MAT 1

Pré-vestibular Matemática

POLIEDRO
SISTEMA DE ENSINO

Autoria: Umberto César Chacon Malanga.

Direção geral: Nicolau Arbex Sarkis.

Gerência editorial: Emília Noriko Ohno.

Coordenação de projeto editorial: Diego da Mata, Marília L. dos Santos G. Ribeiro e Viviane R. Nepomuceno.

Edição: Equipe de edição da Editora Poliedro.

Coordenação de edição de texto: Anaiza Castellani Selingardi.

Edição de texto: Equipe de edição de texto da Editora Poliedro.

Coordenação de revisão: Mariana Castelo Queiroz.

Revisão: Equipe de revisão da Editora Poliedro.

Edição de arte: Kleber S. Portela e Wellington Paulo.

Diagramação: Equipe de diagramação da Editora Poliedro.

Ilustração: Equipe de ilustração da Editora Poliedro.

Coordenação de licenciamento: Kelly Garcia.

Analistas de licenciamento: Equipe de licenciamento da Editora Poliedro.

Licenciamento: Jade Cristina Bernardino.

Analista de produção editorial: Claudia Moreno Fernandes.

Coordenação de PCP: Anderson Flávio Correia.

Analista de PCP: Vandré Luis Soares.

Projeto gráfico: Alexandre Moreira Lemes e Kleber S. Portela.

Projeto gráfico da capa: Bruno Torres e Varão Monteiro Junior.

Impressão e acabamento: Nywgraf.

Créditos: capa e frontispício powerofforever/iStockphoto.com **5** tebnad/123rf.com • Reprodução **85** januszek/Stock.xchng • Cathy Yeulet/123rf.com • Justus van Gent/Wikimedia Commons **139** Leonardo da Vinci/Web Gallery of Art • dafalias/Stock.xchng • Leonardo da Vinci/Web Gallery of Art.

POLIEDRO
SISTEMA DE ENSINO

São José dos Campos – SP
ISBN: 978-85-7901-069-9
Telefax: (12) 3924-1616
editora@sistemapoliedro.com.br
www.sistemapoliedro.com.br

SUMÁRIO

Frente 1

Frente 2

Frente 3

Frente 1

1

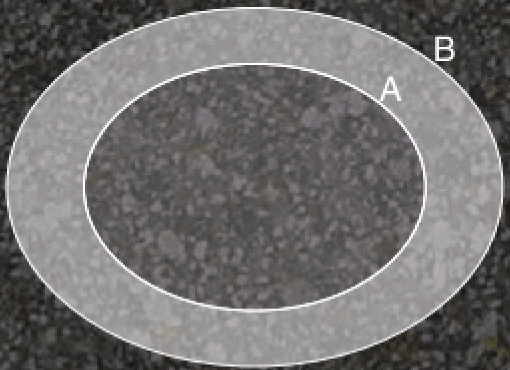
FRENTE 1

Teoria elementar dos conjuntos

Georg Cantor, 1845-1918.

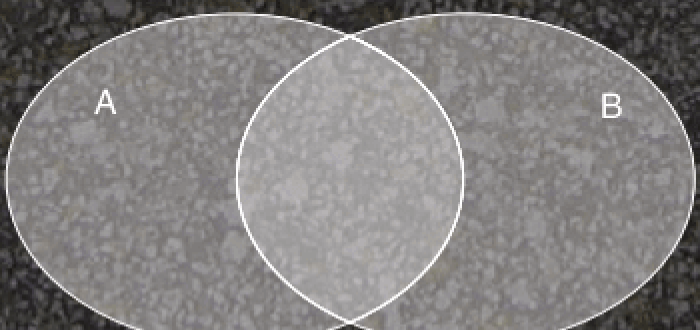
Georg Cantor nasceu na Rússia e viveu grande parte da sua vida na Alemanha. Cantor é considerado um dos fundadores da moderna Teoria dos Conjuntos e um dos célebres lógicos e matemáticos do século XX. Com a Teoria dos Conjuntos, toda a matemática sofreu grande transformação e uma precisão teórica gigantesca. Todas as operações existentes da lógica foram representadas por meio das relações e operações entre os conjuntos. Observe a seguir essas relações e operações na forma de diagramas e na forma simbólica:

Relação de inclusão



$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

União



$$A \cup B = \{x \in A \cup B \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Conceitos básicos

Noção intuitiva de conjunto

Conjunto é um conceito primitivo, portanto não possui definição formal. Entretanto, isso não impede uma explicação com mais detalhes. Segundo Georg Cantor: "chama-se *conjunto* todo agrupamento de objetos bem definidos e discerníveis, de nossa compreensão e percepção, chamados de elementos do conjunto".

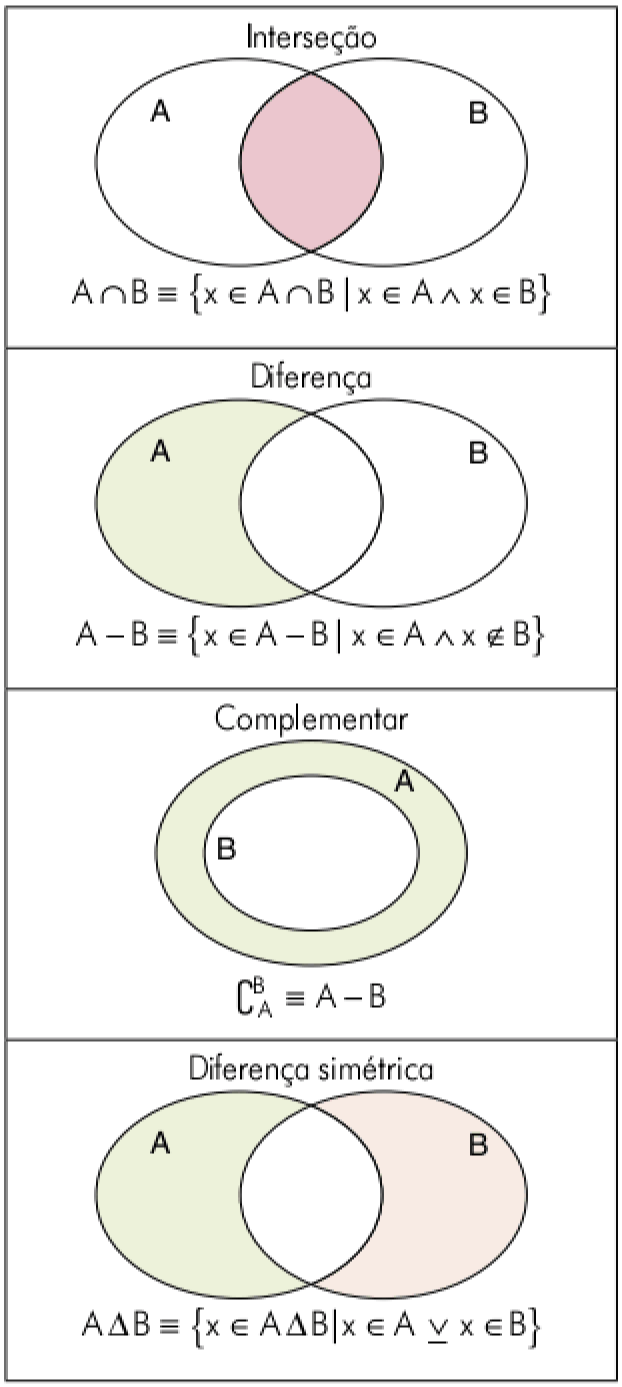


Fig. 1 Relação entre conjuntos.

Representações de um conjunto

Há basicamente três maneiras de apresentar um conjunto:

Enumeração ou Listagem

Os elementos são todos enumerados entre chaves e separados por ponto e vírgula. Observe os exemplos:

$$A = \{1; 2; 3; 5\} \text{ e } B = \{a; b; c\}$$

Método da compreensão

Os elementos são selecionados em um conjunto mais amplo, chamado universo (U), mediante uma propriedade característica. Por exemplo:

Conjunto universo: números inteiros
Propriedade característica: $1 \le x \le 5$
Resultado: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Método da compreensão: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 5\}$

Observe, atentamente, que o método da compreensão possui duas partes: a primeira identifica o conjunto universo e a segunda seleciona os elementos mediante a propriedade característica.

Conclusão: *A = {Conjunto universo de x / propriedade característica de x}*

Diagrama de Venn-Euler

É basicamente uma listagem em que os elementos ficam dentro de uma linha fechada. Utiliza-se muito esse tipo de representação por causa da facilidade de raciocínio e interpretação. Os conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{a; b; c\}$ podem ser representados como:

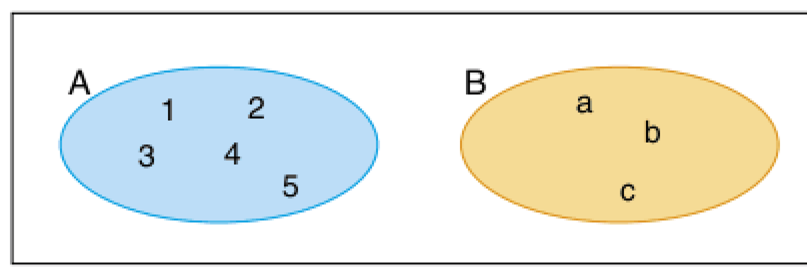


Fig. 2 Diagramas de Venn-Euler.

Relação de pertinência

Um objeto pode ser ou não elemento de um conjunto. Para indicar que ele é *elemento*, utiliza-se o símbolo $\in$ (pertence); caso contrário, o símbolo $\notin$ (não pertence).

Exemplo 1

$A = \{1; 2; \{3\}; 4\}$

Temos: $1 \in A$
$3 \notin A$
$\{3\} \in A$

Exemplo 2

$B = \{\{2\}; 1; 2; \{3\}; 4\}$

Temos: $2 \in B$
$\{2\} \in B$
$3 \notin B$
$\{3\} \in B$

Nos dois exemplos apresentados, alguns itens não causam problemas, como $1 \in A$ e $2 \in B$; entretanto, poderiam causar problemas os casos em que é analisado um elemento (que também é um conjunto) como {3}, que é elemento de A e B.

ATENÇÃO!

O conceito de elemento é relativo.
Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto.

Georg F. L. P. Cantor (1845-1918) nasceu em S. Petersburgo, mas passou quase toda a vida na Alemanha. O fruto de seu longo trabalho e dos incríveis resultados obtidos transformou a teoria dos conjuntos em uma disciplina completamente desenvolvida. O símbolo | significa "tal que".
John Venn (1834-1923) inventou uma maneira de representar os conjuntos por meio de diagramas.

Conjuntos especiais

Conjunto vazio

É aquele que não possui elementos, ou seja, nenhum elemento satisfaz a sua propriedade característica. Simbolicamente: $\forall\, x \notin$ vazio.

Observe os exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

Os conjuntos A e B não possuem elementos satisfazendo as propriedades apresentadas. Pode-se representá-los:

$$A = \varnothing \text{ ou } B = \{\ \}$$

Conjunto unitário

É o conjunto no qual apenas um elemento satisfaz a propriedade característica. Analise os exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\} \text{ seria } A = \{3\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } x \text{ é primo}\} \text{ seria } B = \{2\}$$

Conjunto universo (U)

É o conjunto que possui todos os elementos. Simbolicamente, tem-se $\forall\, x, x \in U$.

A necessidade da identificação do conjunto universo é fator determinante na solução de uma equação.

Exercício resolvido

1 Resolva a equação $x^2 - \frac{4}{9} = 0$, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números reais $U = \mathbb{R}$.

Resolução:

As raízes dessa equação são:

$$x^2 - \frac{4}{9} = 0 \therefore \left(x - \frac{2}{3}\right).\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

assim: $x - \frac{2}{3} = 0$ *ou* $x + \frac{2}{3} = 0 \therefore x = \frac{2}{3}$ *ou*

$$x = -\frac{2}{3} \therefore S = \left\{\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Se o conjunto universo fosse o conjunto dos números naturais ($U = \mathbb{N}$), não haveria valores de x, logo, $S = \varnothing$.

ATENÇÃO!

O conjunto $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, não possui elemento tal que $x^2 = -1$, $x \in \mathbb{R}$.

Um número é definido como par se ele for um número natural e o resto de sua divisão por 2 for zero, ou seja, x é par então $x = 2k$; k é natural.

Um número natural é definido como primo se, e somente se, ele possuir dois divisores, ele próprio e a unidade.

Exemplos: {2; 3; 5; 7; 11...}

Contraexemplo: 9 não é primo, pois, além de 1 e 9, o número 3 também é seu divisor.

O símbolo $\forall$ significa "qualquer que seja".

No exemplo 1, não se esqueça do caso de fatoração $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, diferença de dois quadrados.

Somente será possível tirar conclusões de uma equação-produto se ela for igual a zero. Observe:

$AB = 0$, $A = 0$ ou $B = 0$, mas se $AB = 2$, $A = 2$ e $B = 1$?

Claro que não. Haverá infinitas respostas!

Noção de subconjunto

Definição de subconjunto

Um conjunto A é subconjunto de outro B se, e somente se, todo elemento de A for também elemento de B. Em notação matemática, tem-se:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Quando A é subconjunto de B, pode-se dizer que A está contido em B ($A \subset B$) ou B contém A ($B \supset A$).

Na teoria dos conjuntos, os contraexemplos são importantes para a fixação do conceito.

Qual a consequência de $A \not\subset B$?

Isso quer dizer que existe pelo menos um $x \in A$, tal que esse $x \notin B$.

Propriedades da inclusão

- **P1** $A \subset U$
- **P2** $A \subset A$ (reflexiva)
- **P3** $(A \subset B \text{ e } B \subset D) \Rightarrow (A \subset D)$ (transitiva)
- **P4** $(A \subset B \text{ e } B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$ (igualdade de conjuntos)
- **P5** $\varnothing \subset A;\ \forall A$
- **P6** Se A possui n elementos, então o número de subconjuntos de A é 2^n.

A P5 é intrigante! Pois como um conjunto que não possui elementos está contido em um outro conjunto?

A demonstração será pelo método da redução ao absurdo (método indireto).

Hipótese: $\varnothing$ é o conjunto vazio e A um conjunto qualquer.

Tese: $\varnothing \subset A$

Demonstração:

Se $\varnothing \not\subset A$ (negação da tese), ou seja, existe um $x \in \varnothing$, tal que $x \notin A$; essa afirmação de que $x \in \varnothing$ é um absurdo, pois o conjunto $\varnothing$ não possui elementos. Logo, a negação da tese é falsa, o que leva a concluir que $\varnothing \subset A$ (c.q.d.).

A propriedade P6 pode ser demonstrada facilmente pelo princípio multiplicativo da análise combinatória. Observe um conjunto A com n elementos:

$$A = \{a_1; a_2; a_3; \dots a_n\}$$

Para formar um subconjunto de A, os elementos de A podem ou não pertencer a A, ou seja, tem-se duas possibilidades para cada elemento.

Assim:

$$\frac{a_1}{2} \cdot \frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_3}{2} \cdots \frac{a_n}{2} \rightarrow \text{total de possibilidades: } \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{\text{n vezes}}$$

nº de subconjuntos: 2^n

Observe um exemplo da P6: $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$. Subconjuntos de $A = \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}$; A e $\varnothing$ (de acordo com as propriedades P2 e P5, respectivamente), perfazendo assim um total de $2^3 = 8$ subconjuntos.

O conjunto formado pelos subconjuntos de A é chamado de *conjunto das partes de A* ou *conjunto potência de A*. Representa-se esse conjunto por P(A).

Assim:

$P(A) = \{\varnothing; A; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}\}$

Analise o seguinte exemplo antes de prosseguir o seu estudo.

Considere o conjunto $A = \{1; 2; \varnothing; \{1\}; 3; \{1; 2\}\}$ e as afirmações a seu respeito:

a) $\varnothing \in A$
b) $\varnothing \subset A$
c) $1 \in A$
d) $\{1\} \in A$
e) $\{1\} \subset A$
f) $\{1; 2\} \subset A$
g) $\{1; 2; 3\} \not\subset A$
h) $\{1; 2; 3\} \subset A$

Operações entre conjuntos

União

Considere dois conjuntos quaisquer A e B. Define-se o conjunto $A \cup B$ como o conjunto formado por todos elementos de A e B. Simbolicamente, tem-se:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

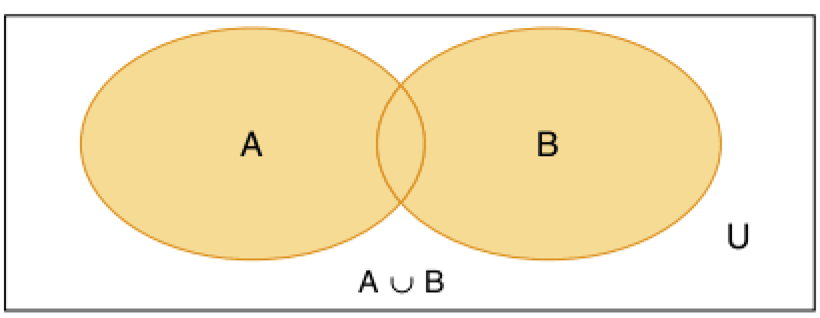


Fig. 3 Operação união.

ATENÇÃO!

Esse "ou" da operação união não possui o caráter exclusivo, ou seja, não se quer dizer que x só é elemento de A, ou só de B, e sim que ele é de pelo menos um dos conjuntos.

Você verá mais tarde que existe uma operação entre conjuntos que utiliza o caráter exclusivo, ou seja, o elemento deve pertencer a um único conjunto. Essa operação é a diferença simétrica.

Propriedades da união

P1 $A \cup \varnothing = A$
P2 $A \cup U = U$
P3 $A \cup A = A$ (idempotente)
P4 $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
P5 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativa)

Interseção

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, define-se $A \cap B$ o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

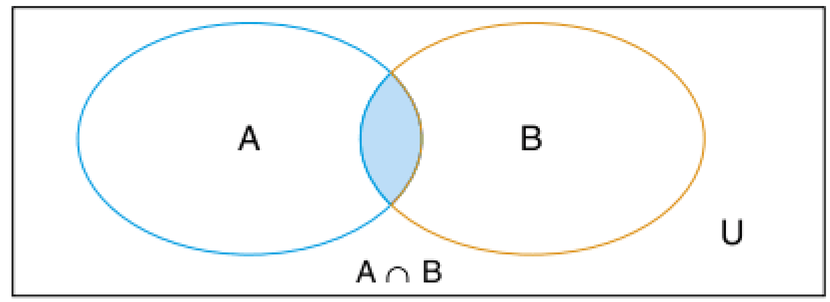


Fig. 4 Operação interseção.

Propriedades da interseção

P1 $A \cap \varnothing = \varnothing$
P2 $A \cap U = A$
P3 $A \cap A = A$ (idempotente)
P4 $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
P5 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

ATENÇÃO!

Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se, e somente se, eles não possuem elementos comuns, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.

Diferença

Considere os conjuntos A e B, quaisquer, define-se $A - B$ o conjunto formado por elementos de A, mas que não pertencem a B. Simbolicamente, tem-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

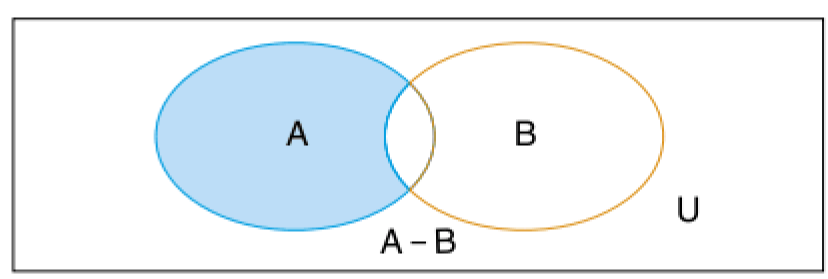


Fig. 5 Operação diferença.

Não existe propriedade comutativa da diferença ($A - B \neq B - A$).

Para efetuar $A - B$, não se exige que $B \subset A$. Quando A e B são disjuntos, tem-se que $A - B = A$, pois nenhum elemento A pertence a B.

Complementar

Considere B subconjunto de $A (B \subset A)$. Defini-se $\complement_A^B$ (lê-se complementar de B em relação a A) o conjunto de elementos que faltam para B se transformar em A, ou seja, $A - B$. Portanto:

$$\complement_A^B = A - B$$

Pode-se representar $\complement_U^A = U - A = \bar{A}$.

Propriedades do complementar

P1 $\overline{\varnothing} = U$

P2 $\overline{U} = \varnothing$

P3 $\overline{\overline{A}} = A$

P4 Se $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A}$

Se $x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A$

P5 Teoremas de De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

P6 Contrapositiva

$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Demonstração:

Seja $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$.

Logo, $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Seja $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B} \Rightarrow x \in B$.

Logo, $A \subset B$.

Essa propriedade será de grande importância para demonstrações e definições futuras.

Exercícios resolvidos

2 Dados os conjuntos: $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; e\}$ e o conjunto universo $U = \{a; b; c; d; e\}$, calcule: $A \cup B$; $B \cap A$; $B - A$; $A - B$; $\complement_A^B$; $\overline{B}$ e $\overline{A \cap B}$.

Resolução:

$A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$

$B \cap A = \{b; d\}$

$B - A = \{e\}$

$A - B = \{a; c\}$

$\complement_A^B$ = *não existe, pois* $B \not\subset A$

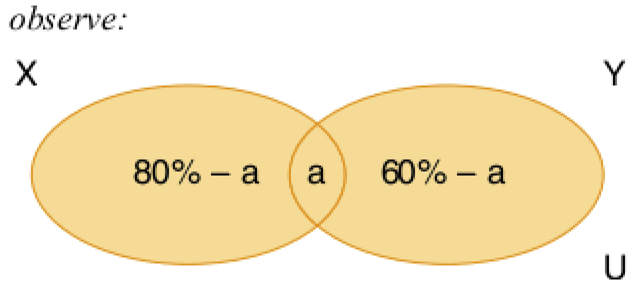
$\overline{B} = \complement_U^B = U - B = \{a; c\}$

$\overline{A \cap B} = \complement_U^{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{a; c; e\}$

3 Em uma universidade são lidos apenas dois jornais X e Y. Oitenta por cento dos alunos da universidade leem o jornal X e 60% o jornal Y. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos dois jornais, qual a porcentagem de alunos que leem ambos?

Resolução:

Esse tipo de problema pode ser resolvido facilmente com diagramas, observe:



Seja a o valor da porcentagem dos alunos que leem ambos os jornais. O diagrama mostra-nos também que (80% – a) representa a porcentagem dos alunos que leem somente o jornal X, e (60% – a) somente o jornal Y.

A soma das porcentagens tem de dar 100%; logo:

(80% – a) + a + (60% – a) = 100%. Assim, a = 40%.

ATENÇÃO!

Quando na operação do complementar não se identificar o conjunto A $\left(\complement_A^B\right)$, a operação será feita em relação ao conjunto universo.

Outras representações de $\complement_A^B$: B', $\overline{B}$ e B^c. Não confunda disjuntos com conjuntos distintos. Observe o exemplo: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{1; 2; 5; 6\}$ $A \cap B = \{1; 2\} \neq \varnothing$ e $A \not\subset B$ e $B \not\subset A \Rightarrow A \neq B$.

Propriedade distributiva

Pode-se combinar as operações de união e interseção, ou seja, fazer a sua distribuição.

P1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

P2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ATENÇÃO!

Teorema importante para a simplificação de expressões envolvendo conjuntos. $A - B = A \cap \overline{B}$. Demonstração:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} =$$
$$= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B} \ \text{(c.q.d)}$$

Essas propriedades são úteis para a simplificação de expressões complicadas entre conjuntos. Observe os exemplos:

Exercícios resolvidos

4 Simplifique as expressões:

a) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$

b) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Resolução:

a) $\left[(A \cup B) \cap \overline{A}\right] \cup \left[(A \cup B) \cap B\right] =$

$= \left[(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A)\right] \cup B =$

$= \left[(\overline{A} \cap B) \cup \varnothing\right] \cup B = (\overline{A} \cap B) \cup B = B$

b) $\left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A}\right] \cup \left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right] =$

$= \left[(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A)\right] \cup \left[(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{B})\right] =$

$= \left[(\overline{A} \cap \overline{B})\right] \cup \left[\overline{B} \cup (\overline{B} \cap A)\right] = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{B} = \overline{B}$

5 Simplifique as expressões:

a) $(A \cup B) - B$

b) $(A - B) \cup B$

Resolução:

a) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap \overline{B} =$

$(\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \varnothing \cup (\overline{B} \cap A) =$

$A \cap \overline{B} = A - B$

b) $(A \cap \overline{B}) \cup B = (B \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) =$

$U \cap (B \cup A) = A \cup B$

6 Demonstre a propriedade $A - B = A - (A \cap B)$.

Resolução:

$A - (A \cap B) = A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A - B$

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é um terceiro conjunto que possui elementos que pertençam a um único conjunto. Simbolicamente, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

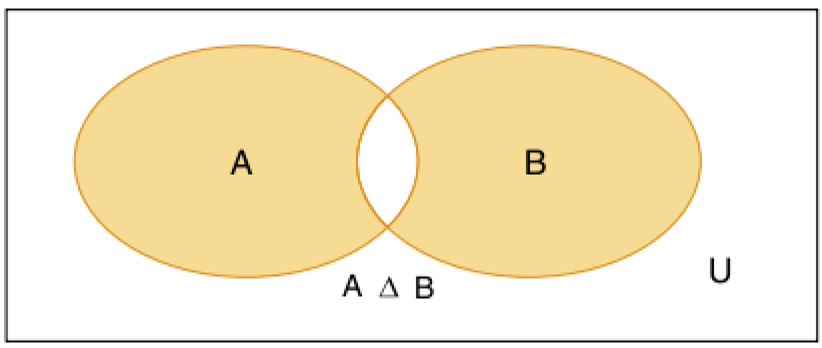


Fig. 6 Operação diferença simétrica.

Observe o exemplo:

Exercício resolvido

7 Sejam $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{3; 5; 8\}$, obtenha o conjunto $A \Delta B$.

Resolução:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) =$

$\{1;\ 2;\ 4\} \cup \{5;\ 8\} = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8\}$

Número de elementos de um conjunto

Para representar a quantidade de elementos de um conjunto X, utiliza-se a notação n(X).

Pelos diagramas de Venn-Euler, pode-se observar que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exercícios resolvidos

8 Em uma rua, 140 pessoas torcem pelos times A ou B. Quantas pessoas torcem somente pelo time A, se B tem 60 torcedores e A e B possuem 40 torcedores?

Resolução:

$n(A \cup B) = 140$, $n(B) = 60$ e $n(A \cap B) = 40$

Utilizando o resultado apresentado, tem-se:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ∴

$140 = n(A) + 60 - 40$ ∴ $n(A) = 120$

O time A tem 120 torcedores.

9 Conhecendo as propriedades distributivas da união e interseção e $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, obtenha $n(A \cup B \cup C)$.

Resolução:

$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] =$

$= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] =$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) -$

$n[(B \cap C) \cup (A \cap C)] =$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$

$\{n(B \cap C) + n(A \cap C) - n[(B \cap C) \cap (A \cap C)]\} =$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) -$

$n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Conjuntos numéricos

Classificação numérica

Observe os conjuntos numéricos e, depois, a composição entre eles pelo diagrama de Venn-Euler.

Naturais:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3...\}$

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3...\}$

Inteiros:

$\mathbb{Z} = \{...-2; -1; 0; 1; 2...\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3...\}$

$\mathbb{Z}_- = \{...-3; -2; -1; 0\}$

Racionais:

$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \dfrac{n}{d};\ n \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{Z}^*\right\}$

$\mathbb{I}$ = conjunto dos irracionais, cujos elementos não podem ser colocados em forma de fração.

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais, é tal que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

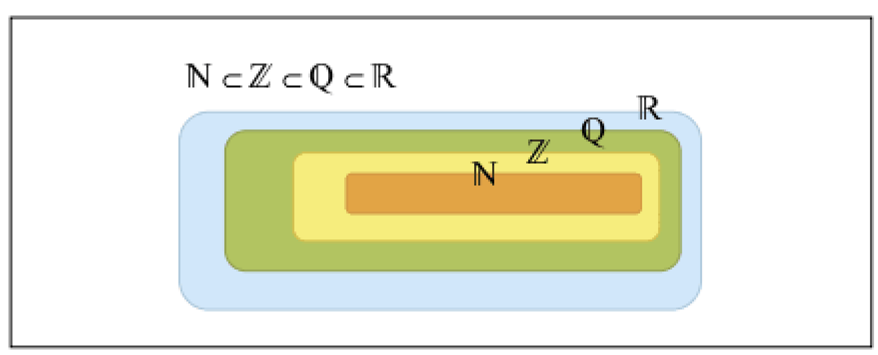
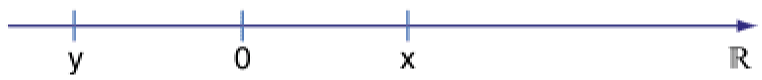


Fig. 7 Relação entre os conjuntos.

Intervalos reais

Todo número real pode ser associado a um ponto em uma reta, chamada *reta real* ($\mathbb{R}$). Observe:



$x \in \mathbb{R}; x > 0$
$y \in \mathbb{R}; y < 0$

Se $x \in \mathbb{N}$, tal que $1 < x < 3$, o único representante é $x = 2$. Mas, se $x \in \mathbb{R}$, tem-se infinitos valores de x. A representação na reta real é mais prática. Observe:

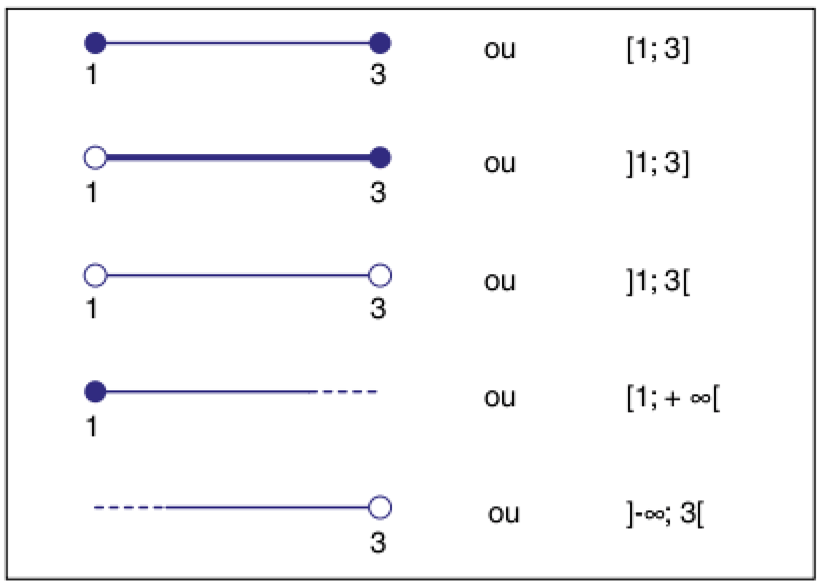


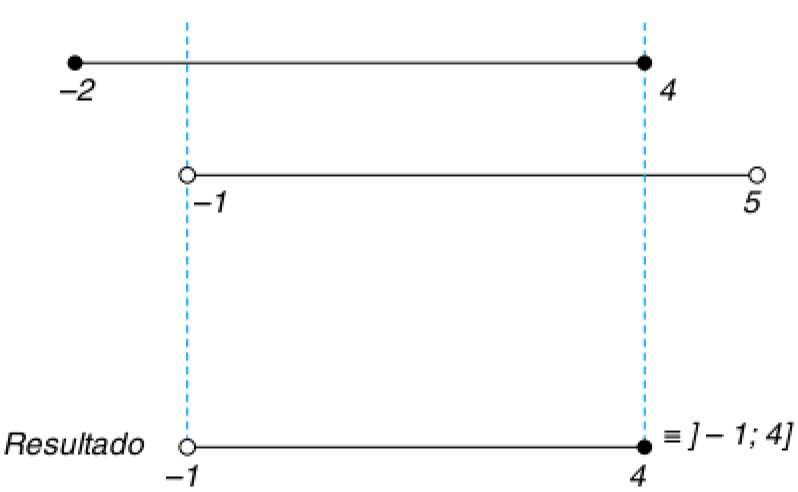
Fig. 8 Representação de intervalos na reta real.

A representação gráfica será muito útil na resolução de equações e inequações, em que a união e a interseção de intervalos são operações frequentes.

Exercícios resolvidos

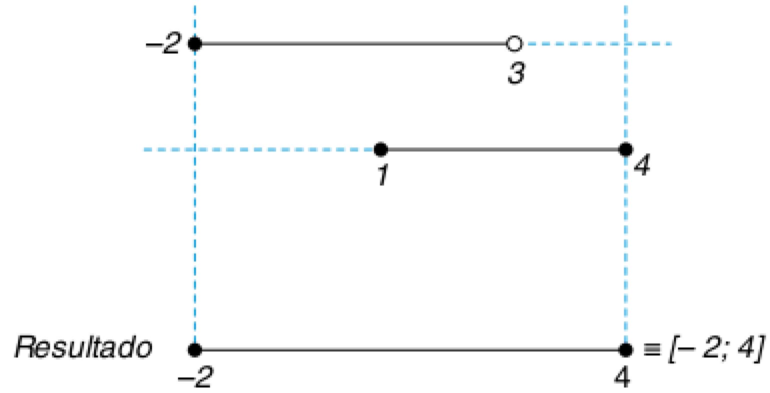
10 Obtenha $[-2; 4] \cap]-1; 5[$

Resolução:



11 Obtenha $[-2; 3[\cup [1; 4]$

Resolução:



ATENÇÃO!

O conjunto $\mathbb{N}$, conjunto dos números naturais, indica a ideia de quantidade (= {0; 1; 2; 3...}).
O conjunto $\mathbb{Q}$, conjunto dos racionais, é formado pelos números que podem ser colocados na forma de fração.
O intervalo real é aberto ou fechado dependendo da posição do colchete, observe: [a, fechado em a;]a, aberto em a.
Cuidado! Você sabe diferenciar as seguintes notações: (2,5); {2,5}; [2,5]?

Representações no plano cartesiano

Par ordenado

É um conjunto que possui dois elementos, no qual a ordem é levada em consideração. Observe que, na representação antiga, era indiferente indicar {1; 2} ou {2; 1}. Com o conceito de par ordenado, $(1; 2) \neq (2; 1)$, ou seja, $(a; b) = (c; d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Existem basicamente duas representações geométricas dos pares ordenados. Observe os exemplos para o par (2; 5):

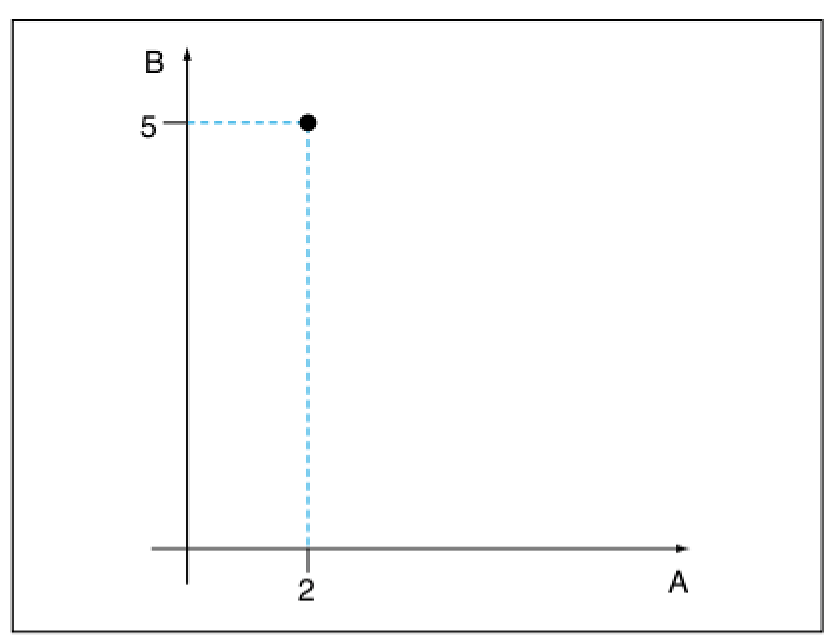


Fig. 9 Plano cartesiano.

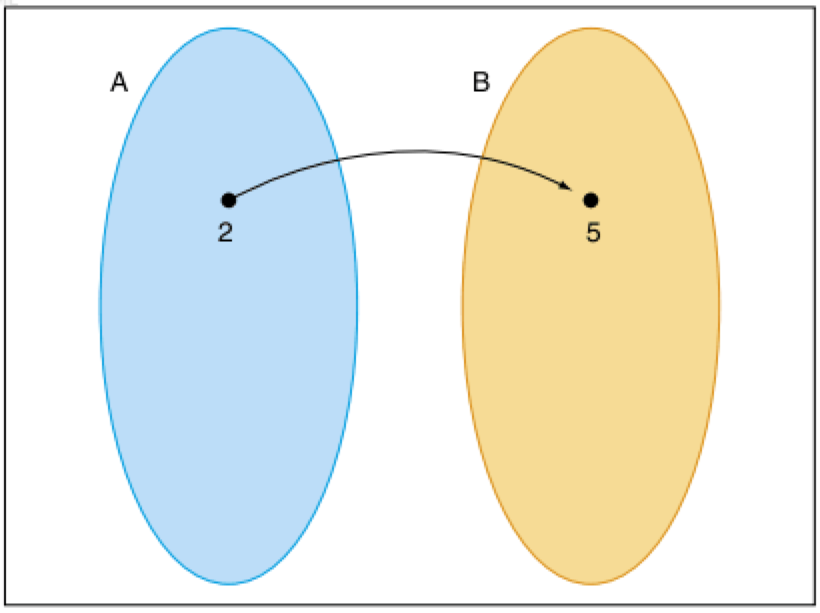


Fig. 10 Diagrama de flechas.

Produto cartesiano

Define-se produto cartesiano do conjunto A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados (x; y), tal que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exercício resolvido

12 Seja A = {1; 2; 3} e B = {2; 5}, obtenha A x B e B x B.

Resolução:

A x B = {(1; 2); (1; 5); (2; 2); (2; 5); (3; 2); (3; 5)}
B x B = {(2; 2); (2; 5); (5; 2); (5; 5)}

ATENÇÃO!

A x B, lê-se: A cartesiano B.

Propriedades do produto cartesiano

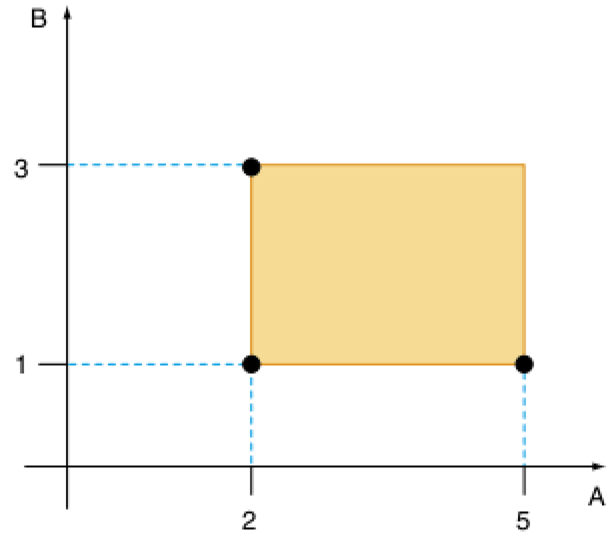
- **P1** $A \times \varnothing = \varnothing$
- **P2** $A \times B \neq B \times A$ $(A \neq B \neq \varnothing)$
- **P3** Se A possui m elementos e B possui n elementos, então A x B possui $m \cdot n$ elementos.
- **P4** $R \times R = R^2$ (plano cartesiano completo).

Exercícios resolvidos

13 Dados os intervalos reais [2; 5] e [1; 3], obtenha [2; 5] x [1; 3].

Resolução:

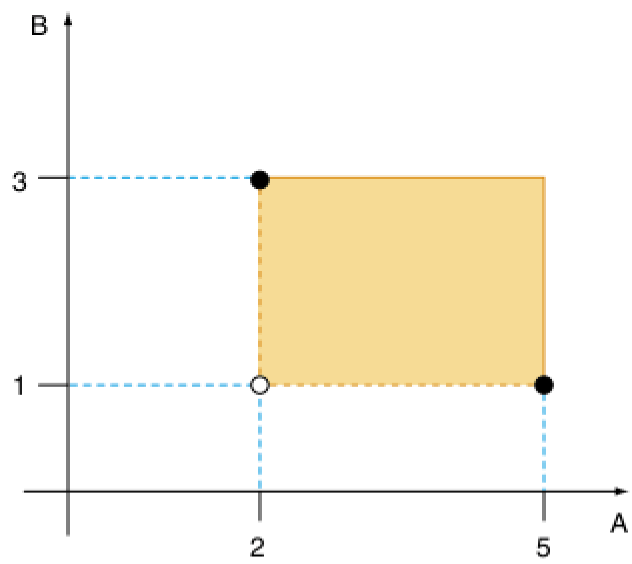
Não é possível representar esse produto cartesiano pelo método da listagem, pois existem infinitos números reais nesses intervalos. A única maneira de representar a resposta é graficamente.



14 Obtenha]2; 5] x]1; 3]

Resolução:

Semelhante ao exemplo anterior, mas com o detalhe de que alguns intervalos são abertos. Algumas fronteiras são tracejadas.



Revisando

1 Dados os conjuntos U = {a; b; c; d; e; f; g}, A = {a; b; c; d; e}, B = {a; c; e; g} e C = {b; e; f; g}, resolva as seguintes operações considerando U o conjunto universo.

a) $A \cup C$

b) $B \cap A$

c) $C - B$

f) $\overline{A - C}$

d) $\bar{B}$

g) $\overline{A \cap \bar{A}}$

e) $\bar{A} - B$

2 Sendo $A = \{2; \{0\}; 0; \{0; 6\}\}$, coloque V para verdadeiro e F para falso a respeito das seguintes afirmações.

☐ $2 \in A$	☐ $0 \notin A$	☐ $\varnothing \in A$	☐ $\{0; 6\} \in A$
☐ $\{2\} \in A$	☐ $\{2; 0\} \in A$	☐ $6 \in A$	
☐ $\{0\} \in A$	☐ $\{0; \{0\}\} \in A$	☐ $\{6\} \notin A$	

3 Sendo $A = \{2; \{2\}; 0; \{0 ; 5\}\}$ coloque V para verdadeiro e F para falso a respeito das seguintes afirmações.

☐ $5 \in A$	☐ $\{\{2\}\} \subset A$	☐ $\{\{0\}\} \subset A$	☐ $\{0; 5\} \in A$
☐ $\{2\} \in A$	☐ $0 \in A$	☐ $\{0; 5\} \subset A$	
☐ $\{2\} \subset A$	☐ $\{0\} \subset A$	☐ $\{0\} \notin A$	

4 Em um colégio, verificou-se que 120 alunos não têm pai professor; 130 alunos não têm mãe professora e 5 têm pai e mãe professores. Qual o número de alunos do colégio, sabendo-se que 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professor e que não existem alunos irmãos?

5 Dados os conjuntos $A = [2; 3] \cup \{4\}$ e $B = [1; 2]$, obtenha o gráfico cartesiando de $A \times B$.

Exercícios propostos

Pertinência e inclusão

1 Complete as sentenças a seguir de forma a torná-las verdadeiras, utilize os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\supset$ ou não contém.

a) 5 _____ { 2, 3, 4, 5, 6, 7}
b) {7, 9} _____ {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}
c) $\varnothing$ _____ 8
d) {5, 7} _____ {5}
e) 7 $\notin$ {5, 6, _____, 8, 9}

Problemas envolvendo a noção de pertinência e inclusão

2 Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9}.

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$
II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$
IV. $\{0; 1; 2; 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é(são) verdadeira(s):

(a) apenas I e III.
(b) apenas II e IV.
(c) apenas II e III.
(d) apenas IV.
(e) todas as afirmações.

3 Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações.

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$

II. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$

III. $\sqrt{2} \in S$

Pode-se dizer, então, que é(são) verdadeira(s) apenas:

(a) I e II.
(b) I e III.
(c) II e III.
(d) I.
(e) II.

Operações entre conjuntos

4 Se A = {2; 3; 4; 5} e B = {1; 3; 5; 7}, quais afirmações são verdadeiras?

(a) A – B = {1; 2; 4; 7}
(b) B – A = {2; 4}
(c) A – B = {4; 2}
(d) B – A = {1; 2; 4; 7}

5 Dados os conjuntos A = {3; 6; 9; 12; 15} e B = {5; 10; 15; 20; 25; 30}, pode-se afirmar que:

(a) A é subconjunto de B.
(b) B é subconjunto de A.
(c) A e B são disjuntos.
(d) a interseção não é vazia.
(e) A – B = $\varnothing$.

6 Dados os conjuntos A = {2; 3; 5; 7; 8}, B = {1; 3; 8; 9} e C = {2; 4; 8; 10}, determine:
$A \cup B$; $A \cap B$; $A - C$; $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap B \cap C)$.

7 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 - 2x < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x + 5 > 7x - 5\}$, calcule $A \cap B$.

8 Se $A \cap B = \{1; 2\}$, $B \cap C = \{2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B \cup C = \{1; 2; 3; 5\}$, obtenha $A \cap C$.

9 Sendo A = {0; 1; 2; –1; –2} e B = {–1; 2; 3; 4; 5}, determine $(B - A) \cup (A - B)$.

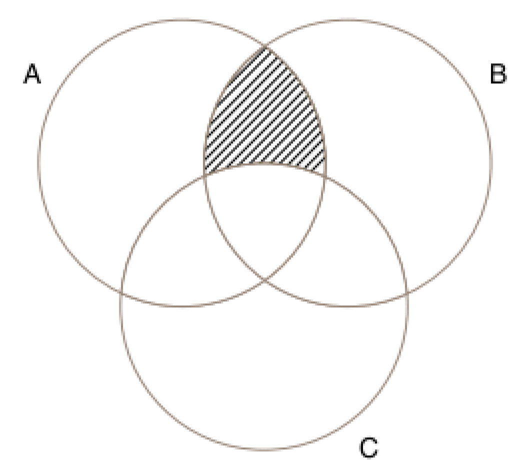
10 Se A = {1; 2; 3; {1}} e B = {1; 2; {3}}, determine A – B.

11 Assinale a alternativa falsa.

(a) $\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$
(b) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$
(c) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
(d) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{N} = \{0\}$
(e) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

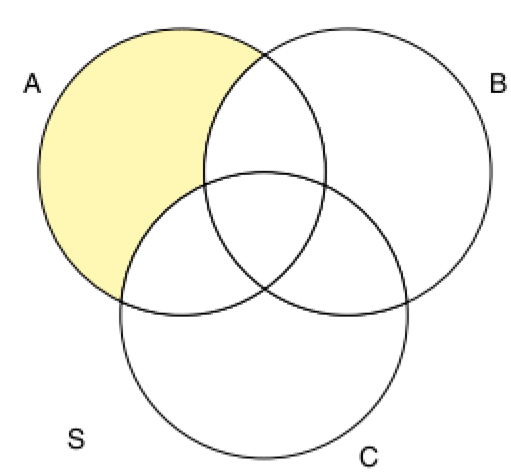
Problemas envolvendo o diagrama de Venn-Euler

12 A parte hachurada no diagrama representa:



(a) $(A \cup C) - B$
(b) $(B \cap C) - A$
(c) $(A \cap B) - C$
(d) $(A \cap C) \cup B$
(e) $(A \cap C) - B$

13 **FGV** A parte assinalada no diagrama representa:



(a) $\overline{(B \cup C)} \cup C$
(b) $\overline{(B \cup C)}$
(c) $\bar{C} \cap \bar{B} \cap \bar{A}$
(d) $A - (B \cup C)$
(e) $A - (A \cap B \cap C)$

Cardinalidade de conjunto

14 De um total de 800 rapazes, 500 gostam de futebol, 200 de cinema e 130 gostam dos dois. Quantos não gostam nem de futebol, nem de cinema?

15 **FGV** Numa universidade com n alunos, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam nas três faculdades, quantos alunos estão matriculados na universidade?

16 **UFP** Foi realizada uma pesquisa para avaliar o consumo de três produtos designados por A, B, C. Todas as pessoas consultadas responderam à pesquisa e os resultados estão indicados no quadro a seguir.

Produto	Número de consumidores
A	25
B	36
C	20
A e B	6
A e C	4
B e C	5
A, B e C	0
Nenhum dos produtos	5

Observação: o consumidor de dois produtos está incluído também como consumidor de cada um desses dois produtos. Com base nesses dados, calcule o número total de pessoas consultadas.

17 **PUC** Em uma empresa, 60% dos funcionários leem a revista A, 80% leem a revista B, e todo funcionário é leitor de pelo menos uma dessas revistas. O percentual de funcionários que leem as duas revistas é:

(a) 20%
(b) 40%
(c) 60%
(d) 75%
(e) 140%

18 **Unirio** Um engenheiro, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de uma fábrica, obteve os seguintes dados:

✓ 28% dos funcionários são mulheres;
✓ $\frac{1}{6}$ dos homens são menores de idade;
✓ 85% dos funcionários são maiores de idade.

Qual é a porcentagem dos menores de idade que são mulheres?

(a) 30%
(b) 28%
(c) 25%
(d) 23%
(e) 20%

Par ordenado e produto cartesiano

19 Dados A = {–1, 0, 1} e B = {–2, 2}, determine os conjuntos A x B e B x A e represente geometricamente.

20 Sendo $(x + 2, 2y - 4) = (8x, 3y - 10)$, determine o valor de x e de y.

21 Dado $A \times B = \{(1,0); (1,1); (1,2)\}$, determine os conjuntos A e B.

22 Sejam os conjuntos A e B, tais que
$A \times B = \{(-1; 0); (2; 0); (-1; 2); (2; 2); (-1; 3); (2; 3)\}$. O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

23 Se n(A) = 3 e n(B) = 2, então $[n(A \times B)]^{n(A \cap B)}$ é, no máximo, igual a:

(a) 1
(b) 6
(c) 12
(d) 18
(e) 36

Álgebra dos conjuntos

24 **FGV** Denotando-se por x' o complemento de um conjunto qualquer x, então, quaisquer que sejam P e Q, o conjunto $[P' \cup (P \cap Q)]$ é igual a:

(a) $P' \cap Q$
(b) $P \cup Q'$
(c) $P \cap Q'$
(d) $P' \cup Q$
(e) $\varnothing$

25 **Vunesp** Numa classe de 30 alunos, 16 alunos gostam de Matemática e 20 de História. O número de alunos dessa classe que gostam de Matemática e de História é:

(a) exatamente 16.
(b) exatamente 10.
(c) no máximo 6.
(d) no mínimo 6.
(e) exatamente 18.

26 **Fuvest** Depois de n dias de férias, um estudante observa que:

1º) choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
2º) quando chove de manhã não chove à tarde;
3º) houve 5 tardes sem chuva;
4º) houve 6 manhãs sem chuva.

Então n é igual a:

(a) 7
(b) 9
(c) 10
(d) 11
(e) 8

Problemas gerais

27 Sejam os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$.
Dadas as afirmativas:

I. $A = B$
II. $B \subset A$
III. $A \cap B = A$
IV. $A - B = \varnothing$

Concluímos que:

(a) todas são falsas.
(b) todas são verdadeiras.
(c) apenas IV é verdadeira.
(d) III e IV são verdadeiras.
(e) II é a única falsa.

28 Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$ calcule (faça o gráfico):
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$;
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$;
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Calcule e faça o gráfico de:
a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $(A \cap C) \cap B$

29 Represente o conjunto $B \times A$, em que $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = [1; 2]$.

30 **FGV** Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sejam $(2m + n; m - 4)$ e $(m + 1; 2n)$ dois pares ordenados iguais. Então, m^n é igual a:

(a) -2
(b) 0
(c) $\frac{1}{2}$
(d) 1
(e) $\sqrt{2}$

31 Represente na reta numerada os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-3}{2}\right\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

32 Determine o número de pares ordenados do produto cartesiano $(A \cup B) \times (A \cap B)$, em que $A = \{1; 3; 4\}$ e $B = \{2; 3; 4; 5\}$ é:
(a) 16
(b) 9
(c) 12
(d) 8
(e) 10

33 **Ufes** As marcas de cerveja mais consumidas em um bar, num certo dia, foram A, B e C. Os garçons constataram que o consumo se deu de acordo com a tabela a seguir.

Produto	Número de consumidores
A	150
B	120
C	80
A e B	60
A e C	40
B e C	20
A, B e C	15
Outras	70

a) Quantos beberam cerveja no bar, nesse dia?
b) Dentre os consumidores de A, B e C, quantos beberam apenas duas dessas marcas?
c) Quantos não consumiram a cerveja C?
d) Quantos não consumiram a marca B nem a marca C?

34 Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A. foi enviada para a fiscalização sanitária.
No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade, 74 foram aprovadas e 26 reprovadas, por conterem um número menor de pílulas que o especificado.
O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes. Determine:
a) quantas caixas foram aprovadas nos dois testes?
b) quantas caixas foram aprovadas em um único teste?
c) quantas caixas aprovadas em pelo menos um teste?

35 **FGV** Em certo ano, ao analisar os dados dos candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso de Graduação em Administração, nas modalidades Administração de Empresas e Administração Pública, concluiu-se que:
* 80% do número total de candidatos optaram pela modalidade Administração de Empresas;
* 70% do número total de candidatos eram do sexo masculino;
* 50% do número de candidatos à modalidade Administração Pública eram do sexo masculino;
* 500 mulheres optaram pela modalidade Administração Pública.

O número de candidatos do sexo masculino à modalidade Administração de Empresas foi:
(a) 4.000
(b) 3.500
(c) 3.000
(d) 1.500
(e) 1.000

36 **PUC** Numa escola de música, 65% das pessoas matriculadas estudam teclado e as restantes estudam violão. Sabe-se que 60% das pessoas matriculadas são do sexo masculino e que as do sexo feminino que estudam violão são apenas 5% do total. Nessas condições, escolhendo-se uma matrícula ao acaso, qual é a probabilidade de ser a de uma pessoa do sexo masculino e estudante de teclado?

(a) $\frac{2}{5}$
(b) $\frac{3}{10}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{5}$
(e) $\frac{1}{10}$

37 **UEL** Dos 30 candidatos ao preenchimento de 4 vagas em certa empresa, sabe-se que 18 são do sexo masculino, 13 são fumantes e 7 são mulheres que não fumam. De quantos modos podem ser selecionados 2 homens e 2 mulheres entre os não fumantes?
(a) 140
(b) 945
(c) 2.380
(d) 3.780
(e) 57.120

38 **ITA** Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, e $A - B = \{\rho \in \mathbb{R}; \rho \in A \text{ e } p \notin B\}$.
Dadas as igualdades:
1. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
2. $(A - B) \times C = (A \times B) - (B \times C)$
3. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
5. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$

Podemos garantir que:
(a) 2 e 4 são verdadeiras.
(b) 1 e 5 são verdadeiras.
(c) 3 e 4 são verdadeiras.
(d) 1 e 4 são verdadeiras.
(e) 1 e 3 são verdadeiras.

39 **UFRN** Se A, B e C são conjuntos tais que:
$n(A - (B \cup C)) = 15$
$n(B - (A \cup C)) = 20$
$n(C - (A \cup B)) = 35$
$n(A \cup B \cup C) = 120$
determine o número de elementos do conjunto
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

TEXTOS COMPLEMENTARES

Teoria dos conjuntos

O raciocínio lógico é formado por sentenças que afirmam fatos. Esses fatos podem ser verdadeiros ou falsos (V ou F).

Para formarmos novas sentenças, temos de utilizar operadores lógicos e regras de sintaxe.

Observe a lista dos operadores lógicos e os seus respectivos símbolos:

a) e .... $\wedge$
b) ou (no sentido inclusivo) .... $\vee$
c) não .... –
d) Se .... então (implicação) .... $\rightarrow$
e) Se e somente se (bi-implicação) .... $\leftrightarrow$
f) Para algum (existe) .... $\exists$
g) Para todo .... $\forall$

O papel da teoria dos conjuntos é representar essas ideias. Leia alguns exemplos:

1. Considere o conjunto A = {x | x possui a propriedade p}. Para aqueles elementos que não possuem a propriedade p, ou seja, que negam esse fato, temos o seguinte conjunto: B = {x | x não possui a propriedade p}.

   Esse conjunto B é o complementar de A, ou seja, ($B = \overline{A}$).

2. Sejam A e B conjuntos, tais que $A \subset B$, ou seja, todos os elementos de A também são elementos de B. Podemos entender que todo elemento que possui a propriedade de A também tem a propriedade de B. Simbolicamente: se $x \in A$, então $x \in B$ ou x possui a propriedade de A $\rightarrow$ x possui a propriedade de B.
   - $A \subset B$ significa então que: **se** x é um elemento que possui a propriedade A, **então** x é um elemento que possui a propriedade B.
   - Ter a propriedade de A acarreta ter a propriedade de B.
   - Ter a propriedade de A é condição suficiente para ter a propriedade de B.
   - Ter a propriedade de B é condição necessária para quem tem a propriedade de A.
   - (propriedade de A) $\subset$ (propriedade de B).

3. Os conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Utilizando a ideia do item 2, temos que possuir a propriedade de A é condição necessária e suficiente para ter a propriedade de B. x possui a propriedade de A $\leftrightarrow$ x possui a propriedade de B.

Noções de lógica matemática

Entenda-se raciocínio como uma modalidade especial do ato de pensar, ou seja, de obter conclusões.

Chamamos de proposição toda oração afirmativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. As proposições são constituídas da seguinte maneira:

1ª) A oração possui sujeito e predicado.
2ª) São afirmativas.
3ª) Princípio do terceiro excluído: toda proposição possui um dos dois valores lógicos: verdadeira (V) ou falsa (F) excluindo qualquer outra possibilidade. As proposições podem ser classificadas como simples ou compostas.

São exemplos de proposições simples:

a) 2 é um número par.
b) 5 > 2.
c) o retângulo é um quadrado.
d) a Lua é maior que a Terra.

As proposições compostas podem ser construídas a partir do uso de conectivos.

Negação	~	não
Disjunção	$\vee$	ou
Conjunção	$\wedge$	e
Condicional	$\rightarrow$	se ... então
Bicondicional	$\leftrightarrow$	se e somente se

São exemplos de proposições compostas:

a) Kant nasceu em 1724 e Newton morreu em 1727.
b) Maria toca piano ou Pedro toma banho.
c) José é eleitor se, e somente se, vota.
d) Se João é paulista, então é brasileiro.

Sabemos que as proposições assumem valores V ou F. Devemos ter um critério para associar esses valores às proposições simples e compostas. Por meio das chamadas tabelas-verdades, organizamos esses procedimentos.

Observe as seguintes tabelas-verdades:

p	q
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dizemos que duas proposições são equivalentes quando possuem as tabelas-verdades iguais.

Exemplos:

a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Vamos construir as duas tabelas-verdades e comparar.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

colunas iguais

b) Construir a tabela-verdade da proposição $[\sim(p \to q)] \vee q$

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	$[\sim(p \to q)] \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

c) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

colunas iguais

Atividades

1 Sejam p, q e r três proposições, tais que p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira. Considere as proposições compostas a seguir e indique o valor verdade de cada uma delas.

a) $p \to q$
b) $q \to r$
c) $(p \vee \sim r) \vee q$
d) $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow \sim q$
e) $p \to (q \to p)$

2 Sejam p e q duas proposições, a negação de $p \wedge q$ equivale a:

(a) $\sim p \vee \sim q$
(b) $\sim p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \vee q$
(d) $\sim p \wedge q$
(e) $p \wedge \sim q$

3 A negação da proposição $X \in (A \cup B)$ é:

(a) $X \notin (A \cap B)$
(b) $X \notin A$ ou $X \notin B$
(c) $X \notin A$ e $X \in B$
(d) $X \in A$ ou $X \notin B$
(e) $X \notin A$ e $X \notin B$

4 Construa a tabela-verdade das seguintes proposições.

a) $\sim(p \vee q) \wedge r$
b) $(p \wedge q) \to r$
c) $(\sim p \vee q) \to r$

RESUMINDO

A teoria dos conjuntos possui como conceitos primitivos a noção de conjunto, elemento e relação de pertinência.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \to x \in B)$$

Um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

ATENÇÃO $\varnothing \subset A; \forall A$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$A - B = A \cap \overline{B}$

QUER SABER MAIS?

SITES

- Biografia de Georg Cantor
<www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=41>.

Exercícios complementares

Pertinência e inclusão

1 **UFF** Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$, considere as afirmativas:

I. $\{0\} \in P$
II. $\{0\} \subset P$
III. $\varnothing \in P$

Com relação a essas afirmativas, conclui-se que:

(a) todas são verdadeiras.
(b) apenas a I é verdadeira.
(c) apenas a II é verdadeira.
(d) apenas a III é verdadeira.
(e) todas são falsas.

2 Determine todos os subconjuntos do conjunto $x = \{0, 5, 10\}$.

3 Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{R} \mid 2 < n < 40$, n é múltiplo de $3\}$. O número de elementos de H é:

(a) 12
(b) 14
(c) 7
(d) 13
(e) 6

4 Se um conjunto Z tem apenas 32 subconjuntos, quantos elementos tem esse conjunto Z?

5 Considere o conjunto $A = \{\{2; 6\}; 0; \{0\}; \varnothing\}$. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

- [ ] $2 \in A$
- [ ] $6 \in A$
- [ ] $\varnothing \in A$
- [ ] $\varnothing \subset A$
- [ ] $\{6\} \in A$
- [ ] $\{0\} \subset A$
- [ ] $\{2; 6\} \subset A$
- [ ] $\{\{2;\ 6\}\} \subset A$
- [ ] $\{2; 0; 6\} \subset A$

6 Sendo $A = \{\varnothing; a; \{b\}\}$ com $\{b\} \neq a \neq b \neq \varnothing$, então:

(a) $\{\varnothing; \{b\}\} \subset A$
(b) $\{\varnothing; b\} \subset A$
(c) $\{\varnothing; \{a\}\} \subset A$
(d) $\{a; b\} \subset A$
(e) $\{\{a\}; \{b\}\} \subset A$

Operações entre conjuntos

7 Dados os conjuntos $A = \{1; 2; 3; -1\}$, $B = \{-1; 2; 0; 1\}$ e $C = \{0; 2; 3; 4\}$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A - B$
c) $B - A$
d) $A \cap C$
e) $A \cap B \cap C$
f) $(A \cap B) - C$
g) $A \cup B$
h) $A \cap (B - C)$

8 **FGV** Dados os conjuntos $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; c; d; e\}$, $C = \{a; c; f\}$, determine:

$[(A - B) \cup (B - C) \cup (A \cap B)] \cap [(A \cap C) \cup (B \cap A \cap C)]$

9 Sendo $A = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\ \}$ e $B = \{\ y \in \mathbb{N} \mid 7 < y \leq 12\}$, determine (nomeando cada um de seus elementos e colocando-os entre chaves):

a) A
b) B
c) $A \cap B$
d) $A \cup B$
e) $A - B$

10 Dados os conjuntos: $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; c; d\}$ e $C = \{a; c; d; e\}$, o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$ é:

(a) $\{a; b; c; e\}$
(b) $\{a; c; e\}$
(c) A
(d) $\{b; d; e\}$
(e) $\{b; c; d; e\}$

11 Sendo $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{0, 9, 10, 90\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$, $D = \{9, 10\}$ e $E = \{5, 7, 10, 90\}$, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cup B \cup D$
c) $D \cup E$
d) $C \cup D$

12 **PUC** Considere os seguintes subconjuntos de números naturais:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$P = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 20\}$
$A = \{x \in P \mid x$ é par$\}$
$B = \{x \in P \mid x$ é divisor de $48\}$
$C = \{x \in P \mid x$ é múltiplo de $5\}$

O número de elementos do conjunto $(A - B) \cap C$ é:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) 6

13 **UFSM** Dados os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 9\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$,

o produto dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é igual a:

(a) 1
(b) 3
(c) 15
(d) 35
(e) 105

14 **UFBA** Considerando-se os conjuntos:

$A = \{\ x \in \mathbb{N},\ x < 4\}$,
$B = \{\ x \in \mathbb{Z},\ 2x + 3 = 7\}$,
$C = \{\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5x + 6 = 0\}$,

é verdade que:

01 $A \cup B = A$
02 $A \cap C = \{2, 3\}$
04 $A - B = \{0, 1, 3\}$
08 $A \cup C = \mathbb{R}$
16 $(B \cap C) \subset A$
32 $C \cup A = \mathbb{Z}^*_-$

Soma = ____

15 Sendo $A = \{2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 3, 7, 8, 10\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, faça o diagrama das reuniões a seguir, hachurando as regiões correspondentes:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$

16 **PUC** Considerando $= \{0;\ 1;\ 2;\ 3\ ...\}$ e, ainda,

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{x} = n;\ n \in \mathbb{N}\right\},\ B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 4 < 2x + 9\},$$

podemos afirmar que:

(a) $A \cup B$ tem 8 elementos.
(b) $A \cup B = A$.
(c) $A \cap B = A$.
(d) $A \cap B$ possui 4 elementos.
(e) n.d.a.

17 **UFSM** Dados os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é impar}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \le 9\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 5\}$,
o produto dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é igual a:

(a) 1
(b) 3
(c) 15
(d) 30
(e) 105

18 Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes afirmações.

( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$
( ) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}_+$
( ) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+$
( ) $\mathbb{Q}_+ \supset \mathbb{N}^*$
( ) $\frac{8}{4} \subset \mathbb{N}$

19 Sendo $A = [2; 7]$ e $B = [-3; 5]$, indicar a sentença falsa.

(a) $A \cup B = [-3; 7]$
(b) $A \cap B = [2; 5]$
(c) $A - B =]5; 7]$
(d) $B - A = [-3; 2[$
(e) n.d.a.

Par ordenado e produto cartesiano

20 Classifique em V ou F.

( ) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$
( ) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}^*$
( ) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{R} = \varnothing$
( ) $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^*$

21 Complete as sentenças a seguir, de forma que as torne todas verdadeiras:

a) {_, _, 5, 4} ∪ {_, 7, 2, _} = {1, _, _, _, 6, _}
b) {2, 9, _ } ∪ {_, _, _, 7} = {_, 4, 5, _, 9, 10, 90}

22 **Udesc** Seja A o conjunto dos naturais menores que 10 e seja B outro conjunto, tal que $A \cup B = A$, $A \cap B$ é o conjunto dos pares menores que 10.

Então, o conjunto B é:

(a) vazio.
(b) $A \cap B$.
(c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$.
(d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$.
(e) qualquer conjunto de números pares que contenha $A \cap B$.

23 **Uece** Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros,

$$I = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ 0 \le \frac{2(x+4)}{3} \le 8\} \text{ e}$$

$J = \{x \in \mathbb{Z};\ (x-2)^2 \ge 4\}$.

O número de elementos do conjunto $I \cap J$ é:

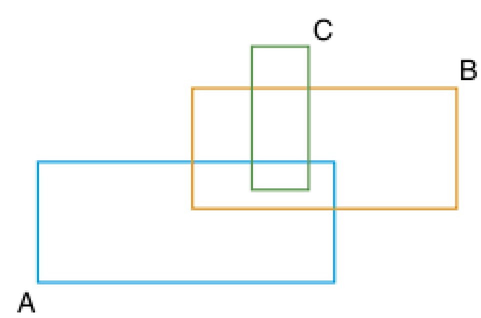
(a) 8
(b) 9
(c) 10
(d) 11

24 Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes afirmações.

( ) Se $A \subset B$, então $A \cup B = A$.
( ) Se $A = B$, então $A \cup B = \varnothing$.
( ) Se $2 \in A$ e $2 \notin B$, então $2 \notin A \cup B$.
( ) Se $5 \in A \cup B$, então $5 \in A$ e $5 \in B$.
( ) Se $A \cup B \cup C \ne \varnothing$, então $A \ne \varnothing$, $B \ne \varnothing$ e $C \ne \varnothing$.

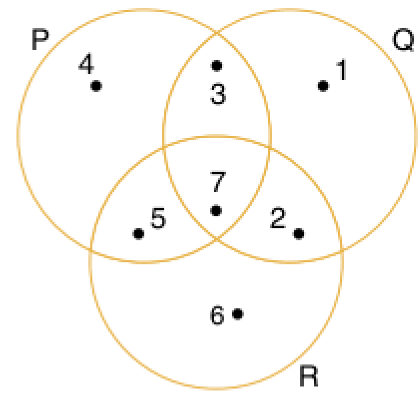
Problemas envolvendo o diagrama de Venn-Euler

25 Dado o diagrama a seguir, apresentar por meio de hachuras os conjuntos indicados.



a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $A - C$
d) $C - A$
e) $(A \cap B) - C$
f) $(A - B) - C$
g) $(B - C) \cap A$

26 **UFF** Considere os conjuntos representados abaixo.



Represente, enumerando seus elementos, os conjuntos:

a) P, Q e R
b) $(P \cap Q) - R$
c) $(P \cup Q) \cap R$
d) $(P \cup R) - P$
e) $(Q \cap R) \cup P$

Cardinalidade de conjunto

27 **Unirio** Considere três conjuntos A, B e C, tais que: $n(A) = 28$, $n(B) = 21$, $n(C) = 20$, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Assim sendo, o valor de $n((A \cup B) \cap C)$ é:

(a) 3
(b) 10
(c) 20
(d) 21
(e) 24

28 Em uma escola de 360 alunos, onde as únicas matérias dadas são Matemática e Português, 240 alunos estudam Matemática e 180 alunos estudam Português. O número de alunos que estudam Matemática e Português é:

(a) 120
(b) 60
(c) 90
(d) 180
(e) 200

29 Em uma indústria, 120 operários trabalham de manhã, 130 trabalham à tarde, 80 trabalham à noite, 60 trabalham de manhã e tarde, 50 trabalham de manhã e à noite, 40 trabalham à tarde e à noite e 20 trabalham nos três períodos. Assim:

(a) 150 operários trabalham em 2 períodos.
(b) há 150 operários na indústria.
(c) 300 operários não trabalham à tarde.
(d) há 30 operários que trabalham só de manhã.
(e) n.d.a.

30 Em uma escola de 500 alunos, 300 estudam Matemática, 190 estudam Física e 120 estudam ambas as matérias. Pede-se para determinar o número de alunos na escola que:

a) estudam Matemática, mas não Física.
b) estudam Física, mas não Matemática.
c) não estudam nem Matemática, nem Física.
d) estudam Matemática ou Física.

Par ordenado e produto cartesiano

31 Sendo $A = \left\{1, 2, \frac{3}{5}\right\}$ e $B = \{-1, 0\}$, determine:

a) A x B b) n (A x A) c) n (B x B)

32 **Ufes** Se $A = \{-2, 3, m, 8, 15\}$ e $B = \{3, 5, n, 10, 13\}$ são subconjuntos de $\mathbb{Z}$ (números inteiros), e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então:

(a) $n - m \in A$
(b) $n + m \in B$
(c) $m - n \in A \cup B$
(d) $mn \in B$
(e) $\{m + n, mn\} \subset A$

33 Determine A x B e A x A, sendo:

$A = \{1, 2, -4\}$ e $B = \left\{\frac{2}{3}, 8\right\}$

Álgebra dos conjuntos

34 **Mackenzie** Se A e B são subconjuntos de U e A' e B' seus respectivos complementares em U, então $(A \cap B) \cup (A \cap B')$ é igual a:

(a) A'
(b) B'
(c) B
(d) A
(e) A' – B'

35 **Cesgranrio** Se A e B são conjuntos, $A - (A - B)$ é igual a:

(a) A
(b) B
(c) $A - B$
(d) $A \cup B$
(e) $A \cap B$

36 **ITA** Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A - B)' \cap (B \cup A')' = \varnothing$
II. $(A - B')' = B - A'$
III. $[(A' - B) \cap (B - A)]' = A$

Sobre essas afirmações, podemos garantir que:

(a) apenas a afirmação I é verdadeira.
(b) apenas a afirmação II é verdadeira.
(c) apenas a afirmação III é verdadeira.
(d) todas as afirmações são verdadeiras.
(e) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

37 Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Demonstrar as seguintes expressões sem utilizar o diagrama de Venn-Euler.

a) $A - B = (A \cup B) - B$
b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
c) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
d) $\overline{(A - B)} = \overline{A} \cup B$
e) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
f) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

38 Sejam U um conjunto não vazio e $A \subset U$ e $B \subset U$, prove que:

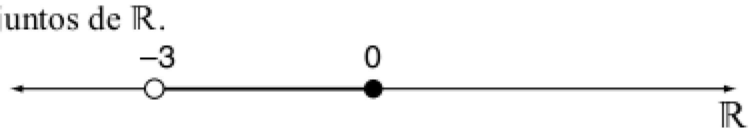
I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.
II. $B - A^c = B \cap A$.

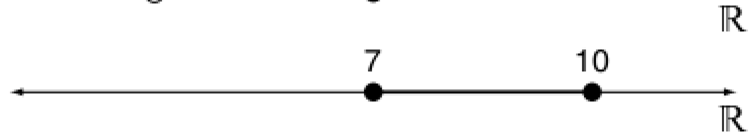
Problemas gerais

39 Considere os intervalos $A = [-1; 5[$ e $B =]0; 3]$. Determine os seguintes conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $A - B$
c) $A \cap B$

40 Represente em linguagem simbólica os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a)


b)


41 **Fuvest** Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas A, B e C de um determinado produto apresentou os seguintes resultados:

A – 48% A e B – 18%
B – 45% B e C – 25%
C – 50% A e C – 15%
nenhuma das 3 – 5%

a) Qual é a porcentagem dos entrevistados que consomem as três marcas A, B e C?
b) Qual é a porcentagem dos entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas?

42 Os conjuntos a seguir estão apresentados por uma propriedade característica de seus elementos.
Nomeie cada um de seus elementos colocando-os entre chaves.
a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 8\}$
b) $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq 10\}$
c) $Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 5 \leq z < 12\}$
d) $W = \{w \in \mathbb{N}^* \mid w \leq 5\}$

43 Monte um conjunto A e um conjunto B, sabendo-se que A tem apenas 2 elementos, que B tem pelo menos 3 elementos e que $(A \cup B) \subset H$, sendo $H = \{1, 3, 4, 8, 16, 24, 40\}$.

44 **Mackenzie** A e B são dois conjuntos, tais que A – B tem 30 elementos, $A \cap B$ tem 10 elementos e $A \cup B$ tem 48 elementos. Então, o número de elementos de B – A é:
(a) 8
(b) 10
(c) 12
(d) 18
(e) 22

45 **UFF** Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P.
Esquematize um diagrama que representa esses conjuntos.

46 **Mackenzie** Num grupo constituído de K pessoas, das quais 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 20% dos homens jogam xadrez e 80% das mulheres não jogam xadrez, então o valor de K é:
(a) 62
(b) 70
(c) 78
(d) 84
(e) 90

47 **Unirio** Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas “A”, “B” e “C”, descobriu-se que 81 pessoas leem, pelo menos, uma das revistas; 61 pessoas leem somente uma delas e 17 pessoas leem duas das três revistas. Assim sendo, o número de pessoas mais bem informadas dentre as 81 é:
(a) 3
(b) 5
(c) 12
(d) 29
(e) 37

48 **FGV** Dados dois conjuntos não vazios A e B, se ocorrer $A \cup B = A$, podemos afirmar que:
(a) $A \subset B$.
(b) isso nunca pode acontecer.
(c) B é um subconjunto de A.
(d) B é um conjunto unitário.
(e) A é um subconjunto de B.

49 **Mackenzie** Se $\{-1; 2x+y; 2; 3; 1\} = \{2; 4; x-y; 1; 3\}$, então:
(a) $x > y$
(b) $x < y$
(c) $x = y$
(d) $2x < y$
(e) $x > 2y$

50 **ITA** Sejam E, F, G e H subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Considere as afirmações:
I. Se $E \times G \subset F \times H$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
II. Se $E \times G \subset F \times H$, então $E \times G \cup F \times H = F \times H$.
III. Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.
Então:
(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

51 **UFSC** Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).
01 Sejam x e y o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 15 e 18, respectivamente. Então, o produto $xy = 270$.
02 Se $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, então, A é equivalente a $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < x < 7\}$.
04 Numa divisão, cujo resto não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é $(d - r)$, sendo d o divisor e r o resto.
08 O conjunto solução da inequação $(x - 3)/(x - 2) \leq 1$, para $x \neq 2$, é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$.
16 Sejam A e B dois conjuntos finitos disjuntos. Então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, em que n(X) representa o número de elementos de um conjunto X.

Soma = $\boxed{}$

52 **ITA** Seja: $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n!} + \text{sen}\left(\frac{n!}{6}\right); n \in \mathbb{N}\right\}$.

Qual conjunto a seguir é tal que sua interseção com A dá o próprio A?
(a) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(b) $(-\infty, -2]$
(c) $[-2, 2]$
(d) $[-2, 0]$
(e) $[0, 2)$

53 **Mackenzie** Leia e responda:
I. Se $\{5; 7\} \subset A$ e $A \subset \{5; 6; 7; 8\}$, então os possíveis conjuntos A são em número de 4.
II. Supondo A e B conjuntos quaisquer, então sempre temos $(A \cap \varnothing) \cup (B \cup \varnothing) = A \cup B$.
III. A soma de dois números irracionais pode ser racional.
Das afirmações anteriores:
(a) I, II e III são verdadeiras.
(b) apenas I e II são verdadeiras.
(c) apenas III é verdadeira.
(d) apenas II e III são verdadeiras.
(e) apenas I e III são verdadeiras.

54 Leia com atenção:
– Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de adição quando a soma de dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A.
$x \in A$ e $y \in A \rightarrow x + y \in A; \forall x \; \forall y$

– Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de subtração quando a diferença entre dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A.
$x \in A$ e $y \in A \rightarrow x - y \in A; \forall x \; \forall y$

– Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de multiplicação quando o produto entre dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A.

$x \in A$ e $y \in A \rightarrow x \cdot y \in A; \forall x\ \forall y$

Dados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{N}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}$; d) $\mathbb{R}_+$; e) $\mathbb{R}_-$; f) $\mathbb{Q}^*$; g) $\mathbb{R}^*$

a) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à soma?

b) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à subtração?

c) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à multiplicação?

55 Em um encontro de dirigentes esportivos, foi aprovada a realização de um torneio A de futebol, que aconteceu, pela primeira vez, 2 anos depois e, posteriormente, a cada 9 anos. No mesmo encontro, foi aprovada a realização de um torneio B, que ocorreu pela primeira vez somente 9 anos depois, acontecendo a cada 7 anos. Dessa forma, a partir da aprovação, os dois torneios ocorreram, pela primeira vez no mesmo ano, após:

(a) 50 anos.
(b) 55 anos
(c) 58 anos.
(d) 60 anos.
(e) 65 anos.

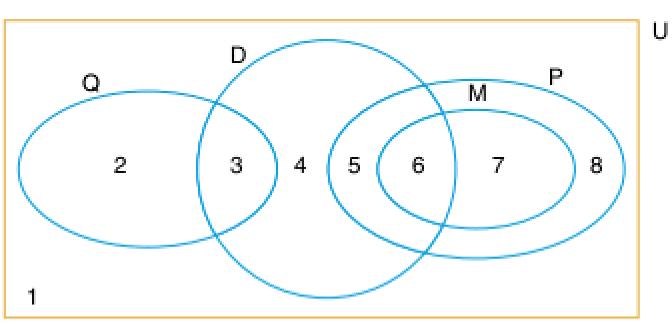
56 **Ibmec-SP** No diagrama a seguir, U representa o conjunto de todos os alunos de uma escola. Estão representados os seguintes subconjuntos de U:

Q: alunos que gostam de quiabo;

D: alunos com mais de 16 anos de idade;

P: alunos que gostam do professor Pedro;

M: alunos que gostam de Matemática.



Em todas as regiões do diagrama, identificadas com um número de 1 a 8, há pelo menos 1 aluno representado. Então, é correto concluir que:

(a) se um aluno gosta de quiabo, então ele não tem mais do que 16 anos.
(b) pelo menos um aluno que gosta de Matemática tem mais do que 16 anos e gosta de quiabo.
(c) se um aluno gosta do professor Pedro, então ele gosta de Matemática.
(d) todo aluno que gosta de Matemática e tem mais do que 16 anos gosta do professor Pedro.
(e) se um aluno com mais de 16 anos não gosta do professor Pedro, então ele não gosta de quiabo.

57 Um locutor de rádio, durante um fim de tarde, fez a seguinte afirmação:

"Sempre que chove em São Paulo, o trânsito fica complicado e as pessoas chegam mais tarde em casa".

Supondo verdadeira a afirmação do locutor, pode-se concluir a partir dela que, necessariamente:

(a) se o trânsito está complicado em São Paulo, então está chovendo.
(b) se as pessoas de São Paulo estão chegando mais tarde em casa, então o trânsito está complicado.
(c) se as pessoas de São Paulo estão chegando mais tarde em casa, então está chovendo.
(d) se o tempo em São Paulo está bom, então o trânsito não está complicado.
(e) se o trânsito em São Paulo não está complicado, então o tempo está bom.

58 Considere os três enunciados a seguir.

I. "Numa democracia, o direito de o cidadão se proteger não pode ser proibido".

II. "Ter uma arma é uma proteção para o cidadão".

III. "Liliput é uma democracia".

Suponha que, em Liliput, decidiu-se que os cidadãos não podem ter armas. Dessa forma, dos enunciados anteriores:

(a) necessariamente I e II são verdadeiros e III é falso.
(b) necessariamente I e III são verdadeiros e II é falso.
(c) necessariamente II e III são verdadeiros e I é falso.
(d) no máximo dois deles são verdadeiros.
(e) todos podem ser simultaneamente verdadeiros.

59 Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, então é verdade que:

(a) $A \neq B \Rightarrow A \subset C$
(b) $A \neq B \Rightarrow A \not\subset C$
(c) $(A \cap B) \subset (B - A)$
(d) $(A \cap B) \cup (B - A) = B$
(e) $A = B \Rightarrow A \cap B \neq A \cup B$

60 Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{1; 2; \{1; 2\}\}$, $B = \{\{1\}; 2\}$ e $C = \{1; \{1\}; \{2\}\}$

Assinale a alternativa falsa.

(a) $A \cap B = \{2\}$
(b) $B \cap C = \{\{1\}\}$
(c) $B - C = A \cap B$
(d) $B \subset A$
(e) $A \cap P(A) = \{\{1; 2\}\}$, em que P(A) é o conjunto dos subconjuntos de A.

61 Dados M, N e P, subconjuntos não vazios de E, e as afirmações:

I. $M \cup N = M \Leftrightarrow N \subset M$

II. $M \cap N = M \Leftrightarrow M \subset N$

III. $(P \subset M \text{ e } P \subset N) \Leftrightarrow P \subset (M \cap N)$

IV. $M \subset N \Leftrightarrow M \cap \complement_E^N = \varnothing$

V. $M \subset N \Leftrightarrow N \cup \complement_E^M = E$

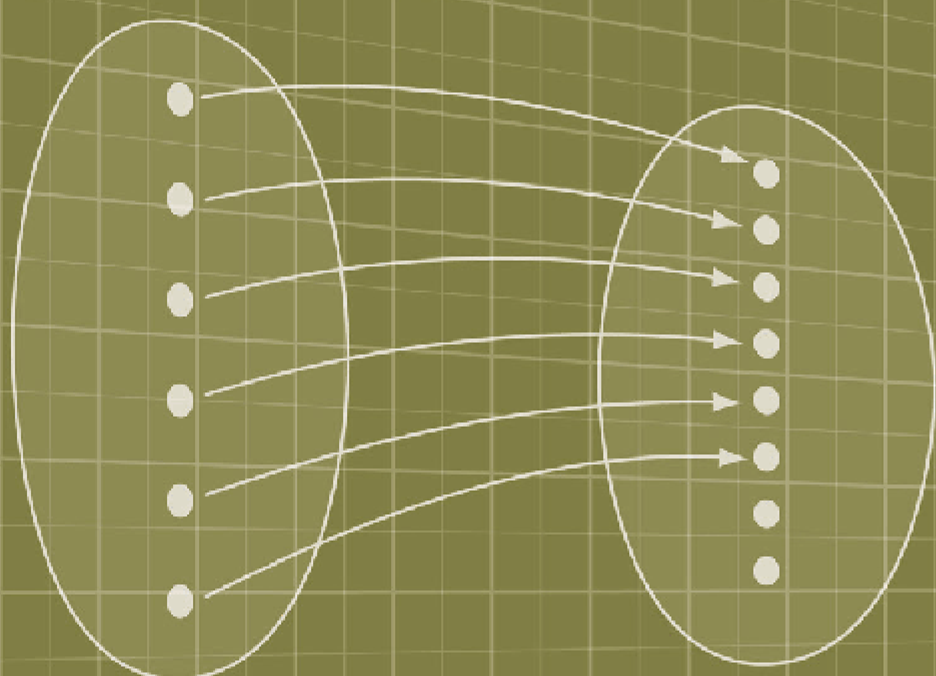
Então, o número de afirmações corretas é:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

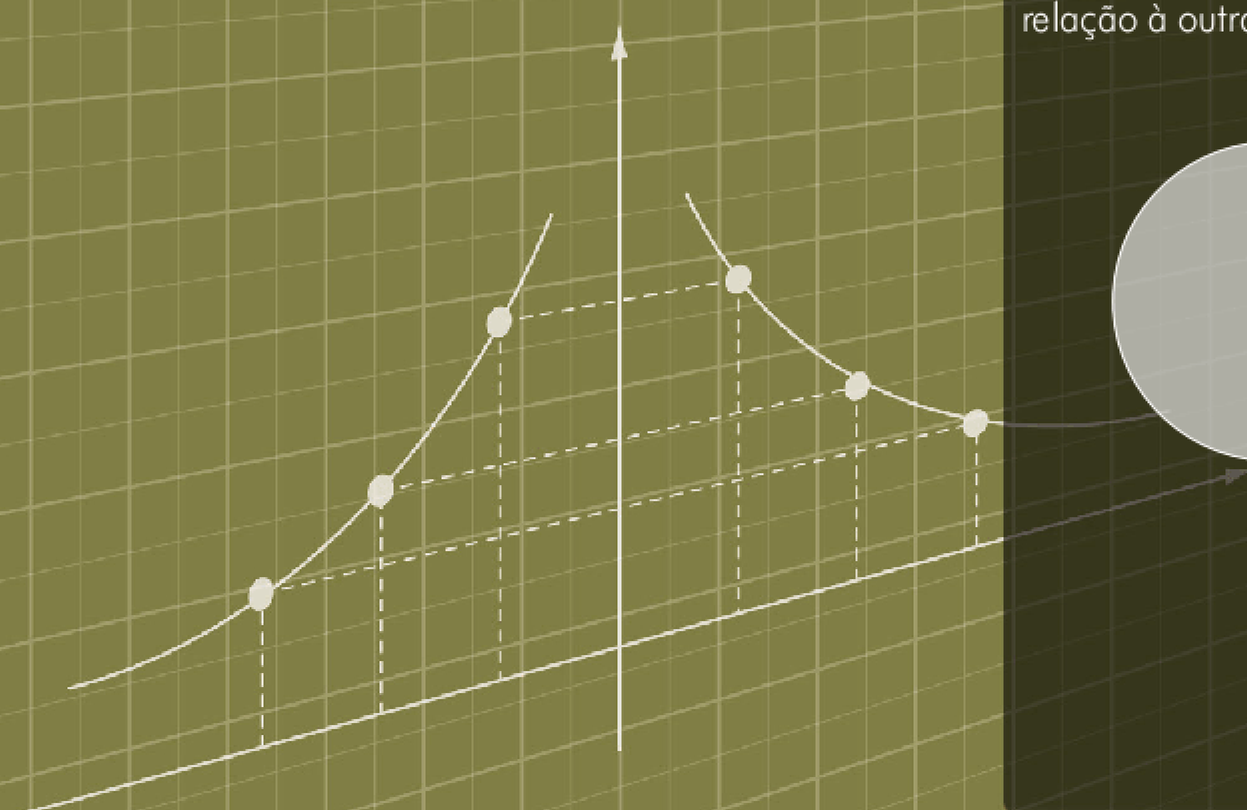
Relações e funções

2

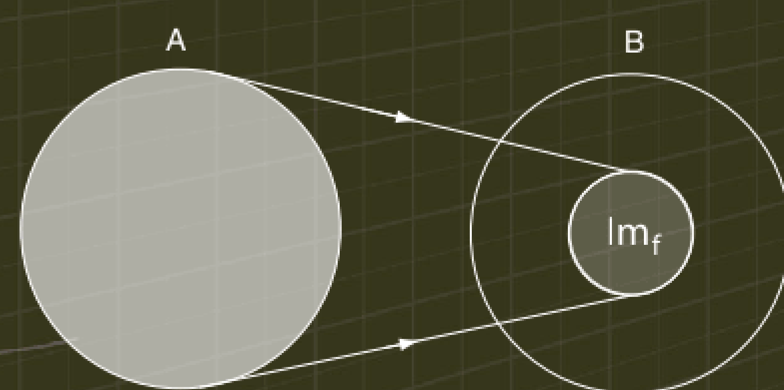
FRENTE 1



Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716.



Gottfried Leibniz nasceu na Alemanha e foi um célebre filósofo, cientista, matemático e diplomata. Atribui-se a ele a criação do termo *função* (1694). Em muitas relações, bastante comuns, envolvendo quantidades variáveis, o valor de uma delas depende do valor da outra. O termo *função* serve para descrever a dependência de uma grandeza em relação à outra. Simbolicamente:



$f: A \to B$ e $f(x) = y$

A: Domínio

B: Contradomínio

Im_f: Conjunto-imagem

Relações

No final do capítulo anterior, você aprendeu o conceito de par ordenado e produto cartesiano. Relembre que o par ordenado é um conjunto que possui dois elementos que respeitam uma ordem e o produto cartesiano é um conjunto de pares ordenados em que o 1º elemento é proveniente de um conjunto A e o 2º elemento de um conjunto B.

Observe o exemplo: A = {1; 2; 3} e B = {2; 4; 6; 8}, pode-se representar A x B pelo gráfico cartesiano ou pelo diagrama de flechas:

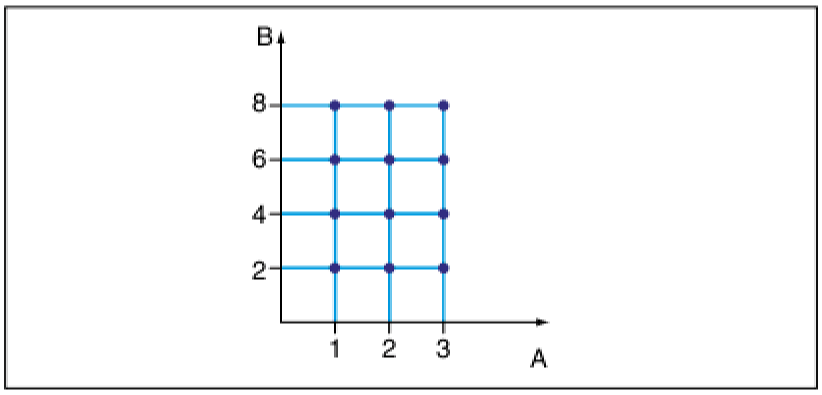


Fig. 1 Gráfico cartesiano.

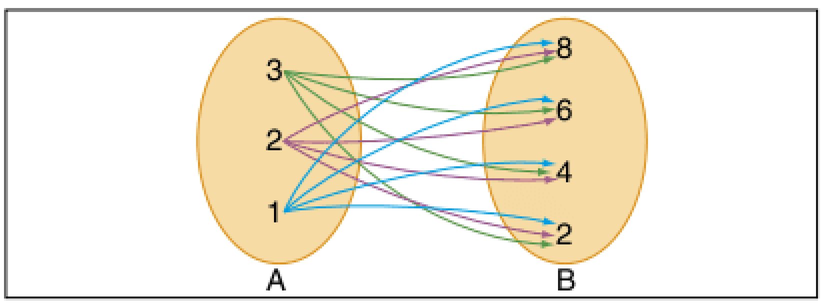


Fig. 2 Diagrama de flechas.

Assim, A x B possui 12 elementos. Dentre esses 12 elementos, vamos, primeiramente, escolher 5 aleatoriamente: (2; 2), (3; 4), (3; 8), (2; 4) e (1; 8). Esses 5 pares ordenados constituem um subconjunto de A x B chamado de relação, assim:

$R_1 = \{(2; 2), (3; 4), (3; 8), (2; 4), (1; 8)\}$ $(R_1 \subset A \times B)$

Vamos agora estabelecer uma lei para a formação dos elementos, observe o exemplo:

$$R_2 = \{(x; y) \in AxB \mid y = 2x\}$$

Fazendo a listagem: $R_2 = \{(1; 2); (2; 4),(3; 6)\}$.

Observe a representação no gráfico cartesiano a seguir.

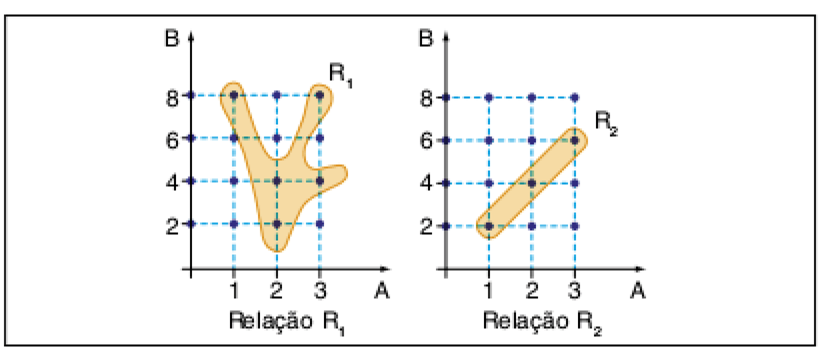


Fig. 3 Gráfico das relações.

ATENÇÃO!

Relação é um conjunto de pares ordenados tomados aleatoriamente ou por meio de uma lei de formação entre os elementos desses pares ordenados.

Não se esqueça de que R^2 significa R x R. São todos os pontos do plano cartesiano.

