt{7}$ cm

e) $\sqrt{29}$ cm

**46. IME-RJ 2018** Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

**47. IME-RJ 2016** Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância $d$, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de $a$, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

d) $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

e) $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

**48. IME-RJ 2015** Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado $a$, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta $\overline{BC}$. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

e) $\frac{5}{2}a^3$

**49. IME-RJ 2015** Seja um tetraedro regular ABCD de aresta $a$ e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$
b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$
c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$
e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

**50. IME-RJ 2014** Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta $\overline{SD}$ é a altura da pirâmide. Sabe-se que $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ e $SA = SB = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt{11}$
d) $\sqrt{13}$
e) $\sqrt{17}$

**51. IME-RJ 2014** Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal $\overline{AC}$, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $|(NA)^2 - (NC)^2| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

**52. IME-RJ 2013** Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura $h$. Uma esfera de raio R está inscrita nesta pirâmide. O volume desta pirâmide é

a) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$
b) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$
c) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$
d) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$
e) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-R}$

**53. IME-RJ 2012** Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta $a$. As faces laterais fazem um ângulo de 15° com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de $a$.

a) $\frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}}$
b) $\frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}}$
c) $a^3\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}}$
d) $a^3\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}}$
e) $a^3\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}}$

**54. IME-RJ 2012** Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

**55. IME-RJ** A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base. O volume da pirâmide é:

a) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$
b) $\frac{S\sqrt{S}}{6}$
c) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$
d) $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$
e) $\frac{2S^2}{3}$

**56. IME-RJ** A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado $\overline{AB}$ igual ao lado $\overline{AC}$. O valor do segmento $\overline{CD}$ vale $x$, onde D é o ponto médio da aresta lateral $\overline{AA_1}$. Sabendo que $\alpha$ é o ângulo $A\hat{C}B$ e $\beta$ é o ângulo $D\hat{C}A$, determine a área lateral do prisma em função de $x$, $\alpha$ e $\beta$.

**57. IME-RJ** Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\frac{m}{n}$, onde $m$ e $n$ são inteiros positivos primos entre si, o valor de $m + n$ é

a) 20
b) 24
c) 28
d) 30
e) 32

**58. IME-RJ** A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas $\overline{AQ}$ e $\overline{DP}$. Calcule o ângulo entre estas medianas.

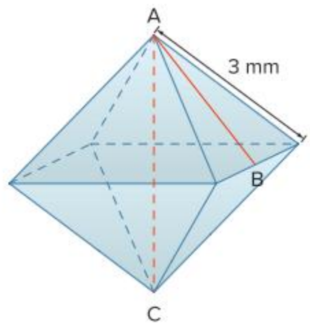
**59. IME-RJ** Seja um cubo de base ABCD com aresta $a$. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de $a$, sabendo-se que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a $ka^2$, sendo $k$ um número primo.
Obs.: as arestas laterais da pirâmide são $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ e $\overline{VD}$.

**60. IME-RJ 2021** Um paralelepípedo oblíquo ABCD – EFGH possui todas as arestas com comprimento $a$. O plano que contém ABFE forma um ângulo de 60° com o plano que contém ABCD. O ângulo do vértice E da face ABFE é 120°. Se $\theta$ for o ângulo do vértice E do paralelogramo contido na base superior EFGH do paralelepípedo, determine o volume do paralelepípedo em função da aresta $a$ e do ângulo $\theta$.

## BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.

Um joalheiro recebeu uma encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa, cujo formato é de um octaedro regular de aresta 3 mm, conforme a figura a seguir.




EM13MAT308

1. Para finalizar a lapidação dessa pedra, o joalheiro precisa saber qual é a razão entre a altura $\overline{AB}$ da face do octaedro e a diagonal $\overline{AC}$ dela. Qual é essa razão?

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

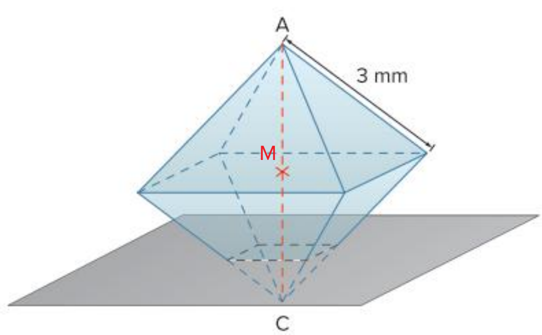
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{4}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

EM13MAT309

2. A pedra será inserida em um anel de tal forma que $\frac{1}{3}$ do segmento $\overline{CM}$ ficará dentro do anel, como mostra a figura a seguir.




Nessas condições, após a inserção da pedra no anel, qual é a área da pedra que ficará exposta, em $mm^2$?

a) $17\sqrt{3}$

b) $16\sqrt{3}$

c) $15\sqrt{3}$

d) $14\sqrt{3}$

EM13MAT308

3. O joalheiro encomendou um lote com 36 diamantes idênticos a essa pedra, cada uma com formato de um octaedro regular de aresta 3 mm. No entanto, ele acredita que pode ter sido enganado pelo fornecedor, e que o material dessas pedras não seja de fato diamante.

Ao medir a massa desse conjunto de pedras, ele obteve o valor de 1,1421 g. Sabendo que a densidade do diamante está entre 3,50 g/cm³ e 3,56 g/cm³ e que todas as pedras do lote são do mesmo material, é possível concluir que as pedras do lote **não** são diamantes? Utilize $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ e uma calculadora.

a) Não, porque a densidade delas está entre 3,50 g/cm³ e 3,56 g/cm³.

b) Sim, porque a densidade delas está entre 3,50 g/cm³ e 3,56 g/cm³.

c) Sim, porque a densidade delas está entre 2,40 g/cm³ e 2,56 g/cm³.

d) Sim, porque a densidade delas está entre 4,40 g/cm³ e 4,56 g/cm³.

