DETERMINANTES

Entenderemos por determinante, como sendo um número ou uma função, associado a uma **matriz quadrada**, calculado de acordo com regras específicas.

É importante observar, que só as matrizes quadradas possuem determinante.

Vamos aprender a encontrar o determinante de cada matriz:

Matriz de ordem 1

Quando uma matriz possui apenas um elemento ou possui apenas uma linha e uma coluna, dizemos que essa matriz é de ordem.

Exemplos:
Se A = [10], então o seu determinante será representado assim: det A = |10| = 10

Se B = (-25), então o seu determinante será representado assim: det B = |-25| = -25

Matriz de ordem 2

Dada a matriz quadrada de ordem 2 a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- O determinante de A será indicado por det(A) e calculado da seguinte forma :
- det (A) = ad - bc

Matriz de ordem 3

Dada a matriz de ordem 3, B = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ o valor numérico do seu determinante é calculado da seguinte forma:

Primeiro representamos essa matriz em forma de determinante e repetimos as duas primeiras colunas.

$$= \left|\begin{matrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

Depois calculamos os produtos das diagonais principais e os produtos das diagonais secundárias.

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 40 & 0 & -15 & 0 & -4 \end{matrix}$$

Deve-se pegar o oposto dos produtos das diagonais secundárias e somar com os produtos das diagonais princip

Det B $= -\ (0 + 40 + 0) - 15 + 0 - 4$

$= -\ 40 - 19 = -\ 59$

Essa regra utilizada no cálculo do determinante de matriz de ordem 3 é chamada de **REGRA DE SARRUS.**

Para encontrarmos o determinante de matrizes de ordem maiores do que 3, utilizamos o **TEOREMA DE LAPLACE**. Mas antes de falarmos sobre o mesmo, iremos abordar o estudo do cofator.

Cada elemento da matriz possui o seu cofator, e temos a expressão que determina o cálculo deste cofator. O cofator de a_{ij} é o número A_{ij} em que:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

Você deve estar se perguntando o que é este D_{ij}. Temos que D_{ij} é o determinante da matriz que é obtida através da matriz A, contudo a i-ésima linha e j-ésima coluna são eliminadas.

Determine os cofatores dos elementos: a_{13} e a_{22}, da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Como vimos, para calcular o cofator do elemento a_{13} iremos utilizar a expressão que conhecemos do cofator.

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.D_{13}$$

Note que precisamos determinar a matriz D_{13} para calcular o seu determinante. Esta matriz será obtida eliminando a linha 1 e a coluna 3 referente à matriz A. Sendo assim, temos que:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ 4 & 0 & \cancel{3} \\ 3 & 8 & \cancel{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 * 8 - 3 * 0 = 32$$

$$A_{13} = (-1)^4.32 = 32$$

De forma análoga, procederemos para encontrar o cofator do elemento a_{22}.

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.D_{22}$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 3 & \cancel{8} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 * 5 - 3 * 2 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4.(-1) = 1.(-1) = -1$$

TEOREMA DE LAPLACE

O teorema de Laplace consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Ilustração algébrica:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (Vamos\ escolher\ a\ primeira\ coluna)$$

$$Então\ \det A = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} \quad (onde\ A_{ij}\ é\ o\ cofator\ do\ elemento\ a_{ij})$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

Calcule o determinante da matriz C, utilizando o teorema de Laplace:

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De acordo com o teorema de Laplace, devemos escolher uma fila (linha ou coluna) para calcular o determinante. Vamos utilizar a primeira coluna:

$$\det C = (-2).A_{11} + \underbrace{\cancel{0.A_{21}}}_{=0} + 3.A_{31} + 1.A_{41}$$

Precisamos encontrar os valores dos cofatores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} \rightarrow A_{11} = (-1)^{2}.\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{=3}$$

$$A_{11} = 1 * 3 = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.D_{31} \rightarrow A_{31} = (-1)^{4}.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{=13}$$

$$A_{31} = 1 * 13 = 13$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}.D_{41} \rightarrow A_{41} = (-1)^{5}.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{=9}$$

$$A_{41} = (-1) * 9 = -9$$

Sendo assim, pelo teorema de Laplace, o determinante da matriz C é dado pela seguinte expressão:

$$\det C = (-2).A_{11} + \underbrace{\cancel{0.A_{21}}}_{=0} + 3.A_{31} + 1.A_{41}$$

$$\det C = (-2).3 + 0 + 3.13 + 1.(-9)$$

$$\det C = -6 + 39 - 9$$

$$\det C = 24$$

Note que não foi preciso calcular o cofator do elemento da matriz que era igual a zero, afinal, ao multiplicarmos o cofator, o resultado seria zero de qualquer forma. Diante disso, quando nos depararmos com matrizes que possuem muitos zeros em alguma de suas filas, a utilização do teorema de Laplace se torna interessante, pois não será necessário calcular diversos cofatores.

EXERCÍCIOS:

1)Os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} = -2$ são tais que seu produto p é elemento do conjunto:

a) $\{p \in \Re \,/\, p > -3\}$

b) $\{p \in \Re \,/\, p < -6\}$

c) $\{p \in \Re \,/ -3 < p \leq 2\}$

d) $\{p \in \Re \,/ -6 \leq p < 2\}$

2) Determine o(s) valor(es) de x para que a matriz $M = \begin{vmatrix} x^3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix}$, x E R, não admita inversa.

3) Seja a matriz A = $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, o determinante de $A^{-1} + A^t - I^2$ é: .

a) -48 b) 10 c) 48 d) -10

4) Seja a matriz A= $(a_{ij})_{3x3}$ onde

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{se } i < j \\ a_{ij} = -1 & \text{se } i > j \end{cases}$$

O determinante de A é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5) Com relação às matrizes:

$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ y & 4 \end{vmatrix}$

Sabe-se que :

A soma dos elementos de AB é 10

Det(A) + Det(B) = 18

Os valores de x e y respectivamente são:

a) 1 e 3 b) 2 e 4 c) 4 e 3 d) 3 e 1

6) O valor de a tal que $\begin{vmatrix} -11/2 & 7/2 \\ 5/2 & -3/2 \end{vmatrix}$ seja a matriz inversa de $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a & 11 \end{vmatrix}$ é:

a) -1 b) 3 c) 5 d) 0

7) O sistema linear nas incógnitas *x*, *y* e *z* :

$\begin{cases} x - y = 10 + z \\ y - z = 5 - x \\ z + x = 7 + y \end{cases}$ pode ser escrito na forma

matricial *AX* = *B* , em que:

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Nessas condições, o determinante da matriz *A* é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

8) O determinante da matriz A_{4x4} onde os elementos da primeira linha são 4, 3, 5 e 1; os elementos da segunda linha são 0, 3, 0 e 2; os da terceira linha são 2, 7, 0 e 0 e os da quarta linha, 8, 6, 10 e 2,

a) - 5 b) 0 c) 5 d) 15

9) Uma matriz 4 x 4 que admite inversa é

$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$

$c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$e)\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$

10) Seja x um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos são definidos por $a_{ij} = i - j$.

Sobre a equação em x definida por $\det(A - xI) = x + \det A$ é correto afirmar que

a) as raízes são 0 e $\frac{1}{2}$.

b) todo x real satisfaz a equação.

c) apresenta apenas raízes inteiras.

d) uma raiz é nula e a outra negativa.

e) apresenta apenas raízes negativas.