Funções

Com base em exemplos simples do cotidiano, incentiva-se a construção do conceito de função; posteriormente, com os conceitos estabelecidos, vai-se para a parte formal das definições. Observe:

a) Em uma distribuição de presentes para um grupo de três crianças é óbvio que cada presente será para uma única criança, observe:

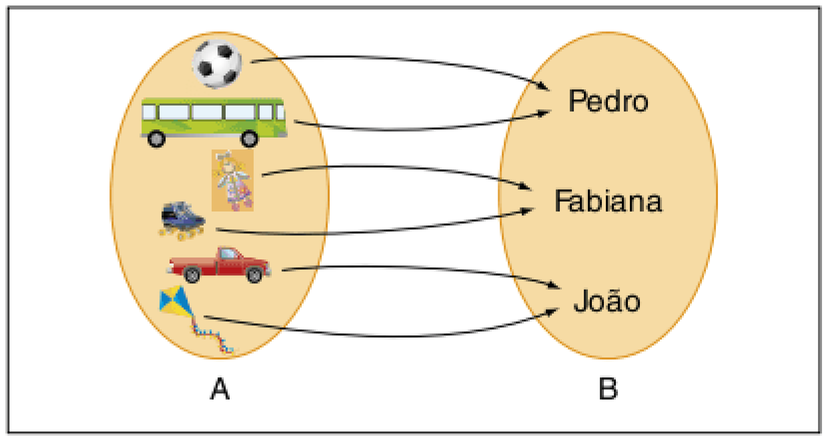


Fig. 4 Distribuição dos brinquedos.

b) Em um processo de contar objetos, o conceito de função aparece do modo mais natural.
Responda quantos símbolos há abaixo:

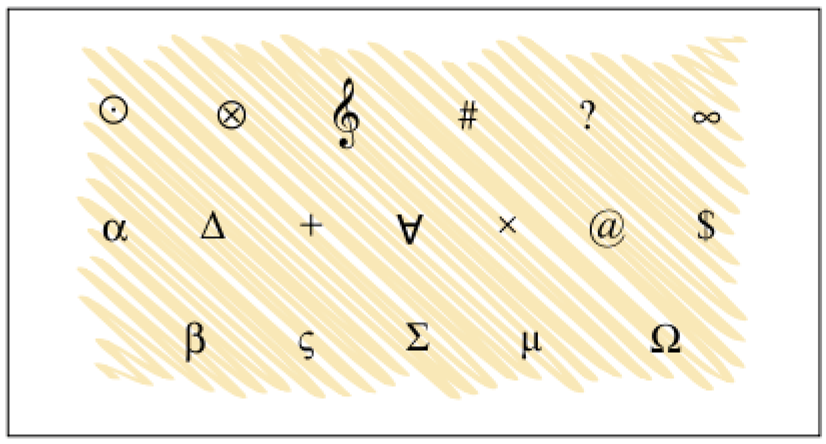


Fig. 5 Símbolos.

Analisando sua resposta, perceba que você associou cada símbolo a um número natural. Existem dezoito símbolos na figura 5; caso contrário, você deve ter cometido um dos seguintes erros:

- encontrou menos do que 18 símbolos: você não contou todos os elementos;
- encontrou mais do que 18 símbolos: você contou algum símbolo mais de uma vez.

A contagem realizada é um tipo de função. Asssocia-se cada símbolo a um número natural. Observe o diagrama de flechas:

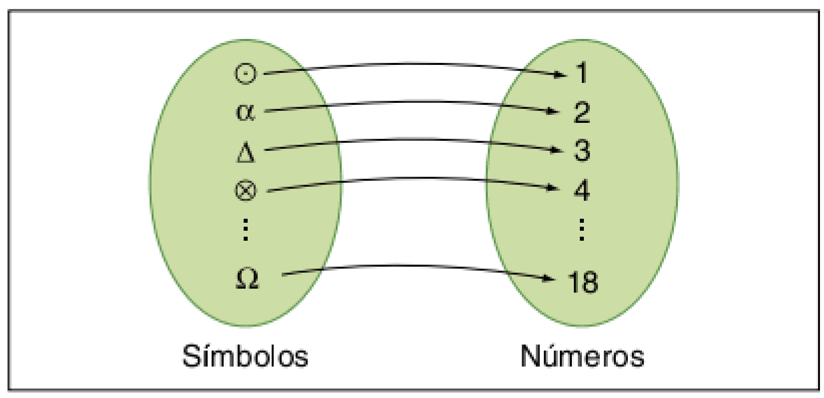


Fig. 6 Correspondência dos símbolos e números.

Define-se f a função da figura 6. Estamos associando, por exemplo, ⊙ ao número 1, ou simbolicamente f (⊙) = 1. A função f pode ser representada por uma tabela.

f: (símbolos)	→	{números}
⊙	→	1
α	→	2
Δ	→	3
⊗	→	4
	...	
Ω	→	18

Tab. 1 Símbolos e números.

c) Associação de um grupo de pessoas aos seus times prediletos:

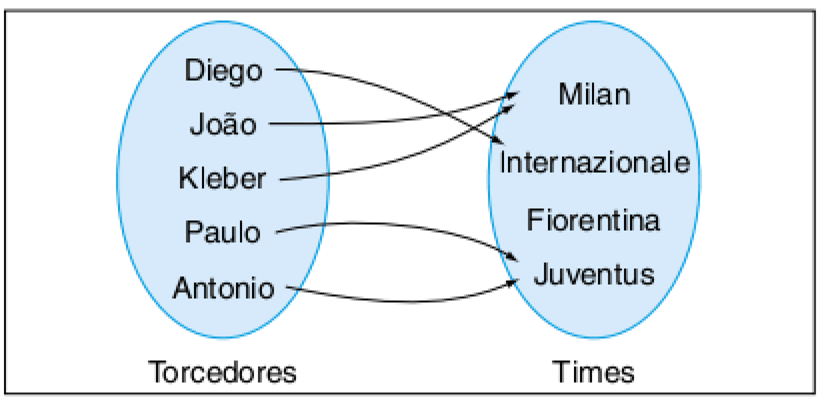


Fig. 7 Diagrama torcedores x times.

No exemplo a, cada brinquedo foi associado a uma única criança. No exemplo b, cada símbolo foi associado a um único número, e, finalmente, no exemplo c, também foi associado cada torcedor a um único time, mas alguns torcedores diferentes torcem para o mesmo time.

ATENÇÃO!

Qualquer que seja o elemento de um conjunto A, iremos associá-lo a um único elemento de um conjunto B.

Definição de função

Uma relação recebe o nome de função se, e somente se, para todo elemento de A, existe um único elemento associado em B.

Simbolicamente, tem-se:

$$\forall x \in A, \exists \text{ um único } y \in B$$

Conjunto A é chamado de domínio e B, o contradomínio. Dessa definição, deve-se considerar uma função como uma tríade formada:

- por domínio;
- por contradomínio;
- pela lei que transforma x em y.

Observe o diagrama a seguir.

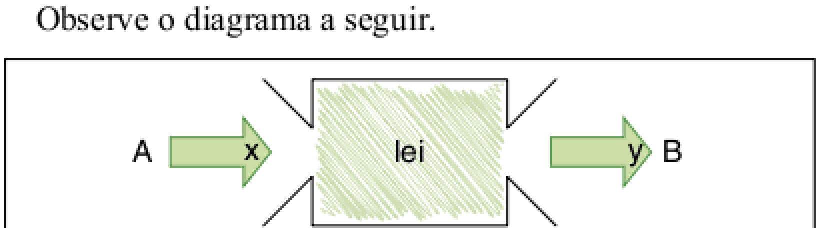
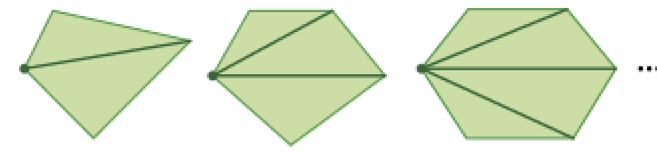


Fig. 8 Esquema de uma função.

Exercícios resolvidos

1 Observe a sequência de polígonos convexos e o número de diagonais que partem de cada vértice. Estabeleça uma função entre os elementos.



Resolução:

A observação entre o número de lados e o número de diagonais que partem de cada vértice segue um padrão sugerido pela tabela a seguir.

Número de lados	Número de diagonais
4	1
5	2
6	3
⋮	⋮
n	d

A grandeza d é uma função de n, ou seja, d = f(n).
Induzindo o resultado, tem-se d(n) = n – 3.

2 Galileu Galilei fez descobertas que contribuíram para a invenção do relógio de pêndulo. Diz-se que aos 19 anos ficou observando o balanço de um lustre de bronze no teto da catedral de Pisa. Ele relacionou o movimento oscilatório do pêndulo com suas próprias pulsações (como se fosse um cronômetro) e concluiu que o período de oscilação não dependia da amplitude do movimento. Observe a seguinte tabela e identifique a lei de formação entre os elementos do conjunto.

Tempo de oscilação (s)	Comprimento do pêndulo (pés)
1	1
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮
t	ℓ

Resolução:

A grandeza t é uma função de ℓ, ou seja, $t = f(\ell)$.
Introduzindo o resultado, tem-se:

$$t = \sqrt{\ell} \longrightarrow t(\ell) = \sqrt{\ell}$$
$$ou$$
$$\ell = t^2 \longrightarrow \ell(t) = t^2$$

3 Uma pesquisa americana estabeleceu uma função entre o tamanho do sapato e o comprimento do pé. Para os homens, a lei é y = 3x – 25 e para as mulheres y = 3x – 22, em que x é o comprimento do pé e y o número do sapato. Responda às perguntas:

a) Qual o tamanho do pé de homens e mulheres para que calcem os mesmos números?

b) Um homem e uma mulher possuem o mesmo tamanho de pé. Quem possui a maior numeração?

c) Um homem e uma mulher possuem a mesma numeração. Quem possui o maior pé?

Resolução:

a) *Se possuem os mesmos números, basta igualar as funções: $3x - 25 = 3x - 22$; logo, $25 = 22$, impossível.*

b) *Seja a o tamanho dos pés, a numeração do homem é $y = 3a - 25$ e a das mulheres, $y = 3a - 22$. A numeração das mulheres é maior.*

c) *Seja a numeração comum do homem e da mulher, então: $a = 3x - 25$ (homens) e $a = 3x - 22$ (mulheres). Isolando o x, tem-se: $x = \dfrac{a + 25}{3}$ e $x = \dfrac{a + 22}{3}$.*

O maior pé é o do homem.

Representações básicas de uma função

2. Numericamente por meio de tabelas

Ano(x)	população f(x)
1900	17.438.434
1920	30.635.605
1940	41.165.289
1960	70.070.457
1980	119.002.706
2000	169.799.170
2008*	191.696.643

FONTE: <WWW.IBGE.GOV.BR>

*Estimativa.

Tab. 2 População brasileira em função do ano.

3. Geometricamente por gráficos

A temperatura de uma parábola com 200 g de água, inicialmente a 50 ºC, vai decaindo até atingir a temperatura ambiente de 20 ºC.

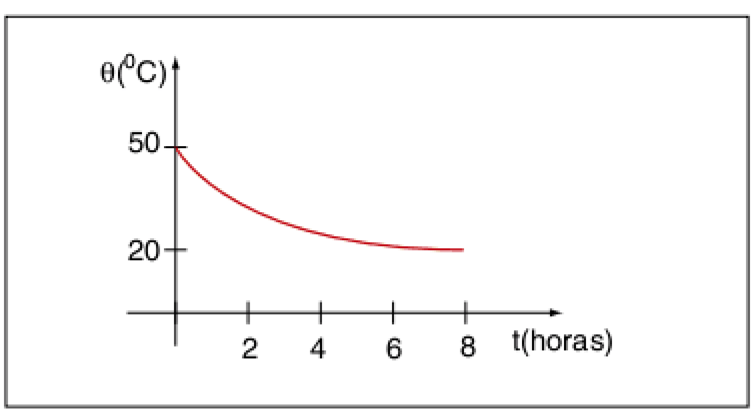
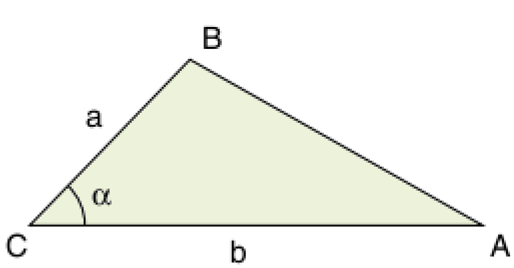


Fig. 9 Temperatura em função do tempo.

4. Algebricamente por fórmulas

A fórmula $A = \dfrac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2}$ representa a área de um triângulo de lados a e b e ângulo formando α.



5. Verbalmente

A lei da gravitação universal de Isaac Newton, pode ser descrita da seguinte maneira:

A força gravitacional de atração entre dois corpos no Universo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

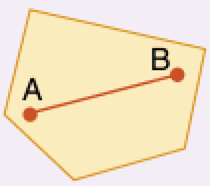
ATENÇÃO!

O símbolo ∃ significa "existe pelo menos um". O símbolo ∃| significa "existe e é único".

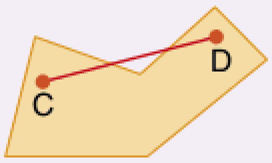
f: A → B representa uma função que associa elementos de A em B.

Um polígono é convexo quando dois pontos quaisquer formam um segmento que está inteiramente contido no polígono.

Observe o exemplo:



Contraexemplo:



O segmento $\overline{CD}$ não está inteiramente contido no polígono. Trata-se, então, de um polígono côncavo.

No curso de ondulatória física, você verá que o período do pêndulo simples depende do comprimento do fio (ℓ) e da aceleração da gravidade local (g) $\left(T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\right)$.

Classificação das funções

Respeitando a definição de função, tem-se algumas variações na apresentação das funções. Primeiramente, reforce o conceito por uma análise gráfica.

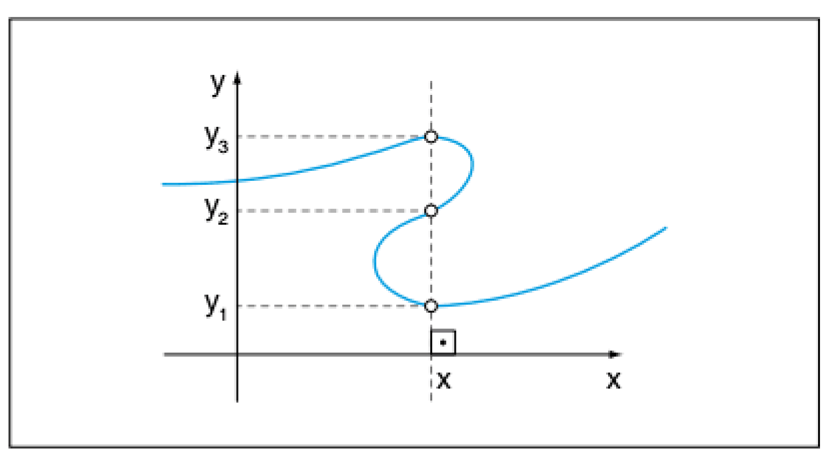


Fig. 10 Análise gráfica da função.

O gráfico da figura 10 não representa uma função, pois existe um elemento x pertencente a A que não possui um único elemento y pertencente a B; são os pares ordenados $(x;\ y_1)$, $(x;\ y_2)$ e $(x;\ y_3)$.

Observe o próximo gráfico:

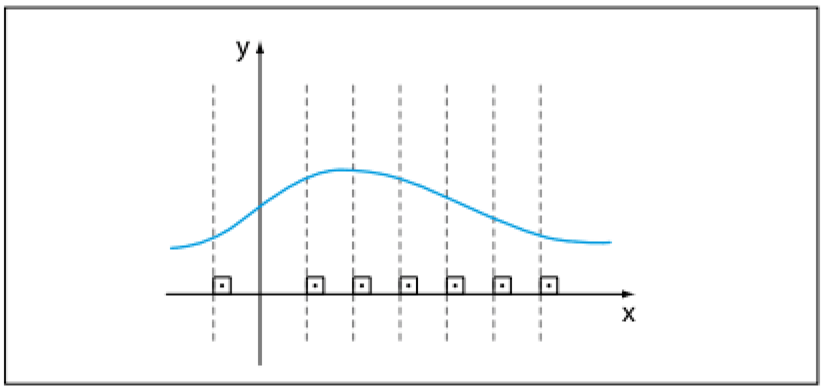


Fig. 11 Análise gráfica da função.

O gráfico da figura 11 representa uma função, pois em todo seu domínio, retas perpendiculares ao eixo x cortam o gráfico em pontos onde as ordenadas (valores de y) são diferentes.

ATENÇÃO!

Para verificar se um gráfico é função, basta traçar retas perpendiculares a x. Se cortar em um único ponto, o gráfico é função; cortando em dois ou mais pontos, não é função.

Domínio e imagem

Continuando a análise gráfica das funções, o gráfico pode fornecer o domínio da função. A projeção do gráfico no eixo das abscissas representa o domínio, e a projeção do gráfico no eixo das ordenadas representa o conjunto-imagem da função (ou relação). Observe a figura.

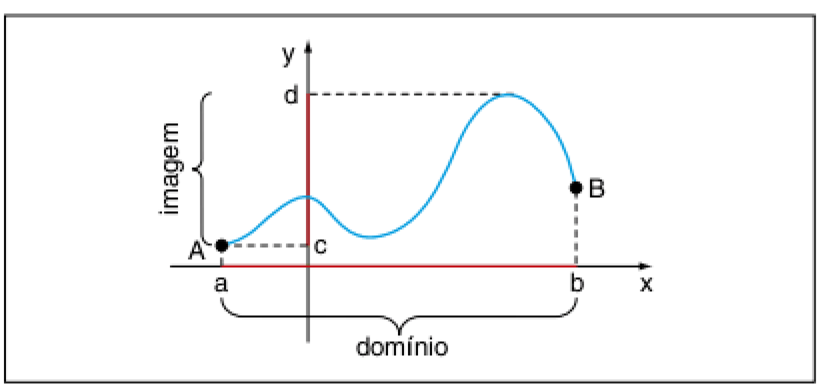


Fig. 12 Domínio e imagem.

$$D_f = [a;\, b] \text{ e } Im_f = [c;\, d]$$

Função injetora

Uma função é injetora quando todos os elementos do domínio possuem, respectivamente, imagens diferentes. Simbolicamente:

$$\forall\, x_1 \neq x_2 \in D_f \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in Im_f$$

Observe os diagramas e o gráfico:

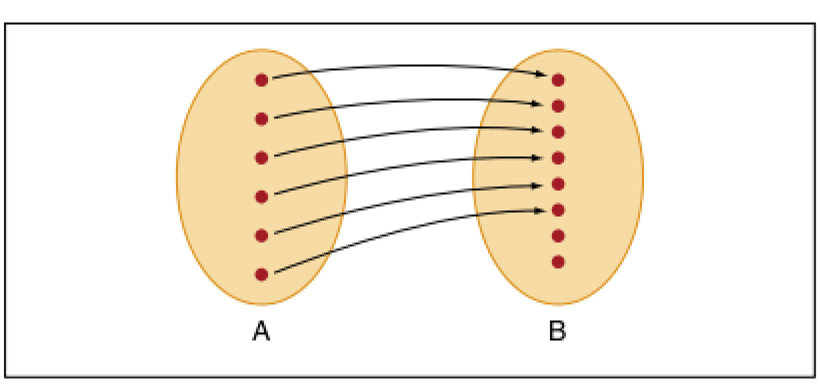


Fig. 13 Função injetora.

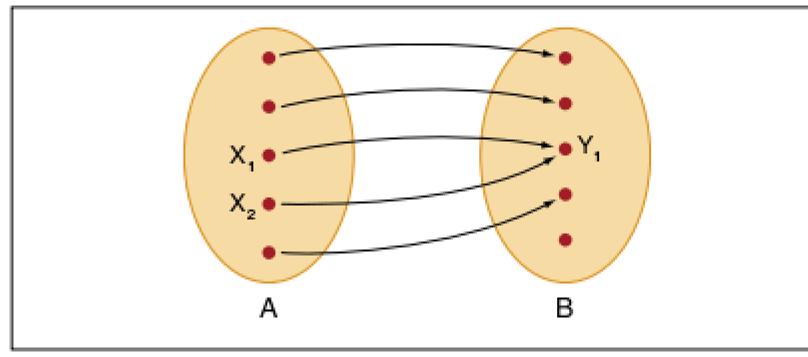


Fig. 14 Função não injetora.

Na figura 14, temos: $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, que contraria a definição de função injetora.

O gráfico da figura 15 a seguir insiste na mesma ideia, observe:

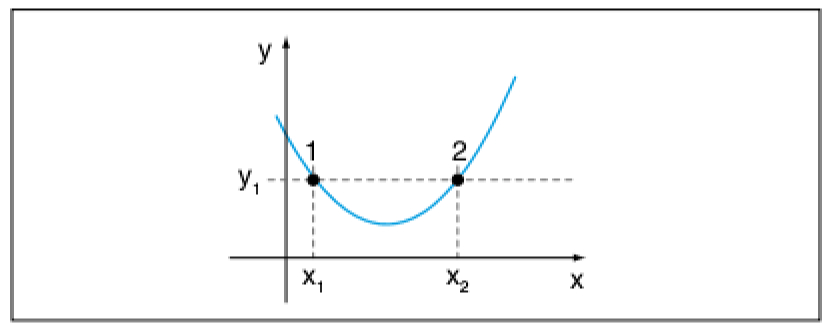


Fig. 15 Função não injetora.

Pode-se definir que uma função é injetora por meio da afirmação contrapositiva da afirmação já apresentada.

Assim: f: A → B é uma função injetora se, e somente se, $\forall x_1;\, x_2 \in A$ e $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Para ficar mais claro, imagine que para $f(x_1) = f(x_2)$ tivéssemos $x_1 \neq x_2$.

Observe o diagrama:

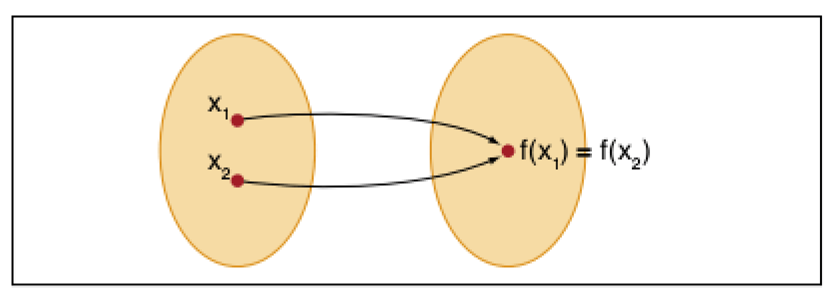


Fig. 16 Diagrama em que $f(x_1) = f(x_2)$.

Isso contraria a ideia inicial de função injetora, logo, pode-se utilizar a contrapositiva para demonstrar que uma função é injetora.

Função sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando o conjunto-imagem é o próprio contradomínio (B) da função. Simbolicamente:

$$\forall y \in CD_f \Rightarrow \exists x \in D_f \mid f(x) = y$$

Observe o diagrama:

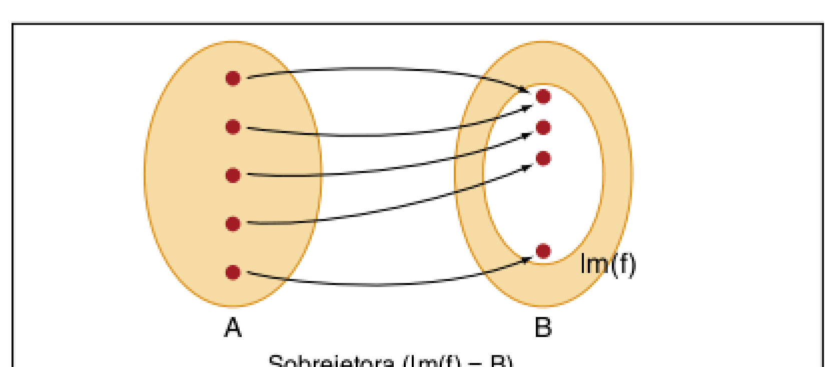


Fig. 17 Função sobrejetora.

Função bijetora

Uma função é bijetora quando for simultaneamente injetora e sobrejetora. Observe o diagrama:

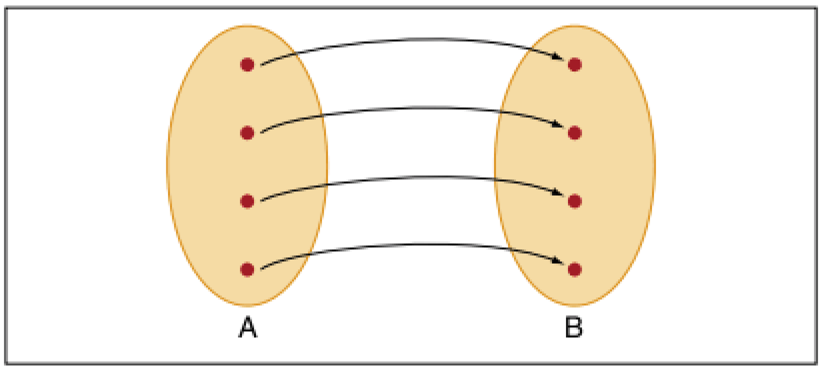


Fig. 18 Função bijetora.

Paridade das funções

Função par

Uma função é par quando elementos simétricos x e –x possuem a mesma imagem. Observe o gráfico:

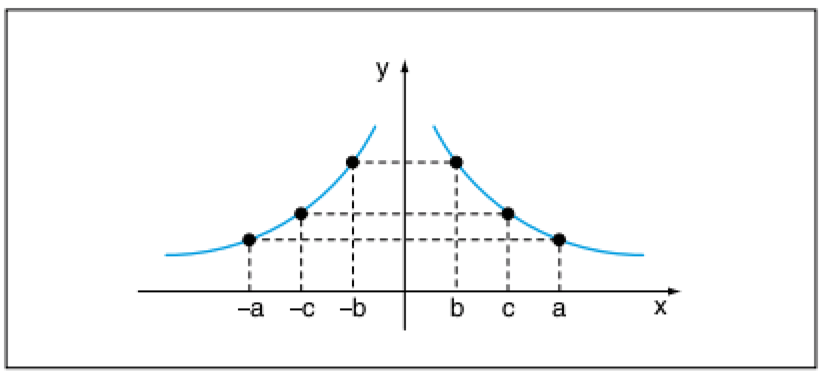


Fig. 19 Função par.

Na figura 19, tem-se uma função f tal que f(c) = f(–c), f(b) = f(–b), f(a) = f(–a). Feito isso para todo elemento do domínio, tem-se uma função par.

Com mais rigor matemático, tem-se:

$\forall x; -x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(-x)$ a função f é par.

A construção geométrica sugere que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y.

Função ímpar

Uma função é ímpar quando elementos simétricos do domínio produzem imagens simétricas. Observe o gráfico a seguir.

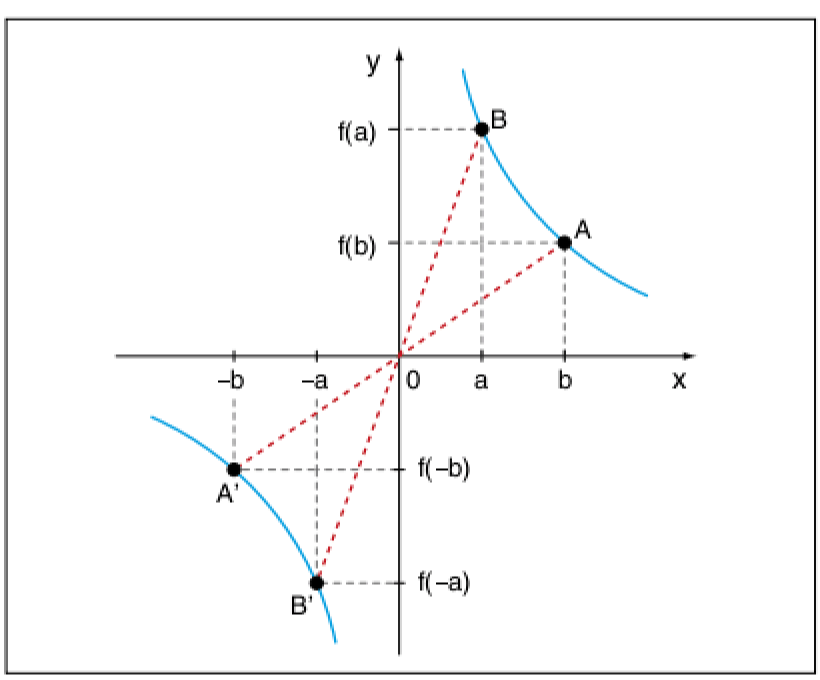


Fig. 20 Função ímpar.

Na figura 20, tem-se uma função f tal que f(–b) = –f(b) e f(–a) = –f(a).

Se essa propriedade ocorrer para todo elemento do domínio, tem-se uma função ímpar.

Observe a definição rigorosa:

$\forall x; -x \in D_f \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ a função f é ímpar.

A construção geométrica sugere uma simetria em relação à origem do sistema. Observe na figura 20 que AO = A'O e BO = B'O.

Exercício resolvido

4 As expressões de funções que serão apresentadas a seguir podem possuir gráficos de difícil representação, o importante é a demonstração algébrica da paridade.
Classifique as funções quanto à sua paridade.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

b) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$

Resolução:

De acordo com as definições de função par e ímpar, vamos em todos os exemplos começar o cálculo de f(–x). Observe:

a) $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^{-(-x)}) = \underbrace{\frac{1}{2}(a^{-x} + a^{(x)})}_{\text{própria função } f} = f(x)$

Assim, provamos que f(–x) = f(x), para qualquer x do domínio, logo a função é par.

b) $f(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2} =$

$= \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} =$

$= -(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}) = -f(x),$

trata-se de uma função ímpar.

c) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 2 = -x^3 + x^2 - 2 = -(x^3 - x^2 + 2).$

Não obtivemos f(x) nem –f(x), essa função não possui paridade.

ATENÇÃO!

Uma função é sobrejetora quando o contradomínio é o conjunto-imagem.
O gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo y.
O gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem.
Pense a respeito! Toda função que é par não pode ser injetora.

Função estritamente crescente

Uma função é estritamente crescente se, e somente se, para valores crescentes de $x(x_1 > x_2)$, tem-se também valores crescentes de $y(y_1 > y_2)$. Mais precisamente: $\forall x_1 > x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ a função f é crescente. Observe o gráfico a seguir:

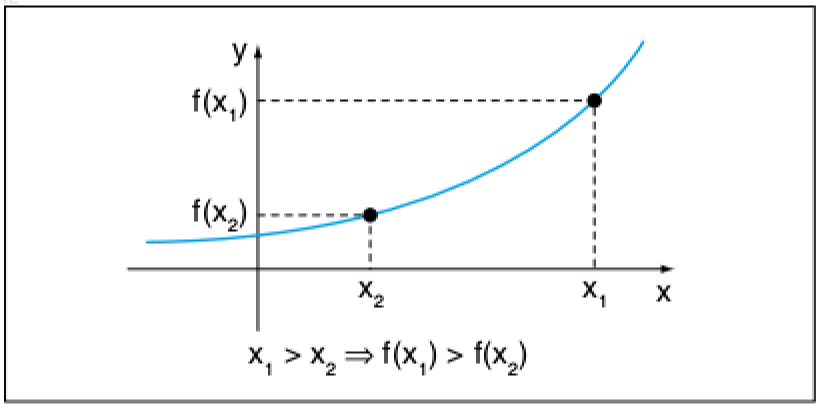


Fig. 21 Função crescente.

Função estritamente decrescente

Uma função é estritamente decrescente se, e somente se, para valores crescentes de $x(x_2 < x_1)$ tem-se valores decrescentes de $y(y_2 > y_1)$. Mais precisamente: $\forall x_2 < x_1 \in D_f \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ a função f é decrescente. Observe o gráfico:

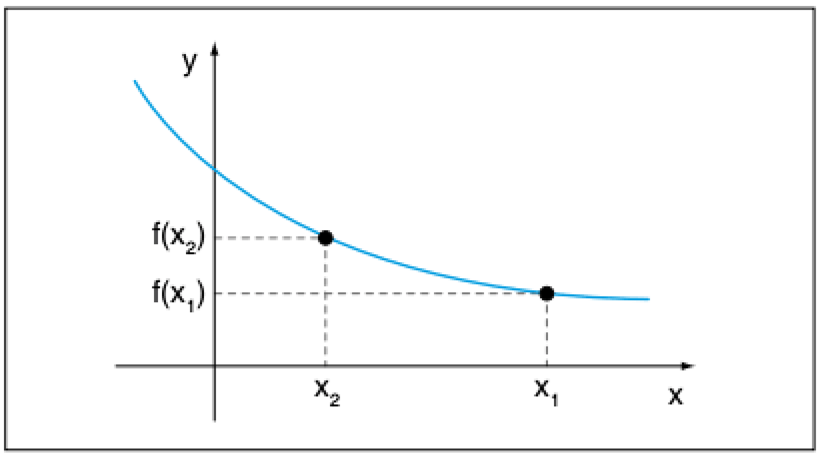


Fig. 22 Função decrescente.

Função do 1º grau (função afim)

Uma função é dita do primeiro grau se, e somente se, a sua lei é da forma: $f(x) = ax + b$; com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, $f(x) = 2x - 1$ é uma função do 1º grau e pela lei temos alguns de seus elementos:

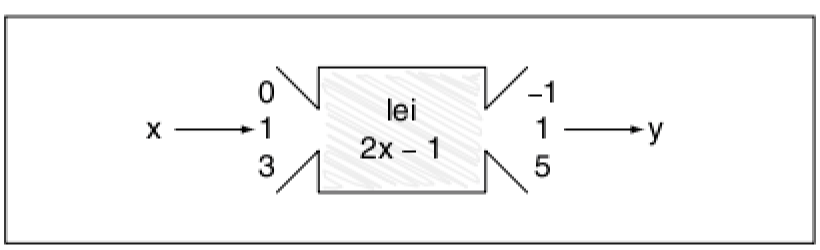


Fig. 23 Função do 1º grau.

Observe alguns aspectos da expressão $f(x) = ax + b$.

1º Se $a = 0$, tem-se $f(x) = b$ (não é função do 1º grau), que é uma função que não depende de x, e a sua imagem é sempre b. Trata-se da função constante.

Observe o gráfico da função $f(x) = 3$:

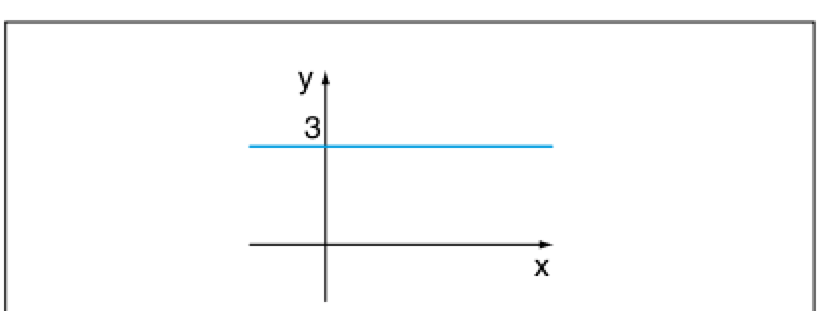
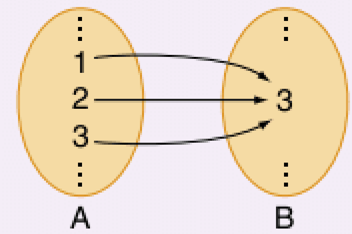


Fig. 24 Função constante f(x) = 3.

ATENÇÃO!

O diagrama de flechas da função constante $f(x) = 3$ seria:



Observe que a função constante não é injetora e, se for de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, também é par.

2º Se $a = 1$ e $b = 0$, tem-se $f(x) = x$, a chamada **função identidade**.

A função identidade é aquela cujos elementos do domínio são iguais aos respectivos elementos do conjunto imagem. O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares. Observe o gráfico a seguir:

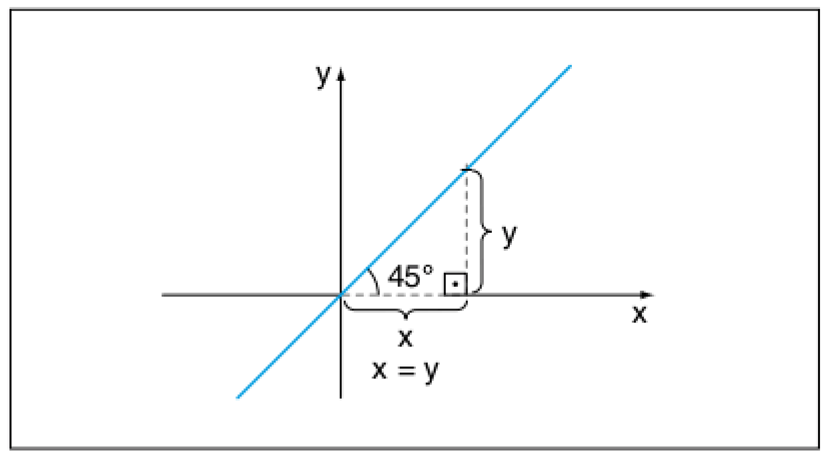


Fig. 25 Função identidade.

ATENÇÃO!

O gráfico da função do 1º grau
$f(x) = ax + b$
é sempre uma reta.

Agora, você verá que a função do 1º grau é representada sempre por uma reta.

Considere a função $f(x) = ax + b$ e que $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$ são pontos da função. Considere a figura a seguir.

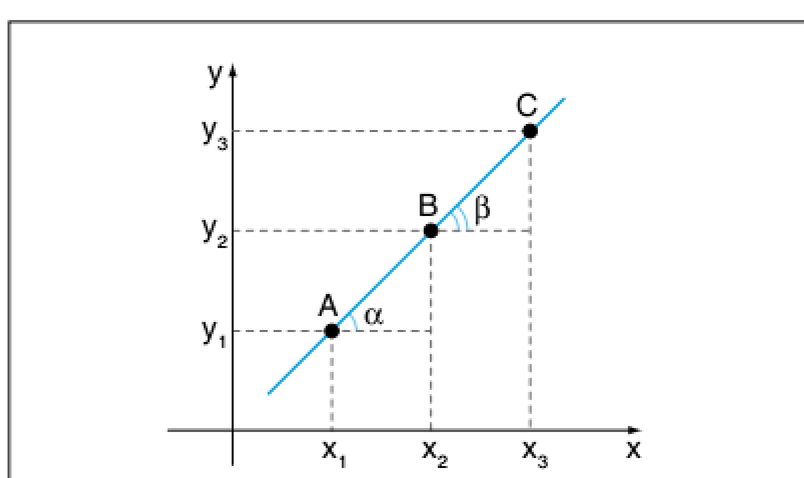


Fig. 26 Gráfico da demonstração.

Provando que $\Delta ABD \sim \Delta BCE$, tem-se $\alpha = \beta$ e assim os pontos A, B e C estarão alinhados.

$A \in f$; logo, $y_1 = ax_1 + b$ (I)
$B \in f$; logo, $y_2 = ax_2 + b$ (II)
$C \in f$; logo, $y_3 = ax_3 + b$ (III)

Fazendo (II) – (I)

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \therefore y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \backslash \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Repetindo o processo (III) – (II)

$$y_3 - y_2 = ax_3 - ax_2 \therefore y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \backslash \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

Assim: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \therefore \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{BE}$, que é a proporcionalidade dos lados dos triângulos ΔABD e ΔBCE; logo, $\alpha = \beta$ e o gráfico é uma reta.

Propriedades do gráfico: y = ax + b

Raiz da função

A nossa expressão é $y = ax + b$. A raiz de uma função é o valor de x, tal que $y = 0$; logo, $0 = ax + b \therefore x = -\frac{b}{a}$.

Assim, determina-se um ponto da reta $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$.

Observe o gráfico a seguir.

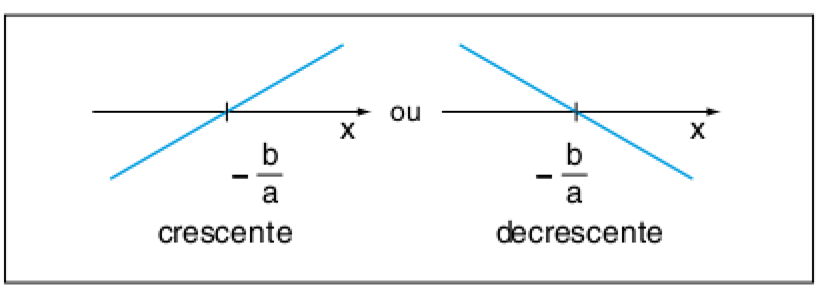


Fig. 27 Raiz da função.

Coeficiente linear

O coeficiente b da função $f(x) = ax + b$ é o chamado coeficiente linear. Ele determina o ponto onde a reta corta o eixo y. Observe a demonstração: $f(x) = ax + b$. Fazendo $x = 0$ $f(0) = a \cdot 0 + b \therefore f(0) = b$, que representa o ponto (0; b). Confira o resultado com o gráfico.

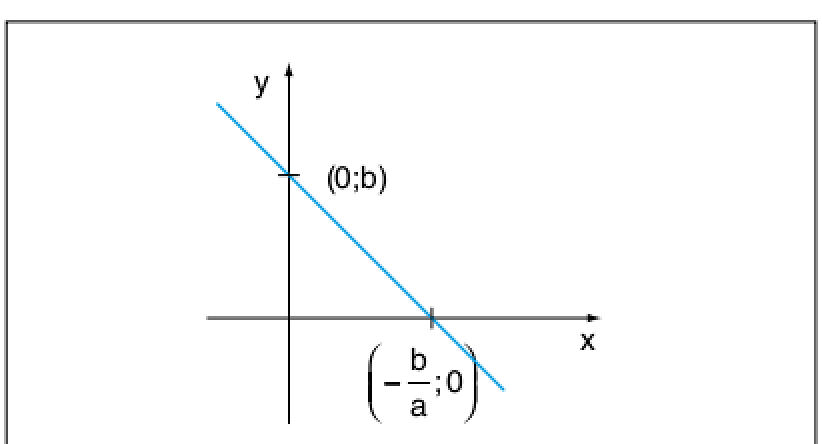


Fig. 28 Coeficiente linear.

Coeficiente angular (taxa de variação)

Considere dois pontos quaisquer da reta da função $y = ax + b$ e vamos calcular a seguinte razão: $\frac{\text{variação de y}}{\text{variação de x}}$.

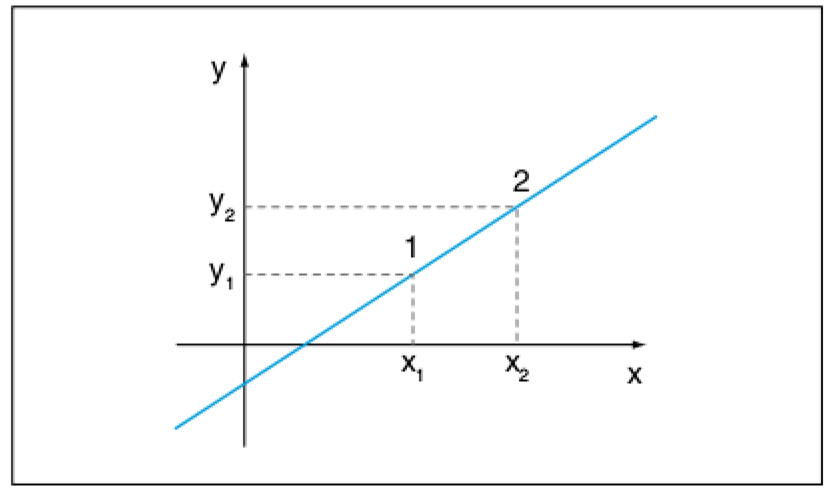


Fig. 29 Gráfico linear.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

O coeficiente a fornece a taxa de variação da grandeza y em relação à grandeza x.

ATENÇÃO!

$a > 0$, função estritamente crescente
$a < 0$, função estritamente decrescente

Construção de gráficos

Construção dos gráficos das funções apresentadas:

1. $y = 2x - 1$
raiz:
$2x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$
coeficiente linear:
$b = -1$

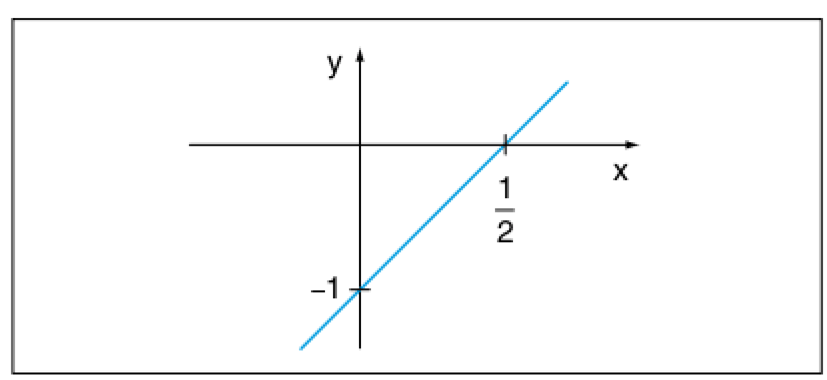


Fig. 30 Gráfico de coeficiente linear –1.

2. $y = 3x + 2$
raiz:
$3x + 2 = 0 \therefore x = -\frac{2}{3}$
coeficiente linear:
$b = 2$

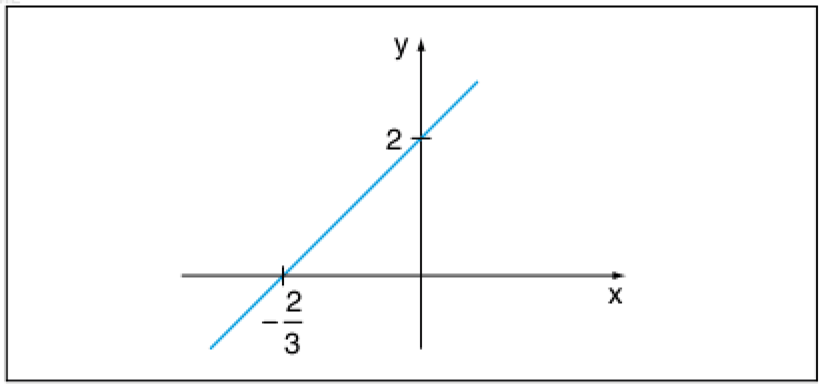


Fig. 31 Reta com raiz $-\frac{2}{3}$ e coeficiente linear 2.

3. $y = -x + 2$
raiz:
$-x + 2 = 0 \therefore x = 2$
coeficiente linear:
$b = 2$

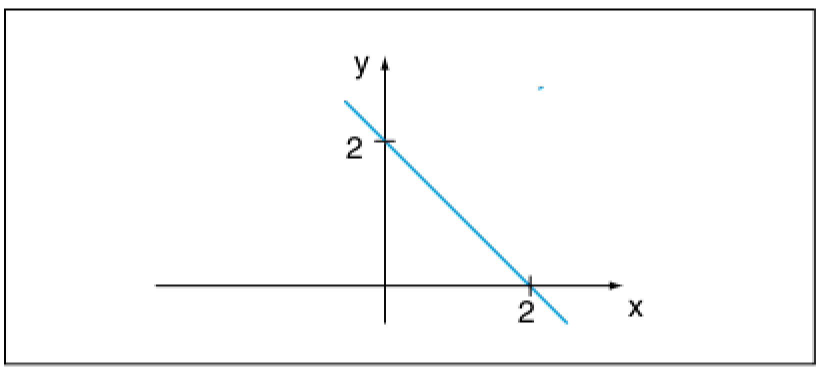


Fig. 32 Reta com raiz 2 e coeficiente linear 2.

ATENÇÃO!

Dois pontos distintos determinam uma única reta.
Marcando a raiz e o coeficiente linear, a reta estará determinada.
Observando os exemplos (1), (2) e (3) percebemos que se $a > 0$, a função é crescente e, se $a < 0$, a função é decrescente.
A demonstração dessa propriedade está no texto complementar.

Função inversa

f: $A \to B$ está representada pelo diagrama a seguir.

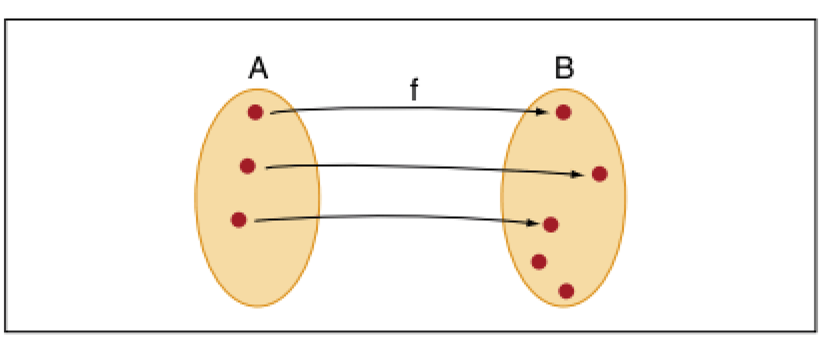


Fig. 33 Função f: $A \to B$.

Vamos inverter a situação apresentada pela figura anterior, observe:

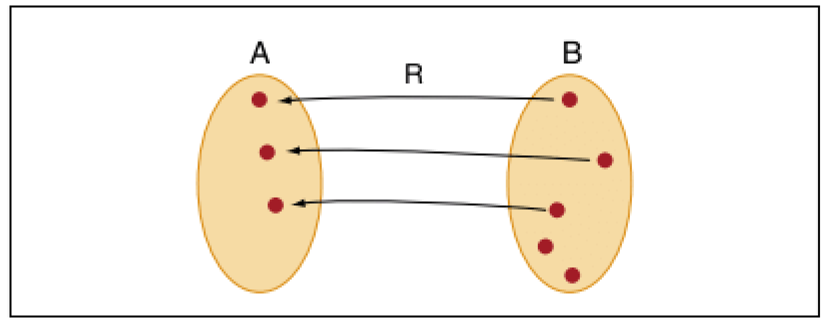


Fig. 34 Relação R: $B \to A$.

Obtém-se agora uma relação R aplicada de B em A. Essa relação não é uma função, pois não se relaciona todos os valores de B em A.

Se a função f fosse **sobrejetora**, a relação R **seria uma função**.

Fazendo as devidas alterações, observe a função representada pelo diagrama:

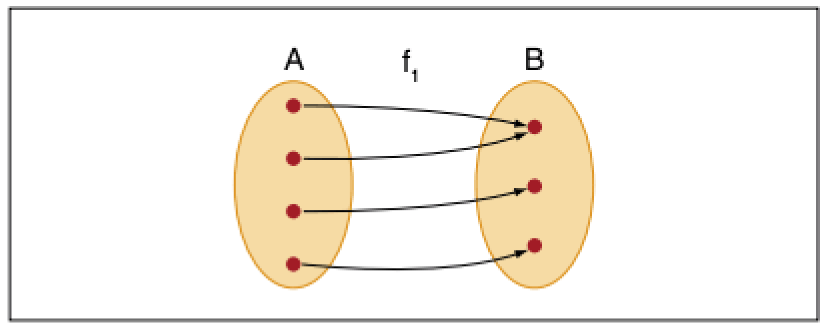


Fig. 35 Função f_1: $A \to B$.

Agora $f_1 : A \to B$ é sobrejetora.

Invertendo a situação apresentada na figura 35, obtém-se a relação $R_1 : B \to A$, de acordo com o diagrama a seguir.

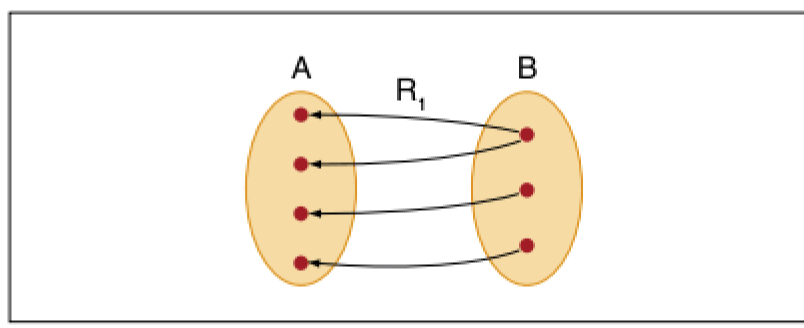


Fig. 36 Relação $R_1 : B \to A$.

A relação R_1 não é uma função, pois, para um mesmo $x \in B$, existe mais de um $y \in A$.

Se a função f_1 fosse injetora, a relação R_1 seria uma função.

ATENÇÃO!

- Juntando as condições da função f e f_1, teremos uma função inversa se a função for sobrejetora e injetora, ou seja, bijetora.
- A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$; $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$ é bijetora, logo admite inversa.
- f: $A \to B$ é a função direta e f^{-1}: $B \to A$ é a função inversa.
- Uma função é inversível se, e somente se, ela for bijetora.
- gof(x) lê-se g "bola" f.

Exercícios resolvidos

5 Determine a função inversa de f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x - 2$.

Resolução:

f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (troca do domínio e conjunto-imagem).

$y = 3x - 2 \to x = 3y - 2 \therefore 3y = x + 2 \therefore y = \dfrac{x+2}{3}$

(ocorreu a troca do y pelo x e vice-versa).

Logo: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

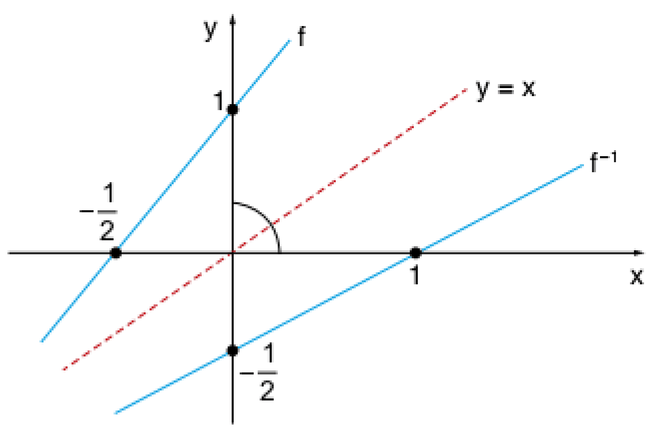
6 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$, obtenha f^{-1} e faça o esboço dos gráficos de f e f^{-1} visualizando a simetria em relação à reta $y = x$.

Resolução:

Como f é bijetora, vamos obter a sua inversa.

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x = 2y + 1 \therefore y = \dfrac{x-1}{2}$

Gráfico de f e f^{-1}



Vamos analisar um fato importante entre uma função e a sua inversa.

Se o par ordenado (a; b) ∈ f, então (b; a) ∈ f^{-1}. Representando esses dois pontos no plano cartesiano, percebe-se que eles são simétricos em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares. Observe o desenho.

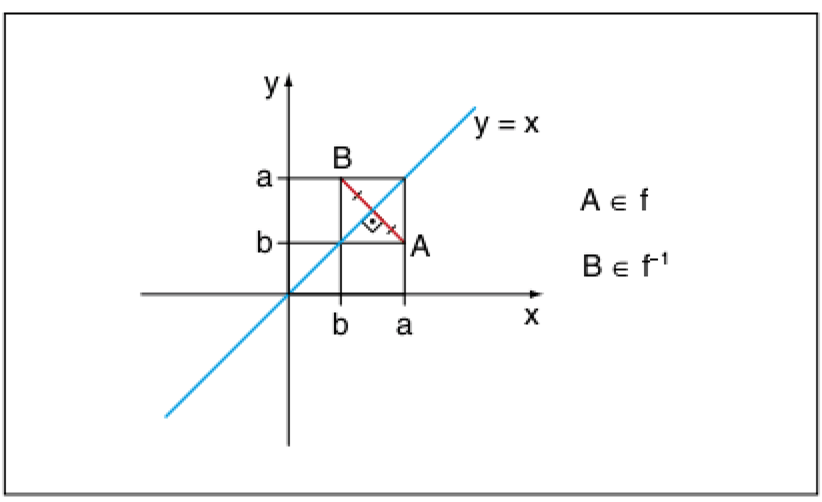


Fig. 37 Gráfico representando os pontos B e A.

ATENÇÃO!

Os gráficos de uma função f e a sua inversa f^{-1} são simétricos em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Composição de funções

Observe o diagrama a seguir.

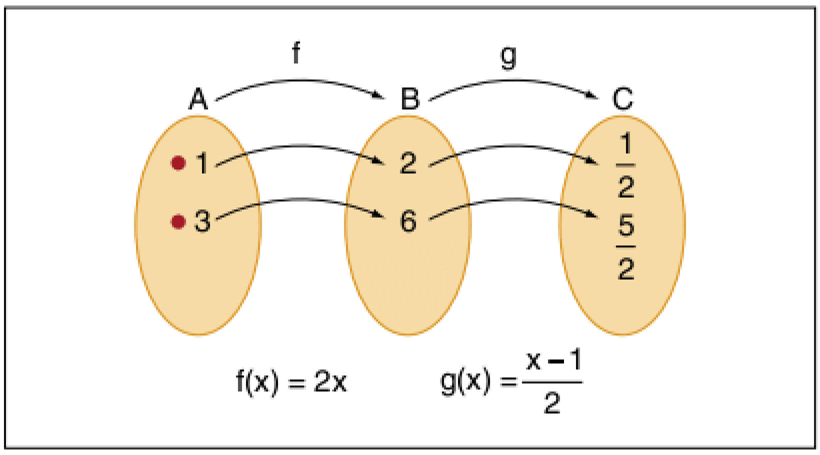


Fig. 38 Composição de funções.

Na figura 38, tem-se as funções:

$f: A \to B$ tal que $f(x) = 2x$ e $g: B \to C$ tal que $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ e os caminhos percorridos por 1 e 3 até transformarem-se em $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{2}$.

A função composta seria uma função aplicada de A em C, sem caminhos intermediários.

Observando novamente o diagrama da figura 38, tem-se:

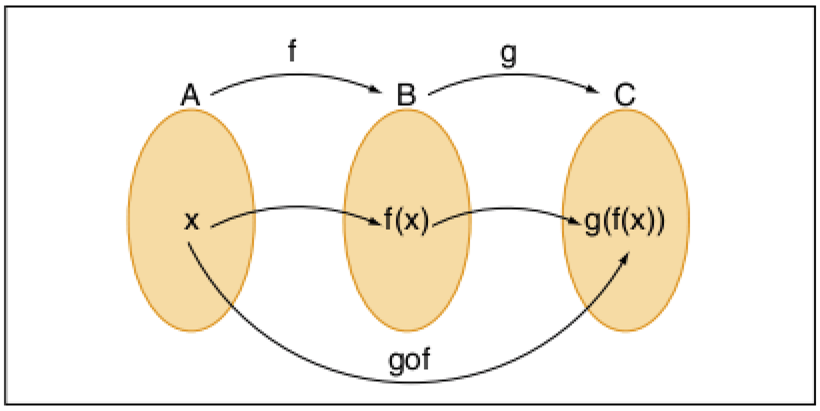


Fig. 39 A função composta.

g(f(x)) ou gof é a função composta que leva todo elemento do conjunto A para C.

Para obter a expressão da função composta, faça o cálculo de g(f(x)). Observe:

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - 1}{2} = \frac{2x - 1}{2} \therefore$$

$$\therefore gof(x) = x - \frac{1}{2}$$

Conferindo os resultados, tem-se:

$$gof(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$gof(3) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Observe outra situação.

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ duas funções que podem se compor, pois o conjunto-imagem da f possui interseção não nula com o domínio da função g. Acompanhe os seguintes cálculos:

a) $gof(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x+1)^2$

b) $fog(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1$

c) $fof(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$

d) $fo(fog)(x) = f(fog(x)) = 2fog(x) + 1 = 2(2x^2+1) + 1 =$
$= 4x^2 + 3$

e) $(fof)og(x) = fof(g(x)) = 4g(x) + 3 = 4x^2 + 3$

f) $fof^{-1}(x)$

Obtém-se inicialmente a inversa de f

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ e } x = 2y + 1 \therefore y = \frac{x-1}{2} \text{ e } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Assim:

$$fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) + 1 = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$

g) $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = \dfrac{f(x)-1}{2} = \dfrac{(2x+1)-1}{2} = x$

Por esses exemplos, pode-se tirar conclusões importantes a respeito da composição e inversão de funções.

ATENÇÃO!

Considere as funções f, g e h e algumas conclusões da operação composição:

fog e gof são funções distintas (operação não comutativa)

$fo(goh) = (fog)\,oh$ (operação associativa)

$fof^{-1}(x) = f^{-1}of(x) = x$ (função identidade)

$fog(x) = f(g(x))$

Estudo do sinal

Seja f(x) uma função qualquer, fazer o estudo do sinal de f(x) é encontrar os valores de x, tal que:

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0 \text{ ou } f(x) = 0$$

Observe o seguinte gráfico de uma função

$$f: A \to B:$$

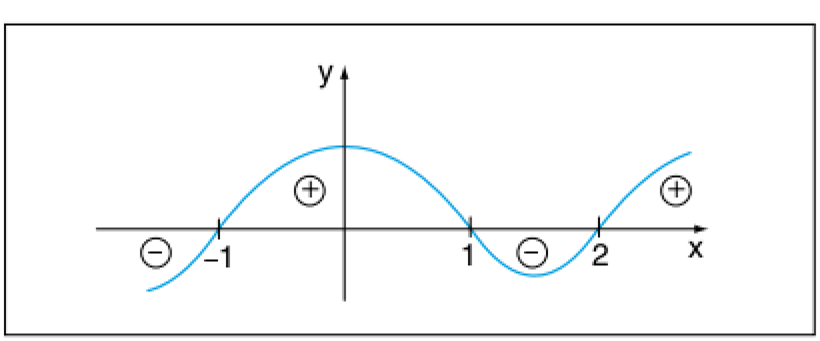


Fig. 40 Gráfico de $f: A \to B$.

O estudo do sinal de f(x) será:

$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

$f(x) > 0$ para $-1 < x < 1$ ou $x > 2$

$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $1 < x < 2$

Estudo do sinal da função do 1° grau

Considere a seguinte função do 1º grau $f(x) = x - 2$. Sua raiz vale 2 e o coeficiente angular vale 1 (positivo). Observe o esboço do gráfico:

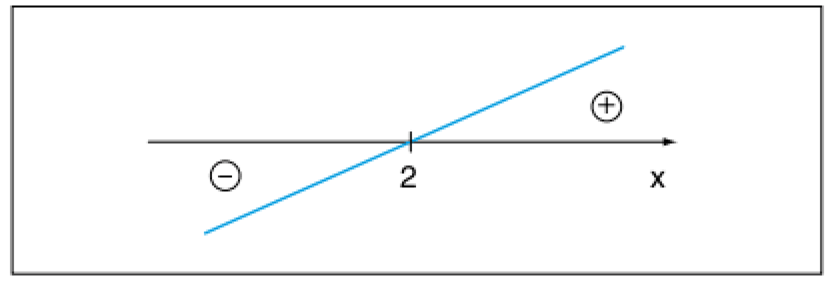


Fig. 41 Quadro de sinais.

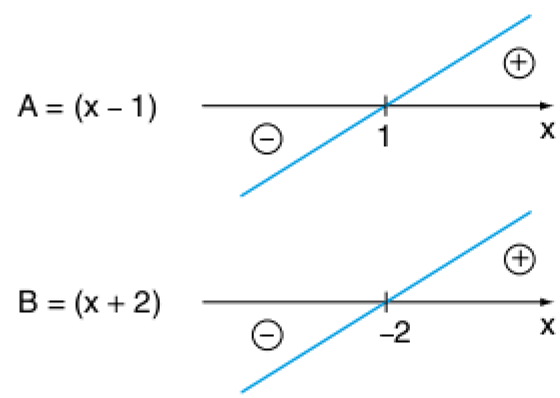
Exercícios resolvidos

7 Resolva a inequação:

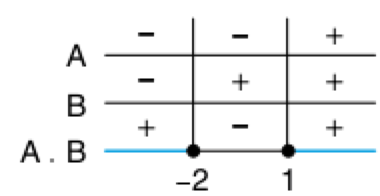
$$(x-1) \cdot (x+2) \geq 0$$

Resolução:

Analisando o sinal das funções componentes, temos:



Queremos o sinal de A . B, para isso utilizamos o "varal":



Nas linhas de A e B, figuram o estudo dos sinais das funções componentes.

Na última linha, a expressão desejada de A e B é o produto A · B. Como queremos $A.B \geq 0$, a solução é o intervalo real:

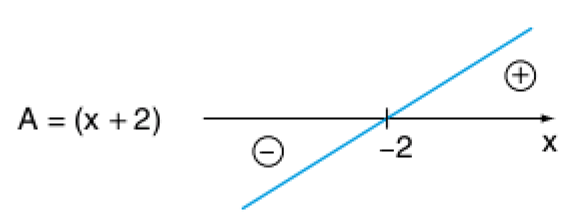
$$S =]-\infty\,; -2\,]\ U\,[1;\ +\infty[$$

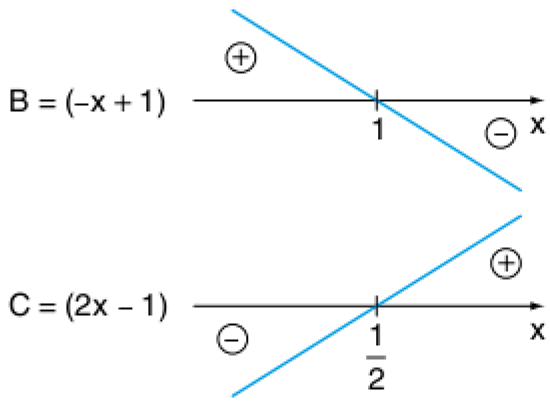
8 Resolva a inequação:

$$\frac{(x+2).(-x+1)}{(2x-1)} \leq 0$$

Resolução:

Analisando o sinal das funções componentes separadamente, temos:





Queremos o sinal de $\dfrac{A\,.\,B}{C}$*, para isso utilizaremos o varal a seguir:*

A	−	+	+	+
B	+	+	+	−
C	−	−	+	+
$\frac{A\,.\,B}{C}$	+	−	+	−
		−2	$\frac{1}{2}$	1

Levando em consideração que o denominador não pode ser zero, ou seja, $2x - 1 \neq 0 \therefore x \neq \dfrac{1}{2}$ *(intervalo aberto para* $x = \dfrac{1}{2}$*.*

Como queremos $\dfrac{A\,.\,B}{C} \leq 0$*, temos:*

$$S = \left[-2;\ \frac{1}{2}\right[\, U\,[1;\ +\infty[$$

9 Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x$$

Resolução:

Vamos, inicialmente, preparar a inequação:

$$\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \therefore \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} - x > 0 \therefore \frac{x^2 + x + 3 - x(x + 1)}{x + 1} > 0 \therefore$$

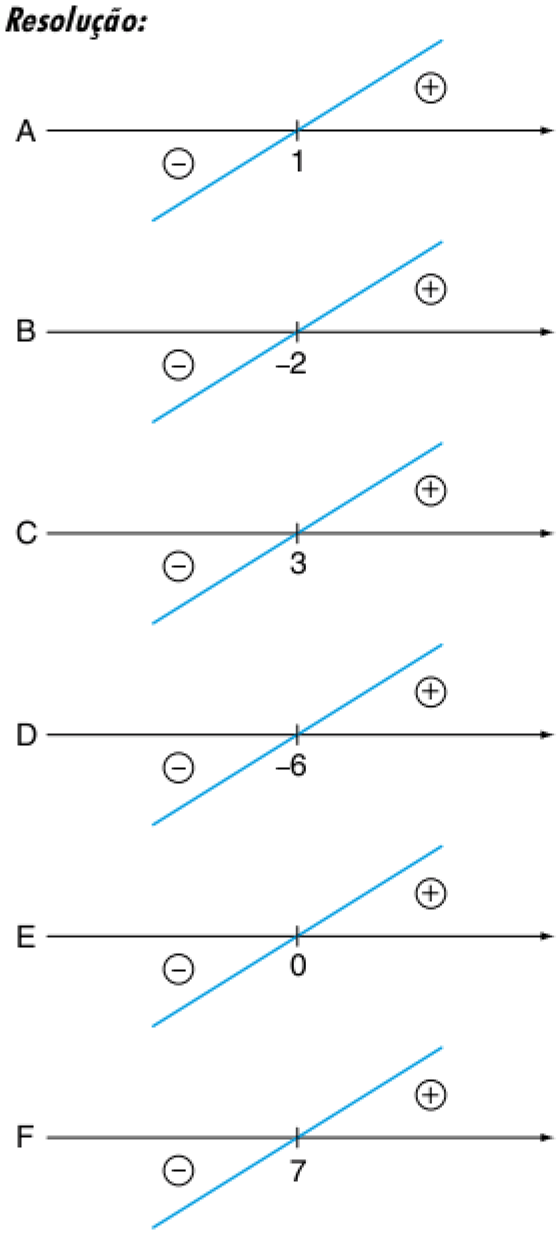
$$\therefore \frac{x^2 + x + 3 - x^2 - x}{x + 1} > 0 \therefore \frac{3}{x + 1} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \therefore x > -1$$

$S =]-1; +\infty[$

10 Resolva a inequação

$$\frac{(x-1)^3 \,.\, (x+2)^4 \,.\, (x-3)^5 \,.\, (x+6)}{x^2 \,.\, (x-7)^3} \leq 0$$

Resolução:



A^3	−	−	−	−	+	+	+
B^4	+	+	+	+	+	+	+
C^5	−	−	−	−	−	+	+
D	−	+	+	+	+	+	+
E^2	+	+	+	+	+	+	+
F^3	−	−	−	−	−	−	+
$\frac{A^3\,.\,B^4\,.\,C^5\,.\,D}{E^2\,.\,F^3}$	+	−	−	−	+	−	+
		−6	−2	0	1	3	7

$S = [-6; 0[\cup]0; 1] \cup [3; 7[$

ATENÇÃO!

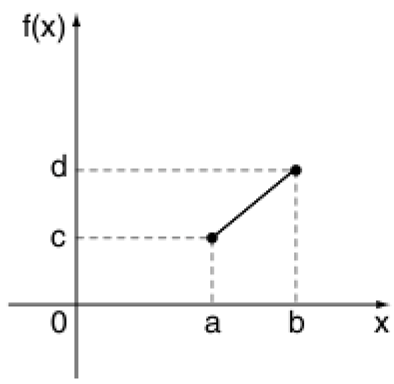
Para fazer o estudo do sinal de uma função, o cálculo da raiz é fundamental, pois a função pode mudar de sinal após a raiz. Para resolver inequações produtos ou inequações quocientes, utilizamos o quadro de sinais (ou o varal).

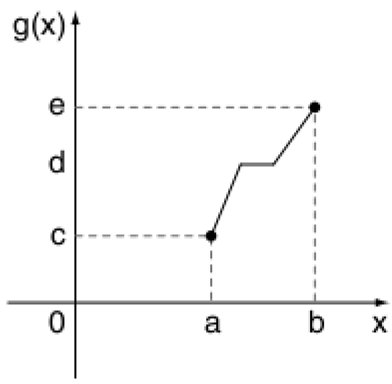
Revisando

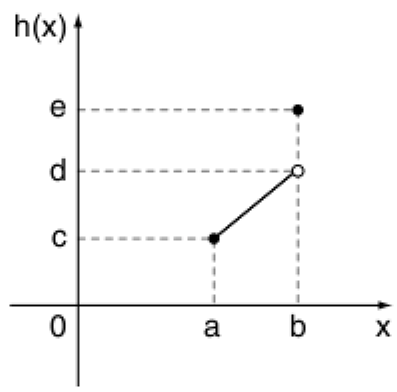
1 Dada a função: f: $[-1; 1] \to [0; 6]$ e $f(x) = 3x + 3$, obtenha a sua inversa.

2 Sabemos que a composição de funções não é uma operação comutativa.
Dadas as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = ax + b$; $a \neq 0$, determine a relação entre a e b tal que $fog = gof$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Dê um exemplo numérico.

3 Considere as funções f, g e h, todas de domínio [a;b] e contradomínio [c;d], representadas nos gráficos a seguir.

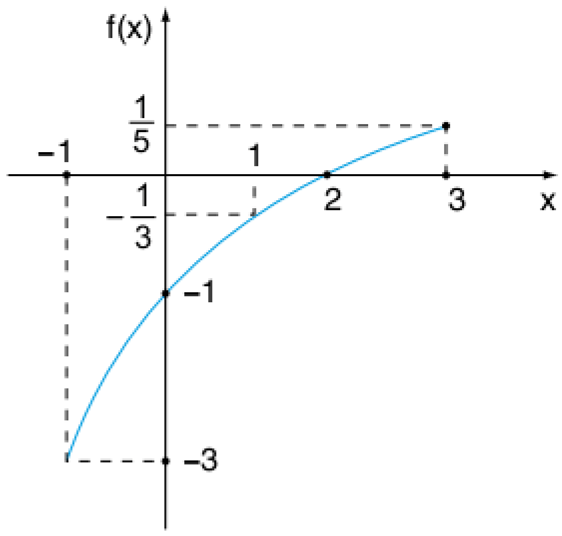






O que se pode afirmar sobre essas funções?

4 A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \dfrac{x+a}{bx+c}$, para $-1 \leq x \leq 3$.



Determine os valores de a, b e c.

Exercícios propostos

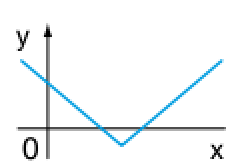
Noção de função e sua classificação

1 Sendo A = {2; 3; 4} e B = {5; 6; 7; 9; 12}, qual o conjunto-imagem da função de A em B, tal que $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 3x\}$?

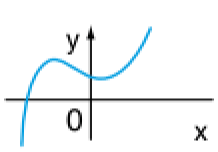
2 Qual o gráfico de flechas da função $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$, sendo A = {0; 3; 6} e B = {1; 2; 4; 5; 7}?

3 **UFPE** Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora y = f(x)?

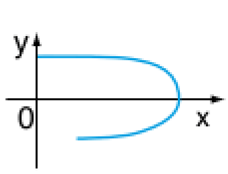
(a)



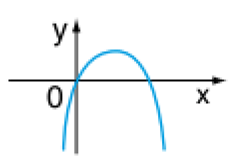
(b)



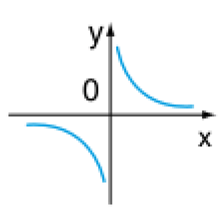
(c)



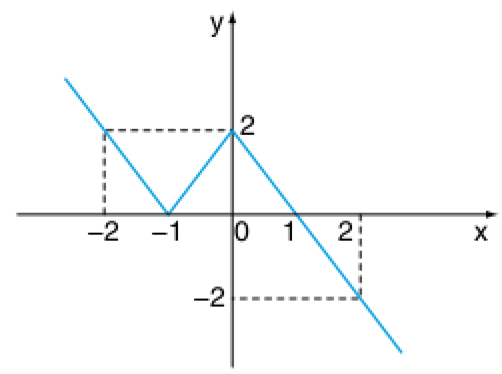
(d)



(e)



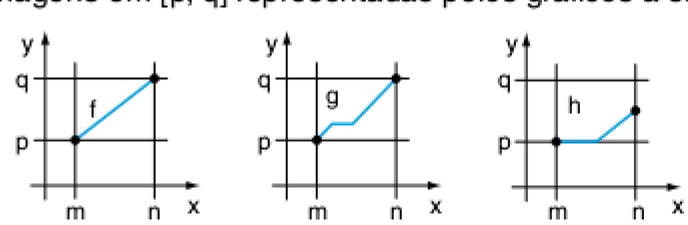
4 **PUC** Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir.



é correto afirmar que:

(a) f é sobrejetora e não injetora.
(b) f é bijetora.
(c) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
(d) $f(x) > 0$ para todo x real.
(e) o conjunto-imagem de f é $]-\infty; 2]$.

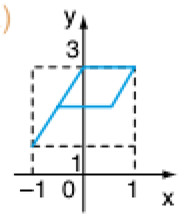
5 **UFF** Considere as funções f, g e h, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas pelos gráficos a seguir.

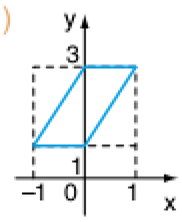


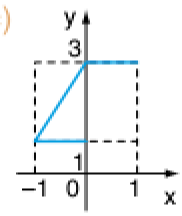
Pode-se afirmar que:

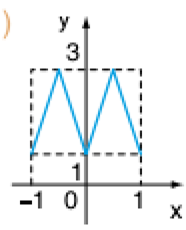
(a) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
(b) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
(c) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
(d) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
(e) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

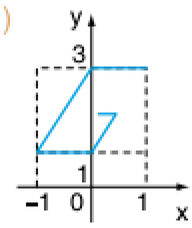
6 **PUC** Dos gráficos, o único que representa uma função de domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$ e imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 3\}$ é:

(a)


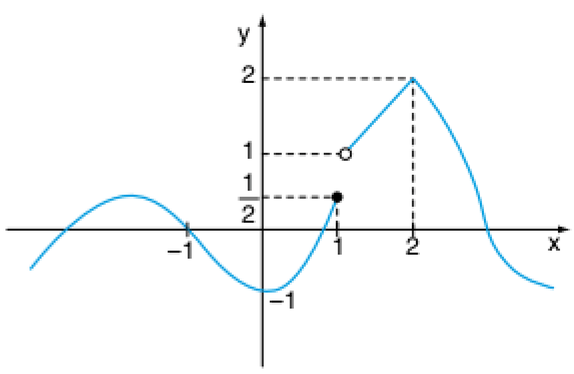
(b)


(c)


(d)


(e)


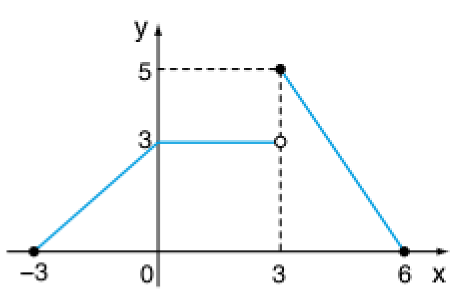
7 **UFRRJ** No gráfico a seguir, a imagem do intervalo $[-1, 2[$ é:



(a) $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]-2,1\right]$
(b) $\left[\frac{1}{2},1\right]\cup[-2,1]$
(c) $\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\left]1,2\right]$
(d) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]\cup\left]1,2\right[$
(e) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]\cup[1,2]$

Função afim

8 **PUC** Com base no gráfico da função $y = f(x)$, o valor de $f(f(f(1)))$ é:



(a) $-\frac{8}{3}$
(b) $-\frac{5}{3}$
(c) $\frac{8}{3}$
(d) $\frac{5}{3}$
(e) 5

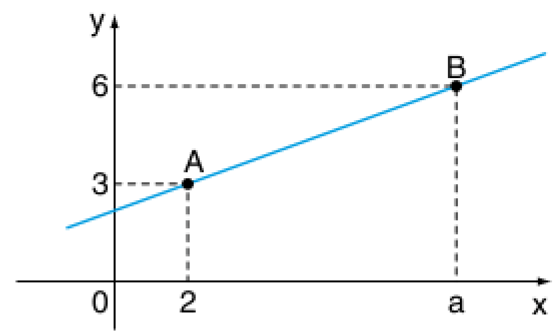
9 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, e sabendo que $(1; -1)$ e $(-1; 2)$ são elementos de f, determinar $f(-17)$.

10 O gráfico de $f(x) = ax + b$ passa pelos pontos $(2; 3)$ e $(5; 7)$. Determinar o ponto de cruzamento com o eixo das ordenadas.

11 **UEL** Se uma função f, do primeiro grau, é tal que $f(1) = 190$ e $f(50) = 2.052$, então $f(20)$ é igual a:

(a) 901
(b) 909
(c) 912
(d) 937
(e) 981

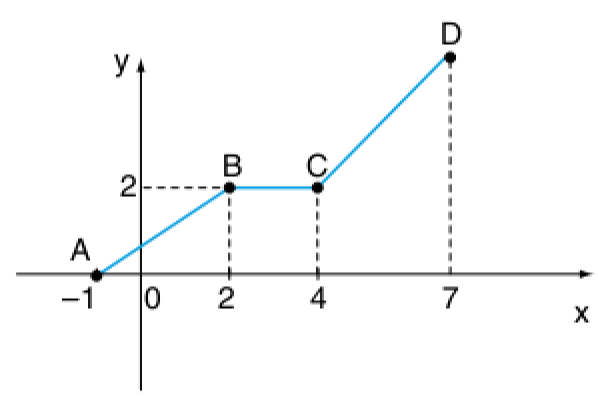
12 **UFSM** A figura representa o gráfico de uma função do 1º grau que passa pelos pontos A e B, onde $a \ne 2$.



O ponto de interseção da reta $\overline{AB}$ com eixo x tem abscissa igual a:

(a) $1 - a$
(b) $a - 2$
(c) $\left(\frac{3a-12}{a-2}\right)$
(d) $4 - a$
(e) $12 - 3a$

13 **Vunesp** A poligonal ABCD da figura adiante é o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo $-1 \le x \le 7$. Sabe-se que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo do x.



Nessas condições, $f(7) - f(4{,}5)$ é igual a:

(a) $\frac{3}{2}$
(b) $\frac{5}{3}$
(c) $\frac{17}{10}$
(d) $\frac{9}{5}$
(e) 2

14 **Unirio** Sejam f e g funções tais que $f(x) = 5x + 2$ e $g(x) = -6x + 7$, determine a lei que define a função afim h, sabendo que $h(-5) = 1$ e que o gráfico de h passa pelo ponto de interseção dos gráficos de f com g.

Inequações de 1º grau

15 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $(5 - 3x) \cdot (7 - 2x) \cdot (1 - 4x) \leq 0$

b) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leq 0$

c) $\dfrac{2x+1}{x+2} > 0$

d) $\dfrac{3-4x}{5x+1} \geq 0$

e) $\dfrac{5x-2}{3x+4} < 2$

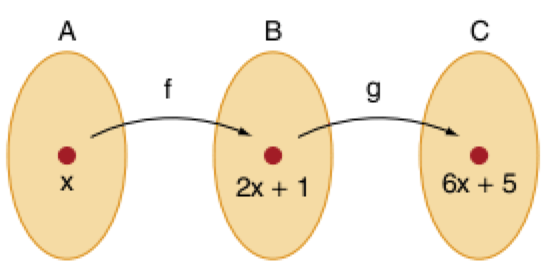
f) $\dfrac{(1-2x)}{(5-x).(3-x)} \leq 0$

g) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x-2}$

h) $\dfrac{2}{3x-1} \geq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

Classificação de função e função afim

16 **Mackenzie** No esquema a seguir, f e g são funções, respectivamente, de A em B e de B em C. Então:



(a) $g(x) = 6x + 5$

(b) $f(x) = 6x + 5$

(c) $g(x) = 3x + 2$

(d) $f(x) = 8x + 6$

(e) $g(x) = \dfrac{(x-1)}{2}$

17 **Uece** Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que: $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = -2x + 1$, se $f(g(m - 1)) - 1 = 3m - g(f(m + 1))$, então $f(m) + g(m)$ é igual a:

(a) $-\dfrac{2}{3}$

(b) $-\dfrac{1}{3}$

(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{2}{3}$

18 **UFRJ** Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = ax + b$, se o gráfico da função f passa pelos pontos A (1, 2) e B (2, 3), a função f^{-1} (inversa de f) é:

(a) $f^{-1}(x) = x + 1$

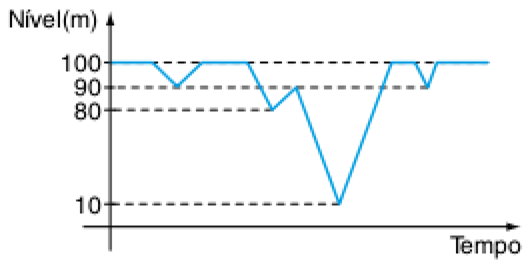
(b) $f^{-1}(x) = -x + 1$

(c) $f^{-1}(x) = x - 1$

(d) $f^{-1}(x) = x + 2$

(e) $f^{-1}(x) = -x + 2$

19 **UFPE** No gráfico a seguir, temos o nível da água armazenada em uma barragem ao longo de três anos.



O nível de 40 m foi atingido quantas vezes nesse período?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) 5

20 **UFMG** Para um número real fixo a, a função $f(x) = ax - 2$ é tal que $f(f(1)) = -3$. O valor de a é:

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

21 **UFMG** Para a função $f(x) = 5x + 3$ e um número b, tem-se $f(f(b)) = -2$.

O valor de b é:

(a) -1

(b) $-\dfrac{4}{5}$

(c) $-\dfrac{17}{25}$

(d) $-\dfrac{1}{5}$

22 **UFMG** Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + 1) = 2f(x) - 5$ e $f(0) = 6$.

O valor de $f(2)$ é:

(a) 0

(b) 3

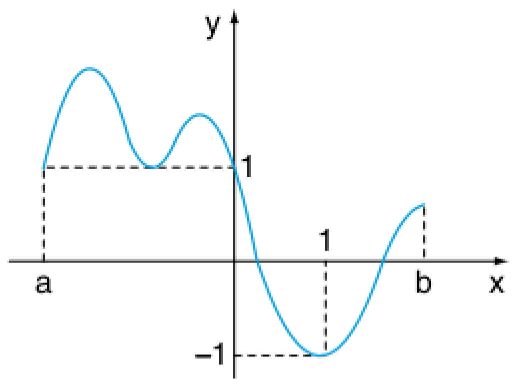
(c) 8

(d) 9

(e) 12

Função inversa e função composta

23 **UFRGS** O gráfico a seguir representa a função y = f(x).



A solução da inequação $f(x) \geq 1$ é o conjunto dos valores de $x \in [\,a, b\,]$ tais que:

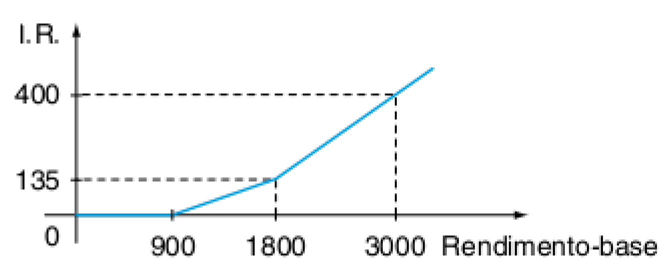
(a) $x \leq 0$
(b) $x \geq 0$
(c) $x \leq 1$
(d) $x \geq 1$
(e) $x \in \mathbb{R}$

24 **Vunesp** Considere as funções: $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$. Determine o conjunto C, dos pontos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $fog = gof$.

25 **UFPR** O imposto de renda (I.R.) a ser pago mensalmente é calculado com base na tabela da Receita Federal da seguinte forma: sobre o rendimento-base aplica-se a alíquota correspondente; do valor obtido, subtrai-se a "parcela a deduzir"; o resultado é o valor do imposto a ser pago.

Rendimento base R$	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
até 900,00	Isento	—
de 900, 01 a 1800,00	15%	135,00
Acima de 1800,00	27,5%	360,00

Tabela da Receita Federal para agosto de 1999.



Em relação ao I.R. do mês de agosto de 1999, considerando apenas as informações da tabela, assinale V ou F.

( ) Sobre o rendimento-base de R$ 1.000,00, o valor do imposto é R$ 15,00.

( ) Para rendimentos-base maiores que R$ 900,00, ao se triplicar o rendimento-base triplica-se também o valor do imposto.

( ) Sendo x o rendimento-base, com x > 1.800, uma fórmula para o cálculo do imposto y é: $y = 0{,}275x - 360$, considerando x e y em reais.

( ) O valor do imposto em função do rendimento-base pode ser representado, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, pelo gráfico mostrado na figura anterior.

26 **Unirio** O gráfico da função $y = mx + n$, em que m e n são constantes, passa pelos pontos A(1, 6) e B(3, 2). A taxa de variação média da função é:

(a) -2
(b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) 2
(e) 4

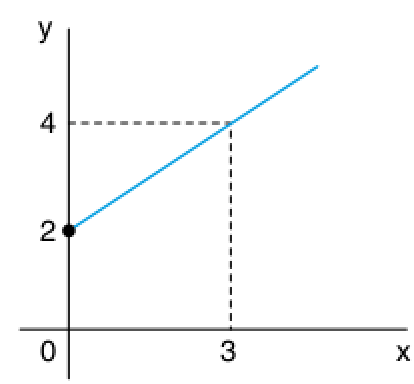
27 **Unirio** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $b \in \mathbb{R}$

$$x \to y = -\left(\frac{x}{2}\right) + b$$

e sabendo-se que fof (4) = 2, a lei que define f^{-1} é:

(a) $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 2$
(b) $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 3$
(c) $y = -2x + 4$
(d) $y = -2x + 6$
(e) $y = -2x + 8$

28 **Unirio** Consideremos a função inversível f cujo gráfico é visto a seguir.



A lei que define f^{-1} é:

(a) $y = 3x + \frac{3}{2}$
(b) $y = 2x - \frac{3}{2}$
(c) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x - 3$
(d) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 2$
(e) $y = -2x - \frac{3}{2}$

TEXTOS COMPLEMENTARES

Coeficiente angular da reta

As demonstrações das propriedades e teoremas famosos serão constantes em nosso material. Mas em alguns momentos, temos o receio de que o aluno ignore algumas demonstrações e simplesmente decore o resultado e saia aplicando.

Queremos incentivar o hábito de demonstrar os resultados que tanto aplicamos, muitas das vezes sem saber o porquê!

Um conceito simples de nosso capítulo é o coeficiente angular da reta, o coeficiente a da função $f(x) = ax + b$. Vamos associar o crescimento (ou decrescimento) de f(x) em função de a. Observe:

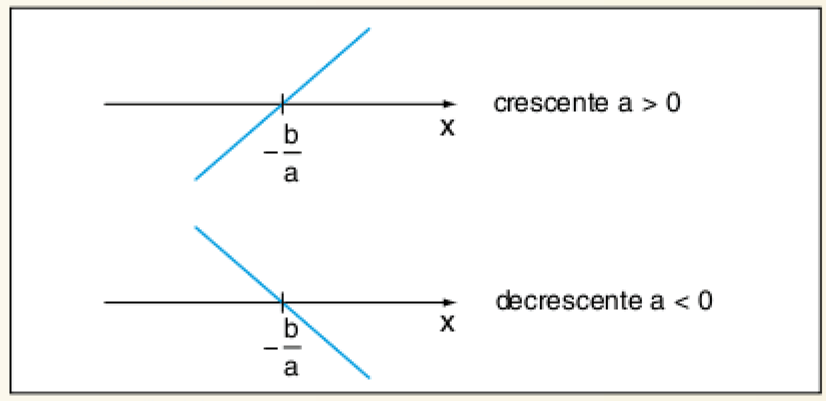
Uma função é crescente se:
$\forall x_1 > x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto,
$f(x_1) - f(x_2) > 0$ e $x_1 - x_2 > 0$.

Dividindo as inequações, temos: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,

mas $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, assim:
$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a\,(x_1 - x_2)$.

Substituindo na fração: $\dfrac{a(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} > 0 \therefore a > 0$.

Faça, você, a demonstração para a função decrescente.



Coeficiente angular da reta.

Injetividade da função $f(x) = ax + b$ para $a \neq 0$

O fato de a função ser estritamente crescente (ou decrescente) já confirma a sua injetividade. Acompanhe outras demonstrações:

1. Seja $x_1 > x_2 \xrightarrow{a>0} ax_1 > ax_2 \longrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \therefore f(x_1) > f(x_2)$

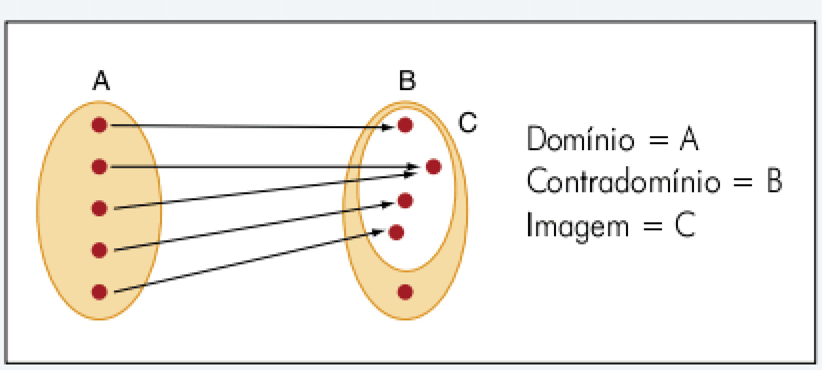
   Conclusão: $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (a demonstração é análoga para $a < 0$)

2. Considerando $f(x_1) = f(x_2) \therefore ax_1 + b = ax_2 + b \therefore ax_1 = ax_2 \xrightarrow{(a\neq 0)} x_1 = x_2$

   Conclusão: $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

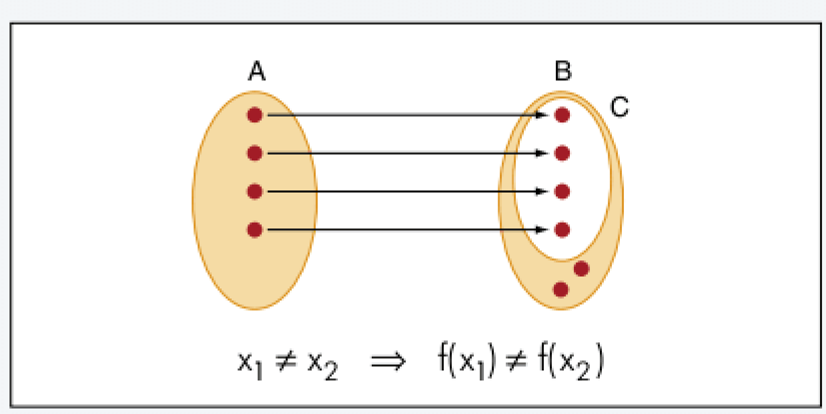
RESUMINDO

A relação f de A em B é chamada de função se todo elemento de A está relacionado com um único elemento de B.

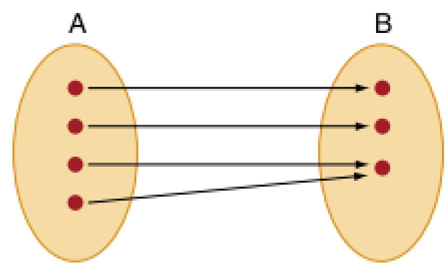


Classificação das funções

a) Injetora: A função f de A em B é uma função injetora se para todos elementos diferentes de A temos imagens diferentes em B.

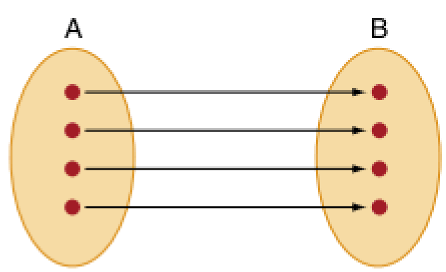


b) Sobrejetora: A função f de A em B é uma função sobrejetora quando o seu conjunto-imagem é o contradomínio B.

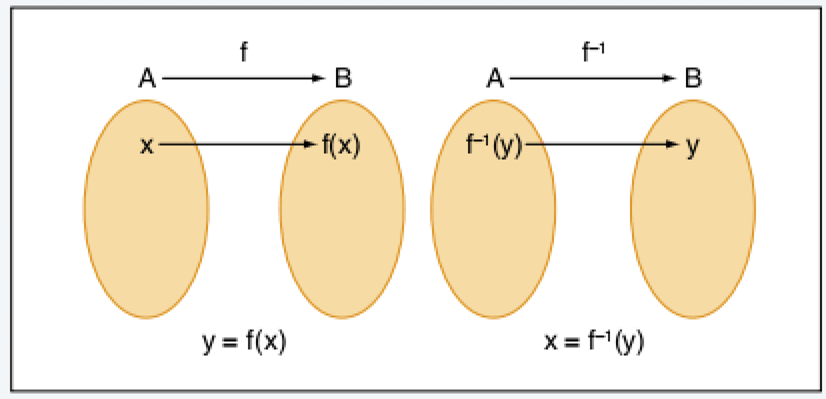


$Im_f = B$

c) Bijetora: A função f de A em B é uma função bijetora quando foi injetora e subjetora.