Frente 1

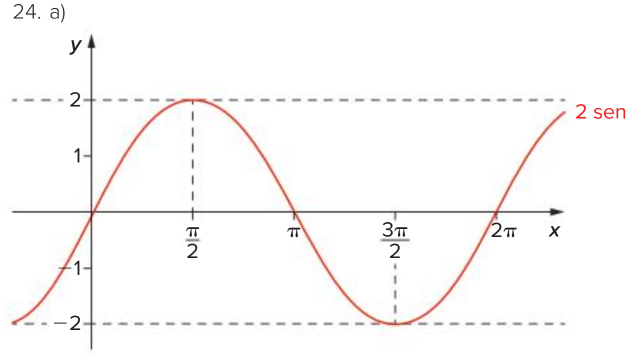
# Capítulo 10 – Transformações trigonométricas e funções trigonométricas

## Revisando

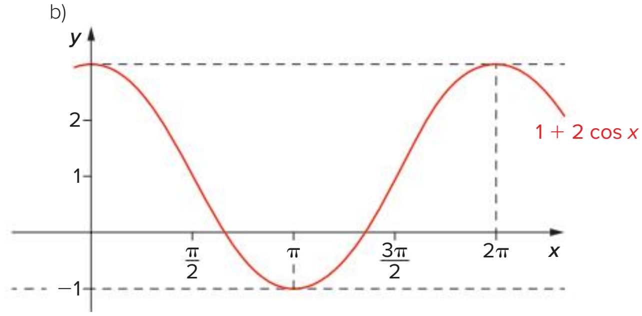
1. a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
   b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$
   c) $-2-\sqrt{3}$
   d) $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$
   e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
2. $\frac{63}{65}$
3. $-\frac{7}{9}$
4. a) $\sqrt{3}\cos(95°)$
   b) $2\text{sen}\left(\frac{81\pi}{70}\right)\cdot\cos\left(\frac{31\pi}{70}\right)$
5. $\text{Im}(f) = [3, 7]$
6. $P = \pi$ e $y_{\text{máx}} = \frac{3}{2}$
7. $A = 2$; $h_{\text{máx.}} = 7$ e $t = 3$.
8. a) $-\frac{\pi}{3}$
   b) $\frac{\pi}{4}$
   c) $\frac{\pi}{6}$
9. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \pm\frac{11\pi}{27} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
10. 6 soluções.
11. 8 soluções.
12. a) $S = \left[0, \frac{\pi}{14}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{7}, \pi\right]$
    b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 + 6k < x < 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$

## Exercícios propostos

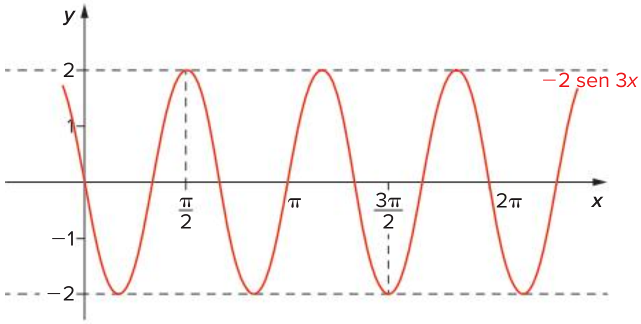
1. C
2. C
3. A
4. B
5. E
6. C
7. B
8. E
9. $-\frac{7}{9}$
10. $-\frac{24}{25}$
11. $-\frac{3}{4}$
12. $\frac{1}{4}$
13. A
14. B
15. E
16. B
17. C
18. E
19. a) cos 10° b) cos 20° c) −sen 20°
20. A
21. a) $\text{Im} = [-2, 2]$
    b) $\text{Im} = [0, 2]$
    c) $\text{Im} = [-6, 2]$
    d) $\text{Im} = [0, 1]$
    e) $\text{Im} = [-1, 1]$
    f) $\text{Im} = [1, 3]$
22. a) $2\pi$ d) $\frac{2\pi}{3}$
    b) $2\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$
    c) $\pi$ f) $\pi$
23. a) $P = \pi$ e $\text{Im} = [-1, 1]$
    b) $P = \pi$ e $\text{Im} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
    c) $P = \frac{\pi}{3}$ e $\text{Im} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
    d) $P = \pi$ e $\text{Im} = [-1, 1]$
24. a)



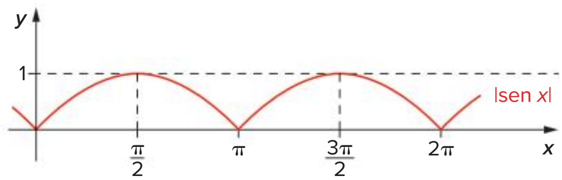

b)



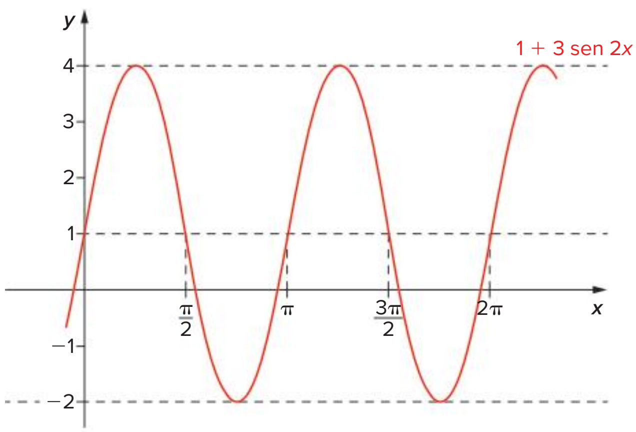
c)



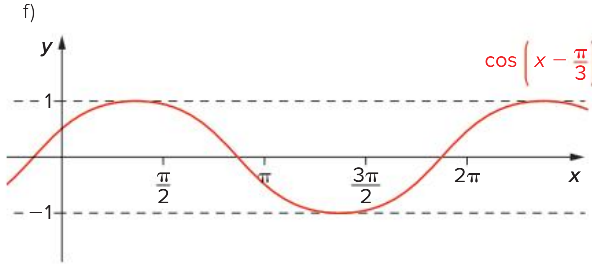

d)




e)




f)




25. E
26. C
27. E
28. A
29. A
30. D
31. A
32. D
33. B
34. B
35. D
36. A
37. D
38. E
39. a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

    b) $\frac{33}{65}$

    c) $-\frac{24}{25}$
40. D
41. a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

    b) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

    c) $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

    d) $S = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$
42. D
43. C
44. D
45. A
46. D
47. E
48. A
49. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

    b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

    c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$

    d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leqslant x < 2\pi\right\}$
50. Soma: 04 + 16 = 20
51. A
52. D
53. E
54. D

## Exercícios complementares

1. C
2. A
3. B
4. B
5. A
6. D
7. C
8. B
9. a) $\frac{2}{3}$

   b) $\frac{7}{9}$
10. a) $\text{sen}\left(P_2\hat{O}Q\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\left(P_2\hat{O}Q\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

    b) 90°

    c) $\frac{3}{5}$
11. a) $\frac{1}{2}$

    b) $\frac{7}{17}$

12. C

13. a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

14. B

15. D

16. A

17. C

18. D

19. C

20. C

21. B

22. B

23. C

24. A

25. A

26. D

27. B

28. C

29. E

30. A

31. a) $E = 10^8$ J

b) $D = \mathbb{R}$; Im $= [4, 8]$, $P = 10$.