Uma função f de A em B é inversível se, e somente se f, for bijetora.



QUER SABER MAIS?

SITE

- Vida e obra de Leibniz
  <www.leibnizbrasil.pro.br/>.

Exercícios complementares

Noção de função e sua classificação

1 Dizemos que uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função ou aplicação de A em B quando todo elemento de:

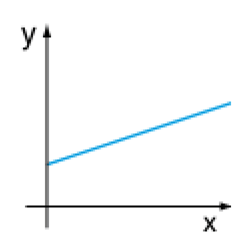
(a) B é imagem de algum elemento em A.
(b) B é imagem de um único elemento de A.
(c) A possui somente uma imagem em B.
(d) A possui, no mínimo, uma imagem em B.
(e) A possui somente uma imagem em B e vice-versa.

2 Sejam os conjuntos A = {1; 2} e B = {0; 1; 2}, qual das afirmativas a seguir é verdadeira?

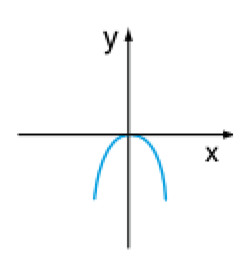
(a) $f(x) = 2x$ é uma função de A em B.
(b) $f(x) = x + 1$ é uma função de A em B.
(c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é uma função de A em B.
(d) $f(x) = x^2 - x$ é uma função de B em A.
(e) $f(x) = x - 1$ é uma função de B em A.

3 Qual dos gráficos não representa uma função?

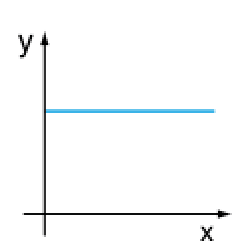
(a)



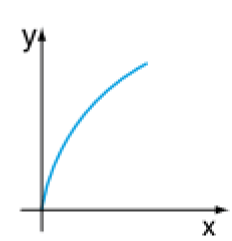
(b)



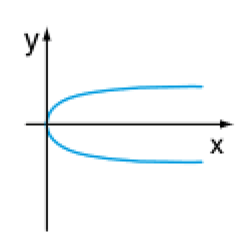
(c)



(d)



(e)



4 **UFRGS** Considerando $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 10\}$, e sendo R a relação em A formada pelos pares (x, y) tais que $y = 2x - 1$, o domínio e a imagem dessa relação correspondem, respectivamente, a:

(a) $\{0, 1, 2, 3\}$ e $\{1, 3, 5, 7\}$.
(b) $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{3, 5, 7, 9\}$.
(c) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
(d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
(e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Função afim

5 Considerando O a origem dos eixos e A e B os pontos onde o gráfico da função $y = -\frac{4}{3}x + 4$ intercepta, respectivamente, os eixos das ordenadas e das abscissas, determine a área do triângulo AOB.

6 Sabendo-se que: $(x + 3; y - 4) = (7x; 2y + 5)$, determine o valor de x e de y.

7 Claudete leu $\frac{3}{5}$ de um livro e ainda faltam 48 páginas para ela terminar de ler o livro todo. Quantas páginas desse livro ela já leu? Qual é o total de folhas que tem esse livro?

8 **Faap** Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da Terra aumenta, aproximadamente, 3 °C a cada 100 m de profundidade. Num certo local, a 100 m de profundidade, a temperatura é de 25 °C. Nessas condições, podemos afirmar que:
A temperatura a 1500 m de profundidade é:

(a) 70 °C
(b) 45 °C
(c) 42 °C
(d) 60 °C
(e) 67 °C

9 **Faap** Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da Terra aumenta, aproximadamente, 3 °C a cada 100 m de profundidade. Num certo local, a 100 m de profundidade, a temperatura é de 25 °C.
Encontrando-se uma fonte de água mineral a 46 °C, a profundidade dela será igual a:

(a) 700 m
(b) 600 m
(c) 800 m
(d) 900 m
(e) 500 m

10 **Faap** A taxa de inscrição num clube de natação é de R$ 150,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente.
Expresse a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso:

(a) T = 12,50 (12 – x)
(b) T = 12,50x
(c) T = 12,50x – 12
(d) T = 12,50 (x + 12)
(e) T = 12,50x + 12

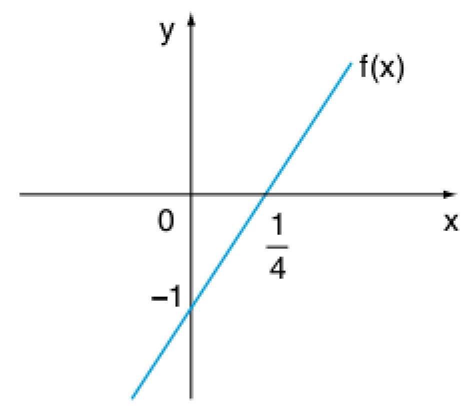
11 **Unicamp** Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius usa-se a fórmula:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

em que F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus Celsius.

a) Transforme 35 °C em graus Fahrenheit.
b) Qual a temperatura (em graus centígrados) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus centígrados?

12 **Cesgranrio** Com a função f(x), representada no gráfico a seguir, e com função g(x), obtém-se a composta g(f(x)) = x.



A expressão algébrica que define g(x) é:

(a) $-\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
(b) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
(c) $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
(d) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
(e) $\frac{x}{4} + 1$

13 **FEI** Em relação à função polinomial $f(x) = 2x^3 - 3x$, é válido afirmar-se que:

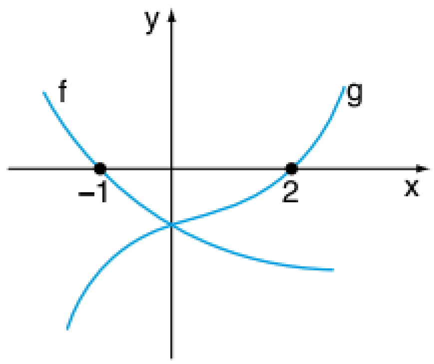
(a) $f(-x) = f(x)$
(b) $f(-x) = -f(x)$
(c) $f(x^2) = (f(x))^2$
(d) $f(ax) = a\,f(x)$
(e) $f(ax) = a^2 f(x)$

Inequações de 1º grau

14 Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x+5} \geq 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x-3).(x+5) \geq 0\right\}$ e $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \geq 0 \text{ e } x + 5 \geq 0\right\}$, pode-se afirmar que:

(a) $A = B = C$
(b) $A \subset B \subset C$
(c) $A \subset C \subset B$
(d) $C \subset A \subset B$
(e) $C \subset A = B$

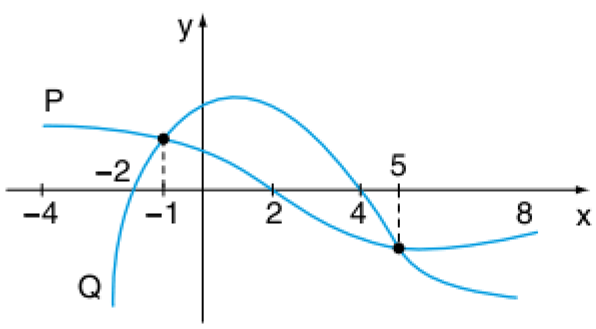
15 Na figura a seguir, temos os esboços dos gráficos de duas funções f e g.



O conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \cdot g(x) < 0\}$ é dado por:

(a) $x > 0$ ou $x < -1$
(b) $-1 < x < 0$
(c) $0 < x < 2$
(d) $-1 < x < 2$
(e) $x < -1$ ou $x > 2$

16 **Fuvest** Os gráficos de duas funções polinomiais P e Q estão representados na figura seguinte.



Então, no intervalo $[-4; 8]$, $P(x) \cdot Q(x) < 0$ para:

(a) $-2 < x < 4$
(b) $-2 < x < -1$ ou $5 < x < 8$
(c) $-4 \leq x < -2$ ou $2 < x < 4$
(d) $-4 \leq x < -2$ ou $5 < x \leq 8$
(e) $-1 < x < 5$

17 Determine a solução da inequação:

$$\frac{1}{1-2x} > \frac{1}{2x+3}$$

18 Determine a solução da inequação

$$-1 < \frac{2-3x}{x+3} < 1$$

Função inversa e função composta

19 **Unirio** Considerando-se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = 2x + 1$:

a) determine a lei que define a função f^{-1};
b) calcule a área da região compreendida entre os gráficos de f e f^{-1}, o eixo dos y e a reta de equação $x = 1$.

20 Sejam funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obter as leis que definem:

a) fog
b) gof
c) fof
d) gog

21 Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$; $g(x) = 4x + 3$ e $h(x) = 2x - 5$, obtenha a lei que define ho(gof).

22 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $fog(x) = x^2 - 2x + 2$, determine a lei da função g.

23 Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 1$ e $fog(x) = 2x^2 - 4x + 3$, determine a lei da função f.

24 Seja a função bijetora $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Determine f^{-1} e fof(x).

Classificação de função e função afim

25 Com relação à função $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, definida para $x \neq 1$, podemos afirmar que:

(a) $f(x) = 0$ não tem soluções reais.
(b) $f(x + 1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
(c) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
(d) $\frac{1}{f(x)} = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$
(e) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

26 Sendo $x \geq 4$, o conjunto-imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ é dado por:

(a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
(b) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
(c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$
(d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$
(e) n.d.a.

27 **Unicamp** Um copo cheio de água pesa 385 g; com $\frac{2}{3}$ da água pesa 310 g. Pergunta-se:

a) Qual é o peso do copo vazio?
b) Qual é o peso do copo com $\frac{3}{5}$ da água?

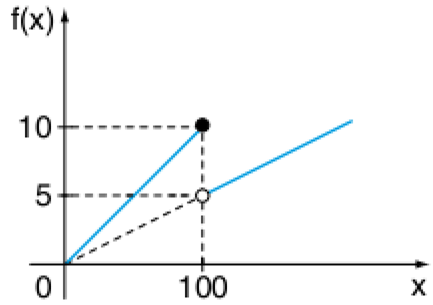
28 **ETF-RJ** Para que as equações:

$$(m - 2)x - (m - 1) = 0 \text{ e } 2x - 4 = 0$$

sejam equivalentes, devemos ter m igual a:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) $\frac{3}{2}$

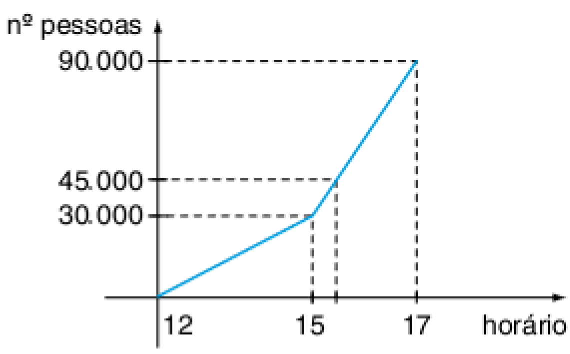
29 **Fatec** Na figura a seguir tem-se o gráfico da função f, em que f(x) representa o preço pago em reais por x cópias de um mesmo original, na Copiadora Reproduz.



De acordo com o gráfico, é verdade que o preço pago nessa copiadora por um mesmo original:

(a) 228 cópias é R$ 22,50.
(b) 193 cópias é R$ 9,65.
(c) 120 cópias é R$ 7,50.
(d) 100 cópias é R$ 5,00.
(e) 75 cópias é R$ 8,00.

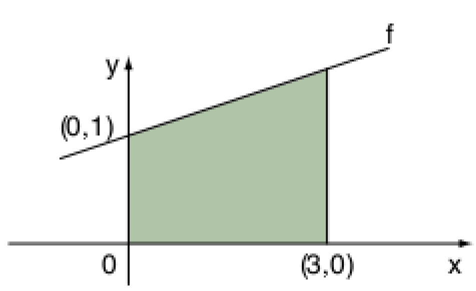
30 **Uerj** Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.
Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir.



Quando o número de torcedores atingiu 45000, o relógio estava marcando 15 horas e:

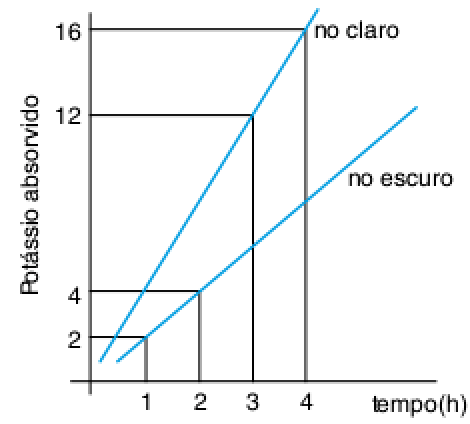
(a) 20 min.
(b) 30 min.
(c) 40 min.
(d) 50 min.

31 **Unirio** Considere a figura a seguir, em que um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função f. Sabendo-se que a área da região sombreada é 9 cm^2, a lei que define f é:



(a) $y = \left(\dfrac{7x}{6}\right) - 2$
(b) $y = \left(\dfrac{3x}{4}\right) - 1$
(c) $y = \left(\dfrac{2x}{5}\right) + 1$
(d) $y = \left(\dfrac{5x}{2}\right) - 1$
(e) $y = \left(\dfrac{4x}{3}\right) + 1$

32 **Vunesp** O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.



Nos dois casos, a função linear y = mx ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como taxa de absorção (geralmente medida em m mol por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, se m_1 é a taxa de absorção no claro e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre essas duas taxas é:

(a) $m_1 = m_2$
(b) $m_2 = 2m_1$
(c) $m_1 \cdot m_2 = 1$
(d) $m_1 \cdot m_2 = -1$
(e) $m_1 = 2m_2$

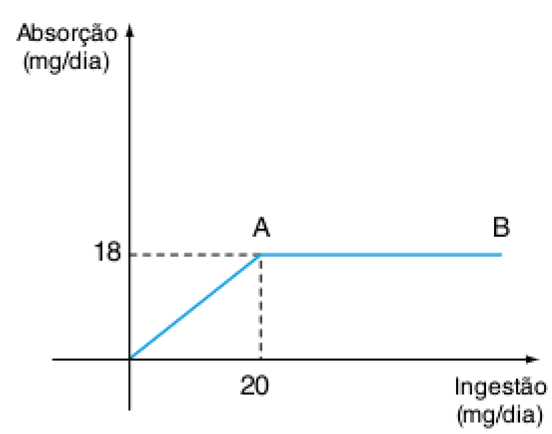
33 **Uerj** Para calcular $\dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{5}$, Paulo subtraiu os numeradores e dividiu o resultado por 10 obtendo:

$$\frac{3}{2} - \frac{12}{5} = \frac{(3-12)}{10} = -0{,}9$$

a) Determine de forma correta o valor da expressão $\dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{5}$.

b) Considerando que Paulo tenha calculado com base na fórmula $\left(\dfrac{x}{2}\right) - \left(\dfrac{y}{5}\right) = \dfrac{(x-y)}{10}$, em que x e y são reais, identifique o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano que tornam essa igualdade verdadeira.
Esboce, também, o gráfico cartesiano.

34 **UFMG** Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.

A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:
(a) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.
(b) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
(c) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
(d) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

35 **UEL** Seja f a função de ℝ em ℝ definida por:

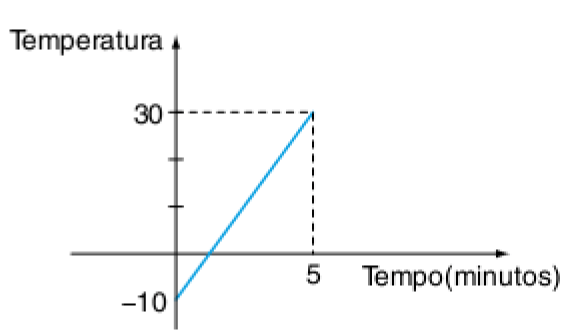
$$f(x) = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ x, \text{ se } x > 1 \end{cases},$$

O conjunto-imagem de f é:
(a)]–∞, 0]
(b) [1, +∞[
(c)]0, 1[
(d) [0, +∞[
(e) ℝ

36 **Fuvest** O sistema $\begin{cases} x+(c+1)y=0 \\ cx+y=-1 \end{cases}$, em que $c \neq 0$, admite uma solução (x; y) com x = 1. Então, o valor de c é:
(a) –3
(b) –2
(c) –1
(d) 1
(e) 2

37 Se $a < -2$, os valores de x tais que $\frac{a}{2} \cdot (x - a) < -(x + 2)$ são aqueles que satisfazem:
(a) $x < a - 2$
(b) $x < -2a$
(c) $x > 2a$
(d) $x > a - 2$
(e) $a - 2 < x < 2 - a$

38 **Cesgranrio** Uma barra de ferro com temperatura inicial de –10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0 °C.



(a) 1 min.
(b) 1 min. e 5 s.
(c) 1 min. e 10 s.
(d) 1 min. e 15 s.
(e) 1 min. e 20 s.

39 **Fuvest** A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:
(a) $f(x) = x - 3$
(b) $f(x) = 0{,}97x$
(c) $f(x) = 1{,}3x$
(d) $f(x) = -3x$
(e) $f(x) = 1{,}03x$

40 **UEL** Seja f a função de ℝ em ℝ dada por $f(x) = (k^2 - 4)x + 3k$, na qual k é uma constante real, se f é decrescente e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (1; 0), então um outro ponto do gráfico de f é:
(a) (–3; 6)
(b) (–2; 9)
(c) (–1; 1)
(d) (2; 3)
(e) (0; 6)

41 **Fuvest** Determine todos os valores de m para os quais a equação: $\frac{mx}{4} - \frac{(x-2)}{m} = 1$
a) admite uma única solução.
b) não admite solução.
c) admite infinitas soluções.

42 **Fuvest** A moeda de um país é o "liberal", indicado por λ. O imposto de renda λ é uma função contínua da renda R, calculada da seguinte maneira:
I. Se R ≤ 24.000 λ, o contribuinte está isento do imposto.
II. Se R ≥ 24.000 λ, calcula-se 15% de R, e do valor obtido subtrai-se um valor fixo P, obtendo-se o imposto a pagar I.
Determine o valor fixo P.
(a) 1.200 λ
(b) 2.400 λ
(c) 3.600 λ
(d) 6.000 λ
(e) 24.000 λ

43 **UFPE** Seja A um conjunto com 3 elementos e B um conjunto com 5 elementos, quantas funções injetoras de A em B existem?

44 **Fuvest** Seja a função $f(x) = x^2 . (x^2 - 1) . (x - 2)$, fazer o esboço da função $f(x - 2)$.

45 Prove que a função $f(x) = \sqrt{2^{x^2} - 1}$ não é injetora.

46 Seja f: ℝ* → ℝ uma função tal que $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, determine a expressão de f(x).

47 Determine a função inversa de

$f(x) = \begin{cases} 2x+3; x \geq 2 \\ 3x+1; x < 2 \end{cases}$ e faça o esboço dos gráficos de f e f^{-1}.

48 Seja f: ℝ → ℝ uma função tal que $f(x) + 2 \cdot f(6 - x) = x$. Determine f(1).

49 Sejam f e g as funções reais definidas por

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3; x \geq 2 \\ 2x - 3; x < 2 \end{cases}$ e $g(x) = 2x + 3$,

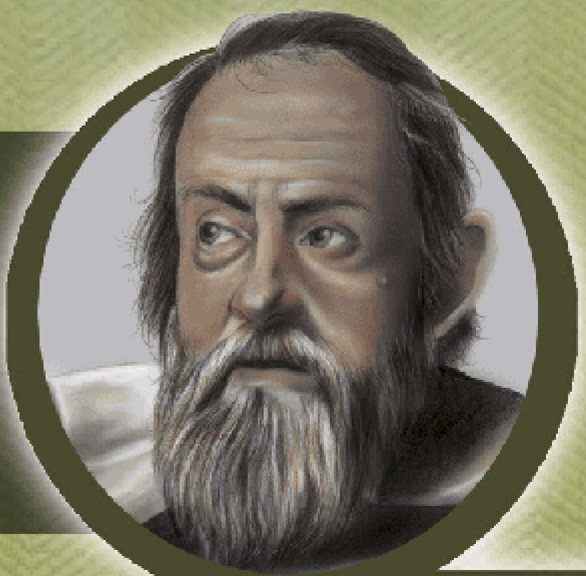
determine as regras das funções fog e gof.

3

FRENTE 1

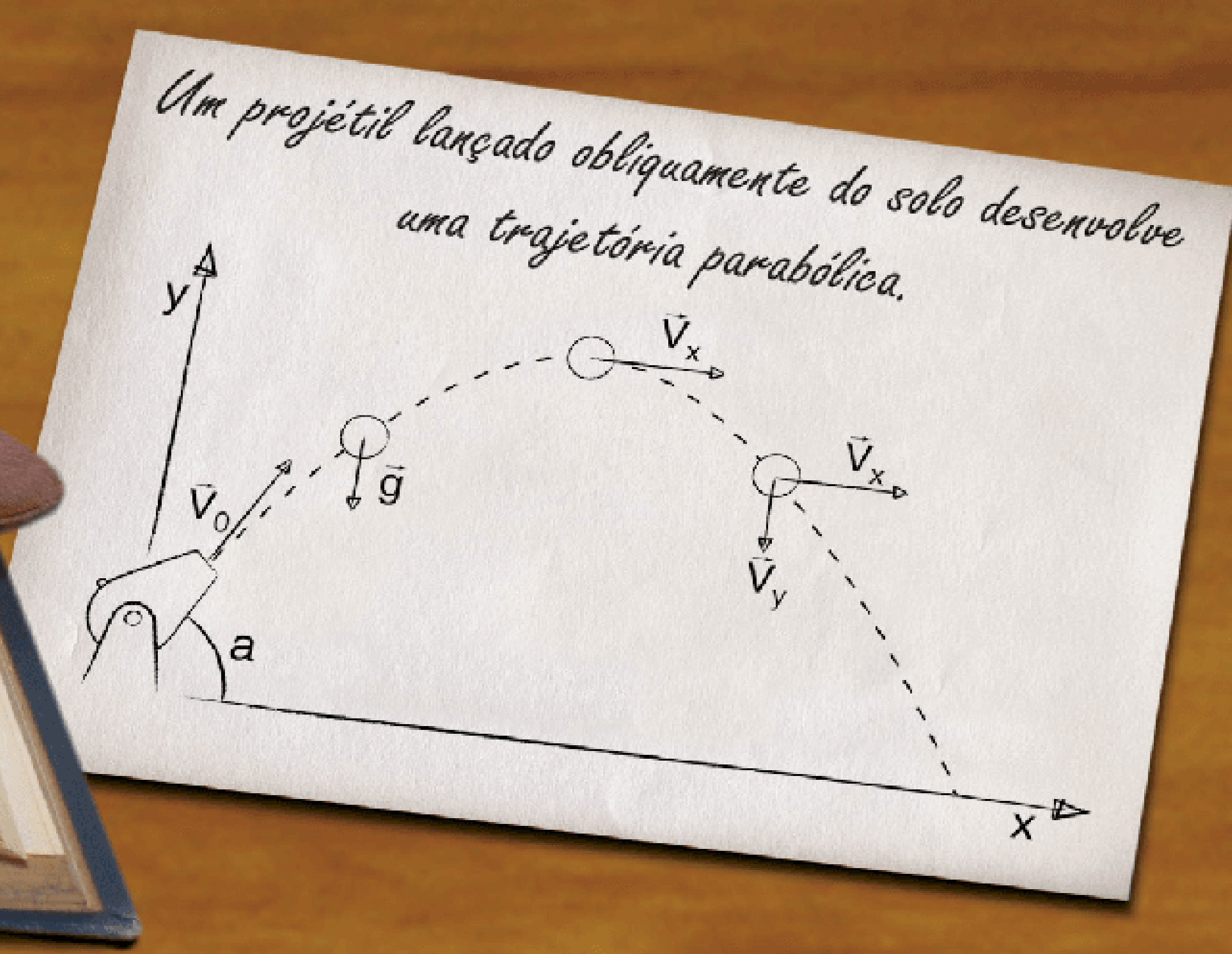
Função do 2°grau

Galileu Galilei, matemático, físico e astrônomo italiano da Renascença, é chamado de pai do método científico. A ciência deixou de ser uma discussão filosófica e passou a ser fundamentada em experimentos.



Galileu Galilei, 1564-1642.

Galileu interessou-se pelos problemas de artilharia e demonstrou que a trajetória descrita pelos projéteis descrevia uma curva chamada parábola.



A função do 2º grau (Função polinomial do 2º grau)

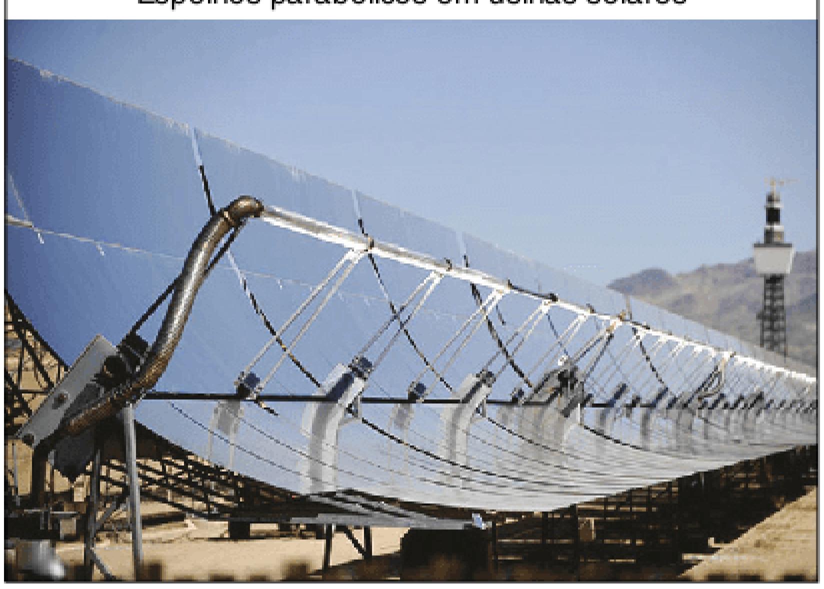
Uma função é do 2º grau quando for uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$.

A parábola é o gráfico referente a uma função polinomial do 2º grau, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$. A propriedade geométrica dos pontos da parábola é responsável por suas inúmeras aplicações práticas. Observe algumas delas:

Antena parabólica com receptor no foco principal

PRATYA CHUTIPATTARASAKUL/123RF.COM

Espelhos parabólicos em usinas solares



REPRODUÇÃO

Fig. 1 Exemplos de parábolas.

Raízes da função do 2º grau (zeros da função)

Dada uma função f(x) qualquer, denominam-se raízes dessa função todos os valores de x, tal que $f(x) = 0$.

O problema do cálculo das raízes de uma função do 2º grau remonta há mais de 4.000 anos. No texto complementar deste capítulo, há um pequeno histórico desse fascinante capítulo da Matemática.

Mas vamos resolver algumas equações do 2º grau aparentemente sem a utilização de fórmulas resolutivas.

O método consiste na reconstrução de um quadrado perfeito.

Exercícios resolvidos

1 Resolva:
$x^2 - 6x + 8 = 0$

Resolução:
Transformado 8 em 9 – 1, temos:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{quadrado perfeito}} - 1 = 0 \therefore (x-3)^2 - 1 = 0 \therefore$$

$$\therefore (x-3)^2 = 1, \text{ logo:}$$

$x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ *ou* $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

As raízes reais são $S = \{2; 4\}$.

2 Resolva:
$x^2 + 2x + 4 = 0$

Resolução:
Transformando 4 em 1 + 3, temos:

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{quadrado perfeito}} + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = -3$$

Não existem números reais que elevados ao quadrado resultam em –3. Logo: $S = \varnothing$.

3 Resolva:
$x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolução:
A própria equação é um quadrado perfeito, logo
$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$.

Esses exemplos numéricos nos auxiliarão a compreender a construção da fórmula resolutiva chamada de **fórmula de Bhaskara**.

Considere $ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, multiplicando por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

e forme um quadrado perfeito adicionando b^2 nos dois membros: $\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{quadrado perfeito}} + 4ac = b^2 \therefore$

$$\therefore (2ax + b)^2 + 4ac = b^2 \therefore (2ax + b)^2 = \boxed{b^2 - 4ac}$$

Como a expressão $(b^2 - 4ac)$ é o resultado de um quadrado perfeito, de acordo com os exemplos apresentados, ele vai **discriminar** a natureza das raízes. Por isso, merece um nome especial, o **discriminante**, representado pela letra grega Δ (delta).

Vamos continuar os cálculos:

$$(2ax + b)^2 = \Delta \therefore 2ax + b = \sqrt{\Delta} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou}$$

$$2ax + b = -\sqrt{\Delta} \therefore x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \therefore x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sendo: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Natureza das raízes

A fórmula de Bhaskara para o cálculo das raízes depende do valor do Δ, observe:

ATENÇÃO!

- $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais e distintas:
  $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais:
  $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
- $\Delta < 0$, teremos duas raízes não reais (imaginárias).

Relações entre coeficientes e raízes

Em uma equação do 2º grau, é possível obter a soma e o produto das raízes (de qualquer natureza) sem resolver a equação.

Dependendo dos valores da soma e produto, podemos avaliar as raízes mentalmente.

Observe os resultados:

1. Soma das raízes (s)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \therefore$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \ \therefore\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Produto das raízes (p)

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(b^2)-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \therefore\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercícios resolvidos

4 Resolva a equação $x^2 - 15x + 44 = 0$ por soma e produto.

Resolução:

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{(-15)}{1} \therefore s = 15$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{44}{1} = 44 \therefore p = 44$$

As raízes da equação são dois números tais que a soma é 15 e o produto 44. Mentalmente, 4 e 11.
S = {4; 11}

5 Dada a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$, calcule, sem resolver a equação de raízes x_1 e x_2, o valor de:

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $x_1^3 + x_2^3$

Resolução:

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{s}{p}$, *da equação, tiramos:*

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ e } p = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

assim: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{s}{p} = \dfrac{-2}{1} = -2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$= s^2 - 2p = (-2)^2 - 2(1) = 4 - 2 = 2$

c) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) =$
$= s^3 - 3ps = (-2)^3 - 3(1)(-2) = -8 + 6 = -2$

ATENÇÃO!

A fórmula de Bhaskara é um erro consagrado pelo uso aqui no Brasil. O texto complementar vai elucidar esse fato.
Uma equação do 2º grau possui raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$.
Uma função do 2º grau é quadrado perfeito se, e somente se, $\Delta = 0$.
Lembre-se!
Toda expressão algébrica que pode ser reduzida à forma $(x + y)^2$ é chamada de quadrado perfeito.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \therefore a^3 + b^3 =$
$= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Formação de uma equação

Vamos resolver agora o problema inverso, ou seja, dadas as raízes, monte a equação. Observe a demonstração da fórmula:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$; dividir a equação por a, assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \therefore x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Observe: $-\dfrac{b}{a} = s$ e $\dfrac{c}{a} = p$

logo: $x^2 - sx + p = 0$

Exercício resolvido

6 Forme uma equação do 2º grau cujas raízes são –6 e 4.

Resolução:

soma $= s = -6 + 4 = -2$
produto $= p = (-6) \cdot (4) = -24$, *substituindo os valores na fórmula, temos:*
$x^2 - (-2)x - 24 = 0 \ \therefore\ x^2 + 2x - 24 = 0$

ATENÇÃO!

Cuidado que $x^2 + 2x - 24 = 0$ não é a única equação que possui raízes -6 e 4. Por exemplo, $2x^2 + 4x - 48 = 0$ também possui raízes -6 e 4. Assim, se multiplicamos a equação por um número $K \in \mathbb{R}^*$, teremos infinitas equações com raízes -6 e 4, $K(x^2 + 2x - 24) = 0$.

Fatoração do trinômio do 2º grau

Vamos transformar o trinômio do 2º grau em um produto de dois fatores do 1º grau.

Observe:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \ \therefore\ a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

Como $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ e $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, assim:

$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a \cdot (x - x_1)(x - x_2) = 0\ \therefore$

$\therefore\ ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Exercício resolvido

7 Fatore a expressão $2x^2 - 5x + 2 = 0$ em um produto de dois fatores do 1º grau.

Resolução:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0\ \therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.2}}{2.2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}\ \therefore\ x_1 = \frac{5+3}{4} = 2\ ou\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

Substituindo na expressão, temos:

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2).\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Forma canônica do 2º grau

A forma canônica do 2º grau é uma outra expressão de representação da função do 2º grau que é muito conveniente para a demonstração de certas propriedades.

Observe a sequência das passagens até a forma canônica.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{quadrado perfeito}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{\Delta}{4a}$$

Assim:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Gráfico da função do 2º grau

A função do 2º grau tem como gráfico a curva chamada **parábola**. Nos capítulos de geometria analítica, vamos demonstrar e explicar melhor essa curva. Para uma ideia inicial, leia mais tarde o texto complementar.

Propriedades da parábola

P1 A parábola corta o eixo y no ponto $(0; c)$; pois:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c\ \therefore\ f(0) = c$

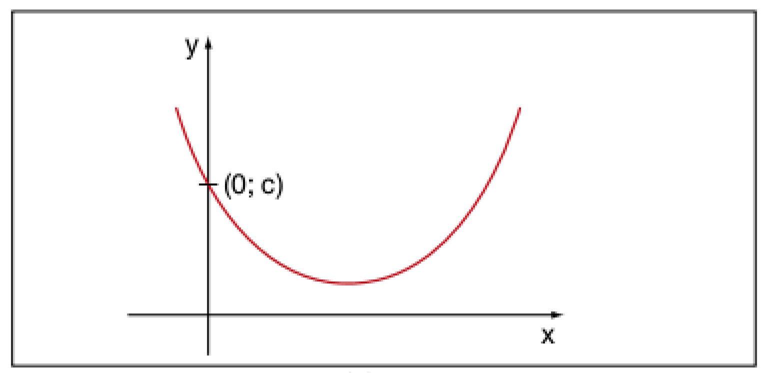


Fig. 2 Termo independente (c).

P2 A parábola pode "cortar" o eixo das abscissas em 2 pontos, tangenciá-lo em 1 ponto ou não cortar o eixo.
Lembramos que raiz de uma função é o valor de x que anula o y, logo, todas as raízes reais de qualquer função estão nos pontos de cruzamento do gráfico com o eixo x.
De acordo com a **natureza das raízes**, podemos concluir:

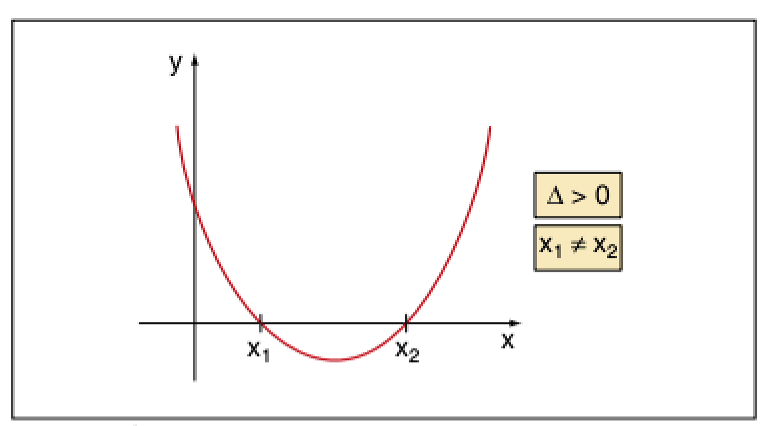


Fig. 3 Parábola cortando o eixo.

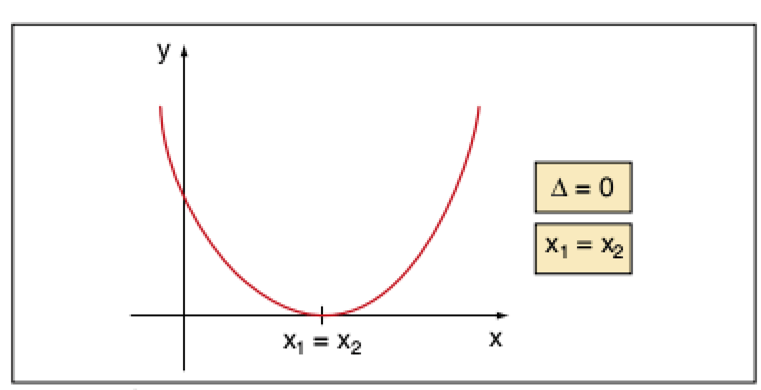


Fig. 4 Parábola tangenciando o eixo.

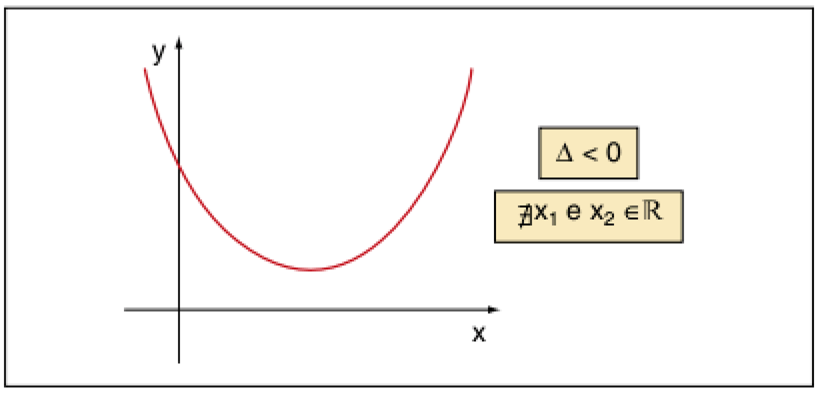


Fig. 5 Parábola com raízes imaginárias.

P3 A parábola é uma curva simétrica, observe o eixo de simetria e sua localização:

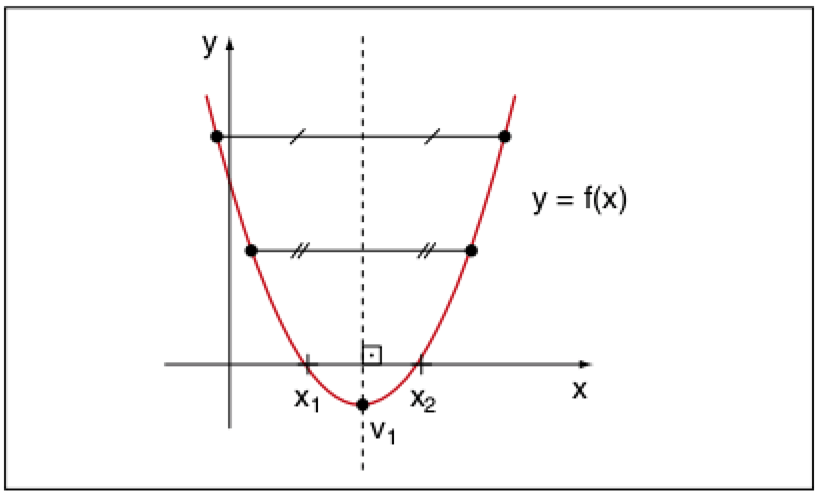


Fig. 6 Eixo de simetria paralelo ao eixo y.

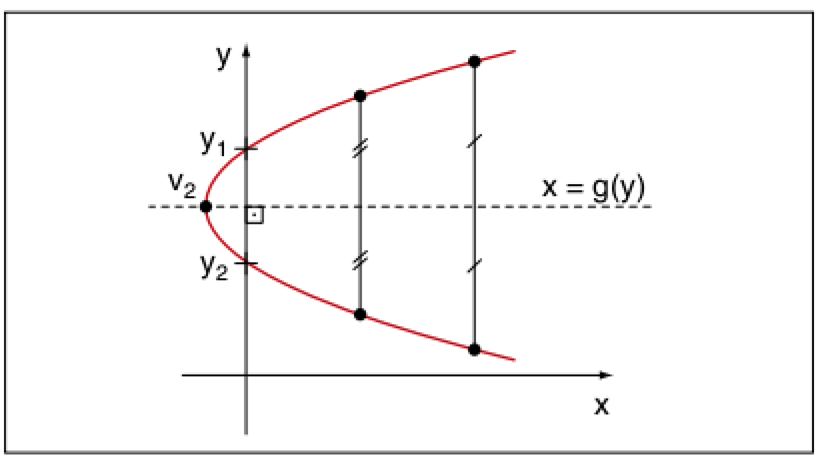


Fig. 7 Eixo de simetria paralelo ao eixo x.

Os pontos v_1 e v_2 são os únicos do gráfico que pertencem ao eixo de simetria. Esses pontos são denominados **vértices da parábola**.

P4 Determinação das coordenadas do vértice da parábola $(x_v; y_v)$.
Para o cálculo do vértice da parábola, vamos utilizar a propriedade da simetria da parábola.

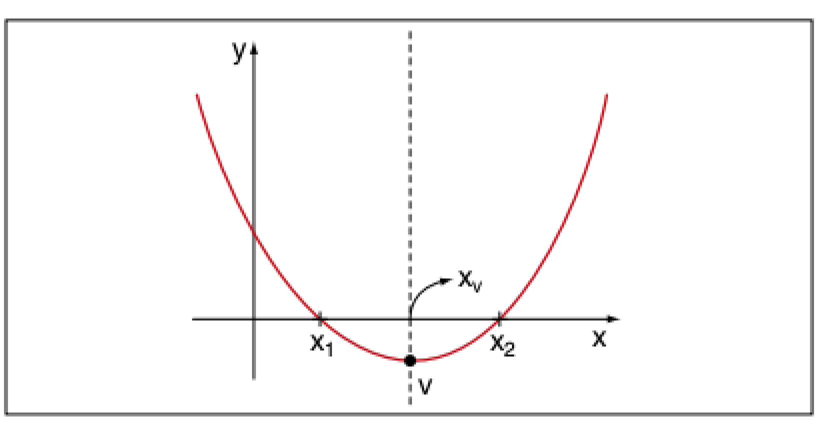


Fig. 8 x_v é o ponto médio do segmento x_1x_2.

A abscissa do vértice é o ponto médio do segmento que une as raízes. O segmento $x_vx_1 = x_2x_v \therefore x_v - x_1 = x_2 - x_v \therefore 2x_v =$

$$= \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{soma das raízes}} \therefore 2x_v = -\frac{b}{a} \therefore x_v = -\frac{b}{2a}$$

Para obter o y_v, substitua o x_v na função:

$$f(x_v) = y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

ATENÇÃO!

As coordenadas do vértice de uma função

$f(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ são $v = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$

P5 O coeficiente a determina a orientação da concavidade da parábola.
A demonstração da propriedade requer o uso da forma canônica do 2º grau.

1º caso: $a > 0$

Para $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos escrever, sem perda de generalidade, que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$; assim, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, subtraindo os dois membros $\frac{\Delta}{4a}$, temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Observe que o lado esquerdo é a forma canônica do 2º grau, portanto $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$.

Como x é um real qualquer, sempre teremos o seu y maior ou igual à ordenada do vértice. Isso implica que a concavidade está para cima.

2º caso: $a < 0$

Vamos seguir exatamente o procedimento do 1º caso, observe: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \therefore a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

(pois a é negativo), subtraindo dos dois membros $\frac{\Delta}{4a}$, construímos a forma canônica do 2º grau, que é o próprio y, observe:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \therefore y \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Isso prova que todas as ordenadas são menores ou iguais a $-\dfrac{\Delta}{4a}$. Isso implica que a concavidade está para baixo.

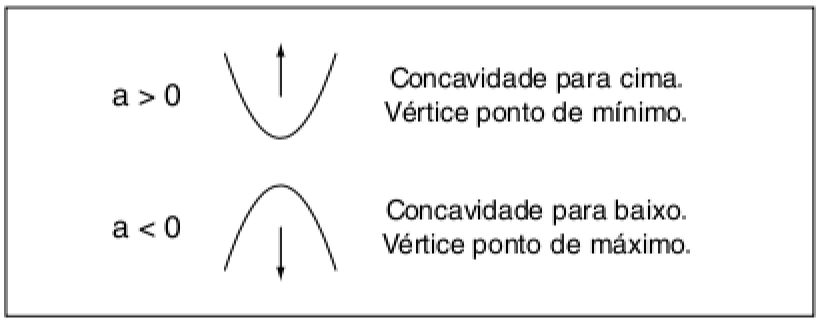


Fig. 9 Concavidade da parábola.

Esses resultados mostram que a ordenada do ponto de máximo ou de mínimo é $-\dfrac{\Delta}{4a}$. Assim, a abscissa do vértice pode ser determinada algebricamente. Pela forma canônica, temos:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}\ \therefore\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\ \therefore\ x=\frac{-b}{2a}$$

Confirmamos assim as coordenadas do vértice da parábola:

$$v=\left(\frac{-b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

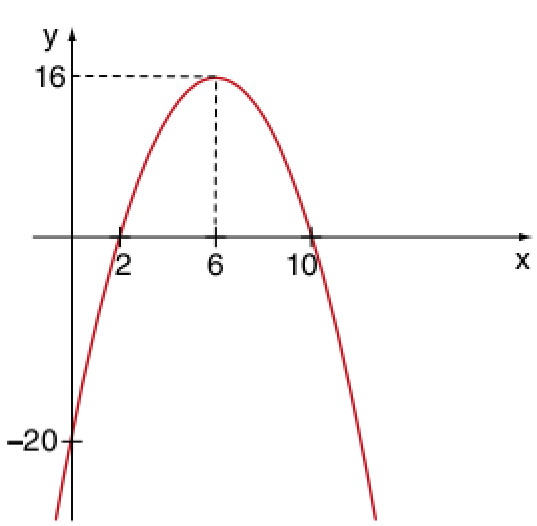
Exercícios resolvidos

8 Considere a função f, de variável real, dada por $f(x) = -x^2 + 12x - 20$.
Determine o conjunto-imagem e seu valor máximo ou mínimo.

Resolução:
Vamos fazer uma solução completa.
Raízes da função:
$-x^2 + 12x - 20 = 0 \therefore x^2 - 12x + 20 = 0$

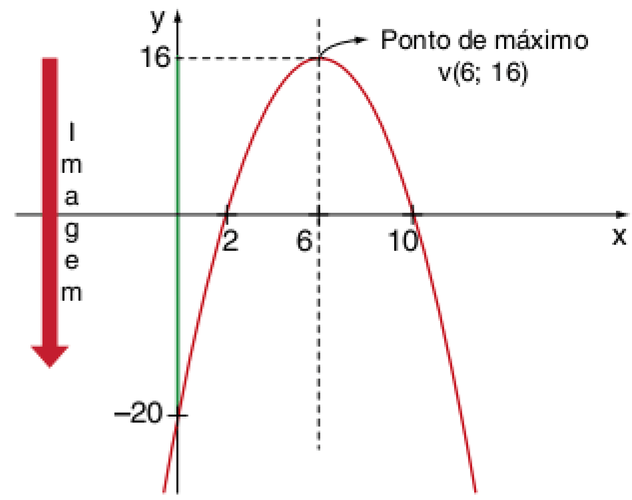
$$\begin{cases} s = 12 \\ p = 20 \end{cases} \text{raízes 10 e 2}$$

a = –1, concavidade para baixo, vértice: ponto de máximo, observe:



$$x_v = -\frac{b}{2a} = 6\ ;\ y_v = -(6)^2 + 12(6) - 20 = 16$$

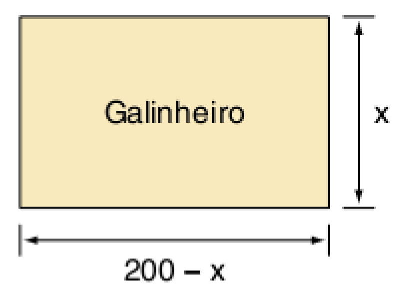
Conjunto-imagem:



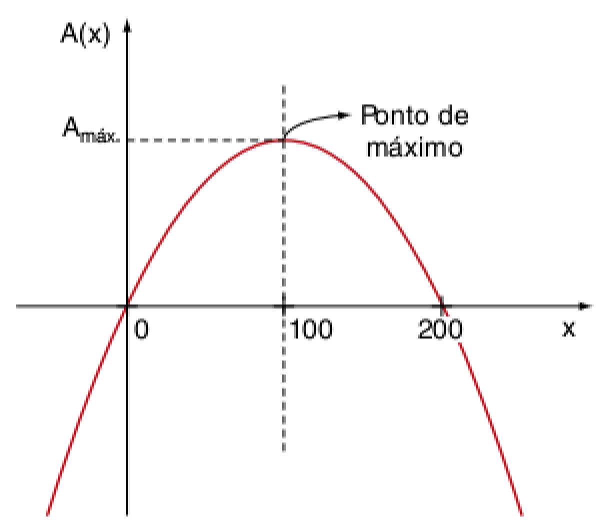
$Im_f =]-\infty;16]$

9 Um sitiante dispõe de 400 m de cerca de arame e gostaria de montar o maior galinheiro possível, de forma retangular. Como ele deve proceder?

Resolução:
O perímetro do galinheiro retangular é de 400 m. Chamando de x a largura, o comprimento deve ser de 200 – x. Observe:

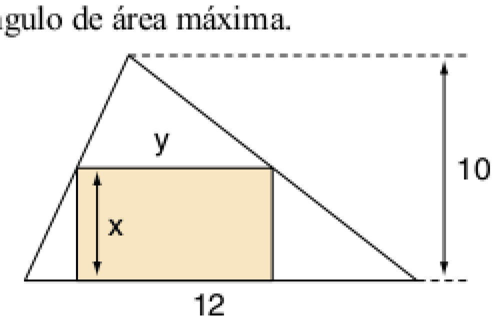


Vamos analisar a função da área do galinheiro.
Área = (base) · (altura) $\therefore A(x) = (200 - x)\cdot x \therefore A(x) = -x^2 + 200x$



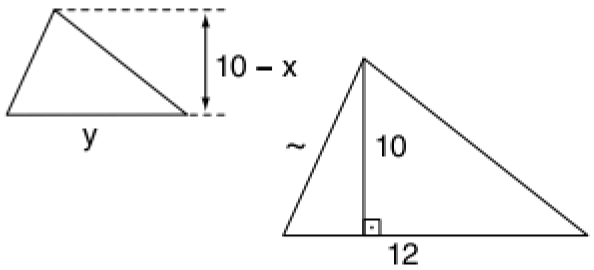
A função admite ponto de máximo quando x = 100 m. O retângulo se transformará em um quadrado de área $(100\ m)^2 = 10.000\ m^2$.

10 Considere um triângulo acutângulo de base 12 m e altura 10 m e um retângulo inscrito conforme a figura a seguir. Determine o retângulo de área máxima.



Resolução:

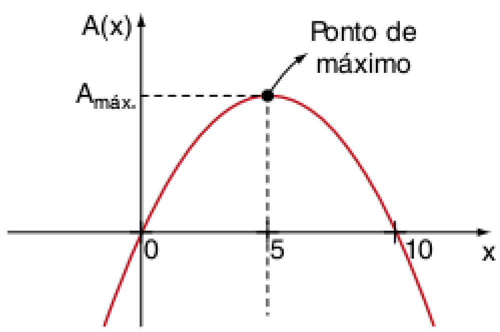
A expressão da área do retângulo é $A = xy$ (temos uma função de duas variáveis). Vamos encontrar uma relação entre x e y para que possamos criar uma função da área com uma única variável.



$$\frac{y}{12} = \frac{10-x}{10} \therefore 10y = 120 - 12x \therefore$$

$$\therefore 5y = 60 - 6x \therefore y = 12 - \frac{6}{5}x$$

Subtraindo na expressão da área, temos:



Analisando o gráfico dessa figura, a área máxima ocorre para $x = 5$ m e $y = 12 - 6 \cdot \frac{5}{5} = 6$ m

O retângulo tem dimensões de 5 m e 6 m e área máxima de 30 m².

ATENÇÃO!

Você pode generalizar o exemplo 10 para um triângulo de base b e altura h.
Seguindo os mesmos passos, você encontrará as dimensões do retângulo de área máxima valendo $\frac{b}{2}$ e $\frac{h}{2}$.
Compare com o resultado do exemplo.

11 Um ônibus de 40 lugares vai fazer uma viagem e, se viajar lotado, cada passagem custa R$ 20,00. Se o ônibus viajar com lugares vazios, cada passageiro paga R$ 1,00 para cada assento vazio. Determine a função da receita da viagem em função do número de assentos vazios. Determine a situação da receita máxima.

Resolução:

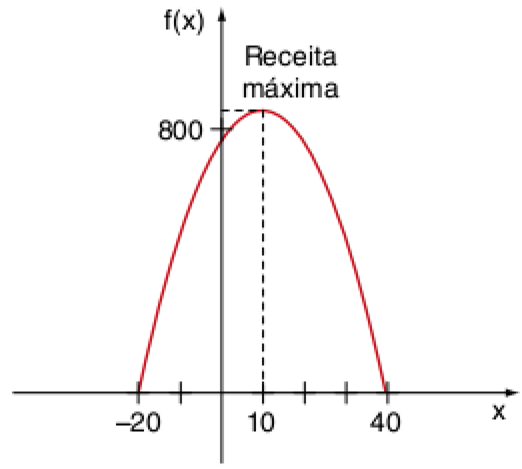
O preço de cada passagem é: $p = 20 + x$, x é o número de assentos vazios.

A receita será dada por $p(40 - x)$, assim

$f(x) = (x + 20)\cdot(40 - x) \therefore f(x) = 40x - x^2 + 800 - 20x \therefore$
$\therefore f(x) = -x^2 + 20x + 800.$

Esboço do gráfico:

Pelo gráfico, obtemos que a receita máxima ocorre quando existem 10 assentos vagos, assim $f(10) = -100 + 200 + 800 = 900$.



Análise do sinal

A análise do sinal de uma função do 2º grau é muito importante para resolver inequações em geral. Ao analisarmos o sinal de uma função, devemos saber os valores de x para os quais $y > 0$; $y = 0$ e $y < 0$.

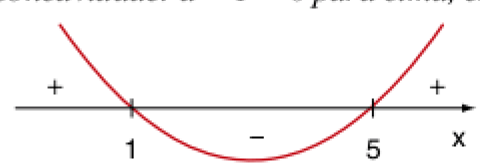
Exercícios resolvidos

12 $y = x^2 - 6x + 5$

Resolução:

É conveniente fazer um esboço do gráfico.

Raízes: 1 e 5 concavidade: $a = 1 > 0$ para cima, então:

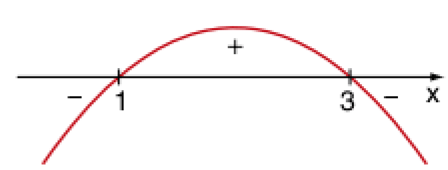


$x > 5$ ou $x < 1 \longrightarrow y > 0$
$x = 5$ ou $x = 1 \longrightarrow y = 0$
$1 < x < 5 \longrightarrow y < 0$

13 $y = -x^2 + 2x + 3$

Resolução:

Raízes: 3 e 1 concavidade: $a = -1 < 0$ para baixo, então:

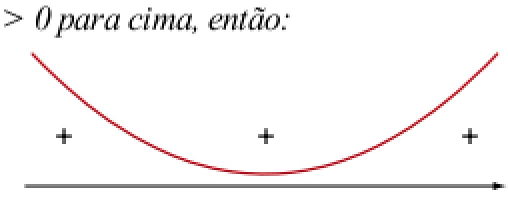


$x > 3$ ou $x < -1 \longrightarrow y < 0$
$x = 3$ ou $x = -1 \longrightarrow y = 0$
$-1 < x < 3 \longrightarrow y > 0$

14 $y = x^2 + 2x + 3$

Resolução:

Raízes: $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, raízes imaginárias concavidade: $a = 1 > 0$ para cima, então:

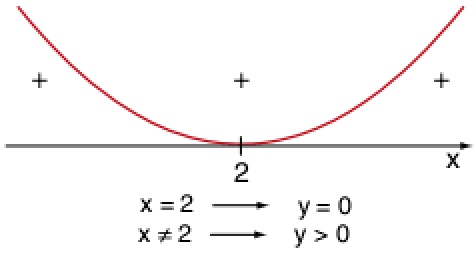


$\forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow y > 0$
$a > 0$ e $\Delta < 0$

15 $y = x^2 - 4x + 4$

Resolução:

$\Delta = (-4)2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$; 2 raízes reais e iguais.
concavidade: $a = 1 > 0$, para cima, então:



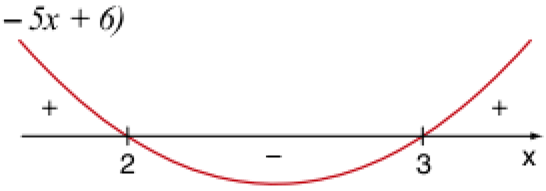
16 Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 5x + 6) \cdot (-x^2 + 2x + 3) \geq 0$

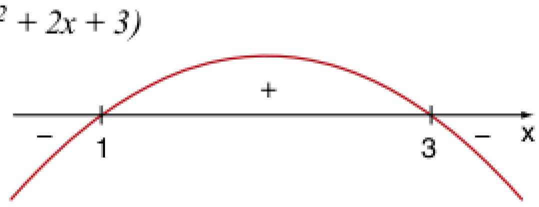
b) $\dfrac{(x^2 + 2x + 3).(x^2 - 6x + 8)}{(x - 1).(x^2 - 4x + 4)} \leq 0$

Resolução:

a) *Trata-se de um problema de análise de sinal de uma função cujas funções componentes são conhecidas.*
Para a sua solução, analise as funções separadamente e depois coloque-as no quadro de sinais ("varal").
$A = (x^2 - 5x + 6)$



$B = (-x^2 + 2x + 3)$

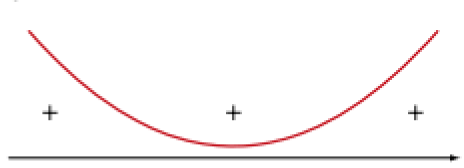


No varal, temos:

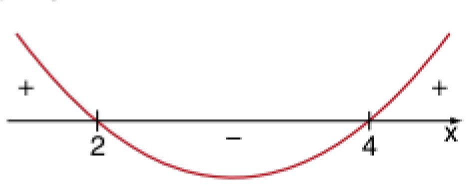
A	+	+	–	+
B	–	+	+	+
A.B	–	+	–	+
	–1	2	3	

Na última linha pela regra de sinais do produto, temos a análise de sinal completa da função $A \cdot B$.
Queremos os valores de x que tornam $A \cdot B \geq 0$.
$S = [-1; 2]\ U\ \{3\}$

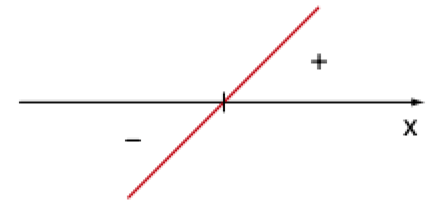
b) *Analisando as funções separadamente, temos:*
$A = x^2 + 2x + 3$
$\Delta < 0$; $a > 0$



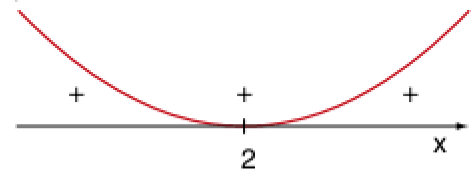
$B = x^2 - 6x + 8$



$C = x - 1$



$\Delta = x^2 - 4x + 4$
$\Delta = 0$; $a > 0$



No varal, temos:

A	+	+	+	+
B	+	+	–	+
C	–	+	+	+
D	+	+	+	+
A.B / C.D	–	+	–	+
	1	2	4	

$S =]-\infty; 1[\cup]2; 4]$

Função inversa da função quadrática

A função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, possui domínio real e o conjunto-imagem depende do sinal de a.

Observe a figura:

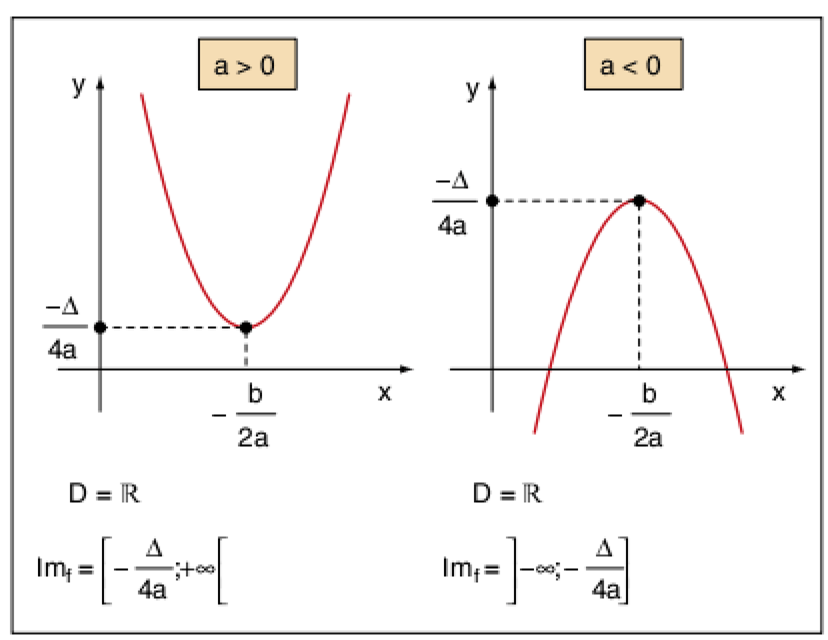


Fig. 10 Conjunto-imagem da função quadrática em função da ordenada do vértice.

Estamos analisando o domínio e a imagem da função quadrática para transformá-la em uma função inversível. Para isso, basta a função ser bijetora.

Para transformá-la em bijetora, vamos dividir o problema em duas partes:

a) *subjetora*: devemos ter como contradomínio o conjunto-imagem, que depende diretamente do sinal de a, conforme a figura 10.

b) *injetora*: devemos limitar o domínio de A da função para ele ser subconjunto de $]-\infty; x_v]$ ou $[x_v; +\infty[$.

Vamos analisar os exemplos:

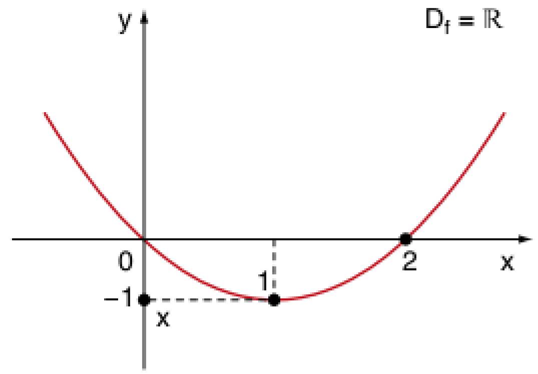
Exercícios resolvidos

17 Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 - 2x$. Fazendo as modificações necessárias, transforme-a em uma função inversível e obtenha a sua inversa.

Resolução:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) : x^2 - 2x$ $\qquad Im_f = [-1; +\infty[$

$D_f = \mathbb{R}$



Assim, f: [1; +∞[→ [–1; +∞[tal que $f(x) = x^2 - 2x$ é uma função bijetora, logo podemos obter sua inversa f^{-1}.
Temos então: f^{-1}: [–1; ∞[→ [1; +∞[e $x = y^2 - 2y$, tal que y é a expressão algébrica em função de x de f^{-1}.

$$x = y^2 - 2y \therefore 0 = y^2 - 2y - x \therefore y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4x}}{2} \therefore$$

$$\therefore y = \frac{2 \pm 2\sqrt{x+1}}{2} \therefore y = 1 \pm \sqrt{x+1}$$

Como $y \geq 1$, escolhemos a expressão $y = 1 + \sqrt{x+1}$, ou seja, $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

18 Obter a função inversa da função:
f: $\mathbb{R}_- \to [-1, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 1$

Resolução:

Observe que o domínio e o contradomínio foram ajustados para f ser inversível. Assim, resta-nos a parte algébrica para obter a função inversa.

a) f^{-1}: [–1, + ∞[→ $\mathbb{R}_-$ (inverter o domínio e o contradomínio)
b) Permutar o x pelo y

$$x = y^2 - 1 \therefore y^2 = x + 1 \therefore y = \pm\sqrt{x+1}$$

Observe que $Imf^{-1} = \mathbb{R}_-$, logo $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$
Assim: f^{-1}: [–1; + ∞[→ $\mathbb{R}_-$ tal que $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$

19 Dada a função $f:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$ tal que $f(x) = x^2 - x$, obtenha a expressão e o gráfico de f^{-1}.

Resolução:

Temos, então:

$$f^{-1}:\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[e\, x = y^2 - y \therefore$$

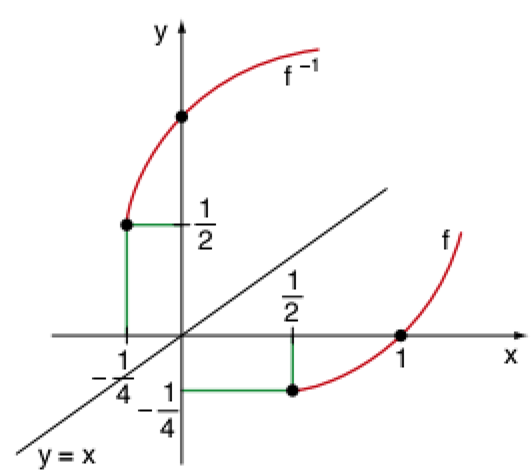
$$\therefore y^2 - y - x = 0 \therefore y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x}.$$

Pelo conjunto-imagem de f^{-1}, temos que $y = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$.

Assim, $f^{-1} = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ *tal que*

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

O gráfico de f^{-1} é simétrico de f em relação à reta y = x.



Revisando

1 Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $2x^2 - 9x + 8 = 0$, determine uma equação cujas raízes são $\frac{1}{r_1 + r_2}$ e $(r_1 - r_2)^2$.

2 Se a e b são raízes da equação $3x^2 - 17x - 14 = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{2a^2 + 3ab + 2b^2}{4ab^2 + 4a^2b}$.

3 Simplificar a expressão $\frac{2x^2-8x-90}{3x^2+36x+105}$.

4 O vértice da parábola $f(x) = ax^2 - 10x + c$ é o ponto de coordenadas (5; – 9). Determine o valor de a + c.

5 Determine as condições para que o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ admita um valor máximo e tenha raízes de sinais contrários.

6 Considere a função $f: \mathbb{R}_- \to [-1; +\infty[$ e $f(x) = x^2 - 1$. Prove que f é bijetora e determine f^{-1}.

Exercícios propostos

Equação de 2º grau

1 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 5x + 6$, determine o valor de x de modo que:

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 6$

2 **Cesgranrio** O ponto de maior ordenada, pertence ao gráfico da função real definida por $f(x) = (2x - 1) . (3 - x)$, é o par ordenado (a,b). Então, a – b é igual a:

(a) $\frac{-39}{8}$
(b) $\frac{-11}{8}$
(c) $\frac{3}{8}$
(d) $\frac{11}{8}$
(e) $\frac{39}{8}$

3 **ESPM** O conjunto-solução da equação $x^3 + x^2 - 100x - 100 = 0$, é:

(a) S = {–1, 10}
(b) S = {–1, 1, 10}
(c) S = {–10, 1, 10}
(d) S = {–10, –1, 10}
(e) S = {–1, 100}

Natureza das raízes de uma equação de 2º grau

4 O conjunto-solução da equação $q^4 - 13q^2 + 36 = 0$ é:

(a) V = {2, 3}
(b) V = {0, 2, 3}
(c) V = {–3, –2}
(d) V = {–3, –2, 2, 3}
(e) V = {–3, 3}

5 A solução da equação: $x + x\sqrt{(2x+2)} = 3$ é:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 5
(e) 7

6 **PUC** O número de pontos de interseção das duas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 - 1$ é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

7 Determine os valores de m para que a equação $2mx^2 - (3m + 2)x + 3 = 0$ tenha raízes reais e desiguais.

8 Determine o valor de m de modo que a equação do 2º grau $x^2 - (2m + 1)x + (2 + m^2) = 0$ admita uma raiz dupla.

9 **UFRGS** A equação $2mx^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$ possui 2 raízes reais distintas. Então:

(a) m = 0
(b) m > 0
(c) m < 4
(d) m < 0 ou m > 4
(e) 0 < m < 4

Soma e produto de raízes

10 Na equação $2px^2 + 3pqx + 3q = 0$, a soma das raízes é 9 e o produto 12. Calcule p + q.

Vértice da parábola

11 **Cesgranrio** O gráfico de $y = x^2 - 8x$ corta o eixo 0x nos pontos de abscissa:

(a) -2 e 6
(b) -1 e -7
(c) 0 e -8
(d) 0 e 8
(e) 1 e 7

12 A parábola representativa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x^2 + bx + c$, passa pelo ponto (1; 0), e seu ponto de máximo é o ponto B(3; a). Calcule a.

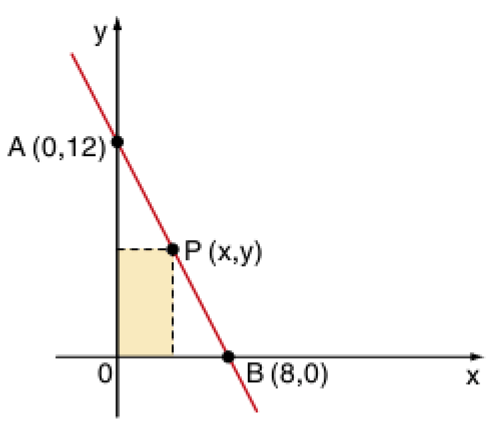
Função do 2º grau

13 **UFPE** O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por: $C = 2510 - 100n + n^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

14 **Vunesp** Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão $h(t) = 3t - 3t^2$, em que h é a altura atingida em metros.

a) Em que instante t o grilo retorna ao solo?
b) Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo?

15 **UFSM** A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos A(0,12) e B(8,0).



As dimensões x e y do retângulo para que sua área seja máxima devem ser, respectivamente, iguais a:

(a) 4 e 6
(b) 5 e $\frac{9}{2}$
(c) 5 e 7
(d) 4 e 7
(e) 6 e 3

16 **FGV** O preço de ingresso numa peça de teatro (p) relaciona-se com a quantidade de frequentadores (x) por sessão através da relação: $p = -0{,}2x + 100$.

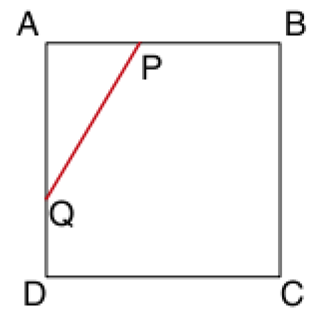
a) Qual a receita arrecadada por sessão se o preço do ingresso for R$ 60,00?
b) Qual o preço que deve ser cobrado para dar a máxima receita por sessão?

Observação: receita = (preço) . (quantidade).

17 **FGV** O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, em que x é a quantidade mensal vendida.

a) Qual o lucro mensal máximo possível?
b) Entre que valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195?

18 **Udesc** Seja ABCD um quadrado de área unitária, são tomados dois pontos $P \in AB$ e $Q \in AD$, tais que $|AP| + |AQ| = |AD|$. Calcule o maior valor para a área do triângulo APQ. Como seria tratado esse problema, se fosse pedido para calcular a menor área?



19 **Fuvest** O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, em que b e c são constantes, passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2). Então, $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ vale:

(a) $-\frac{2}{9}$
(b) $\frac{2}{9}$
(c) $-\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{4}$
(e) 4

20 Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $f(2) = 4$; $f(0) = 2$ e $f(3) = 14$, então $a + b + c$ é igual a:

(a) -5
(b) -3
(c) 0
(d) 3
(e) 5

21 **UFPE** Qual o maior valor assumido pela função $f: [-7; 10] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$?

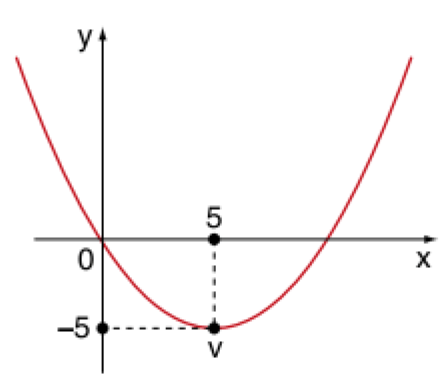
22 **Faap** Com relação ao gráfico da função $f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ são feitas as seguintes afirmações.

I. É uma parábola com concavidade voltada para cima.
II. É uma parábola cujo vértice é o ponto $(-2; 4)$.
III. O ponto de interseção com o eixo y é $(0; -2)$.

Nessas condições:

(a) somente a afirmação I é verdadeira.
(b) somente a afirmação III é verdadeira.
(c) as afirmações I, II e III são verdadeiras.
(d) as afirmações I e III são verdadeiras.
(e) as afirmações II e III são verdadeiras.

23 **UFMG** Observe a figura.



Nessa figura, está representada a parábola de vértice V, gráfico da função de segundo grau cuja expressão é:

(a) $y = \left(\dfrac{x^2}{5}\right) - 2x$

(b) $y = x^2 - 10x$

(c) $y = x^2 + 10x$

(d) $y = \left(\dfrac{x^2}{5}\right) - 10x$

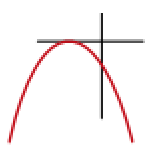
(e) $y = \left(\dfrac{x^2}{5}\right) + 10x$

24 **Vunesp** Considere a função:

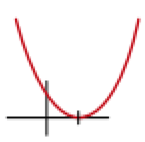
$f(x) = \left(\dfrac{1}{4a}\right) x^2 + x + a$, em que a é um número real não nulo

Assinale a alternativa cuja parábola poderia ser o gráfico dessa função.

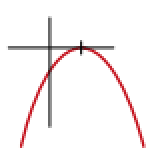
(a)



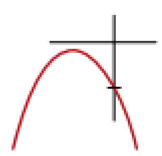
(b)



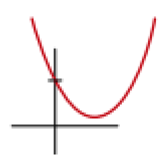
(c)



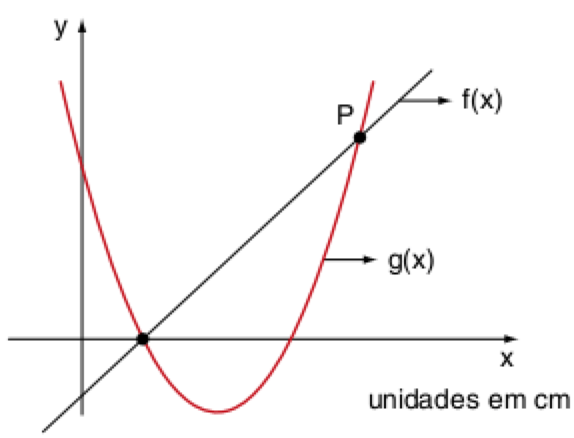
(d)



(e)



25 **Uerj** No sistema de coordenadas cartesianas a seguir, estão representadas as funções $f(x) = 4x - 4$ e $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$.



Com base nos dados a seguir, determine:

a) as coordenadas do ponto P.

b) o conjunto-solução da inequação: $\dfrac{g(x)}{f(x)} < 0$, $f(x) \neq 0$.

26 **UFF** Resolva, em $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$, a inequação $\dfrac{(x-4)}{(x+2)} < \dfrac{(x-2)}{(x+4)}$.

Análise de sinal da função quadrática

27 **Vunesp** Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3 < 2x \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

28 **Cesgranrio** A solução da inequação $x > \left(\dfrac{1}{x}\right)$ é:

(a) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$

(b) $x < -1$ ou $x > 1$

(c) $x > 1$

(d) $x > 0$

(e) $x > -1$

29 **Fuvest** O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da inequação $\left[\dfrac{x}{(x+1)}\right] > x$ é:

(a) vazio

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$

30 **Cesgranrio** A menor solução inteira de:

$x^2 - 2x - 35 < 0$ é:

(a) -5

(b) -4

(c) -3

(d) -2

(e) -1

31 **Cesgranrio** As soluções de $\dfrac{(x^2 - 2x)}{(x^2 + 1)} < 0$ são os valores de x que satisfazem:

(a) $x < 0$ ou $x > 2$

(b) $x < 2$

(c) $x < 0$

(d) $0 < x < 2$

(e) $x > 2$

32 **UEL** Determine o conjunto-solução da inequação

$\left[(x+3)^4 \cdot \dfrac{(x^3 - 2x^2)}{(x^2 - 1)}\right] \geq 0$, no universo $\mathbb{R}$.

33 **PUC** No universo $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da inequação $\dfrac{(x-3)}{(3x - x^2)} < 0$ é:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 3\}$

34 **UFSC** Considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule f(7).

35 **UFBA** Na questão a seguir, escreva a soma dos itens corretos.

Sobre funções reais, é verdade que:

01 o domínio de $f(x) = \dfrac{7x}{(x+2)}$ é $\mathbb{R}$.

02 $f(x) = 3x^2 + 4x$ é uma função par.

04 $f(x) = \dfrac{(3x+2)}{2x}$ é a função inversa de $g(x) = \dfrac{2}{(2x-3)}$.

08 sendo $f(x) = 2x + 4$, então $f(x) > 0$, para todo $x > 0$.

16 sendo $f(x) = 4x^2 - 7x$, então $f(-1) = 11$.

Soma = ☐

36 **Mackenzie** A equação:

$(3k - 1)x^2 - (2k + 3)x + (k - 4) = 0$, em x, com $k \neq \dfrac{1}{3}$, admite duas raízes reais a e b tais que $a < 1 < b$. O número de valores inteiros que k pode assumir é:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) 6

37 **UFSC** Considere as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por: $f(x) = x^2 - x + 2$ e $g(x) = -6x + \dfrac{3}{5}$.

Calcule $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{[5g(-1)]}{4}$.

TEXTOS COMPLEMENTARES

A fórmula é de Bhaskara?

As equações quadráticas completas foram resolvidas com muita eficiência pelos babilônios. Um problema famoso era o de determinar o lado de um quadrado se a área menos o lado é igual a 14,30. (Não estranhe! O sistema de numeração dos babilônios é sexagesimal.)

A solução do problema para a época (≈2000 a.C.) é expressa assim:

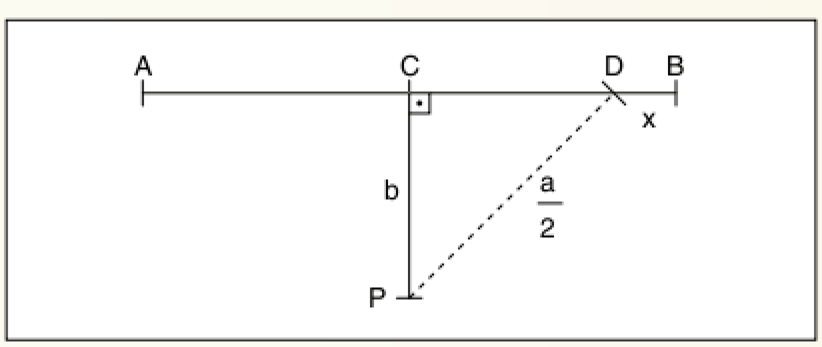
"Tome a metade de 1, que é 0,30; e multiplique 0,30 por 0,30, o que dá 0,15; some a isso 14,30 o que dá 14,30;15. Isso é o quadrado de 29,30. Agora some 0,30 a 29,30 e o resultado é 30; o lado do quadrado."

Observe que não existe fórmula nenhuma. É praticamente uma receita para resolver a equação!

Euclides resolvia equações, mas é claro que geometricamente. Observe a solução da equação

$ax = x^2 + b^2$, na qual a e b são segmentos tais que $a > 2b$.

Construção geométrica



1) $AB = a$.

2) C ponto médio de $\overline{AB}$.

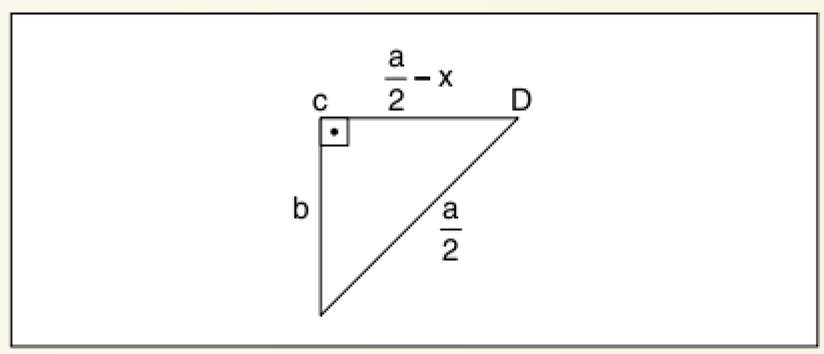
3) $\overline{CP} \perp \overline{AB}$, tal que $CP = b$.

4) Com centro em P e raio $\dfrac{a}{2}$ marca-se D em AB.

5) O segmento $\overline{BD}$ é a solução da equação.

Justificativa:

No Δ retângulo PCD, temos:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \therefore \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + x^2 \therefore$$

$$\therefore \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 \therefore ax = x^2 + b^2$$

(equação apresentada)

Bhaskara foi um matemático indiano (1114-1185). Pelas datas, percebemos que a solução da equação quadrática não se deve a ele. Seus principais trabalhos foram *Lilavati* (homenagem à filha) e o *Vija-Ganita* ("extração de raízes"), em que realmente temos textos com problemas de equações lineares, quadráticas, progressões, tríades pitagóricas.

Pelo texto, percebemos que o grande Bhaskara não resolveu pela 1ª vez o problema das equações quadráticas, e muito menos sugeriu a fórmula $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, pois a notação moderna da matemática surgiu no final do século XVI com o francês François Viète.

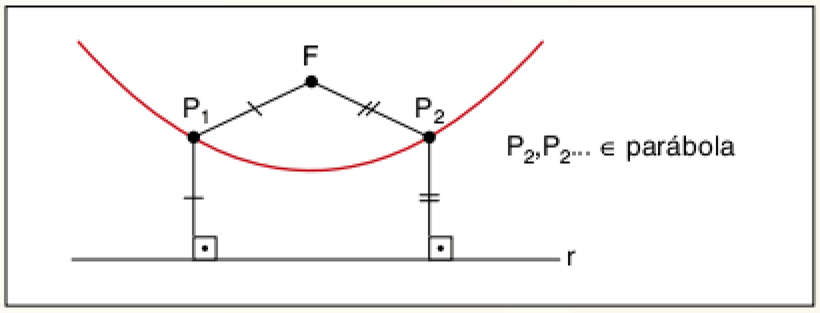
Este texto simplesmente quer elucidar os fatos, e não desmerecer a grandiosa obra de Bhaskara.

Carl Boyer. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

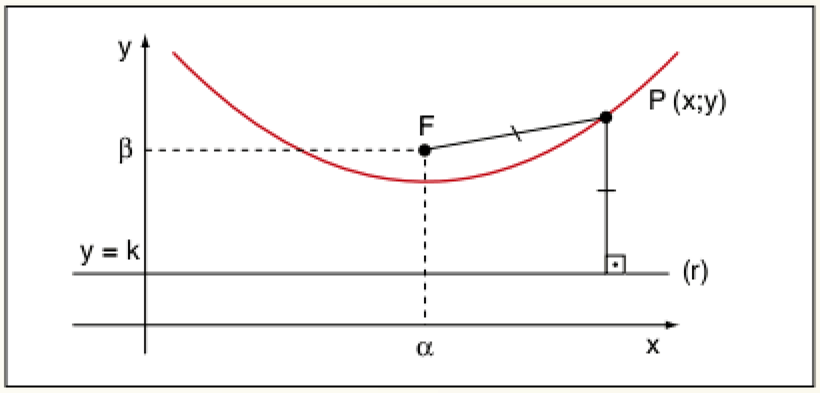
O que realmente é a parábola?

Do ponto de vista geométrico, a parábola é o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto F dado e uma reta r dada.

F é o foco e r, a reta diretriz, tal que $F \notin r$.



Vamos agora analisar a parábola em um sistema cartesiano.



$d_{P;F} = d_{P;r} \Leftrightarrow P \in \text{parábola}$

$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = |y-k| \therefore$

$\therefore x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = y^2 - 2ky + k^2$

$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 2\beta y = 2ky$

$x^2 - 2\alpha x + \left(\alpha^2 + \beta^2 - k^2\right) = 2(\beta - k)y$

Como $F \notin r$, temos $b \neq k$. Assim:

$$\frac{1}{2(\beta-k)}x^2 - \frac{\alpha}{(\beta-k)}x + \frac{\alpha^2+\beta^2-k^2}{2(\beta-k)} = y$$

Trata-se de uma expressão da forma

$y = ax^2 = + bx + c;\ a \neq 0$

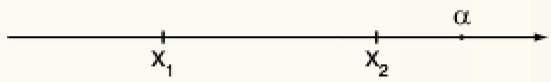
Assim, a função quadrática tem como gráfico uma parábola.

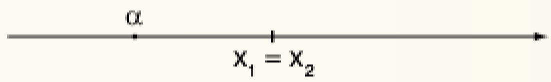
Posição de um número real α em relação às raízes do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$

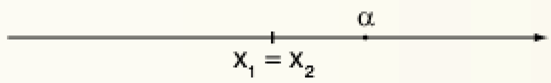
Esta teoria vai permitir posicionarmos o número $\alpha \in \mathbb{R}$ em relação às raízes $x_1 \leq x_2$. As possibilidades são:

a) 

b) 

c) 

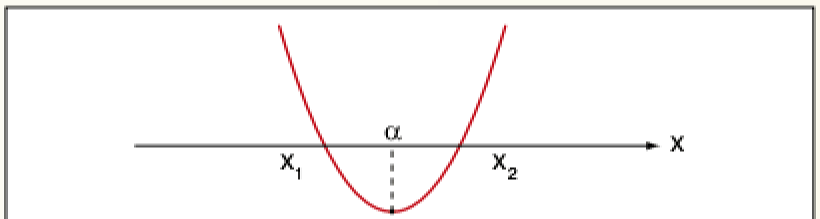
d) 

e) 

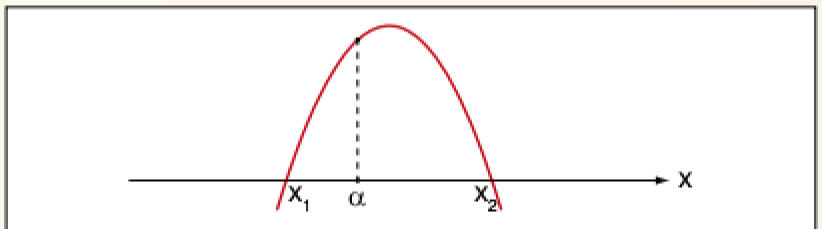
f) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$

O grande benefício é que não temos necessidade de encontrar os valores x_1 e x_2.

1) Vamos analisar quando que α está entre as raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



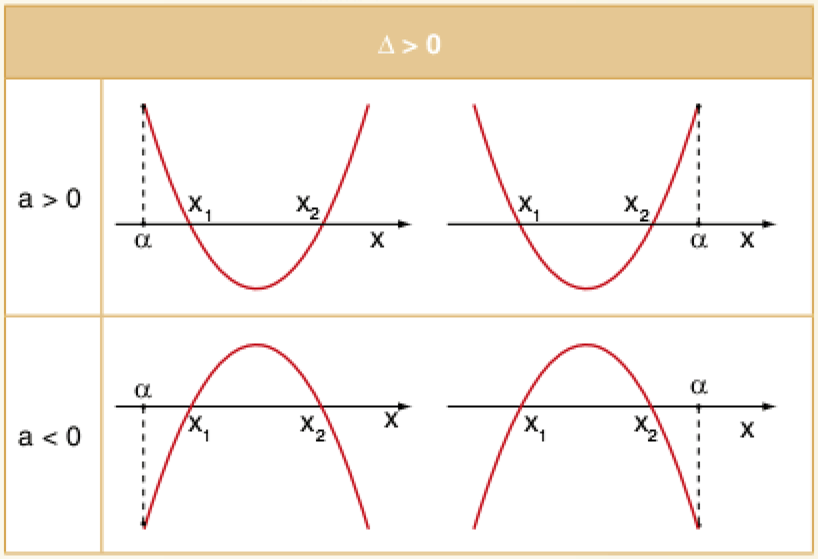
$a > 0$ e $f(\alpha) < 0$

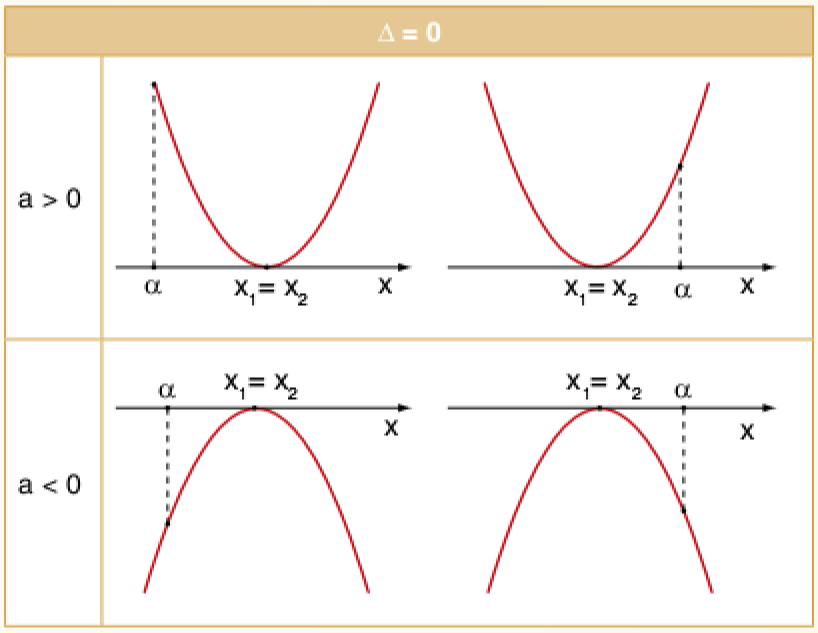


$a < 0$ e $f(\alpha) > 0$

Conclusão: $af(\alpha) < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha < x_2$ e $\Delta > 0$

2) Vamos analisar quando α está fora do intervalo das raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$.





Em todos os casos, temos $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$.

Conclusão: $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0 \Rightarrow \alpha$ está fora do intervalo das raízes.

Nos casos apresentados no item 2, o número α pode ser menor do que a menor das raízes ou maior do que a maior das raízes.

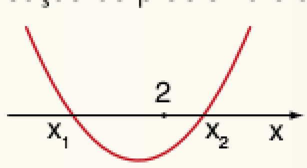
Para fixarmos α à esquerda de x_1, devemos impor $\alpha < -\dfrac{b}{2a}$ e para α estar à direita de x_2, devemos impor também $\alpha > -\dfrac{b}{2a}$.

No exemplo a seguir, observe as condições para que $\alpha < x_1 < x_2$.

Devemos ter: $af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\alpha < -\dfrac{b}{2a}$

Exemplo 1: Determinar os valores de m na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

Resolução: A situação do problema é da forma:



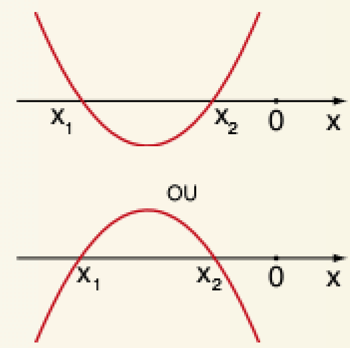
1. $f(2) < 0 \Rightarrow 1.\left[2^2 + (m-2).\,2 + 1 - m\right] < 0 \therefore$

$\therefore (4 + 2m - 4 + 1 - m) < 0 \therefore (m+1) < 0 \therefore m < -1$

Resposta: $m \in \left]-\infty; -1\right[$

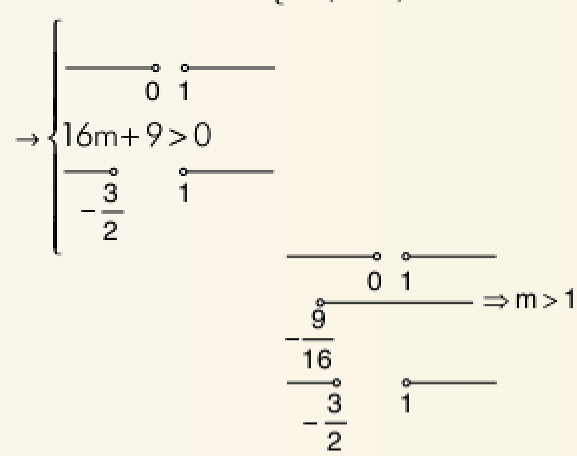
Exemplo 2: Determinar m de modo que as raízes da equação do 2º grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ sejam negativas e distintas.

Resolução: A situação do problema é da forma



Assim, x_1 e x_2 serão ambas negativas.

$$\begin{cases} (m-1).\,f(o) > 0 \\ \Delta > 0 \\ 0 > -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m-1).\,m > 0 \\ (2m+3)^2 - 4(m-1).\,m > 0 \rightarrow \\ \dfrac{-(2m+3)}{2(m-1)} < 0 \end{cases}$$



Resposta: $m \in \left]1; +\infty\right[$

RESUMINDO

O trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ possui como gráfico uma parábola.

Raízes do trinômio: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta = b^2 - 4ac$

Natureza das raízes

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

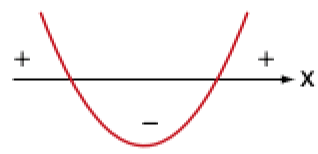
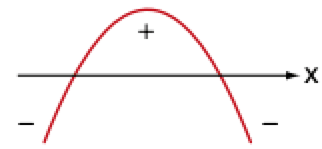
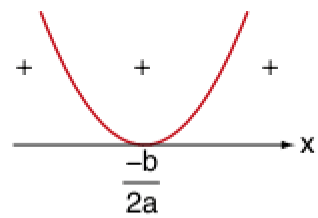
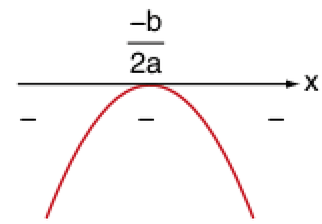
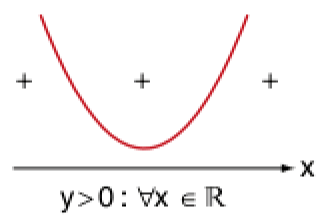
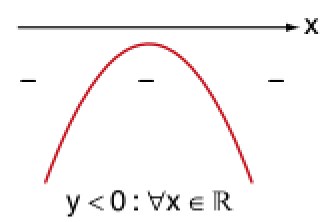
$\Delta < 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \notin \mathbb{R}$

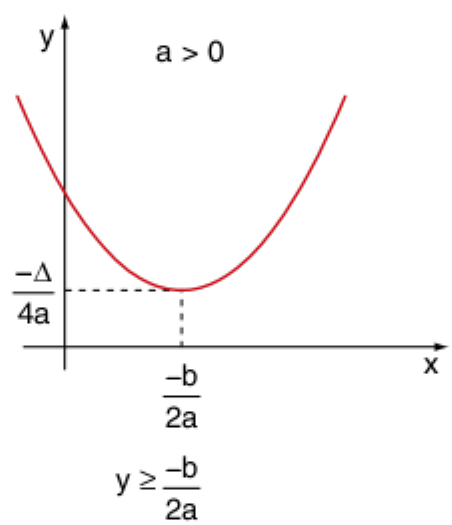
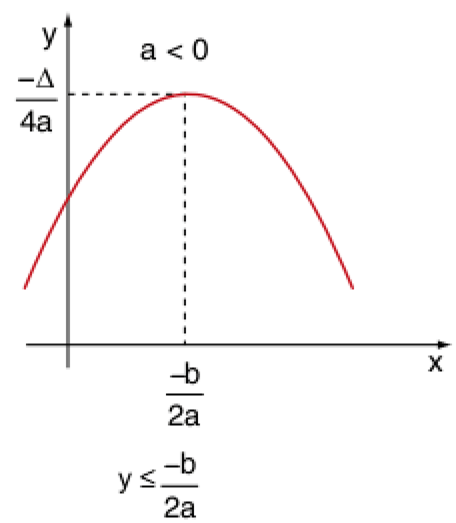
Relação entre coeficientes e raízes

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a}$

Fatoração do trinômio do 2º grau

$ax^2 + bx + c \equiv a.\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right)$

	Resumo dos gráficos e dos sinais do trinômio	
	a > 0	**a < 0**
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Vértice da parábola	
 A função admite valor mínimo.	 A função admite valor máximo.

QUER SABER MAIS?

SITE

- J. B. Pitombeira. Revisitando uma velha conhecida. <www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>.

Exercícios complementares

Equação de 2º grau

1 Resolva as equações no conjunto dos números reais:
a) $36y^2 - 13y + 1 = 0$
b) $6x = (x - 5)^2$
c) $(2x - 7)^2 = 15 - 3x$
d) $\frac{(x^2 - 3x)}{2} - 1 = \frac{(x^2 - 1)}{4}$
e) $2x^2 - 19 = x + \frac{(1 - x^2)}{2}$

2 Resolva:
a) a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$
b) o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = -8 \end{cases}$

3 **UFV** As medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. A área desse triângulo é:
(a) 10
(b) 6
(c) 12
(d) 15
(e) 20

4 Resolver a equação $\sqrt{x} + \sqrt{(x + 12)} = 6$.

Natureza das raízes de uma equação de 2º grau

5 **UFMG** A função $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais, tem duas raízes distintas pertencentes ao intervalo $[-2, 3]$. Então, sobre os valores de b e c, a única afirmativa correta é:
(a) $c < -6$
(b) $c > 9$
(c) $-6 < b < 4$
(d) $b < -6$
(e) $4 < b < 6$

6 Calcule t na equação $x^2 - 4x + t = 0$, de modo que as raízes:
a) sejam reais e distintas.
b) sejam reais e iguais.
c) não sejam reais.

7 **Fatec** Se a equação $x^2 - 10x + k = 0$ tem uma raiz de multiplicidade 2, então o valor de k é:
(a) 100
(b) 25
(c) 5
(d) 1
(e) 0

8 **UFMG** Seja: $P(x) = x^3 + (k - 3)x^2 + (2 - k)x - (6 + 6k)$, em que k é um número real:
a) mostre que o número 3 é raiz de P(x) para todo número real k.
b) determine todos os valores de k para os quais as raízes de P(x) sejam todas reais.

Gráfico da parábola

9 **Unicamp** Determine o número m de modo que o gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo do x. Faça o gráfico da solução (ou das soluções) que você encontrar para o problema.

Análise de sinal da função quadrática

10 Sendo x' e x'' as raízes da equação $5x^2 - 7x - 11 = 0$, calcule o valor das expressões sem resolver a equação.
a) $x' + x''$
b) $x' \cdot x''$
c) $(x')^2 + (x'')^2$
d) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

11 **Cesgranrio** Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então o coeficiente b vale:
(a) 12
(b) –12
(c) 9
(d) –9
(e) 6

12 Sobre a equação $2.003x^2 - 2.004x - 2.005 = 0$, a afirmação correta é:
(a) tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.
(b) tem duas raízes simétricas.
(c) não tem raízes reais.
(d) tem duas raízes positivas.
(e) tem duas raízes negativas.

13 Determine a soma da média aritmética com a média geométrica das raízes da equação $ax^2 - 8x + a^3 = 0$, com $a > 0$.

14 Se a e b são raízes da equação $x^2 - 92x + k = 0$ e $a^b \cdot a^a \cdot b^a \cdot b^b = 16^{23}$ o valor de k é igual a:
(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) 8
(e) 16

15 Se na equação $ax^2 + bx + c = 0$ a média harmônica das raízes é igual ao dobro da média aritmética destas raízes, podemos afirmar que:
(a) $2b^2 = ac$
(b) $b^2 = ac$
(c) $b^2 = 2ac$
(d) $b^2 = 4ac$
(e) $b^2 = 8ac$

16 **UFMG** O ponto de coordenadas (3, 4) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A abscissa do vértice dessa parábola é:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) 1
(c) $\frac{3}{2}$
(d) 2

17 **Faap** A variação de temperatura $y = f(x)$ num intervalo de tempo x é dada pela função
$f(x) = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + m - 3$; calcule "m" de modo que o gráfico da função seja uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

(a) $-3 \le m \le 3$
(b) $m > 3$ e $m < -3$
(c) $-3 \le m < 3$
(d) $-3 < m \le 3$
(e) $-3 < m < 3$

18 **PUC** A temperatura, em graus centígrados, no interior de uma câmara, é dada por $f(t) = t^2 - 7t + A$, em que t é medido em minutos e A é constante. Se no instante $t = 0$ a temperatura é de 10 °C, o tempo gasto para que a temperatura seja mínima, em minutos, é:

(a) 3,5
(b) 4,0
(c) 4,5
(d) 6,5
(e) 7,5

Problemas gerais

19 **ITA** Sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(f o g)(x) = x - 6$, em seus respectivos domínios, então, o domínio A da função g é:

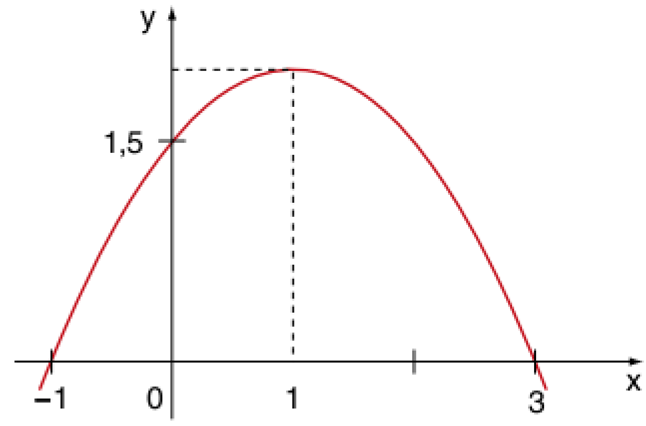
(a) $[-3, +\infty[$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $[-5, +\infty[$
(d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$
(e) $]-\infty, \sqrt{6}[$

20 **FGV** A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 - 4x + a$, tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, $f(-2)$ é igual a:

(a) 4
(b) 2
(c) 0
(d) $-\frac{1}{2}$
(e) -2

Gráfico da parábola

21 **UEL** Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico seguinte,



o conjunto-imagem de f é:

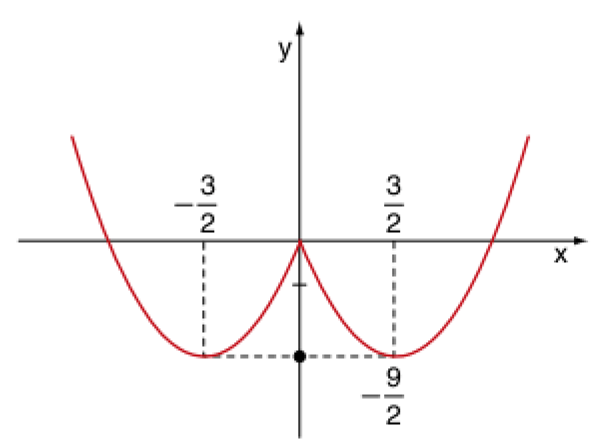
(a) $\mathbb{R}$
(b) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1{,}5\}$
(c) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1{,}8\}$
(d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 2\}$
(e) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1{,}8\}$

22 **UFPE** Na questão a seguir, escreva (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.
Se a é um número real positivo, então o gráfico de $y = a(x^2 + 2x)$, $x \in \mathbb{R}$:

☐ é uma parábola que passa pela origem (0, 0).
☐ é simétrico em relação à reta $x = -1$.
☐ é uma parábola cujo vértice é o ponto $(-1, a)$.
☐ está contido na reunião dos 3 (três) primeiros quadrantes.
☐ não intercepta a reta $y = -a$.

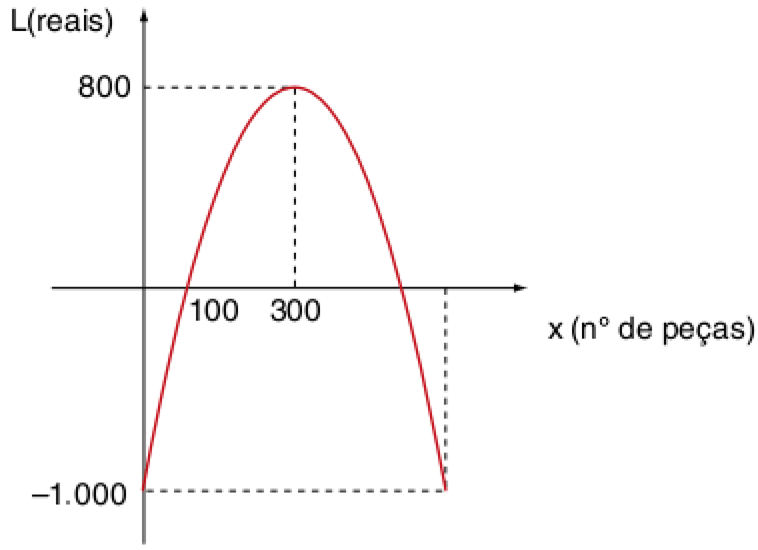
23 **UFBA** Escreva a soma dos itens corretos.
Considerando-se a função real $f(x) = x^2 - 3|x|$, é verdade que

01 a imagem da função f é $[-3, +\infty[$.
02 a função f é bijetora, se $x \in]-\infty, -2]$ e $f(x) \in [-2, +\infty[$.
04 a função f é crescente, para todo $x \ge 0$.
08 o gráfico da função f intercepta os eixos coordenados em três pontos.
16 para todo $x \in \{-1, 4\}$, tem-se $f(x) = 4$.
32 o gráfico da função f é:



Soma = ☐

24 **UFF** A parábola abaixo representa o lucro mensal L (em reais) obtido em função do número de peças vendidas de um certo produto.



Determine:

a) o número de peças que torna o lucro nulo.

b) o(s) valor(es) de x que torna(m) o lucro negativo.

c) o número de peças que devem ser vendidas para que o lucro seja de R$ 350,00.

25 **UEL** Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 \text{ se } x < -1 \\ -x^2 + 1 \text{ se } -1 < x < 1 \\ x - 1 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

o conjunto-imagem de f é o intervalo:

(a) $]-\infty, -1]$

(b) $]-\infty, 1]$

(c) $[0, +\infty[$

(d) $[1, +\infty[$

(e) $[-1, 1]$

26 **UFU** Na figura a seguir, estão esboçadas duas parábolas, que são os gráficos das funções f e g. Considere a função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (em que R representa o conjunto dos números reais), definida por $h(x) = |f(x) + g(x)|$ e determine em que ponto o gráfico de h intercepta o eixo das ordenadas y.

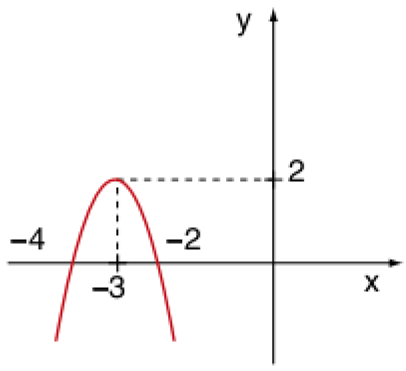


gráfico de f

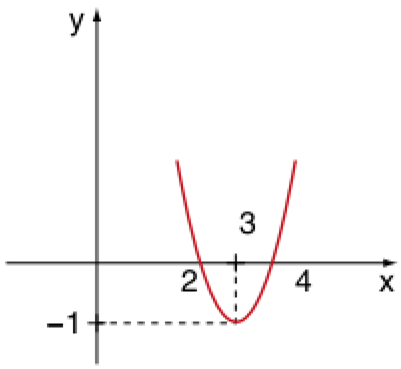
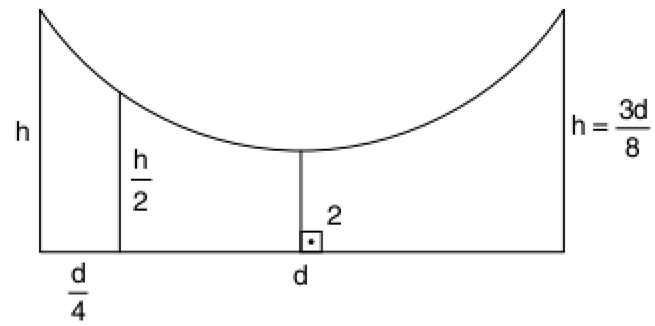


gráfico de g

27 Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situados à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.



Suponha também que:

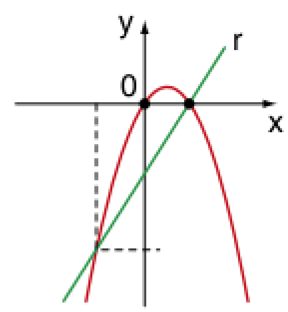
I. a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;

II. a altura do fio sobre um ponto do solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.

Se $h = \frac{3d}{8}$, então d vale:

(a) 14 (b) 16 (c) 18 (d) 20 (e) 22

28 **UFMG** Observe a figura a seguir.



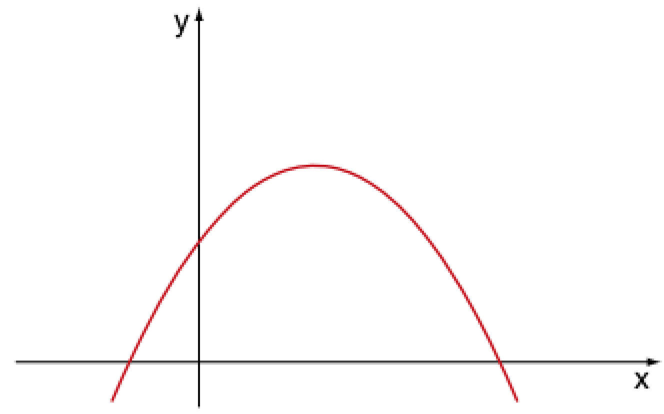
Nessa figura, a reta r intercepta a parábola nos pontos (–4, –24) e (2, 0).

a) Determine a equação da reta r.

b) Determine a equação dessa parábola.

c) Seja f(x) a diferença entre as ordenadas de pontos de mesma abscissa x, nesta ordem: um sobre a parábola e o outro sobre a reta r, determine x para que f(x) seja a maior possível.

29 Considerando o gráfico a seguir referente a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode-se afirmar que:



(a) $a > 0$; $b > 0$ e $c < 0$

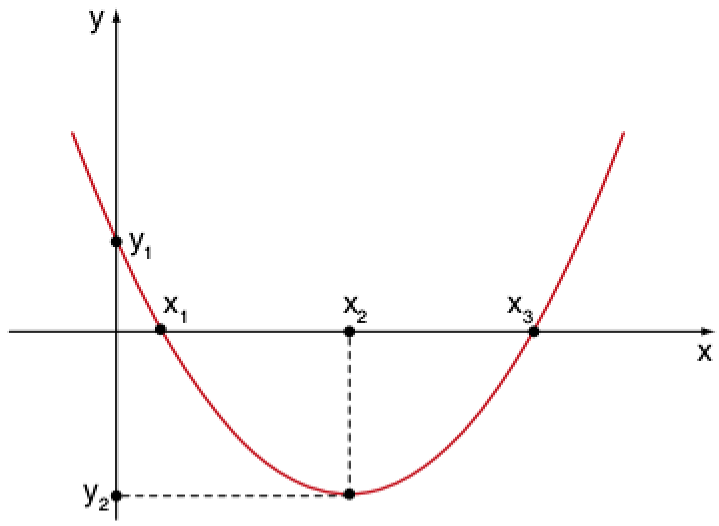
(b) $a > 0$; $b < 0$ e $c > 0$

(c) $a < 0$; $b < 0$ e $c < 0$

(d) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$

(e) $a < 0$; $b > 0$; $c \in \mathbb{R}$

30 Dado o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o seu discriminante, considere as seguintes afirmativas.



1. $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_3 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
3. $y_2 = \dfrac{-\Delta}{4a}$
4. $y_1 = c$

Concluímos que:
(a) todas são verdadeiras.
(b) apenas uma é falsa.
(c) duas são falsas.
(d) apenas uma é verdadeira.
(e) todas são falsas.

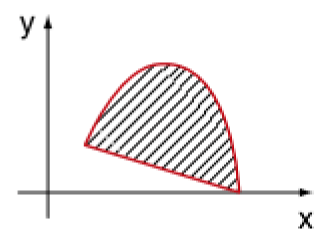
Análise de sinal da função quadrática

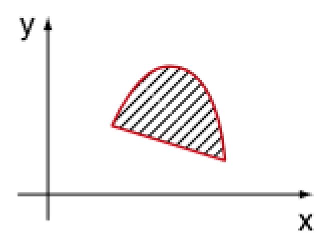
31 **Mackenzie** O domínio da função real definida por

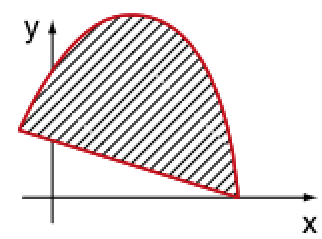
$f(x) = \sqrt[3]{[(x^2-2x+6)/(x^2-5x+6)]}$ é:
(a) $\mathbb{R} - \{2, 3\}$
(b) $\mathbb{R}^*$
(c) $\mathbb{R}$
(d) $\mathbb{R}^* - \{2, 3\}$
(e) $\mathbb{R} - \{-2, -3\}$

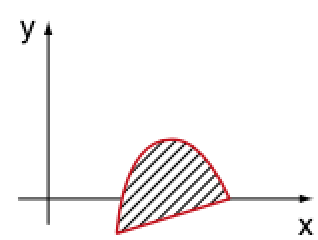
32 **PUC** Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é $x - 10$, sendo x o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a $70 - x$.
Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de x, cujo valor máximo, na unidade monetária usada, é:
(a) 1.200
(b) 1.000
(c) 900
(d) 800
(e) 600

33 **UFMG** Considere a região delimitada pela parábola da equação $y = -x^2 + 5x - 4$ e pela reta de equação $x + 4y - 4 = 0$.
Assinale a alternativa cujo gráfico representa corretamente essa região.

(a)


(b)


(c)


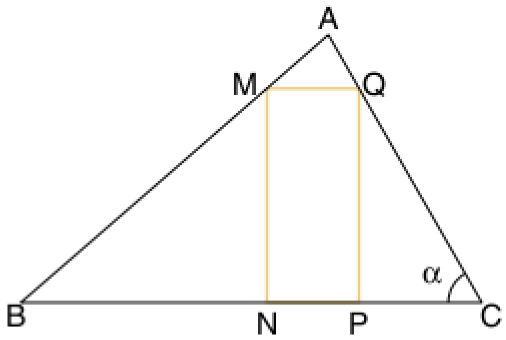
(d)


34 **UFSC** Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).
01 f é uma função crescente.
02 A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em (0, 3).
04 –1 e +1 são os zeros da função g.
08 $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.
16 A função inversa da f é definida por $f^{-1}(x) = -x + 3$.
32 O valor de $g(f(1))$ é 3.
64 O vértice do gráfico de g é o ponto (0, 0).

Soma = ☐

35 **Unirio** Um engenheiro vai projetar uma piscina, em forma de paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas internas são, em metros, expressas por x, $20 - x$, e 2. O maior volume que esta piscina poderá ter, em m^3, é igual a:
(a) 240
(b) 220
(c) 200
(d) 150
(e) 100

36 **Fuvest** No triângulo ABC, AC = 5 cm, BC = 20 cm e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.



O maior valor possível, em cm^2, para a área do retângulo MNPQ, construído conforme mostra a figura a seguir, é:
(a) 16
(b) 18
(c) 20
(d) 22
(e) 24

37 **Faap** Analistas de produção verificaram que numa determinada montadora o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por:

$$f(t) = \begin{cases} 50\,(t^2 + t), \text{ para } 0 \le t \le 4 \\ 200\,(t+1), \text{ para } 4 \le t \le 8 \end{cases}$$

O número de peças produzidas na quarta hora de trabalho é:
(a) 1.000
(b) 800
(c) 200
(d) 400
(e) 600

38 **Mackenzie** Na função real definida por
$f(x) = x^2 + 2\,mx - (m - 2)$, sabe-se que: $f(a) = f(b) = 0$, em que $a < 1 < b$. Então, em $U = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, o número de valores que m pode assumir é:
(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 9

39 **Unirio** A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm. Se a sua área é menor ou igual a 24 cm^2, então o valor de x, em cm, será:
(a) $0 < x < 6$
(b) $0 < x \le 4$
(c) $2 < x \le 6$
(d) $2 < x < 6$
(e) $2 < x \le 4$

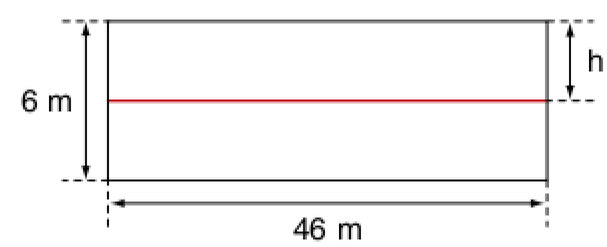
40 **Unicamp** O índice I de massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula, $I = M/h^2$ em que M é a massa do corpo, dada em quilogramas, e h é a altura da pessoa, em metros. O índice I permite classificar uma pessoa adulta, de acordo com a seguinte tabela:

Homens	Mulheres	Classificação
$20 \le I \le 25$	$19 \le I \le 24$	Normal
$25 \le I \le 30$	$24 < I \le 29$	Levemente obeso
$I > 30$	$I > 29$	Obeso

a) Calcule o índice I para uma mulher cuja massa é de 64,0 kg e cuja altura 1,60 m. Classifique-a segundo a tabela anterior.
b) Qual é a altura mínima para que um homem cuja massa é de 97,2 kg não seja considerado obeso?

41 **UFRJ** Um avião tem combustível para voar durante 4 horas. Na presença de um vento com velocidade v [km/h] na direção e sentido do movimento, a velocidade do avião é de (300 + v) [km/h]. Se o avião se desloca em sentido contrário ao do vento, sua velocidade é de (300 – v) [km/h].
Suponha que o avião se afaste a uma distância d do aeroporto e retorne ao ponto de partida, consumindo todo o combustível, e que durante todo o trajeto a velocidade do vento seja constante e tenha a mesma direção que a do movimento do avião. Determine:
a) d como função de v.
b) para que valor de v a distância d é máxima.

42 **UnB** Em uma barragem de uma usina hidrelétrica, cujo reservatório se encontra cheio de água, considere que a vista frontal dessa barragem seja retangular, com 46 m de comprimento e 6 m de altura conforme representado na figura adiante. Sendo h a altura, em metros, medida da parte superior da barragem até o nível da água, tem-se h = 6 quando o reservatório está vazio e h = 0 no caso de o reservatório apresentar-se cheio.



Nessas condições, a força F, em newtons, que a água exerce sobre a barragem é uma função de h, isto é, F = F(h). Por exemplo, se h = 6, F(6) = 0. É conhecido que a função F é dada por um polinômio do segundo grau na variável h. Além disso, foram determinados os seguintes valores:
$F(5) = 25{,}3 \cdot 10^3$ N e $F(4) = 46 \cdot 10^3$ N.
Com essas informações, é possível determinar o valor de F para todo $h \in [0, 6]$.
Calcule o valor $\frac{F(0)}{10^3}$, desconsiderando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

43 **UnB** Uma microempresa, no seu segundo ano de funcionamento, registrou um lucro de R$ 28.000,00, o que representou um acréscimo de 40% sobre o lucro obtido no seu primeiro ano de existência. No quarto ano, o lucro registrado foi 20% inferior ao do segundo ano. Considerando apenas esses três registros e representando por x o tempo de existência da empresa, em anos, pode-se modelar o lucro L(x), em múltiplos de R$ 1.000,00, obtido nos 12 meses anteriores à data x, por meio de uma função polinomial do segundo grau da forma $L(x) = ax^2 + bx + c$. Os coeficientes a, b e c desse polinômio são unicamente determinados com base nas informações anteriores, em que L(1), L(2) = 28 e L(4) representam os lucros da empresa no primeiro, no segundo e no quarto anos, respectivamente. Uma vez encontrado esse polinômio, o modelo permite inferir se houve lucro (ou prejuízo) em datas diferentes daquelas registradas, desde que se considere $x \neq 1$.

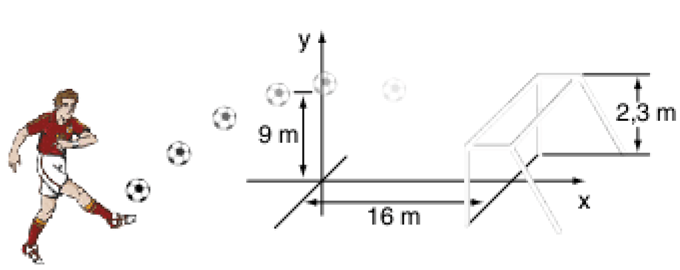
Com base nas informações e no modelo polinomial anterior, julgue os itens seguintes.

- [ ] O lucro da empresa no quarto ano foi de R$ 24.000,00.
- [ ] No plano de coordenadas xOy, o gráfico da função L é parte de uma parábola de concavidade voltada para baixo.
- [ ] O lucro obtido pela empresa no terceiro ano foi maior que o registrado no segundo ano.
- [ ] O lucro máximo (anual) alcançado pela empresa foi registrado durante o primeiro trimestre do terceiro ano.
- [ ] A empresa não apresentou prejuízo durante os 5 primeiros anos.

44 **Uerj** Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol.

A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir.



A equação da parábola era do tipo: $y = \left(\dfrac{-x^2}{36}\right) + c$. O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

(a) na baliza.
(b) atrás do gol.
(c) dentro do gol.
(d) antes da linha do gol.

45 **Unicamp**

a) Encontre as constantes a, b e c de modo que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos (1, 10), (–2, –8) e (3, 12).
b) Faça o gráfico da função obtida no item a, destacando seus pontos principais.

46 **Cesgranrio** Determine o parâmetro m na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ela tenha uma raiz nula e outra positiva.

47 **IME** Dados dois trinômios do segundo grau:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{(I)}$$
$$y = a'x^2 + b'x + c' \quad \text{(II)}',$$

considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A'B' os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II).

Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c', de modo que A'B' divida o segmento AB harmonicamente.

48 No plano cartesiano representa-se $y = ax^2 + bx + c$ (a, b e $c \in \mathbb{R}^*$) e a função que se obtém da anterior substituindo-se x por – x. Os dois gráficos:

(a) coincidem.
(b) interceptam-se em 2 pontos.
(c) interceptam-se em Ox.
(d) interceptam-se um Oy.
(e) não se interceptam.

49 Qual a propriedade dos trinômios $y = ax^2 + bx + c$ quando $a + b + c = 0$?

50 Considere o trinômio $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2$. Assinale dentre as condições a seguir a que torna o trinômio sempre positivo.

(a) $a > 0$
(b) $a < \dfrac{1}{2}$
(c) $a < -\dfrac{1}{4}$
(d) $a > -\dfrac{1}{2}$
(e) $a > \dfrac{1}{4}$

51 O trinômio $kx^2 + (k + 1)x - (k + 1)$

(a) é negativo para todo valor de x e todo $k \neq 0$.
(b) é negativo para todo valor de x se $k \leq -2$.
(c) é positivo para todo valor x e todo $k \neq 0$.
(d) é negativo para todo valor de x se $k \in \left]-1; -\dfrac{1}{5}\right[$.

52 **ITA** Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+3, & x \leq 0, \\ x^2+4x+3, & x > 0 \end{cases}$$

então:

(a) f é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{-2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.

(b) f é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{-2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.

(c) f é sobrejetora, mas não é injetora.

(d) f é injetora, mas não é sobrejetora.

(e) f é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{-2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

53 **IME** Seja f uma função real tal que $\forall\ a \in \mathbb{R}$

$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$, f é periódica? Justifique.

54 **Fuvest** Considere a função $f(x) = x\sqrt{(1-2x^2)}$.

a) Determine constantes reais a, b e g de modo que $(f(x))^2 = a[(x^2+b)^2 + g]$.

b) Determine os comprimentos dos lados do retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 1$.

55 **ITA** Seja α um número real tal que $\alpha > 2\left(1+\sqrt{2}\right)$ e considera na equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

(a) 30º

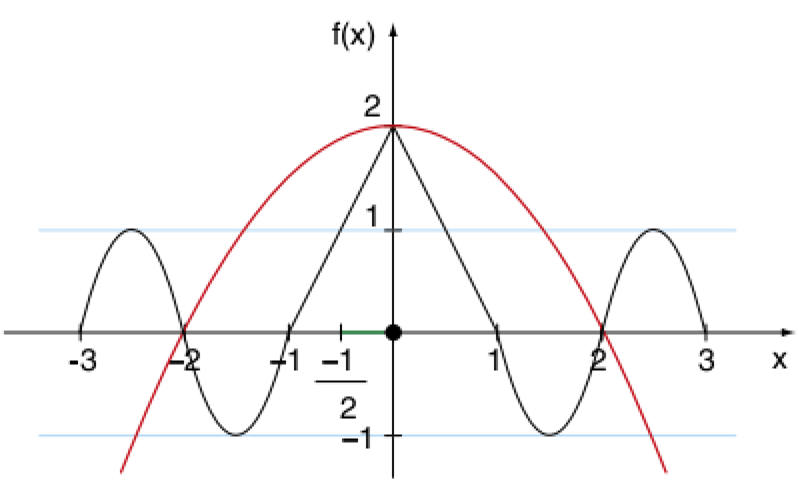
(b) 45º

(c) 60º

(d) 135º

(e) 120º

56 **ITA** A função f(x), definida para $-3 \leq x \leq 3$, tem o seguinte gráfico.



As linhas ligando (–1; 0) a (0; 2) e (0; 2) a (1; 0) são segmentos de reta. Supondo $a \leq 0$, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 4)$ intercepta o gráfico de f(x) em exatamente 4 pontos distintos?

(a) $\frac{-1}{2} < a < 0$

(b) $-1 < a < -\frac{1}{2}$

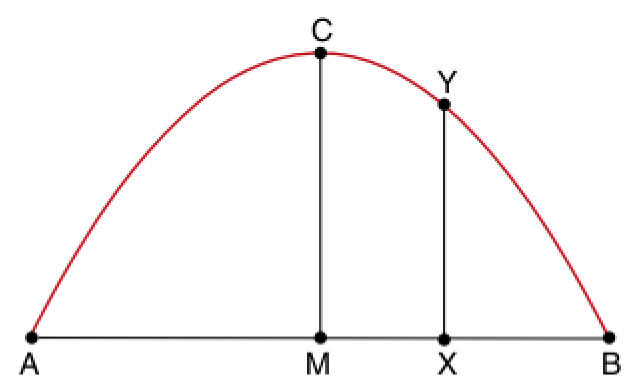
(c) $-\frac{3}{2} < a < -1$

(d) $-2 < a < -\frac{3}{2}$

(e) $a < -2$

57 Quais as condições a que deve satisfazer m para que o número 1 esteja entre as raízes do trinômio $mx^2 - 2(m+1)x + m^2$?

58 Um arco parabólico de extremidades A e B possui altura MC = 16 e amplitude AB = 40. Sabendo que C é o ponto médio do arco AB e M é o ponto médio do segmento AB, a altura XY do arco, em um ponto situado a 5 unidades do centro M deste, é igual a:



(a) 1

(b) 15

(c) $15\frac{1}{3}$

(d) $15\frac{1}{2}$

(e) $15\frac{3}{4}$

59 Determine os valores de a para os quais a expressão $\frac{a+3x}{(x-1).(x+1)}$ assume todos os valores reais.

60 Considere x, y $\in \mathbb{R}$ tais que 3x –y = 20. O menor valor de $\sqrt{x^2+y^2}$ é:

(a) $2\sqrt{5}$

(b) $2\sqrt{10}$

(c) $2\sqrt{15}$

(d) $4\sqrt{5}$

(e) $4\sqrt{10}$

Função exponencial

4

FRENTE 1

Thomas Malthus foi um demógrafo e economista britânico. Formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo.

$N(t) = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$

N_0: população presente no instante inicial $t = 0$

r: constante que depende da espécie da população

e: constante de Euler, igual a 2,71828...

Thomas Malthus, 1766-1834.

NEVIT DILMEN/WIKIMEDIA COMMONS

Em 1798, Malthus publicou *Ensaio sobre a população*, no qual afirma que a população cresce exponencialmente enquanto a produção de alimentos aumenta linearmente.

Função exponencial

Define-se função exponencial toda função da forma $f(x) = a^x$; com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Antes de exemplificarmos e construirmos os gráficos, memorize as propriedades:

P1 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2 $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

P3 $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P4 $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

P5 $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

P6 $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

P7 $\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\dfrac{a}{b}};\ b \neq 0$

P8 $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$

P9 $(\sqrt[p]{a})^q = \sqrt[p]{a^q}$

P10 $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Com a definição e as propriedades em mãos, podemos justificar a razão de que a base da função exponencial é maior do que 0 e diferente de 1.

1) Se $a = 1$, tem-se $f(x) = 1^x = 1$, que é a função constante.
2) Se $a < 0$, por exemplo $a = -2$, tem-se $f(x) = (-2)^x$. Esse gráfico não será contínuo, ou seja, para determinados valores de x, não teremos o y.

Para $x = \dfrac{1}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}}$, pela propriedade (P10)

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

Comportamento da função

A função exponencial possui dois comportamentos distintos dependendo do valor da base a. Observe:

1) $f(x) = 2^x$, analisando alguns pontos, construímos a tabela e o gráfico a seguir.

x	f(x)
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

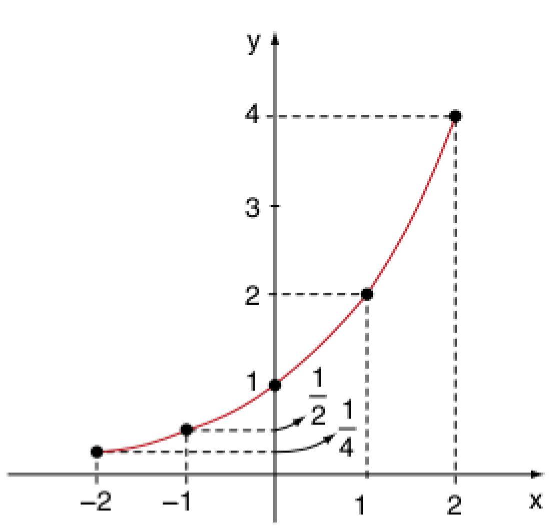


Fig. 1 Esboço do gráfico da função $f(x) = 2^x$.

2) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, analisando novamente a função em alguns pontos particulares, obtemos a tabela e o gráfico a seguir.

x	f(x)
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

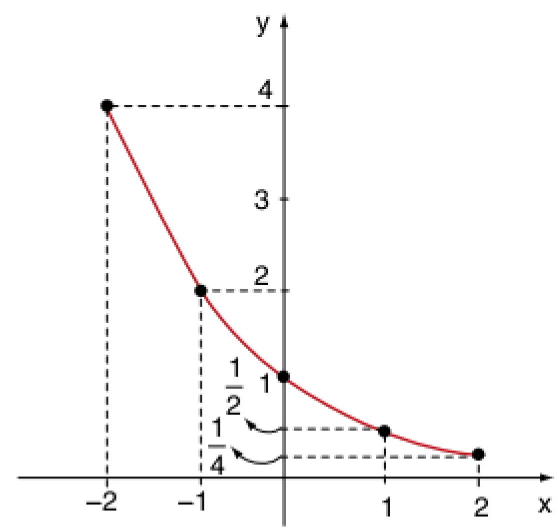


Fig. 2 Esboço do gráfico da função $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

ATENÇÃO!

Em uma função exponencial $f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ se:

- $a > 1$, a função f é crescente.
- $0 < a < 1$, a função f é decrescente.

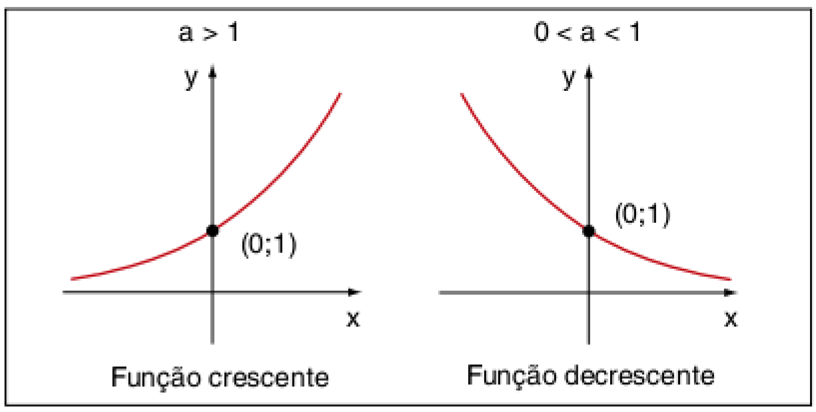


Fig. 3 Esboço geral do gráfico da função $f(x) = a^x$.

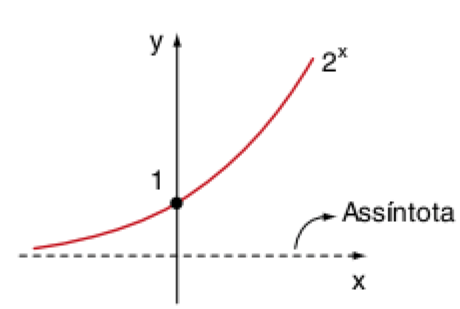
Observe que os gráficos a^x sempre passam pelo ponto (0; 1) e não "encostam" no eixo x. Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = 0$, teremos valores de x em que $a \rightarrow 0$ (tende a zero). O eixo x representa um limite nunca alcançado para a^x, o eixo recebe o nome de **assíntota**.

Vamos seguir a mesma ideia de construção de gráficos do capítulo 3, privilegiando as propriedades geométricas.

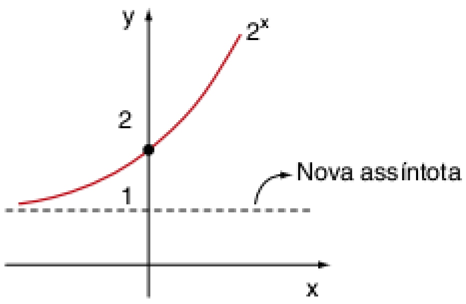
Exercícios resolvidos

1 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2^x + 1$.

Resolução:

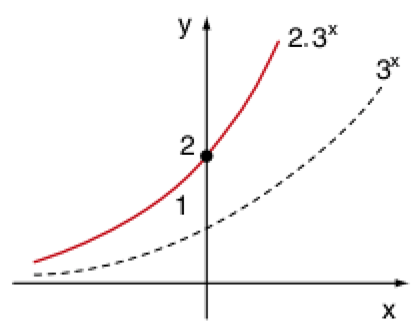


Adicionando uma constante a 2^x, o gráfico sofrerá um deslocamento na direção do eixo y com a sua assíntota.



2 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

Resolução:
Com base no gráfico básico 3^x, iremos multiplicar as ordenadas de todos os pontos por 2. Observe a figura a seguir.



A função cortará o eixo y no ponto (0; 2) e terá um crescimento mais acentuado e um decrescimento mais suave que o do 3^x.

3 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -3 \cdot a^x$, em que $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, analise as afirmações:

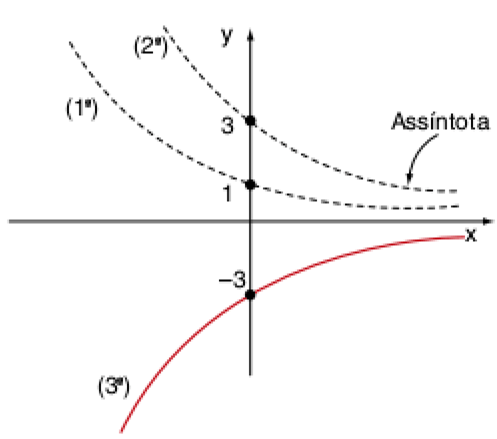
I. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$; $\forall x; y \in \mathbb{R}$.
II. f é bijetora.
III. f é crescente e $f(]0; +\infty[) =]-3; 0[$.

Resolução:
Vamos aproveitar essa questão do vestibular do ITA como exemplo das propriedades gráficas da função exponencial. Na afirmação (I), vamos calcular:

$$f(x+y) = -3 \, . \, a^{x+y} = \underbrace{-3 \, . \, a^x}_{} \, . \, a^y = \underbrace{f(x)}_{} . \, a^y$$

[afirmação falsa]

Para analisarmos as afirmações (II) e (III), vamos construir o gráfico da função $f(x) = -3 \cdot a^x$.
A construção do gráfico será em 3 partes:
1ª parte: gráfico básico a^x com $0 < a < 1$.
2ª parte: multiplicar por 3.
3ª parte: o simétrico em relação ao eixo x, após a multiplicação por –1.
Observe os três processos na figura a seguir.



O conjunto-imagem da função f (projeção do gráfico no eixo y) é:

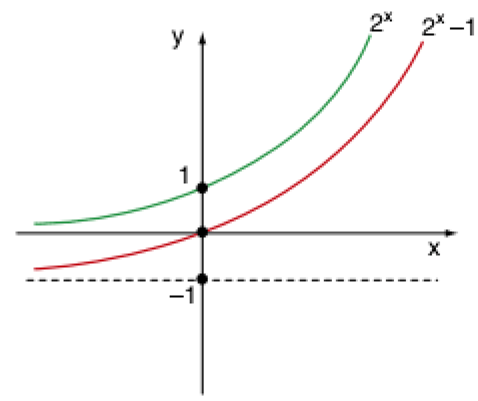
$$Im_f =]-\infty; 0[= \mathbb{R}_-^*$$

que é diferente do contradomínio $\mathbb{R}$. A função não é sobrejetora, portanto também não pode ser bijetora (afirmação (II) falsa).

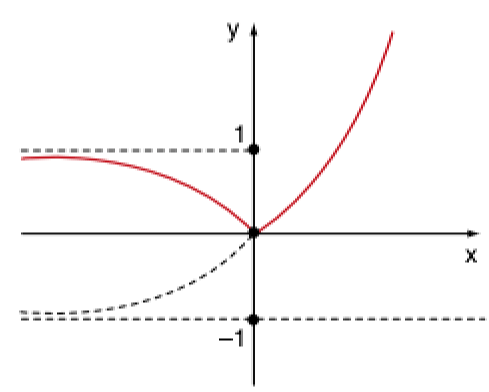
Apesar de a base ser $0 < a < 1$, a função é crescente por causa do –3, e a imagem do conjunto $]0; +\infty[$ é $]-3; 0[$ (afirmação (III) verdadeira).

4 $f(x) = |2^x - 1|$

Resolução:
Construa o gráfico básico 2^x e desça 1 unidade todos os seus pontos inclusive a assíntota.



Após construir $2^x - 1$, vamos "rebater" a parte que possui imagem negativa. Teremos assim $f(x) = |2^x - 1|$.



Aplicação da função exponencial nos juros compostos

A cobrança de juros ou o ganho de juros é uma prática utilizada há séculos nas relações comerciais.

- **Juros**: um valor (constante ou variável) que vai aumentando o capital inicial ou a dívida.
- **Taxa de juros**: um índice apresentado na forma de porcentagem (i%). Seu valor é constante e é uma porcentagem a ser aplicada no capital.

A cobrança de juros compostos é a mais utilizada no cotidiano. Ela consiste no aumento dos juros após cada período. Observe a sequência e a fórmula induzida no final.

Seja $\mathbf{C_0}$ o capital inicial, **i%** a taxa aplicada a cada período, e **n** o número de períodos:

C_0
$C_1 = C_0 + i\% \cdot C_0 = C_0(1 + i\%)$
$C_2 = C_1 + i\% \cdot C_1 = C_1(1 + i\%) = C_0 \cdot (1 + i\%)^2$
$C_3 = C_2 + i\% \cdot C_2 = C_2(1 + i\%) = C_0 \cdot (1 + i\%)^3$
$\vdots$
generalizando, temos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i\%)^n \begin{cases} C_0\text{: capital inicial} \\ i\%\text{: taxa aplicada} \\ n\text{: número de períodos} \\ C_n\text{: capital gerado após n períodos} \end{cases}$$

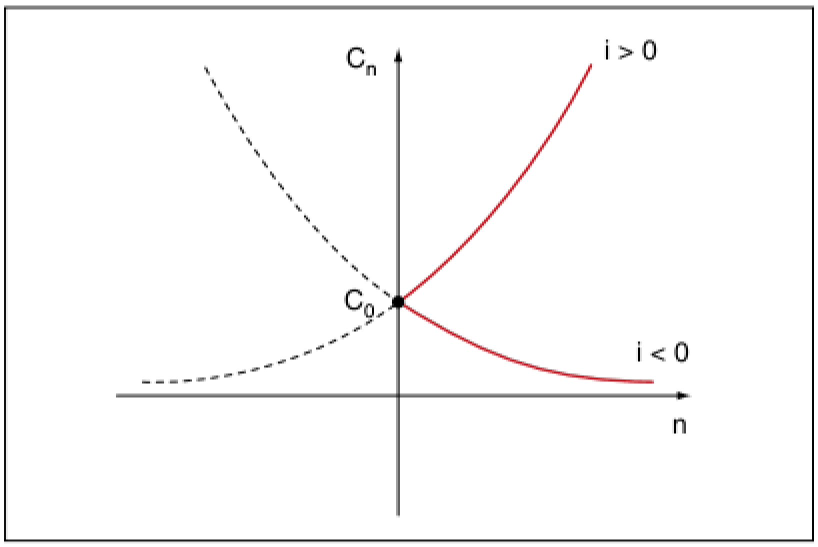


Fig. 4 Gráfico indicando o acréscimo ou o decréscimo do capital C_0.

Exercícios resolvidos

5 Um certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares em 1840 para pagar em 100 anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada" com a taxação anual de juros. Determine o valor da dívida em 2000. Para os cálculos adote $(1{,}09)^8 \approx 2$.

Resolução:
Considere $C_0 = 10^6$ e $i\% = 9\%$ ao ano.
De 1840 até 2000, temos 160 anos.
Sabendo que $C_n = C_0(1 + i\%)^n$, vamos calcular $C_{160} =$ $= 10^6 \cdot (1 + 9\%)^{160} = 10^6 \cdot (1{,}09)^{160} = 10^6 \cdot [(1{,}09)^8]^{20} =$ $= 10^6 \cdot (2)^{20} = 10^6 \cdot (2^{10})^2 = 10^6 \cdot (1.024)^2 \approx 10^6 \cdot (10^3)^2 \approx 10^{12}$.
Temos então uma dívida atualmente da ordem de 1 trilhão de dólares.

6 Os institutos de pesquisa indicam uma inflação mensal de 2,5%. Por meio dos juros compostos, determine a inflação anual.

Resolução:
Não caia no erro de pensar que a inflação anual é $12 \cdot (2{,}5\%) = 30\%$ ao ano.
Para resolver o problema, considere um produto que custa x no início do ano. Após 12 meses, o produto custará:
$C_{12} = x \cdot (1 + 2{,}5\%)^{12} = x \cdot (1{,}025)^{12} = 1{,}345x$, o que equivale a $x + 0{,}345x$. Os juros acumulados no período de 1 ano foram $0{,}345x$, que equivale a 34,5%, ou seja, a inflação foi de 34,5% no ano.

7 Um país europeu teve uma "deflação" de 1% ao mês durante 1 ano. Um produto que custava 100 dólares no começo do ano vai custar quanto ao término desse ano?

Resolução:
Trata-se da aplicação dos juros compostos com um decréscimo de 1% ao mês. Assim, $C_{12} = 100 \cdot (1 - 1\%)^{12} = = 100 \cdot (0{,}99)^{12} = 100 \cdot (0{,}89) \approx 89$ dólares.

Equação exponencial

São equações cuja variável está no expoente.

O procedimento básico para resolvê-las é transformar as funções na mesma base para igualar os expoentes.

ATENÇÃO!

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$, pois a função exponencial é injetora.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

Resolva as equações a seguir:

8 $4^x = 1.024$

Resolução:
$4^x = 1.024 \therefore (2^2)^x = 2^{10} \therefore 2^{2x} = 2^{10} \rightarrow$
$2x = 10 \therefore x = 5 \therefore S = \{5\}$

9 $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

Resolução:
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \therefore \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \therefore$$
$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \rightarrow x = 3 \therefore S = \{3\}$$

10 $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

Resolução:
$$4^{\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2} \therefore (2^2)^{\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2} \therefore$$
$$\therefore 2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2} \therefore$$
$$\therefore 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} + 2 \therefore$$
$$\therefore \sqrt{x+1} = 2 \qquad x + 1 = (2)^2 \therefore$$

Equação irracional

$\therefore x + 1 = 4 \therefore x = 3$
$S = \{3\}$

11 $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

Resolução:

Nesse tipo de equação exponencial, temos 3 bases diferentes. Para reduzir essa quantidade de bases, divida, por exemplo, a equação toda por 9^x, observe:

$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \therefore$

$$\therefore \frac{4^x + 6^x}{9^x} = \frac{2 . 9^x}{9^x} \therefore \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = 2 \therefore$$

$$\therefore \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 2 \therefore \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \therefore$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Essa equação é redutível a uma equação do 2° grau.

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$*, temos:*

$y^2 + y - 2 = 0$*, raízes* -2 *e* 1.

Para $y = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \therefore x = 0$

Para $y = -2 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \therefore \nexists x$

Solução final $S = \{0\}$

ATENÇÃO!

As funções exponenciais
$f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ possuem o conjunto-imagem $\mathbb{R}^*_+$,
ou seja, $\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x \leq 0$.

Exercícios resolvidos

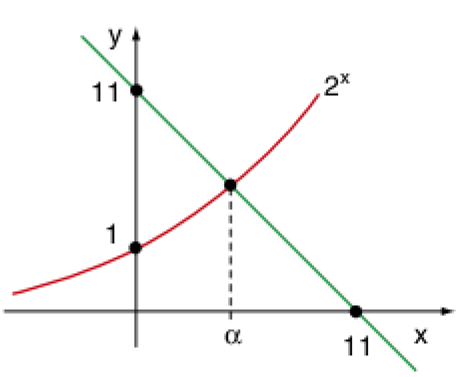
Resolva as equações a seguir:

12 $2^x = 11 - x$.

Resolução:

Nesse tipo de equação, temos a "mistura" de funções diferentes. Devemos avaliar a solução graficamente, plotando os dois gráficos no mesmo plano cartesiano.

Os pontos de corte são as raízes da equação:



α é o valor de x, tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$ *em que* $f(x) = 2^x$ *e* $g(x) = 11 - x$*, então:*

$f(\alpha) - g(\alpha) = 0 \therefore 2^\alpha - [11 - \alpha] = 0$; *α é raiz. Por "verificação"* $\alpha = 3$*, pois* $2^3 = 11 - 3 \therefore 8 = 8$.

13 $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

Resolução:

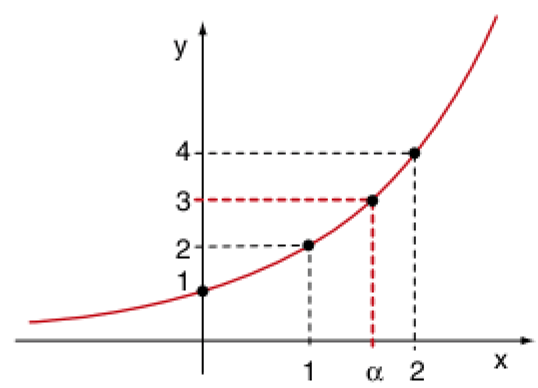
$4^x - 2^2 \cdot 2^x + 3 = 0 \therefore (2^x)^2 - 2^2 \cdot (2^x) + 3 = 0$

Fazendo $2^x = y$*, teremos uma equação do 2° grau, assim:* $y^2 - 4y + 3 = 0$ *raízes 1 e 3.*

Para $y = 1 \rightarrow 2^x = 1 \therefore 2^x = 2^0 \therefore x = 0$

Para $y = 3 \rightarrow 2^x = 3 \therefore x = ?$

No momento, não temos condições de calcular o x. Podemos avaliar graficamente a solução.



$1 < \alpha < 2$ *tal que* $2^\alpha = 3$

Solução final $S = \{0; \alpha\}$

Inequação exponencial

A resolução das inequações seguem os mesmos princípios das equações. Vamos igualar as bases e trabalhar com os expoentes e também reduzindo as expressões em funções do 2° grau.

As soluções das inequações dependem da base e da monotonicidade (crescente ou decrescente) da função exponencial. Observe:

1° caso: $a > 1$

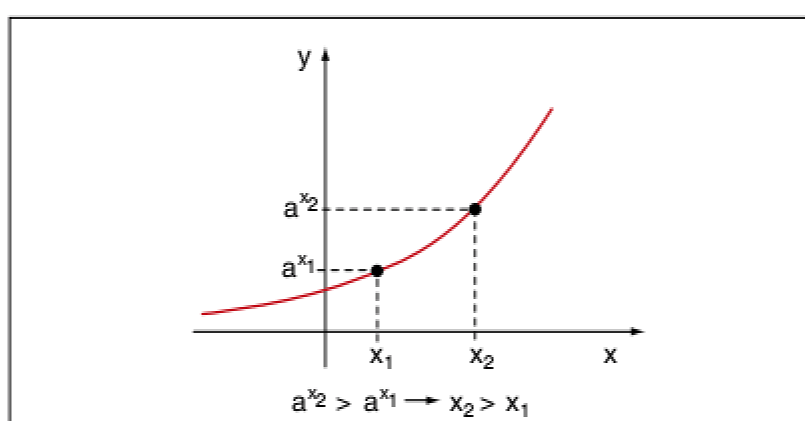


Fig. 5 Função crescente.

2° caso: 0 < a < 1

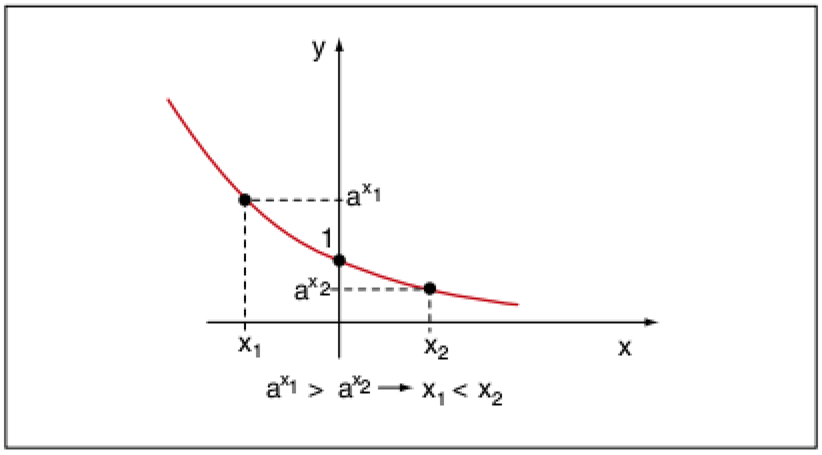


Fig. 6 Função decrescente.

Tendo em vista os dois casos apresentados, analise os exemplos de soluções de inequações a seguir.

Exercícios resolvidos

Resolva as equações a seguir:

14 $6^{3-x} < 216$

Resolução:

$6^{3-x} < 216 \therefore 6^{3-x} < 6^3$

$\rightarrow 3 - x < 3 \therefore -x < 0 \therefore x > 0$

$S =]0; +\infty[$

15 $2^x \cdot 5^x > (0,1) \cdot (10^{x-1})^5$

Resolução:

$2^x . 5^x > (0,1).(10^{x-1})^5 \therefore$

$\therefore (2.5)^x > 10^{-1}.10^{5x-5} \therefore$

$\therefore 10^x > 10^{-1+5x-5} \therefore$

$\therefore 10^x > 10^{5x-6} \rightarrow x > 5x - 6 \therefore -4x > -6$

$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

16 $(0,04)^{-x^2+5x-8} < (0,04)^{-2}$

Resolução:

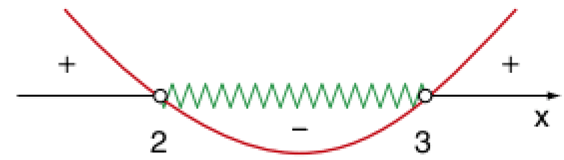
$(0,04)^{-x^2+5x-8} < (0,04)^{-2}$ *(base menor do que 1)*

$-x^2 + 5x - 8 > -2 \therefore$

$\therefore -x^2 + 5x - 6 > 0 \therefore$

$\therefore -x^2 + 5x - 6 > 0 \therefore x^2 - 5x + 6 < 0$

Fazendo a análise de sinais:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ *ou* $S =]2; 3[$

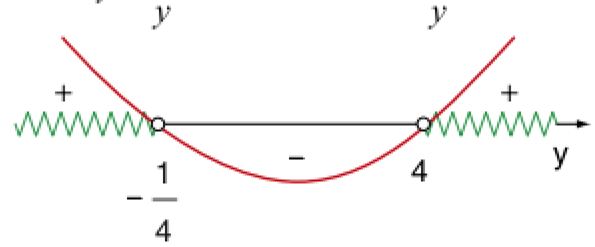
17 $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$

Resolução:

$2^{2+x} - 2^{2-x} > 15 \therefore 2^2 . 2^x - \frac{2^2}{2^x} > 15$

Fazendo $2^x = y$, recaímos em uma inequação do 2º grau.

$4y - \frac{4}{y} > 15 \therefore 4y - \frac{4}{y} - 15 > 0 \therefore \frac{4y^2 - 15y - 4}{y} > 0$



Para y > 4, temos: $2^x > 4 \therefore 2^x > 2^2 \rightarrow x > 2.$

Para $y < -\frac{1}{4}$ *: impossível.*

$S =]2; +\infty[$

Revisando

1 Simplifique as expressões:

a) $\frac{2^{n+4} - 2.2^n}{2.2^{n+3}}$

b) $(2^n + 2^{n-1})(3^n - 3^{n-1})$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^8$

2 Se $A = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $B = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, calcule $A^2 - B^2$.

3 Construa o gráfico da função $f(x) = 2^{-2x+1}$.

4 Resolva a equação exponencial $4^x - 2^x - 2 = 0$.

5 Resolva a inequação $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$.

Exercícios propostos

Equações e expressões exponenciais

1 Resolva a equação $(0,1)^{x-5} = 10$.

2 Sabendo que $4^x - 4^{x-1} = 24$, então $x^{\frac{1}{2}}$ vale:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

e) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

3 Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$$

4 Determine o valor de x na equação $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$.

5 **Fuvest** Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$$

pode-se dizer que x + y é igual a:

(a) 18
(b) –21
(c) 27
(d) 3
(e) –9

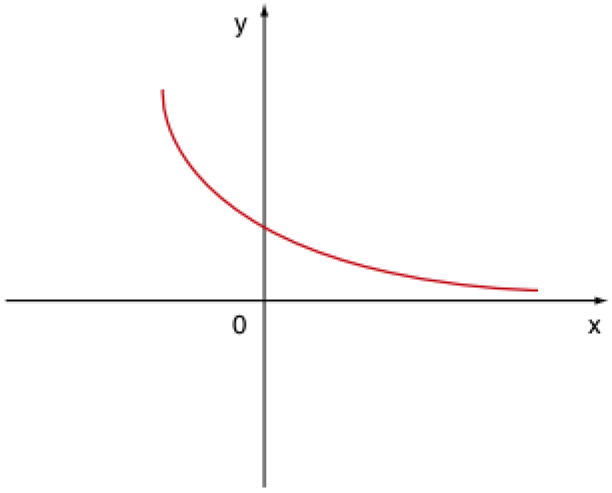
Gráficos exponenciais

6 **Fuvest** Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que a, b, e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1; +\infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1; 0) e $\left(0; \dfrac{-3}{4}\right)$.

Então o produto abc vale:

(a) 4
(b) 2
(c) 0
(d) –2
(e) –4

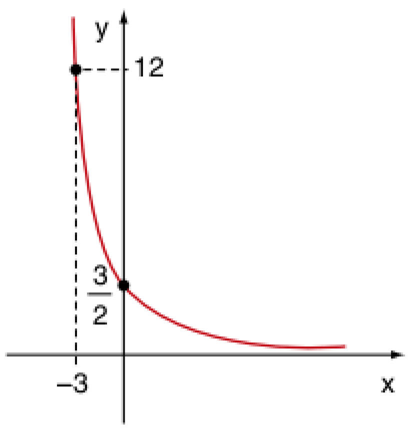
7 **UFMG** Observe a figura a seguir. Nessa figura, está representado o gráfico da função $f(x) = b^x$, $b > 0$.



Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, a única afirmativa verdadeira sobre o valor de b é:

(a) $0 < b < \frac{1}{9}$
(b) $\frac{2}{9} < b < \frac{4}{9}$
(c) $\frac{8}{9} < b < 1$
(d) $1 < b < 4$
(e) $4 < b < 9$

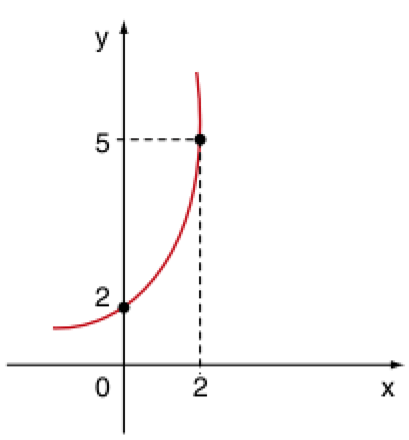
8 **UFMG** Observe a figura.



Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = ka^x$, sendo k e a constantes positivas. O valor de f(2) é:

(a) $\frac{3}{8}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) 1

9 **UFSM** A figura mostra um esboço do gráfico da função $y = a^x + b$, com a e b $\in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.



Então, o valor de $a^2 - b^2$ é:

(a) –3
(b) –1
(c) 0
(d) 1
(e) 3

Inequações exponenciais

10 **Unirio** Assinale o conjunto-solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$.

(a) $]-\infty, 5]$
(b) $[4, +\infty[$
(c) $[5, +\infty[$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

Problemas gerais

11 A equação $25^x = 6 \cdot 5^x - 5$ admite como soluções os números a e b. Então:

(a) $\frac{a}{b} = 1$
(b) $a + b = 0$
(c) $a \cdot b = 2$
(d) $a \cdot b = 1$
(e) $a \cdot b = 0$

12 A equação $3^x - 4 = a$, com a real, só terá solução real para:

(a) $a > -4$
(b) $a < 4$
(c) $a > -3$
(d) $a < 3$
(e) $a > \frac{3}{4}$

13 **FGV** Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5^{3x}$, se $f(a) = 8$, então $f\left(-\frac{a}{3}\right)$ é:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{8}$
(d) 4
(e) 2

14 **UEL** Considere a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5^x + 3$. Seu conjunto-imagem é:

(a) $]-\infty; 3[$
(b) $]-\infty; 5[$
(c) $[3; 5]$
(d) $]3; +\infty[$
(e) $]5; +\infty[$

15 **FEI** Quantas raízes reais possui a equação $2^x = x + 4$?

(a) Nenhuma.
(b) Uma.
(c) Duas.
(d) Três.
(e) Quatro.

16 **Vunesp** Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = a10^{xt}$, em que N(t) é o número de bactérias em t horas, $t \geq 0$, e a e x são constantes estritamente positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias, N(0), é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será:

(a) 4a
(b) $2a\sqrt{2}$
(c) 6a
(d) 8a
(e) $8a\sqrt{2}$

17 **UFMG** O produto das raízes da equação $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ é:

(a) –3
(b) $\frac{-1}{4}$
(c) $\frac{-1}{3}$
(d) 1
(e) $\frac{\left(4\sqrt{3}\right)}{3}$

18 **UFMG** O valor de x que satisfaz a equação $2^{4x} - 6\,(2^{2x}) = 16$ é tal que:

(a) $1 < x \leq 2$
(b) $2 < x \leq 3$
(c) $3 < x \leq 4$
(d) $4 < x \leq 5$

19 **Uerj** Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo t, em anos, do seguinte modo $R = R_0\,e^{-yt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo t e y é o coeficiente de declínio.
O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nessa cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, y = 10%.

Use a tabela a seguir para os cálculos necessários:

e^x	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2
x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

O tempo, em anos, para que o risco de infecção se torne igual a 0,2%, é de:

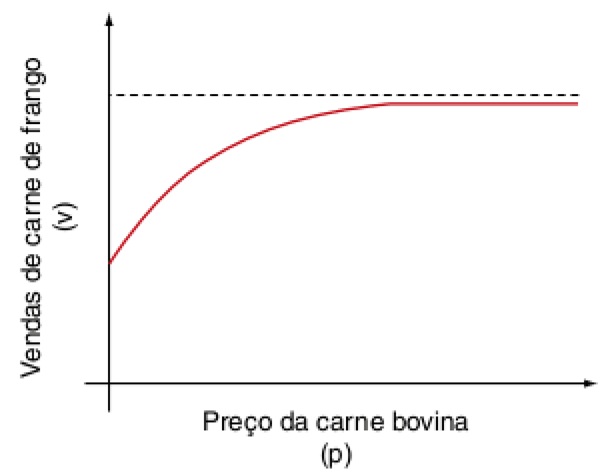
(a) 21 (b) 22 (c) 23 (d) 24

20 **Fuvest** Leia e responda:

a) Esboce, em um mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x$.
b) Baseado nos gráficos da parte a), resolva a inequação $2^x \leq 2x$.
c) Qual é o maior: 2 elevado a $\sqrt{2}$ ou 2 multiplicado por $\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

21 **Unicamp** Esboce os gráficos das funções $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $y = e^x + e^{-x} - 3$ em um mesmo sistema de eixos ortogonais. Mostre que a equação $e^x + e^{-x} - 3 = 0$ tem duas raízes reais simétricas x = a e x= –a. Mostre, ainda, que $e^{3a} + e^{-3a} = 18$.

22 **UEL** Um economista, estudando a relação entre o preço da carne bovina (que aumenta na entressafra) e as vendas de carne de frango, encontrou uma função cujo gráfico é esboçado a seguir.



De acordo com esse gráfico, é verdade que:

(a) v é diretamente proporcional a p.
(b) v é inversamente proporcional a p.
(c) se p cresce, então v também cresce.
(d) v é sempre maior que p.
(e) o preço da carne de frango é inferior ao da carne bovina.

TEXTO COMPLEMENTAR

A história do número *e*

Os números irracionais sempre foram muito intrigantes na história da matemática. Eles aparecem com frequência na geometria como razão entre a diagonal e o lado de um quadrado $(\sqrt{2})$, a razão do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro (π), a razão áurea presente na natureza $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, entre muitos outros.

Vamos apresentar, neste texto, um número irracional muito importante, mas pouco conhecido pelos alunos do Ensino Médio, o número irracional e = 2,71828...

O homem, desde os seus primórdios, teve como preocupação o acúmulo de riquezas.

Um dos conceitos fundamentais quando se trata de dinheiro é a noção de juros.

Juros seriam os ganhos obtidos por quem empresta o dinheiro. Tenha certeza de que essa prática é muito antiga. Encontra-se no Museu do Louvre, em Paris, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que propõe o seguinte problema: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos anualmente?

Vamos retomar a fórmula dos juros compostos:

$C_n = C_o \cdot (1 + i\%)^n$

Com a noção de juros, as interpretações e especulações a esse respeito foram evoluindo com o tempo. Observe o exemplo a seguir.

Considere um empréstimo de R$ 100,00 com uma taxa de juros de 100% ao ano. No final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1+100\%)^1 = 200$ reais.

Mas um ano possui dois semestres, e podemos cobrar 50% por semestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1+50\%)^2 = 225$ reais.

Prosseguindo esse raciocínio, temos quatro trimestres com 25% por trimestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1+25\%)^4 = 244{,}14$ reais.

Esses resultados devem assustar qualquer pessoa que queira fazer um empréstimo. A dúvida que paira no ar é se esse valor aumenta de forma indeterminada.

A comunidade bancária explora esse conceito de cálculo de juros ao extremo. Vamos analisar os cálculos: $C_n = 100\left(1+\dfrac{100\%}{n}\right)^n$ é o valor da dívida de 100 reais, se aplicarmos juros compostos divididos igualmente em **n** períodos. Assim, $C_n = 100\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

O mistério do problema resume-se em entender o número $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Observe a tabela.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828
10000000	2,71828

Podemos observar o comportamento peculiar do número $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. À medida que **n** vai aumentando, vamos "estacionando" no número 2,71828.

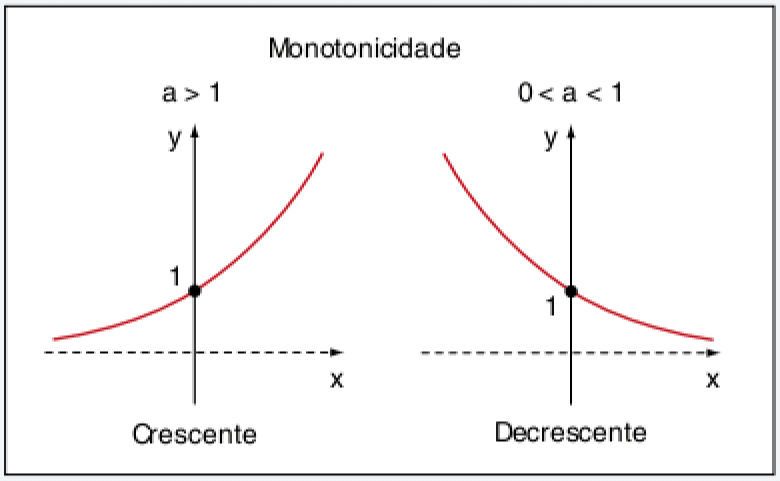
É claro que precisamos de mais fatos teóricos para concluir que o limite da expressão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é o número 2,71828......, batizado de número e.

Simbolicamente, temos: $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Por causa da crescente importância do comércio internacional, as transações financeiras também se intensificaram. É possível que o número e tenha sido reconhecido nesse contexto.

RESUMINDO

- **f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ e $f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ é definida como função exponencial.**
- **f é injetora e sobrejetora.**



QUER SABER MAIS?

SITE

- Leis exponenciais de ecologia populacional
  <www.ecologia.info/leis-ecologia-populacional.htm>.

Exercícios complementares

Equações e expressões exponenciais

1 Quanto é o expoente em $2^x = 128$?

2 Calcule x de modo que se obtenha $10^{2x-4} = 1$.

3 Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

b) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = (0{,}001) \cdot \left(10^{3-x}\right)^2$

c) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

d) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

e) $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$

4 **Mackenzie** Se $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$, então x e y são os possíveis valores reais de t, tais que:

(a) $t^2 - 27t + 126 = 0$
(b) $t^2 + 27t + 126 = 0$
(c) $t^2 - 21t - 126 = 0$
(d) $t^2 + 21t - 126 = 0$
(e) $t^2 - 26t - 27 = 0$

5 Se $2^x + 2^{-x} = 3$, o valor de $8^x + 8^{-x}$ é:

(a) 12
(b) 18
(c) 21
(d) 24
(e) 27

6 A solução da equação $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-3} = \left(\frac{12}{9}\right)^x$ é um número racional x tal que:

(a) $-1 \leq x < 0$
(b) $0 \leq x < 1$
(c) $1{,}5 < x < 2{,}5$
(d) $2{,}5 < x < 3{,}5$
(e) $2{,}5 \leq x < 3{,}5$

7 Se $3^x - 3^{2-x} = 2^3$, então $15 - x^2$ vale:

(a) 16
(b) 15
(c) 14
(d) 11
(e) 6

8 Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, então o valor de $x - y$ é:

(a) –2
(b) –1
(c) 0
(d) 1
(e) 2

9 Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1.000^5}$.

10 **FGV** Determine o conjunto-solução da equação $x^{x^3-8} = 1$.

11 Resolva a equação exponencial $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$.

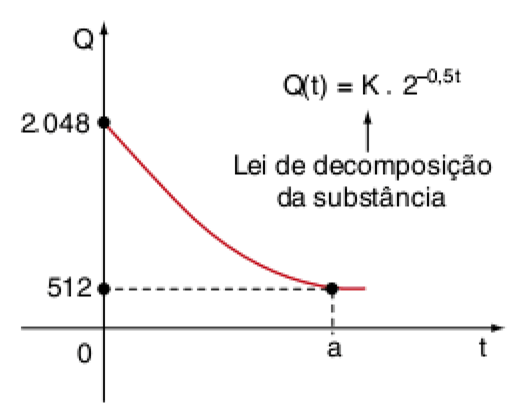
12 Determine a metade do número $2^{11} + 4^8$.

Gráficos dos exponenciais

13 **Fuvest** A equação $2^x = -3x + 2$, com x real:

(a) não tem solução.
(b) tem uma única solução entre 0 e $\frac{2}{3}$.
(c) tem uma única solução entre $-\frac{2}{3}$ e 0.
(d) tem duas soluções, sendo uma positiva e outra negativa.
(e) tem mais de duas soluções.

14 **Vunesp** Considerando-se o gráfico e a equação a seguir relacionados à decomposição de uma substância, onde K é uma constante, t indica tempo (em minutos) e Q(t) indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t. Determine os valores de K e a.



15 **ITA** Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, considere as afirmações:

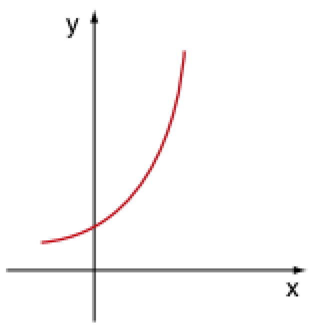
I. Os gráficos de f e g não se interceptam.
II. As funções f e g são crescentes.
III. $f(-2)\ g(-1) = f(-1)\ g(-2)$.

Então:

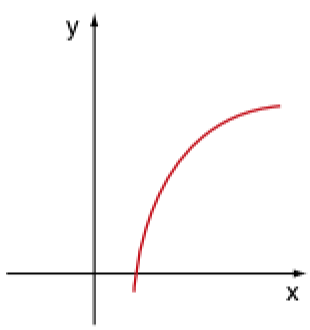
(a) apenas a afirmação (I) é falsa.
(b) apenas a afirmação (III) é falsa.
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
(e) todas as afirmações são falsas.

16 A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defina por f: $(x) = 2^x$, é melhor representada por:

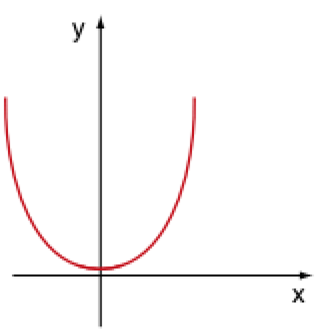
(a)



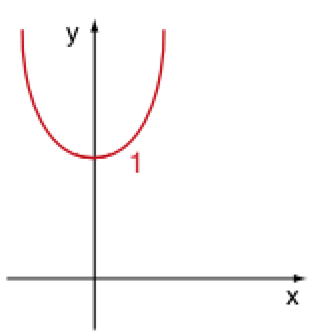
(b)



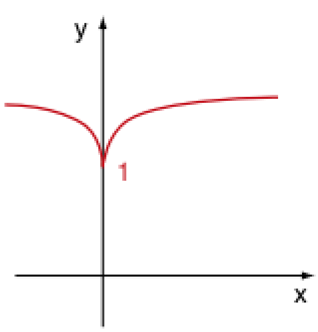
(c)



(d)



(e)



Inequações exponenciais

17 Assinale a única afirmação correta.

(a) $(0,21)^2 > (0,21)^3$
(b) $(0,21)^4 > (0,21)^3$
(c) $(0,21)^{-2} < 1$
(d) $(0,21)^7 < (0,21)^8$
(e) $(0,21)^{0,21} > (0,21)^{0,20}$

18 Resolva as inequações exponenciais.

a) $6^{3-x} < 216$
b) $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$
c) $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$
d) $\left(3^x+5\right)^{-1} < \left(3^{x+1}-1\right)^{-1}$
e) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$

Problemas gerais

19 Se $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{para } x > 1 \end{cases}$, então $f(0) - f\left(\frac{3}{2}\right)$ é igual a:

(a) $\frac{5}{2}$
(b) $\frac{5}{3}$
(c) $\frac{1}{3}$
(d) $-\frac{1}{2}$
(e) $-\frac{2}{3}$

20 **UFPE** Seja g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todo x, $g(2x + 3) = 2^x$. O valor de g(5) é:

(a) 10
(b) 32
(c) igual a g(13).
(d) 2
(e) impossível de calcular apenas com esses dados.

21 **UFMT** Com relação à função $f(x) = a^x$, sendo a e x números reais e $0 < a \neq 1$, julgue, quanto a (V) ou (F), os itens.

☐ A curva representativa do gráfico de f está toda acima do eixo x, pois $f(x) > 0$ para todo x.
☐ Seu gráfico intercepta o eixo y no ponto (0,1).
☐ A função é crescente se $0 < a < 1$.
☐ Sendo $a = \frac{1}{2}$, então $f(x) > 2$ se $x > 1$.

22 **Mackenzie** Se $4^x = 3$ e $4^y = 9$, então $(0,125)^{-4x+2y}$ vale:

(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) $\log_4 3$
(e) $\log_4 9$

23 **PUC** Sendo $f(x) = 2^x$, a expressão $\dfrac{[f(x+y)-f(x)]}{y}$ é igual a:

(a) $\dfrac{[(2^y-1).2^x]}{y}$ (c) $\dfrac{(2^x-2^y)}{y}$ (e) 1

(b) $\dfrac{[(2^x-1).2^y]}{y}$ (d) $\dfrac{(2^x+y)}{y}$

24 **Mackenzie** Na função real definida por $f(x) = 5^x$, $f(a) \cdot f(b)$ é sempre igual a:

(a) $f(a \cdot b)$ (c) $f\left(\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}\right)$ (e) $f(a^5 \cdot b^5)$

(b) $f(a + b)$ (d) $f(5 \cdot a \cdot b)$

25 **UFSC** O valor de x que satisfaz a equação:

$2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{2x+2} = 28$ é?

26 **Puccamp** Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. O valor de $\dfrac{[f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)]}{[f(x+4)+f(x+5)]}$ é:

(a) $\dfrac{39}{16}$ (c) $\dfrac{5}{12}$ (e) $\dfrac{1}{8}$

(b) $\dfrac{21}{16}$ (d) $\dfrac{7}{24}$

27 **Mackenzie** A soma das raízes da equação
$3^{3x} - 13 \cdot 3^{2x} + 39 \cdot 3^x - 27 = 0$ é:
(a) –1 (d) 2
(b) 0 (e) 3
(c) 1

28 **Mackenzie** Analisando os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -x^2 + x$ e $f(x) = 2^x$, considere as afirmações a seguir.
I. $f(x) > g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
II. Não existe $x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)$.
III. f(x) e g(x) são inversíveis.
Então:
(a) somente a (I) é verdadeira.
(b) somente a (II) é verdadeira.
(c) somente (I) e (II) são verdadeiras.
(d) somente (I) e (III) são verdadeiras.
(e) somente (II) e (III) são verdadeiras.

29 **Mackenzie** Analise graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.
I. $f(x) = x + (2|x|)/x$ de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$
II. $g(x) = 3x - x^3$ de $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, em $[-2, 2]$
Obs.: g (–1) é mínimo
III. $h(x) = (1/3)x$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$
IV. $t(x) = 3$, de $\mathbb{R}$ em $\{3\}$

O número de funções sobrejetoras é:
(a) 0 (c) 2 (e) 4
(b) 1 (d) 3

30 Construa o gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-(x)}$.

31 **FGV** Se $f(x) = x^2$, $g(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ e $h(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$, então $f(g(x)) - f(h(x))$ é igual a:
(a) 3^{-x} (c) 3^{2x} (e) 1
(b) 3^{-2x} (d) 0

32 **Unicamp** O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de –18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a –16 °C após 270 minutos.
a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.
b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\dfrac{2}{3}\right)$°C superior à temperatura ambiente.

33 **Unicamp** A função $L(x) = a \cdot e^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.
a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.
b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

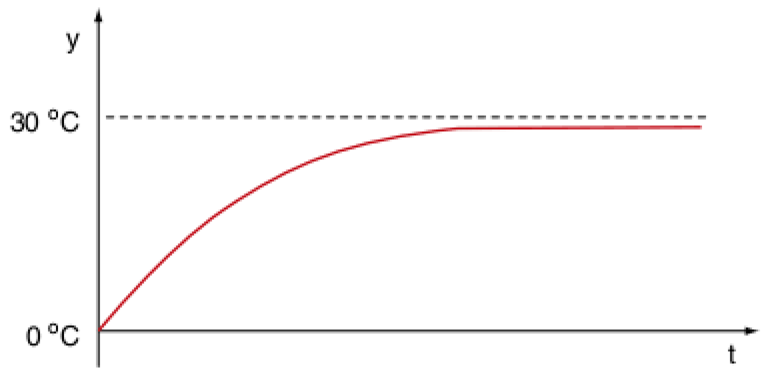
34 Supondo uma taxa de inflação de 20% ao ano, os preços deverão dobrar em, aproximadamente:
(a) 1 ano. (c) 3 anos. (e) 5 anos.
(b) 2 anos. (d) 4 anos.

35 **ITA** A lei de decomposição do radium, no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = C \cdot e^{-kt}$, onde M(t) é a quantidade de radium no tempo t; C e k são constantes positivas ("e" é o número neperiano, e = 2,71828...). Se a metade da quantidade primitiva M(0) desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

36 **UnB** Considere um objeto a uma temperatura inicial y_0, colocado em um meio com temperatura constante T. A taxa de transferência de calor do objeto para o ambiente, ou vice-versa, é proporcional à diferença entre as temperaturas do objeto e do ambiente. Assim, é possível concluir que a temperatura y(t) do objeto, no instante $t \geq 0$, é dada por $y(t) = (y_0 - T)e^{-tb} + T$, em que $b > 0$ é a constante de proporcionalidade.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- [ ] Se a temperatura inicial do objeto é superior à do ambiente, então a função y(t) é decrescente.
- [ ] Se a temperatura inicial do objeto é diferente da do ambiente, então, para algum instante $t_1 > 0$, a constante b é dada por $1/t_1 \ln(y_0 - T/y(t_1) - T)$.
- [ ] Se a temperatura inicial do objeto é diferente da do ambiente, então, para todo $t > 0$, tem-se $|y_0 - T| > |y(t) - T|$.
- [ ] Se um objeto com uma temperatura inicial de 0 °C for colocado em um ambiente à temperatura de 30 °C, então o gráfico a seguir representa a função y(t).



37 **UFV** Seja a função real $f(x) = a^x$, $a > 1$, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x^2 - 3) > f(6)$ é:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 3\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 3\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 3\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -3 \text{ ou } x \ge 3\}$

38 **UEL** A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos e t os dias após o instante 0. O valor de P é superior a 63000 se, e somente se, t satisfizer à condição:
$P = 64.000 \cdot (1 - 2^{-0,1t})$.

(a) $2 < t < 16$
(b) $t > 16$
(c) $t < 30$
(d) $t > 60$
(e) $32 < t < 64$

39 **ITA** Uma vez que para todo $x \ge 1$ e $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ se tem:

(a) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$
(b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
(c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$
(d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
(e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

40 Em um período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $q(t) = q_0 \cdot 2^{-0,1t}$, sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água após t meses. Em quantos meses a quantidade de água no reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

(a) 5
(b) 7
(c) 8
(d) 9
(e) 10

41 Considere a função dada por
$f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1$.

a) Quando $m = -4$, determine os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
b) Determine todos os valores reais de m para os quais a equação $f(x) = m + 1$ não tem solução real.

42 O número de soluções distintas da equação
$2^x - 2^{-x} = K$, $K \in \mathbb{R}$ é:

(a) 2, $\forall K \in \mathbb{R}$.
(b) 2, somente se $K > 0$.
(c) 1, $\forall K \in \mathbb{R}$.
(d) 1, somente se $K \ne 0$.
(e) 1, somente se $K < 0$.

43 Represente no sistema cartesiano o gráfico da função real definida por:

$$f(x) = \frac{2^{2x} - 4.\,2^x + 3}{2^x - 1}$$

Problemas envolvendo equações e inequações exponenciais

44 **ITA** Resolva a equação $3e^{x^2} - 2e^{-x^2} = -1$.

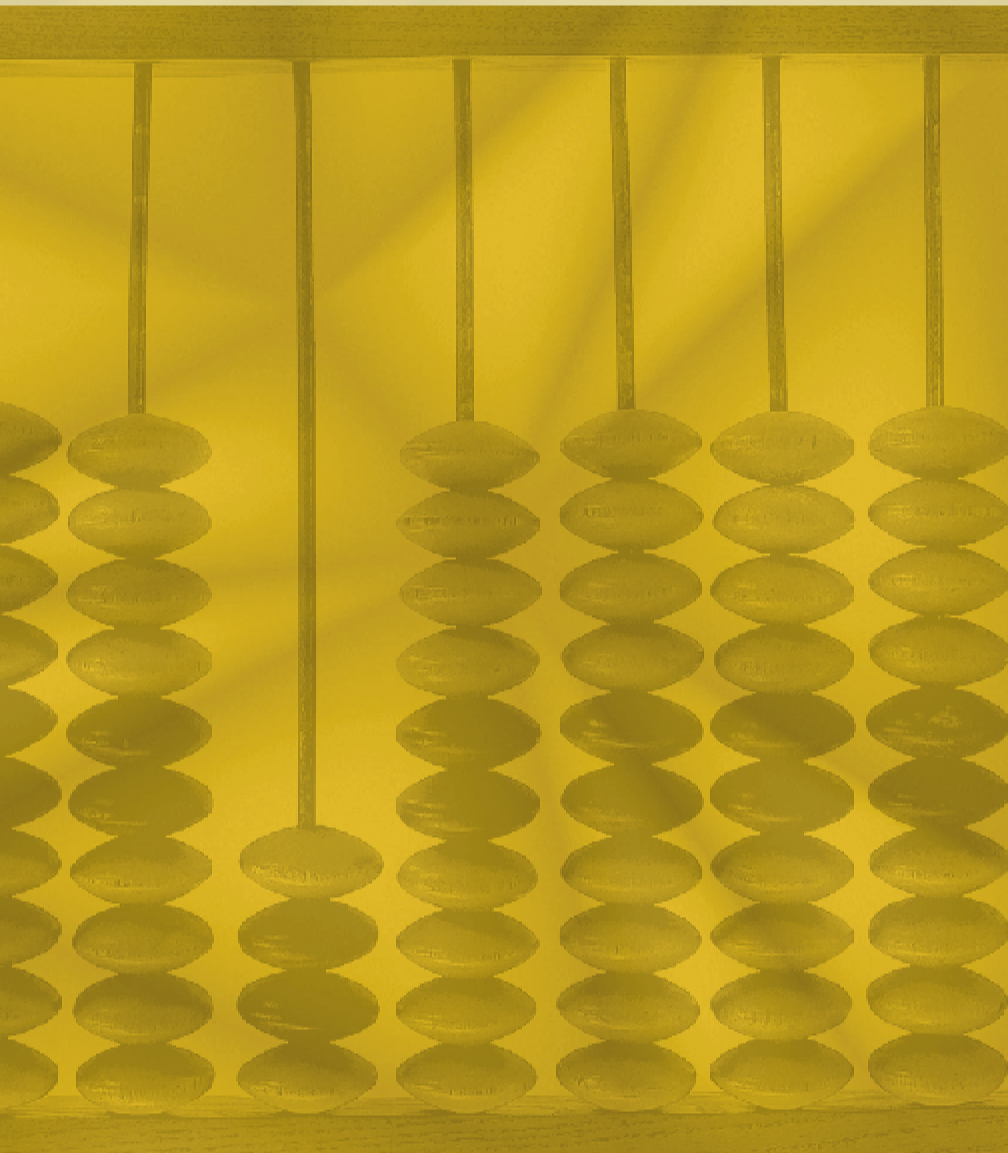
45 **ITA** Sendo $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$, resolva a inequação $a^{2x(1-x)} > a^{x-1}$.

46 **ITA** Considere a equação $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m, x \in \mathbb{R}$ e $0 < a \ne 1$.

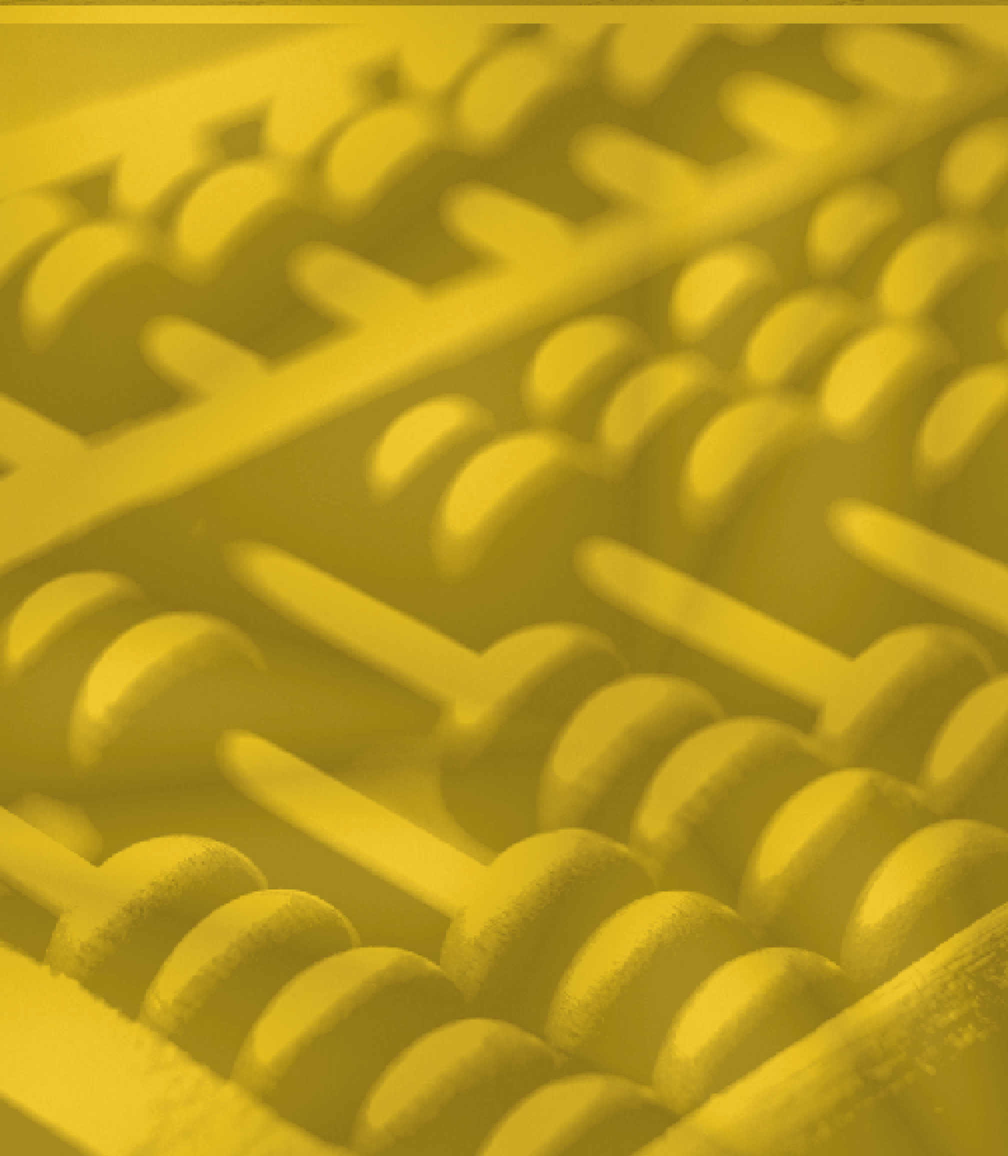
Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução real.

47 Prove que se a e $b \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^a b^b \ge (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

48 Resolva em $\mathbb{R}_+^*$ $x^{2x} - (x^2 + x) \,.\, x^x + x^3 = 0$.



Frente 2



1 Conjuntos numéricos

FRENTE 2

Os números são a base da matemática moderna. Mas o que é número? O que significa afirmar que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ e que $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$?

Os números foram criados pela mente humana para contar objetos em uma coleção diversa. O número cinco é uma abstração de todos os conjuntos que possuem cinco elementos. Diversas civilizações criaram símbolos para representar a quantidade cinco. Observe:

|||||: egípcia	____: maia
◥◥◥◥◥: babilônica	5: indo-arábica
ε: grega	V: romana
五: japonesa	

Com a criação dos números, as operações entre eles foram tornando-se mais complexas. O ábaco (do grego *abax*: "tabuleiro de areia") pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem. Esse instrumento desenvolveu-se de forma independente em várias civilizações. Até nos dias de hoje, ele é utilizado para a aprendizagem numérica das crianças.

GREGOR REISCH/WIKIMEDIA COMMONS

O abacista *versus* o algorista.

Conjuntos numéricos

Números naturais

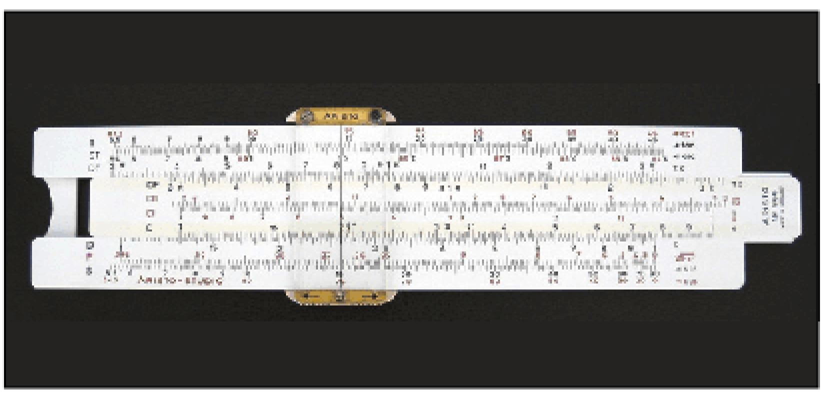
Deus criou os números naturais, todo o resto é obra da mão do homem.

É com essa célebre frase do grande matemático Leopold Kronecker (1823-1891) que iniciamos o nosso estudo dos números.

Os números são uma criação do homem para contar objetos em um agrupamento diverso, não tendo nenhuma relação com as características individuais dos objetos contados.