$A = 6$, $B = 2$, $m = \frac{\pi}{5}$ e $n = -\frac{\pi}{5}$

32. a) 2,033 m

b) $f(x) = 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{65}x\right)$

$D(f) = [0, 195]$;

$Im(f) = [-2, 2]$;

$P_f = 32{,}5$.

33. PA = 115 625 000 km

34. Soma: 02 + 08 = 10

35. E

36. R$ 50.000,00

37. Soma: 04 + 08 + 16 = 28

38. A

39. E

40. B

41. B

42. a) Demonstração.

b) Demonstração.

43. B

44. $x = \frac{2\pi}{3}$ e $x = \frac{4\pi}{3}$

45. a) $-7$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \pm\frac{4}{3} + 8k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

46. E

47. $\frac{2\pi}{3}$

48. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29

49. C

50. A

51. a) $0, \frac{\pi}{2}$ e $\pi$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}\right\}$

52. $D = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$

53. B

54. D

## BNCC em foco

1. C
2. C
3. B

# Capítulo 11 – Análise combinatória

## Revisando

1. a) $\frac{1}{702}$

b) $\frac{2}{21}$

c) 165

d) $n$

2. 60 números.
3. 504 números.
4. 720 anagramas.
5. C
6. 30 anagramas.
7. 56 subconjuntos.
8. 65 possibilidades.
9. 55 maneiras.
10. 252 maneiras.

## Exercícios propostos

1. D
2. B
3. B
4. A
5. C
6. D
7. C
8. E
9. C
10. E
11. C
12. C
13. a) 360 números.

b) 60 números.

c) 60 números.

14. a) 20 maneiras.

b) 18 maneiras.

c) 11 maneiras.

15. E
16. E

17. E
18. E
19. C
20. D
21. B
22. C
23. 672 modos.
24. a) 720 anagramas.
    b) 120 anagramas.
    c) 120 anagramas.
    d) 720 anagramas.
    e) 3600 anagramas.
25. E
26. D
27. 252 sequências.
28. a) 3360 anagramas.
    b) 480 anagramas.
29. E
30. B
31. E
32. A
33. B
34. Soma: 01 + 02 + 08 = 11
35. B
36. C
37. C
38. E
39. D
40. E
41. C
42. E
43. E
44. C
45. A
46. D
47. a) 5040 maneiras.
    b) 96 maneiras.
    c) 576 maneiras.
48. a) 28
    b) 56
    c) 70
49. E
50. D
51. 12 equipes.
52. C
53. D
54. a) 330 grupos.
    b) 60 grupos.
    c) 150 grupos.
    d) 325 grupos.
55. A
56. C
57. B
58. D
59. E
60. D
61. A
62. B
63. D
64. B
65. a) 126 maneiras.
    b) 1260 maneiras.
    c) 280 maneiras.
66. 2250 modos.
67. 15400 modos.
68. 27 maneiras.
69. A
70. C
71. D
72. E

## Exercícios complementares

1. 8 letras.
2. C
3. B
4. D
5. B
6. C
7. B
8. A
9. Soma: 04 + 08 + 16 = 28
10. a) 28 soluções.
    b) 10 soluções.
11. E
12. D
13. a) 729 maneiras.
    b) 28 maneiras.
14. D
15. B
16. D
17. D
18. E
19. a) 224
    b) $\frac{1}{18}$
20. B
21. C
22. a) 3 maneiras.
    b) 33 maneiras.
    c) 73 maneiras.
23. C
24. A
25. B
26. A
27. A
28. D
29. B
30. E
31. V; F; F; F; V
32. E
33. D

34. A
35. E
36. D
37. A
38. B
39. E
40. C
41. E
42. C
43. C
44. A
45. C
46. Soma: 02 + 04 + 08 + 16 = 30
47. B
48. B
49. E
50. B
51. E
52. E
53. C
54. D
55. E
56. D
57. D
58. B
59. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15
60. D
61. B
62. E
63. D
64. D
65. C
66. E
67. a) 385 tipos; R$ 0,50.
    b) 130 tipos.
68. A
69. a) $n + 1$
    b) $\frac{(n + 2)(n + 1)}{2}$
70. D
71. E
72. B

## BNCC em foco

1. C
2. A
3. D

**Frente 2**

# Capítulo 7 – Noções de Estatística

## Revisando

1. C
2. B
3. A
4. D
5. D
6. a) 10
   b) 72%
   c) Md = 6
7. A
8. a) $\overline{X} = 19$
   b) Md = 19
   c) Mo = 21
   d) $\sigma^2 = 2,8$
   e) $\sigma \cong 1,67$
9. E
10. D

## Exercícios propostos

1. C
2. C
3. a) $\overline{X} = 8,5$ e Md = 8,75
   b) R$ 8,25
4. E
5. C
6. A
7. B
8. C
9. D
10. C
11. B
12. A
13. E
14. B
15. A
16. A
17. C
18. B
19. C
20. A

## Exercícios complementares

1. D
2. a) N = 3
   b) Sim, é correto.
3. a) 12
   b) $y = 14$
4. D
5. B
6. a) Entre 2011 e 2012.
   b) Aproximadamente 8,03%.
   c) Aproximadamente 13.
   d) $P = \frac{5}{17}$
7. Soma: 01 + 02 + 04 + 16 = 23
8. C
9. A
10. a) $\overline{x} = 19,5$ Mo = 16, 17, 18 e 22; Md = 19, a maior taxa entre março e abril.
    b) $\frac{31}{13}$

11. D
12. a) $n = 1 \rightarrow 9$ e $\frac{3}{10}$; $n = 2 \rightarrow 5$ e $\frac{1}{6}$; $n = 3 \rightarrow 4$ e $\frac{2}{15}$; $n = 4 \rightarrow 5$ e $\frac{1}{6}$.
    b) Deverá cair na malha fina.
13. D
14. A
15. E
16. a) R$ 3.098,00
    b) 70 e R$ 869.400,00
17. A
18. 77,5 km/h
19. C
20. D

## BNCC em foco

1. A
2. C
3. D

# Capítulo 8 – Números complexos

## Revisando

1. $S = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$
2. a) $z + w = 6 - 2i$
    b) $z - w = 2 - 4i$
    c) $z \cdot w = 11 - 2i$
    d) $z^2 = 7 - 24i$
    e) $w \cdot \overline{w} = 5$
    f) $\frac{z}{w} = 1 - 2i$
3. B
4. D
5. a) $\alpha = -1$
    b) $\alpha = 1$
6. a) $Re(z) = \frac{1}{2}$ e $Im(z) = 1$
    b) $w = 6 - 2i$ ou $w = -6 + 2i$
7. $z = \sqrt{2}(\cos 45° + i \cdot \text{sen} 45°) = (\sqrt{2}, 45°)$ e
    $w = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i \cdot \text{sen} 135°) = (2\sqrt{2}, 135°)$
8. a) $z \cdot w = -4$
    b) $\frac{z}{w} = -\frac{1}{2}i$
    c) $z^5 + w^3 = 12 + 12i$
    d) $\frac{z^5}{w^3} = -\frac{1}{4}$
9. $n = 3$
10. A

## Exercícios propostos

1. D
2. B
3. E
4. D
5. E
6. B
7. A
8. E
9. D
10. A
11. D
12. A
13. C
14. B
15. D
16. E
17. C
18. A
19. D
20. C
21. A
22. B
23. A
24. E
25. C
26. D
27. B
28. E
29. E
30. D
31. B
32. A
33. A
34. C
35. D
36. E
37. E
38. Soma: 02 + 16 = 18
39. D
40. D
41. D
42. B
43. A
44. Soma: 01 + 02 + 08 + 16 = 27
45. A
46. D
47. E
48. A
49. C
50. B
51. B
52. D
53. D
54. C
55. A

56. A

57. A

58. B

59. D

60. C

61. C

62. B

63. D

64. D

65. B

66. C

67. D

68. $a = \frac{2}{5}$

69. D

70. D

71. B

72. E

73. D

74. E

75. D

76. C

77. A

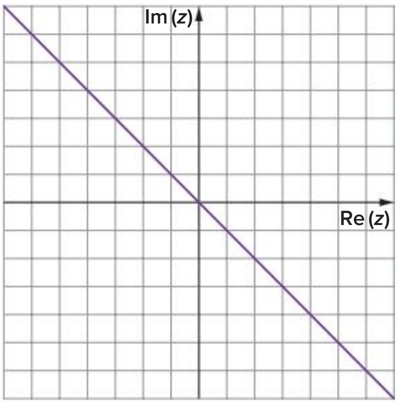
78. D

79. D

80. C

## Exercícios complementares

1. $n = 6$
2. a) $n = 3$
   b) $(z_3)^{100} = (1^{100}, 240°) = z_3$
3. a) $|z| = 1; z = (1, 30°)$
   b) $z^{27} + z^{24} + 1 = 2 + i$
4. Soma: 01 + 04 = 05
5. Soma: 01 + 02 = 03
6. Soma: 01 + 04 + 16 = 21
7. $2a + b = 11$
8. a) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e
   $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
   b) $n = 8$
   c) $P(x) = x^8 + 256$
9. $z_1 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ e $z_2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
10. a) $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = 1$
    b) $a = 2$ e $b = -2$
11. $S = 18\left(2\sqrt{3} - 3\right)$
12. Circunferência.
13. a) $S = 36$
    b) A'(0, 3), B'(–6, 0), C'(0, –3) e D'(6, 0)
    c) $i$
14. a) $x = 0$, $x = 2$ ou $x = -2$
    b) $|z| = a^4$
15. $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}, r = \frac{2\sqrt{5}}{3}, 9(a^2 + b^2 + r^2) = 40$
16. Soma: 02 + 16 = 18
17. E
18. D
19. A
20. C
21. C
22. A
23. C
24. a)




    b) Circunferência.
    c) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
25. A
26. C
27. A
28. A
29. C
30. D
31. C
32. E
33. A
34. $z = \sqrt{3} + i$
35. E
36. $z_0 = 12 + 16i$
37. D
38. D
39. B
40. B
41. C
42. E
43. A
44. a) $|z + i|_{\text{máx.}} = \sqrt{5} + 1$
    b) $z_0 = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}i$
45. B
46. B
47. E
48. B
49. C
50. E

51. $\dfrac{n-1}{2}$

52. D

53. A

54. D

55. E

56. $x \cdot y = 105$

57. A

58. $S = 50(6 - \pi)$ u.a.

59. C

60. $Z = 2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)i$

61. A

62. $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

63. C

64. $a = 1$, $b = 4$ e $c = 52$

65. 1

66. D

67. z é um número real ou está em uma circunferência.

68. D

69. Zero.

70. D

71. $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{p^2}{4q}$

72. B

73. $|z| = \sqrt[6]{18}$

74. $|z - 7 - 9i| = 3\sqrt{2}$

75. $a = 0$; $a = \pm\dfrac{\sqrt[6]{2}}{2}$

76. Circunferência de centro (1, 1) e raio 1.

77. C

78. Demonstração.

79. B

80. $S = 1 + \left(\dfrac{1-i}{2}\right)n$

## BNCC em foco

1. A
2. Não foi concluída.
3. A

**Frente 3**

# Capítulo 10 – Cônicas

## Revisando

1. D
2. B
3. D
4. 9
5. B
6. $\dfrac{y^2}{20} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

7. a) $\dfrac{(x-9)^2}{16} - \dfrac{(y-7)^2}{4} = 1$

   b) $y - 7 = \pm\dfrac{1}{2}(x - 9)$

8. C

9. a) $x = \dfrac{1}{14}y^2 - \dfrac{4}{7}y + \dfrac{23}{14}$

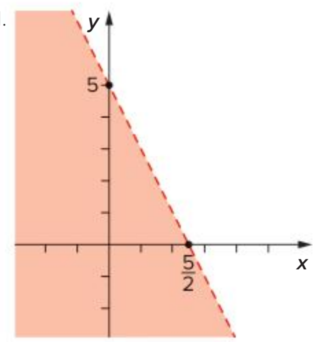
   b) $V\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$

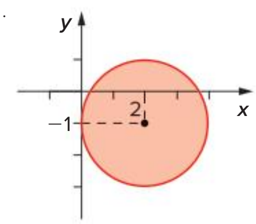
10. a) $V(2, -2)$

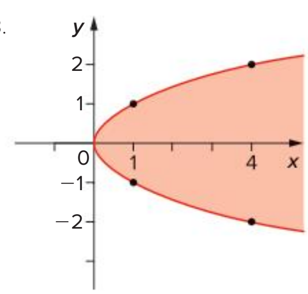
    b) $F\left(2, -\dfrac{15}{8}\right)$

    c) $8y + 17 = 0$

    d) $x - 2 = 0$

11. 


12. 


13. 