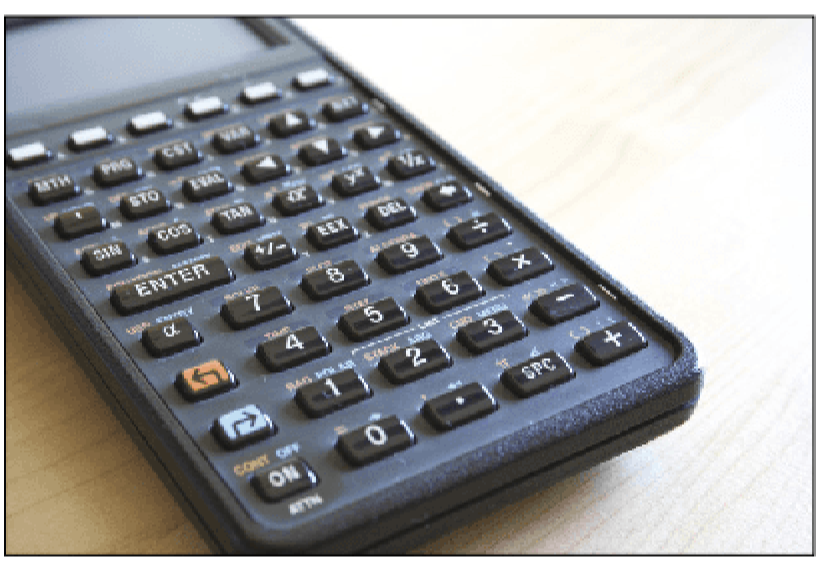
Os números naturais nos dão a ideia da quantidade de objetos que um conjunto possui.

As operações básicas entre os números naturais são a adição e a multiplicação. Quando "operamos" com os números naturais, nós estamos fazendo uma combinação entre eles, de tal maneira que o resultado é um outro número natural.



ROGER MCLASSUS/WIKIMEDIA COMMONS

Fig. 1 Régua de cálculo é um computador mecânico analógico e permite a realização de cálculos mediante guias graduadas deslizantes.



FRAN GAMBÍN/STOCK.XCHNG

Fig. 2 Calculadora eletrônica digital moderna. Permite a realização de cálculos complexos, programações e construção de gráficos.

A aritmética é a parte da Matemática que se fundamenta no estudo dos números. Para começar esse estudo, observe as propriedades básicas das operações adição e multiplicação. Observe a tabela 1.

Propriedade	Adição	Multiplicação
Comutativa	$a + b = b + a$	$a \,.\, b = b \,.\, a$
Associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$
Distributiva	$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$	

Tab. 1 Propriedades fundamentais.

A propriedade comutativa indica que podemos alterar a ordem dos elementos submetidos às operações. A propriedade associativa mostra-nos que adicionar ou multiplicar três números é indiferente de operarmos o 1º com o resultado do 2º e do 3º ou o resultado do 1º e 2º com o 3º. Na terceira propriedade, percebemos a mistura das duas operações básicas.

Ordem

Existe uma relação de ordem nos números naturais, observe:

Por que 7 é maior que 3?

Porque existe o número natural 4, tal que $3 + 4 = 7$. Simbolicamente, temos: $7 > 3$.

$a > b$ (a maior que b)

$a < b$ (a menor que b)

$a \geq b$ ($a > b$ ou $a = b$)

Podemos agora dizer que se $a > b$ é porque existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $a = b + c$.

Existe no conjunto dos naturais o que chamamos de **tricotomia**. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $a < b$ e $a = b$, a validade de uma exclui as outras duas.

Analise outra propriedade importante chamada de **transitiva**:

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

Demonstração:

Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + m$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = c + n$, assim, $a = (c + n) + m = c + (n + m)$, ou seja, $a > c$.

O número zero

É o número representado por 0, tal que:

$$a + 0 = a \text{ e } a \cdot 0 = 0$$

O número zero é o elemento neutro da adição.

Números inteiros

Vimos que as operações básicas dos números naturais são a adição e a multiplicação.

A operação inversa da adição é a subtração. Observe:

Sabemos que $7 + 4 = 11$ e podemos "criar" uma operação entre 11 e 4, tal que o resultado seja 7 (simbolicamente: $11\ (*)\ 4 = 7$). Essa operação (*) é a subtração, representada agora por $11 - 4 = 7$.

Ao "criarmos" essa operação $a - b = c$, ganhamos o problema da possibilidade de $a < b$ (ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $a + k = b$), pois qual número somado com b dará a? Certamente, o número $c \notin \mathbb{N}$. Aparecem assim os números negativos, que pertencem ao conjunto dos inteiros.

$\mathbb{Z} = \{..., -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

***Observação**: A representação dos inteiros por $\mathbb{Z}$ vem da palavra alemã* zahl, *que significa número.*

Números racionais

Podemos dizer que os números racionais são aqueles números que podem ser colocados na forma de uma fração (divisão, razão) de números inteiros.

O surgimento dos números racionais está relacionado com a necessidade do homem de "medir quantidades".

Um fazendeiro pode necessitar de uma quantidade de vasilhas para estocar sua produção de leite em um total maior do que 35 e menor do que 36 vasilhas completas. Podemos dizer que o fazendeiro necessite de 35 vasilhas completas e de uma 36ª vasilha menor do que as outras, ou seja, uma fração ou uma parte da vasilha maior.

Assim: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d};\ n \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{Z}^* \right\}$ em que **n** é o numerador e **d** o denominador. Podemos dividir os números racionais em:

- Próprios: Quando representam "medidas" menores que a unidade, por exemplo: $\frac{2}{3}$ e $\frac{-3}{5}$.
- Impróprios: Quando representam um valor maior ou igual a 1 unidade, exemplos: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{5}$ e $\frac{-4}{3}$.

Os números impróprios podem ser transformados nos chamados **números mistos**, que misturam parte inteira com parte fracionária.

Exemplo 1

$$\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow 1\frac{1}{2}$$

Exemplo 2

$$\frac{23}{6} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 5 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 + \frac{5}{6} \Rightarrow 3\frac{5}{6}$$

Frações equivalentes

São frações que representam a mesma "medida", apesar de possuírem numeradores e denominadores diferentes. Observe a figura a seguir.

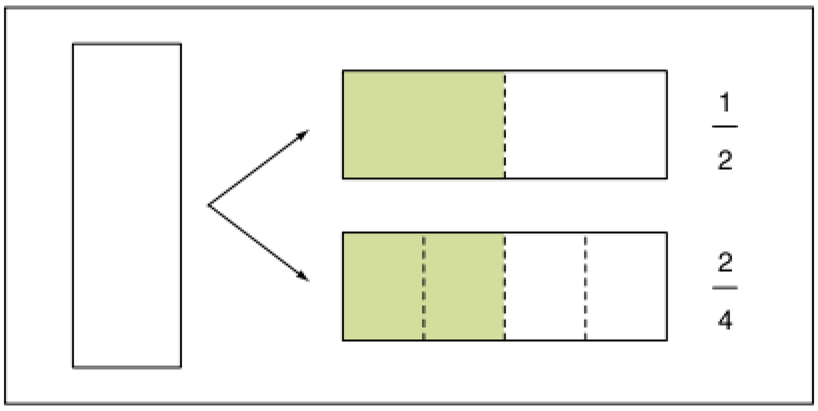


Fig. 3 Frações equivalentes.

A divisão do objeto em 2 partes iguais ou em 4 partes iguais faz com que as frações desse objeto de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ sejam iguais.

Simplificando $\frac{2}{4}$, obteremos $\frac{1}{2}$. Caso não seja possível simplificá-la mais, teremos a sua forma mais simples, chamada **fração irredutível**.

Observe os exemplos a seguir.

Exercícios resolvidos

1 Pedro gastou $\frac{1}{3}$ da quantia que possuía e, depois, $\frac{2}{9}$ dessa quantia. Ficou ainda com R$ 40,00. Quanto Pedro possuía?

Resolução:

x representa a quantia inicial de Pedro, assim:

gastos de Pedro: $\frac{x}{3}$ *e* $\frac{2}{9}x$

Resto: R$ 40,00

A soma dos gastos com o resto perfaz a quantia total. Assim:

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{9}x + 40 = x \ \therefore\ \frac{3x + 2x + 360}{9} = \frac{9x}{9} \ \therefore$$

$$\therefore 5x + 360 = 9x \ \therefore\ 4x = 360 \Rightarrow x = 90.$$

Pedro possuía R$ 90,00.

2 Determinar a fração equivalente a $\frac{7}{15}$ cuja soma dos termos é 198.

Resolução:

Se $\frac{x}{y}$ *é a fração equivalente a* $\frac{7}{15}$*, então* $\frac{x}{y} = \frac{7}{15}$.

$$\textit{Assim: } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{7}{15} \\ x + y = 198 \end{cases}$$

$$x = 198 - y \Rightarrow \frac{198 - y}{y} = \frac{7}{15} \ \therefore\ y = 135 \text{ e } x = 63$$

Números decimais

São números racionais cujos denominadores são potências de 10. Assim, $\frac{x}{10^n}$, $x \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3

$$\frac{2}{100} = 0,02$$

Exemplo 4

$$\frac{2}{4} = \frac{50}{100} = 0,5$$

Exemplo 5

$$\frac{1.235}{100} = 12,35$$

Dízimas periódicas

São números que possuem a aparência dos números decimais, mas são formados por um número infinito de casas decimais que possui um conjunto de dígitos que se repetem em uma certa ordem. Observe:

Exemplo 6

$0,5555... = 0,\overline{5}$

Exemplo 7

$0,3222... = 0,3\overline{2}$

Exemplo 8

$1,1444... = 1,1\overline{4}$

A questão é saber se as dízimas periódicas são números racionais. Observe:

Exemplo 9

$$\begin{array}{r} 0,555... = x \\ -\ 5,555... = 10x \\ \hline 5 = 9x \end{array} \quad \cdot 10$$

$$x = \frac{5}{9}$$

A fração $\frac{5}{9}$ é chamada geratriz do número 0,555... que é uma dízima periódica simples (o dígito periódico é o 5).

Exemplo 10

$$\begin{array}{r} 0,3222... = x \\ -\ 3,2222... = 10x \\ \hline 2,9 = 9x \end{array} \quad \cdot 10$$

$$\frac{29}{10} = 9x$$

$$x = \frac{29}{90}$$

A fração $\frac{29}{90}$ é a chamada geratriz do número 0,3222... que é uma dízima periódica composta (o dígito periódico é o 2 e o não periódico o 3).

ATENÇÃO!

Existe uma regra prática para a determinação da geratriz de uma dízima periódica simples: Divide-se o período que possui n algarismos por um número que possui n dígitos 9.

Exemplo 11

$$0,444... = 0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$

Exemplo 12

$$0,123123... = 0,\overline{123} = \frac{123}{999}$$

Exemplo 13

$$1,222... = 1,\overline{2} = 1 + 0,\overline{2} = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

ATENÇÃO!

Existe uma regra prática para a determinação da fração geratriz de uma dízima periódica composta:
Tomamos o não período seguido do período menos o não período. Divide-se o número formado por uma quantidade de 9 igual ao número de dígitos do período seguidos de um número de 0 igual ao número de dígitos do não período.

Caso você prefira fazer os cálculos de acordo com os exemplos, será desnecessária a aplicação desses algoritmos.
Observe:

Exemplo 14

$$0,122... = 0,1\overline{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}$$

Exemplo 15

$$0,34545... = 0,3\overline{45} = \frac{345-3}{990} = \frac{342}{990} = \frac{19}{55}$$

Exemplo 16

$$2,1333... = 2,1\overline{3} = 2 + 0,1\overline{3} = 2 + \frac{13-1}{90} =$$

$$2 + \frac{12}{90} = 2 + \frac{2}{15} = \frac{32}{15}$$

Números irracionais

Considere 2 segmentos de medidas a e b. Pode ocorrer que o segmento de medida b esteja contido k vezes no segmento de medida a. Assim: $a = k \cdot b$; $k \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que a e b são chamados de **segmentos comensuráveis**.

Caso a igualdade apresentada não se verifique para nenhum $k \in \mathbb{Z}$, dizemos então que a e b são incomensuráveis.

Observe a seguir.

Exemplo 17

$a = 6$ e $b = 2$, $a = 3 \cdot b$; assim, b serve como unidade para a medida de a, e eles são comensuráveis.

Exemplo 18

$a = 6$ e $b = \sqrt{2}$, não existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $6 = k\sqrt{2}$; portanto, são incomensuráveis.

Podemos representar os números racionais em uma reta, construindo todos em função do segmento unitário, de 0 até 1.

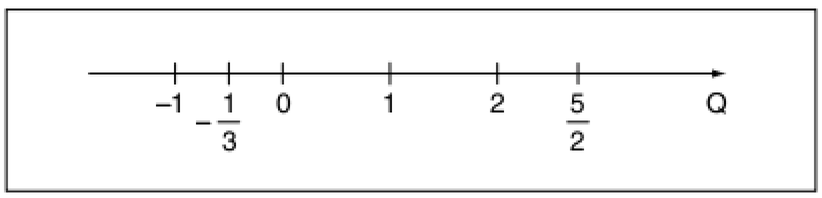


Fig. 4 Números racionais.

Os números irracionais são aqueles "segmentos" cujas medidas não podem ser representadas como múltiplos de um segmento de medida racional.

São exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π...

Podemos representar os números irracionais em uma reta. Observe a figura 5.

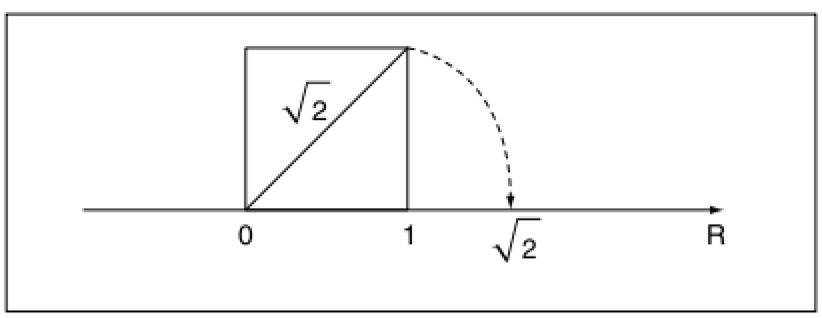


Fig. 5 Construção de $\sqrt{2}$.

Para a construção do número $\sqrt{2}$, utilizamos a diagonal de um quadrado de lado 1.

Podemos definir também os números irracionais com base na negação da definição dos números racionais. Observe:

Número irracional:

$$\left\{x \text{ é irracional} \mid \nexists\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*, \text{ tal que } x = \frac{a}{b}\right\}$$

Número irracional é um número que não pode ser colocado na forma de fração de inteiros.

Utilizando essa definição, podemos demonstrar o fato de, por exemplo, $\sqrt{2}$ ser irracional.

Suponha $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, tal que a fração seja irredutível:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \therefore 2 = \frac{a^2}{b^2} \therefore a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ é par $\Rightarrow$ a é par, ou seja, $a = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo o valor de a, temos:

$(2k)^2 = 2b^2 \therefore b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2$ é par $\Rightarrow$ b é par.

Concluímos que a e b são múltiplos de 2. Absurdo! Pois a e b formam uma fração irredutível, conforme hipótese.

Assim, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Números reais

Os números reais são o resultado da união dos números racionais e dos irracionais. Neste capítulo, vamos estudar a potenciação e a radiciação, que são operações importantes entre os números reais.

Potenciação

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{\text{n vezes}} = a.a^{n-1}$$

Exemplo 19

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Exemplo 20

$\left(\sqrt{3}\right)^5 = \sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Exemplo 21

$6^1 = 6$

Expoentes reais

Decorrente da definição, com $n \in \mathbb{Q}$, temos que para $a \neq 0$ e $n = 1$: $a^1 = a \cdot a^{1-1} \therefore a = a \cdot a^0 \therefore a^0 = 1$.

Podemos ampliar a definição de potenciação e obter as seguintes propriedades.

P1 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

P3 $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P4 $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

P5 $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Radiciação

Para $a \in \mathbb{R}_+$; $b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$ e $a^n = b$, temos $\sqrt[n]{b} = a$, n: índice, b: radicando e a: raiz.

Exemplo 22

$\sqrt[3]{8} = 2$

Exemplo 23

$\sqrt{9} = 3$

Observe as propriedades:

P1 $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

P2 $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$

P3 $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

P4 $\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\dfrac{a}{b}};\ b \neq 0$

P5 $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$

Observe os exemplos de simplificações:

Exemplo 24

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a^2 \cdot b}} = \sqrt[4]{a^2 \cdot b}$$

Exemplo 25

$$\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{1}{4}} = (128)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[4]{8}$$

Exemplo 26

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[10]{2^4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt[5]{2^2}}}{\cancel{\sqrt[5]{2^2}}} = \sqrt{2}$$

Exemplo 27

$$\sqrt[3]{16\sqrt{8}} \cdot \sqrt[9]{0,125} = \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt{2^3}} \cdot \sqrt[9]{\left(\frac{1}{8}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt{2^3}} \cdot \sqrt[9]{2^{-3}} = \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt{2^3}} \cdot \sqrt[3]{2^{-1}} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 2^{-1}\sqrt{2^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot \sqrt{2^3}} = 2\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = 2\sqrt[6]{2^3} = 2\sqrt{2}$$

Exercício resolvido

3 Coloque os números $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[6]{3}$ em ordem decrescente.

Resolução:

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$; $\sqrt[3]{9} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{3^8}$; $\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2}$, *assim:*

$$\sqrt[12]{3^8} > \sqrt[12]{3^3} > \sqrt[12]{3^2} \Rightarrow \sqrt[3]{9} > \sqrt[4]{3} > \sqrt[6]{3}$$

Revisando

1 Determine a fração geratriz da dízima periódica simples 1,444...

2 Determine a fração geratriz da dízima periódica composta 3,1222...

3 Simplificar a expressão $1000^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} - (625)^{-0,75}$.

4 Simplifique a expressão $\dfrac{\sqrt[3]{0,25} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

Exercícios propostos

Potenciação e radiciação de reais

1 Simplifique a expressão: $\left[(-3)^3\right]^{-5} + \left[(-2)^{-6}\right]^4$.

2 Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{0,16}$ c) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$

b) $\sqrt[3]{0,125}$ d) $\sqrt[3]{54}$

3 Coloque em ordem crescente:

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[6]{40}$; $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{3}$

Simplificação de radicais

4 Reduza o radical a seguir à expressão mais simples.

$$\sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}} \cdot \sqrt[4]{b}$$

5 Efetue:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5ab}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{25a^2b^2}$$

6 Simplifique a expressão:

$$\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$$

7 Calcule o valor da expressão:

$$\sqrt{\left(\frac{2,133\ldots}{53+\frac{1}{3}}\right)^{-3}}$$

Problemas gerais

8 **Mackenzie** Qual o valor mais próximo de $\sqrt{\frac{0,04}{\sqrt{3}}}$?

(a) 0,0015 (c) 0,15
(b) 0,015 (d) 1,5

9 **Fuvest** Dos números a seguir, o que está mais próximo de $\frac{(5,2)^4 \cdot (10,3)^3}{(9,9)^2}$ é:

(a) 0,625 (c) 62,5 (e) 6.250
(b) 6,25 (d) 625

10 **Santa Casa** Se $A = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$; $B = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $C = \frac{1}{3}$ e $D = \frac{1}{\pi}$, coloque os números em ordem crescente.

11 **UEL** Seja $M = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{1,5} \cdot (0,6)^{-2}$, efetuando-se as operações, tem-se que:

(a) $M < -\frac{5}{3}$

(b) $-1 < M < 0$

(c) $0 < M < \frac{1}{3}$

(d) $\frac{1}{2} < M < \frac{4}{5}$

(e) $M > 2$

12 **FGV** Simplifique a expressão:

$$\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$$

13 **Unicamp** Dados os dois números positivos $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

14 $A = 0,5999\ldots$, $B = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$ e $C = \frac{2}{3}$. Coloque as expressões em ordem crescente.

15 Calcule o valor da expressão:

$$27^{\frac{2}{3}} + 4^{-0,5} + 8^{0,333\ldots}$$

16 Simplifique a expressão

$$\frac{8^{\frac{1}{3}} + 0,033\ldots - 30^{-1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^{1,5}}}$$

17 Calcule o inverso da expressão:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{0,5}{0,001} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{\left(\frac{5}{4}\right)}$$

18 A expressão $\left(\frac{-16}{15}\right)^{-17} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{-17} : \left(\frac{-8}{27}\right)^{\frac{-50}{3}}$, é igual a:

(a) $-\frac{3}{2}$

(b) -1

(c) $-\frac{5}{3}$

(d) $-\frac{4}{9}$

(e) n.d.a.

19 Determine o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0 - \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + 2^2 + \sqrt[7]{-128} - (0,36)^{\frac{1}{2}}$$

20 Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{6,888\ldots}{2,444\ldots}$, o valor de $p + q$ é igual a:

(a) 38 (d) 41
(b) 39 (e) 42
(c) 40

TEXTO COMPLEMENTAR

Conceito de número

A matemática sofisticada atual tem influência nos conceitos de número, grandeza e forma. Não podemos mais aceitar a definição de que a matemática é a ciência dos números.

A capacidade de distinguir número, tamanho, ordem, cor e forma de alguns animais superiores já foi evidenciada por Darwin (1871) e totalmente comprovada atualmente.

A matemática com certeza surgiu como parte da vida diária do homem. A persistência da raça humana tem relação com o desenvolvimento do homem em relação aos conceitos matemáticos.

Os conceitos de número, grandeza e forma surgiram da comparação de contrastes entre muito e pouco, pequeno e grande.

Quando o homem começou a relacionar grupos, como os pares que podem ser colocados um a um (duas mãos, duas orelhas, duas pernas), as propriedades abstratas que esses grupos tinham em comum passaram a ser o que nós chamamos de número.

Com o passar dos séculos, a ideia de número foi se aproximando, e com a invenção da escrita (4000 a.C.) sentimos a necessidade de criar sinais.

Os dedos das mãos eram indicados para identificar conjuntos. Quando os dedos eram inadequados, podiam usar montes de pedras para representar uma correspondência com os elementos de outro conjunto. Frequentemente, quando o homem utilizava tal método, ele amontoava as pedras em grupos de cinco, pois essa quantidade lhe era familiar por causa das mãos e dos pés.

Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso difundido do sistema decimal é apenas o resultado do "acidente anatômico" de que todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e dez nos pés.

RESUMINDO

Conjuntos numéricos

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ naturais

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$ naturais não nulos

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ inteiros

$\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$ inteiros positivos

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots -3; -2; -1; 0\}$ inteiros não positivos

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots -3; -2; -1\}$ inteiros negativos

$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \exists\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \text{ tal que } x = \frac{a}{b}\right\}$ racionais

$\mathbb{I} = \left\{x \in \mathbb{I} \mid \nexists\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \text{ tal que } x = \frac{a}{b}\right\}$ irracionais

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ reais

QUER SABER MAIS?

SITE

- Georg Cantor e os transfinitos
  <www.seara.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos1.htm>.

Exercícios complementares

Problemas envolvendo potenciação e radiciação de reais

1 Sendo $m \in \mathbb{N}$, calcule:

a) $(-1)^{2m}$

b) $(-1)^{2m+1}$

c) $a^{2m+1} + (-a)^{2m+1}$

2 Efetue as expressões simplificando os resultados.

a) $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$

b) $3a\sqrt{a} - 8\sqrt{a^3} + \dfrac{2}{a}\sqrt{64a^5}$

c) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - 6\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

d) $\sqrt{80} + \sqrt{125} + \sqrt{45} + \sqrt{20} - 14\sqrt{5}$

3 Complete os asteriscos tornando as expressões verdadeiras:

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{*} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt{a}}} = (a)^{*}$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{*}$

d) $\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{8} = *\sqrt{2}$

4 Qual o simétrico do número pelo qual se deve multiplicar o inverso do simétrico de $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{2}$ para se obter $(-1)^3$?

5 Determine a raiz quadrada de 0,444...

6 Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente ao número decimal ilimitado periódico 2,486486486..., então o valor de p é igual a:

(a) 90
(b) 91
(c) 92
(d) 93
(e) 94

7 Definindo $a \otimes b$ como a^b, o valor de $\dfrac{2\otimes(2\otimes(2\otimes 2))}{((2\otimes 2)\otimes 2)\otimes 2}$ é igual a:

(a) $\frac{1}{256}$
(b) $\frac{1}{4}$
(c) 1
(d) 4
(e) 256

8 Entre os números $2^{\sqrt{2}}$; $(\sqrt{2})^2$; $\sqrt{4^{\sqrt{2}}}$; $(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$ e $\sqrt{8}$ a quantidade de números distintos é:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

9 Calcule o valor de $3\,.\,8^{\frac{2}{3}}\,.\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Problemas envolvendo simplificações de radicais

10 O valor de $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[6]{81})\,.\,\sqrt[4]{27}$ é igual a:

(a) $\sqrt[4]{3}$
(b) $2\sqrt[4]{3}$
(c) $3\sqrt[4]{3}$
(d) $4\sqrt[4]{3}$
(e) $5\sqrt[4]{3}$

11 O valor de $\dfrac{\sqrt[4]{5^3}\,.\,\sqrt[5]{5^4}}{\sqrt[20]{5^{11}}}$ é:

(a) 5
(b) $\sqrt[4]{5}$
(c) $\sqrt[5]{5}$
(d) $\sqrt[20]{5}$
(e) 1

12 Assinale o maior entre os números abaixo.

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}\cdot 6}$
(b) $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$
(c) $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$
(d) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$
(e) $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$

13 O valor de $\sqrt[3]{16\sqrt{8}}\cdot\sqrt[6]{0{,}125}$ é :

(a) $2\sqrt{8}$
(b) $4\sqrt[3]{4}$
(c) $4\sqrt{2}$
(d) $2\sqrt[3]{2}$
(e) $4\sqrt[6]{2}$

14 A expressão $\dfrac{(0{,}5)^{-2}\cdot 2^{0{,}333\ldots}\cdot\sqrt[3]{16}}{(0{,}125)^{-3}}$, quando escrita como potência de base 2, tem o expoente igual a:

(a) $-\frac{14}{3}$
(b) $-\frac{16}{3}$
(c) -6
(d) $-\frac{22}{3}$
(e) -8

Problemas gerais

15 Seja $k \in \mathbb{N}$, calcule o valor da expressão:
$2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}$.

16 Na expressão, a e b são números inteiros e positivos. Determine o valor de a + b.

$$\frac{(0{,}125)^{b-a}}{8^{a-b}} + 21.\left(\frac{b}{a}\right)^{0} + a^{b} = 191$$

17 Resolva os itens a seguir.

a) Prove que o radical duplo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ se transforma em uma soma de radicais simples, se e somente se, $a^2 - b$ for um quadrado perfeito.

b) Considerando a condição do item a) satisfeita, prove que:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{a^2-b}$$

18 Simplifique a expressão com radicais duplos abaixo:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

19 Se $N > 1$, o valor da expressão $\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}}$ é igual a:

(a) $N^{\frac{1}{27}}$
(b) $N^{\frac{1}{9}}$
(c) $N^{\frac{1}{3}}$
(d) $N^{\frac{13}{27}}$
(e) N

20 Se $x^3 = 2.005^7$; $y^5 = 2.005^8$ e $z^9 = 2.005^{10}$, o valor de $(xyz)^{45}$ é igual a:

(a) 2.005^{45}
(b) $2.005^{2.005}$
(c) 2.005^{125}
(d) 2.005^{227}
(e) 2.005^{250}

Conceitos preliminares da teoria dos números

2

FRENTE 2

Os números primos são de extrema importância para a sociedade. Euclides, matemático que lecionava na biblioteca de Alexandria, demonstrou que existem infinitos números primos na sua obra *Os elementos*. Eles são muito utilizados em informática, sendo uma das bases da criptografia da internet. Não existe uma fórmula para se determinar um número primo, porém, caso essa fórmula seja descoberta, a segurança de praticamente todos os domínios da internet seria quebrada.

Euclides de Alexandria.

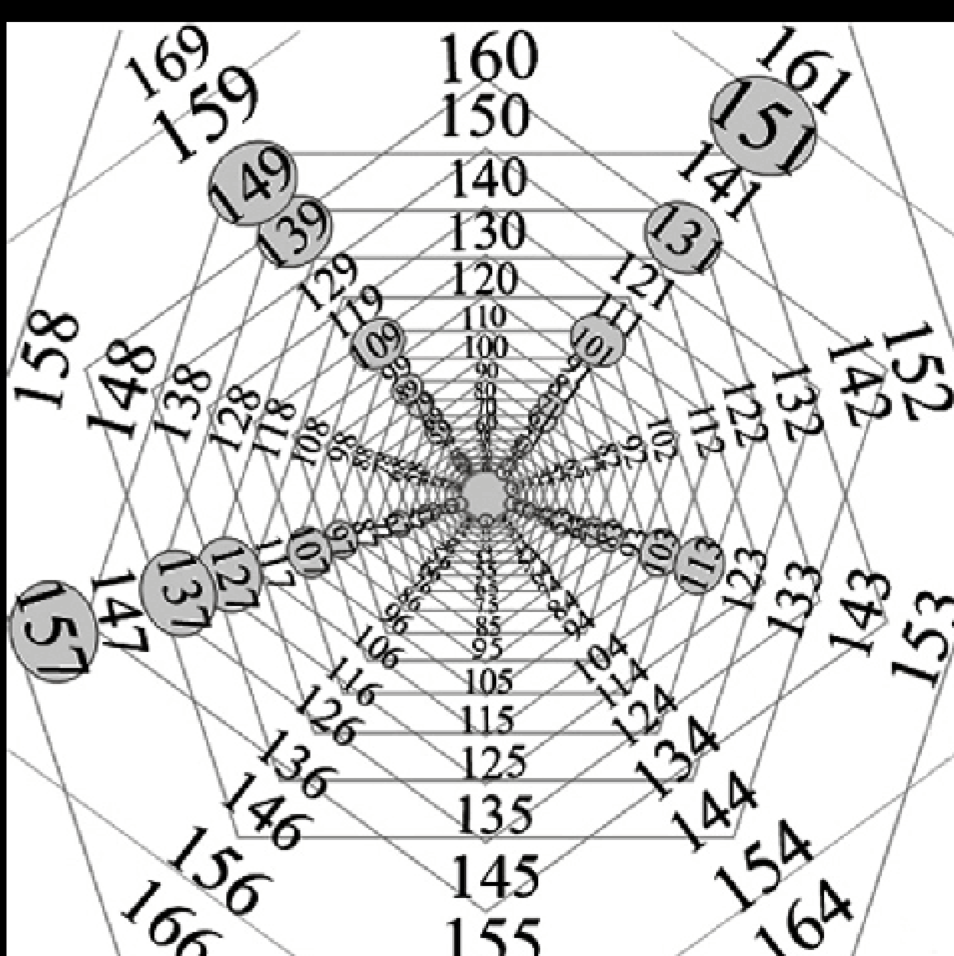


Tabela de números primos.

Divisão de números naturais

Dividir D por d significa encontrar q e R, tal que:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & q \end{array} \Rightarrow \begin{cases} D = d \, . \, q + R \\ 0 \leq R < d \end{cases}$$

Nomenclatura:
D: dividendo; d: divisor; q: quociente e R: resto.

Exemplos

1 $\begin{array}{l|l} 1.342 & 13 \\ \hline 3 & 103 \end{array}$, pois $1.342 = (13).(103) + 3$

2 $\begin{array}{l|l} 456 & 3 \\ \hline 0 & 152 \end{array}$, pois $456 = 3.152 + 0$

Se no algoritmo da divisão tivermos R = 0, dizemos que D é divisível por d ou D é múltiplo de d ou d é divisor de D. Podemos escrever simbolicamente que $\frac{d}{D}$.

Exemplos

3 $\frac{2}{6}$, porque $6 = 2 \, . \, 3$

4 $-\frac{4}{20}$, porque $20 = (-4) \, . \, (-5)$

5 5 . 16, porque não existe $x \in \mathbb{Z}$, tal que $5x = 16$

Propriedades importantes:

P1 Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, então $\frac{ac}{bd}$

P2 Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{c}$, então $\frac{a}{c}$

P3 Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{c}$, então $\frac{a}{(bx + cy)}$; $\forall x; y \in \mathbb{Z}$

Demonstrações:

P1 $\frac{a}{b}$ temos $b = ak_1$ e $d = ck_2$, $bd = ak_1ck_2 = (ac).(k_1k_2) = (ac).k_3$, assim $\frac{ac}{bd}$

P2 Temos a propriedade transitiva, assim: $b = ak_1$ e $c = bk_2$ $\Rightarrow c = (ak_1).k_2 = a.(k_1k_2) \therefore c = ak_3 \therefore \frac{a}{c}$

P3 $b = ak_1$ e $c = ak_2 \Rightarrow bx + cy = ak_1x + ak_2y = a.(k_1x + k_2y)$ $\Rightarrow \frac{a}{bx} + cy$

Exercícios resolvidos

1 Qual o menor número que se deve somar a 4.312 para que resulte um número divisível por 3?

Resolução:

$\begin{array}{l|l} 4.312 & 3 \\ \hline 1 & 1.437 \end{array}$ *temos que 4.312 é um múltiplo de 3 mais 1. Para ser divisível, o resto deve ser 0. Basta somar 2, totalizando resto 3 (o mesmo que 0).*

2 Determine o menor número que se deve somar a 8.746 para se obter um múltiplo de 11 aumentado de 4 unidades.

Resolução:

$\begin{array}{l|l} 8.746 & 11 \\ \hline 1 & 795 \end{array}$ *temos que 8.746 é um múltiplo de 11 mais 1. Para ter resto 4, basta adicionarmos 3.*

Conceito de divisão por meio da geometria

Observe a figura a seguir.

1 2 5 6 9 10 13 14 ....
3 4 7 8 11 12 15 16 ... ...

quadrados com 4 elementos

Fig. 1 Conceito geométrico.

Dividindo 13 por 4, temos: $\begin{array}{l|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \Rightarrow 13 = 3.4 + 1.$

O termo 3 . 4 indica que "dentro" do número 13 temos 3 quadrados completos e o 1 indica a posição do número 13, o 1° elemento do 4° quadrado.

Qual a posição do número 123?

$\begin{array}{l|l} 123 & 4 \\ \hline 3 & 30 \end{array} \Rightarrow$ está no 31° quadrado na 3ª posição.

Resto de uma divisão

Quando dividimos um número **x** por um número natural **n**, sabemos que os restos possíveis são menores ou iguais a n – 1, assim:

ATENÇÃO!

$X \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{l|l} x & n \\ \hline R & q \end{array}$ e $0 \leq R \leq n - 1$, os restos possíveis são 0; 1; 2; .... n – 2 e n – 1.

Exemplos

6 Todo número $X \in \mathbb{Z}$ quando é dividido por 3 tem como resto 0, 1 ou 2, ou seja:
$X = 3K$; $3K + 1$ ou $3K + 2$; $K \in \mathbb{Z}$

7 Todo número $X \in \mathbb{Z}$ quando é dividido por 4 tem como resto 0, 1, 2 ou 3, ou seja:
$X = 4K$; $4K + 1$; $4K + 2$ ou $4K + 3$; $K \in \mathbb{Z}$

Paridade de um número inteiro

Na divisão de um inteiro qualquer por 2, os possíveis restos são 0 e 1. Se o resto é 0, o número é par. Se o resto é 1, o número é ímpar.

Conclusão:

X é par, então $X = 2K;\ K \in \mathbb{Z}$

X é ímpar, então $X = 2K + 1;\ K \in \mathbb{Z}$

Representação dos números naturais

Podemos representar um número natural qualquer por $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, em que:

a_0 é o algarismo das unidades;

a_1 é o algarismo das dezenas;

a_2 é o algarismo das centenas;

a_3 é o algarismo das unidades de milhar;

....

Assim,

$1.348 = 1 \cdot (1.000) + 3 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 8 \cdot (1)$

Generalizando, temos:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$

Exercício resolvido

3 Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das unidades excede de 2 o das dezenas. Se invertermos os algarismos e somarmos o número resultante ao 1º número, obtemos 110. Determine o número inicial.

Resolução:

$\overline{xy}$ é o número inicial tal que $y = x + 2$

$\overline{xy} = 10x + y$ *e* $\overline{yx} = 10y + x$, *assim:* $\overline{xy} + \overline{yx} =$

$10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 110 \therefore x + y = 10$

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 10 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \text{ e } x = 4, \text{ o número é } 46.$$

Critérios de divisibilidade

Pelas representações decimais podemos demonstrar métodos simplificadores que nos fazem concluir a divisibilidade de um número por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 ou 11.

Observe as demonstrações:

Primeiro Caso:

Divisibilidade por 2:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= 2 \cdot \left[a_n \cdot 5 \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 5 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 5 \cdot 10 + 5a_1\right] + a_0,$

ou seja, a divisibilidade está na dependência de a_0. Condição: $a_0 = 0$ ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.

Segundo Caso:

Divisibilidade por 3:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) + 9a_1 + 99a_2 + \dots + \underbrace{9\dots9}_{n} \cdot a_n,$

ou seja, devemos ter $\sum_{i=0}^{n} a_i$ como múltiplo de 3.

Terceiro Caso:

Divisibilidade por 4:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= a_0 + a_1 \cdot 10 + 4 \cdot 25a_2 + 4 \cdot 250a_3 + 4 \cdot 2.500a_4 + \dots\ 4 \cdot \underbrace{250\dots0}_{n} \cdot a_n =$

$= a_0 + 10a_1 + 4(25a_2 + 250a_3 + 4 \cdot 2.500a_4 + \dots + \underbrace{250\dots0}_{n} \cdot a_n),$

ou seja, $a_0 + 10a_1 = \overline{a_1\, a_0}$ tem de ser um múltiplo de 4.

Quarto Caso:

Divisibilidade por 5:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1\right) + a_0,$

ou seja, devemos ter $a_0 = 0$ ou 5.

Quinto Caso:

Divisibilidade por 8:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= 1.000(a_3 + 10a_4 + 10^2 a_5 + \dots + 10^{n-3} \cdot a_n) + \overline{a_2 a_1 a_0}$

$8 \cdot 125(a_3 + 10a_4 + 10^2 a_5 + \dots + 10^{n-3} \cdot a_n) + \overline{a_2 a_1 a_0}$

devemos ter $\overline{a_2\, a_1\, a_0}$ divisível por 8.

Sexto Caso:

Divisibilidade por 9:

Vamos utilizar o mesmo raciocínio do segundo caso, assim evemos ter também $\sum_{i=0}^{n} a_i$ como um múltiplo de 9.

Sétimo Caso:

Divisibilidade por 10:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= 10(a_1 + 10a_2 + 100a_3 + \dots + 10^{n-1} \cdot a_n) + a_0$

ou seja, $a_0 = 0$.

Oitavo Caso:
Divisibilidade por 11:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$
$$= a_0 + 11a_1 - a_1 + 99a_2 + a_2 + 1.001a_3 - a_3 + 9.999a_4 + a_4 + \ldots =$$
$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots),$$

ou seja, devemos ter
$(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots)$ como um múltiplo de 11.

Conclusão:

Considere o número $\underline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$. Os critérios de divisibilidade são:

2 a_0 é par;

3 Σ algarismos é múltiplo de 3;

4 $\overline{a_1 a_0}$ é divisível por 4;

5 $a_0 = 0$ ou 5;

8 $\overline{a_2 a_1 a_0}$ é múltiplo de 8;

9 Σ algarismos é múltiplo de 9;

10 $a_0 = 0$;

11 $\left(\sum_{\text{ordem ímpar}} \text{algarismos} - \sum_{\text{ordem par}} \text{algarismos} \right)$ é múltiplo de 11.

Observe os exemplos de aplicação dos critérios de divisibilidade.

Exercícios resolvidos

4 Determine x tal que o número 934x1x seja divisível por 2 e por 3.

Resolução:
Para ser divisível por 2, o número tem de ser par, ou seja, x = 0 ou x = 2 ou x = 4 ou x = 6 ou x = 8.

Para x = 0, temos o número 934.010 tal que 9 + 3 + 4 + 0 + 1 + 0 = 17, que não é múltiplo de 3; assim, o número dado não é múltiplo de 3.

Para x = 2, temos o número 934.212 tal que 9 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 = 21, que é múltiplo de 3; assim o número dado é múltiplo de 3.
Portanto, x = 2 ou x = 8.

5 Mostre que a diferença entre os inteiros abc e cba (a > c) é um múltiplo de 11.

Resolução:
abc – cba = 100a + 10b + c – (100c + 10b + a) =
= 99a – 99c = 99(a – c) = 11 · 9 · (a – c). Trata-se de um múltiplo de 11.

6 Qual o número de dois algarismos que dividido por 25 tem resto 2 e que dividido por 9 tem resto 5?

Resolução:
Pelo algoritmo da divisão, temos: xy = 25k + 2 e xy = 9q + 5
Vamos listar os resultados possíveis: 27; 52 e 77

$$\begin{array}{r|l} 27 & 9 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 52 & 9 \\ \hline 7 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 77 & 9 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$$

Portanto, o número procurado é 77.

7 Mostre que todo inteiro com três algarismos iguais é divisível por 37.

Resolução:
$\overline{xxx}$ = 100x + 10x + x = 111x = 3 · 37x que é um número múltiplo de 37, ou seja, divisível por 37.

Números primos

Um número inteiro p é primo, se e somente se, possui apenas quatro divisores, que são: 1, –1, p e –p. Por exemplo, o número 3 é primo, pois apresenta os divisores 3, –3, 1 e –1.

Se o número inteiro não é primo, ele é composto.

Teorema fundamental da aritmética

Todo número inteiro positivo n > 1 é igual a um produto de fatores primos.

Exercícios resolvidos

8 Fatore o número 360.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

9 Determine o menor natural m (m ≠ 0) tal que 600 · m seja um quadrado perfeito.

Resolução:
Vamos fatorar a expressão:

$$\begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}$$

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot m$: quadrado perfeito, todos os expoentes devem ser pares, assim m = 3 · 2 = 6.

10 Demonstre que $n^3 - n$ é um número divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)\,n\,(n + 1)$
Todo número natural n quando dividido por 3 deixa como resto 0, 1 ou 2. Podemos escrever, então, que $n = 3k$ ou $3k + 1$ ou $3k + 2$.

Assim:

Para $n = 3k$
$(3k - 1) \cdot (3k) \cdot (3k + 1)$ = múltiplo de 3

Para $n = 3k + 1$
$(3k) \cdot (3k + 1) \cdot (3k + 2)$ = múltiplo de 3

Para $n = 3k + 2$
$(3k + 1) \cdot (3k + 2) \cdot (3k + 3)$ = múltiplo de 3

Essa análise verifica a divisibilidade da expressão $n^3 - n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

O número de divisores positivos de um número natural n, escrito na forma fatorada $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$... é dado por $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1)$...

O total de divisores (positivos e negativos) é dado por $2 \cdot (\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1)$...

Exercícios resolvidos

11 Determine o número de divisores de 300.

Resolução:
A questão não se refere a divisores positivos ou negativos. Vamos calcular o total de divisores. Pelo teorema apresentado, temos:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}$$

Assim, o número total de divisores é:
$2(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 36$

12 Determine x de modo que o número $2^x \cdot 3^4$ tenha no total 20 divisores.

Resolução:
$2(x + 1) \cdot (4 + 1) = 20 \therefore 10(x + 1) = 20 \therefore x = 1$

13 Qual o menor número positivo que possui 9 divisores?

Resolução:
Como o número de divisores é ímpar, a questão não se refere ao total de divisores. Assim, o número é:

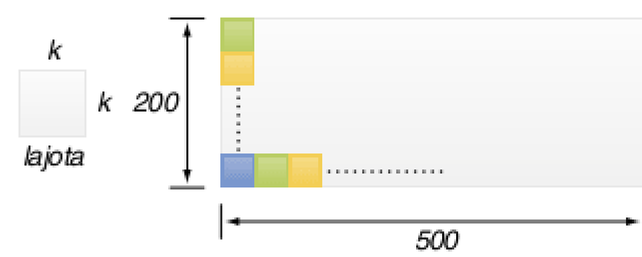
$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$... Análise das possibilidades:

$2^8 \Rightarrow (8 + 1) = 9$ divisores $\to 256$
$2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$ divisores $\to 36$
$2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$ divisores $\to 100$
$3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$ divisores $\to 225$

O menor valor possível é para o número 36.

14 **Fuvest** Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular de lados 2 m e 5 m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala e devem ser utilizadas somente lajotas inteiras.
Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

Resolução:
Seja $k \in \mathbb{N}$ a medida do lado da lajota e α e β o número de lajotas que cabem na altura e no comprimento da sala, respectivamente. Observe o desenho:



$200 = \alpha k$ e $500 = \beta k$, assim: $\alpha = \dfrac{200}{K}$, $\beta = \dfrac{500}{K}$ e k é um divisor comum de 200 e 500. O maior tamanho de lajota possível seria o MDC(200, 500) = 100 cm. Os valores possíveis de k são os divisores comuns de 200 e 500 que são: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

Mínimo múltiplo comum (MMC)

Sejam dois números naturais a e b, A e B são dois conjuntos contendo os múltiplos de a e b, respectivamente.

$$\text{MMC}(a; b) = \text{mínimo}(A \cap B)$$

Exercícios resolvidos

15 Determine MMC (6; 14).

Resolução:
Múltiplos de 6 = {0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; ...}
Múltiplos de 14 = {0; 14; 28; 42; 56; 70, ...}

O menor elemento comum entre os dois conjuntos é 42.
Observe o processo prático:

6;14	2
3; 7	3
1; 7	7
1; 1	$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

16 Dois automóveis partem simultaneamente de um mesmo ponto de uma pista circular e completam uma volta a cada 6 e 8 minutos, respectivamente. Depois de quanto tempo, após a partida, os dois automóveis se reencontrarão?

Resolução:
*O 1º automóvel completa voltas inteiras a cada 6 minutos, ou seja, {6; 12; 18; **24**; 30; ...}, com o 2º automóvel, teremos {8; 16; **24**; 32; 40; ...}.*
Observe que, no 24º minuto, o 1º automóvel completa 4 voltas, enquanto o 2º completa a 3º volta. Assim, o MMC(6, 8) fornece--nos o intervalo de tempo de cada reencontro, que é 24 minutos.

Máximo divisor comum (MDC)

Sejam a e b dois números naturais, A e B são dois conjuntos contendo os divisores de a e b, respectivamente.

$$\text{MDC}(a; b) = \text{máximo}(A \cap B)$$

Exercícios resolvidos

17 Determine MDC (20; 36).

Resolução:
*Divisores de 20 = {1; 2; **4**; 5; 10; 20}*

*Divisores de 36 = {1; 2; 3; **4**; 6; 9; 12; 18; 36}*

O maior elemento comum entre os dois conjuntos é 4.

Observe o processo prático: $20 = 2^2 \cdot 5$ *e* $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Os fatores comuns com os menores expoentes na forma fatorada nos darão o MDC, ou seja $2^2 = 4$.

18 Queremos montar cestas básicas contendo os mesmos números de mantimentos. As cestas básicas devem conter o máximo de elementos. No depósito, temos 120 latas de óleo, 200 kg de arroz, 180 kg de feijão e 500 litros de leite. Determine o número máximo de cestas básicas e a quantidade de mantimentos em cada cesta.

Resolução:
Determinando o MDC dos números 120; 200; 180 e 500, temos:

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$200 = 2^3 \cdot 5^2 \Rightarrow MDC = 2^2 \cdot 5 = 20$
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$500 = 2^2 \cdot 5^3$

Teremos 20 cestas com 6 latas de óleo, 10 kg de arroz, 9 kg de feijão e 25 litros de leite.

Método das divisões sucessivas

É um processo prático utilizado para o cálculo do MDC entre dois números. Esse processo é fundamentado no fato de que em uma divisão euclidiana, ou seja, $D = dq + R$, temos que MDC (D; d) = MDC (q; R). Observe o exemplo:

Calcule o MDC (20; 36)

	1	1	4
36	20	16	4
16	4	0	

Quociente das divisões
MDC
Restos das divisões

Calcule o MDC (144; 54)

	2	1	2
144	54	36	18
36	18	0	

MDC

Exercício resolvido

19 Sejam a e b dois números inteiros positivos tais que MDC (a; b) = 5 e MMC (a; b) = 105,

a) qual é o valor de b se a = 35?
b) encontre todos os valores possíveis para (a; b).

Resolução:
a) *Podemos utilizar o seguinte resultado:*
MMC (a; b) · MDC (a; b) = a · b (admitindo sem demonstração). Assim: $5 \,.\, 105 = 35 \,.\, b \therefore b = 15$
b) *Sabemos que* $ab = 5 \,.\, 105 \therefore ab = 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7$. *Assim: (5; 105), (105; 5), (15; 35) e (35; 15). Como o MDC é 5, devemos ter o fator 5 em todos os números.*

Revisando

1 Determine o menor número natural positivo a ser acrescentado para que o número 10.343 seja múltiplo de 5 com resto 2.

2 Prove que todo número ímpar elevado ao quadrado é também um número ímpar.

3 Determine o número de divisores de 100.

4 Determine a soma dos números de três algarismos divisíveis ao mesmo tempo por 14 e 34.

5 Um terreno possui a forma de um triângulo cujos lados medem 132 m, 156 m e 204 m. Deseja-se plantar árvores no seu perímetro de maneira que haja uma árvore em cada vértice e que as árvores fiquem equiespaçadas. Determine o número mínimo de árvores que podem ser plantadas de modo que a distância entre duas árvores seja um número inteiro.

Exercícios propostos

Divisibilidade dos números naturais

1 Qual o menor número natural que se deve somar a 4.312 para que resulte em número divisível por 3?

2 Dado o número 57a3b, substituir a e b por algarismos que tornem esse número divisível por 5 e 9.

3 O número 583ab é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b, é:
(a) indeterminado.
(b) 20
(c) 18
(d) 11
(e) 2

4 **Unicamp** A divisão de um certo número positivo N por 1.994 deixa resto 148. Calcule o resto da divisão de N + 2.000 pelo mesmo número 1.994.

Número de divisores

5 Quantos divisores positivos possuem os números $A = 4^2 . 12^3$ e $B = 8^2 . 25^2$?

6 **Fuvest** Determine os números que são divisores de 40.

MMC e MDC

7 Qual o maior número que divide exatamente os números 148 e 136?

8 **Fuvest** No alto de uma torre de uma emissora de televisão, duas luzes piscam com frequências diferentes. A primeira pisca 15 vezes por minuto e a segunda pisca 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?
(a) 12
(b) 10
(c) 20
(d) 15
(e) 30

9 Ache dois números conhecendo-se sua soma 168 e seu MDC 24.

10 Uma fábrica produz dados com três tamanhos: pequeno, médio e grande, com 6, 7 e 8 cm de aresta, respectivamente. O fabricante deseja remeter a sua produção em caixas cúbicas do mesmo tamanho, de forma que os dados fiquem bem ajustados na caixa e que ela contenha um mesmo tipo de dado. Determine o menor tamanho possível para cada caixa.

Problemas gerais

11 Qual a 1.993ª letra da sequência ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABC...?

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E

12 **Fuvest** Um caixa eletrônico só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um cliente deseja fazer um saque de R$ 100,00. De quantas maneiras diferentes o caixa eletrônico poderá fazer esse pagamento?

(a) 5
(b) 6
(c) 11
(d) 15
(e) 20

13 Qual é o resto da divisão de 2^{2015} por 5?

14 **UFMG** Um retângulo com 15 metros de comprimento e 9 metros de largura deve ser dividido em quadrados iguais e que apresentem a maior área possível. Qual é o número de quadrados obtidos?

TEXTO COMPLEMENTAR

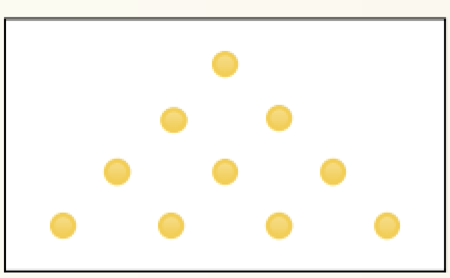
A filosofia de Pitágoras

O famoso matemático grego Pitágoras nasceu aproximadamente no ano 565 a.C. na ilha grega de Samos.

Quando ouvimos o nome de Pitágoras, imediatamente o associamos ao famoso teorema: $a^2 = b^2 + c^2$, em que a é a hipotenusa e b e c são os catetos de um triângulo retângulo. Mas a sua obra vai muito além disso. Pitágoras praticamente criou uma filosofia de vida no qual "tudo é número", e a harmonia do universo, ou do cosmos (Pitágoras inventou esta palavra (*Kosmo*), que em grego significa ordem) era simbolizada pela simplicidade dos números.

Para Pitágoras, existiam 2 tipos de números "perfeitos":

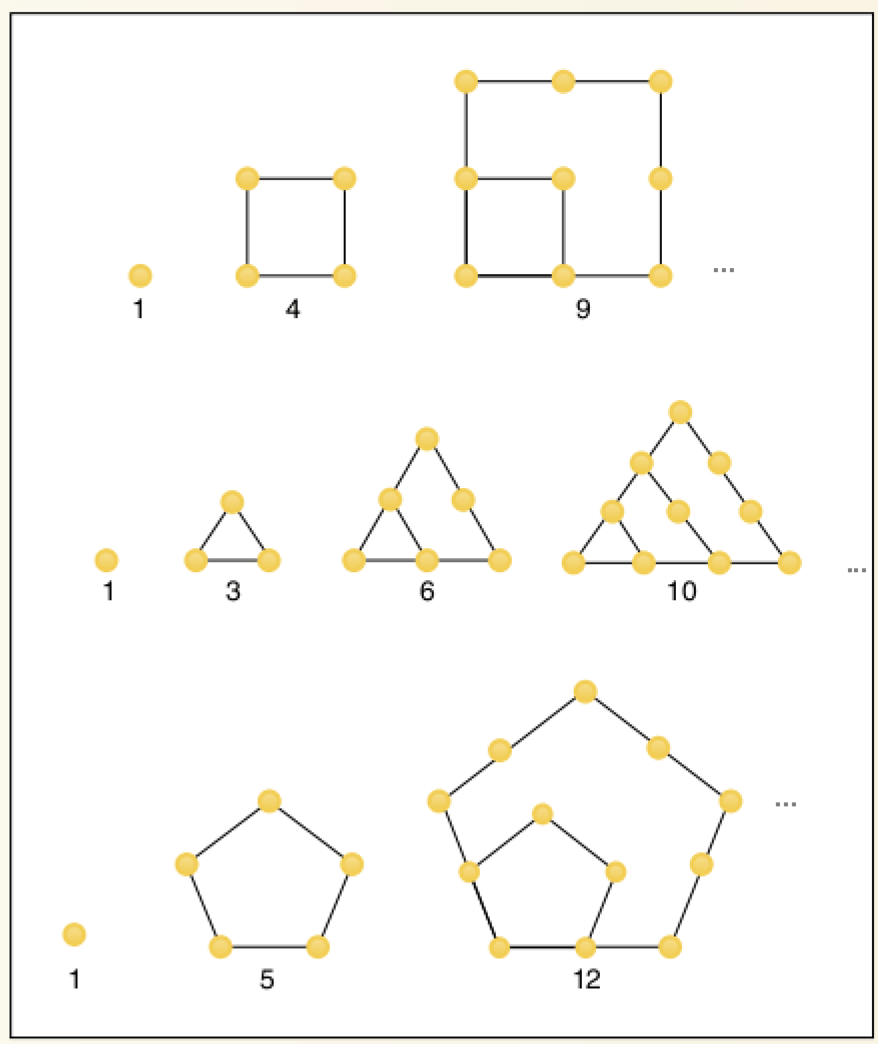
- O número 10 é "perfeito" pois é resultado da soma dos quatro primeiros números naturais: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, e também podia ser representado pela pirâmide:



- Outro número "perfeito" era aquele cujo valor era igual à soma dos seus divisores, mas excluindo-se o próprio número. $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 14$

Os pitagóricos estabeleceram uma conexão entre a geometria e a aritmética pelos números triangulares, quadrangulares, pentagonais etc.

Observe:



RESUMINDO

Dividir um número natural D por d significa encontrar q e R tal que:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & q \end{array} \Rightarrow \begin{cases} D = dq + R \\ 0 \le R < d \end{cases} \quad \begin{array}{ll} D: \text{dividendo} & q: \text{quociente} \\ d: \text{divisor} & R: \text{resto} \end{array} \quad \boxed{R = 0} \quad \begin{array}{l} D = dq \\ D \text{ é divisível por } q \end{array}$$

"Critérios de divisibilidade" são condições que permitem verificar se um número natural é divisível ou não por outro número natural sem efetuarmos a divisão.

Os principais critérios são:

O número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_0}$ é divisível por:

2 se a_0 é par;

3 se $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ é múltiplo de 3;

4 se $a_1 a_0$ for múltiplo de 4;

5 se $a_0 = 0$ ou 5;

8 se $a_2 a_1 a_0$ é divisível por 8;

9 se $a_n + a_n - 1 + \ldots + a_1 + a_0$ é múltiplo de 9;

10 se $a_0 = 0$;

11 se $(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots)$ é múltiplo de 11.

Um número inteiro P é primo, se e somente se, possuir apenas 4 divisores. Todo número natural pode ser decomposto em um produto de potências de bases primas. $\mathbb{N} = a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} . a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n}$, tal que $a_1, a_2 \ldots a_n$ são números primos e $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ são os números naturais.

O número de divisores positivos de $\mathbb{N}$ é $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$

Após a fatoração de números naturais $A_1, A_2, \ldots A_n$, definimos:

- Mínimo múltiplo comum (MMC): produto dos fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes.
- Máximo divisor comum (MDC): produto dos fatores comuns com os menores expoentes.

Teorema importante:

- MMC (x; y) · MDC (x; y) = xy

QUER SABER MAIS?

ARTIGO

- M. J. C. Silva e R. P. Brenelli. "O jogo de gamão e suas relações com as operações adição e subtração". *Revista de Educação Matemática*. Ano 9, N^os^ 9-10 (2004-2005), 7-14 ©Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Exercícios complementares

Divisibilidade dos números naturais

1 Indique qual o menor número de 1 algarismo que deve ser colocado no lugar de x para que:

a) 234x seja divisível por 3 e 9
b) 42x seja divisível por 2 e 5
c) 342x seja divisível por 4 e 9
d) 511x seja divisível por 8
e) 233x seja divisível por 11
f) 23x0 seja divisível por 4 e 5

2 Qual a 2.005ª letra na sequência ABCDEDCBABCDEDCBA...?

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E

3 A televisão de Marco consegue sintonizar os canais de 2 até 42. Se Marco começa sintonizando o canal 15 e aperta o botão que avança o canal 2.005 vezes, em que canal estará sintonizado ao parar?

(a) 11
(b) 12
(c) 13
(d) 14
(e) 15

4 Uma calculadora possui uma tecla especial que transforma o número x que aparece no visor pelo número $\frac{1}{1-x}$. Por exemplo, se a calculadora exibe o número 2, quando esta tecla especial for pressionada aparecerá no seu lugar o número –1, pois $\frac{1}{1-2}=-1$.
Supondo que coloquemos no visor o número 5 e apertemos essa tecla especial 2.010 vezes, que número aparecerá no visor?
(a) 5
(b) –0,25
(c) 0,8
(d) 0
(e) 1,25

Número de divisores

5 Qual o menor número inteiro positivo que tem 15 divisores positivos?

6 Determine para quais inteiros positivos n o número $\frac{36}{n+2}$ é inteiro.

7 Determine a soma de todos os números inteiros n para os quais $\frac{n^2+1}{n-1}$ é um número inteiro.

Paridade de números inteiros

8 Se k é um número ímpar, prove que $k^2 - 1$ é divisível por 8.

9 **Vunesp** Sejam a e b números naturais relacionados da forma $a = 1 + b^2$, e se b é ímpar, prove que a é par.

10 A Editora Poliedro deseja remeter os seus livros para o Colégio Poliedro em caixas com as mesmas dimensões, de forma que o número de livros por caixa permita um bom ajuste para o transporte.
Determine o número de livros que deve caber em cada caixa, de modo que o número de caixas seja o menor possível e atenda aos seguintes pedidos: 720 livros para o 1º ano EM, 300 para o 2º e 390 para o 3º.

11 Prove as seguintes afirmações:
a) a é par e a^2 é par.
b) Todo número quadrado perfeito ímpar é da forma 8K + 1.

MMC e MDC

12 Determine os valores do MDC algébrico das expressões a seguir.
a) $5xy^2$; $15x^3$ e $17x^5y^4$
b) $ab - 2a - 3b + 6$ e $ab - 2a$
c) $x^2 - 1$ e $x^2 + 2x - 3$
d) $a + 2$; $a^2 - 4$ e $ax + 2x$

13 Determine os valores do MMC algébrico das expressões a seguir.
a) $8x^4y^2$; $16x^5yz^3$ e $12x^6y^4z^2$
b) $a^2 - b^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$
c) $ax - a$; $x^2 - 2x + 1$ e $a^2x^2 - a^2$
d) $2x^2 - x - 1$ e $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$

14 Calcule dois números, cujo produto é 1.728 e o MDC é 12.

15 Determine o menor número que dividido por 10, 16 e 24 deixa, respectivamente, os restos 5, 11 e 19.

16 Qual o menor número que dividido por 4, 6 ou 7 deixa sempre resto 3?

17 O Algoritmo de Euclides, para determinar o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros, consiste em formar uma sequência de inteiros cujos dois primeiros elementos são os números dados e cada elemento seguinte é o resto da divisão euclidiana dos dois anteriores. A sequência termina quando um elemento for nulo. O MDC entre os números dados é o número da sequência que precede o zero.
Nessas condições, determine o MDC dos números 33.810 e 4.116.

18 Determine o maior inteiro positivo pelo qual os números 13.511, 13.903 e 14.589 quando divididos deixam o mesmo resto.

19 O número de alunos de uma universidade está compreendido entre 9.000 e 10.000. Sabendo-se que colocando-os em turmas de 35, 45 ou 50 alunos sempre sobram 11, determine o número total de alunos.

20 Considere a propriedade de um número x quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 deixa, respectivamente, os restos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos são os números de 3 algarismos que possuem esta propriedade?
(a) 15
(b) 1
(c) 3
(d) 7
(e) 14

Problemas gerais

21 Um tipógrafo gastou 630 tipos para numerar as páginas de um livro. Quantas páginas tem esse livro?

22 Escrevendo-se a sucessão dos números naturais, a partir de 1, sem separar os algarismos, qual algarismo ocupará o 450º lugar?

23 Um número a dividido por 11 deixa resto 2 e b é um número que dividido pelo mesmo divisor deixa resto 3. Calcule o menor número que se deve subtrair de $a^3 + b^2$ para se obter um múltiplo de 11.

24 **Fuvest** Na figura a seguir, estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do número xy?

25 **Unicamp** Existem 4 números inteiros positivos e consecutivos tais que o produto de dois deles seja igual ao produto dos outros dois? Justifique sua resposta.

26 x, y e z são algarismos distintos de 0 a 9. Determine x + y + z, sabendo que:

$$\begin{array}{r} xxx \\ +\ \underline{yyy} \\ xxxz \end{array}$$

27 A divisão de um número A pelo número B dá o quociente q e o resto R. Se aumentarmos o dividendo A de 9 unidades, mantendo o mesmo divisor B, a divisão é exata e o quociente aumenta de 2 unidades. Determine o menor valor da soma A + B.
(a) 9
(b) 11
(c) 8
(d) 10
(e) 13

28 Sejam x, y e z números inteiros, tais que x + y + z = 0, sobre o número $x^3 + y^3 + z^3$ são feitas as seguintes afirmações.
I. É necessariamente múltiplo de 2.
II. É necessariamente múltiplo de 3.
III. É necessariamente múltiplo de 5.
Quais são verdadeiras?

29 O resto da divisão por 9 do número

$\sqrt{1.111.111.111 - 22.222}$ é:

(a) 0
(b) 1
(c) 3
(d) 6
(e) 8

30 Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. O menor valor possível para a diferença entre eles é:
(a) 111
(b) 49
(c) 29
(d) 69
(e) 5

31 Ache o resto da divisão do número 109.617^{291} pelo divisor 9.

32 **IME** Considere quatro números inteiros a, b, c e d. Prove que o produto
$(a - b) \cdot (c - a) \cdot (d - a) \cdot (d - c) \cdot (d - b) \cdot (c - b)$
é divisível por 12.

33 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $(a^5 - 5a^3 + 4a)$ é divisível por 120.

34 Prove que se a é um número primo relativo a 6, então $(a^2 - 1)$ é divisível por 24.

35 **IME** Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m - 15)\,x + m = 0$ e sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

36 Dois colecionadores de selos têm, juntos, 500 selos. Cada colecionador comprou um álbum para colocar seus selos. Os dois álbuns eram idênticos, tendo o mesmo número de páginas.
Se o primeiro colecionador colocar exatamente 21 selos em cada página, ele vai conseguir colocar todos os seus selos e usar todas as páginas do álbum.
Se o segundo colecionador colocar 20 de seus selos em cada página do álbum, sobrarão alguns selos.
Caso ele coloque 23 selos em cada página, sobra pelo menos uma, totalmente vazia, podendo haver ainda uma outra página com menos de 23 selos. Quantas páginas há no álbum?

37 Prove: quando se subtrai de um número de dois algarismos outro número escrito com os mesmos algarismos, o resultado é sempre divisível por 9.

38 Antônio e Eduardo começaram em seus novos empregos no mesmo dia. A jornada de trabalho de Antônio é de três dias de trabalho seguidos de um dia de descanso, enquanto que a jornada de trabalho de Eduardo é de sete dias de trabalho seguidos de três dias de descanso. Durante quantos de seus primeiros 1.000 dias de trabalho seus dias de descanso coincidirão?
(a) 48
(b) 50
(c) 72
(d) 75
(e) 100

3

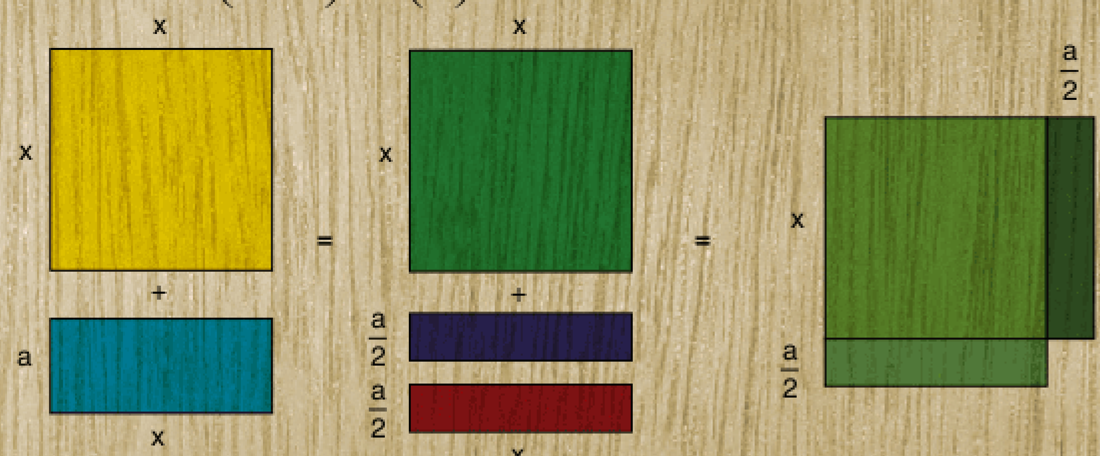
FRENTE 2

Fatoração

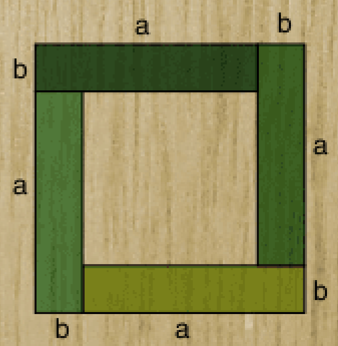
ELVIS SANTANA/STOCK.XCHNG

A ideia de representação de um número por meio de um comprimento foi muito aproveitada pelos gregos antigos. Eles idealizaram processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas valendo-se apenas de visualizações geométricas. Observe algumas identidades e tente visualizá-las sem efetuar cálculos:

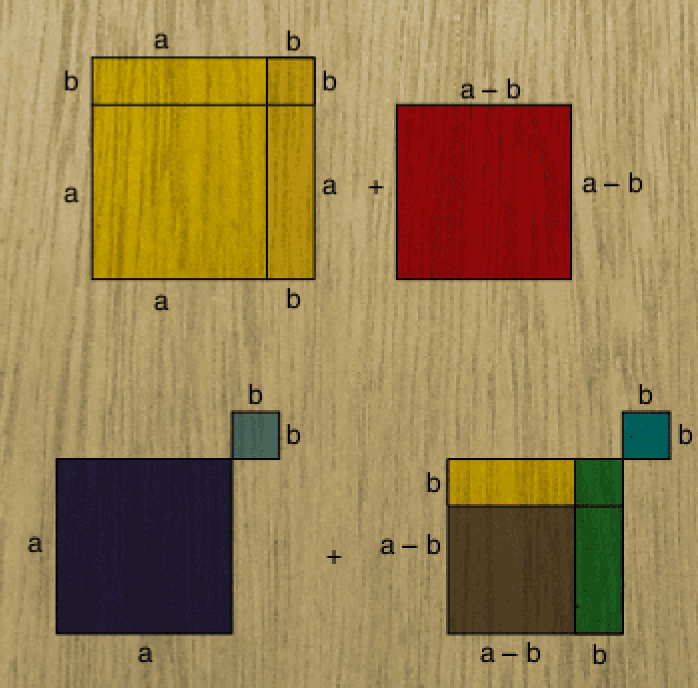
1) $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

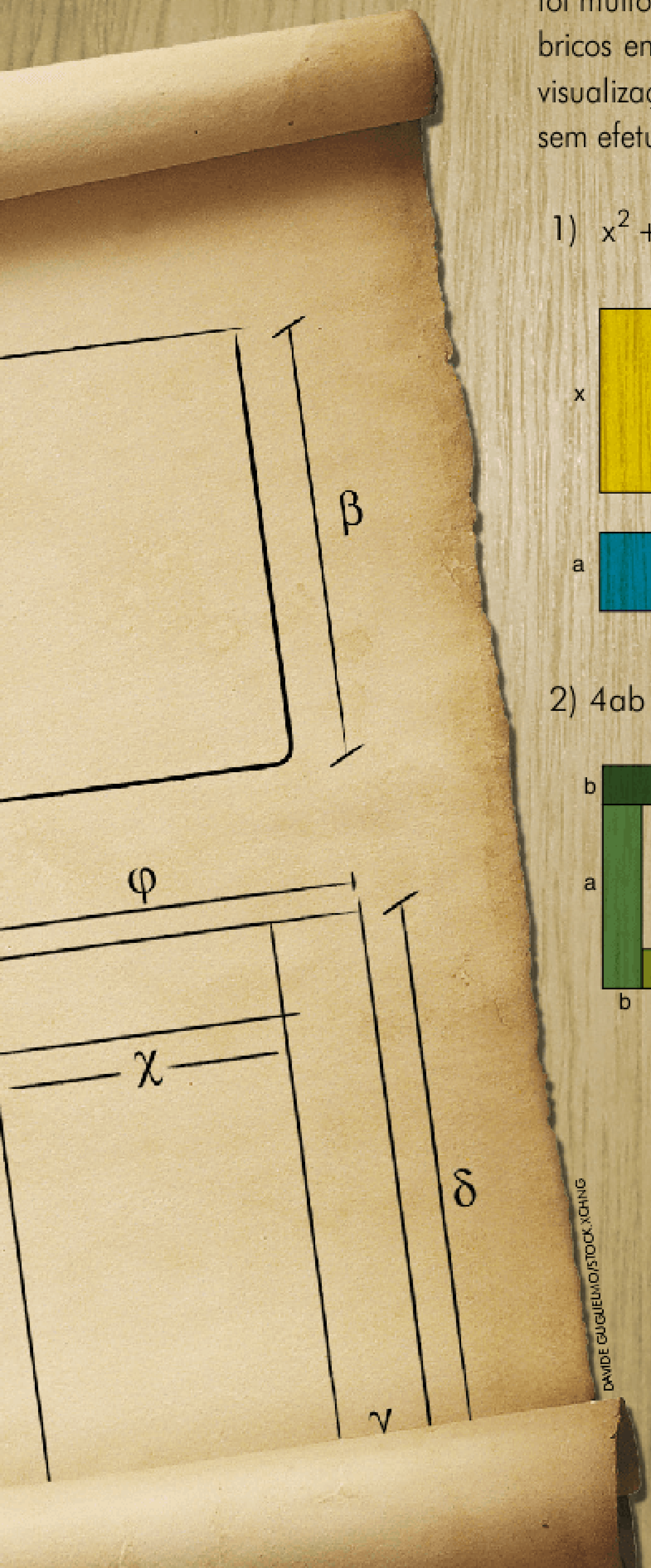


2) $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$



3) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$





DAVIDE GUGLIELMO/STOCK.XCHNG

Fatoração
Conceitos básicos

Fatorar uma expressão algébrica significa colocá-la na forma de produto. Podemos fatorar qualquer número inteiro em um produto de fatores primos. Observe:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^4 . 3^2 \end{array}$$

Na verdade, todos os casos de fatoração são derivados da propriedade distributiva, que possui uma origem totalmente geométrica.

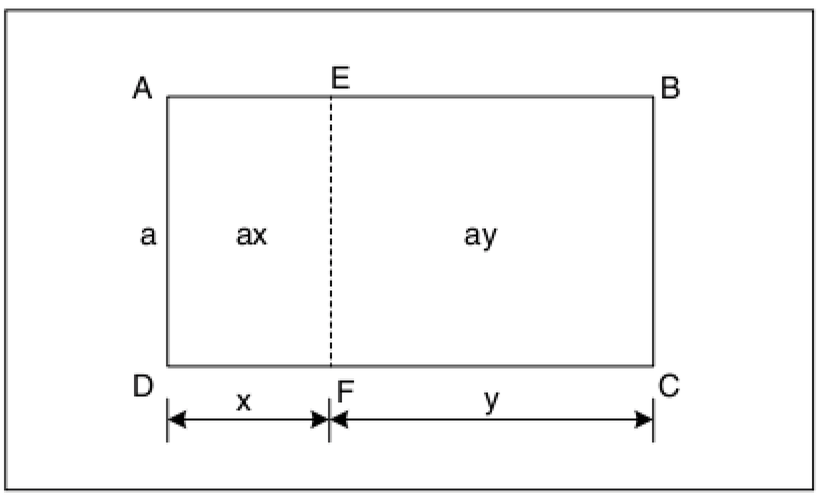


Fig. 1 Propriedade distributiva.

Na figura 1, temos um retângulo de altura a e base x + y, tendo uma área de base · altura = a(x + y).

O retângulo ABCD foi dividido pelo segmento $\overline{EF}$ em outros dois retângulos, que possuem áreas a . x e a . y. Podemos igualar as áreas e obter a propriedade distributiva:

$$ax + ay = a(x + y)$$

Fatoração por agrupamento

Utilizamos esse processo quando não possuímos fatores comuns em todos os termos da expressão. Observe:

Exemplo 1

$ax + by + ay + bx = ax + ay + by + bx =$
$= a(x + y) + (x + y)b = (x + y) . (a + b)$

Exemplo 2

$ax - y - x + ay = ax + ay - (x + y) =$
$= a(x + y) - (x + y) = (x + y) . (a - 1)$

Exemplo 3

$12bx + 3by - 8x - 2y = 3b(4x + y) - 2(4x + y) =$
$= (3b - 2) . (4x + y)$

Quadrados perfeitos

É um trinômio da forma $a^2 + 2ab + b^2$, que podemos fatorar por meio da fatoração por agrupamento. Observe:

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 =$
$= a(a + b) + b(a + b) = (a + b) . (a + b) = (a + b)^2$

Veja no Texto Complementar a razão do nome quadrado perfeito.

ATENÇÃO!

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Essa expressão é o quadrado da soma.
Podemos derivar dessa expressão o quadrado da diferença, observe:
$(a - b)^2 = [a + (-b)]^2 = a^2 + 2 . (a) . (-b) + (-b)^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Observe os exemplos:

Exemplo 4

$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 2 .\ 2x .\ 3y + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Exemplo 5

$(1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2$

Exemplo 6

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{x}\right).\left(\frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$$

Exemplo 7

$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 =$
$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

Diferença de quadrados

Vamos transformar a expressão $a^2 - b^2$ em um produto de dois fatores, observe:

$a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2$; como não temos fatores comuns, introduzimos ab – ab, assim:

$a(a + b) - b(a + b) = (a - b) . (a + b)$

ATENÇÃO!

$a^2 - b^2 = (a - b) . (a + b)$

Observe os exemplos:

Exemplo 8

$x^2 - 4y^2 = (x)^2 - (2y)^2 = (x - 2y) . (x + 2y)$

Exemplo 9

$1 - x^4 = (1)^2 - (x^2)^2 = (1 - x^2) \,.\, (1 + x^2) =$
$= (1 - x) \,.\, (1 + x) \,.\, (1 + x^2)$

Exemplo 10

$a^3 - a^2b^2 - ab^2 + b^4 = a^2(a - b^2) - b^2(a - b^2) =$
$= (a^2 - b^2) \,.\, (a - b^2) = (a - b) \,.\, (a + b) \,.\, (a - b^2)$

A fatoração de uma diferença de quadrados nos auxilia na racionalização de denominação das frações, observe:

Se x e $y \in \mathbb{R}^*_+$, podemos fatorar a expressão $x - y$, pois $x - y = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = \underbrace{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}_{\text{termos conjugados}}.$

Exercícios resolvidos

Racionalize os denominadores:

1 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Resolução:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2.2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Resolução:

Vamos multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. Esse número é o chamado conjugado.

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

conjugados

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Podemos generalizar esses dois casos de racionalização.

Primeiro Caso: $\dfrac{x}{\sqrt[a]{y^b}}$

$$\frac{x}{\sqrt[a]{y^b}} \cdot \frac{\sqrt[a]{y^{a-b}}}{\sqrt[a]{y^{a-b}}} = \frac{x\sqrt[a]{y^{a-b}}}{\sqrt[a]{y^b \,.\, y^{a-b}}} = \frac{x \,.\, \sqrt[a]{y^{a-b}}}{\sqrt[a]{y^a}} = \frac{x \,.\, \sqrt[a]{y^{a-b}}}{y}$$

Segundo Caso: $\dfrac{x}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$$\frac{x}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{x \,.\, (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{x \,.\, (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

Observação: Do ponto de vista teórico, não existe a necessidade de racionalizarmos uma expressão, mas, tecnicamente, para o cálculo do resultado da expressão, é conveniente.

Observe:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{1{,}4142...}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1{,}4142...}{2}$

É muito mais simples efetuarmos a operação em (b) do que em (a).

Quando você puder racionalizar uma expressão para melhorar sua resposta, e tiver tempo para isso, racionalize.

Produto de Stevin

Vamos fatorar um trinômio do 2° grau que não é necessariamente um quadrado perfeito. Observe:

$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab =$
$x(x + a) + b(x + a) = (x + a) \,.\, (x + b)$

ATENÇÃO!

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a) \,.\, (x + b)$

Esse trinômio é particular, pois agiliza a fatoração de expressões que possuem como coeficientes a soma e o produto de dois números a e b.

Observe os exercícios resolvidos:

Exercício resolvido

3 Nas expressões abaixo, ache o números necessários para utilizar o produto de Stevin.

a) $x^2 + 6x + 8$

Resolução:

Os números são 2 e 4, pois $2 + 4 = 6$ e $2 \,.\, 4 = 8$, assim: $x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \,.\, (x + 4)$

b) $x^2 - x - 12$

Resolução:

Os números são –4 e 3, pois $-4 + 3 = -1$ e $-4 \,.\, 3 = -12$, assim: $x^2 - x - 12 = (x - 4) \,.\, (x + 3)$

c) $x^2 - 6x + 9$

Resolução:

Os números são –3 e –3, pois $-3 - 3 = -6$ e $(-3) \,.\, (-3) = 9$, assim: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3) \,.\, (x - 3) = (x - 3)^2$. Podemos utilizar o produto de Stevin para o caso do quadrado perfeito.

Teorema

Para que o trinômio $x^2 + bx + c$ seja um quadrado perfeito, $b^2 - 4c$ tem de ser zero.

Demonstração:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2} + c = \underbrace{x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}}_{\text{quadrado perfeito}} - \frac{b^2}{4} + c,$$

devemos ter $c - \frac{b^2}{4} = 0$, ou seja, $\frac{4c - b^2}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 4c = 0$

Você perceberá que essa é a ideia mais importante da fatoração, pois poderemos resolver uma equação do 2º grau.

Acompanhe o raciocínio:

$$x^2 + bx + c = 0 \therefore \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4} = 0 \therefore$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4} \therefore x + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$ obtemos assim:

$$x_{1;\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ATENÇÃO!

$x^2 + bx + c = 0$ possui como fórmula resolutiva:

$$x_{1;\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Cubos perfeitos

Vamos calcular o valor da expressão:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2 =$$
$$= (a + b) . (a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ATENÇÃO!

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Essa expressão é o chamado *cubo da soma*, e por meio dela podemos derivar o cubo da diferença, observe:

$$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplo 11

$(x + 2y)^3 =$
$= x^3 + 3x^2 \cdot (2y) + 3x\,(2y)^2 + (2y)^3 =$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

Exemplo 12

$(a^2 - 2b)^3 =$
$= (a^2)^3 - 3(a^2)^2 \cdot (2b) + 3(a^2) \cdot (2b)^2 - (2b)^3 =$
$= a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$

Exemplo 13

$(x^m + 1)^3 =$
$= (x^m)^3 + 3(x^m)^2 \cdot 1 + 3(x^m) \cdot (1)^2 + (1)^3 =$
$= x^{3m} + 3x^{2m} + 3x^m + 1$

Exemplo 14

$(1 - xy)^3 =$
$= (1)^3 - 3(1)^2 \cdot xy + 3(1) \cdot (xy)^2 - (xy)^3 =$
$= 1 - 3xy + 3x^2y^2 - x^3y^3$

Soma e diferença de cubos

Observe o cubo da soma a seguir e vamos isolar a expressão $a^3 + b^3$:

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \therefore$
$\therefore (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 \therefore$
$\therefore (a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3 \therefore$
$\therefore (a + b) . [(a + b)^2 - 3ab] = a^3 + b^3 \therefore$
$\therefore (a + b) . (a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = a^3 + b^3$, assim:
$a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$

ATENÇÃO!

$a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$

Podemos obter imediatamente a diferença de cubos:

$a^3 + (-b)^3 = [a + (-b)] . [a^2 - a . (-b) + (-b)^2] =$
$= (a - b) . (a^2 + ab + b^2)$

ATENÇÃO!

$a^3 - b^3 = (a - b) . (a^2 + ab + b^2)$

Observe os exemplos:

Exemplo 15

$x^3 + 1 = (x + 1) . (x^2 - x + 1)$

Exemplo 16

$x^3 - 8y^3 = (x)^3 - (2y)^3 =$
$= (x - 2y) \cdot (x^2 + 2xy + 4y^2)$

Exemplo 17

$2x^3 - 686 = 2(x^3 - 343) =$
$= 2 . [(x)^3 - (7)^3] = 2 . (x - 7) . (x^2 + 7x + 49)$

A soma ou a diferença de cubos auxiliam-nos na racionalização de denominadores. Podemos fatorar a expressão x + y ou x – y, observe:

$$x + y = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 =$$

$$= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) . (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) \quad \text{ou}$$

$$x - y = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3 =$$

$$= (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) . (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$$

Exercícios resolvidos

Racionalize os denominadores:

4 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$

Resolução:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - 2} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{1}$$

5 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$

Resolução:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{5})^3 + (\sqrt[3]{3})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{5 + 3} = \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{8}$$

Fatoração por artifício

Não podemos encarar a fatoração como uma memorização de fórmulas. Há muito raciocínio e ideias interessantes que nos abrem o caminho de uma nova álgebra.

Observe os exemplos a seguir.

Exercícios resolvidos

Fatore:

6 $x^4 + x^2 + 1$

Resolução:

Temos um trinômio que não é quadrado perfeito, mas podemos forçar o seu aparecimento, observe:

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$

Ganhamos, com isso, uma diferença de quadrados:

$(x^2 + 1 - x) . (x^2 + 1 + x)$

7 $x^4 - 45x^2 + 100$

Resolução:

$x^4 - 20x^2 + 100 - 25x^2 = (x^2 - 10)^2 - (5x)^2 =$

$= (x^2 - 10 - 5x) \cdot (x^2 - 10 + 5x)$

8 $x^3 - 3x + 2$

Resolução:

$x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$

$= x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = (x - 1) \cdot [x(x + 1) - 2] =$

$= (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) =$

$= (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$

9 $x^4 + 9$

Resolução:

Vamos completar o quadrado perfeito:

$(x^2)^2 + (3)^2 + 2x^2 \cdot 3 - 2x^2 \cdot 3 = (x^2 + 3)^2 - 6x^2,$

obtemos uma diferença de quadrados:

$(x^2 + 3)^2 - (\sqrt{6}x)^2 = (x^2 + 3 + \sqrt{6}x)(x^2 + 3 - \sqrt{6}x)$

Revisando

1 Efetue os quadrados perfeitos a seguir.

a) $(x - 2y)^2$

b) $(1 - x + x^2)^2$

2 Fatore as expressões a seguir.

a) $a^4 - 10a^2 + 169$
b) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$
c) $x^4 + 4y^4$
d) $a^3 - 5a^2 - a + 5$
e) $a^5 + a^3 - a^2 - 1$
f) $x^5 + y^5 - xy^4 - x^4y$
g) $a^4 + 9$
h) $a^6 + 1$

3 Fatore as seguintes diferenças de quadrados.

a) $(1 + x)^2 - 4x^4$
b) $x^4 - y^4$

4 Fatore os seguintes trinômios.

a) $x^2 + 8x + 12$
b) $x^2 + 3ax + 2a^2$

5 Calcule o valor da fração $\dfrac{3xy(x+y)+x^3+y^3}{x^2+y^2+2xy}$ se $x = 1+\sqrt[4]{2}$ e $y = 1-\sqrt[4]{2}$.

6 Se $2^x + 2^{-x} = a$, calcule o valor de $8^x + 8^{-x}$.

7 Sabendo que $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 221$, calcule o valor de $x^3 + y^3$.

Exercícios propostos

Fatoração de expressões algébricas e produtos notáveis

1 Fatore as expressões.

a) $x^2y^3 - x^3y^2$

b) $8z(x - y) - 3(x - y)$

c) $2ab - 3ac - 2yb + 3cy$

d) $x^3 + x^2 + x + 1$

2 Fatore as expressões.

a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

b) $a^2 - 1 + 2ab + b^2$

c) $4a^4 - a^2 + 2a - 1$

d) $x^3 + x^2 - x - 1$

3 Fatore a expressão $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

4 Determine o valor da expressão:

$$(x - y)^2 - (x + y)^2$$

5 Fatore completamente a expressão:

$$2x^3 + 10x^2 + 12x$$

6 Se $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$, calcule o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

7 Se $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$, calcule $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

8 Determine o valor da expressão $\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y}$, para $x = 1,25$ e $y = -0,75$.

9 Simplifique a expressão:

$$(x^2y^2 + x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2(x^2 + y^2)$$

10 Simplifique a fração a seguir para $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$$

11 Simplificar $\frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$.

12 Efetuar as simplificações da fração a seguir.

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$$

13 Considerando a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq \pm\frac{1}{b}$, simplificar a expressão a seguir.

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2b^4 - b^2}\right) \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{ab + 1}{a}\right)$$

14 Determine a expressão equivalente de $(a - b)^3 + b(a + b)^2 - a(a + b) \cdot (a - b)$.

15 Simplificando a expressão:

$\sqrt[n]{\dfrac{600}{25^{n+2} - 5^{2n+2}}}$ para $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$, temos:

(a) 5
(b) 5^{-1}
(c) 5^{-2}
(d) 5^2
(e) 5^0

16 Racionalize o denominador da fração.

$$\frac{5 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$$

17 Simplifique a expressão a seguir.

$$\frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

18 Determine o resultado da racionalização do denominador da expressão.

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

19 Simplifique a expressão a seguir.

$$\frac{(2x^2 - 4x + 8) \cdot (x^2 - 4)}{\sqrt{2x^3} + \sqrt{128}}$$

20 Fatorando a expressão:

$$a^3\left(\frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3}\right)^3 + b^3\left(\frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3}\right)^3,$$

obtemos:

(a) $a^3 + b^3$
(b) $a^3 - b^3$
(c) $a^3 - 2b^3$
(d) $a^3 + 2b^3$
(e) $2a^3 + b^3$

21 Calcule $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$ se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$.

TEXTO COMPLEMENTAR

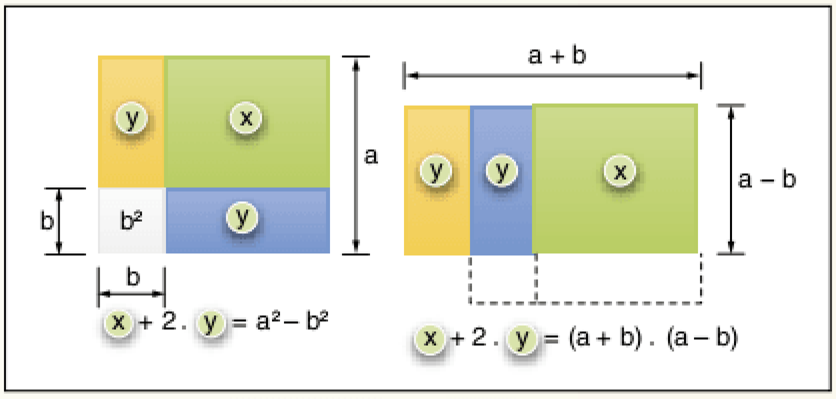
Álgebra geométrica

Os gregos estavam confiantes na representação de um número por meio de um comprimento; eles efetuaram operações algébricas sem notações algébridas adequadas. Atribui-se aos pitagóricos (discípulos da escola de Pitágoras) parte considerável da álgebra geométrica que se encontra nos livros iniciais dos Elementos de Euclides.

A lei distributiva (apresentada na teoria), $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ era, sem dúvida, muito mais evidente antigamente para um estudioso grego do que é hoje para um estudante que se inicia na álgebra.

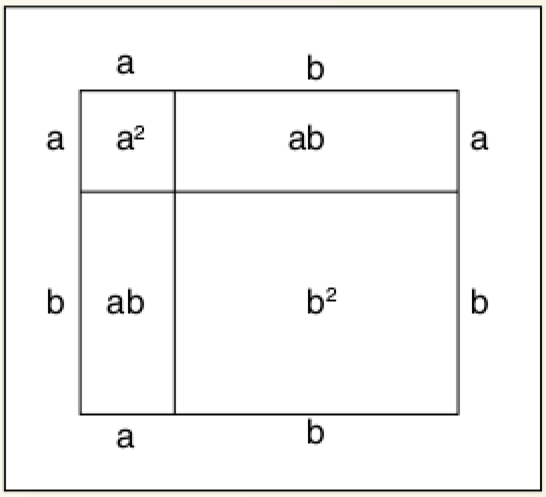
Somas, diferenças, produtos e quocientes de segmentos podem, facilmente, ser construídos com régua e compasso.

Observe a justificativa da diferença de dois quadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.



Logo, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Observe a justificativa para o quadrado da soma $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Vamos construir um quadrado de lado $a + b$ e cortá-lo em 4 partes (2 quadrados e 2 retângulos).



O quadrado maior tem área $(a + b)^2$, que é igual ao somatório das áreas menores a^2, b^2, ab e ab. Assim, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ é chamada quadrado perfeito, pois representa a área exata de um quadrado de lado $a + b$.

RESUMINDO

Produto notável		Fatoração
$a(x \pm y)$	=	$ax \pm ay$
$(a \pm b)^2$	=	$a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a + b) . (a - b)$	=	$a^2 - b^2$
$(x + a) . (x + b)$	=	$x^2 + (a + b)x + ab$
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3$	=	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b) . (a^2 - ab + b^2)$	=	$a^3 + b^3$
$(a - b) . (a^2 + ab + b^2)$	=	$a^3 - b^3$
$(a + b + c)^2$	=	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

QUER SABER MAIS?

SITES

- Projeto GIMPS
  <www.mersenne.org/>.
- Números primos de Mersenne
  <www.brasilescola.com/matematica/mersenne-numeros-primos-numeros-perfeitos.htm>.

Exercícios complementares

Fatoração de expressões algébricas e produtos notáveis

1 Fatore as expressões.

a) $x^4 - y^4$
b) $(a + b)^2 - c^2$
c) $4a^2 - 49b^{2m}$
d) $(x + 3)^2 - (3x - 4)^2$

2 Fatore as expressões algébricas a seguir.

a) $3x^2 - 6xy + 3y^2$
b) $(x - y)^2 + 2(y - x) - 24$
c) $ab - ac + b^2 - bc$
d) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 8$
e) $4a^2 + 9b^2 - 25 - 12ab$
f) $2x^2 + 5x - 3$
g) $81x^2 - y^{16}$
h) $x - xy - 1 + y^2$

3 Decomponha em fatores do 1º grau $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.

4 Para que o binômio $16x^2 - 16x\sqrt{x}$ se torne um trinômio quadrado perfeito, o que é necessário acrescentar ao mesmo?

5 Calcule o valor da expressão:

$$\frac{a}{(a-b).(a-c)} + \frac{b}{(b-c).(b-a)} + \frac{c}{(c-a).(c-b)}$$

6 Fatore a expressão:

$$bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$$

7 Fatore a expressão:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$$

8 Fatore a expressão:

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

9 Fatore a expressão:

$$(a + b + c) \cdot (ab + bc + ca) - abc$$

10 Fatore a expressão:

$$(a + 1) . (a + 3) . (a + 5) . (a + 7) + 15$$

11 Fatore a expressão $a^8 + a^4 + 1$ em um produto de 4 fatores polinomiais.

12 Demonstre as identidades a seguir considerando a, b e c números reais e distintos dois a dois.

1) $\dfrac{a^2}{(a-b).(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c).(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a).(c-b)}\equiv 1$

2) $\dfrac{a^3}{(a-b).(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c).(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a).(c-b)}\equiv a+b+c$

13 Fatore as expressões a seguir.

a) x^3-8
b) x^6-y^6
c) $(2m+1)^3+(m+2)^3$
d) $a^{3m}+1$

Simplificação de expressões algébricas

14 Simplifique a expressão:

$$(x^2+2xy+y^2).(x-1)^2-(x^2-x+xy-y)^2$$

15 Decomponha em fatores do 1º grau a expressão:

$$\frac{\left[\left(a^2+b^2\right)x^2-1\right]^2-\left[\left(a^2-b^2\right)x^2+1\right]^2}{ax}$$

16 Simplifique $\dfrac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2bc-b^2-c^2+a^2}$.

17 Se xy = 7, determine o valor de $\dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$.

18 O produto $(m+n).\left[\dfrac{3\left(m^2+n^2\right)-(m+n)^2}{2}\right]$ é igual a:

(a) $m+n$
(b) $m+2mn+n$
(c) m^2+n^2
(d) m^3+n^3
(e) m^2+mn+n^2

19 Se $p+q=n$ e $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=m$, em que p e q são ambos positivos, então $(p-q)^2$ é igual a:

(a) n^2
(b) n^2-m
(c) $\dfrac{n^2-m}{n}$
(d) $\dfrac{mn^2-4n}{m}$
(e) n^2-4mn

20 Simplifique a expressão:

$$\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}.$$

21 Fatore as expressões a seguir.

a) a^4+a^2+1
b) $1+2xy-x^2-y^2$
c) $(x^2+y^2-5)^2-4(xy+2)^2$
d) $a^2-4ab+4b^2-4c^2$
e) $a^2b^2-(a+b)\cdot ab+a+b-1$
f) $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$
g) $x^3+y^3-x-y-x^2y-xy^2$
h) $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$

22 Reduza ao numeral mais simples:

$$\sqrt{2}\,.\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

23 Calcule o valor da expressão:

$$\left[\frac{(8+x^3).(x^2-4)}{(x^2+4x+4).(x^2-2x+4).(4-2x)}\right]^{-5}$$

24 Simplifique a expressão:

$$\frac{(zx^2+y^2z+2xyz).(x^2-y^2)}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$$

25 Verifique a igualdade em

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=4x\sqrt{x^2-1}$$

26 Fatore a expressão

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

27 Os valores de x, y e z que satisfazem às equações $x+\dfrac{1}{y}=5$, $y+\dfrac{1}{z}=1$ e $z+\dfrac{1}{x}=2$ são tais que $x+3y+2z$ é igual a:

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

28 Seja α a maior raiz da equação $x^2+x-1=0$, o valor de $\alpha^5-5\alpha$ é:

(a) –1
(b) –2
(c) –3
(d) 1
(e) 2

29 Prove que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número racional.

4 Problemas de 1° e 2° graus

FRENTE 2

Papiro de Rhind

Todo conhecimento atual sobre matemática egípcia baseia-se em dois antigos documentos: o papiro de Moscovo e o papiro de Rhind. O papiro de Rhind foi transcrito por Ahmes (Aahmesu) em 1650 a.C. e trata-se da transcrição de um velho documento, escrito, provavelmente, 200 anos antes. O escocês A. Henry Rhind comprou esse documento em um leilão, em 1858.

O título desse documento é *Instruções para conhecer todas as coisas secretas* e nele estão listados 80 problemas, todos resolvidos e a maioria relacionada a situações cotidianas, como o preço do pão e a alimentação do gado. Esse documento mostra antigas tentativas de se resolver problemas cotidianos por meio da matemática, utilizando principalmente equações lineares de 1° grau.

Papiro de Rhind.

Exemplo de problema:

De uma quantidade de milho equivalente a vinte e uma medidas, um camponês deve dar ao Faraó uma parte igual à quinta parte da sua. Quanto lhe restará?

Resolução de problemas clássicos

Para o perfeito entendimento do método de solução dos problemas, leia atentamente os problemas resolvidos e comentados a seguir.

Exercícios resolvidos

1 Josimar gastou tudo o que tinha no bolso durante as compras em 5 lojas. Em cada uma gastou R$ 1,00 a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto tinha inicialmente?

Resolução:

A incógnita do problema é a quantia inicial antes de entrar na 1ª loja.
Considere x essa quantia.
A tabela a seguir mostra a relação entre a incógnita e os dados do problema.

Loja	Entrou com...	Gastou...	Saiu com...
1	x	$\frac{x}{2}+1$	$\frac{x}{2}-1$
2	$\frac{x-2}{2}$	$\frac{x-2}{4}+1$	$\frac{x-2}{4}-1$
3	$\frac{x-6}{4}$	$\frac{x-6}{8}+1$	$\frac{x-6}{8}-1$
4	$\frac{x-14}{8}$	$\frac{x-14}{16}+1$	$\frac{x-14}{16}-1$
5	$\frac{x-30}{16}$	$\frac{x-30}{32}+1$	$\frac{x-30}{32}-1$

Como Josimar gastou tudo, temos:

$$\frac{x-30}{32}-1=0 \therefore \frac{x-30}{32}=1 \therefore x=62$$

Assim, Josimar tinha R$ 62,00 inicialmente.

2 Dois jogadores A e B apostam R$ 5,00 por partida. Antes do início do jogo, A e B possuíam R$ 150,00 e R$ 90,00, respectivamente. Após o fim do jogo, os jogadores ficaram com quantias iguais. Qual o número de partidas que B ganhou a mais que A?

Resolução:

Observe a tabela a seguir que contém variáveis importantes do problema.

Jogador	Nº de vitórias	Nº de derrotas
A	x	y
B	y	x

Vamos calcular a quantia de cada jogador no final da partida.
$150 + 5x - 5y$ é a quantia acumulada por A, enquanto $90 + 5y - 5x$ a que B acumulou, assim:

$$150 + 5x - 5y = 90 + 5y - 5x \therefore$$
$$\therefore 150 - 90 = 5y - 5x + 5y - 5x \therefore$$
$$\therefore 60 = 10y - 10x \Rightarrow y - x = 6$$

Observe o significado de $y - x$ na tabela.

3 Jorge tem 45 anos e seu filho 15 anos. Quando o seu filho terá $\frac{1}{4}$ da sua idade?

Resolução:

A construção de uma tabela facilitará a resolução de problemas envolvendo idades, observe:

Indivíduos	Presente	Passado	Futuro
Pai	45		45 + x
Filho	15		15 + x

Após x anos, temos:

$$15+x=\frac{45+x}{4} \therefore 60+4x=45+x \therefore 3x=-15 \therefore x=-5$$

Encontramos como resposta –5, correspondendo que há 5 anos a idade do filho foi $\frac{1}{4}$ da do pai.

4 Tenho o dobro da idade que você tinha quando eu tinha a idade que você tem e quando você tiver a idade que tenho, a soma de nossas idades será 90 anos. Determine as idades.

Resolução:

Vamos recorrer à tabela para um perfeito entendimento do problema.

Indivíduos	Presente	Passado	Futuro
Eu	$x+\alpha$	x	$x+2\alpha$
Você	x	$x-\alpha$	$x+\alpha$

Na tabela, representamos as idades dos indivíduos com uma diferença α.
Eu tenho $x + \alpha$, que representa o dobro da idade que você tinha, ou seja, $x - \alpha$ (passado).
Logo $x + \alpha = 2(x - \alpha) \therefore x + \alpha = 2x - 2\alpha \therefore 3\alpha = x$ (1)
Quando você tiver a minha idade, ou seja, $x + \alpha$, teremos juntos $(x + \alpha) + (x + 2\alpha) = 90$ (2)
Montamos o sistema:

$$\begin{cases} x=3\alpha \\ 2x+3\alpha=90 \end{cases} \Rightarrow 2(3\alpha)+3\alpha=90 \therefore 9\alpha=90 \therefore \alpha=10$$

Assim, $x = 30$ e as idades são 40 e 30 anos.

5 Uma torneira enche um tanque em 3 horas. Outra torneira enche o mesmo tanque em 4 horas. Determine em quanto tempo as duas torneiras juntas encherão o mesmo tanque.

Resolução:

A 1ª torneira tem vazão $v_1=\frac{V}{3}$, e a 2ª torneira tem vazão $v_2=\frac{V}{4}$.
Quando juntamos as duas torneiras, criamos uma torneira que possui vazão $v_1 + v_2$, assim:

$$\frac{V}{3}+\frac{V}{4}=\frac{\text{volume}}{\text{tempo}}$$

Como queremos encher o tanque, temos:

$$\frac{V}{3}+\frac{V}{4}=\frac{V}{t}\therefore t\,.\,v\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=V\therefore\ t=\frac{4\,.\,3}{4+3}\Rightarrow t=\frac{12}{7}\ horas$$

6 **Fuvest** Durante uma viagem choveu exatamente 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve só 6 manhãs e só 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem?

Resolução:

Seja x o número de dias da viagem, que possui x manhãs e x tardes. Essas manhãs e tardes podem ser chuvosas ou não. Observe a tabela:

	Chove	Não chove
Manhã	a	6
Tarde	$5-a$	3

número de tardes $x = 5 - a + 3 \therefore x = 8 - a$
número de manhãs $x = 6 + a$
$6 + a = 8 - a \therefore 2a = 2 \therefore a = 1$
Assim: $x = 7$

7 Um ciclista faz um percurso que se divide em 4 partes de comprimentos iguais. Na primeira parte, de terreno plano, faz 10 km/h e na segunda, uma subida, faz 5 km/h; na terceira, uma descida, faz 30 km/h e na última, de terreno plano, mas com vento pelas costas, faz 15 km/h. Qual é a velocidade média do ciclista no percurso?

Resolução:

Sabemos que $v=\frac{d}{t}$. *Cada trecho possui uma distância x, assim:*

$$10=\frac{x}{t_1}\therefore t_1=\frac{x}{10};\ 5=\frac{x}{t_2}\therefore t_2=\frac{x}{5};\ 30=\frac{x}{t_3}\therefore t_3=\frac{x}{30}\ e$$

$$15=\frac{x}{t_4}\therefore t_4=\frac{x}{15}$$

No trecho total, temos: $V=\frac{4x}{t_1+t_2+t_3+t_4}$

$$V=\frac{4x}{\frac{x}{10}+\frac{x}{5}+\frac{x}{30}+\frac{x}{15}}=\frac{4}{\frac{3+6+1+2}{30}}=\frac{120}{12}=10\,km/h$$

8 Em um vaso há doze litros de vinho e 18 litros de água, em outro há 9 litros de vinho e 3 litros de água. Quantos litros se deve tirar de cada vaso para se obter 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?

Resolução:

No 1º vaso, temos $\frac{12}{30}$ *de vinho, ou seja,* $\frac{2}{5}$ *de vinho e* $\frac{3}{5}$ *de água.*

No 2º vaso, temos $\frac{1}{4}$ *de água e* $\frac{3}{4}$ *de vinho.*

Seja x a porção do 1º vaso e y a do 2º vaso, tem-se: $x + y = 14$

$\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y$ *é a fração correspondente a 7 litros de vinho, assim:*

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}(14-x)=7\therefore\frac{2}{5}x+\frac{21}{2}-\frac{3}{4}x=7\therefore x=10$$

Logo, $y = 4$
Devemos tirar 10 litros do 1º vaso e 4 litros do 2º vaso.

9 Certa quantia é dividida em partes iguais, entre determinado número de pessoas. Se aumentarmos de 6 o número de pessoas, cada uma receberá R$ 3,00 a menos, e se, ao contrário, o número de pessoas diminui de 2, cada uma terá R$ 2,00 a mais. Achar o número de pessoas e a parte de cada uma.

Resolução:

As variáveis envolvidas são:
x é o número de pessoas;
y é a quantia a ser dividida
$\frac{y}{x}$: *quantia de cada um*

$\frac{y}{x+6}=\frac{y}{x}-3$ *e* $\frac{y}{x-2}=\frac{y}{x}+2$ *são as equações obtidas pela interpretação do texto, assim:*

$$\frac{y}{x+6}=\frac{y-3x}{x}\therefore xy=xy-3x^2+6y-18x\therefore$$

$$x^2-2y+6x=0$$

$$\frac{y}{x-2}=\frac{y+2x}{x}\therefore xy=xy+2x^2-2y-4x\therefore$$

$x^2 - y - 2x = 0$
$x^2 + 6x = 2(x^2 - 2x) \therefore x^2 + 6x = 2x^2 - 4x$
$x^2 - 10x = 0 \therefore x = 10$
$(10)^2 - y - 2 \cdot 10 = 0 \therefore y = 100 - 20 = 80$
Temos 10 pessoas e cada uma receberá R$ 8,00.

10 João fez um percurso de 30 km e teria gasto 4 horas menos se aumentasse sua velocidade de 2 km/h.
Qual é a velocidade de João?

Resolução:

$d = vt$
$30 = vt$ *mas* $30 = (v + 2) \cdot (t - 4)$
$30 = vt - 4v + 2t - 8 \therefore 2v - t = -4$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} vt=30 \\ t=2v+4 \end{cases}\Rightarrow (2v+4)v=30\therefore v^2+2v-15=0$$

Assim: $v = 3$ km/h

11 Um carro movido a gasolina aditivada faz, aproximadamente, dez quilômetros por litro. Sabendo que o preço do litro da gasolina comum é 75% do preço da gasolina aditivada, podemos afirmar que o desempenho (em quilômetros por litro) a partir do qual o carro que utiliza apenas gasolina comum passa a ser mais econômico quando comparado com o carro que utiliza apenas gasolina aditivada é:

a) 5
b) 5,5
c) 6
d) 7,5
e) 8

Resolução:

$$\begin{cases} \text{gasolina aditivada: } 10\,\text{km/L} \\ \text{preço: } x \text{ reais/L} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{x}\ \text{km/reais}$$

$$\begin{cases} \text{gasolina comum: } a\,\text{km/L} \\ \text{preço: } 0{,}75x \text{ reais/L} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{0{,}75}\ \text{km/reais}$$

$$\frac{a}{0{,}75x} \geq \frac{10}{x} \therefore a \geq 7{,}5\,\text{km/L}$$

Resposta: alternativa d

12 O custo em reais de 25 laranjas é igual ao número de laranjas que podemos comprar com um real.
Determine o número de laranjas que se pode comprar com 3 reais.

Resolução:

preço de cada laranja: x

$$25x = \frac{1}{x} \therefore x^2 = \frac{1}{25} \therefore x = \frac{1}{5}$$

$$n^o \text{ de laranjas } = \frac{3}{\left(\frac{1}{5}\right)} = 15 \text{ laranjas}$$

13 Uma usina comprou 2.000 litros de leite puro e retirou certo volume v desse leite para produção de iogurte, substituindo esse volume por água. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume v da mistura e novamente substituiu por água. Na mistura final existem 1.125 litros de leite. Determine o percentual do volume inicial que v representa.

Resolução:

2.000 L leite $\xrightarrow{-v}$ $\begin{matrix} 2.000 - v \text{ leite} \\ v \text{ água} \end{matrix}$ $\xrightarrow{-v}$ deste volume v da mistura temos $\frac{v}{2.000} \cdot v$ de água e $\frac{2.000 - v}{2.000} \cdot v$ de leite.

Leite: $2.000 - v -$

$$\Rightarrow \left(\frac{2.000 - v}{2.000}\right) \cdot v$$

água: $2v - \frac{v^2}{2.000}$

$$2v - \frac{v^2}{2.000} = 875 \therefore \frac{v^2}{2.000} - 2v + 875 = 0 \therefore$$

$$\therefore v^2 - 4.000v + 875 \cdot 2.000 = 0$$

$$v = \frac{4.000 \pm 3.000}{2} \begin{cases} \cancel{3.500} \\ 500 \end{cases} \quad v = 500\text{ L} \quad \frac{500}{2.000} = 25\%$$

v representa 25% do volume inicial.

14 Se a média aritmética de a e b é o dobro da sua média geométrica, com a > b > 0, determine o inteiro mais próximo da razão $\frac{a}{b}$.

Resolução:

$$\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab} \therefore a + b = 4\sqrt{ab} \therefore$$

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 16ab \therefore$$

$$\therefore b^2 \begin{cases} a^2 - 14ab + b^2 = 0 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \therefore \frac{a}{b} = \frac{14 \pm \sqrt{192}}{2} = 7 \pm \sqrt{48} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 7 + \sqrt{48} \cong 13{,}92$$

$$\text{inteiro mais próximo } \frac{a}{b} = 14$$

15 *O real perdeu muito do seu poder de compra de 1994 até hoje. Para se ter uma ideia dessa perda, um estudo da Consultoria Global Invest mostrou que, com o dinheiro necessário para comprar 8 pizzas ou 20 entradas de cinema em 1994, hoje o consumidor consegue comprar somente 3 pizzas ou 5 entradas de cinema.*

Revista *Veja*, 11 ago. 2004.

Considerando as proporções apresentadas nesse estudo, quantas *pizzas* poderiam ser compradas em 1994 com a quantia necessária para comprar hoje 20 entradas de cinema?

a) 12
b) 16
c) 24
d) 32
e) 36

Resolução:

x comprava 8 pizzas *em 1994. Preço unitário de* $\frac{x}{8}$

x comprava 3 pizzas *em 2004. Preço unitário de* $\frac{x}{3}$

Aumento: $\frac{x}{3} - \frac{x}{8} = \frac{5x}{24}$. *Aumento percentual de* $\frac{\frac{5x}{24}}{\frac{x}{8}} = \frac{5}{3}$.

20 entradas de cinema ou 12 pizzas *em 2004, preço unitário* $\frac{x}{12}$.

Em 1994, o preço unitário $y \Rightarrow y\,\frac{5y}{3} = \frac{x}{12} \therefore y = \frac{x}{32} \therefore x = 32y$, *ou seja, 32* pizzas.

Resposta: alternativa d

Revisando

1 Diofanto foi uma criança feliz durante $\frac{1}{6}$ de sua vida. Após mais $\frac{1}{12}$ começou a cultivar uma barba. Permaneceu solteiro somente mais $\frac{1}{7}$ antes de se casar e somente no quinto ano, após o seu casamento, nasceu-lhe um filho que morreu quatro anos antes que o pai e que viveu apenas a metade do que viveu Diofanto. Determine a idade que Diofanto alcançou.

2 Um tanque é dotado de duas torneiras. A primeira esvazia-o em um tempo inferior ao da segunda em 30 minutos. Sabendo-se que as duas torneiras juntas esvaziam o tanque em 20 minutos, em quanto tempo a primeira torneira esvazia 60% do tanque?

3 Um grupo de amigos se reuniu em um restaurante e, ao receber a conta, que era de R$ 600,00, dois deles estavam sem dinheiro, o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$ 10,00. Determine o número total de pessoas.

Exercícios propostos

Problemas gerais de 1º e 2º graus

1 Achar o número de alunos de uma classe, se $\frac{1}{3}$ deles está lendo, $\frac{1}{4}$ escrevendo e, os 20 restantes fazendo contas.

2 Qual é o número que aumentado de 20 torna-se o triplo do que era antes?

3 Um aluno, para se desfazer de sua biblioteca, deu a metade dos seus livros a um amigo, um quarto do resto a outro e ainda lhe sobraram 6 livros. Quantos livros possuía?

4 Que horas são, se o que ainda resta para terminar o dia é $\frac{2}{3}$ do que já passou?

5 Tenho R$ 53,00 em notas de R$ 5,00 e de R$ 1,00. Sabendo que o total de notas é 21, calcule o número de notas de cada valor.

6 A soma das idades de A e B é 35. Daqui a 5 anos, a idade de A será o dobro da de B. Calcular as idades de A e B.

7 O total de pontos obtido por uma aluna é um número constituído por dois algarismos. Invertendo-se a ordem dos algarismos e somando-se ao primeiro número, o número resultante é 187. O primeiro número dividido pelo segundo dá quociente 1 e resto 9. Calcule o número de pontos alcançados pela aluna.

8 Uma pessoa foi passar uns dias de férias em uma cidade. Verificou que, se gastasse R$ 80,00 por dia, poderia permanecer na cidade um dia a mais do que se gastasse R$ 90,00. Quanto possuía a pessoa?

9 Um copo cheio de água pesa 385 g; com $\frac{2}{3}$ da água pesa 310 g. Responda às questões a seguir.

a) Qual é o peso do copo vazio?

b) Qual é o peso do copo com $\frac{3}{5}$ da água?

10 **Fuvest** No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões, que ele começou a vender ao preço unitário de R$ 2,00. A partir das dez horas, reduziu o preço em 20% e, a partir das onze horas, passou a vender cada melão por R$ 1,30. No final da manhã, havia vendido todos os melões e recebido o total de R$ 461,00.

a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?

b) Sabendo que $\frac{5}{6}$ dos melões foram vendidos após as 10 horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

11 **Fuvest** Um motorista de táxi percorre diariamente 200 km. Sabe-se que o preço do litro de álcool é de R$ 38,00 e o de gasolina R$ 60,00. Um carro a álcool faz 7 km por litro e um carro a gasolina faz 8 km por litro. Qual a economia diária que o motorista terá se converter seu carro de gasolina para álcool?

12 **Fuvest** Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel e a metade do que sobra para a alimentação. Descontados o dinheiro do aluguel e o da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando, então, R$ 1.200,00 para gastos diversos. Qual é o meu salário?

13 **UFMG** Pai e filho, com 100 fichas cada um, começaram um jogo. O pai passava 6 fichas ao filho a cada partida que perdia e recebia dele 4 fichas quando ganhava. Depois de 20 partidas, o número de fichas do filho era três vezes a do pai. Quantas partidas o filho ganhou?

(a) 10
(b) 11
(c) 12
(d) 13
(e) 14

14 **FGV** Uma pessoa nasceu no século XIX e morreu no século XX, vivendo um total de 64 anos. Se o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de seu nascimento é igual ao dobro do número formado pelos dois últimos algarismos do ano de sua morte, então, no ano de 1900, essa pessoa tinha:

(a) 24 anos.
(b) 26 anos.
(c) 28 anos.
(d) 30 anos.
(e) 32 anos.

15 A diferença entre o quadrado e o triplo de um mesmo número é 10. Qual é esse número?

16 O produto de um número positivo pela sua sétima parte é igual a 28. Determine-o.

17 A soma do quadrado de um número com o seu triplo é igual a oito vezes o próprio número. Ache esse número.

18 A diferença entre um número e o seu inverso é igual a $\frac{8}{3}$. Qual é esse número?

19 Um número natural é tal que o produto do número que o precede pelo que o sucede é 6.399. Qual é esse número?

20 Um pai tem 54 anos e seu filho 12. Há quanto tempo a idade do pai foi o quadrado da do filho?

21 Duas torneiras podem, juntas, encher um recipiente em 18 horas. Qual o tempo que cada uma sozinha leva para encher esse recipiente, se a primeira emprega nessa operação 27 horas mais que a segunda?

22 A soma de dois números naturais é 32 e dividindo-se o maior pelo menor obtém-se o menor como quociente e 2 como resto. Quais são esses números?

23 **PM** Um terreno deve ser dividido em lotes iguais por certo número de herdeiros. Se houvesse três herdeiros a mais, cada lote diminuiria de 20 m^2, e se houvesse quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria de 50 m^2. O número de metros quadrados da área do terreno todo é:

(a) 1.600
(b) 1.400
(c) 1.200
(d) 1.100
(e) 900

24 Ache o ponto exato em que os dois ponteiros de um relógio se encontrarão depois das 3 horas da madrugada.

25 **CN** Analisando-se certa amostra de leite, verificou-se que a ele havia sido adicionado água. Um litro de leite adulterado pesa 1.015 g. Calcule quantos mL de água adicionada contém 1 litro dessa amostra, sabendo-se que o leite puro pesa 1.025 g por litro e a água 1.000 g por litro.

26 **ESPCEX** A soma do dividendo, divisor, quociente e resto de uma divisão é 145. O quociente é 3 e o resto o maior possível. Calcule o dividendo.

27 João disse a José:
"Dá-me um de teus discos que ficarei com o dobro do que tu passarás a ter."
José respondeu:
"Não. Dá-me um de teus discos que ficaremos com quantidades iguais."
Quantos discos possui cada um?

28 As medidas dos lados de um retângulo são números inteiros distintos. O perímetro e a área do retângulo exprimem-se pelo mesmo número. Determine esse número.

29 Candidatos realizando uma prova de 20 questões com 5 alternativas resolvem as questões que sabem e marcam ao acaso as respostas das questões que não sabem. Em média, os candidatos que acertam 16 das questões sabem resolver:

(a) 11
(b) 12
(c) 14
(d) 15
(e) 16

30 Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nessa classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nessa classe é:

(a) 7
(b) 8
(c) 9
(d) 10
(e) 11

TEXTO COMPLEMENTAR

Quadrados mágicos

São quadrados contendo numerais tais que a adição ou a multiplicação dos números contidos nas linhas, colunas ou diagonais são iguais.

Os quadrados mágicos aparentemente surgiram na China, por volta de 2200 a.C., com o imperador-engenheiro Yu, o Grande.

Observe o quadrado mágico ao lado:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Em qualquer linha, coluna ou diagonal, a soma dos números sempre será 15. Confira!

linha 2: $3 + 5 + 7 = 15$

coluna 3: $2 + 7 + 6 = 15$

diagonais: $8 + 5 + 2 = 4 + 5 + 6 = 15$

coluna 1: $4 + 3 + 8 = 15$

Os quadrados mágicos foram introduzidos na Europa no século XV, trazendo também todo o misticismo do Oriente. Na alquimia e astrologia, eles ganharam também valores místicos. Alguns quadrados mágicos gravados em uma placa de prata eram utilizados contra a peste.

Aparentemente uma curiosidade e brincadeira; no entanto, ganhou aplicações práticas e sérias no final do século XIX, em problemas de análise e probabilidades.

Na figura a seguir, temos um quadrado mágico multiplicativo formado por números inteiros positivos. Faça uma tentativa, calcule x! (Confira a resolução com os colegas.)

5		x
4		
	1	

RESUMINDO

Como resolver um problema?

Não podemos "memorizar" todas as soluções, pois os problemas são infinitamente variáveis. Vamos propor um método a ser seguido para a resolução de qualquer tipo de problema, seja ele geométrico, algébrico, físico ou químico.

Precisamos inicialmente compreender o problema, visualizar com clareza e gravar o seu objetivo. No problema que envolve demonstração, atente para a hipótese e a tese. Na compreensão, devemos separar as incógnitas para começar a montar relações entre essas variáveis e os dados (hipóteses) do problema.

Após relacionar as incógnitas e os dados do problema, obteremos um sistema de equações, uma equação do 1º, 2º ou qualquer outro grau, dependendo da natureza do problema.

Podemos resumir os principais elementos para uma abordagem adequada de um problema. Observe os quadros:

Compreensão do problema → Determinação da incógnita → Relação das incógnitas com os dados → Resolução das equações e verificação da solução

QUER SABER MAIS?

ARTIGO

- E. M. Zuffi e L. F. Feliciano. *"Uma sequência didática com uso de história da matemática: o método de multiplicação e divisão egípcio"*. *Revista de Educação Matemática*. Ano 9, Nºs 9-10 (2004-2005), 55-60 ©Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Exercícios complementares

Problemas gerais de 1º e 2º graus

1 Tem-se 21 cabeças e 50 pés entre galinhas e carneiros. Quantos animais há de cada espécie?

2 Em um depósito, há viaturas de 4 e de 6 rodas, ao todo 40 viaturas e 190 rodas. Quantas viaturas há de cada espécie?

3 Pedro tem 45 anos e João 15. Depois de quantos anos João terá um quarto da idade de Pedro?

4 Um pai tem atualmente o dobro da idade do filho. Há 11 anos, a idade do pai era o triplo da do filho. Quais são, atualmente, as idades de cada um?

5 Um número é formado por dois algarismos, cuja soma dos valores absolutos é 8. Se adicionarmos 18 a esse número, o resultado obtido será um número cuja representação decimal está na ordem inversa daquela com que figurava o número dado. Calcule o quadrado desse número.

6 Um tio tinha certa importância a distribuir entre seus sobrinhos e verificou que, dando a cada um R$ 30,00, faltariam-lhe R$ 70,00 e dando R$ 20,00 a cada um lhe sobrariam R$ 20,00. Quanto possuía o tio?

7 Um pedreiro foi admitido ao serviço nas seguintes condições: receberia R$ 20,00 cada dia que trabalhasse e pagaria uma multa de R$ 4,00 cada dia que faltasse. No fim de 30 dias, o pedreiro recebeu R$ 480,00. Quantos dias trabalhou?

8 Em uma árvore pousam pássaros. Se pousarem 2 pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro, em cada galho, fica um pássaro sem galho. Calcule o número de pássaros.

9 João disse a Pedro: "se você me der $\frac{1}{5}$ do dinheiro que possui, eu ficarei com uma quantia igual ao dobro do que lhe restará. Em contrapartida, se eu lhe der R$ 6.000,00 do meu dinheiro, nós ficaremos com quantias iguais". Quanto dinheiro possui cada um?

10 Em um restaurante, todas as pessoas de um grupo pediram um mesmo prato principal e uma mesma sobremesa. Com o prato principal, o grupo gastou R$ 56,00 e com a sobremesa R$ 35,00, mas cada sobremesa custou R$ 3,00 a menos do que o prato principal.

a) Qual o número de pessoas no grupo?
b) Qual o preço do prato principal?

11 As pessoas A, B, C e D possuem juntas R$ 2.718,00. Se A tivesse o dobro do que tem, B tivesse a metade do que tem, C tivesse R$ 10,00 a mais do que tem e D tivesse R$ 10,00 a menos do que tem, então todos teriam a mesma importância. Quanto possui cada uma das quatro pessoas?

12 Uma senhora comprou uma caixa de bombons para seus dois filhos. Um deles tirou para si metade dos bombons da caixa. Mais tarde, o outro menino também tirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa. Restaram 10 bombons. Calcule quantos bombons havia inicialmente na caixa?

13 Um ciclista movimenta-se em uma subida a uma velocidade constante, completando 6 pedaladas por minuto. No mecanismo de tração de sua bicicleta, a coroa do pedal possui um raio três vezes maior que o raio da catraca da roda. Em 1 minuto, quantas voltas terá dado a roda da bicicleta?

(a) 27
(b) 18
(c) 15
(d) 6
(e) 2

14 **FCC** Um Corcel e um Opala percorrem no mesmo sentido pistas paralelas distantes de $\frac{1}{2}$ quilômetro. Num certo instante, a distância entre os carros é de x quilômetros, estando o Opala atrás do Corcel. Decorridos 40 minutos, a distância entre os carros é novamente de x quilômetros, porém o Opala está à frente do Corcel. Se a velocidade do Corcel é de 60 quilômetros por hora, a velocidade do Opala, dada em quilômetros por hora, é:

(a) $3\left(20+\sqrt{4x^2-1}\right)$
(b) $3\dfrac{\left(40+\sqrt{4x^2-1}\right)}{2}$
(c) $2\dfrac{\left(40+\sqrt{4x^2-1}\right)}{3}$
(d) $2\dfrac{\left(40+\sqrt{x^2-1}\right)}{3}$
(e) $3\dfrac{\left(40+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}$

15 **FEI** O tempo de voo de um piloto será, daqui a 3 anos, um quadrado perfeito e, há três anos, era precisamente a raiz quadrada desse quadrado. Qual o tempo de voo do piloto?

16 **FEI** Se "gato e meio comem rato e meio em minuto e meio":

a) em quanto tempo um gato come dois ratos?
b) quantos gatos comem 60 ratos em 30 minutos?

17 **Unicamp** Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após somados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno tenha tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

18 **Vunesp** Em uma competição, uma pessoa atira 60 vezes, ganha 3 pontos toda vez que acerta o alvo e perde 1 ponto quando erra. Se dois competidores obtêm, respectivamente, 156 e 96 pontos, a diferença dos números de acertos desses dois competidores é:

(a) 20
(b) 18
(c) 16
(d) 15
(e) 12

19 **Vunesp** Uma certa importância deve ser dividida entre 10 pessoas em partes iguais. Se a partilha fosse feita somente entre 8 dessas pessoas, cada uma delas receberia R$ 5.000,00 a mais. Calcular a importância.

20 **Vunesp** Numa sala de aula, a quantidade de pessoas estrangeiras é igual à quantidade de pessoas brasileiras. O número de mulheres brasileiras é o dobro do número de homens estrangeiros. Se 2 homens são brasileiros e 11 pessoas são mulheres, então o número de pessoas dessa sala é:

(a) 14
(b) 15
(c) 16
(d) 17
(e) 18

21 **Fatec** Um professor elaborou 180 exercícios, que pretendia dividir igualmente entre os alunos de uma classe. Como no dia da distribuição dos exercícios faltaram 9 alunos, cada um dos presentes recebeu 1 exercício a mais. O número de alunos dessa classe é:

(a) 42
(b) 45
(c) 48
(d) 50
(e) 52

22 **Aman** Um trecho rodoviário deve ser dividido em lotes iguais, quanto à quilometragem, a certo número de empreiteiros que se candidatarão para executar a terraplenagem. Se há 5 empreiteiros a mais, cada lote diminui de 20 km e se há 6 empreiteiros a menos cada lote aumenta de 57 km. A extensão, em km, do trecho em questão é igual a:

(a) 855
(b) 960
(c) 969
(d) 1.064
(e) 1.140

23 O produto de dois números naturais consecutivos é 240. Determine-os.

24 A soma dos inversos de dois números naturais consecutivos é $\frac{9}{20}$. Quais são esses números?

25 Uma fração tem o denominador superando de 2 o numerador. Somando 2 ao numerador e 1 ao denominador, a fração aumenta de $\frac{7}{30}$. Determine-a.

26 O dividendo de uma divisão é 1.235. Sabendo que o divisor é igual ao quociente e que o resto é $\frac{2}{7}$ do divisor, determine o quociente.

27 O divisor de uma divisão excede de 5 o quociente que, por sua vez, ultrapassa o resto também de 5. Determine o quociente dessa divisão, sabendo que o dividendo é 1.075.

28 A idade de uma criança daqui a 6 anos será o quadrado da idade que tinha há 6 anos. Qual a idade atual dessa criança?

29 Determine três números ímpares consecutivos sabendo que o seu produto é igual a sete vezes a sua soma.

30 Um homem fez uma viagem de 240 km. Se caminhasse mais 4 km por dia do que realmente caminha, teria gasto dois dias menos na viagem. Quantos dias ele gastou na viagem e quantos quilômetros andou por dia?

31 Dois ciclistas partem ao mesmo tempo em direção a uma vila distante 90 km. O primeiro percorre 1 km por hora a mais que o segundo e chega ao destino uma hora antes dele. Qual a velocidade de cada um?

32 Mauro percorreu 90 km em 7 horas, andando os primeiros 18 km a pé e o restante em bicicleta. Sabendo que Mauro, de bicicleta, faz 12 km por hora mais que a pé, quantos quilômetros ele faz, por hora, a pé?

33 Um barco percorre 40 km subindo um rio, durante um certo tempo. Depois, faz o mesmo percurso para descer, gastando 4 horas a menos. Qual é a velocidade do barco, sabendo-se que a velocidade da correnteza é de 16 km/h?

34 Um grupo de turistas alugou um ônibus por R$ 1.500,00. Dois deles não puderam viajar e, em consequência, a despesa de cada um dos outros aumentou de R$ 25,00. Quantos eram os turistas? Qual foi a despesa de cada um?

35 Certa pessoa destinou R$ 12.000,00 para serem distribuídos igualmente entre um certo número de órfãos. Tendo dois deles desistido de suas partes, as dos demais foram acrescidas de R$ 1.600,00 cada uma. Qual o número de órfãos?

36 Ache dois números tais que a sua soma exceda de 4 a diferença entre o maior e o menor, e que o seu produto exceda sua soma de 3.

37 Determine as idades de Pedro e Paulo, sabendo que a sua diferença é 4 e seu produto 32.

38 Decomponha o número 28 em dois fatores tais que a sua soma seja igual a 11.

39 **CN** Achar o lado do quadrado em que o número que dá a área excede o número que dá o perímetro de 5.

40 **EsPCEx** Numa festa, todos os participantes cumprimentam-se. Houve 66 apertos de mão. Portanto, havia na festa:

(a) 12 pessoas.
(b) 33 pessoas.
(c) 30 pessoas.
(d) 10 pessoas.
(e) n.d.a.

41 **PM** Um terreno de forma retangular de área 250 m² tem o comprimento excedendo em 15 metros a largura; então, as dimensões desse terreno podem ser determinadas pela equação:
(a) $x^2 + 15x - 250 = 0$
(b) $x^2 - 15x - 250 = 0$
(c) $x^2 + 250x + 15 = 0$
(d) $x^2 - 250x + 15 = 0$

42 Duas torneiras enchem um tanque em 15 minutos. Se abrirmos a 2ª torneira 5 minutos depois da 1ª, o tanque será cheio em 18 minutos. Quanto tempo levará cada torneira para encher o tanque?

43 Três litros de gasolina são misturados a 5 litros de querosene. Quantos litros de querosene devem ser adicionados à mistura para que $\frac{3}{4}$ do resultado sejam de querosene?

44 Um tonel contém uma mistura de água e vinho: o vinho ocupa 40 litros mais do que a metade do tonel e a água 80 litros mais que a terça parte do tonel. Qual a capacidade do tonel?

45 Duas vasilhas contêm, em conjunto, 36 litros de água. Se transferíssemos para a que tem menos água $\frac{2}{5}$ da água contida na outra, ficariam ambas com a mesma quantidade de água. Quantos litros de água contém cada vasilha?

46 De uma cidade parte um automóvel com a velocidade de 60 km/h. Dez minutos depois, parte um segundo automóvel que faz 80 km/h. Depois de quanto tempo o segundo automóvel encontrará o primeiro?

47 Um bote tem uma velocidade de 25 km/h e pode navegar certa distância rio abaixo em $\frac{2}{3}$ do tempo que leva para navegar a mesma distância rio acima. Qual a velocidade da correnteza do rio?

48 A velocidade da correnteza de um rio é de 2 km/h. O tempo que um barco gasta para percorrer 28 km a favor da correnteza (rio abaixo) é o mesmo que o barco leva para percorrer 20 km contra a correnteza (rio acima). Qual a velocidade do barco?

49 Que horas são, quando os dois ponteiros de um relógio estão, um no prolongamento do outro, entre 4 e 5 horas?

50 Uma lebre dá 4 saltos, enquanto um galo dá três; mas 2 saltos de galo equivalem a 3 de lebre. Estando a lebre adiantada 50 saltos, quantos saltos precisa dar o galo para alcançá-la?

51 Uma raposa está adiantada de 40 pulos de um cão que a persegue. Enquanto o cão dá 4 pulos, a raposa dá 5; mas 3 pulos do cão valem 5 pulos da raposa. Quantos pulos dará o cão para alcançar a raposa?

52 **EsPCEx** Dona Sebastiana é mãe de Maria Clara. Há 2 anos, dona Sebastiana era 6 vezes mais velha que sua filha. Daqui a 18 anos será apenas 2 vezes mais velha que Maria Clara. Quantos anos tem dona Sebastiana?

53 **EsPCEx** Dois pintores A e B são capazes de pintar um muro em 20 e 24 horas de trabalho, respectivamente. Em cada metro quadrado, o pintor B emprega 5 minutos a mais que o pintor A. Determinar, em metros quadrados, a área do muro.

54 **EsPCEx** A soma dos valores absolutos dos algarismos de um número de dois algarismos é 12. Invertendo-se a ordem dos algarismos, obtém-se $\frac{4}{7}$ do primeiro número. Calcular o produto dos valores absolutos dos algarismos do número encontrado.

55 **EsPCEx** A diferença entre dois números naturais é 332. Dividindo-se o maior pelo menor, obtém-se o quociente 9 e o resto maior possível. Calcular o número maior.

56 **EsPCEx** Eu tenho duas vezes a idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que eu tenho, a soma de nossas idades será 45 anos. Quantos anos eu tenho?

57 **EsPCEx** A colocação de um algarismo 3 à direita de um número equivaleu a aumentar esse número de 201 unidades. Qual é esse número?

58 **CN** Se multiplicarmos o número inteiro e positivo N por outro número inteiro e positivo de 2 algarismos, invertemos a ordem dos algarismos desse segundo número, e o resultado aumenta de 207. A soma dos algarismos que constituem o número N dá:
(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

59 Em um conjunto de 30 pessoas, 5 são altas e gordas, 11 são baixas e 13 são gordas. Quantas são as altas e magras? Quantas são as baixas e magras?

60 Anteontem Henrique tinha 18 anos. No ano que vem, ele vai fazer 21 anos. Que dia é hoje?

61 A diferença entre dois quadrados perfeitos é 92. Determine-os.

62 Em uma prova realizada em uma escola, foram reprovados 25% dos alunos que a fizeram. Para os 8 alunos que não a fizeram, houve uma 2ª chamada na qual só 6 alunos foram aprovados. Qual a porcentagem de aprovação de toda a turma?

63 **IME** A coleção de selos de Roberto está dividida em 3 volumes. Dois décimos do total de selos estão no 1º volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

64 Uma lesma começa a escalar verticalmente um edifício de 50 metros de altura da seguinte forma: em 1 hora sobe 5 metros e, depois disso, para para descansar por 1 hora, escorrega 2 metros; em seguida, volta a repetir esse procedimento. Quantos metros ela já terá subido em 15 horas? Em quantas horas ela atingirá o topo do edifício?

65 Em um certo país, a unidade monetária é o pila. Há notas de 1 pila e moedas de meio pila, um terço de pila, um quarto de pila e um quinto de pila. Qual a maior quantia, em pilas, que um cidadão pode ter em moedas sem que possa juntar algumas delas para formar exatamente um pila?

66 Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água apresenta 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados?
(Lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma)

(a) 15 L
(b) 45 L
(c) 75 L
(d) 80 L
(e) 30 L

67 Um fazendeiro tinha 24 vacas e ração para alimentá-las por 60 dias. Entretanto, 10 dias depois, ele comprou mais 6 vacas e 10 dias depois dessa compra ele vendeu 20 vacas. Por mais quantos dias, após essa venda, ele pode alimentar o gado com a ração restante?

(a) 50
(b) 60
(c) 70
(d) 80
(e) 90

68 Duas melancias custam o mesmo que nove laranjas mais seis bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de quantas melancias?

(a) 3
(b) 4
(c) 6
(d) 5
(e) 2

69 O matemático Augustus De Morgan, nascido na primeira metade do século XIX, propôs o seguinte enigma relativo à sua idade:
"No ano x^2 eu tinha x anos"
Em que ano nasceu De Morgan?

70 Há muito tempo, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem-executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado seu imediato dessa tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha, um deles teve a ideia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, esse marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma ideia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa.
Pela manhã, os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas do baú em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada um dos marinheiros a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelo seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiro foi de $\frac{29}{17}$, então o número de moedas que havia originalmente no baú era:

(a) 99
(b) 95
(c) 135
(d) 87
(e) n.d.a.

5 Porcentagem

FRENTE 2

Porcentagem é uma razão $\left(\frac{1}{100}\right)$ cotidianamente utilizada para expressar valores. Seu surgimento ocorreu, provavelmente, por volta do século I a.C., em Roma, como uma forma de cobrar impostos. Por volta do século XV, por causa da intensificação comercial, os matemáticos fixaram uma base para o cálculo das porcentagens (100). Até essa época, o símbolo atual de porcentagem não era utilizado, ele só começou a ser utilizado por volta do século XVII.

Atualmente, a porcentagem é extremamente importante para o mercado financeiro, sendo base para diversos cálculos de perdas, ganhos e movimentações financeiras.

Evolução do símbolo.

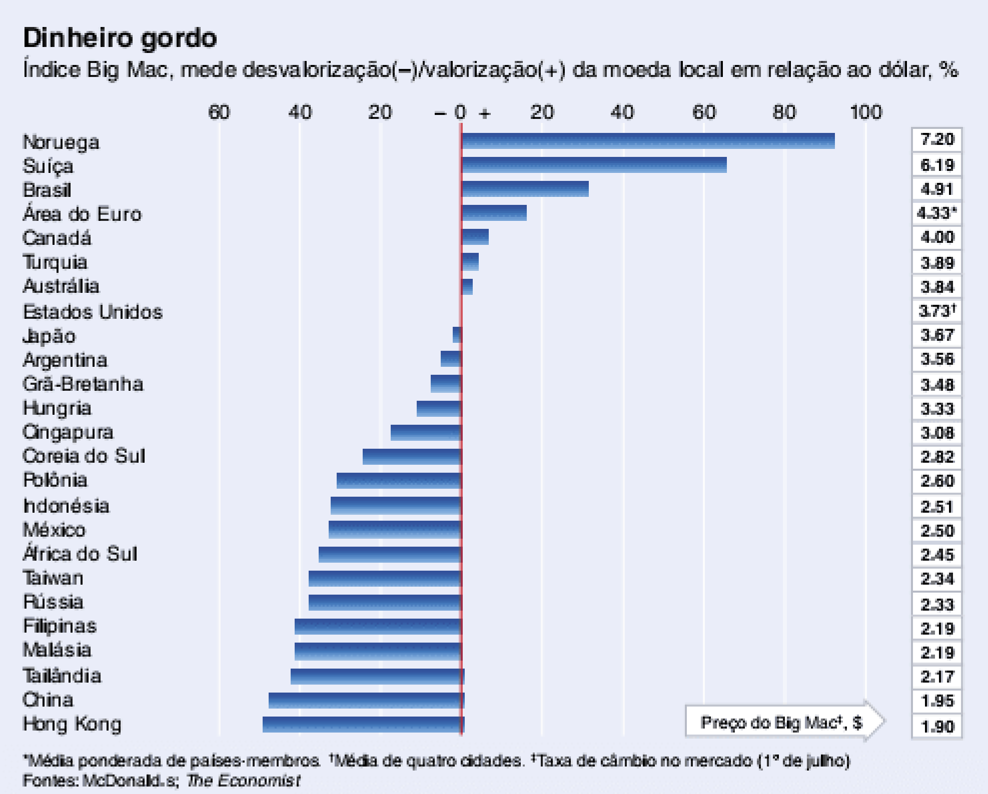


Gráfico que mostra a valorização (%) de uma moeda em relação ao dólar, baseado no preço de um Big Mac (http://www.economist.com/).

Porcentagem

Conceito

Porcentagem é uma fração centesimal representada por P%, tal que $30\% = \frac{30}{100}$ (ou 0,3).

Exemplo 1

$$42\% = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

Exemplo 2

$$15{,}3\% = \frac{15{,}3}{100} = 0{,}153$$

Exemplo 3

$$135\% = \frac{135}{100} = 1{,}35$$

Podemos transformar algumas frações para a notação de porcentagem. Observe os exemplos:

Exemplo 4

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Exemplo 5

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 33{,}3...\%$$

Exemplo 6

$$\frac{3}{2} = \frac{150}{100} = 150\%$$

Observe os outros exemplos:

Exemplo 7

$$(5\%)^2 = \left(\frac{5}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{400} = 0{,}25\%$$

Exemplo 8

$$\sqrt{25\%} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Exemplo 9

$$(10\%).(15\%) = \frac{10}{100} . \frac{15}{100} = \frac{3}{200} = \frac{1{,}5}{100} = 1{,}5\%$$

Para solucionarmos os problemas deste capítulo, utilizaremos a ideia da parte pelo todo.

Se em uma coleção de 100 objetos tomarmos 20 elementos, teremos então 20 em 100, ou seja, $\frac{20}{100} = 20\%$. Em uma nova coleção de 80 objetos, se tomarmos 20 elementos, teremos 20 em 80, ou seja, $\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Isso significa que comparativamente 20 elementos de um total de 80 é equivalente a 25 elementos em um total de 100.

Comparar com 100 é mais simples que comparar com 80.

Observe:

Exercícios resolvidos

1 **Fuvest** Um lote de livros foi impresso em duas gráficas A e B, sendo que A imprimiu 70% dos livros e B 30%. Sabe-se que 3% dos livros impressos em A e 2% dos livros impressos em B são defeituosos. Qual a porcentagem dos livros defeituosos do lote?

Resolução:

Considere X o total de livros do lote. Em A, temos $70\% \cdot X = 0{,}7X$ e em B, temos $30\%..X = 0{,}3X$.
Vamos contabilizar os defeituosos:

$$3\%.\,0{,}7X = \frac{3}{100}.\,0{,}7X = 0{,}021X$$

$$2\%.\,0{,}3X = \frac{2}{100}.\,0{,}3X = 0{,}006X$$

Totalizando os defeituosos, temos:
$0{,}021X + 0{,}006X = 0{,}027X = 2{,}7\% \cdot X$
2,7% do total.

2 **Unicamp** Quando o café custa R$ 12,00 o quilo, seu preço representa 40% do preço do quilo de outra marca de café. Qual o preço do quilo desse café?

Resolução:

Seja X o preço do quilo do café, assim $12 = 0{,}4X \therefore$
$\therefore\ X = \frac{12}{0{,}4} = 30.$ *O preço do quilo é R$ 30,00.*

3 **Unicamp** Uma quantidade de 6.240 litros de água apresentava um índice de salinidade de 12%. Devido à evaporação, esse índice subiu para 18%. Calcule em litros a quantidade evaporada de água.

Resolução:

Em 6.240 litros, temos 12% de sal, ou seja, $12\% \cdot 6.240 = 748{,}8$ *(massa de sal). Essa massa corresponde à salinidade de 18% com um novo volume de água (X).*
Assim: $18\% \cdot X = 748{,}8 \therefore X = 4.160$ *L, a diferença é* $(6.240 - 4.160) = 2.080$ *L.*

Lucro e prejuízo

Vamos resolver alguns problemas básicos envolvendo lucro e prejuízo em transações comerciais simples. Observe os exemplos:

Exercícios resolvidos

4 Uma pessoa compra um terreno por R$ 20.000,00 e o vende com lucro de R$ 4.000,00. Qual a porcentagem do lucro?

Resolução:

O preço de custo foi de R$ 20.000,00 e o preço de venda foi de R$ 24.000,00. Essa pessoa obteve um lucro de 4.000,00 sobre o seu custo, assim: $\frac{4.000}{20.000} = 20\%$. *20% de lucro sobre o custo.*

5 Uma pessoa revende um automóvel por R$ 15.000,00, lucrando 25% sobre o preço de compra. Por quanto havia comprado o automóvel?

Resolução:

Seja X o preço de compra, com um lucro de 25% sobre a compra, temos $X + 25\% \cdot X = 1{,}25X = 15.000 \therefore$ $\therefore X = 12.000$.
O preço de compra foi R$ 12.000,00.

6 Por R$ 750,00 vendi minha máquina fotográfica com 25% de prejuízo sobre o seu custo. Por quanto comprei a máquina?

Resolução:

Seja X o preço de custo e com o prejuízo de 25%, temos: $X - 25\% \cdot X = 0{,}75X = 750 \therefore X = 1.000$.
O preço de compra foi R$ 1.000,00.

Observação: *Temos uma quantia X e podemos ter lucro ou prejuízo sobre esse valor, observe:*
Lucro de 10% $\Rightarrow X + 10\% \cdot X = 1{,}1X$
Prejuízo de 10% $\Rightarrow X - 10\% \cdot X = 0{,}9X$

Juros simples

Considere C_0 o capital inicial que será submetido a um processo de juros simples com a taxa de i% por período.

Por ser um processo de juros simples, a cada período acrescentaremos a mesma quantia, ou seja, juros constantes. Assim:

Juros: $i\% \cdot C_0$ (constante)
1º período: $C_0 + i\%C_0$
2º período: $C_0 + 2i\%C_0$
3º período: $C_0 + 3i\%C_0$
....
nº período: $C_0 + \mathbf{n}i\%C_0$

Trata-se de uma progressão aritmética, generalizando:

$$C_n = C_0 + \mathbf{n} \cdot i\% \cdot C_0$$

ATENÇÃO!

A equação dos juros simples é da forma linear, respeitando uma progressão aritmética, assim:
$C_n = C_0 + n \,.\, i\% \,.\, C_0$

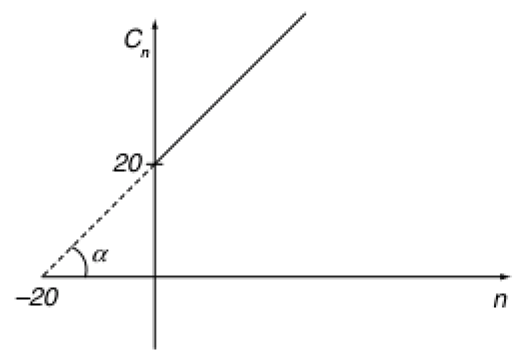
Observe os exemplos:

Exercícios resolvidos

7 Temos uma quantia de R$ 20,00 que será aplicada a juros simples de 5% ao mês. Determine a equação que fornece os montantes acumulados período a período.

Resolução:

$C_n = 20 + n \cdot 5\% \cdot 20 \therefore C_n = 20 + n$
Temos como gráfico uma reta:



O crescimento do capital é linear e a tgα fornece-nos o crescimento desse capital em $\frac{R\$}{mês}$.

8 Um capital de R$ 800,00 a 30% ao mês rendeu R$ 720,00. Por quanto tempo esse capital ficou aplicado?

Resolução:

O juro acumulado foi de R$ 720,00 e $30\% \cdot 800 = R\$\ 240{,}00$.
Para render o valor descrito, tivemos 3 meses de aplicação.
Poderíamos ter usado a equação:
$J = C \cdot i \cdot t \therefore 720 = 800 \cdot 30\% \cdot t \therefore 720 = 240t \therefore t = 3$ *meses*

ATENÇÃO!

Da equação dos juros simples:
$C_n = C_0 + C_0 \,.\, i\% \cdot n \Rightarrow C_n - C_0 = C_0 \,.\, i\% \cdot n$
$C_n - C_0$ representa os juros acumulados
$C_n - C_0 =$ juros
$C_0 =$ capital inicial
$J = C \cdot i \cdot t$

Juros compostos

Vamos submeter um capital ou uma dívida ao regime de juros compostos, também conhecido como juros sobre juros. Após cada período, o juro sofre um aumento ou um decréscimo. Observe a tabela:

Período	Capital acumulado
n = 0	C_0
n = 1	$C_0 + i\% \,.\, C_0 = C_0 \,.\, (1 + i\%)$
n = 2	$C_0(1 + i\%) + i\%C_0(1 + i\%) = C_0(1 + i\%)^2$
n = 3	$C_0(1 + i\%)^2 + i\%C_0(1 + i\%)^2 = C_0(1 + i\%)^3$
....	....
n	$C_n = C_0 \,.\, (1 + i\%)^n$

Tab. 1 Equação dos juros compostos.

ATENÇÃO!

A equação dos juros compostos é da forma exponencial, respeitando uma progressão geométrica, assim:
$C_n = C_0(1 + i\%)^n$

Observe os exemplos:

Exercícios resolvidos

9 O valor de um carro importado aumenta 10% ao ano. Quanto custará o carro daqui a 3 anos se hoje ele custa R$ 80.000,00?

Resolução:

$C_3 = 80.000(1 + 10\%)^3 = 80.000(1,1)^3 = 106.480,00$

10 Um comerciante aumenta o preço de um produto em 20%. Posteriormente, prevendo a queda nas vendas, ele resolve dar um desconto de 20% no mesmo produto. O que acontece com o preço desse produto, se compararmos ao preço inicial?

Resolução:

Seja P o preço do produto, com o aumento temos $P(1 + 0,2)$ e com o desconto de 20% temos:
$P(1 + 0,2) - 0,2P(1 + 0,2) = P(1 + 0,2)(1 - 0,2) = 0,96.$
$P = P - 0,04P \Rightarrow$ *o produto sofreu um decréscimo de 4%.*

11 Em um certo país, a inflação é de 10% ao mês. Qual a inflação acumulada no ano?

Resolução:

Considerando juros simples, a inflação acumulada será de 120%. Mas as transações do comércio são feitas com juros compostos. Observe a análise:
Um produto que custava X no começo do ano, após 12 meses custará $X(1 + 10\%)^{12} = X(1,1)^{12}$.
Temos um aumento de $X(1,1)^{12} - X = X \cdot [(1,1)^{12} - 1]$ em relação ao valor inicial e a porcentagem da inflação será de:

$$\frac{X.[(1,1)^{12} - 1]}{X} = (1,1)^{12} - 1 \cong 2,138 \cong 214\%$$

12 Um certo tipo de aplicação triplica o capital em três meses. Determine a taxa de juros aplicada.

Resolução:

Seja X o capital inicial, para se triplicar o capital, o ganho em juros foi de 2X, ou seja $3X = X(1 + i\%)^3$.

$$\sqrt[3]{3} = 1 + i\% \therefore i\% = \sqrt[3]{3} - 1 \therefore i\% = 1,44 - 1 \cong 0,44 \cong 44\%$$

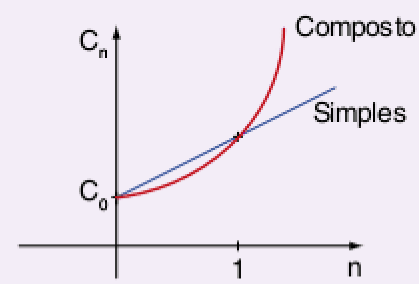
Fazendo uma comparação com juros simples, obtém-se:

$$3X = X + X\,.\,3i\% \therefore 2X = 3Xi\% \therefore i\% = \frac{2}{3} \cong 66\%$$

Essa diferença entre as taxas era esperada. Como nos juros compostos os juros são crescentes, as taxas de juros são menores do que aquelas de juros constantes.

ATENÇÃO!

Vamos comparar o crescimento linear dos juros simples com o crescimento exponencial dos juros compostos.



Revisando

1 Em uma sala estão presentes 100 pessoas das quais 99% são homens. Quantas pessoas devem sair da sala para que a porcentagem de homens seja de 98%?

2 Quatro quilos de uma liga de prata e cobre contêm 5% de prata. Que massa de cobre deve ser adicionada para obtermos uma liga contendo 2% de prata?

3 Um relojoeiro vendeu dois relógios pelo mesmo preço ganhando 20% em um deles e perdendo 20% no outro. Se ele perdeu R$ 8,00 na transação, qual foi o valor do relógio mais caro?

4 O preço de venda de um vestido é tal que o lucro é 20% deste preço. Aumentando-se o preço de 20 reais, o lucro passa a ser um terço do novo preço de venda. Determine o preço de venda do vestido.

5 Um produto sofreu três depreciações sucessivas de 10%. Qual foi a sua depreciação total?

6 Um produto sofreu três aumentos de preço sucessivos de 10%. Qual foi o seu aumento total?

Exercícios propostos

Noções de porcentagem

1 Em um grupo de 400 pessoas, 30% são homens e 65% das mulheres têm mais de 20 anos. Quantas mulheres ainda não comemoraram seu 20º aniversário?

2 Suponhamos que em 2009 uma universidade tivesse tido no vestibular, para os seus diversos cursos, uma média de 3,60 candidatos por vaga oferecida. Se para o vestibular de 2010 o número de vagas aumentou em 20% e o número de candidatos aumentou em 10%, qual a média de candidatos por vaga que essa universidade teve?

3 **Fuvest** A porcentagem de fumantes de uma cidade é 32%. Se 3 em cada 11 fumantes deixarem de fumar, o número de fumantes ficará reduzido a 12.800. Calcule:

a) o número de fumantes da cidade.
b) o número de habitantes da cidade.

4 **EN** Uma senhora extremamente gorda resolveu fazer uma dieta e perdeu em três meses 30% de seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40%. No decorrer desse semestre, o peso da senhora:

(a) aumentou 16%.
(b) aumentou 10%.
(c) manteve seu valor inicial.
(d) diminuiu 10%.
(e) diminuiu 2%.

5 **FCC** Por $\frac{2}{3}$ de um lote de peças iguais, um comerciante pagou R$ 8.000,00 a mais do que pagaria pelos $\frac{2}{5}$ do mesmo lote. Qual era o preço do lote todo?

(a) R$ 30.000,00
(b) R$ 27.000,00
(c) R$ 20.000,00
(d) R$ 18.000,00
(e) R$ 15.000,00

6 **Faap** Em 20 kg de uma liga com 30% de cobre, quantos quilos se deve acrescentar desse material para que aquela porcentagem passe para 40%?

7 **Fuvest** 95% da massa de uma melancia de 10 kg é constituída por água. A fruta é submetida a um processo de desidratação (que elimina apenas água) até que a participação da água na massa da melancia se reduza a 90%. A massa da melancia após esse processo de desidratação será igual a:

(a) $\frac{5}{9}$ kg
(b) $\frac{9}{5}$ kg
(c) 5 kg
(d) 9 kg
(e) 9,5 kg

8 Um recipiente contém uma mistura de leite natural e de leite de soja em um total de 200 litros, dos quais 25% são de leite natural. Qual é a quantidade de leite de soja que deve ser acrescentada a essa mistura para que ela contenha 20% de leite natural?

Problemas envolvendo cálculo de juros, lucro, prejuízo e desconto

9 Analise as afirmações e coloque V para verdadeira e F para falsa.

- [ ] 1.000% de 2 é 2.000.
- [ ] $12\frac{1}{2}$% de 8 é 1.
- [ ] 0,75% de 264 é 0,198.
- [ ] 96 é $37\frac{1}{2}$% de 256.
- [ ] 8 é 2% de 400.

10 A "média" de café com leite oferecida pelos bares é composta de 75% de leite e 25% de café. Se em um copo de 300 mL forem colocados 20 mL de água pura e o restante for completado de acordo com a proporção exata, então a quantidade de leite oferecida a menos é igual a:

(a) 5 mL
(b) 10 mL
(c) 15 mL
(d) 20 mL
(e) 25 mL

11 Analise as afirmações:
Coloque V para verdadeira e F para falsa.

- [ ] Se em um produto de três números positivos aumentarmos dois deles de 20% e diminuirmos o outro em 40%, este produto não se alterará.
- [ ] Se a aresta de um cubo for duplicada, o percentual de aumento no volume do cubo será de 700%.
- [ ] Se um aluno descuidadamente dividir um número por 5 ao invés de multiplicá-lo por 5, o erro percentual cometido será de 96%.

Juros, lucros, prejuízos e descontos

12 **FEI** Uma loja vende um liquidificador por R$ 16,00 para pagamento à vista ou em duas prestações fixas de R$ 9,00, uma entrada e outra para 30 dias. A taxa de juros mensais cobrada pela firma está no intervalo:

(a) de 10% a 14% ao mês.
(b) de 15% a 19% ao mês.
(c) de 20% a 24% ao mês.
(d) de 25% a 29% ao mês.
(e) de mais de 30% ao mês.

13 **Fuvest** Um automóvel consumia trimetil-2,2,4-pentano puro, ao preço de R$ 5/L, e percorria 12 km/L. Posteriormente, passou a consumir a mistura de 80% de trimetil-2,2,4-pentano com 20% de álcool etílico, 20% mais cara (R$ 6/L), e a percorrer 10 km/L. O aumento percentual do custo do km percorrido foi de:

(a) 25%
(b) 40%
(c) 44%
(d) 60%
(e) 72%

14 Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, o seu preço para o importador é de R$ 19.500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro para o importador?

(a) R$ 22.500,00
(b) R$ 24.000,00
(c) R$ 25.350,00
(d) R$ 31.200,00
(e) R$ 39.000,00

15 Uma empresa vende uma mercadoria e vai receber o pagamento em duas prestações. A primeira no ato da venda e a segunda trinta dias depois. Supondo que o preço à vista da mercadoria seja C reais, que o primeiro pagamento seja $\frac{C}{3}$ reais e que a inflação nesses 30 dias seja de 25%, calcule o valor que deve ser cobrado no segundo pagamento de modo que compense exatamente a inflação do período.

16 **UFMG** Uma loja oferece duas formas de pagamento a seus clientes: 10% de desconto sobre o preço anunciado se o pagamento for à vista, ou o preço anunciado dividido em duas parcelas iguais: a 1ª no ato da compra e a 2ª no trigésimo dia após a compra.
A taxa mensal de juros efetivamente cobrada, no pagamento parcelado, é de:

(a) 10%
(b) 15%
(c) 25%
(d) 30%
(e) 50%

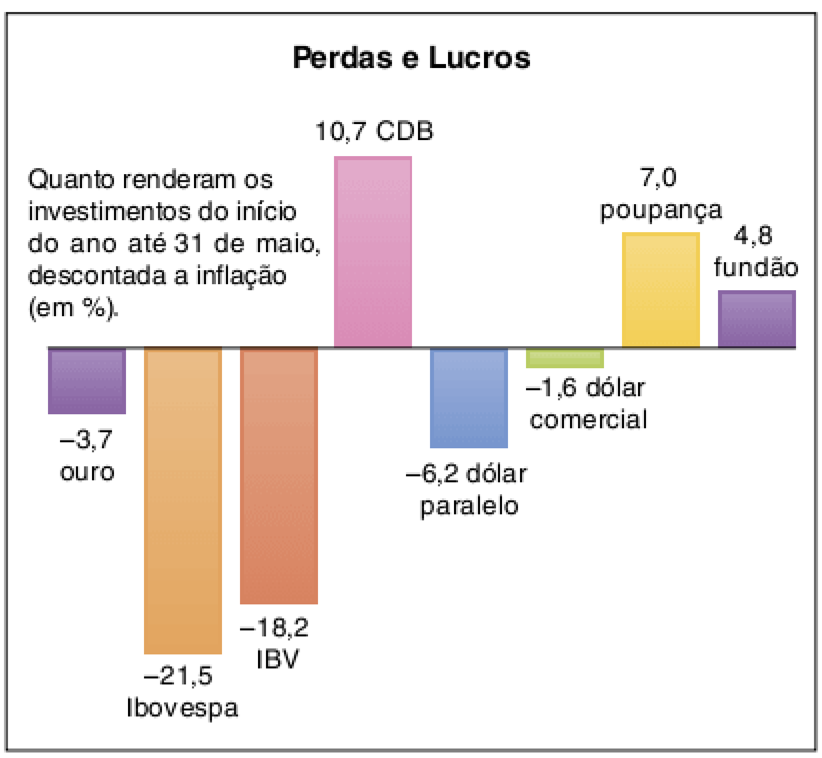
17 Se a taxa de inflação mensal for de 10% durante 12 meses seguidos, determine a taxa de inflação anual.

18 **FEI** Fiz a compra de um aparelho numa loja em liquidação que dava 10% de desconto sobre o preço de qualquer mercadoria. Estava para pagar a conta, com o referido desconto, quando encontrei na gerência um amigo de infância que, em nome da velha amizade, deu-me um desconto de 10% sobre o que estava prestes a pagar. Paguei, então, a importância de R$ 810.000,00. Qual era o preço inicial do aparelho?

(a) R$ 830.000,00
(b) R$ 900.000,00
(c) R$ 1.000.000,00
(d) R$ 1.110.000,00
(e) R$ 1.200.000,00

19 **Fuvest** Uma certa mercadoria é vendida nas lojas A e B, sendo R$ 20,00 mais cara em B. Se a loja B oferecesse um desconto de 10%, o preço nas duas lojas seria o mesmo. Qual é o preço na loja A?

20 **Vunesp** O quadro, reproduzido da revista *Veja* (07.06.95), mostra quanto renderam os investimentos do início de 1995 a 31 de maio desse ano.



Fonte: Andima.

Considerando esses dados, suponhamos que uma pessoa, no primeiro dia útil de 1995, tenha investido na poupança metade das economias que possuía e investido no dólar paralelo a outra metade. Se o rendimento global obtido por ela no período foi de R$ 400,00, quanto investiu ao todo?

21 Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 30% de desconto sobre o preço da tabela ou no cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista sai por R$ 7.000,00, no cartão sairá por:

(a) R$ 13.000,00
(b) R$ 11.000,00
(c) R$ 10.010,00
(d) R$ 9.800,00
(e) R$ 7.700,00

22 Suponha que todos os preços venham subindo 30% ao mês nos últimos meses e continuem assim nos próximos meses. Calcule:

a) quanto custará, daqui a 60 dias, um objeto que hoje custa R$ 27.300,00.
b) quanto custava esse mesmo objeto há um mês.

23 Uma pessoa empregou todo o seu capital da seguinte maneira: metade a 4% ao ano; um terço a 10% ao ano e a parte restante a uma taxa tal que o seu lucro total, no fim de um ano, foi de $7\frac{1}{3}$% do capital. Qual é essa taxa?

24 Um negociante ao falir só pode pagar $\frac{17}{36}$ do que devia. Se possuísse mais R$ 23.600,00, poderia pagar 80% da dívida. Quanto ele devia?

25 Qual o preço de custo de uma mercadoria vendida por R$ 125,00, com prejuízo de 20% sobre o preço de venda?

26 Comprou-se certa mercadoria. Sobre o custo, pagou-se 5% de imposto e 3% de frete. Sendo a mercadoria vendida por R$ 27,00, obtém-se um lucro de 25%. Por quanto foi comprada?

27 Um objeto foi revendido por R$ 408,00 com um prejuízo de 4%. Determine o prejuízo.

28 **Mackenzie** Numa loja, a diferença entre o preço de venda solicitado e o preço de custo de um determinado produto é 3.000. Se esse produto for vendido com 20% de desconto, ainda assim dará um lucro de 30% à loja. Então, a soma entre os preços de venda e de custo é:

(a) 15.200
(b) 14.600
(c) 13.600
(d) 12.600
(e) 6.400

29 **Mackenzie** Um comerciante comprou uma peça de 50 metros por R$ 1.000,00. Se ele vender 20 metros com lucro de 50%, 20 metros com lucro de 30% e 10 metros pelo preço de custo, o seu lucro total na venda dessa peça será de:

(a) 8%
(b) 12%
(c) 20%
(d) 32%
(e) 40%

30 **Fuvest** Pedro e João são concorrentes na venda de carnês. Em maio, eles venderam o mesmo número de carnês. Em junho, Pedro conseguiu aumentar em 32% as suas vendas. Porém, neste mês de junho, as vendas de João foram 25% superiores às de Pedro. Em relação ao mês de maio, de quanto foi o aumento nas vendas de João?

(a) 32%
(b) 40%
(c) 57%
(d) 60%
(e) 65%

31 **Fatec** Numa microempresa, consomem-se atualmente X litros de combustível por dia. Para a próxima semana, haverá um aumento de 5% no preço do combustível. Com o objetivo de manter a mesma despesa, será feita uma redução no consumo. O novo consumo diário de combustível deverá ser de aproximadamente:

(a) 94,2% X
(b) 95% X
(c) 95,13% X
(d) 95,24% X
(e) 95,5% X

TEXTO COMPLEMENTAR

Quando você quer se aposentar?

Neste texto, vamos utilizar os juros compostos para avaliar o tempo e a quantia necessária para acumular uma fortuna e poder desfrutar de uma boa quantia mensal de aposentadoria.

Vamos obter uma expressão com as seguintes informações:

p: quantia mensal
i: taxa mensal
n: tempo de aplicação

Observe a tabela a seguir. No final de cada período, reaplicamos p.

Aplicação inicial: p

$\boxed{n = 1}$ p + i% . p = p(1 + i%) + p = p[(1 + i%) + 1]
$\boxed{n = 2}$ p[(1 + i%) + 1](1 + i%) + p = = p[(1 + i%)^2 + (1 + i%) + 1]
$\boxed{n = 3}$ p[(1 + i%)^2 + (1 + i%) + 1](1 + i%) + p = = p[(1 + i%)^3 + (1 + i%)^2 + (1 + i%) + 1]
....
período n p[(1 + i%)^n + ... + (1 + i%)^2 + (1 + i%) + 1]

A expressão do capital acumulado no período n é a soma dos termos de uma progressão geométrica com:

$a^1 = 1$
razão = (1 + i%)
nº de termos = n + 1
C_n = capital acumulado

$$C_n = p.\left[1.\frac{(1+i\%)^{n+1}-1}{(1+i\%)-1}\right] \to C_n = p.\left[\frac{(1+i\%)^{n+1}-1}{i\%}\right]$$

Exemplos de aplicação:

Exercícios resolvidos

1 Disponho de R$ 200,00 mensais para investir em uma aplicação que rende 1% de juros (descontado o imposto de renda) por um período de 10 anos. Qual o capital acumulado?

Resolução:

$$C_n = 200.\left[\frac{(1,01)^{121}-1}{1\%}\right] = 46.667,81,$$

observe que p = 200, i% = 0,01 e n = 120.

2 Quero ter para minha aposentadoria 1 milhão de reais, mas disponho de R$ 500,00 por mês em uma aplicação que rende 1% de juros ao mês. Quando vou me aposentar?

Resolução:

$C_n = 10^6$, $p = 500$ e $n = ?$

$$10^6 = 500.\left[\frac{(1,01)^{n+1}-1}{1\%}\right] \therefore (1,01)^{n+1} = 21 \therefore n+1 =$$

$$= \log_{1,01} 21 \therefore n \cong 305 \text{ meses.}$$

Você irá se aposentar após 25 anos.

3 Repetindo o exemplo 2, vamos dobrar a aplicação para R$ 1.000,00.

Resolução:

$C_n = 10^6$; $p = 1.000$ e $n = ?$

$$10^6 = 1.000\left[\frac{(1,01)^{n+1}-1}{1\%}\right] \therefore (1,01)^{n+1} = 11 \therefore n+1 =$$

$$= \log_{1,01} 11 \therefore n \cong 240 \text{ meses.}$$

Você irá se aposentar após 20 anos.

Resumo do formulário:

$$C_n = p\left[\frac{(1+i\%)^{n+1}-1}{i\%}\right]$$

$$n = \log_{1+i\%}\left(\frac{-n.\,i\%}{p}+1\right)-1$$

RESUMINDO

Porcentagem

Tecnicamente, porcentagem é uma fração centesimal, ou seja, $\frac{P}{100}$ que pode ser representada por P%.

A porcentagem nos dá a ideia da quantidade de uma grandeza em um conjunto-universo. Observe o exemplo: Em uma sala com 40 alunos temos 16 meninas, qual seria a porcentagem de meninas na sala?

Temos a fração $\frac{16}{40}$, que representa $\frac{2}{5}$, mas a porcentagem nos dá a ideia da comparação do número de meninas em uma sala com 100 alunos, assim: $\frac{16}{40} = \frac{2}{5} = \frac{2.20}{5.20} = \frac{40}{100} = 40\%$

Nesse exemplo, a porcentagem nos dá a ideia da parte em relação ao todo.
No comércio, utilizamos os termos preço de venda, preço de custo, lucro, prejuízo, preço à vista, parcelamento, desconto, entre outros.
Observe os cálculos abaixo, que muito comuns nos problemas e agilizam os cálculos e o raciocínio:

Quantia x
- aumento de 30% = $x + 30\% \,.\, x = x + 0{,}3x = 1{,}3x$
- decréscimo de 30% = $x - 30\% \,.\, x = x - 0{,}3x = 0{,}7x$

Quando pegamos dinheiro emprestado, compramos um produto em prestações ou atrasamos o pagamento de uma fatura, nós somos submetidos ao pagamento de juros.

Não confunda taxa de juros com os juros, observe o exemplo: Em uma quantia de R$ 200,00, devemos pagar juros de 15%, então 15% de 200 equivale a $\frac{15}{100} . 200 = 30$.
Conclusão: com a taxa de 15%, devemos pagar R$ 30,00 de juros.
Temos basicamente duas maneiras de se calcular juros: juros simples e juros compostos.
Nos cálculos de juros simples, temos um acréscimo constante em cada período. Seja t a quantidade de períodos, i a taxa aplicada a cada período e C a quantia inicial, o juro acumulado nesse período é: $J = C \cdot i \cdot t$.
Nos cálculos de juros compostos, temos um acréscimo crescente de juros em cada período e o montante (capital mais juros) é dado pela equação exponencial:

$C_n = C_0\,(1 + i\%)^n$

C_0: capital inicial

C_n: montante após um período n

$i\%$ = taxa

QUER SABER MAIS?

SITE

- Porcentagem, percentagem
  <http://usuarios.cultura.com.br/jmrezende/percentagem.htm>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 Qual o prazo de aplicação para que um capital de R$ 144.000,00 produza R$ 4.320,00 de juros à taxa de 2% ao mês?

2 Ao fim de quanto tempo os juros produzidos por um certo capital serão iguais a $\frac{3}{8}$ desse mesmo capital, se empregados à taxa de 15% ao ano?

3 Um capital de R$ 6.300,00 foi dividido em duas partes. A 1ª parte foi investida a uma taxa de 3% ao ano durante quatro anos e rendeu os mesmos juros que a 2ª parte, que foi investida à taxa de 2,5% ao ano, por seis anos. Calcule o valor da parte maior.

4 **FGV** Um vendedor recebe mensalmente um salário fixo de R$ 800,00 mais uma comissão de 5% sobre suas vendas do mês. Em geral, a cada duas horas e meia de trabalho, ele vende o equivalente a R$ 500,00.

a) Qual seu salário mensal em função do número X de horas trabalhadas por mês?
b) Se ele costuma trabalhar 220 horas por mês, o que é preferível: um aumento de 20% no salário fixo ou um aumento de 20% (de 5% para 6%) na taxa de comissão?

5 Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra.
Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo que não tenha prejuízo?

(a) 10%
(b) 15%
(c) 20%
(d) 25%
(e) 36%

6 As promoções como "leve 3 e pague 2", comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre cada unidade vendida, de:

(a) $\frac{50}{3\%}$
(b) 20%
(c) 25%
(d) 30%
(e) $\frac{100}{3}\%$

7 A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R$ 2.000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determinar seu preço de custo.

8 Uma loja anuncia um desconto sobre o valor total, X, das compras de cada cliente, de acordo com o seguinte esquema:

I. Desconto de 10% para $10.000 \leq X < 20.000$
II. Desconto de 15% para $X \geq 20.000$

Um cliente compra um par de sapatos por R$ 18.000,00 e um par de meias por R$ 2.000,00. O vendedor muito gentilmente se ofereceu para reduzir o preço das meias para R$ 1.500,00 e o cliente aceita a oferta.
No caixa, são aplicadas as regras do desconto promocional. Nessas condições, pode-se dizer que o cliente:

(a) teve um prejuízo de 700 reais.
(b) teve um lucro de 500 reais.
(c) não teve nem lucro nem prejuízo.
(d) teve um lucro de 450 reais.
(e) teve um prejuízo de 550 reais.

9 Um eletrodoméstico está à venda por R$ 1.200.000,00 em três pagamentos: 400 mil de entrada, 400 mil um mês depois e 400 mil dois meses depois. Para o pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 20%. Supondo que a inflação tenha se estabilizado em 20% ao mês, e que mantendo o dinheiro no banco o comprador ganhe essa correção mensal, verifique qual dos dois planos, à vista ou a prazo, é mais vantajoso e explique por quê.

10 Um feirante comprou 10 caixas de frutas por R$ 120,00. Se ele vendeu 4 caixas com lucro de 40%, 3 caixas com lucro de 20%, 2 caixas pelo preço de custo e se uma caixa se estragou e não foi vendida, então o seu lucro total na venda das frutas, em relação ao preço de compra, foi de:

(a) 30%
(b) 26%
(c) 19%
(d) 15%
(e) 12%

11 Uma compra de R$ 100.000,00 deverá ser paga em duas parcelas iguais, sendo uma à vista e a outra a vencer em 30 dias. Se a loja cobra juros de 20% sobre o saldo devedor, então o valor de cada parcela, desprezando-se os centavos, será de:

(a) R$ 54.545
(b) R$ 56.438
(c) R$ 55.000
(d) R$ 58.176
(e) R$ 60.000

12 Uma mercadoria cujo preço de tabela é R$ 8.000,00 é vendida à vista com desconto de x% ou em duas parcelas iguais de R$ 4.000,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra.
Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 25% ao mês. Nessas condições:

a) se x = 15, a compra a prazo será vantajosa para ele? Explique.
b) qual é o valor de x que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique.

13 Um vendedor propõe a um comprador de um determinado produto as seguintes alternativas de pagamento.

a) Pagamento à vista com 65% de desconto sobre o preço da tabela.
b) Pagamento em 30 dias com desconto de 55% sobre o preço de tabela.

Qual das duas alternativas é mais vantajosa para o comprador, considerando-se que ele consegue um rendimento de 25% com uma aplicação de 30 dias?

14 A moeda de um país é o "liberal", indicado por λ. O imposto de renda I é uma função contínua da renda R, calculada da seguinte maneira:

I. se $R \leq 24.000\ \lambda$, o contribuinte está isento do imposto.
II. se $R \geq 24.000\ \lambda$, calcula-se 15% de R, e do valor obtido subtrai-se um valor fixo P, obtendo-se o imposto a pagar I.

Determine o valor fixo P.

15 Os rendimentos das cadernetas de poupança são isentos de imposto de renda, e os dos fundos de *commodities* e os dos fundos de renda fixa são tributados em 25% e 30%, respectivamente, da valorização que exceder à variação da Ufir. Suponhamos que para um próximo mês, as previsões sejam que a Ufir aumente 1,8% e que as cadernetas, os fundos de *commodities* e os de renda fixa rendam 2,2%, 2,6% e 2,8%, respectivamente, antes do desconto do imposto de renda. Se as previsões se confirmassem, a melhor e a pior das aplicações, respectivamente, seriam:

(a) poupança e *commodities*.
(b) *commodities* e renda fixa.
(c) *commodities* e poupança.
(d) renda fixa e *commodities*.
(e) renda fixa e poupança.

16 Dois caminhões-tanque carregam o mesmo volume de misturas de álcool e gasolina. A mistura de um contém 3% de álcool e a do outro, 5% de álcool. Os dois caminhões descarregam sua carga em um reservatório que estava vazio.

A razão entre o volume de álcool e o de gasolina na mistura formada no reservatório, após os caminhões terem descarregado, é:

(a) $\frac{1}{25}$ (c) $\frac{1}{16}$ (e) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{1}{24}$ (d) $\frac{1}{12}$

17 Um plano de racionamento de energia elétrica prevê a cobrança de uma sobretaxa nas contas que não cumprirem suas metas e consumirem acima de 200 kWh por mês. Essa sobretaxa seria de 50% nos primeiros 300 kWh acima do limite de isenção e de 200% na parcela de consumo acima de 500 kWh. Os que não cumprirem as metas e consumirem 800 kWh por mês terão em suas contas um acréscimo de aproximadamente:

(a) 67% (c) 83% (e) 100%
(b) 5% (d) 94%

18 Se o seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta o seu poder aquisitivo?

19 Suponha que uma tabela (incompleta) para o cálculo do imposto de renda fosse a seguinte.

Renda em reais	%	Parcela a deduzir em reais
≤ 1.000	isento	0
1.000 a 2.000	15	150
2000 a 3.000	20	
≥ 3.000		475

Observação: o imposto é calculado aplicando-se à renda a porcentagem correspondente e subtraindo-se desse resultado a parcela a deduzir.

a) Calcule os valores dos impostos a serem pagos por dois contribuintes cujas rendas são de R$ 1.000,00 e de R$ 2.000,00.
b) Complete a tabela do enunciado com a parcela a deduzir para a faixa de R$ 2.000,00 a R$ 3.000,00 e com a alíquota que corresponde à faixa de renda superior a R$ 3.000,00.

20 O preço de um artigo foi aumentado de p%. Mais tarde, o novo preço foi diminuído de p%. Se no final o preço passou a ser 1 real, determine o preço original.

21 Um feirante comprou 50 dúzias de ovos, pagando R$ 29,10. Sabendo-se que 18 ovos se quebraram e os restantes foram vendidos de modo que o lucro obtido fosse equivalente a 20% do total gasto na compra, determine o preço de cada dúzia de ovos vendida.

22 Em porcentagem, o lucro de um comerciante na venda de um artigo é medido em relação ao preço pelo qual ele comprou o artigo e a margem de lucro é medida em relação ao preço pelo qual ele vendeu o artigo. Portanto, uma margem de lucro de 40% corresponde a um lucro de aproximadamente:

(a) 40%
(b) 60%
(c) 67%
(d) 75%
(e) 80%

Frente 3

FRENTE 3

1 Conceitos básicos

O estudo da geometria tem como base histórica o trabalho de Euclides de Alexandria, que por volta de 300 a.C. escreveu sua obra intitulada de Os *elementos*. São 13 livros que abrangem álgebra, aritmética e geometria.

É considerado um dos primeiros trabalhos matemáticos, pois além do conteúdo importantíssimo, ele é apresentado de maneira lógica e com grande formalização. Estava nascendo o raciocínio postulacional.

Os *elementos* é a obra científica mais bem-sucedida com mais de mil edições, perdendo somente para a *Bíblia*.

Matemática formal

Este capítulo introdutório à geometria plana é fundamental não só para a compreensão da Geometria, mas para todo assunto em que o raciocínio, a relação causa-efeito, a coerência, a organização, a criatividade e a iniciativa são necessários. Sem esses quesitos, não se pode esperar uma fluência na matéria.

Em toda nossa teoria, as informações serão divididas em 4 níveis. Observe a sequência:

Fig. 1 Sistema axiomático.

Tal estrutura é chamada de *sistema axiomático*.

As informações mais simples do sistema são os *conceitos primitivos*, que são óbvios pela nossa simples observação.

Os *postulados* (ou *axiomas*) são informações e conclusões evidentes dos conceitos primitivos.

As *definições* são informações mais elaboradas que servem de explicação para um novo elemento que aparece durante a teoria.

E, finalmente, o *teorema* (do grego *eopeo*, que significa penso, medito), que é a informação mais complexa, pois ela depende das informações anteriores e suas aplicações são mais concretas e imediatas. Por causa dessa complexidade, todo teorema necessita de uma explicação mais detalhada, que chamaremos formalmente de *demonstração*.

O ponto culminante da Matemática é o teorema cuja estrutura de apresentação é a seguinte:

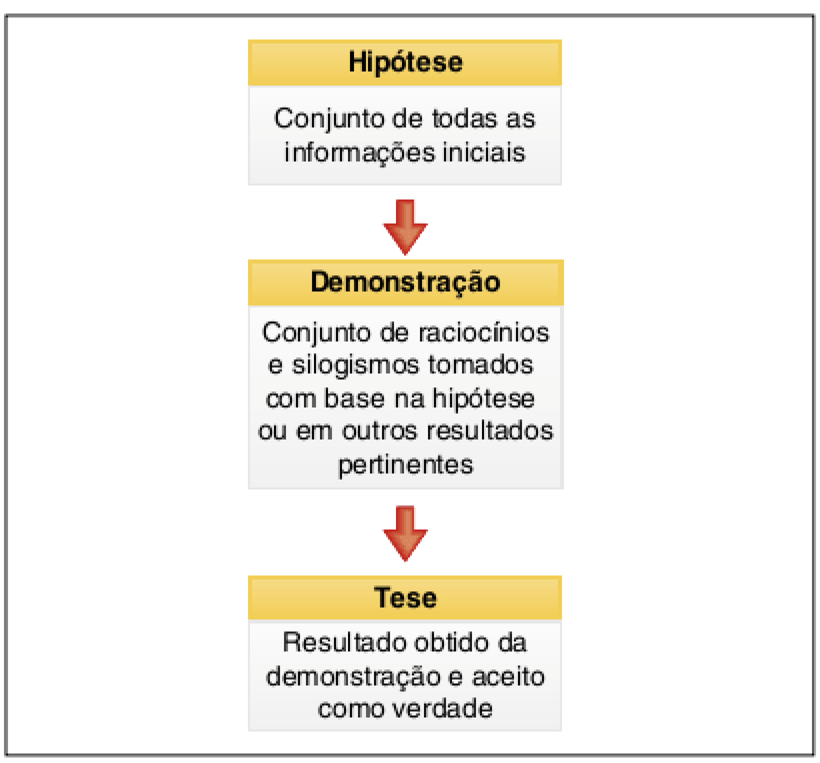


Fig. 2 Estruturação de um teorema.

Observe os exemplos de teoremas matemáticos. Fique sempre atento às hipóteses e teses.

a) Em um triângulo qualquer de ângulos internos de medidas $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, temos que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

b) Em um triângulo isósceles ABC, os ângulos da base são iguais.

c) Considere a e b $\in \mathbb{R}_+$ (números reais não negativos), então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}^3$.

d) As raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ são $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Todos os exemplos citados são resultados famosos da matemática que devem ser entendidos e aplicados; mas, de agora em diante, devemos entender a sua explicação formal, ou seja, a demonstração.

Demonstrando um teorema

Existem basicamente duas maneiras de demonstrar um teorema. Observe os dois exemplos a seguir e compare as diferenças entre os métodos.

Método direto

Nesse método, utilizamos todas as informações da hipótese e outros resultados pertinentes e, por meio de uma sequência lógica de ideias, chegamos ao resultado que é a tese.

Hipótese: Considere um triângulo qualquer que possui ângulos internos de medidas $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Tese: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

Demonstração:

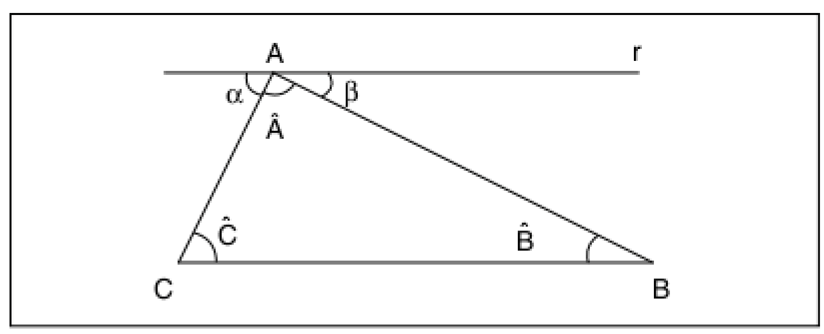


Fig. 3 Demonstrando o teorema.

1) ΔABC qualquer (definição)
2) $r // \overline{BC}$ (postulado de Euclides)
3) $\alpha = \hat{C}$ e $\beta = \hat{B}$ (teorema das paralelas)
4) $\hat{A}+\alpha+\beta=180^\circ$ (ângulo raso)
5) Dos itens 3) e 4) temos a tese:
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ c.q.d. (como queríamos demonstrar)

Método indireto

Esse método também é conhecido como método de redução ao absurdo. Consiste em utilizar a negação da tese para chegarmos a uma contradição da hipótese ou de alguma verdade matemática.

Hipótese: a e b $\in \mathbb{R}_+$.

Tese: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Demonstração:

Começamos com a negação da tese: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e desenvolvemos a expressão até obtermos um absurdo.

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \;\therefore\; a+b < 2\sqrt{ab} \;\therefore\; a - 2\sqrt{ab} + b < 0 \;\therefore$$
$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$$

A última desigualdade é um absurdo, pois nenhum número real elevado ao quadrado pode ser negativo.

Logo, $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ é falso, ou seja, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ é verdadeiro. (c.q.d.)

Conceitos primitivos

Nos itens anteriores, utilizamos todos os níveis de informações, mas ainda não os descrevemos. Os conceitos primitivos da geometria plana são:

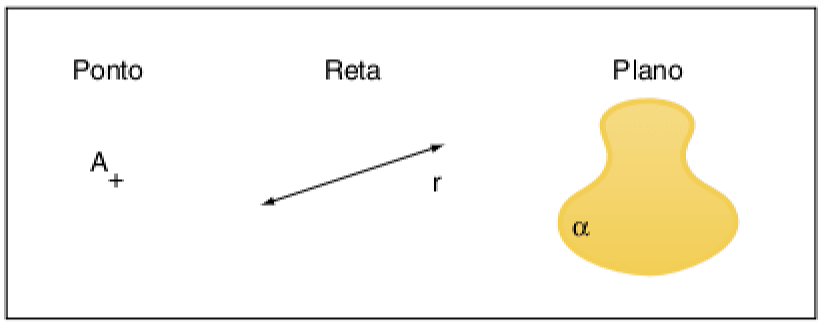


Fig. 4 Conceitos primitivos.

Os desenhos anteriores indicam também a representação gráfica e, como são conceitos elementares, eles não possuem definição. Qualquer tentativa de explicação será baseada na opinião do leitor.

Postulados ou axiomas

São informações feitas com base nos conceitos primitivos que são óbvios, portanto não há necessidade de explicação. A tradução literal da palavra grega *axioma* reforça nossa explicação digna de confiança. Observe alguns axiomas a seguir.

a) Na reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
b) Dois pontos distintos determinam uma única reta.
c) Três pontos não colineares determinam um único plano.
d) A menor distância entre dois pontos é o segmento de reta que os une.
e) *Postulado de Euclides*: por um ponto fora de uma reta passa uma única reta que é paralela à reta dada.

Alguns autores chamam a geometria plana de geometria euclidiana, por causa da veracidade desse postulado.

Definições

Quando um novo elemento é introduzido na teoria, devemos fornecer uma significação precisa para não gerar dúvidas e ambiguidades. Essa precisão é feita pelas definições.

Observe os exemplos:

a) **Circunferência**: conjunto de pontos do plano que equidistam de um ponto dado.
b) **Paralelogramo**: quadrilátero plano cujos lados opostos são paralelos.
c) **Mediatriz**: conjunto de pontos do plano que equidistam de dois pontos distintos.

Reta e as suas partes

Considere a reta r a seguir. Podemos tomar 2 pontos distintos dessa reta.

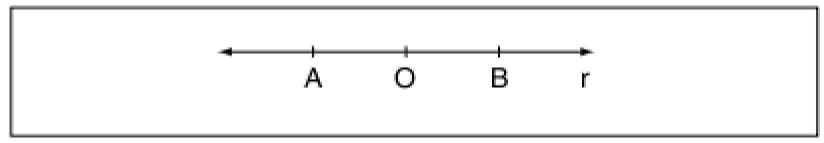


Fig. 5 Representação: r ou $\overleftrightarrow{AB}$.

Na mesma reta, tomamos o ponto O. O conjunto de todos os pontos tomados à direita de O, ou à esquerda, na reta r é chamado de *semirreta*.

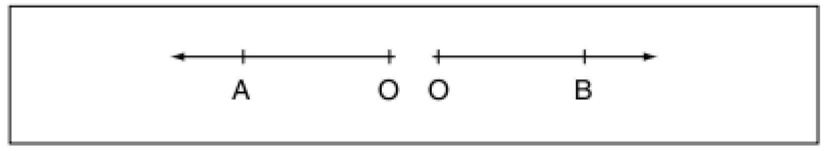


Fig. 6 Representação: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

As duas semirretas citadas estão na mesma reta suporte e partem de um mesmo ponto. Elas são chamadas de *semirretas opostas*.

Na reta $\overleftrightarrow{AB}$, considere o conjunto de pontos tomados de A até B. Esse conjunto é chamado de *segmento de reta*.

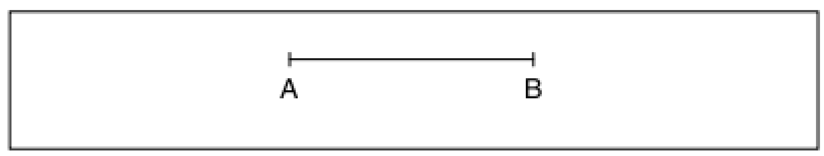


Fig. 7 Segmento $\overline{AB}$.

Medida de um segmento

A grandeza mensurável do segmento de reta é o seu comprimento. Medir significa comparar a grandeza com outra definida como unidade. Observe o esquema a seguir.

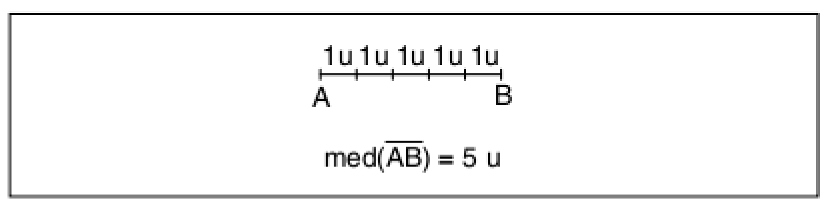


Fig. 8 Medindo um segmento.

Observe que 1u foi a unidade adotada na medição anterior (Fig. 8).

Classificação dos segmentos

Colineares

Um conjunto de segmentos é dito colinear se todos os segmentos estão na mesma reta suporte. Observe o exemplo a seguir.