## Exercícios propostos

1. C
2. A
3. D
4. $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$
5. B
6. A
7. D
8. C
9. D
10. D
11. C
12. E

13. C

14. $2x^2 - 2y^2 - 9 = 0$

15. E

16. A

17. C

18. $\frac{(y + 2)^2}{3} - \frac{(x - 1)^2}{1} = 1$

19. D

20. a) V(3, 4)

b) F(5, 4)

c) $x - 1 = 0$

d) $y - 4 = 0$

21. A

22. D

23. B

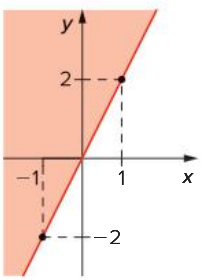
24. C

25. C

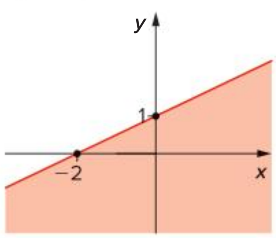
26. B

27. C

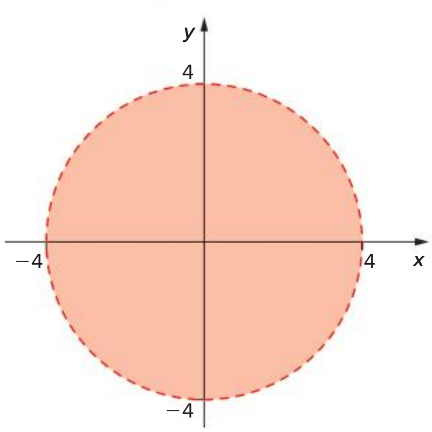
28. a)



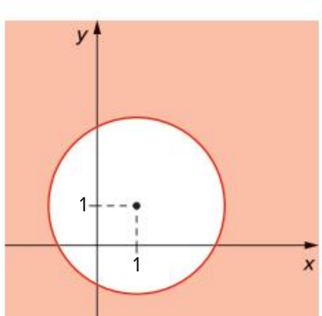

b)




29. a)

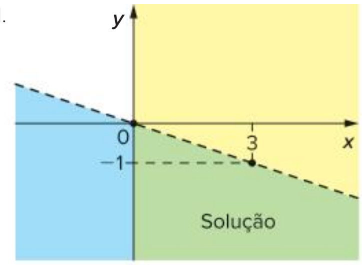



b)

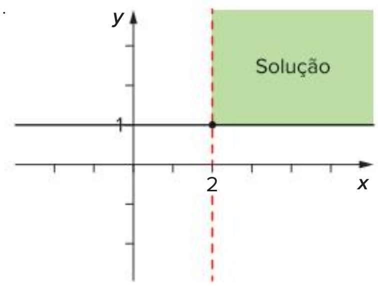



30. Soma: 01 + 16 + 32 = 49

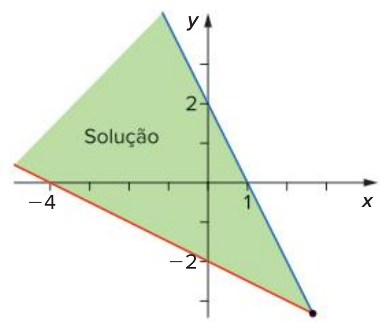
31.



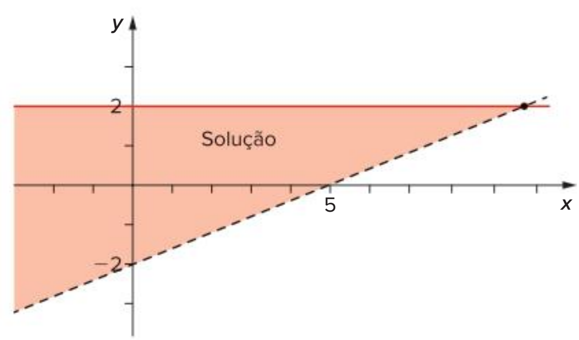

32.



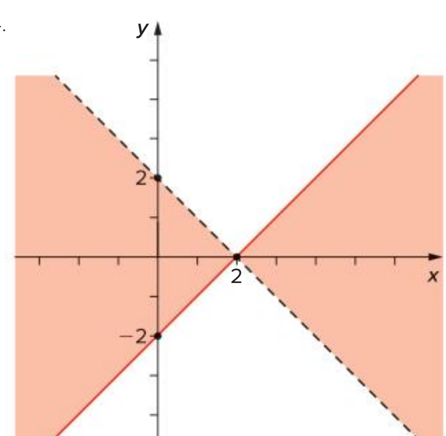

33. a)



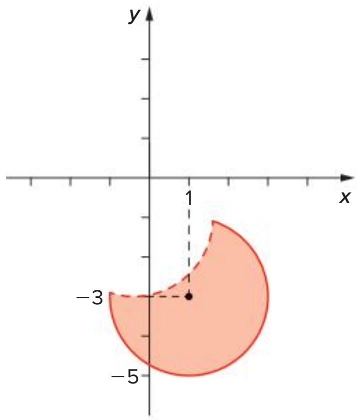

b)



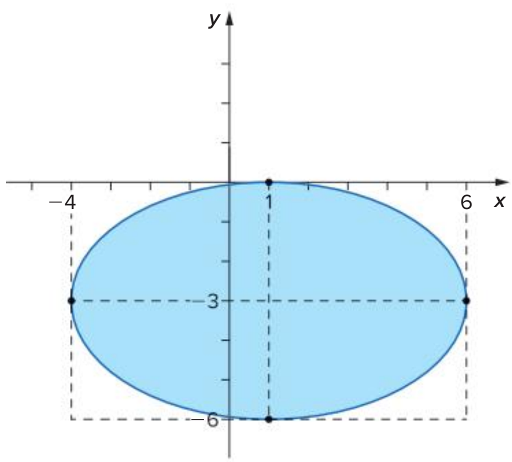

34.



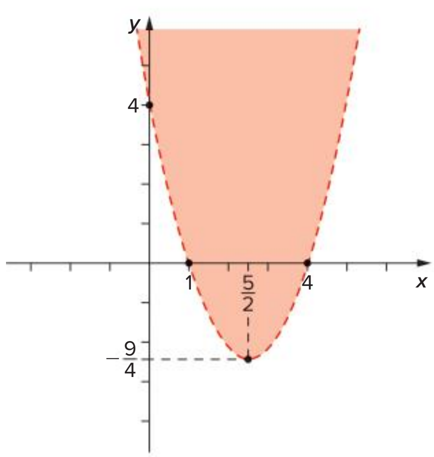
35.



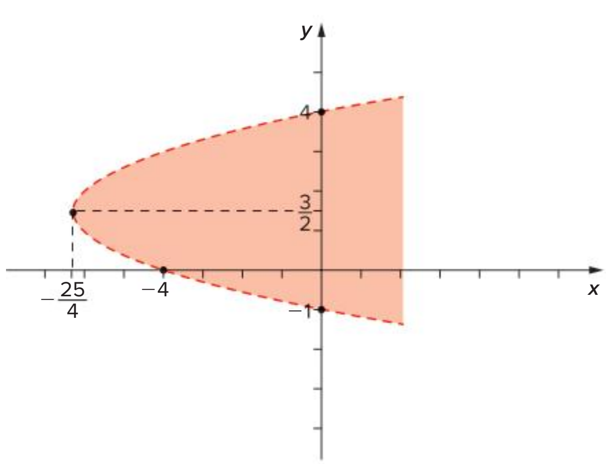

36.



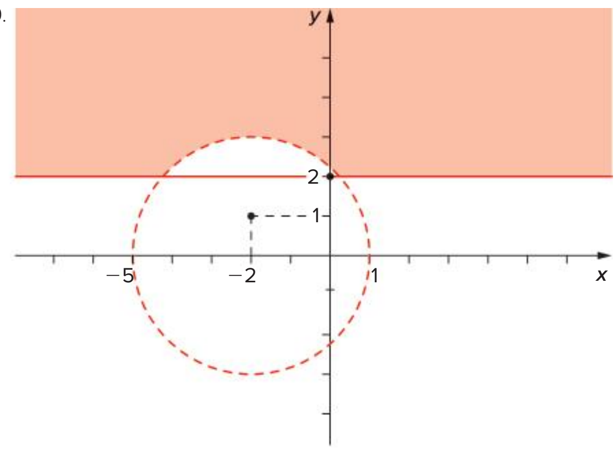

37.



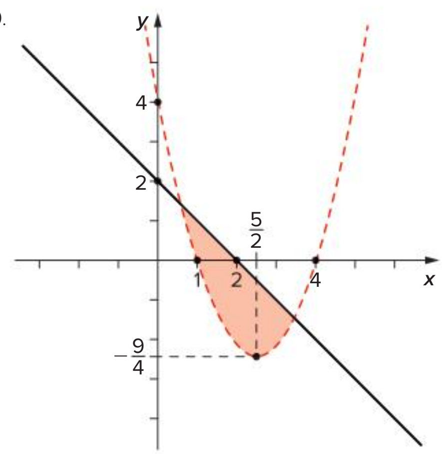

38.




39.




40.




## Exercícios complementares

1. C
2. B
3. A
4. C
5. a) $\alpha^{\frac{3}{2}} = 3\,650$
   b) P = 12,736 dias.
6. E
7. D
8. D
9. C
10. $b = \sqrt{2}$; (1, 1) e $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$
11. $\frac{(x-8)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$
12. Demonstração.
13. Circunferência: $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2 = b^2$.

    Hipérbole: $\frac{x^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{7}}\right)^2} - \frac{\left(y - \frac{\sqrt{3}b}{14}\right)^2}{\left(\frac{b}{7}\right)^2} = 1$.
14. a) A'(10, 0)
    b) $b = 2\sqrt{5}$
    c) $5(x-6)^2 - 4y^2 = 80$
    d) (0, 5) e (0, −5)
15. a) $\left(-2 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$ e $\left(-2 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\right)$
    b) Não existem pontos de interseção.
    c) $m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

16. $3x - y \pm 7 = 0$

17. A

18. C

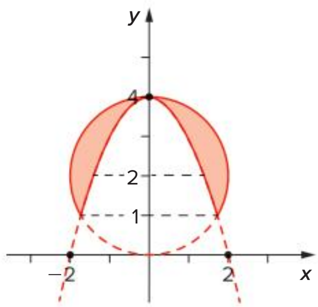
19. D

20. $y = \dfrac{2}{2 - x} - 1, x \neq 2$ e $y = \dfrac{4}{4 - x} - 1, x \neq 4$

21. $(-1, 0)$ e $(-1, 4)$; $y_P = 2 + 2\sqrt{2}$

22. a) $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(0, 4)$.

b)




23. $a = 4$ e $b = 1$

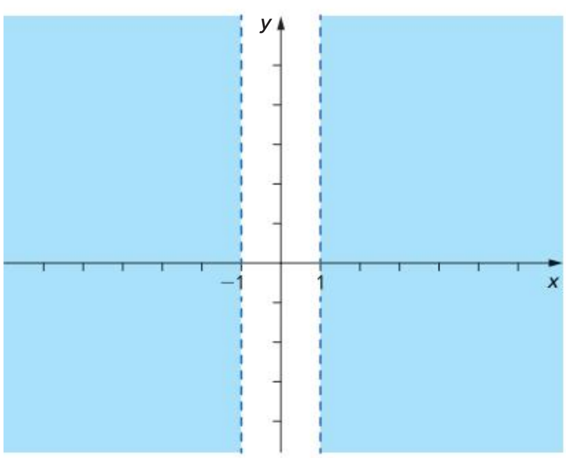
24. B

25. a) $d(P, S_1) = 1$ e $d(Q, S_1) = \sqrt{13}$

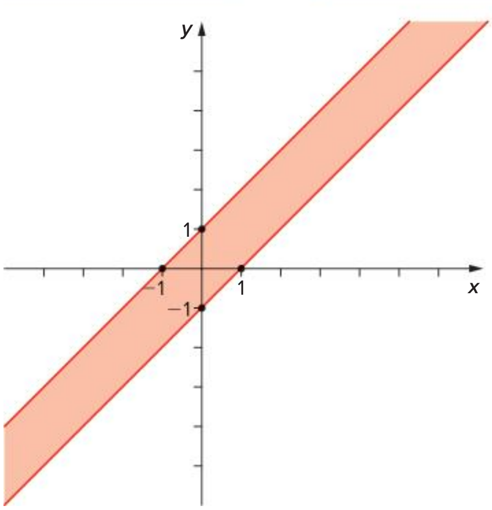
b) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + 1, \text{ se } x \in [-2, 2] \\ |x|, \text{ se } x \notin [-2, 2] \end{cases}$

26. $2p(3 + \sqrt{3})$

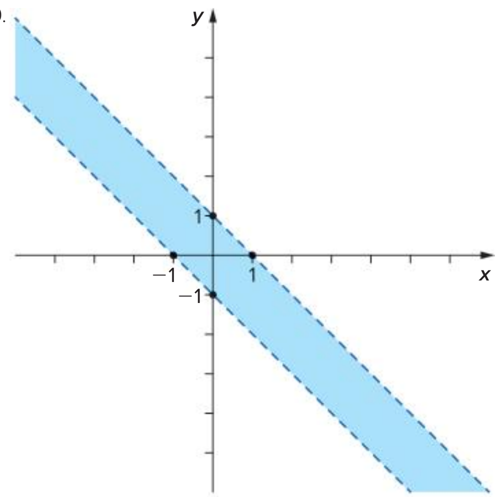
27.