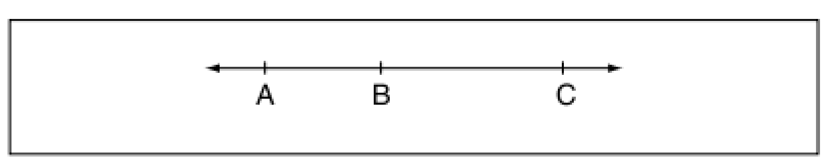


Fig. 9 Segmentos colineares $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Observação: *AB não indica um segmento e sim a sua medida.*

Consecutivos

Dois segmentos são ditos consecutivos se eles possuírem uma única extremidade em comum. Observe os exemplos a seguir.

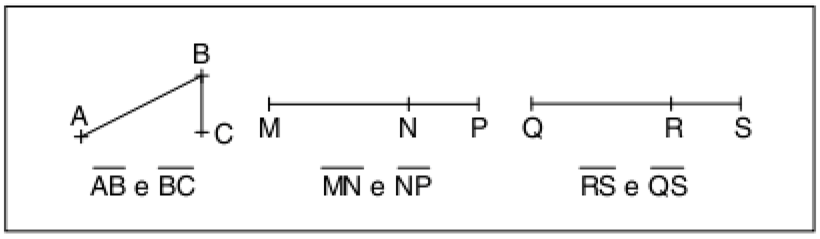


Fig. 10 Segmentos consecutivos.

Adjacentes

Dois segmentos são adjacentes se eles forem colineares e consecutivos, mas sem possuir pontos internos comuns. Observe o exemplo adiante.

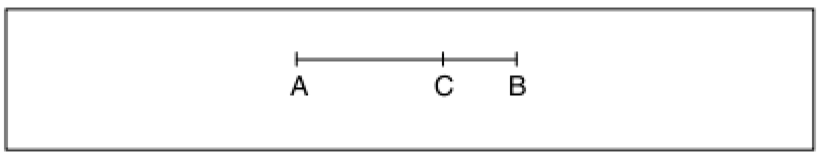


Fig. 11 Segmentos adjacentes.

$\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são adjacentes

$$(\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\})$$

$\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ não são adjacentes

$$(\overline{AB} \cap \overline{CB} = \overline{CB})$$

Congruentes

Dois ou mais segmentos são congruentes quando possuem a mesma medida.

Observe que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ podem ter a mesma medida e não serem iguais.

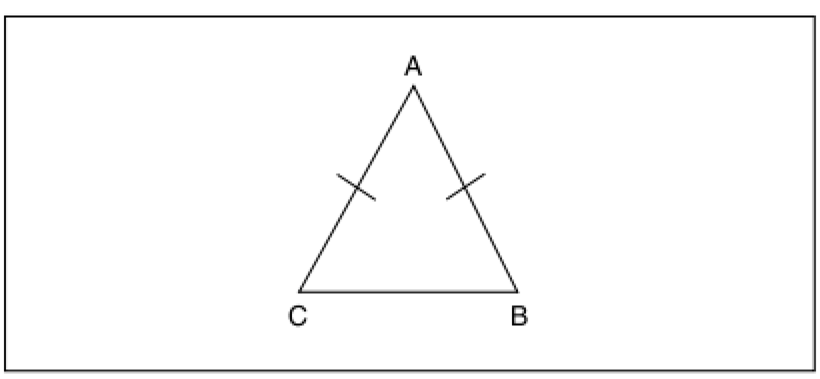


Fig. 12 Segmentos congruentes.

$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ não são segmentos iguais, mas são congruentes, pois $AB = AC$.

Ponto médio do segmento

Considere um segmento $\overline{AB}$ sendo M um ponto tal que $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ sejam segmentos adjacentes e de mesma medida.

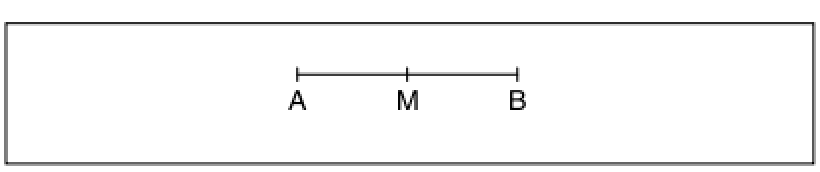


Fig. 13 M é ponto médio, então AM = MB.

Razão de seção

Sabemos da aritmética que a razão entre duas grandezas p e q é a fração $\frac{p}{q}$. Na geometria, a razão entre dois segmentos é a razão entre as suas medidas na mesma unidade. Podemos dividir um segmento internamente ou externamente.

Razão de seção interna

Dividir um segmento $\overline{AB}$ internamente por um ponto M em uma razão K é encontrar dois outros segmentos adjacentes $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ tal que $\frac{AM}{MB} = K$ e $AM + MB = AB$. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são chamados de *aditivos*.

Observe a figura a seguir.

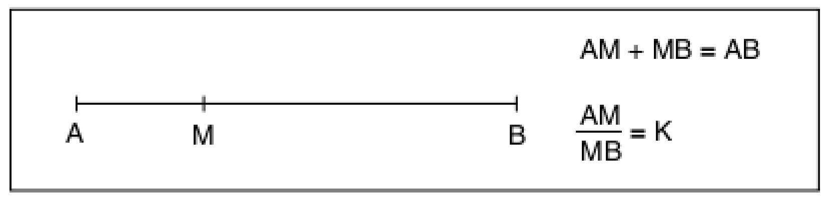


Fig. 14 Divisão interna do segmento AB.

De acordo com a figura 14, podemos deslocar o ponto M e analisar a grandeza da razão de seção K. Analise a tabela a seguir.

Posição de M	Razão K
M é ponto médio	$K = \frac{AM}{MB} = 1$
M está mais próximo de A (AM < MB)	$K = \frac{AM}{MB} < 1$
$M \equiv A$ (AM = zero e MB = AB)	$K = \frac{0}{AB} = 0$
M está mais próximo de B (AM > MB)	$K = \frac{AM}{AB} > 1$
$M \to B$ ($AM \to AB$ e $MB \to 0$)	$K \to \infty$

Tab. 1 Razão de seção interna.

Após a interpretação numérica da razão $\frac{AM}{MB}$, observe o seguinte gráfico que nos mostra como a razão da seção K se desenvolve quando M divide $\overline{AB}$ internamente.

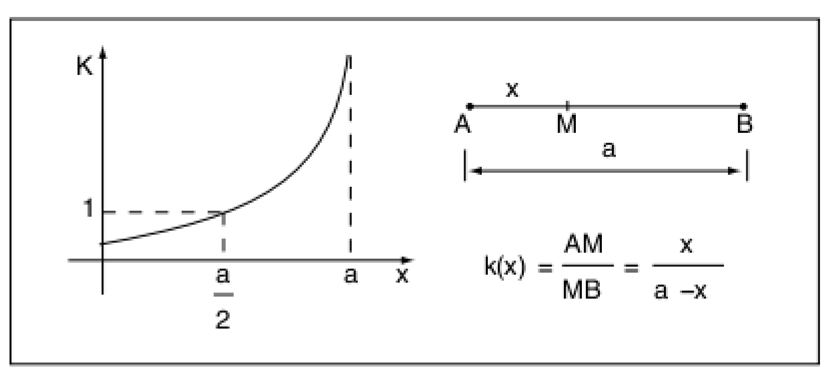


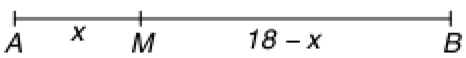
Fig. 15 Gráfico da razão de seção interna de $\overline{AB}$ por M.

Observe o exemplo:

Exercício resolvido

1 Um segmento $\overline{AB}$ de medida 18 centímetros foi dividido internamente por dois pontos M e N na razão $\frac{1}{3}$ e 4.
Determine a medida do segmento $\overline{MN}$.

Resolução:
M está mais próximo de A (K < 1), e N está mais próximo de B (K > 1).



$$\frac{x}{18-x}=\frac{1}{3} \therefore 3x=18-x \therefore 4x=18 \therefore x=4{,}5\ cm$$

$$\frac{x}{18-x}=4 \therefore x=72-4x \therefore 5x=72 \therefore x=14{,}4\ cm$$

Assim:
$MN = AN - AM = 14{,}4 - 4{,}5 = 9{,}9\ cm$

Razão de seção externa

Parece estranho, mas vamos dividir um segmento externamente por um ponto N. Dividir um segmento $\overline{AB}$ externamente por um ponto N em uma razão K é encontrar outros dois segmentos consecutivos $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$, tal que $\frac{AN}{NB}=K$ e $|AN-NB|=AB$.
Os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$ são chamados de *subtrativos*.

Observe a figura a seguir.

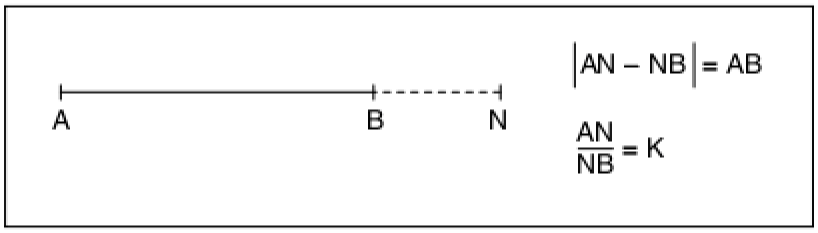


Fig. 16 Divisão externa do segmento $\overline{AB}$.

De acordo com a figura 16, podemos deslocar o ponto N e analisar a grandeza da razão de seção K. Analise a tabela a seguir.

Posição de N	Razão K
N está mais próximo de A (AN < NB)	$K=\frac{AN}{NB}<1$
N está mais próximo de B (AN < NB)	$K=\frac{AN}{NB}>1$
N ≡ A (AN = zero e NB = AB)	$K=\frac{0}{AB}=0$
N → B (AN → AB e NB → 0)	$K\to\infty$
N → ∞ (AN e NB tendem a igualar-se, pois AB passa a ser desprezível)	K = 1

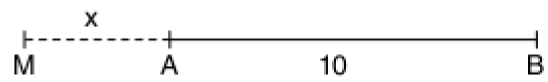
Tab. 2 Razão de seção externa.

Observe o exemplo:

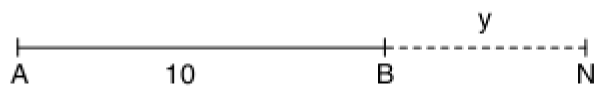
Exercício resolvido

2 Um segmento $\overline{AB}$ de medida 10 centímetros é dividido externamente pelos pontos M e N na razão $\frac{1}{2}$ e 3, respectivamente. Calcule a medida do segmento $\overline{MN}$.

Resolução:
M está mais próximo de A (K < 1), e N está mais próximo de B (K > 1).



$$\frac{x}{10+x}=\frac{1}{2} \therefore 2x=x+10 \therefore x=10\ cm$$



$$\frac{10+y}{y}=3 \therefore 10+y=3y \therefore 2y=10 \therefore y=5\ cm$$

$NM = x + 10 + y = 10 + 10 + 5 = 25\ cm$

Semiplano

Da mesma maneira que um ponto divide a reta em duas semirretas, uma reta contida em um plano α divide o plano em dois semiplanos. Observe a figura a seguir.

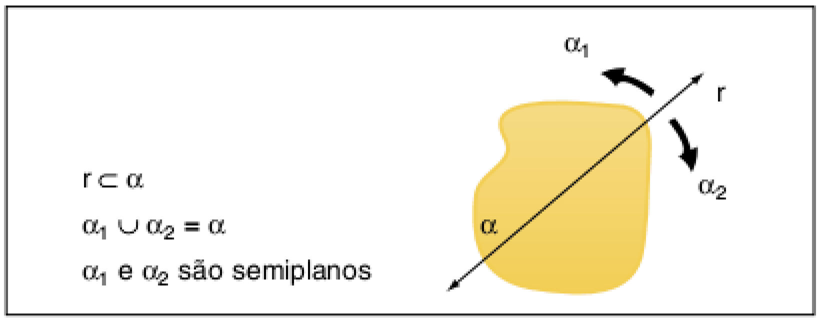
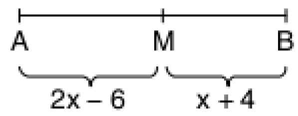


Fig. 17 Semiplanos α_1 e α_2.

Exercícios resolvidos

3 Determine a medida do segmento $\overline{AB}$ se M é ponto médio.

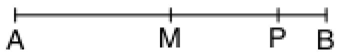


Resolução:
M é ponto médio $\Rightarrow AM = MB \therefore 2x - 6 = x + 4 \therefore x = 10$
$AB = 2x - 6 + x + 4 \therefore AB = 3x - 2$; *logo,* $AB = 3 \cdot 10 - 2 = 28.$

4 Considere $\overline{AB}$ um segmento e M o seu ponto médio. Um ponto P está entre os pontos M e B. Demonstre que $PM=\frac{PA-PB}{2}$.

Resolução:

Do enunciado, temos:



M é ponto médio $\Rightarrow AM = MB$

Mas $AM = PA - PM$ *e* $MB = PB + PM$

Assim: $PA - PM = PB + PM \therefore PM = \dfrac{PA - PB}{2}$ *(c.q.d.)*

5 Prove a unicidade do ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$.

Resolução:

Podemos supor que o segmento possui 2 pontos médios $M_1 \neq M_2$.

$AM_1 = M_1B \therefore AM_1 = M_1M_2 + M_2B$

$AM_2 = M_2B \therefore AM_1 + M_1M_2 = M_2B$

Assim: $AM_1 = M_1M_2 + AM_1 + M_1M_2 \therefore 0 = 2M_1M_2 \therefore$

$\therefore M_1M_2 = 0 \rightarrow M_1 \equiv M_2$ *(absurdo!)*

M_1 e M_2 representam o mesmo ponto, ou seja, o ponto médio é único.

Revisando

1 $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois segmentos adjacentes de medidas AB = a e BC = b. Sejam M e N os seus respectivos pontos médios, calcule a medida de $\overline{MN}$.

2 $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois segmentos colineares e consecutivos, mas não adjacentes de medidas AB = a e BC = b, tal que a > 2b. Sejam M e N os respectivos pontos médios, calcule a medida de $\overline{MN}$.

3 A, B e C são pontos distintos em uma reta, tal que AB = 30 cm e BC = 10 cm. Sejam M e N pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, calcule MN.

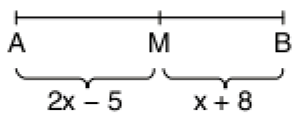
4 O segmento AB = 25 cm é dividido internamente na razão $\frac{2}{3}$ pelo ponto C. Determine as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Exercícios propostos

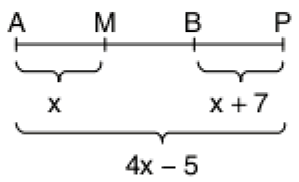
Segmentos consecutivos e segmentos adjacentes

1 Determine AB, sendo M ponto médio de $\overline{AB}$.

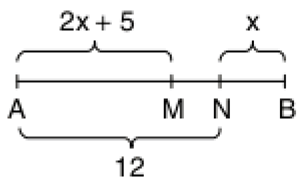
a)



b)



c)



2 O, A, B e C são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem OABC, e tais que AO = 3 cm, OB = 5 cm e 4AB + AC – 2BC = 6 cm. Calcule a medida do segmento $\overline{OC}$.

3 O, A, B, C e D são cinco pontos de uma reta, sucedendo-se na ordem OABCD, e tais que AO = 1 cm, OB = 3 cm, OC = 5 cm e OD = 7 cm. Sendo M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, e P o ponto médio de $\overline{MN}$, calcule OP.

4 Em uma carpintaria, empilham-se 50 tábuas, umas de 2 centímetros e outras de 5 centímetros de espessura. A altura da pilha é de 154 centímetros. Determine a diferença entre o número de tábuas de cada espessura.

5 O segmento AB vale 7 vezes o segmento CD. Ache a medida de $\overline{AB}$ quando se toma para unidade a terça parte de $\overline{CD}$.

Razão de seção e demonstração de teoremas

6 Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento $\overline{AB}$ e estão de um mesmo lado do seu ponto médio. P divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$ e Q divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{3}{4}$. Se PQ = 2 cm, calcule AB.

7 M é o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ e C é um ponto da reta $\overline{AB}$ externo ao segmento $\overline{AB}$. Demonstre que $\overline{MC} = \frac{1}{2}.(CA + CB)$.

8 $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos adjacentes; M e N são os pontos médios respectivos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Demonstre que $\overline{MN} = \frac{1}{2}.\left(\overline{AC} - \overline{AB}\right)$.

9 Dados três pontos A, B e C sobre uma mesma reta, consideremos M e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Demonstre que $\overline{MN}$ é igual à semissoma ou à semidiferença dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

TEXTOS COMPLEMENTARES

Origens da geometria

Não é possível determinar com precisão a origem da geometria e da própria Matemática, pois são manifestações da civilização humana que antecedem a invenção da escrita (4000 a. C.).

Existem duas vertentes das origens da geometria. O grande pensador Aristóteles achava que no Egito a existência de uma classe sacerdotal cheia de lazeres, ou seja, com muito tempo para o estudo, propiciou o surgimento da geometria.

Heródoto possuía ideias mais práticas. Segundo ele, Sesostris dividiu uma porção de terra próxima ao rio Nilo em faixas retangulares e as entregou para diversas famílias que deveriam pagar um tributo referente a sua produção. Como sabemos, o rio Nilo possui cheias periódicas e por causa disso a área útil de plantio diminuía. Seria injusto uma família que produziu menos pagar um imposto referente à utilização completa do solo. O problema era resolvido da seguinte maneira: Sesostris mandava pessoas conhecidas como "esticadores de corda" (agrimensores) para avaliar a porção de

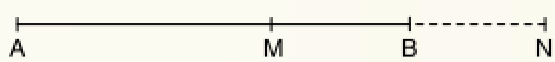
Esticadores de corda.

terra perdida. É provável que esses esticadores de corda tinham um conhecimento básico de técnicas geométricas.

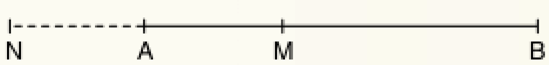
Essas são as principais hipóteses do surgimento da geometria, mas o que de fato é considerado a base histórica da geometria é o grande trabalho de Euclides de Alexandria, considerado o precursor da matemática formal (estrutura axiomática). Em sua grande obra Os *elementos* (por volta de 300 a.C.), composta de treze livros, Euclides expõe de maneira lógica os conhecimentos da época em geometria plana e espacial até álgebra e aritmética. Nenhum trabalho, exceto a *Bíblia*, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Foram mais de mil edições desde a primeira em 1482. Por mais de dois mil anos, esse trabalho dominou o ensino da geometria. Lembre-se de que tudo o que estudaremos daqui para frente já foi pensado e estudado na Antiguidade.

Divisão harmônica

Dividir um segmento $\overline{AB}$ harmonicamente na razão K significa encontrar dois pontos, M (interno) e N (externo), que possuem a mesma razão de seção. Observe a figura:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}=K;\ K>1$$



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}=K;\ K<1$$

Os pontos M e N são chamados de conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão K.

Exercício resolvido

1 Divida o segmento $\overline{AB}$ de medida 12 centímetros harmonicamente na razão $\frac{3}{2}$.

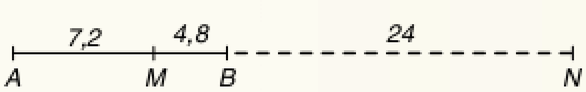
Resolução:

Como a razão de seção é maior do que 1, M e N estão do "lado direito".

$$\frac{12-x}{x}=\frac{3}{2}\ \therefore\ 24-2x=3x\ \therefore\ 5x=24\ \therefore\ x=4{,}8\text{ cm}$$

$$\frac{12+y}{y}=\frac{3}{2}\ \therefore\ 3y=24+2y\ \therefore\ y=24\text{ cm}$$

A divisão fica:



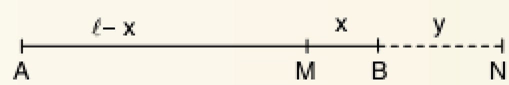
Teoremas fundamentais da divisão harmônica

Teorema 1:

Considere o segmento $\overline{AB}$ de medida ℓ. Na divisão harmônica de razão K, a distância entre os conjugados harmônicos M e N é $med\left(\overline{MN}\right)=\frac{2K\ell}{\left|K^2-1\right|}$.

Demonstração:

Considere $\overline{AB}$ = l e a razão K > 1 (M e N estão à direita)



$$\frac{AM}{MB}=K\therefore\frac{\ell-x}{x}=K\therefore\ell-x=Kx\therefore\frac{\ell}{K+1}=x$$

$$\frac{AN}{NB}=K\therefore\frac{\ell+y}{y}=K\therefore\ell+y=Ky\therefore\frac{\ell}{K-1}=y$$

$$med\left(\overline{MN}\right)=x+y=\frac{\ell}{k+1}+\frac{\ell}{k-1}=$$

$$=\frac{k\ell-\ell+k\ell+\ell}{k^2-1}=\frac{2k\ell}{k^2-1}$$

Analogamente, para 0 < K < 1, temos

$$med\left(\overline{MN}\right)=\frac{2K\ell}{1-K^2}$$

Para $\forall\ K\in\mathbb{R}_+-\{1\}$, temos

$$med\left(\overline{MN}\right)=\frac{2K\ell}{\left|K^2-1\right|}\quad\text{(c.q.d.)}$$

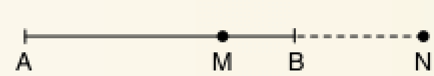
Teorema da reciprocidade harmônica

Teorema 2:

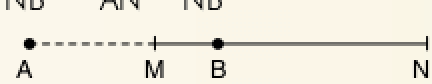
Se o segmento $\overline{AB}$ é dividido harmonicamente por M e N, então $\overline{MN}$ é dividido harmonicamente por A e B.

Demonstração:

Considere K > 1, tal que $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}$, observe a figura:



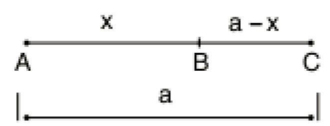
Fazendo $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}\rightarrow\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NB}$, observe a nova situação:



Temos A e B os conjugados harmônicos de $\overline{MN}$.

Razão áurea

A razão ou seção áurea foi estudada pelos gregos antes dos tempos de Euclides de Alexandria. Em sua grande obra, Os *elementos*, Euclides descreveu a seção áurea por meio da proposição "dividir um segmento de reta em média e extrema razão". Diz-se que o ponto B divide o segmento $\overline{AC}$ em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos formados é igual à razão entre o segmento total e o maior. Observe a figura para ficar bem mais claro a proposição de Euclides.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$$

B divide $\overline{AC}$ em média e extrema razão.

Vamos efetuar os cálculos:

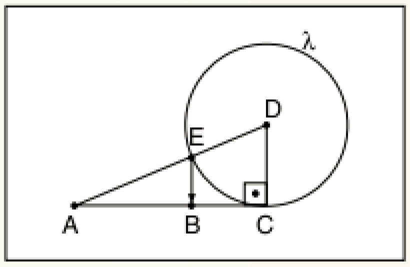
$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} \quad \therefore \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

A raiz positiva dessa equação é:

$$x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0,618.\,a$$

O segmento $\overline{AB}$ é chamado de segmento áureo de $\overline{AC}$, e o número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ foi denominado número de ouro.

Podemos construir geometricamente o segmento áureo de um segmento $\overline{AC} = a$ dado. Observe:



1. $AC = a$
2. $\overline{DC} \perp \overline{AC}$ e $DC = \frac{a}{2}$
3. $AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
4. λ é a circunferência de centro D e raio $\frac{a}{2}$
5. $AE = AD - DE = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
6. Fazendo AB = AE, temos que $\overline{AB}$ é o segmento áureo de $\overline{AC}$

Qual a importância do número de ouro?

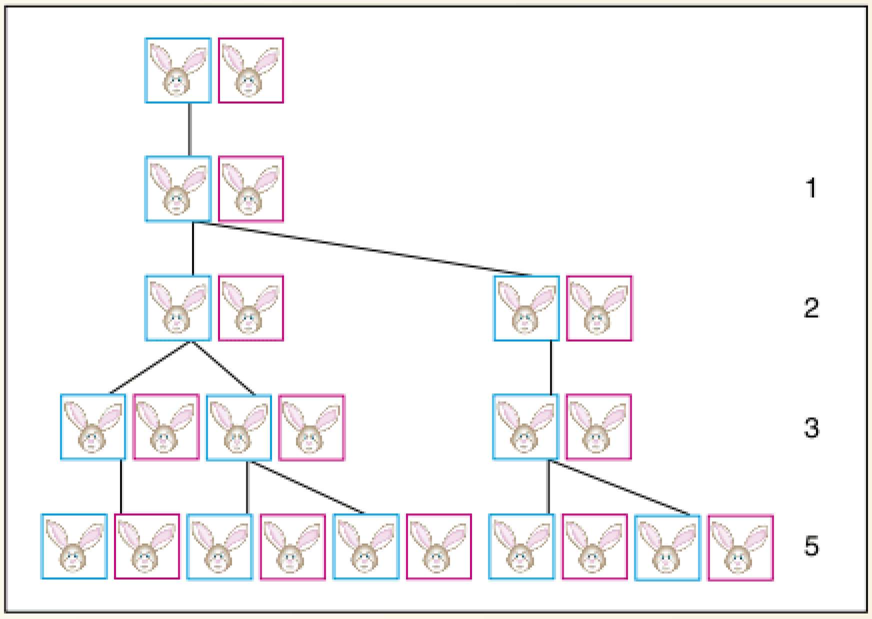
O homem sempre procurou a beleza e a perfeição. Claro que os exemplos foram encontrados na natureza. Veja alguns:

a) A razão entre as abelhas macho e fêmea de uma colmeia.
b) A razão entre as espirais de um caracol.
c) A razão entre a sua altura e a altura de seu umbigo ao chão.

Por volta de 1200, o matemático italiano Leonardo Fibonacci estudava o crescimento das populações de coelho e observou o seguinte:

Considere um par de coelhos em um local confinado. Quantos pares de coelhos podem ser gerados desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Observe o seguinte quadro:



O número de casais de coelhos formam a mais famosa sequência da Matemática, a sequência de Fibonacci, que possui a seguinte propriedade:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2); & n > 2 \end{cases}$$

Assim: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; ...

Observe:

$$\frac{1}{1} = 1;\ \frac{1}{2} = 0,5;\ \frac{2}{3} = 0,66;\ \frac{3}{5} = 0,6;\ \frac{5}{8} = 0,625;$$

$$\frac{8}{13} = 0,615;\ \frac{13}{21} = 0,619;\ \frac{21}{34} = 0,617;\ \frac{34}{55} = 0,618$$

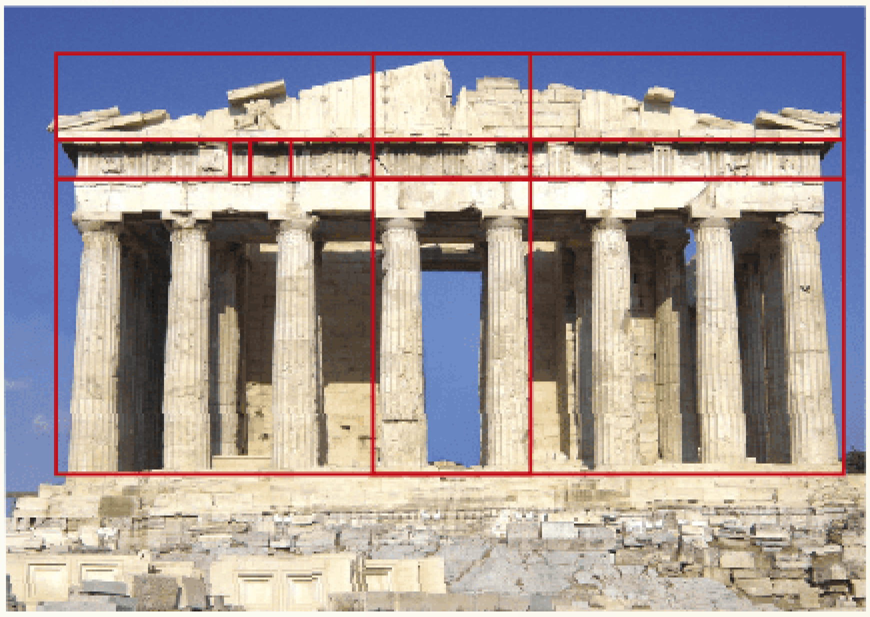
A razão entre 2 números consecutivos da sequência de Fibonacci tende ao número de ouro!

O homem, percebendo que a natureza utiliza-se desta razão para expressar beleza e harmonia, começou a copiar.

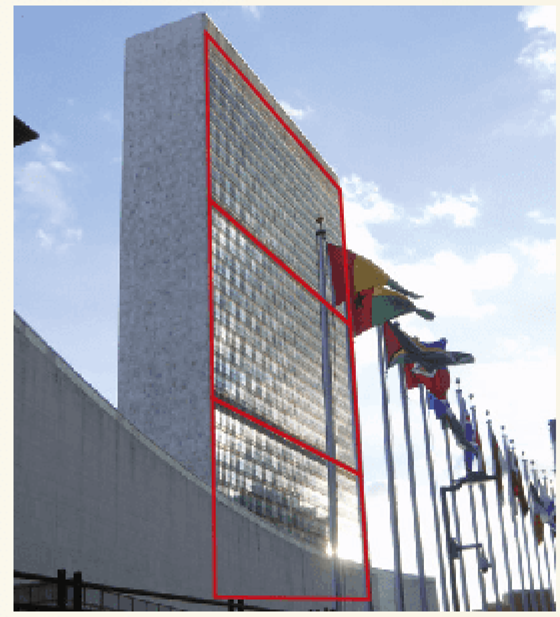
Definimos de retângulo áureo o retângulo ABCD, tal que $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Esse retângulo possui grande harmonia em suas formas e é muito utilizado na arquitetura. Observe o Parthenon da Grécia e o prédio das Nações Unidas em Nova York.

KONSTANTINOS DAFALIAS/STOCK.XCHNG



Parthenon.



STEVE CADMAN/FLICKR

Prédio da ONU.

Atividades

1 Um segmento $\overline{AB}$ está dividido harmonicamente pelos pontos M e N. Calcule os segmentos $\overline{NA}$, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ da divisão e a razão, sendo AB = 21 cm e NB = 84 cm.

2 AMBN formam uma divisão harmônica com M e N, os conjugados harmônicos de $\overline{AB}$, e O é o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que $OA^2 = OB^2 = OM \cdot ON$.

3 Demonstre a seguinte afirmação:
Se M e N são os conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão $K (K > 1)$, então A e B são os conjugados harmônicos de $\overline{MN}$ na razão $\frac{K-1}{K+1}$.

4 **IME** Considere as equações do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e $a'x^2 + b'x + c' = 0$.
Suas raízes reais são, respectivamente, x_1, x_2 x_3 e x_4. Determine a relação entre os coeficientes das equações para que o segmento de extremidades com abscissas x_1 e x_2 seja dividido harmonicamente pelos pontos de abscissas x_3 e x_4.

RESUMINDO

A geometria plana é uma ciência axiomática e, como tal, deve ser apresentada por meio das informações:

Conceito primitivo – Postulado – Definição – Teorema

O ápice da teoria axiomática é o teorema, cuja apresentação é da forma:
a) hipótese $\Rightarrow$ tese
b) hipótese $\Leftrightarrow$ tese

Os segmentos são classificados como colineares, consecutivos, adjacentes e congruentes.

Definimos razão de seção interna de um segmento $\overline{AB}$ como sendo o número $K \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $\frac{AM}{MB} = K$; $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são segmentos adjacentes aditivos, ou seja, $AM + MB = AB$.

QUER SABER MAIS?

LIVRO

- Simon Singh. *O último teorema de Fermat*. Editora Record, 1998.

Exercícios complementares

Segmentos consecutivos e segmentos adjacentes

1 A, B, C e D são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem alfabética e tais que AD = 12 cm e BC = 7 cm. Calcular AB + CD e a distância entre os pontos médios dos segmentos AB + CD.

2 Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são adjacentes, de tal maneira que AB = 3BC e BC = 2CD. Se AD = 36 cm, determine as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.

3 Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos em uma mesma reta, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, com $A \neq C$, demonstre que $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{AB}$.

4 Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

- [ ] Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
- [ ] Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
- [ ] Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
- [ ] Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
- [ ] Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.

Razão de seção e demonstração de teoremas

5 A, B, C e D são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem alfabética; M e N são os pontos médios respectivos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Demonstre que $MN = \frac{1}{2}(AC + BD)$.

6 P, Q e R são três pontos distintos de uma reta. Se PQ é igual ao triplo de QR e PR = 40 cm, determine as medidas dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$.

7 $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos adjacentes cujos pontos médios respectivos são M e N. Demonstre que $MN = \frac{1}{2}(AB + BC)$.

8 M é o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ e C é um ponto interno ao segmento $\overline{MB}$.

Demonstre que $MC = \frac{1}{2}(CA - CB)$.

9 Se A, B e C são pontos colineares, determine AC, sendo AB = 20 cm e BC = 12 cm.

10 AB e BC são dois segmentos adjacentes. Se AB é o quíntuplo de BC e AC = 42 cm, determine AB e BC.

11 Em uma reta r, tomemos os segmento $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e um ponto P de modo que $\overline{AB}$ seja o quíntuplo de $\overline{PC}$, $\overline{BC}$ seja o quádruplo de $\overline{PC}$, $\overline{BC}$ e AP = 80 cm. Sendo M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, determine MN.

12 No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$. Determine o valor de $\frac{BC}{AB}$.

13 Considere um segmento $\overline{AB}$ e a, b e $c \in \mathbb{N}$ tal que $a > b$. O ponto D divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{b}{a}$ e E divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{a}{b}$. Se $\overline{DE} = c$, calcule a medida de $\overline{AB}$. .

14 Tomam-se sucessivamente sobre uma reta os pontos A, B, C e D, sendo AB = 5, BC = 1 e CD = 3. Considera-se o ponto M exterior ao segmento $\overline{AC}$, mas na reta suporte tal que $\frac{MA}{MC} = \frac{5}{3}$, e o ponto M' interior ao segmento $\overline{BC}$, de modo que $\frac{M'B}{M'C} = \frac{5}{3}$. Sendo O e O' os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, calcule as razões $\frac{MO}{MO'}$ e $\frac{M'O}{M'O'}$.

Ângulos

2

FRENTE 3

TROY NEWELL/STOCK.XCHNG

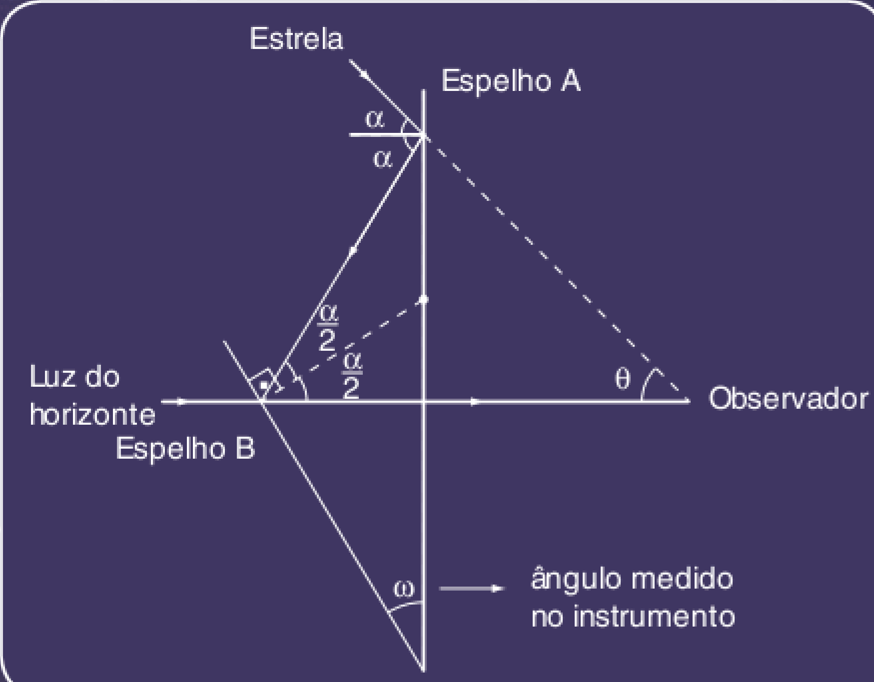
O sextante foi um instrumento portátil utilizado para medir um ângulo, geralmente, a "altura" de uma estrela. Era imprescindível na navegação astronômica antiga. O princípio de funcionamento era baseado na dupla reflexão do raio luminoso proveniente da estrela.

O raio de luz sai da estrela refletindo nos espelhos A e B e chegando ao olho do observador.

Considerando θ a "altura" da estrela em relação ao horizonte e sabendo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão de um raio de luz, conforme o esquema, teremos:

$\alpha = \theta$ e $\omega = \dfrac{\alpha}{2}$

Logo, $2\omega = \theta$



Esquema de funcionamento de um sextante.

Ângulos

Classificação das regiões

Todas as figuras planas podem ser classificadas em duas categorias:

Região convexa

É a região R tal que quaisquer que sejam A e B pertencentes a R o segmento $\overline{AB} \subset R$. Observe os exemplos a seguir.

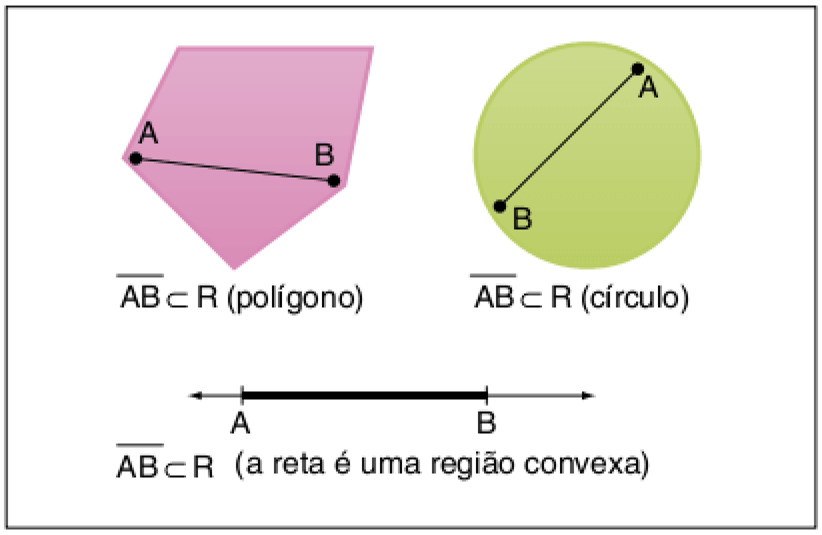


Fig. 1 Região convexa.

Região côncava

É a região R tal que existem dois pontos distintos A e B pertencentes a R em que o segmento $\overline{AB} \not\subset R$. Observe os exemplos a seguir:

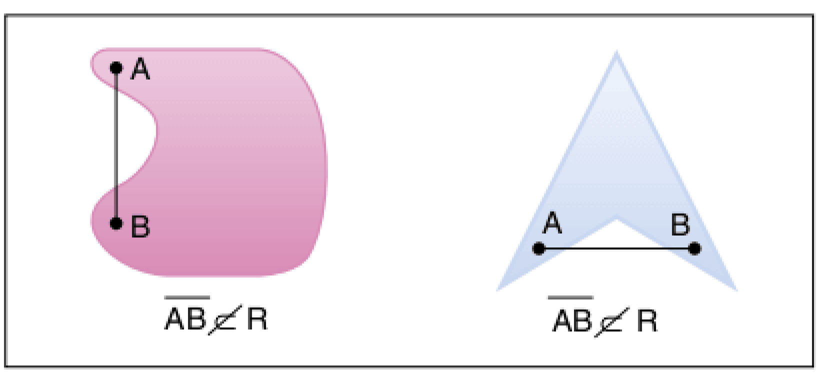


Fig. 2 Região côncava.

Ângulo

Chama-se ângulo a união de duas semirretas de mesma origem não contidas na mesma reta suporte.

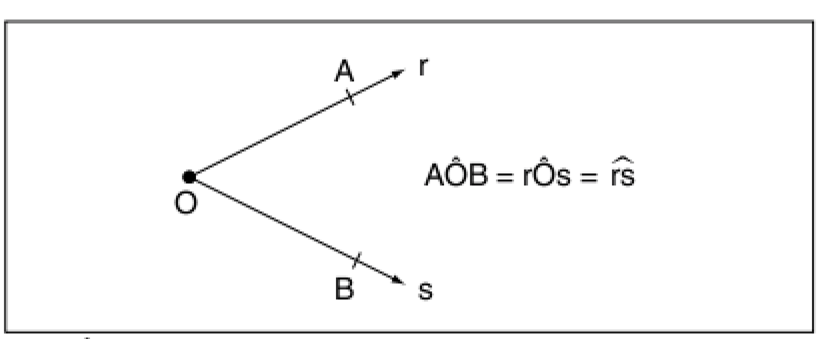


Fig. 3 Ângulo.

A parte interna do ângulo é uma região convexa. A reunião do ângulo com a sua parte interna chama-se *ângulo completo* ou *ângulo convexo*.

Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, eles possuírem um lado em comum. Observe os exemplos a seguir.

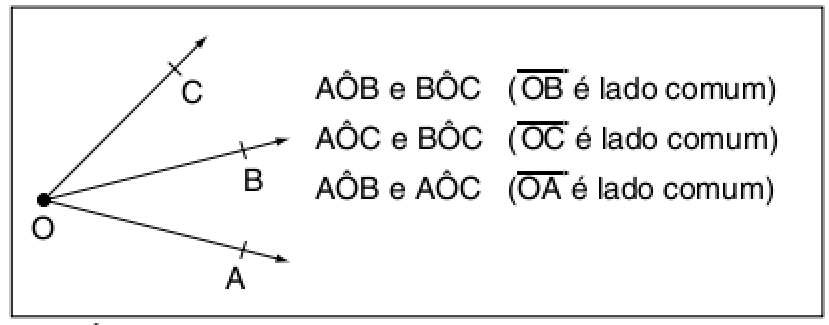


Fig. 4 Ângulos consecutivos.

Ângulos adjacentes

Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, eles forem consecutivos e não possuírem pontos internos comuns. Observe o exemplo e o contraexemplo.

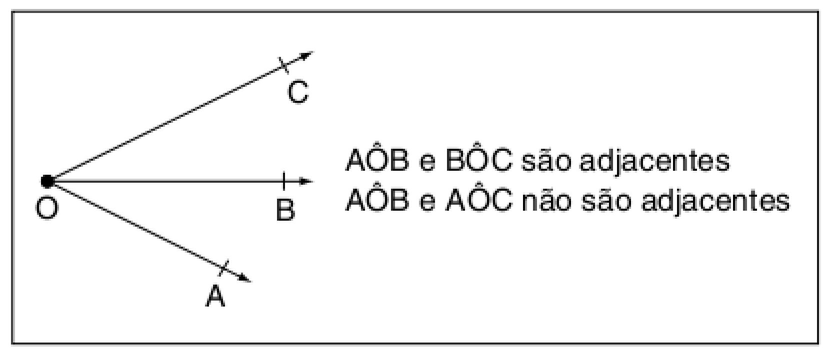


Fig. 5 Ângulos adjacentes.

ATENÇÃO!

Contraexemplo é um importante artifício para a Matemática. Em algumas situações, é mais fácil dar exemplos do que não é correto para entender o que é correto.

Ângulos opostos pelo vértice

São dois ângulos cujos lados são semirretas opostas. Observe o exemplo a seguir.

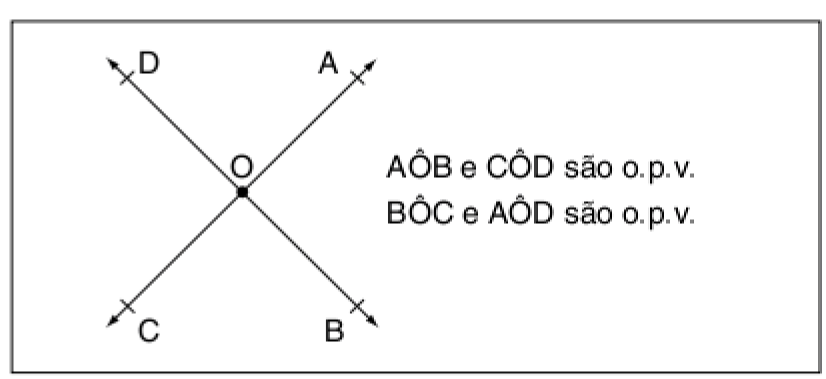


Fig. 6 Ângulos opostos pelo vértice.

ATENÇÃO!

É comum utilizar a notação o.p.v. (opostos pelo vértice).

Unidades de ângulo

Como já foi visto no capítulo 1, medir uma grandeza é compará-la com um valor adotado como padrão. Variando a escolha do padrão, teremos unidades diferentes, observe:

Grau (º)

Considere um ângulo cujos lados são semirretas opostas, o chamado *ângulo raso*. Divida sua abertura em 180 partes iguais, cada ângulo obtido por definição terá a medida de 1º (um grau).

Observe o esquema.

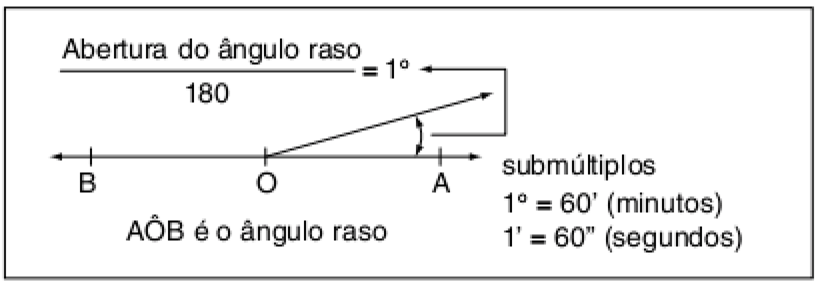


Fig. 7 Definição de grau.

ATENÇÃO!

Adotamos submúltiplos para uma grandeza quando ela é relativamente grande, ou como no nosso caso, para aumentar a precisão da medida.

Grado (gr)

A unidade grado é pouco utilizada, apesar de ser uma unidade decimal, enquanto o grau é sexagesimal. Vamos dividir a abertura do ângulo raso em 200 partes iguais, cada ângulo obtido por definição terá a medida de 1 grado (1gr). Assim, o ângulo raso pode ter também a medida de 200 gr.

Os submúltiplos do grado seriam 1 dcgr (0,1 gr) e 1 cgr (0,01 gr).

ATENÇÃO!

Transformação de unidades:
180º → 200 gr

Exercício resolvido

1 Efetue as seguintes operações.

a) 100º – 42º 20' 42"
b) 20º 45' 16" + 18º 27' 12"
c) 45º 15' 37" – 20º 42' 30"
d) 5 · (23º 42' 20")
e) 180º : 7

Resolução:

a) $100^o = 99^o\,60' = 99^o\,59'\,60''$
$99^o\,59'\,60'' - 42^o\,20'\,42'' = 57^o\,39'\,18''$

b) $20^o\,45'\,16'' + 18^o\,27'\,12'' = 38^o\,72'\,28''$
mas $72^o = 60' + 12' = 1^o\,12'$
assim $38^o\,72'\,28'' = 39^o\,12'\,28''$

c) $45^o\,15'\,37'' = 44^o\,75'\,37''$
Assim $44^o\,75'\,37'' - 20^o\,42'\,30'' = 24^o\,35'\,07''$

d) $5\,.\,(23^o\,42'\,20'') = 115^o\,210'\,100''$

$210' \,\underline{|60'}$ $\Rightarrow 210' = 3\,.\,(60') + 30' = 3^o\,30'$
$30' \quad 3$

$100'' \,\underline{|60''}$ $\Rightarrow 100'' = 1\,.\,(60'') + 40'' = 1'\,40''$
$40'' \quad 1$

$115^o\,210'\,100'' = 115^o + 3^o\,30' + 1'\,40'' = 118^o\,31'\,40''$

e) $180^o \,\underline{|7\qquad\qquad}$
$40^o \quad 25^o\,42'\,51\frac{3}{7}''$
$\cdot 60$ 5^o
$300'$
$20'$
$\cdot 60$ $6'$
$360''$
$10''$
$3''$

Classificação dos ângulos quanto à medida

Antes de classificarmos os ângulos, vamos analisar o seguinte: O que é uma consequência da definição do grau?

Na figura 8, temos dois ângulos adjacentes, AÔB e BÔC. Como eles são adjacentes, não existem pontos internos comuns e, portanto, AÔB + BÔC = 180º.

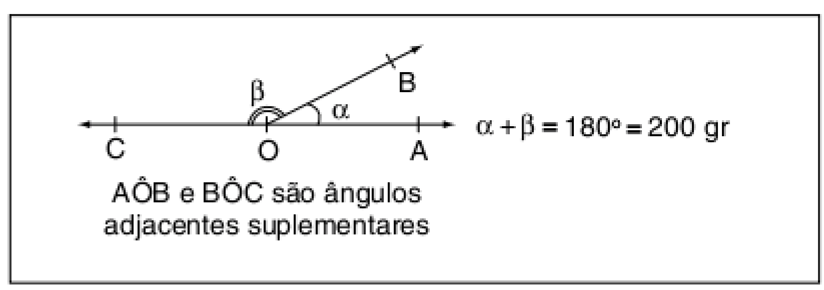


Fig. 8 Ângulos adjacentes suplementares.

Ângulo reto

Quando dois ângulos adjacentes suplementares são iguais, esses ângulos são chamados de retos.

Observando a figura anterior, se $\alpha = \beta$ e $\alpha + \beta = 180^o$, então $\alpha = \beta = 90^o$.

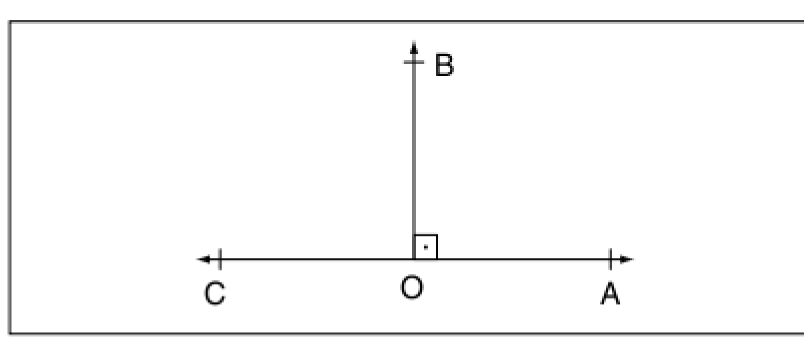


Fig. 9 Representação do ângulo reto.

Ângulo agudo e ângulo obtuso

Um ângulo agudo possui medida menor que 90º e o obtuso maior que 90º.

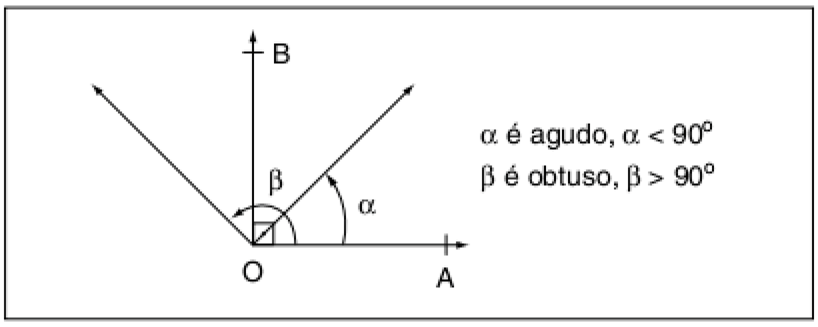


Fig. 10 Classificação quanto à medida.

Classificação dos ângulos quanto à soma

a) Complementares: dois ângulos são complementares quando a soma for 90º.
b) Suplementares: dois ângulos são suplementares quando a soma for 180º.
c) Replementares: dois ângulos são replementares quando a soma for 360º.

Observe o resumo da classificação.

Se a medida de um ângulo vale x, então:

- 90º – x é seu complemento;
- 180º – x é seu suplemento;
- 360º – x é seu replemento.

Bissetriz de um ângulo

A bissetriz do ângulo AÔB é a semirreta $\overline{OC}$ que o divide em dois ângulos adjacentes de mesma medida.

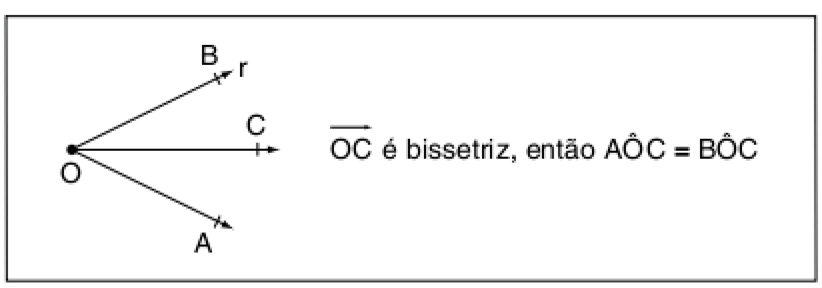


Fig. 11 Bissetriz de um ângulo.

Teoremas fundamentais

A seguir, vamos demonstrar três teoremas básicos da teoria angular.

Teorema 1

Ângulos opostos pelo vértice são congruentes

Hipótese: Considere dois ângulos opostos pelo vértice AÔB e CÔD.

Tese: AÔB = CÔD

Demonstração: Observe o desenho e a sequência de raciocínio a seguir.

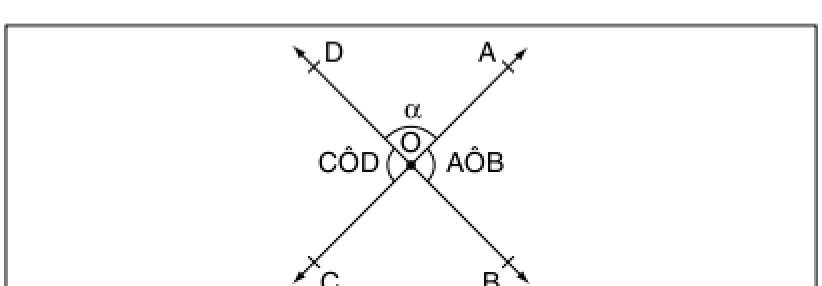


Fig. 12 Demonstração do teorema 1.

1) AÔB + α = 180º (adjacentes suplementares)
2) CÔD + α = 180º
3) Dos itens 1) e 2), percebemos que AÔB e CÔD possuem o mesmo suplemento (180º – α).
4) AÔB = CÔD (c.q.d.)

Teorema 2

Bissetrizes de ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares

Hipótese: AÔB e BÔC são ângulos adjacentes suplementares e $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ são suas respectivas bissetrizes.

Tese: DÔE = 90º

Demonstração:

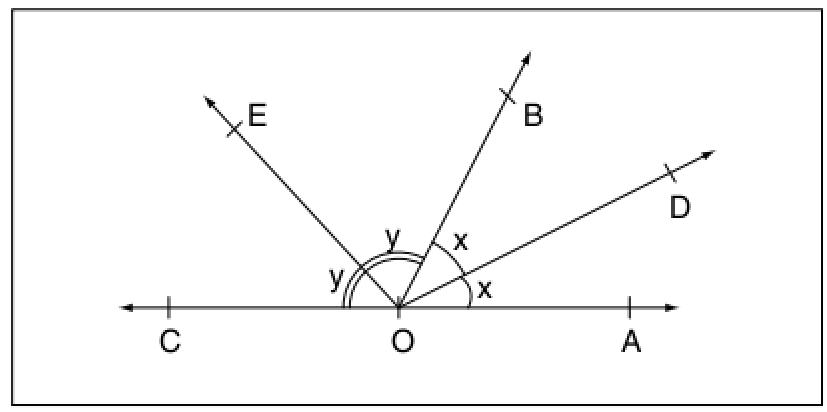


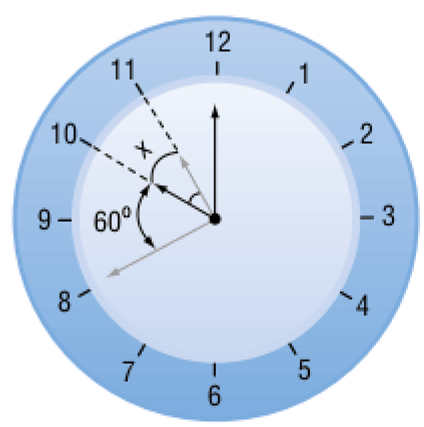
Fig. 13 Demonstração do teorema 2.

1) 2x + 2y = 180° ∴ x + y = 90° (adjacentes suplementares).
2) DÔE = x + y ∴ DÔE = 90° (c.q.d.)

Exercícios resolvidos

2 Problema do relógio:

Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 10h40min.



Resolução:

1) *Marcar a 1ª hora inteira anterior ao horário em questão.*
2) *Marcar o horário em questão definindo como x o ângulo percorrido pelo ponteiro pequeno.*
3) *Montar a equação referente ao horário, no caso y = 60º + x.*

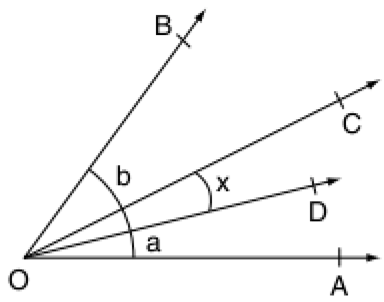
4) *Observar as regras de três das velocidades dos ponteiros:*

Ponteiro pequeno	*Ponteiro grande*
30º ——— 60 min	*360º ——— 60 min*

5) 30^o ——— 60 min $\therefore$ $x = \dfrac{(40)(30)}{(60)} = 20^o$
x ——— 40 min

6) *Assim,* $y = 60^o + x \therefore y = 80^o$

3 Considere os ângulos de medidas b e a da figura (b > a) e $\overline{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$. Calcule o valor de x.



Resolução:

1) $\overline{OC}$ *é bissetriz, assim* $B\hat{O}C = A\hat{O}C$

2) $B\hat{O}C = b - x$ *e* $A\hat{O}C = a + x$

3) *Assim:* $b - x = a + x \therefore \dfrac{b-a}{2} = x$

Teorema 3

Dois ângulos de lados paralelos ou são congruentes ou suplementares

Demonstração: A análise das figuras confirma os resultados do teorema ($\overline{AB} // \overline{DE}$ e $\overline{BC} // \overline{EF}$).

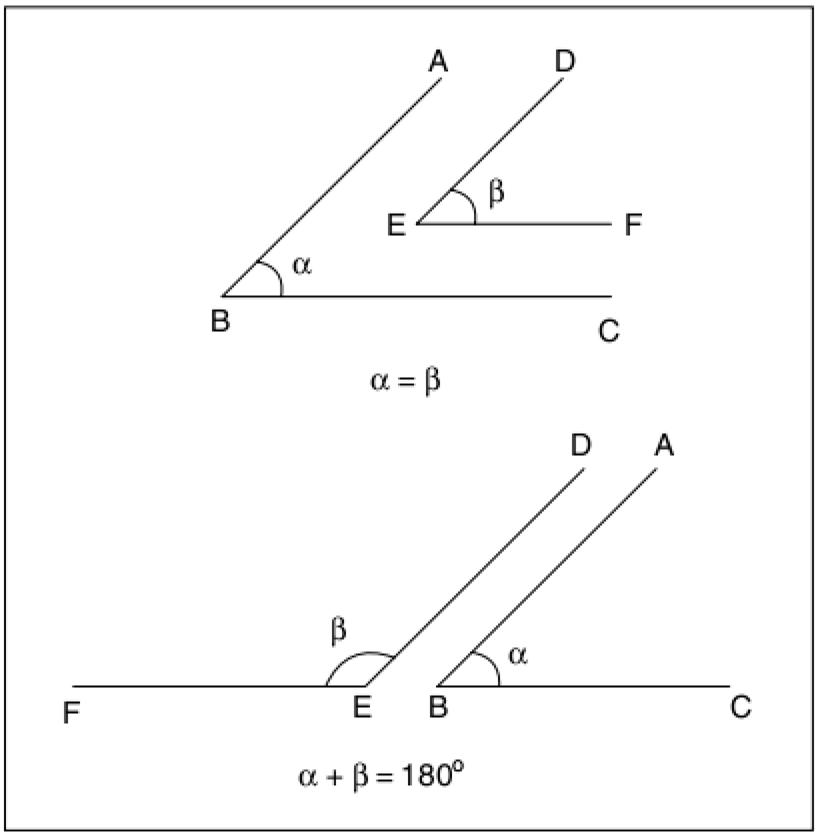


Fig. 14 Demonstração do teorema 3.

Revisando

1 Determine o ângulo cujo suplemento excede de 6º o quádruplo do seu complemento.

2 Dois ângulos suplementares medem $3x - 40^\circ$ e $2x + 60^\circ$. Determine o menor desses ângulos.

3 Quatro semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ formam os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, respectivamente proporcionais aos números 1, 2, 4 e 5. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$.

Exercícios propostos

Medidas de ângulos

1 Duas retas concorrentes formam 4 ângulos tais que a soma dos dois menores é a metade de um dos ângulos obtusos formados. Calcule o maior desses ângulos.

2 Determine o complemento, o suplemento e o replemento do ângulo de $67^\circ 42' 17''$.

3 Quatro semirretas formam em torno de um ponto ângulos cujas medidas sexagesimais são proporcionais aos números 2, 3, 5 e 8. Ache os ângulos.

4 Por um ponto P de uma reta r, traçam-se, do mesmo lado de r, duas semirretas. Calcule os três ângulos formados sabendo-se que suas medidas, expressas em graus, são números consecutivos.

5 As medidas sexagesimais de dois ângulos opostos pelo vértice são $(8x + 2)^\circ$ e $(3x + 12)^\circ$. Calcule x.

6 Calcule o ângulo que excede seu complemento de 40''.

Complemento, suplemento e replemento

7 Qual é o ângulo que somado à metade do seu replemento excede o seu suplemento de $\frac{3}{4}$ do seu complemento?

8 O dobro do suplemento de um ângulo vale sete vezes o seu complemento. Ache o ângulo.

9 A soma de dois ângulos é 78° e um deles vale os $\frac{3}{5}$ do complemento do outro. Ache os ângulos.

10 Calcule o complemento do ângulo agudo θ que satisfaz a relação:

$$2\theta + 2\alpha - 4\beta = 0$$

11 Calcule o suplemento do complemento de um ângulo de medida θ que satisfaz a relação:

$$3\theta - 6\alpha + 9\beta - 60^\circ = 0$$

Bissetriz de um ângulo

12 As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 38°. Um dos ângulos mede 41°. Calcule o outro.

13 XÔA, AÔB e BÔY são três ângulos consecutivos situados em um mesmo semiplano dos determinados pela reta XY, e OM, ON e OP são as suas respectivas bissetrizes. Calcule esses três ângulos, sabendo que XÔN é reto e que MÔP = 100°.

14 Dois ângulos adjacentes, de medidas x e y, estão na razão de 3 para 7. Sabendo que a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes é 30º, calcule x e y.

15 XÔY é um ângulo reto; OX é a bissetriz de um ângulo AÔB e OY é a bissetriz de um ângulo CÔD. Demonstre que AÔC e BÔD são suplementares.

16 Prove que uma reta perpendicular à bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice, forma ângulos iguais com os lados do ângulo.

17 OX e OY são as bissetrizes de dois ângulos adjacentes, AÔB e BÔC, ambos agudos, e tais que AÔB – BÔC = 36°; OZ é bissetriz do ângulo XÔY. Calcule o ângulo BÔZ.

Demonstrações

18 AÔB é um ângulo cuja bissetriz é OM e OC é uma semirreta externa a esse ângulo. Demonstre que o ângulo CÔM é igual à semissoma dos ângulos CÔA e CÔB.

19 AÔB é um ângulo cuja bissetriz é OM e OC é uma semirreta interna ao ângulo AÔM. Demonstre que o ângulo CÔM é igual à semidiferença dos ângulos BÔC e AÔC.

20 Prove que a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes complementares é constante.

Ângulos de um ponteiro de relógio

21 Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4h42.

22 **Fuvest** O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1h e 12 minutos é:

(a) 27º
(b) 30º
(c) 36º
(d) 42º
(e) 72º

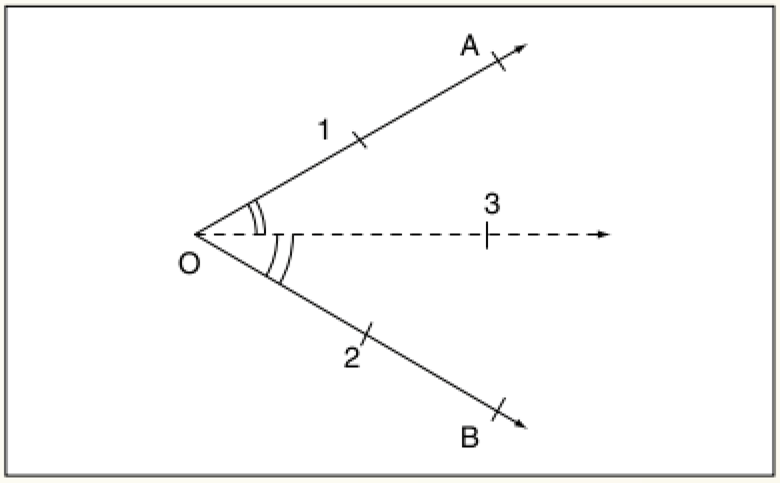
23 A que horas pela primeira vez após o meio-dia os ponteiros de um relógio formam 110°?

24 Se agora é uma hora da tarde, em qual horário o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas pela primeira vez?

TEXTOS COMPLEMENTARES

Bissetriz de um ângulo

Definição: A bissetriz de um ângulo AÔB é a semirreta $\overline{OC}$ que divide o ângulo em outros dois ângulos adjacentes e congruentes.
Propriedade: É o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados de um ângulo.
Construção geométrica da bissetriz:

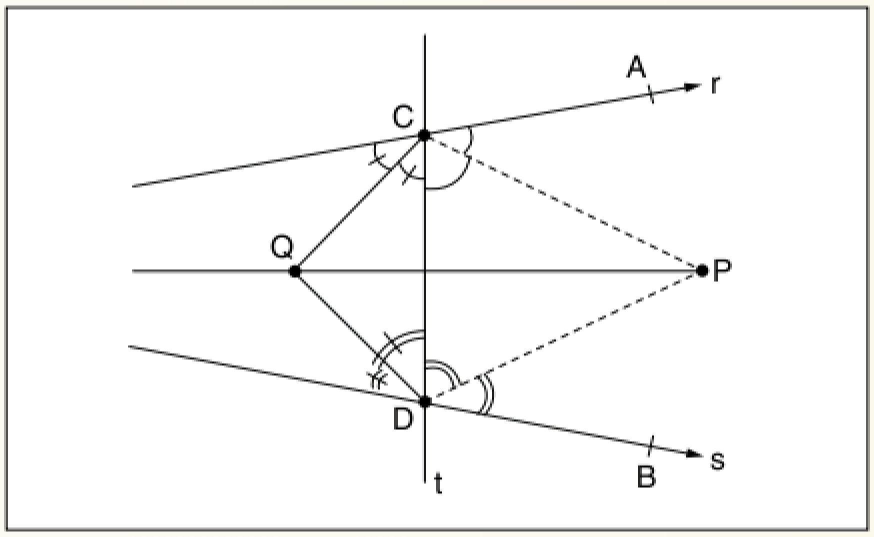


1) Ponta-seca do compasso em O e com abertura qualquer, marcar 1 e 2.
2) Ponta-seca do compasso em 1 e 2 e com mesma abertura, marcar 3.
3) Temos então $\overline{O3}$ a bissetriz de AÔB.

Determinação da bissetriz de um ângulo de vértice inacessível.

Vamos propor um método para obter geometricamente a bissetriz de um ângulo do qual não temos o vértice.

Observe a figura e o roteiro para obtermos a bissetriz.



1) Traçar a reta t concorrente a r e s.

2) Traçar as bissetrizes $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{DP}$.

3) $dp_{i}\ r = dp_{i}\ t$ e $dp_{i}\ s = dp_{i}\ t \Rightarrow dp_{i}\ r = dp_{i}\ s$.

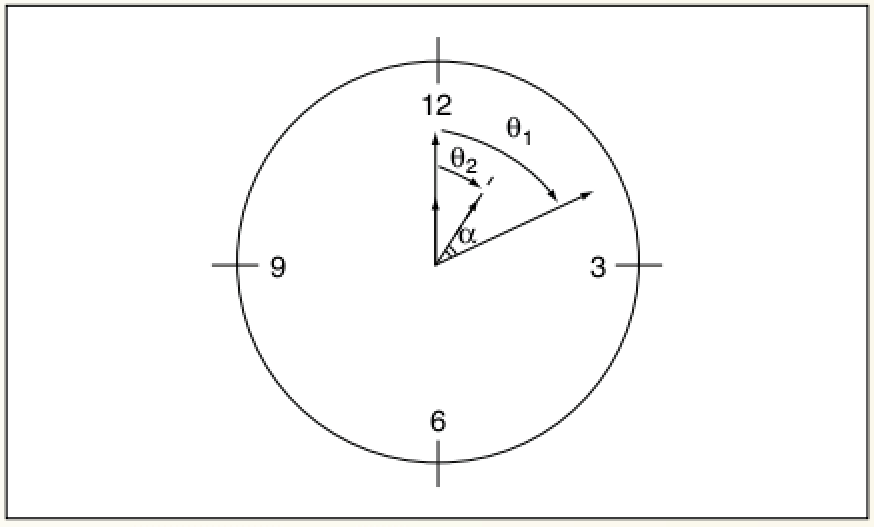
Portanto, $P \in$ bissetriz de r e s.

4) Construção análoga para Q.

5) $\overline{PQ}$ está na bissetriz de r e s.

Problema do ângulo formado pelos ponteiros de um relógio

Vamos determinar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca h horas e m minutos.



Considerando a posição inicial dos ponteiros a zero hora, em h horas e m minutos os ponteiros percorreram:

Ponteiro grande: $\theta_1 = 6\ m$

Ponteiro pequeno: $\theta_2 = 30\ h + \frac{m}{2}$

Em θ_1, marcamos somente o ângulo percorrido pelo ponteiro grande em m minutos, pois em h horas ele dá h voltas completas.

Assim:

$$\alpha = |\theta_1 - \theta_2| = \left|30\ h + \frac{m}{2} - 6\ m\right| =$$

$$= \left|30\ h - \frac{11}{2}\ m\right|$$

$h = 0; 1; 2; \ldots ; 11$ e $m = 0, 1; 2; \ldots ; 59.$

Exemplos: Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio:

a) às 4 h e 20 min.
b) à 1 h e 40 min.

Resolução:

a) $\alpha = \left|30\ h - \frac{11\ m}{2}\right| = \left|30\ .\ 4 - 11\ .\ \frac{20}{2}\right| =$

$= \left|120° - 110°\right| = 10°$

b) $\alpha = \left|30\ h - \frac{11\ m}{2}\right| = \left|30\ .\ 1 - \frac{11\ .\ 40}{2}\right| =$

$= \left|30° - 220°\right| = 190°$

Como queremos o menor ângulo, basta calcularmos o replementar de 190° que é 170°.

RESUMINDO

Com este capítulo, terminamos a fase inicial da geometria. Adquirindo as noções básicas de segmentos e ângulos, poderemos começar a estudar triângulos.

As noções básicas de ângulos compreendem classificá-los quanto à medida (agudo, reto e obtuso) e quanto à soma (complementares, suplementares e replementares).

No primeiro texto complementar, temos a importante noção de bissetriz.

Devemos destacar também a propriedade de que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

QUER SABER MAIS?

LIVRO

- Altineu Pires Miguens. *Navegação: a ciência e a arte - volume II: navegação astronômica e derrotas.*

SITE

- <www.mar.mil.br/dhn/bhmn/publica_manualnav2.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 O quíntuplo do suplemento do complemento de um ângulo é igual ao triplo do replemento do seu suplemento. Ache o ângulo.

2 Do ponto A de uma reta $\overleftrightarrow{XY}$, traça-se a semirreta $\overrightarrow{AB}$ que forma com $\overleftrightarrow{XY}$ um ângulo de 75°; do mesmo ponto A e no outro semiplano dos determinados por $\overleftrightarrow{XY}$, traça-se a semirreta $\overrightarrow{AC}$, que forma com $\overleftrightarrow{XY}$ dois ângulos cujas medidas diferem de 50°. Ache os três ângulos incógnitos formados em torno do ponto A.

3 Seja $A\hat{O}B$ um ângulo e r uma reta do seu plano que contém O e que está situada na região não convexa e sejam $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos agudos que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ formam com r. Se $A\hat{O}B = 150°$, calcule $X\hat{O}Y$.

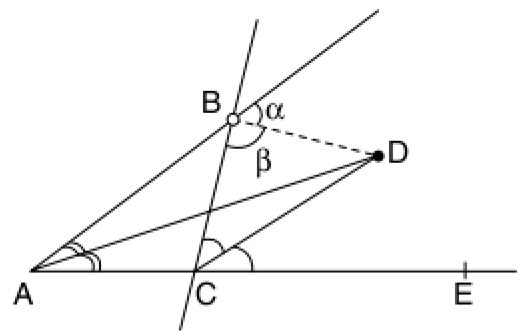
4 Entre 4 e 5 horas, o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Quais são esses momentos?

5 Pelo ponto C de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, traçam-se, em um mesmo semiplano dos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$, as semirretas $\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{CT}$ e $\overrightarrow{CR}$. O ângulo $A\hat{C}Q$ é o dobro do ângulo $Q\hat{C}T$ e o ângulo $B\hat{C}R$ é o dobro do ângulo $R\hat{C}T$. Calcule o ângulo $Q\hat{C}R$.

6 $X\hat{O}T$ é um ângulo raso; as semirretas $\overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{OZ}$ decompõem esse ângulo em três outros tais que $X\hat{O}Y = 2Y\hat{O}Z$ e $Y\hat{O}Z = \dfrac{Z\hat{O}T}{3}$. Calcule os dois ângulos consecutivos formados pelas bissetrizes dos ângulos $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$ e $Z\hat{O}T$.

7 Da medida de um ângulo, tira-se sua terça parte. Calculamos depois a metade do suplemento do que restou. Obtemos por meio dessas operações o valor de 60º. Qual a medida do ângulo?

8 Na figura a seguir, $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$ e $\overrightarrow{CD}$ é bissetriz de $B\hat{C}E$. Demonstre que $\alpha = \beta$.

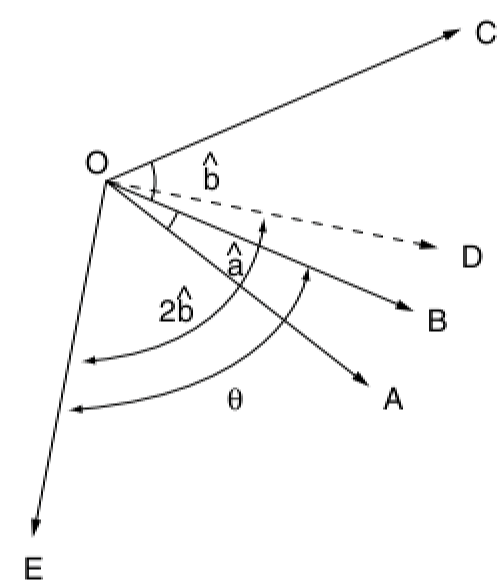


9 Por um ponto O de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, traçam-se, em um mesmo semiplano dos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$, as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$. Calcule os ângulos consecutivos $A\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}B$, sabendo que o ângulo $A\hat{O}C$ é o dobro do ângulo $D\hat{O}B$ e que a soma desses dois ângulos vale cinco vezes o ângulo $C\hat{O}D$.

10 Prove que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

11 As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e a reta r ($O \in r$) formam em um mesmo semiplano três ângulos adjacentes expressos em grados por $2x + 10$, $5x - 3$ e $x + 25$. Determine os três ângulos.

12 Calcule o ângulo θ em função de $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sabendo que $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$.



13 A diferença entre os inversos das medidas de um arco em graus e em grados é igual ao quociente da sua medida em radianos por 2π. Determine a medida desse arco em graus.

3

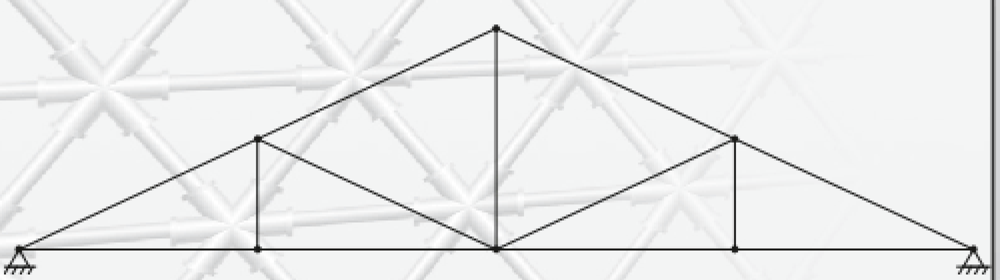
Triângulos

FRENTE 3

Resistência dos materiais é a ciência que estuda o comportamento dos materiais ao sofrerem todos os tipos de esforços mecânicos como tração, compressão, torção, flexão.

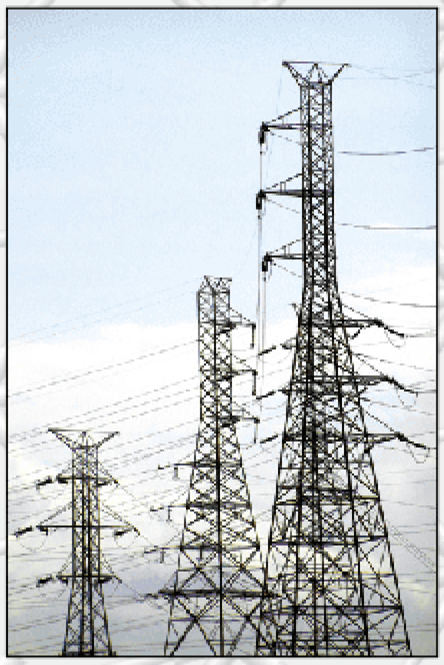
Uma estrutura comprovadamente segura e barata em todo o tipo de construção, principalmente na construção civil, são as treliças.

Treliças são sistemas constituídos por elementos indeformáveis unidos entre si por articulações. As composições dessas articulações formam vários triângulos.



REPRODUÇÃO

Ponte de macarrão.



XIANSTUDIO/MORGUEFILE

Postes de alta tensão.

© FEVERPITCHED | DREAMSTIME.COM

Cobertura de uma habitação.

Triângulos

Definição de triângulo

Considere três pontos distintos não colineares (não estão na mesma reta suporte) A, B e C. Os segmentos formados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ são chamados de lados do triângulo e da união desses três segmentos temos o triângulo.

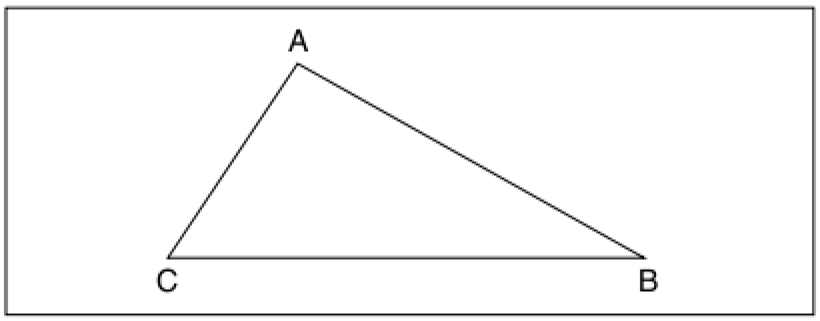


Fig. 1 $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$.

Elementos básicos

Um triângulo qualquer possui os elementos básicos ilustrados a seguir na figura 2.

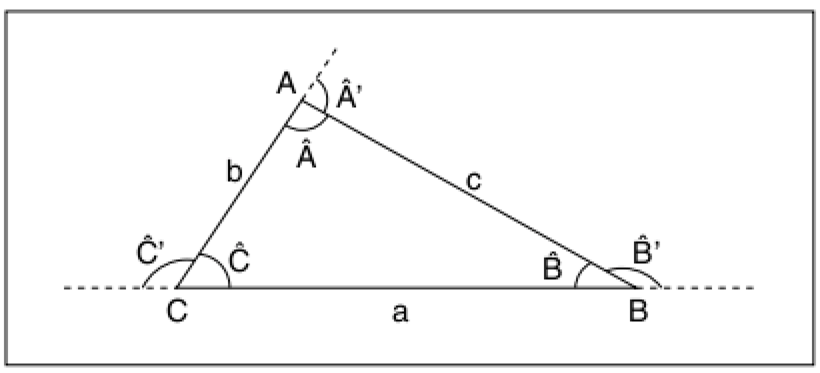


Fig. 2 Elementos básicos do triângulo.

- $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$: são os ângulos internos do triângulo.
- a, b e c: são as medidas dos lados.
- $\hat{A}$', $\hat{B}$' e $\hat{C}$': são os ângulos externos do triângulo.
- 2p = a + b + c: perímetro é a soma dos lados do triângulo.

Classificação dos triângulos

Existem duas maneiras de classificar os triângulos:

a) Lados:

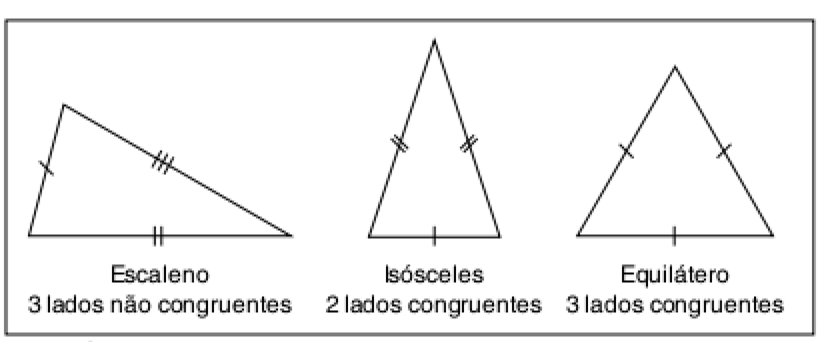


Fig. 3 Classificação quanto aos lados.

b) Ângulos:

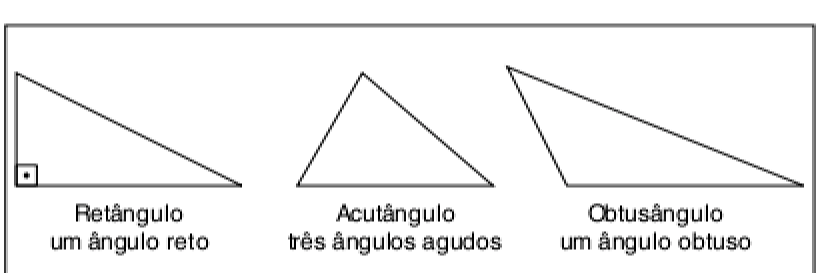


Fig. 4 Classificação quanto aos ângulos.

Cevianas de um triângulo

Ceviana é qualquer segmento que une o vértice até um ponto do lado oposto (ou do prolongamento do lado). A seguir, apresentaremos as principais cevianas de um triângulo.

Altura

Ceviana que é perpendicular a um dos lados do triângulo. Observe os exemplos:

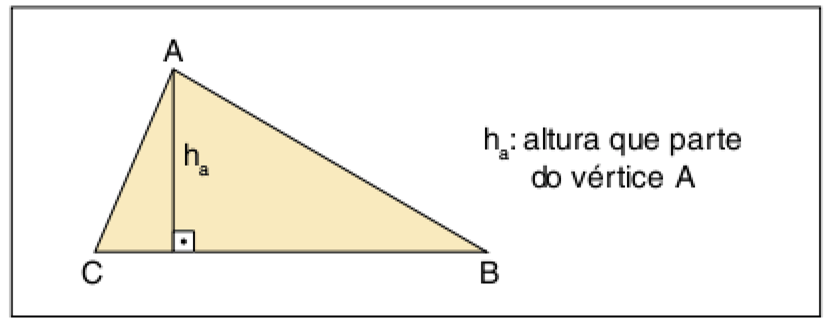


Fig. 5 Altura de um triângulo.

Em um triângulo retângulo, o lado c é lado e ao mesmo tempo altura relativa ao lado b.

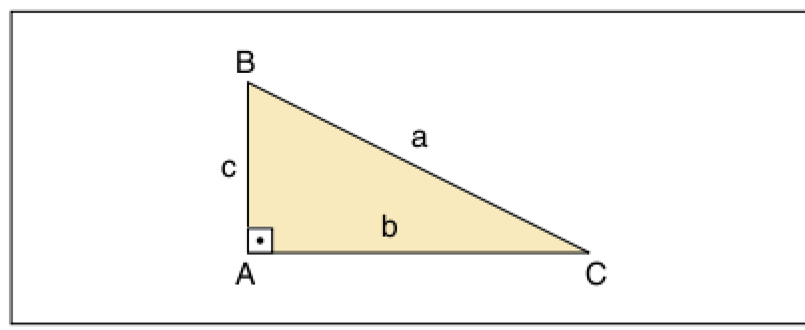


Fig. 6 Triângulo retângulo.

Em um triângulo obtusângulo, h_b é a altura relativa ao lado b (ao prolongamento do lado).

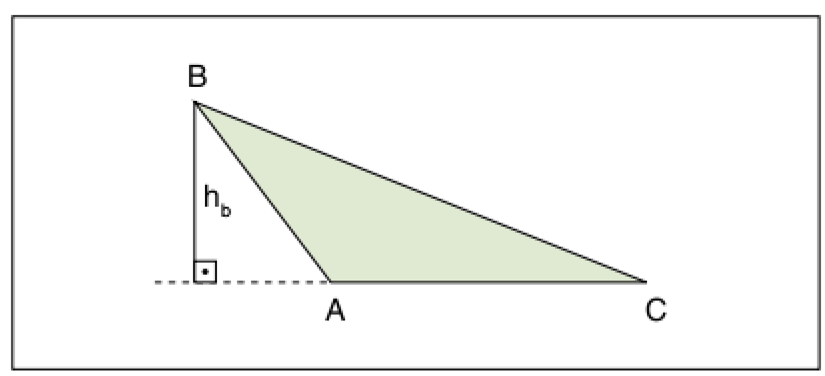


Fig. 7 Triângulo obtusângulo.

Mediana

Ceviana que une um vértice até o ponto médio do lado oposto. Observe a figura 8:

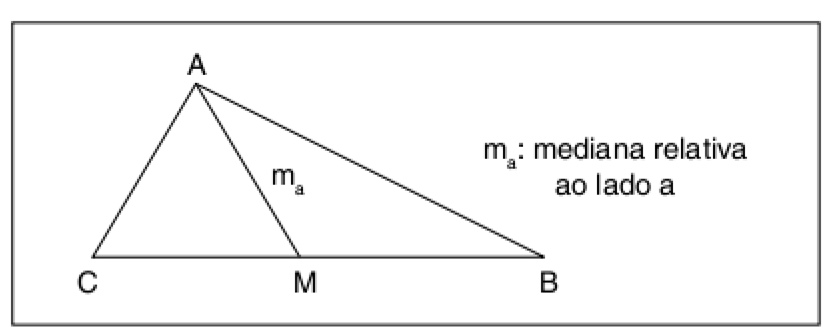


Fig. 8 Mediana ($\overline{MC} = \overline{MB}$).

Bissetriz interna

Ceviana que pertence à bissetriz do ângulo interno do triângulo. Observe a figura 9:

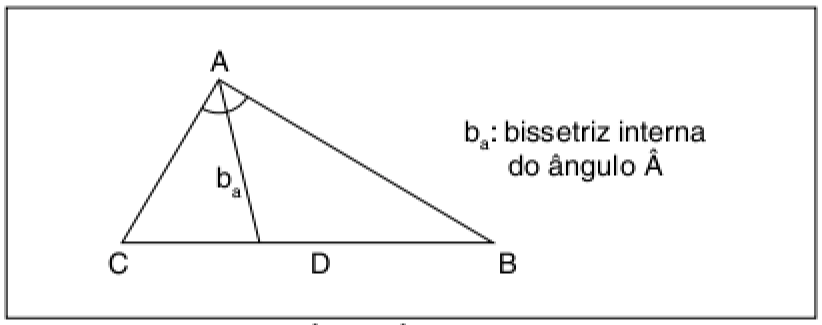


Fig. 9 Bissetriz interna (CÂD = BÂD).

Bissetriz externa

Ceviana que pertence à bissetriz do ângulo externo do triângulo. Observe a figura 10:

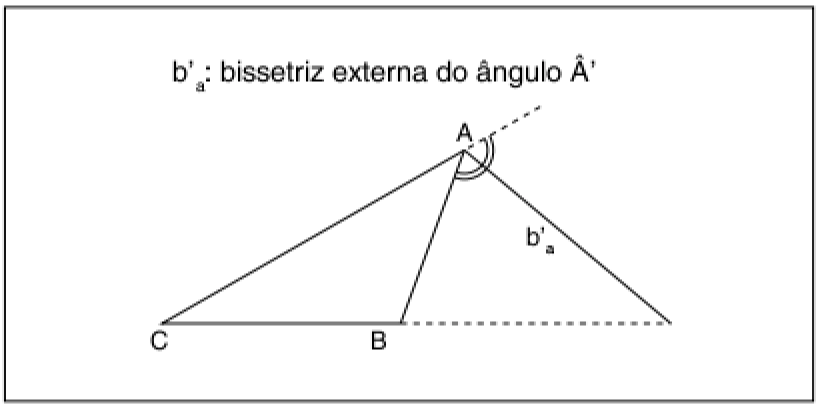


Fig. 10 Bissetriz externa.

Desigualdade triangular

Não podemos indiscriminadamente montar um triângulo com três segmentos quaisquer. Para entender a condição de existência de um triângulo, observe o seguinte postulado.

Postulado da distância mínima

A menor distância entre dois pontos é a do segmento de reta que une os pontos.

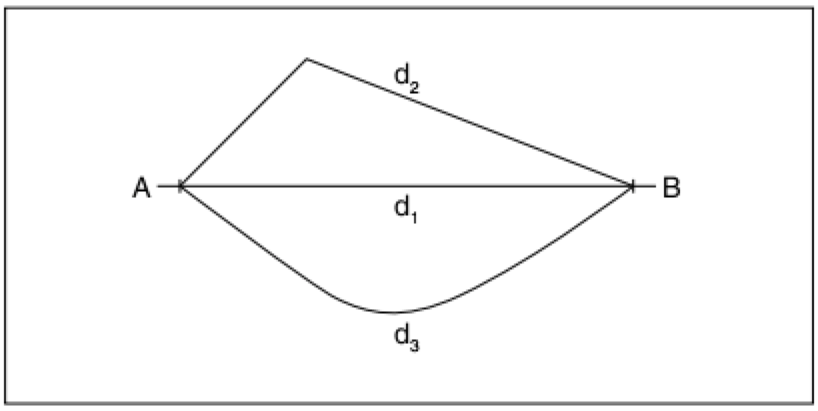


Fig. 11 Postulado da distância mínima.

$d_1 < d_2$ e $d_1 < d_3$
d_1 é a menor distância
$d_1 = \text{med}\ (\overline{AB})$

Condição de existência do triângulo

Hipótese: a, b e c são as medidas dos três lados de um triângulo.
Tese: Qualquer lado do triângulo é maior que a diferença e menor que a soma dos outros lados (ou seja: $|b - c| < a < b + c$).

Demonstração:
Considere o ΔABC a seguir.

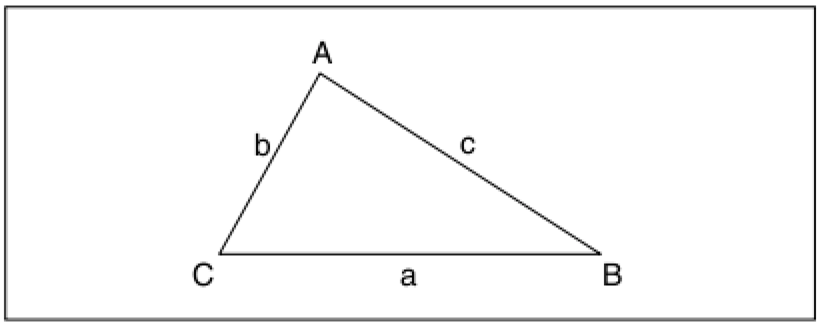


Fig. 12 Demonstração da condição de existência do ΔABC.

1. $\overline{CB}$, pelo postulado da distância mínima $a < b + c$
2. $\overline{AC}$ temos $b < a + c$
3. $\overline{AB}$ temos $c < a + b$
4. de 1 temos que $a < b + c$ e de 2 temos $b < a + c$ $\therefore$ $b - c < a$
5. de 4 $|b - c| < a < b + c$ (c.q.d.)

Exercícios resolvidos

1 Verifique se os segmentos de medidas 6 cm, 7 cm e 11 cm podem formar um triângulo.

Resolução:
Pela condição, vamos escolher um lado qualquer e compará-lo com a diferença e a soma dos outros, então:
$7 - 6 < 11 < 7 + 6 \therefore 1 < 11 < 13$
A desigualdade é verdadeira, logo existe o triângulo.

2 Demonstrar que qualquer lado de um triângulo é menor que seu semiperímetro.

Resolução:
Seja a, b e c a medida dos lados de um triângulo, sabemos que:
$a < b + c \therefore a + a < a + b + c \therefore$ *(acrescentando-a nos dois membros)*
$\therefore 2a < 2p \therefore a < p$

3 Considere um triângulo isósceles que possui lados de medidas 8 cm e 18 cm. Calcule a medida do terceiro lado.

Resolução:
Seja x o terceiro lado, ele deve satisfazer a desigualdade:
$18 - 8 < x < 18 + 8 \therefore 10 < x < 26,$
assim $x = 18$ *cm.*

Congruência de triângulos

Inicialmente, vamos utilizar a intuição. Podemos dizer que 2 triângulos são congruentes se eles tiverem a mesma forma e o mesmo tamanho.

Definição:

ΔABC é congruente ao ΔA'B'C' se, e somente se, todos os lados e ângulos correspondentes forem congruentes.

Observe a figura 13:

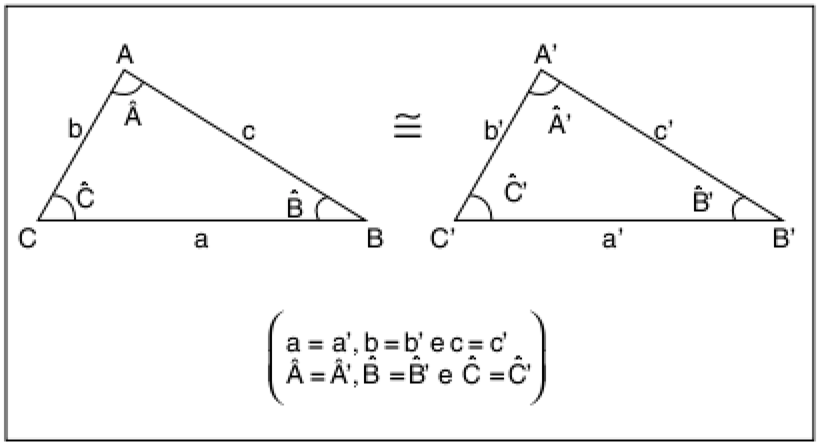


Fig. 13 Triângulos congruentes.