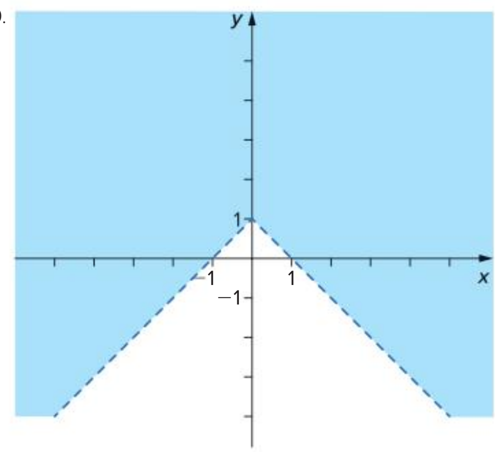

28.



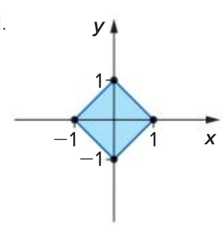

29.



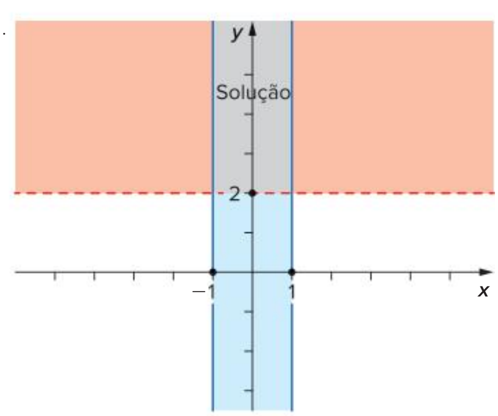

30.



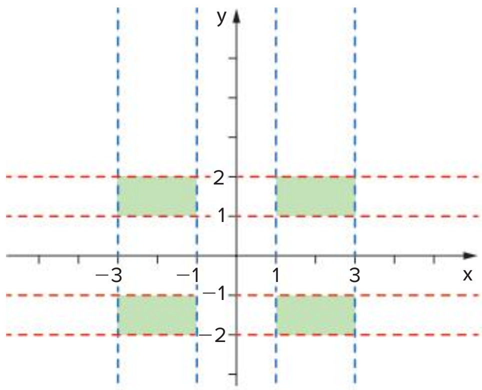

31.



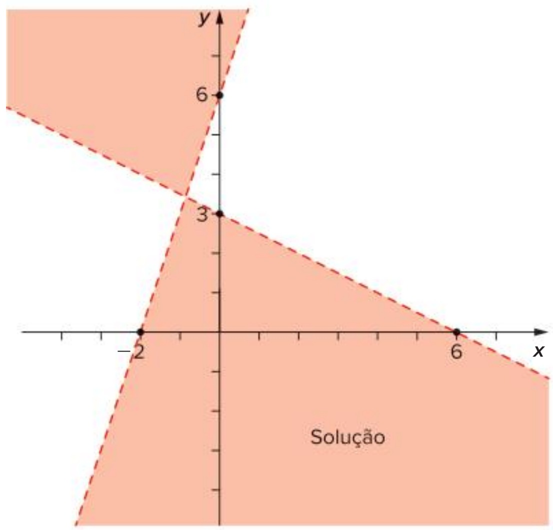

32.



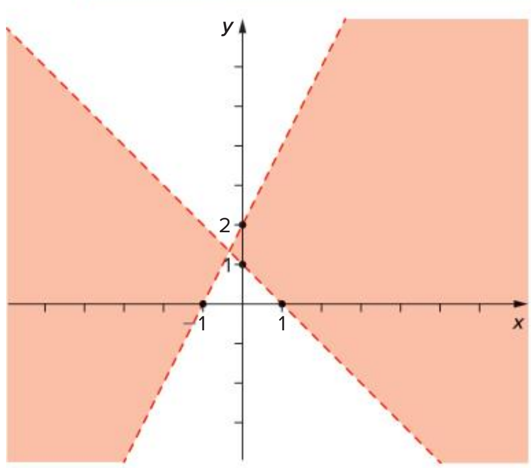
33.



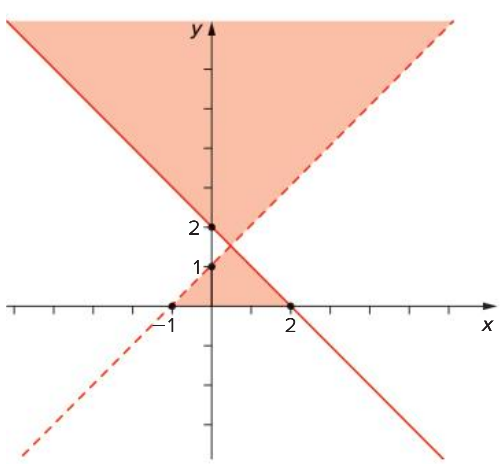
34.



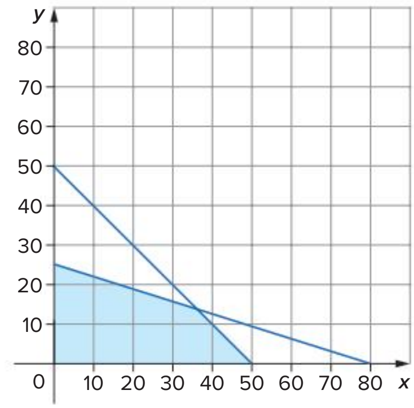

35.



36.



37. a)



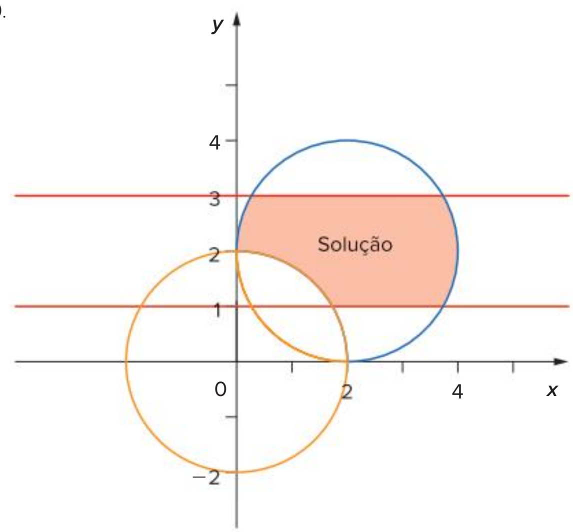
b) 40 $m^3$

c) (16, 20)

38. A

39. E

40.




## BNCC em foco

1. D
2. C
3. B

# Capítulo 11 – Posições relativas no espaço

## Revisando

1. a) Um ponto não tem dimensões, ou seja, a resposta é zero.
   b) Uma reta tem uma única dimensão.
   c) Um plano tem duas dimensões.
   d) O espaço geométrico tem três dimensões.
2. D
3. E
4. C
5. E
6. Paralelos e coincidentes, $\alpha \cap \beta = \alpha$ ou $\alpha \cap \beta = \beta$.
   Paralelos distintos, $\alpha \cap \beta = \varnothing$.
   Secantes, oblíquos ou perpendiculares, $\alpha \cap \beta = r$.

7. B
8. E
9. $20° < \gamma < 60°$.
10. C

## Exercícios propostos

1. E
2. B
3. B
4. B
5. E
6. C
7. Soma: $04 + 16 = 20$
8. A
9. A
10. D
11. A
12. E
13. B
14. E
15. C
16. C
17. A
18. E

## Exercícios complementares

1. Soma: $02 + 04 + 16 = 22$
2. A
3. C
4. A
5. B
6. D
7. D
8. E
9. B
10. E
11. A
12. C
13. a) Coplanares, concorrentes e oblíquas.
    b) Reversas e ortogonais.
    c) Reversas e oblíquas.
    d) Coplanares e paralelas distintas.
14. $\cos\theta = \frac{1}{3}$
15. $x = 90°$, $y = 60°$ e $z = 45°$
16. E
17. C
18. $x = \sqrt{19}$, $y = \sqrt{6}$ e $z = \sqrt{30}$

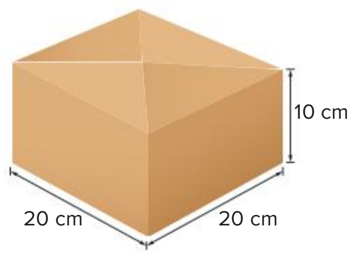
## BNCC em foco

1. C
2. B
3. B

# Capítulo 12 – Paralelepípedos

## Revisando

1. A
2. D
3. E
4. C
5. B
6. D
7. a)




   b) $1600 \text{ cm}^2$
   c) $4000 \text{ cm}^3 = 4$ litros
   d) 30 cm
8. B
9. D
10. C

## Exercícios propostos

1. E
2. A
3. A
4. E
5. C
6. E
7. A
8. B
9. D
10. A
11. E
12. E
13. B
14. B
15. A
16. A
17. B
18. D
19. C
20. A

## Exercícios complementares

1. D
2. C
3. B
4. C
5. C
6. B
7. D
8. Soma: $01 + 02 + 16 = 19$
9. A
10. Soma: $02 + 04 = 06$
11. a) $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
    b) $M = 50 \text{ cm}^2$
12. C
13. C
14. B
15. C
16. C
17. a) $10\sqrt{2}$ cm $\times$ $8\sqrt{2}$ cm $\times$ $4\sqrt{2}$ cm
    b) $S_C = 64 \text{ cm}^2$
    c) $V = 0{,}64\sqrt{2}$ L
18. E
19. C
20. a) $V_{\text{sólido}} = 48\sqrt{2} \text{ cm}^3$
    b) $CD = 6\sqrt{10}$ cm

## BNCC em foco

1. C
2. D
3. B

# Capítulo 13 – Poliedros

## Revisando

1. E
2. D
3. B
4. B
5. A
6. C
7. $V_{\text{pirâmide}} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$
8. B
9. C
10. $L = 15\sqrt{2}$ cm

## Exercícios propostos

1. E
2. D
3. B
4. B
5. C
6. A
7. D
8. D
9. B
10. E
11. A
12. D
13. A
14. C

15. Soma: 01 + 02 = 03
16. B
17. E
18. C
19. B
20. D
21. D
22. B
23. C
24. B
25. B
26. 400 $cm^3$
27. B
28. A
29. C
30. B
31. $\cos(A\hat{C}B) = \cos\alpha \cdot \cos\beta$
32. C
33. Soma: 02 + 08 = 10
34. D
35. $h = 18$
36. E
37. B
38. A
39. C
40. A
41. A
42. C
43. B
44. Soma: 01 + 08 = 09
45. C
46. C
47. D
48. E
49. C
50. A
51. B
52. D
53. B
54. C
55. C
56. C
57. E
58. A
59. a) $MN = 6\sqrt{2}$ cm
    b) $A = 144\sqrt{3}$ $cm^2$
    c) $PN = 12$ cm
    d) $V = 288$ $cm^3$
60. E

## Exercícios complementares

1. A
2. a) $A_{total} = (164 + 24\sqrt{2})a^2$
   b) $V = 204a^3$
3. B
4. D
5. E
6. O volume é 840 $m^3$ e a área total é 756 $m^2$.
7. $k = 6$
8. A
9. B
10. D
11. a) 9 vértices e 16 arestas.
    b) 2 000 $cm^3$
12. D
13. a) $A_{EFH} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ $cm^2$
    b) $A_{EGIH} = 9$ $cm^2$
    c) $V_{pirâmide} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ $cm^3$
14. A
15. $A_{total} = 16\sqrt{3}$ $m^2$
16. E
17. a) $A_{ABD} = 3$
    b) $V_{tetraedro} = 4$
    c) $A_{BDE} = 61$
    d) $AQ = \frac{12\sqrt{61}}{61}$
18. a) $V_{tetraedro} = \frac{\ell^3 \operatorname{sen}\theta}{6}$
    b) $PQ = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{2 - \cos^2\theta}$
    c) $MP = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{5 + 4\cos\theta}$
19. 48 $cm^3$
20. Soma: 02 + 08 + 16 = 26
21. a) 400 $cm^3$
    b) 360 $cm^2$
22. a) $EG = 5\sqrt{7}$ m
    b) 7,1°
23. A
24. A
25. B
26. B
27. D
28. a) 400 $cm^3$
    b) 560 $cm^2$
29. A
30. C
31. A
32. B
33. A
34. B
35. E
36. D
37. C
38. A
39. a) 3 cm, 4 cm e 5 cm.
    b) $V = 60$ $cm^3$ e $A_{total} = 94$ $cm^2$.
40. a) $A_{total} = 2\left(5 + \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{50}\right)$ u.a.
    b) V = 10 unidades de volume
41. E
42. B
43. A
44. 6 vértices.
45. C
46. $\frac{11}{52}$
47. D
48. D
49. C
50. B
51. $\sqrt{k}$
52. A
53. A
54. $R = \sqrt[6]{72\left(3\sqrt{3} - 5\right) \cdot V^2}$
55. A
56. $A_{lateral} = 2x^2 \cdot \operatorname{sen} 2\beta \cdot (1 + \cos\alpha)$
57. C
58. $\theta = 2 \cdot \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{65}}{13}$
59. $h = \frac{a}{2}$ ou $h = \frac{a}{6}$ ou $h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{7}\right)$ ou $h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{13}\right)$
60. $V = \frac{3a^3}{4} \cdot \operatorname{sen}\theta$

## BNCC em foco

1. D
2. A
3. C