Vale ressaltar o cuidado que foi tomado no capítulo 1 com segmentos congruentes. Mantendo a precisão do conceito, triângulos congruentes não são triângulos iguais. Eles são triângulos que possuem as mesmas medidas lineares e angulares, mas que estão em posições distintas.

Critérios de congruência

De acordo com a definição apresentada anteriormente, para comprovarmos que dois triângulos são congruentes, devemos demonstrar que todos os elementos correspondentes são iguais. Esse trabalho torna-se inconveniente. Os critérios de congruência são condições mínimas que garantem a igualdade desses triângulos. Observe os critérios a seguir.

LAL (lado – ângulo – lado)

Esse critério de congruência é um postulado. Observe o esquema e um exemplo a seguir.

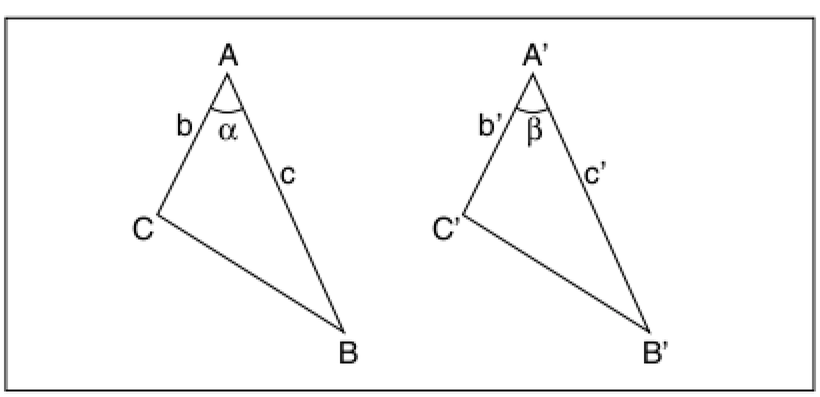


Fig. 14 Critério LAL.

$$\left.\begin{array}{l} b = b' \\ c = c' \\ \alpha = \beta \end{array}\right. \text{ então, } \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

No início, definimos o triângulo isósceles como sendo o triângulo que possui 2 lados congruentes.

Agora com esse critério, podemos apresentar e demonstrar propriedades muito importantes.

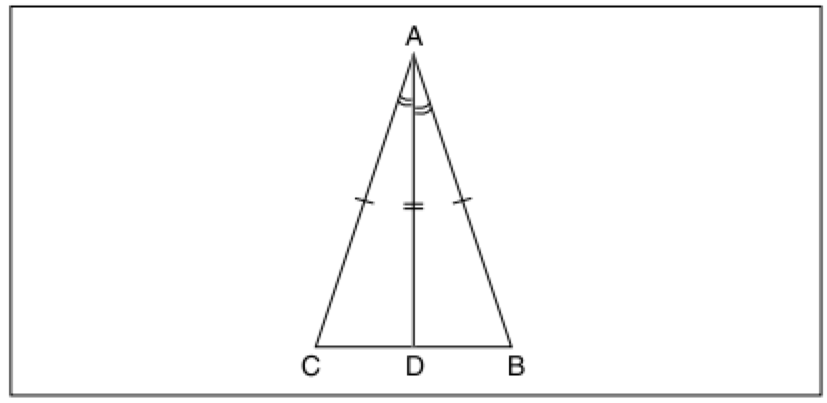


Fig. 15 Critério LAL.

1. traçar a bissetriz interna de $\hat{A}$
2. $\Delta CAD \cong \Delta BAD$ (critério LAL)
3. de 2 temos elementos correspondentes iguais. (ângulos da base iguais), $\overline{CD} = \overline{DB}$ (D é ponto médio)
4. os ângulos $C\hat{D}A$ e $B\hat{D}A$ são iguais por causa do item 2 e também são adjacentes suplementares, logo $C\hat{D}A = B\hat{D}A = 90^o$

Triângulo isósceles

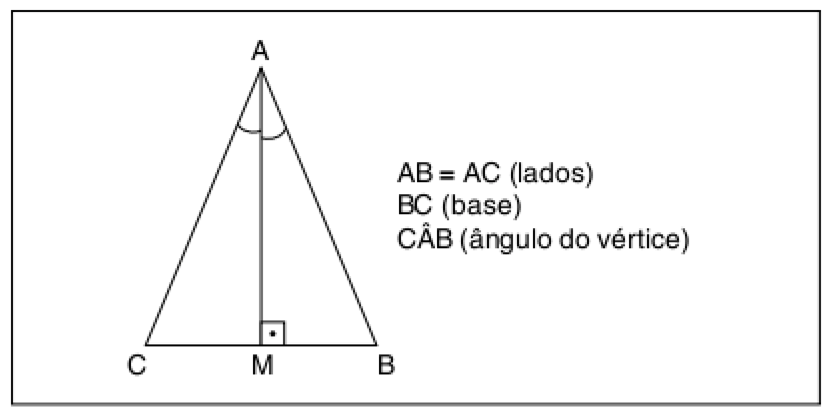


Fig. 16 Triângulo isósceles.

- ângulos da base são iguais: $A\hat{C}B = A\hat{B}C$
- AM é mediana: MC = MB
- AM é bissetriz interna: $C\hat{A}M = B\hat{A}M$
- AM é altura: $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

ALA (ângulo – lado – ângulo)

Dois triângulos que possuem ordenadamente um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado são congruentes. Simbolicamente, temos:

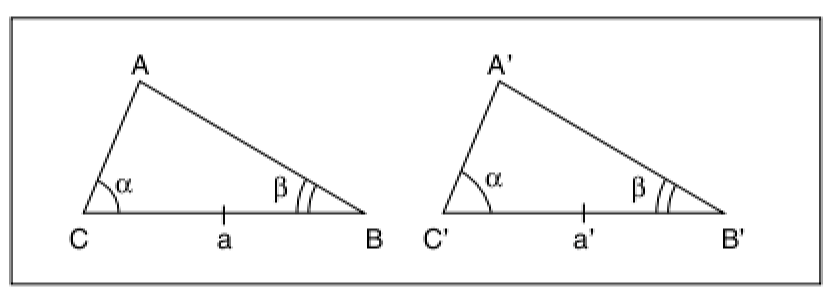


Fig. 17 Critério ALA.

$$\left.\begin{array}{l} a = a' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right. \quad \text{então, } \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

LAAo (lado – âng. adjacente – âng. oposto)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Simbolicamente, temos:

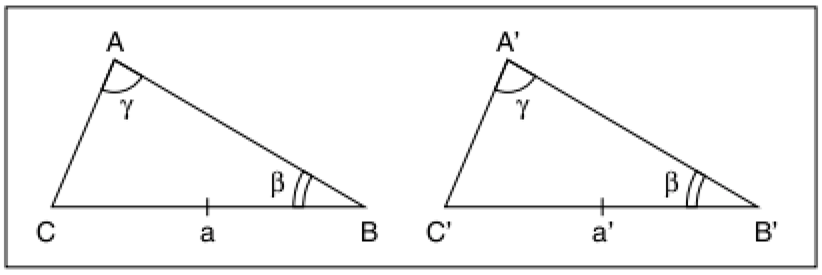


Fig. 18 Critério LAAo.

$a = a'$

$\hat{B} = \hat{B}'$ então, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

$\hat{A} = \hat{A}'$

Observe que esse critério é uma consequência do critério ALA, no esquema anterior $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$; logo, $\hat{C} = \hat{C}'$ (admitindo, é claro, que a soma dos ângulos do triângulo é constante).

LLL (lado – lado – lado)

Se dois triângulos possuem os três lados congruentes, então ambos são congruentes. Vamos demonstrar esse caso por ser muito instrutivo para o aprendizado.

Hipótese: Os três lados de dois triângulos são iguais.
Tese: Os triângulos são congruentes.
Demonstração:

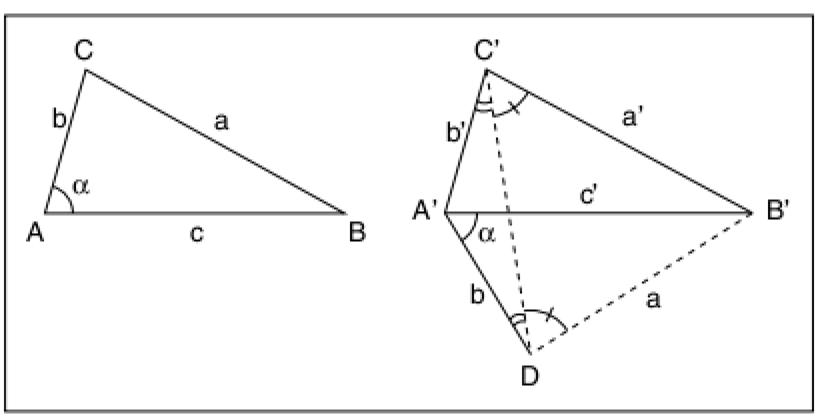


Fig. 19 Demonstração de congruência.

1. marcar o ângulo $C\hat{A}B = \alpha$ no vértice A' e $\overline{A'D} = b$
2. como $C = C'$, $\Delta ACB \cong \Delta A'DB'$, (critério LAL, então $\overline{DB'} = a$)
3. traçar $\overline{C'D}$, $\Delta C'A'D$ e $\Delta C'B'D$ são triângulos isósceles
4. observe na figura 19 que $A'\hat{C}'B' = A'\hat{D}B'$, logo $\Delta A'DB' \cong \Delta A'C'B'$
5. de 2 e 4 por transitividade, temos: $\Delta ACB \cong \Delta A'C'B'$ (c.q.d.)

ATENÇÃO!

O único critério não demonstrável é o LAL, por ser um postulado. Todos os outros possuem demonstração.

Casos especiais

São os critérios de congruência válidos somente para **triângulos retângulos**:

I. Se dois triângulos retângulos possuem dois catetos iguais, então são congruentes. Simbolicamente, temos:

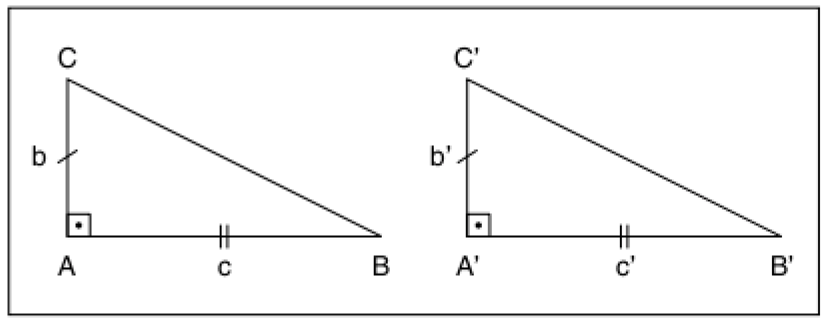


Fig. 20 Caso especial.

$b = b'$
$C = C'$ então, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

II. Se dois retângulos possuem ordenadamente um cateto e a hipotenusa iguais, então são congruentes. Simbolicamente, temos:

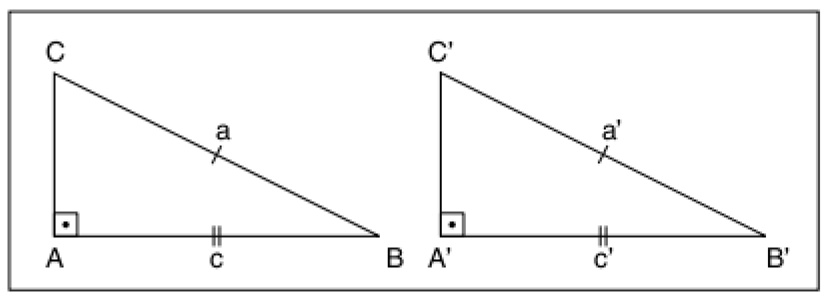
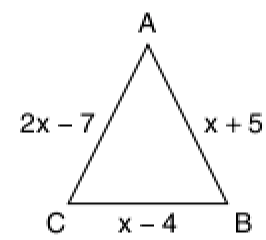


Fig. 21 Caso especial.

$a = a'$
$C = C'$ então, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Exercícios resolvidos

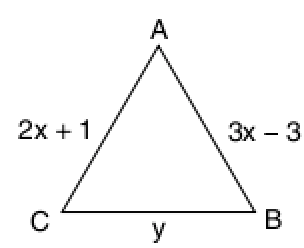
4 Se o ΔABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x.



Resolução:

Como o ΔABC é isósceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$; então $2x - 7 = x + 5 \therefore x = 12$, $\overline{AC} = x + 5 = 12 + 5 = 17$ e $\overline{BC} = x - 4 = 12 - 4 = 8$.

5 Se o ΔABC é equilátero, determine x, y e o perímetro do triângulo.



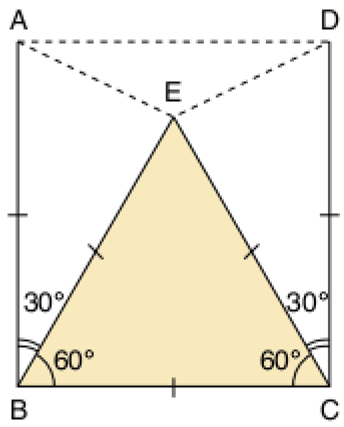
Resolução:

Como o ΔABC é equilátero, temos que

$2x+1=3x-3 \therefore x=4,\ y=2x+1 \therefore y=2.4+1 \therefore y=9.$

O perímetro é a soma dos três lados, assim $2p = 3y = 27$.

6 Na figura a seguir, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ e $A\hat{B}C = D\hat{C}B = 90^o$.
O triângulo BCE é equilátero.
Demonstre que o triângulo AED é isósceles.



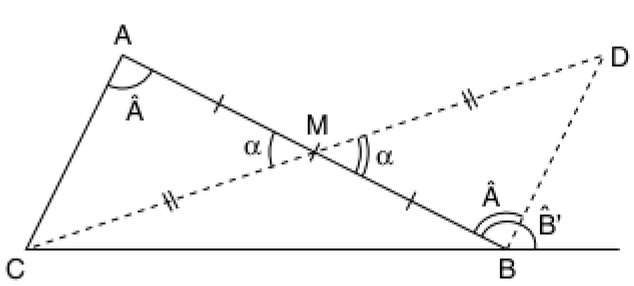
Resolução:

I. *ΔBCE é equilátero, então $\hat{B} = \hat{C} = 60^o$ e $\overline{BE} = \overline{EC} = \overline{BC}$.*

II. *$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares a $\overline{BC}$, logo ΔABE e ΔDEC são isósceles com ângulo do vértice de 30^o.*

III. *$\Delta ABE \cong \Delta DCE$ (critério LAL); logo $\overline{AE} = \overline{ED}$, o ΔAED é isósceles (c.q.d.).*

7 Este exemplo é um teorema de consequências importantíssimas para o próximo capítulo.
Demostre que: "Um ângulo externo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes."
Hipótese: No ΔABC, $\hat{B}'$ é ângulo externo do vértice B.
Tese: $\hat{B}' > \hat{A}$ e $\hat{B}' > \hat{C}$
Demonstração:



Resolução:

I. *Marcar M tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$*

II. *C, M e D estão alinhados e $\overline{CM} = \overline{MD}$*

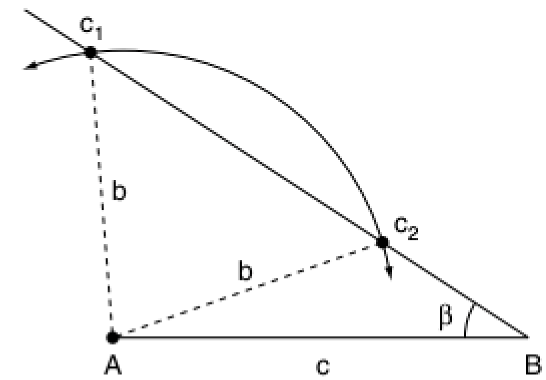
III. *$\Delta AMC \cong \Delta BMD$(LAL), assim: $A\hat{B}D = \hat{A}$*

IV. *Logo, $\hat{B}' > \hat{A}$, processo análogo para $\hat{B} > \hat{C}$ (c.q.d.).*

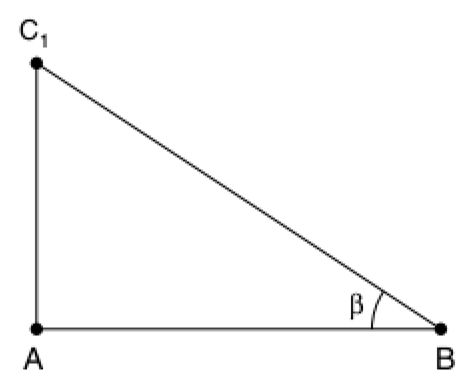
8 LLA (lado-lado-ângulo) pode ser um critério de congruência?

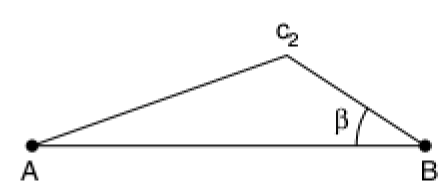
Resolução:

Devemos construir um triângulo com essas condições e analisar a possibilidade de existir um outro triângulo com os mesmos elementos. Observe os traçados da construção do triângulo.



Podemos construir 2 triângulos com os lados b e c e o ângulo β. Observe:



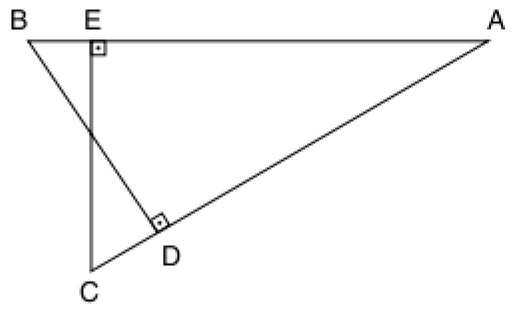


Logo, LLA não pode ser um critério de congruência, pois construímos 2 triângulos distintos ΔC_1AB e ΔC_2AB.

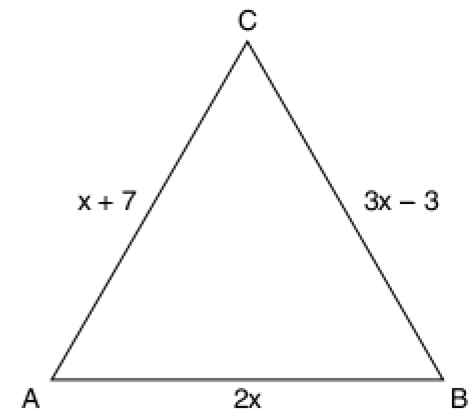
Revisando

1 As medidas dos lados de um triângulo escaleno são 4, 8 e x ($x \in \mathbb{Z}$). Quais são os possíveis valores de x?

2 Na figura a seguir, temos $\overline{AE} = \overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{EC}$ e $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Prove que $\overline{BD} = \overline{CE}$.



3 A figura a seguir representa um triângulo isósceles ABC.



Descubra a medida da base $\overline{AB}$.

Exercícios propostos

Desigualdades triangulares e classificação de triângulos

1 $\overline{AB} = 15$ cm e $\overline{BC} = 8$ cm são dois lados de um triângulo ABC. Determine entre que limites pode variar a medida do lado $\overline{AC}$.

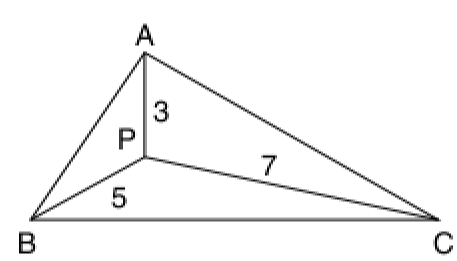
2 $\overline{AB} = 12$ cm e $\overline{BC} = 5$ cm são dois lados de um triângulo isósceles ABC. Determine a medida do lado $\overline{AC}$.

3 Se dois lados de um triângulo isósceles medem 38 cm e 14 cm, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

4 Com os segmentos de medidas 8 cm, 5 cm e 18 cm pode-se construir um triângulo? Justifique.

5 Prove que qualquer lado de um triângulo é menor que o semiperímetro.

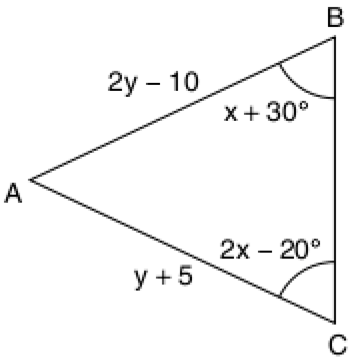
6 P está no interior do ΔABC, de perímetro s.



Sabendo que o ângulo $A\hat{P}B > 90^o$, $A\hat{P}C > 90^o$ e $B\hat{P}C > 90^o$, o intervalo que melhor limita os valores de s é:

(a) $0 < s < 15$
(b) $8 < s < 20$
(c) $0 < s < 25$
(d) $19 < s < 30$
(e) $8 < s < 25$

7 Se o ΔABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x e y.



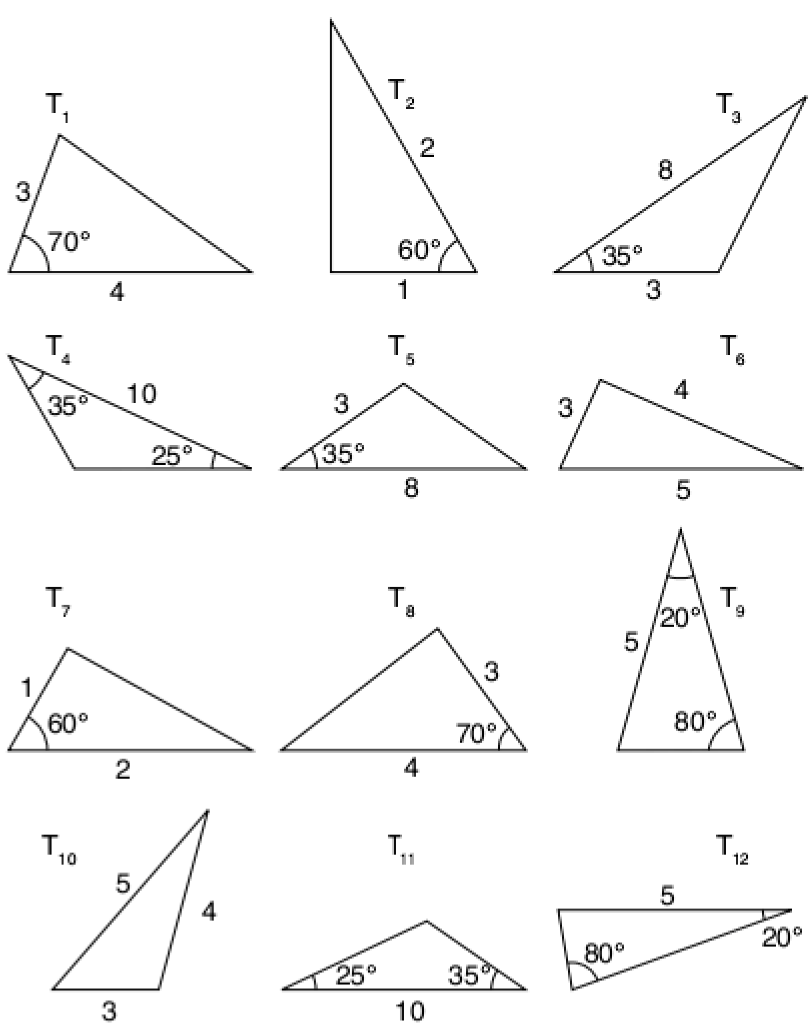
8 Os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles são os vértices de que triângulo?

9 Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

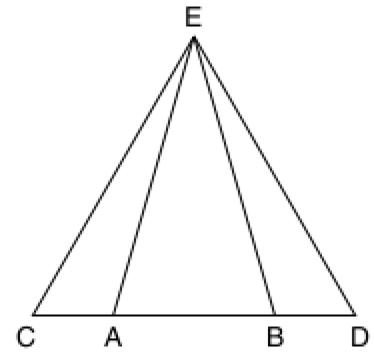
- [ ] Todo triângulo isósceles é equilátero.
- [ ] Todo triângulo equilátero é isósceles.
- [ ] Um triângulo obtusângulo pode ser equilátero.
- [ ] Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.
- [ ] Existe triângulo retângulo isósceles.
- [ ] Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou é equilátero.
- [ ] Todos os triângulos isósceles são congruentes.
- [ ] Todos os triângulos retângulos isósceles são congruentes.

Congruência de triângulos

10 Considere os triângulos T_1, $T_2 \ldots T_{12}$. Agrupe os triângulos congruentes indicando o critério utilizado.



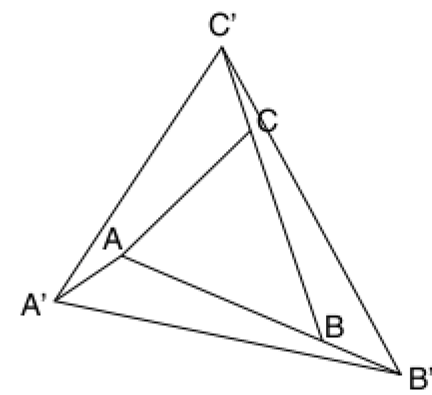
11 Na figura a seguir, tem-se $\overline{AC} = \overline{BD}$ e $m(E\hat{A}B) = m(E\hat{B}A)$.



Assinale a alternativa falsa.

(a) $\Delta ECB \cong \Delta EAD$
(b) $\Delta EAB \cong \Delta ECD$
(c) $\Delta EAC \cong \Delta EDB$
(d) $\Delta EBD \cong \Delta ECA$
(e) $\Delta CAE \cong \Delta DBE$

12 É dado o ΔABC equilátero. Os pontos A', B' e C' estão sobre as semirretas $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, tais que $AA' = BB' = CC'$. Prove que $\Delta A'B'C'$ também é equilátero.



13 Qual o triângulo cujas altura, mediana e bissetriz interna, traçadas de um mesmo vértice, são congruentes?

14 Classifique o triângulo que possui duas alturas iguais.

15 Prolonga-se a mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC de um segmento $\overline{MD} = \overline{MA}$ e une-se D com B. Mostre que $\overline{BD} = \overline{AC}$.

16 A e B são pontos dos lados de um ângulo de vértice O, tais que $\overline{OA} = \overline{OB}$, e C é um ponto qualquer da bissetriz desse ângulo. Compare:

I. os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
II. os ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{B}C$.

17 $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ são as bissetrizes de dois ângulos consecutivos iguais, $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$. Sobre as semirretas $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{ON}$ e $\overrightarrow{OZ}$ tomam-se segmentos iguais: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE}$. Compare:

I. os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$.
II. os ângulos.
III. os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$.

18 M e N são pontos da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC, tais que $\overline{MB} = \overline{NC}$. Classifique o triângulo AMN.

19 M e N são pontos dos prolongamentos da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC, tais que $\overline{MB} = \overline{NC}$. Calcule $\dfrac{AM}{AN}$.

TEXTOS COMPLEMENTARES

A trajetória da luz

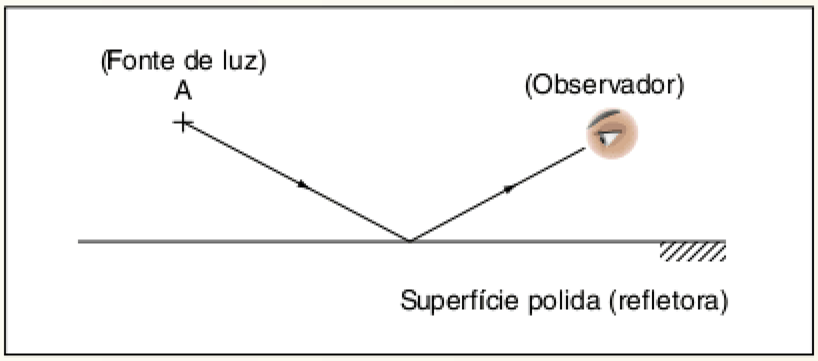
Sabemos, pela óptica geométrica, que a luz se propaga nos meios homogêneos, transparentes e isótropos em linha reta. Esse é o princípio da propagação retilínea da luz, que nos dá condições de trabalhar com a luz como se fosse uma reta, o que transforma os problemas de óptica geométrica em problemas de geometria plana.

Por se tratar de um princípio, a sua veracidade é comprovada por experiências, então todo princípio pode ser alterado ou derrubado caso encontre um contraexemplo.

No espaço (vácuo), a luz solar caminha em linha reta, mas ao se aproximar da atmosfera de algum planeta as propriedades do meio começam a se modificar, o princípio deixa de ser válido e a luz faz uma "curva".

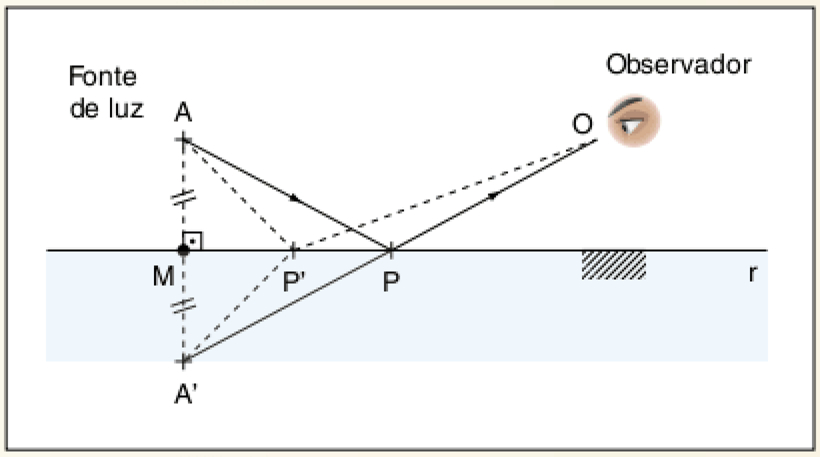
Mas o que queremos neste texto é mostrar a Matemática como uma ferramenta que nos auxilia a compreender os fenômenos da natureza.

O outro princípio de sua importância na óptica é o Princípio de Fermat da distância mínima, que diz que a luz percorre sempre a distância mínima do seu percurso. Observe:



Reflexão da luz.

A fonte de luz emite um raio de luz que percorre a trajetória descrita anteriormente, obedecendo ao princípio da natureza. Agora, por meio dos princípios e dos teoremas matemáticos, vamos determinar essa trajetória. Observe a sequência de construções e raciocínios.



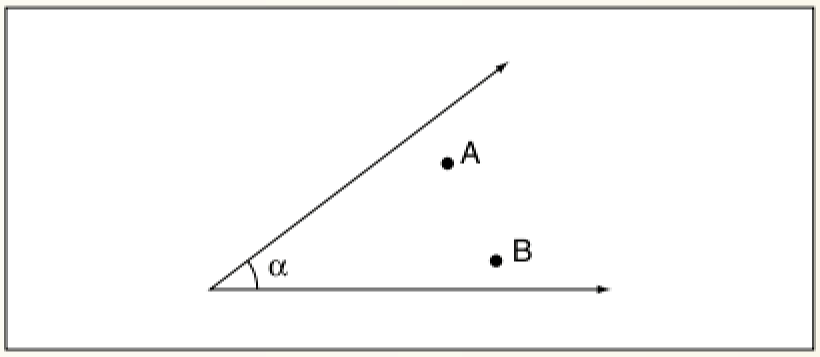
Construção geométrica da trajetória da luz.

1. Tome A' simétrica de A em relação a r.
2. Una A' com o observador O, obtemos P em r.
3. Una A com P e teremos assim a trajetória do raio de luz.
4. Precisamos agora provar que o caminho APO é o mínimo possível.
5. Tome $P' \in r$, $P' \neq P$.
6. $AP' = A'P'$, logo o trajeto $AP'O = A'P'O$
7. $AP = A'P$, logo o trajeto $APO = A'PO$
8. Por desigualdade triangular $A'P' + P'O > A'PO \therefore AP'O > APO$

Minimização de trajetórias retilíneas

Após a leitura do primeiro texto complementar, percebemos a importância dos pontos simétricos para encontrar a trajetória. Observe esta nova situação:

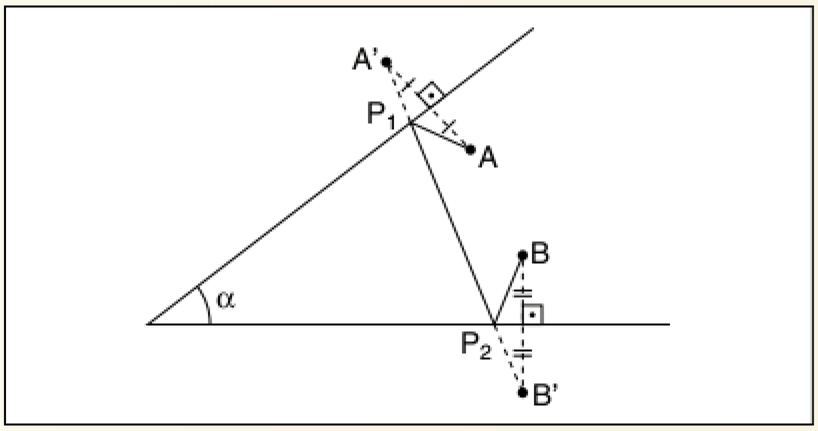
Considere um ângulo de medida α ($\alpha \leq 90°$) e dois pontos internos A e B. Encontre a trajetória retilínea de menor comprimento que une os dois pontos após "2 reflexões".



Trajetória mínima de A até B.

Leia atentamente os passos a seguir acompanhando as construções na figura.

1. Encontre os simétricos de A e B em relação aos lados do ângulo.
2. Ligue A' e B'.
3. Obtenha P_1 e P_2, que são os pontos da reflexão.
4. Unindo A P_1 P_2 B, temos a trajetória procurada.

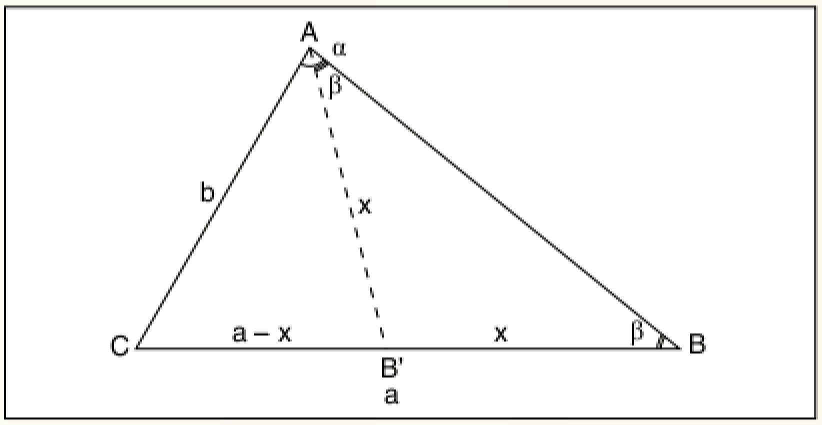


Construção da trajetória mínima.

Desigualdades triangulares

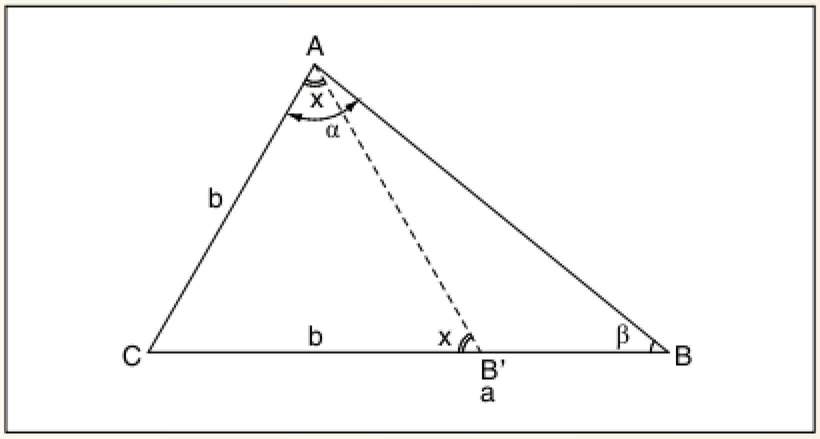
A desigualdade básica de um triângulo ABC nos fornece a sua condição de existência, basta $|b-c| < a < b+c$.

Podemos relacionar os lados e os ângulos de um triângulo em uma mesma desigualdade. Observe as situações:



Demonstração.

No ΔABC, figura anterior, temos que $\alpha > \beta$. Podemos marcar $B'\hat{A}B = \beta$, assim o $\Delta AB'B$ é isósceles. No $\Delta AB'C$, temos que $b < (a-x) + x \therefore b < a$.



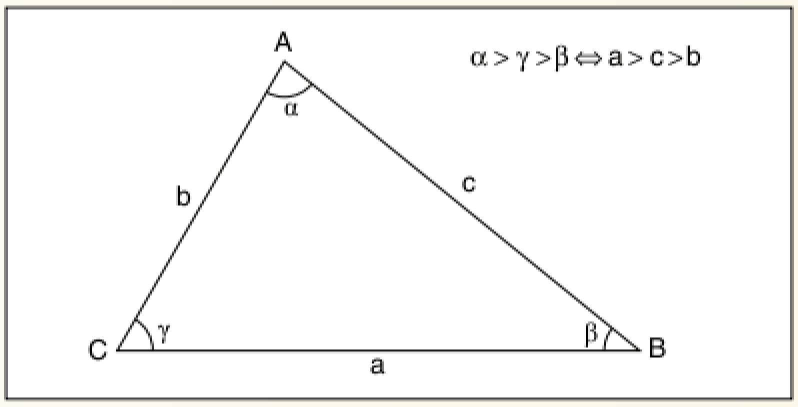
Demonstração.

Conclusão: Oposto ao maior ângulo temos o maior lado.

No ΔABC, temos que $a > b$. Podemos marcar $CB' = b$ assim o $\Delta AB'C$ é isósceles. Da figura, temos que $x < \alpha$ e $x > \beta$, pois x é ângulo externo do $\Delta BB'C$. Assim, $\beta < x < \alpha \therefore \alpha > \beta$.

Conclusão: Oposto ao maior lado temos o maior ângulo.

Conclusão final



Demonstração.

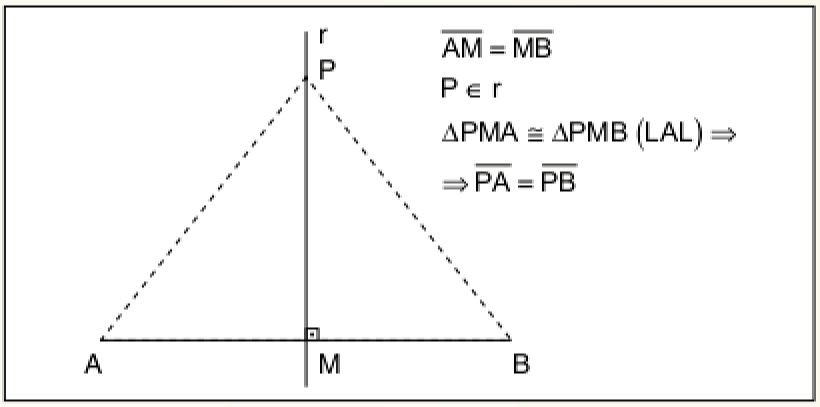
Lugares geométricos: Mediatriz e Bissetriz

Lugar geométrico é toda a figura cujos pontos possuem uma propriedade característica e somente eles a possuem.

Analise cuidadosamente os lugares geométricos a seguir.

Mediatriz

É o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e B distintos. O lugar geométrico é uma reta perpendicular no ponto médio de $\overline{AB}$.

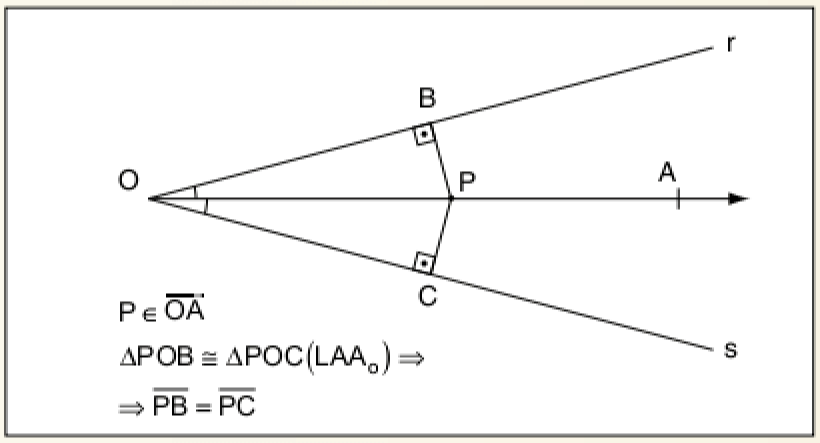


Mediatriz.

Bissetriz

É o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de r e s concorrentes em O.

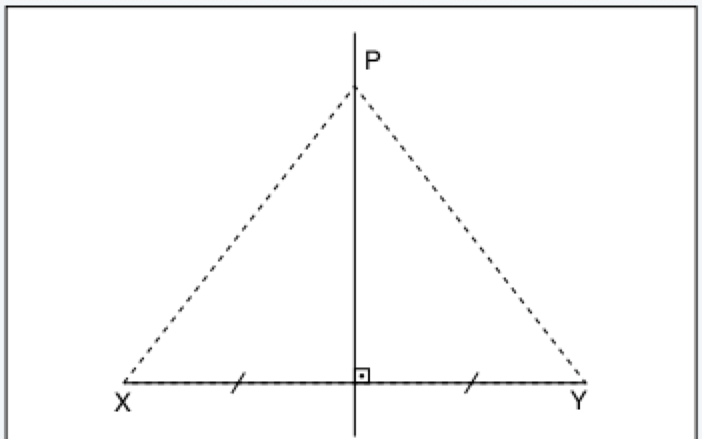
O lugar geométrico é uma semirreta que divide o ângulo em outros dois ângulos adjacentes congruentes.



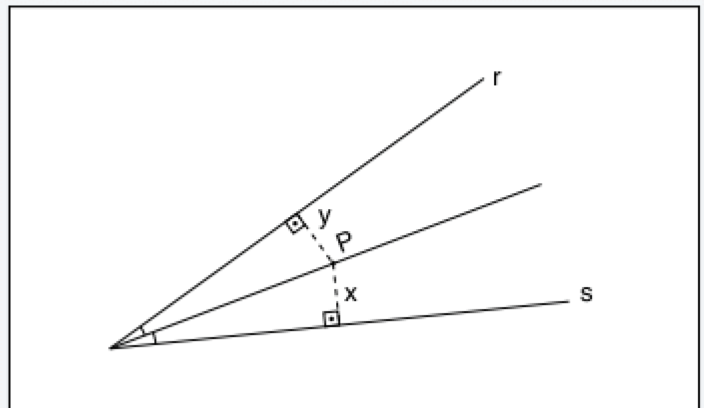
Bissetriz.

RESUMINDO

Podemos afirmar que o triângulo é a figura mais importante da geometria plana.
Um triângulo ABC de lados medindo a, b e c existe se, e somente se, $|b - c| < a < b + c$.
Triângulos congruentes são triângulos distintos que possuem a mesma forma e o mesmo tamanho.
Os principais critérios de congruência são:
LAL – LLL – LAAo – ALA – Caso especial.



Mediatriz (PX = PY).



Bissetriz (x = y).

QUER SABER MAIS?

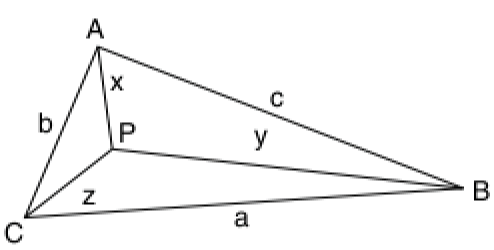
SITE

- Os números de Fibonacci e os triângulos pitagóricos
<www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/curiosidade4.htm>.

Exercícios complementares

Desigualdades triangulares

1 Observe a figura a seguir.



Demonstre que $p < x + y + z < 2p$.

2 Prove que a soma das medianas de um triângulo é menor que o perímetro e maior que o semiperímetro.

3 Para que valores reais de K os números 21, 28 e $2K^2 - 1$ são as medidas dos lados de um triângulo?

4 Determine o intervalo de variação x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por

$$x + 10;\ 2x + 4 \text{ e } 20 - 2x.$$

5 O perímetro de um triângulo é 14 metros. Determine as medidas dos lados, sabendo que são expressas por números inteiros de metros.

6 AB = 15 cm e AC = 19 cm são dois lados de um triângulo ABC, no qual o ângulo $\hat{A}$ está compreendido entre os outros dois. Determine a medida do lado $\overline{BC}$, sabendo que é expressa por um número inteiro ímpar de centímetros.

Congruência, desigualdades, mediatriz e bissetriz

7 Em um triângulo ABC, traça-se a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e sobre ela tomam-se os segmentos AE = AB e AF = AC. Une-se B com F e C com E. Mostre que BF = CE.

8 Em um triângulo ABC, prolonga-se a mediana $\overline{AM}$ de um segmento MD = MA e une-se os vértices B e C ao ponto D. Ache os pares de triângulos iguais na figura formada.

9 Prolongam-se os lados iguais $\overline{BA}$ e $\overline{CA}$ de um triângulo isósceles ABC de segmentos $\overline{AD} = \overline{AE}$.

Calcule $\frac{BE}{CD}$.

10 Em um triângulo ABC, traça-se a bissetriz do ângulo Â e sobre ela toma-se os segmentos AE = AB e AF = AC. Une-se B com F e C com E. Calcule $\frac{BF}{CE}$.

11 Em dois triângulos iguais, as alturas relativas a dois lados respectivamente iguais são iguais. Prove.

12 Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ache um ponto O tal que os triângulos OAB e OCD sejam isósceles.

13 M e N são pontos dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo retângulo isósceles ABC, tais que AM = AN. As retas $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$ cortam-se em O. Classifique o triângulo BOC.

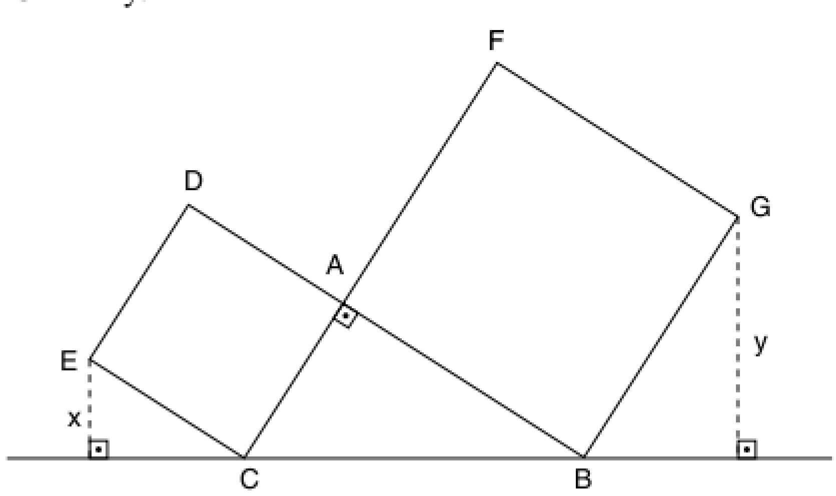
14 r e s são duas retas que se cortam em O e M é um ponto da reta r equidistante da reta s de uma das bissetrizes dos ângulos formados por r e s. Calcule as medidas sexagesimais dos ângulos formados por r e s.

15 Em um triângulo ABC, prolonga-se a altura $\overline{AH}$ de um segmento HD = HA e une-se os vértices B e C ao ponto D. Ache os pares de triângulos iguais na figura formada.

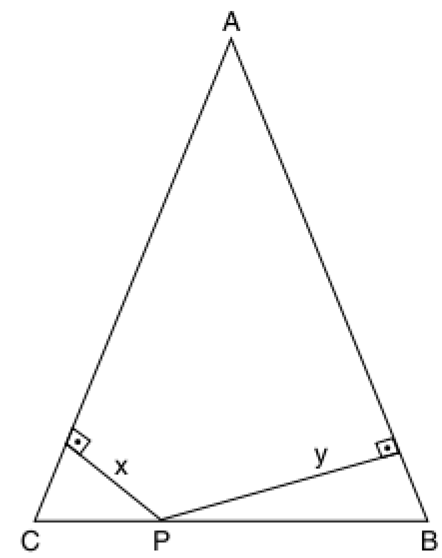
16 Se m_a é a mediana relativa ao lado a de um triângulo de lados a, b e c, determine o intervalo de variação de m_a em função de b e c.

17 Nos lados AB = BC de um triângulo ABC construímos dois quadrados ABDE e BCKM fora do triângulo. Demonstre que o segmento $\overline{DM}$ é o dobro da mediana $\overline{BP}$ do triângulo ABC.

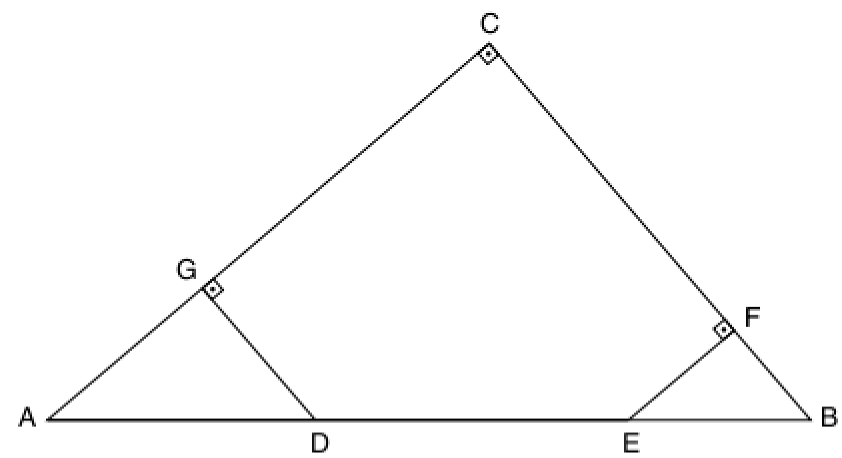
18 Na figura a seguir, temos que BAC é um triângulo retângulo em A. ADEC e ABGF são quadrados. Demonstre que BC = x + y.



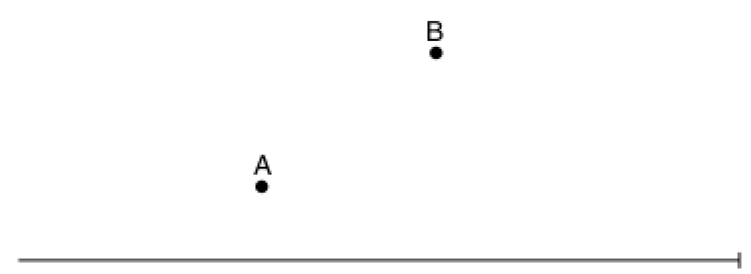
19 Na figura, o triângulo ABC é isósceles com AB = AC. Seja P um ponto qualquer da base $\overline{BC}$, demonstre que x + y é constante.



20 O triângulo ABC é retângulo em C e temos BD = BC, EA = AC, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ e $\overline{DG} \perp \overline{AC}$. Prove que DE = EF + DG.



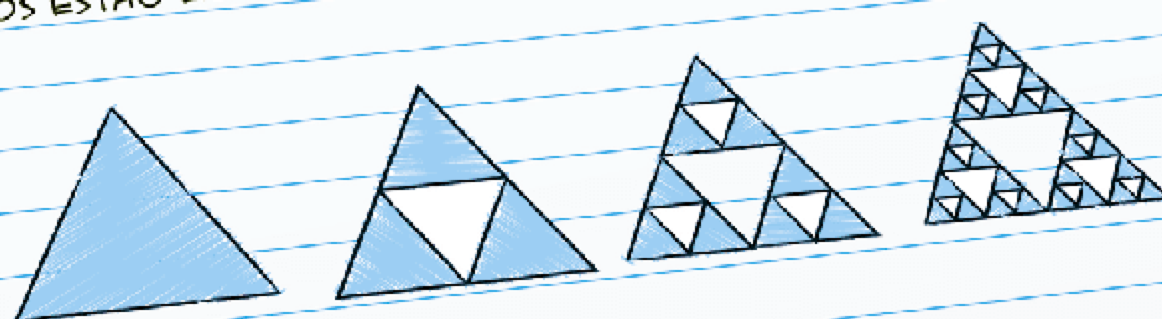
21 Na figura a seguir, encontre C ∈ r, tal que |AC – CB| seja máxima.

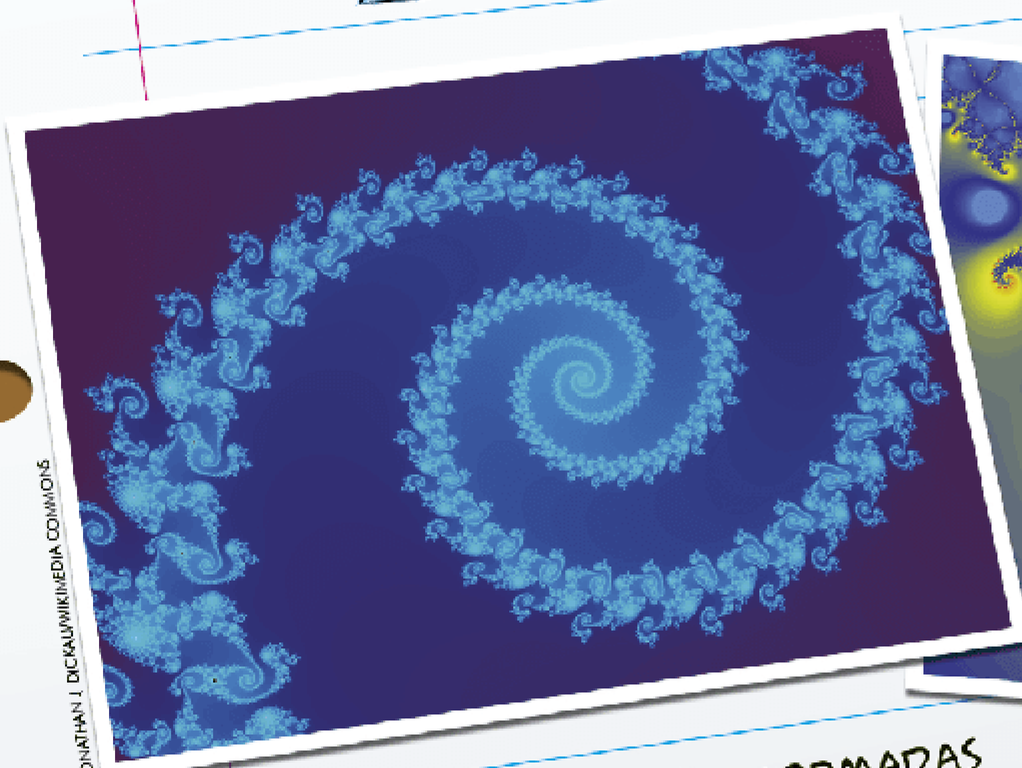


4 Ângulos no triângulo

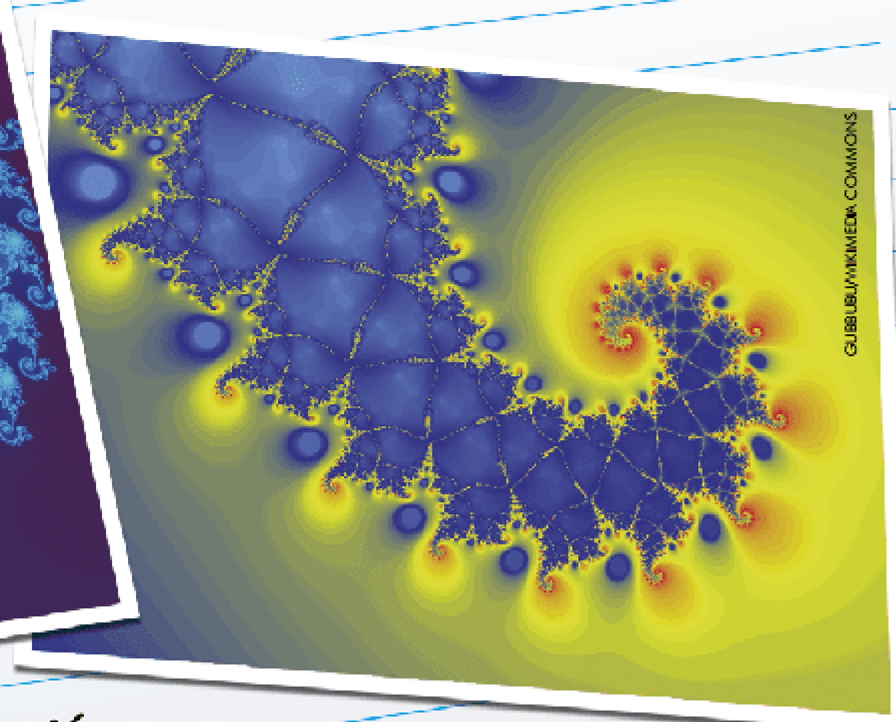
FRENTE 3

A IMPORTÂNCIA DOS TRIÂNGULOS TRANSCEDE A GEOMETRIA EUCLIDIANA. NA TEORIA MODERNA DOS FRACTAIS, NÓS TEMOS OS TRIÂNGULOS DE SIERPINSKI, QUE É UMA FIGURA GEOMÉTRICA OBTIDA POR UM PROCESSO RECURSIVO. ESSE TRIÂNGULO FOI DESCRITO POR WACLAW SIERPINSKI, EM 1915. PARA COMEÇAR O PROCESSO, PARTE-SE DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO. EM SEGUIDA, UNEM-SE OS PONTOS MÉDIOS DE CADA LADO DO TRIÂNGULO, FORMANDO 4 TRIÂNGULOS CUJOS LADOS ESTÃO LIGADOS. RETIRA-SE O TRIÂNGULO CENTRAL E REPETE-SE O PROCESSO.





JONATHAN J. DICKAU/WIKIMEDIA COMMONS



GUBBUBU/WIKIMEDIA COMMONS

ESSAS FIGURAS SÃO FORMADAS APENAS POR TRIÂNGULOS.

Paralelismo

Existem quatro posições relativas entre duas retas.

Retas concorrentes

São duas retas que possuem um único ponto em comum.

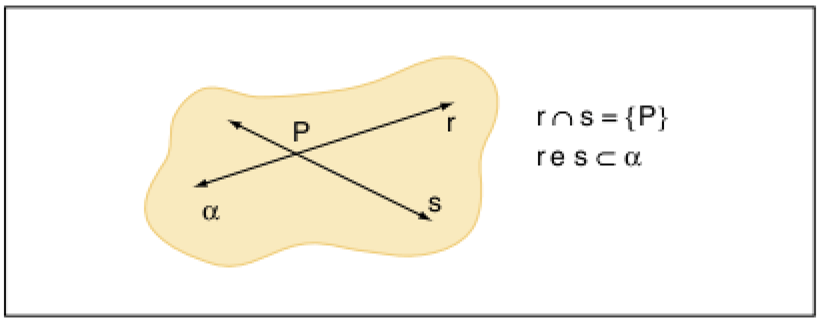


Fig. 1 Retas concorrentes.

Retas paralelas

São duas retas coplanares que não possuem pontos em comum.

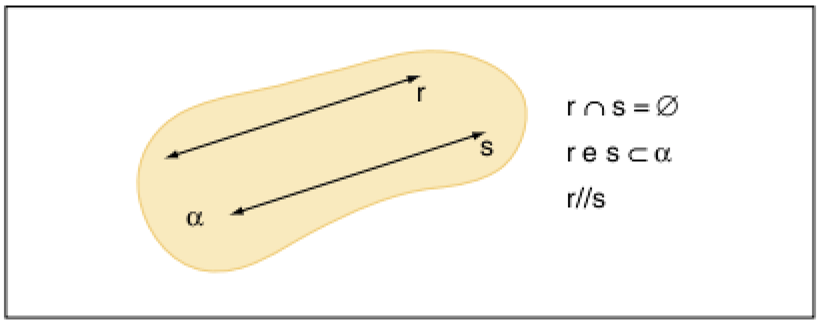


Fig. 2 Retas paralelas.

Retas coincidentes

As retas coincidentes são consideradas também paralelas. Possuem todos os pontos em comum.

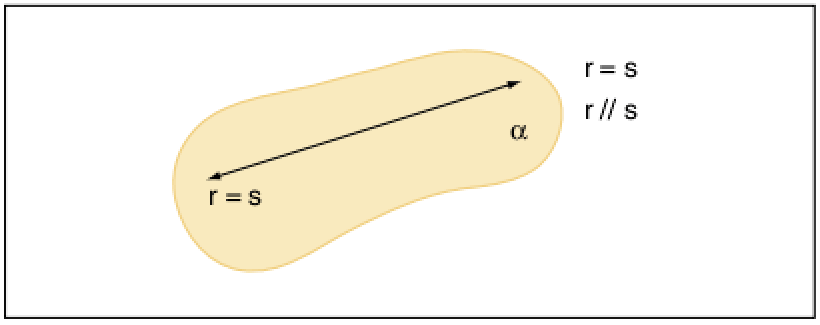


Fig. 3 Retas coincidentes (caso particular de paralelismo).

Retas reversas

São retas que não possuem pontos em comum e não estão no mesmo plano.

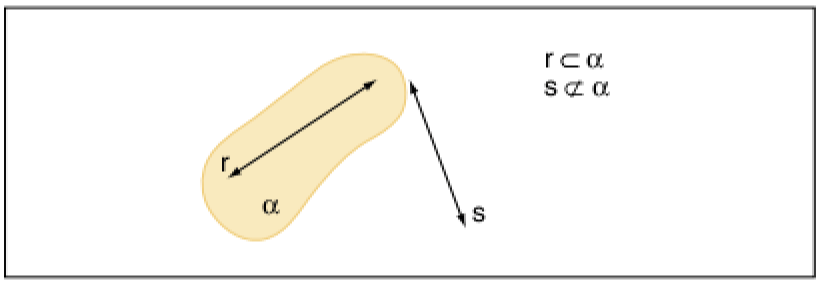


Fig. 4 Retas reversas.

Ângulos em retas concorrentes

Considere duas retas concorrentes e uma transversal. Na figura, temos oito ângulos.

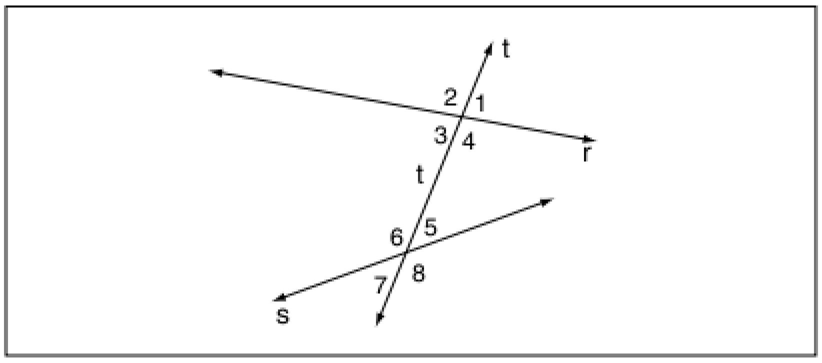


Fig. 5 Ângulos formados por retas concorrentes.

Esses oito ângulos possuem nomes especiais quando tomados aos pares. Observe:

$\begin{cases} \text{alternos internos: 4 e 6; 3 e 5} \\ \text{alternos externos: 2 e 8; 1 e 7} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{colaterais internos: 4 e 5; 3 e 6} \\ \text{colaterais externos: 1 e } \mathbf{8}\text{; 2 e 7} \end{cases}$

$\{\text{correspondentes: 4 e 8; 3 e 7; 2 e 6; 1 e 5}$

Teorema das retas paralelas

A condição necessária e suficiente para que duas retas sejam paralelas é formarem, com uma transversal, ângulos alternos internos iguais.

$$r // s \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

A demonstração desse teorema possui duas partes e requer a sua lembrança de resultados do capítulo 3.

Observe:

Se $\alpha = \beta$, então r // s

Hipótese: $\alpha = \beta$; *tese*: r // s

Demonstração:

(Negação da tese) $r \nparallel s$

Se as retas não são paralelas, então elas se cruzam em um ponto P.

Observe:

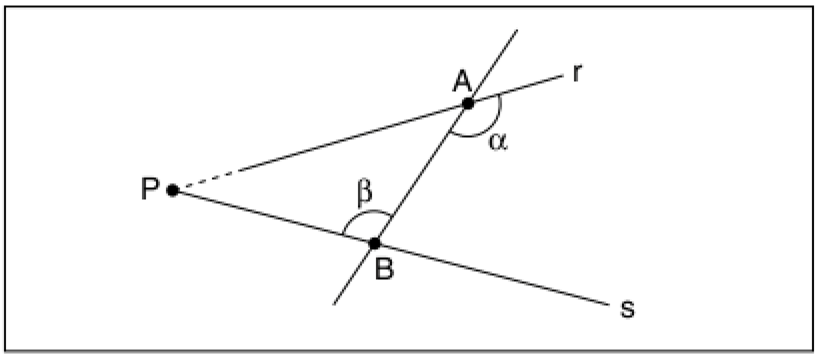


Fig. 6 Demonstração de $r \nparallel s$.

Temos o ΔPAB e α como um ângulo externo; logo, $\alpha > \beta$, o que é absurdo pela hipótese (c.q.d.).

Se r // s, então $\alpha = \beta$

Hipótese: r // s; *tese*: $\alpha = \beta$

Demonstração:

(Negação da tese). Se $\alpha \neq \beta$, então existe uma reta r' distinta de r, tal que $\beta = \alpha$.

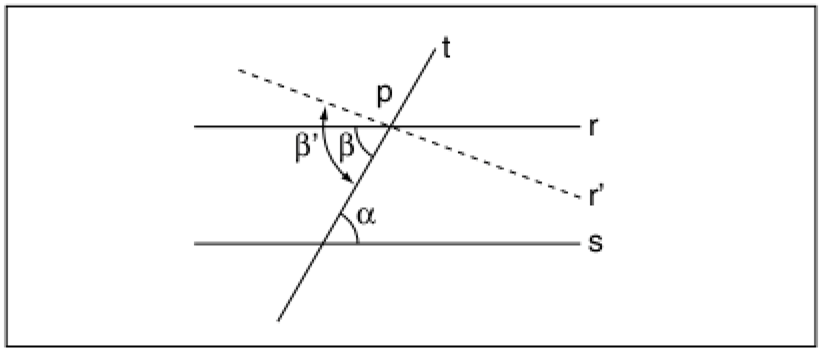
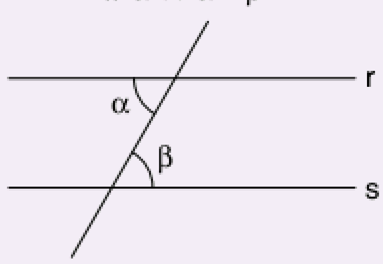


Fig. 7 Demonstração de $\alpha \neq \beta'$.

Se $\beta' = \alpha$, então r'// s pelo resultado anterior. Como por hipótese r // s, teríamos duas retas paralelas passando pelo mesmo ponto P, o que é absurdo (c.q.d.).

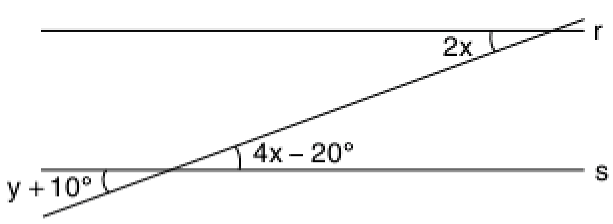
ATENÇÃO!

$r \,//\, \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$



Exercícios resolvidos

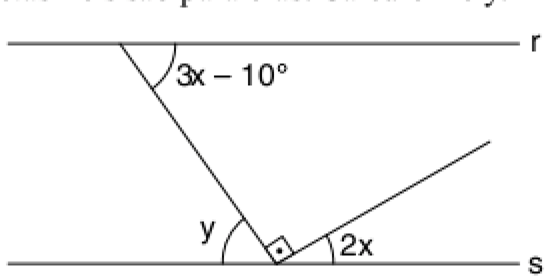
1 Sendo r // s, calcule x e y.



Resolução:

2x e 4x – 20º são ângulos alternos internos, logo: $2x = 4x - 20^\circ \therefore$
$\therefore 2x = 20^\circ \therefore x = 10^\circ$
y + 10º e 4x – 20º são opostos pelo vértice $y + 10^\circ = 4x - 20^\circ \therefore$
$\therefore y + 10^\circ = 4 \cdot 10^\circ - 20^\circ \therefore y = 10^\circ$

2 As retas r e s são paralelas. Calcule x e y.



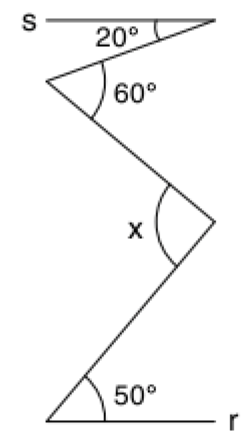
Resolução:

$3x - 10^\circ = y \therefore 3x - y = 10^\circ$
$2x + y + 90^\circ = 180^\circ$ *(ângulo raso)*
$2x + y = 90^\circ$
Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = 10^\circ \\ 2x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 5x = 100^\circ \therefore x = 20^\circ$$

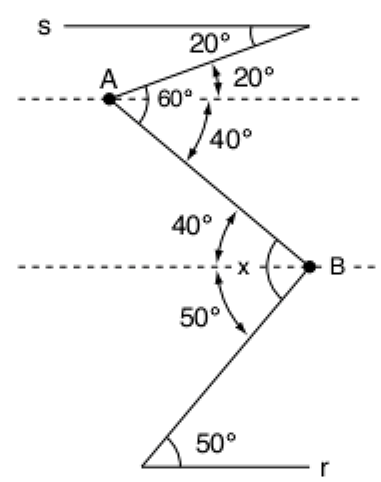
$2 \cdot (20^\circ) + y = 90^\circ \therefore y = 90^\circ - 2 \cdot (20^\circ) = 50^\circ$

3 Calcule x sabendo que r é paralelo a s.



Resolução:

Pelos pontos A e B, traçamos retas paralelas a r e s; ganhamos, assim, diversos ângulos alternos internos. Observe a seguir.



Logo, $x = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$.

Ângulos no triângulo

Em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é constante e vale 180º.

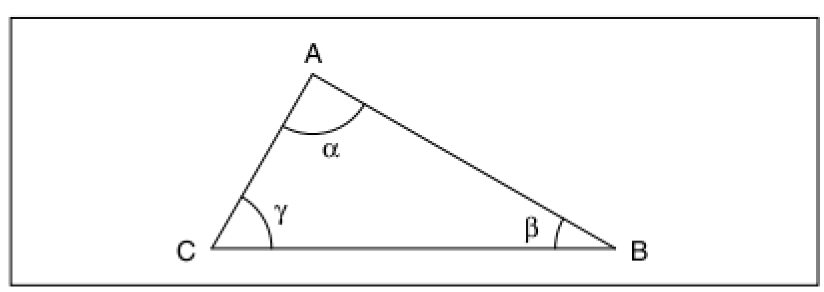


Fig. 8 $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Observe:

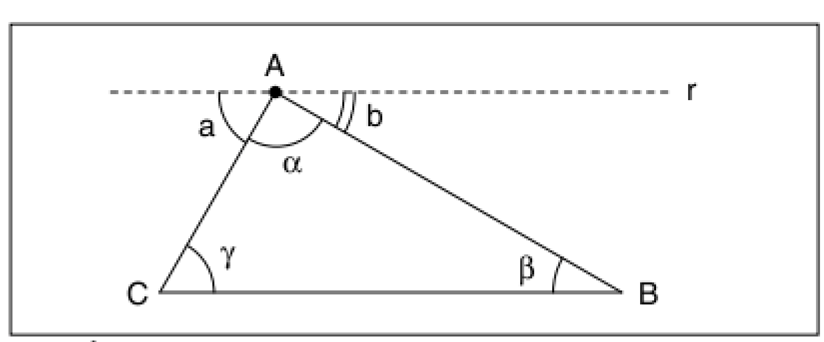


Fig. 9 Ângulos internos.

Pelo ponto A, traçar a reta paralela a $\overline{BC}$, $a = \gamma$ e $\beta = b$ (alternos internos).
$a + \alpha + b = 180^\circ \therefore \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (c.q.d.)

Teorema do ângulo externo

Em um triângulo qualquer, o ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

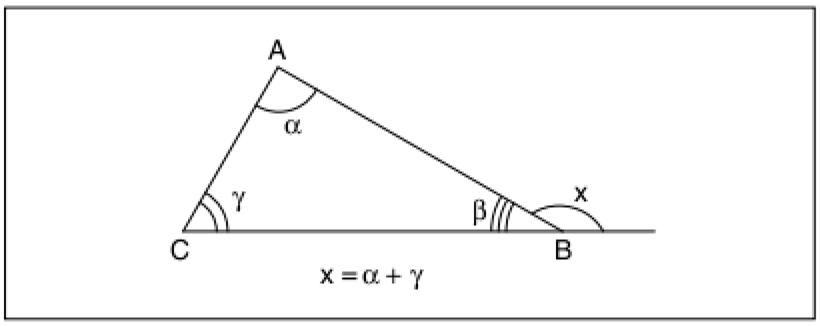


Fig. 10 Teorema do ângulo externo.

Demonstração:

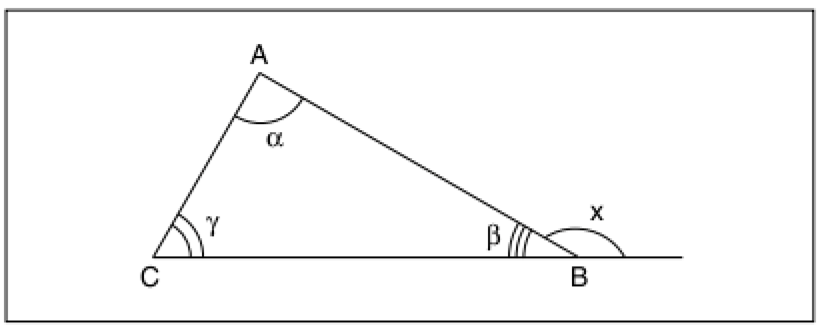


Fig. 11 Demonstração do teorema do ângulo externo.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^o \\ x + \beta = 180^o \end{cases} \therefore\ \alpha + \beta + \gamma = x + \beta\ \therefore$$

$\therefore\ x = \alpha + \gamma$ (c.q.d.)

O teorema do ângulo externo também pode ser utilizado para demonstrar que um ângulo é maior que o outro. Observe:

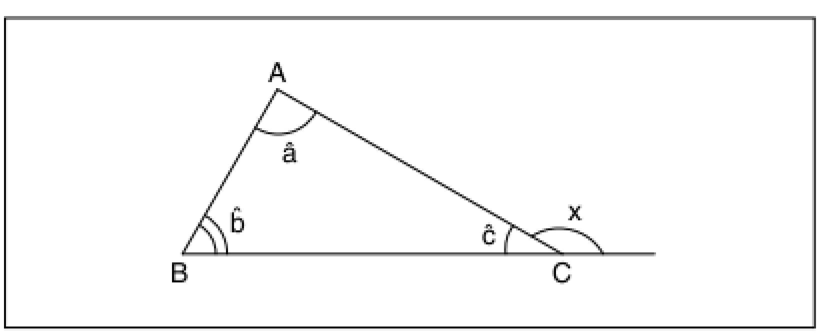


Fig. 12 Ângulo externo (x).

Na figura 12, temos que $x = \hat{a} + \hat{b}$; logo $x > \hat{a}$ e $x > \hat{b}$.

Existe outra demonstração para o teorema do ângulo externo. Observe:

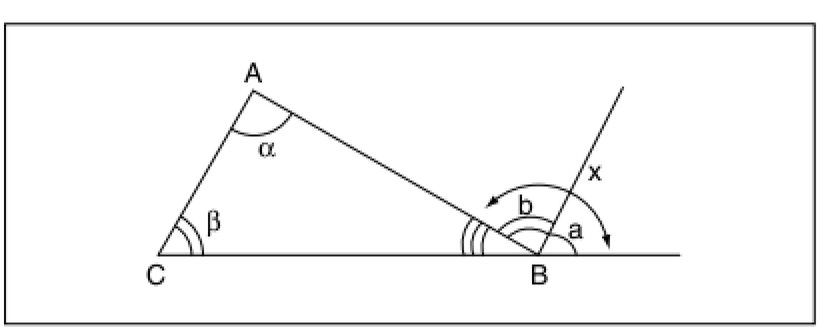


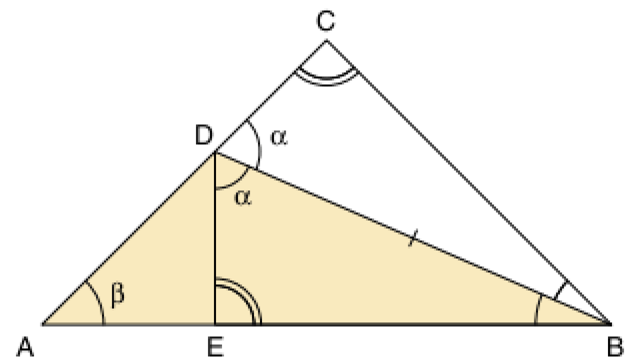
Fig. 13 Teorema do ângulo externo.

Pelo ponto B, traçar uma reta paralela a $\overline{AC}$.

α e β são ângulos alternos internos α = b; β e a são ângulos correspondentes (β = a); como x = a + b, concluímos que x = α + β.

Exercícios resolvidos

4 No triângulo abaixo $C\hat{B}D = E\hat{B}D$ e $B\hat{C}D = B\hat{E}D$. Prove que $B\hat{D}E > D\hat{A}E$.



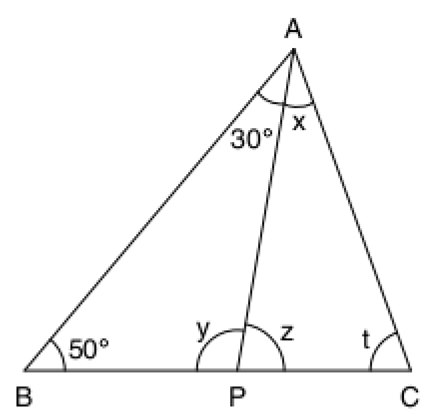
Resolução:

$\Delta ABC \cong \Delta BED\,(LAA0) \Rightarrow E\hat{D}B = B\hat{D}C = \alpha$.

O ângulo $B\hat{D}C$ é externo do ΔABD, logo

$\alpha > \beta \therefore B\hat{D}E > D\hat{A}E$ (c.q.d.)

5 $\overline{PA}$ é bissetriz do ΔABC. Determine x, y, z e t.



Resolução:

No ΔABP, temos:

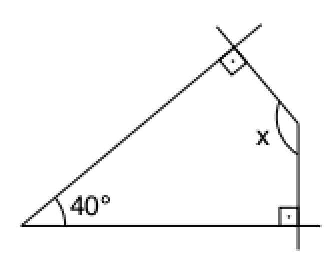
$50^o + 30^o + y = 180^o \therefore y = 100^o$, como $y + z = 180^o \rightarrow z = 80^o$.

$\overline{PA}$ é bissetriz, logo $x = 30^o$.

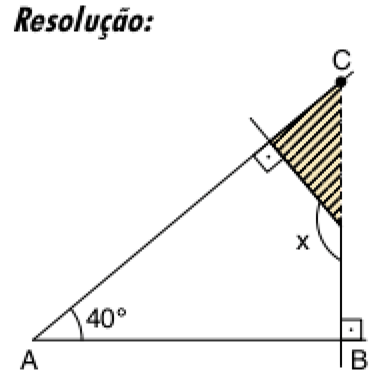
No Δ APC, temos:

$x + z + t = 180^o \therefore 30^o + 80^o + t = 180^o$, logo $t = 70^o$.

6 Calcule x na figura abaixo:

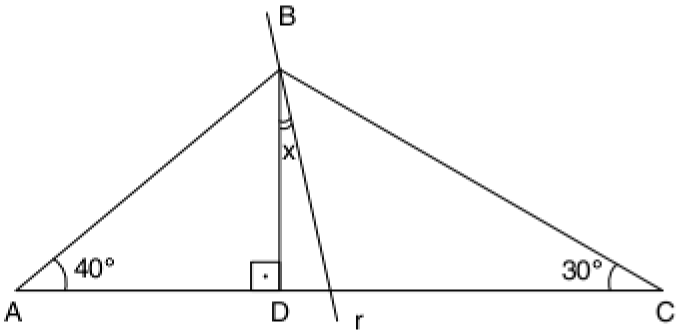


Resolução:



Com o prolongamento anterior, o ΔABC é retângulo; logo $A\hat{C}B = 50^o$, x é ângulo externo do triângulo hachurado, assim: $x = 90^o + 50^o \therefore x = 140^o$

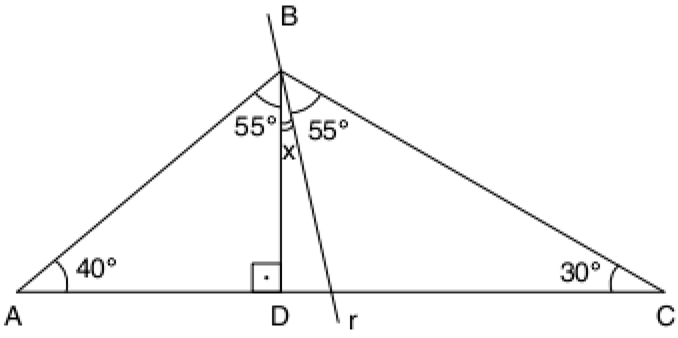
7 r é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Calcule x:



Resolução:

O ângulo $\hat{B}$ vale:

$\hat{B} + 40^o + 30^o = 180^o \therefore \hat{B} = 110^o$

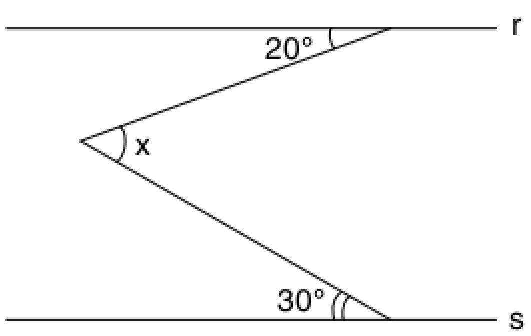


Como r é bissetriz $50^o + x = 55^o \therefore x = 5^o$.

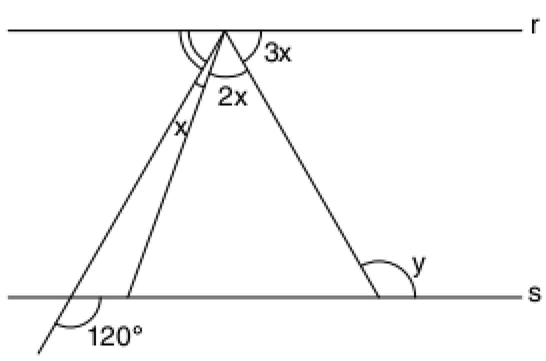
Revisando

1 Nas figuras a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule os valores de x e y.

a)

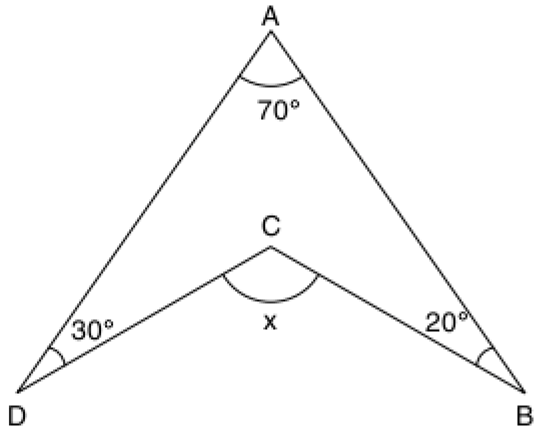


b)

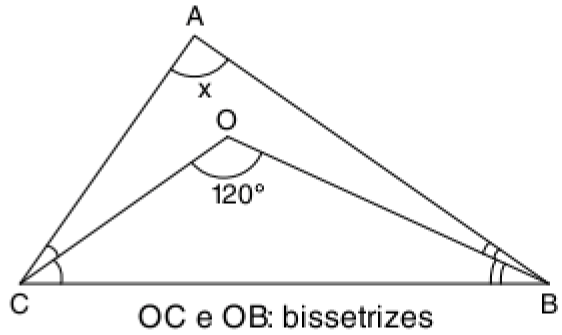


2 Calcule os ângulos incógnitos assinalados.

a)



b)

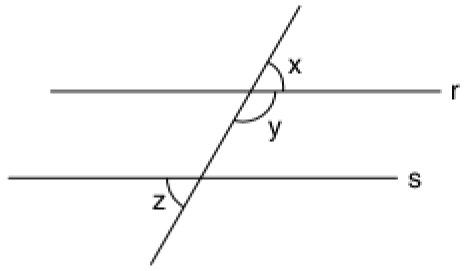


3 Em um triângulo retângulo, a altura e a mediana são relativas à hipotenusa e formam um ângulo de 20°. Determine o maior dos ângulos agudos.

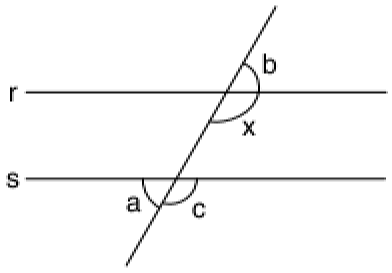
Exercícios propostos

Retas paralelas cortadas por uma transversal

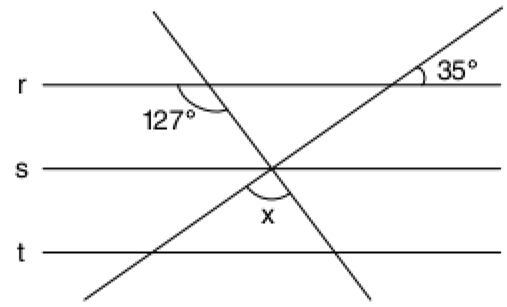
1 As retas r e s são paralelas. Calcule os ângulos x, y e z, sabendo que $2x + y + z = 240°$.



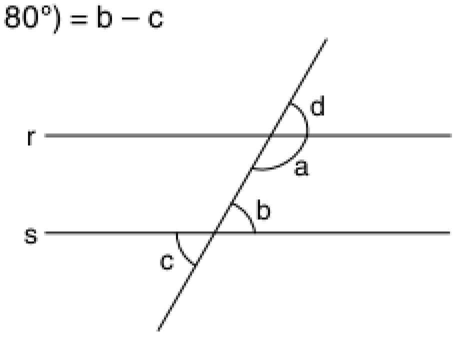
2 Sendo r e s retas paralelas e $2a + 3b - c = 0$, calcule o ângulo x.



3 Calcule x, sabendo que r//s//t.

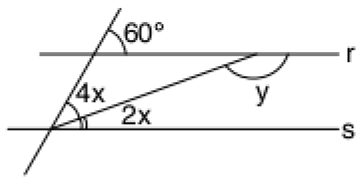


4 Na figura, r e s são paralelas. Prove que:
$2a + d - (a + 180°) = b - c$

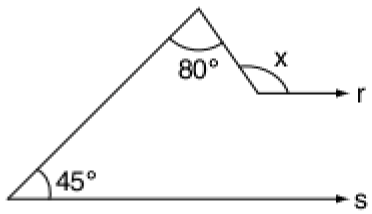


5 Considere as retas r e s paralelas e calcule as incógnitas em cada um dos itens.

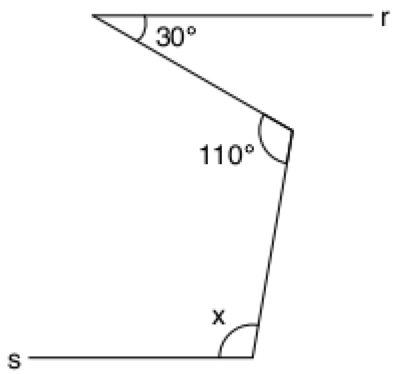
a)



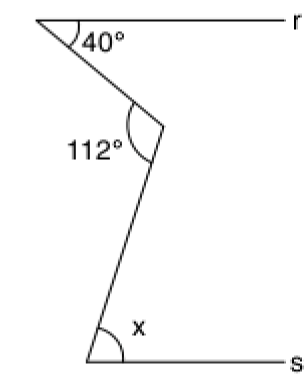
b)



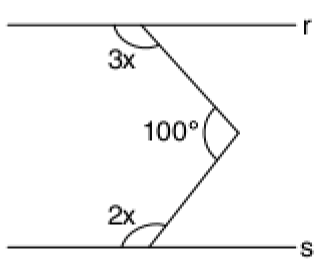
c)



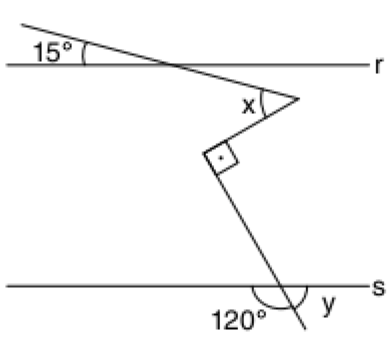
d)



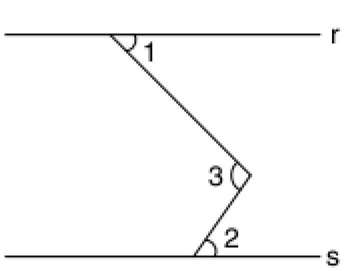
e)



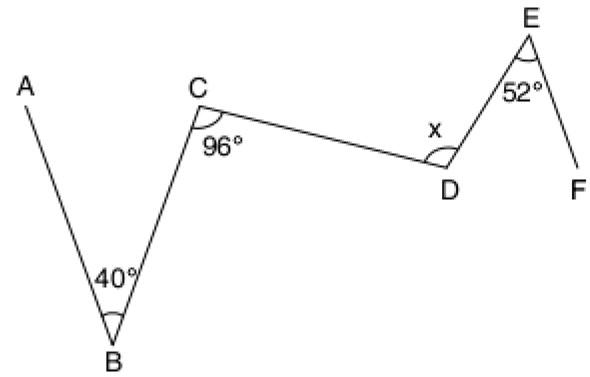
f)



6 Na figura, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45º e o ângulo 2 mede 55º. Calcule a medida do ângulo 3.

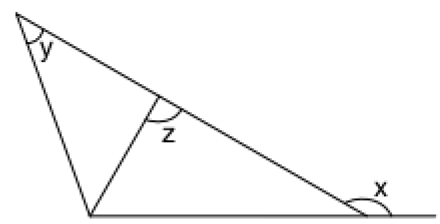


7 Na figura, as semirretas BA e EF são paralelas. Calcule o ângulo x.

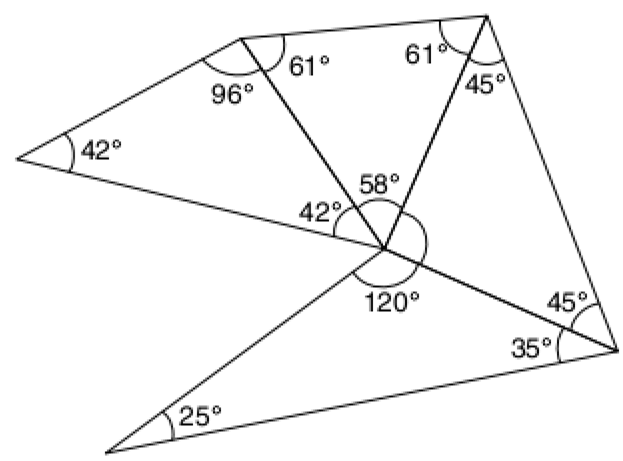


Desigualdade triangular

8 Prove que na figura a seguir x > z > y.



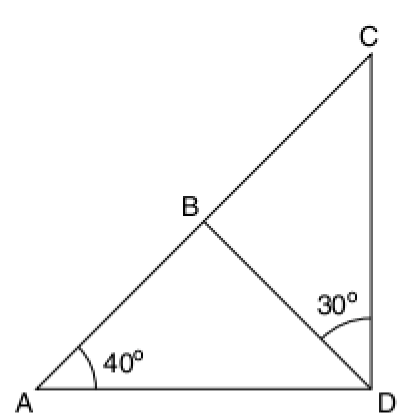
9 **UFPE** Na figura a seguir, determine o ângulo que é oposto ao lado de menor comprimento.



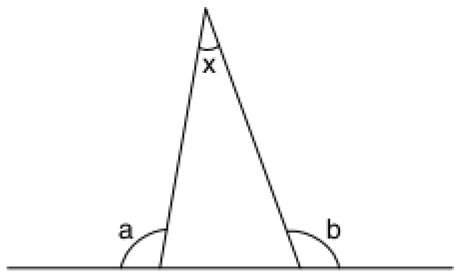
10 ABC é um triângulo isósceles no qual a base BC é maior que os lados iguais AB e AC. Demonstre que o ângulo do vértice $\hat{A} > 60°$.

Ângulos no triângulo

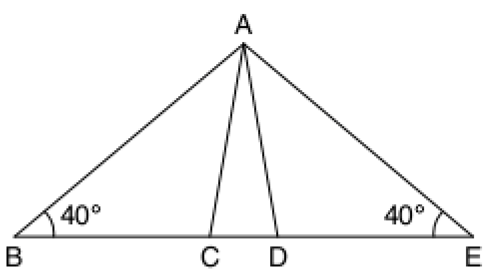
11 Na figura, $A\hat{D}C$ é reto. Calcule $C\hat{B}D$.



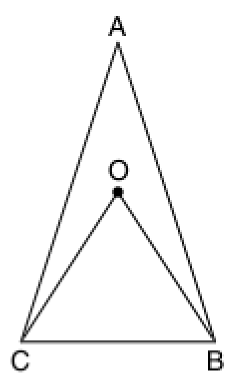
12 Se a = 100º e b = 110º, calcule x.



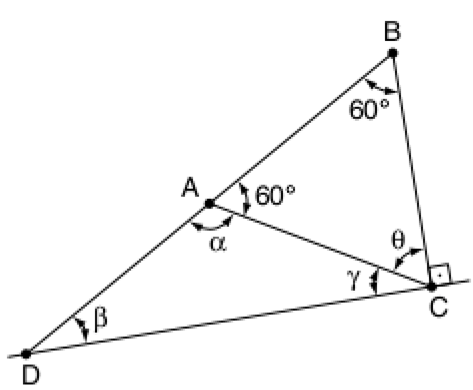
13 Na figura, BC = CA = AD = DE. Calcule o ângulo CÂD.



14 **Fuvest** Na figura abaixo, AB = AC, O é o ponto de encontro das bissetrizes do ΔABC, e o ângulo BÔC é o triplo do ângulo Â. Calcule Â.



15 **UFPE** Acerca da figura a seguir, julgue (V) ou (F) as afirmações.

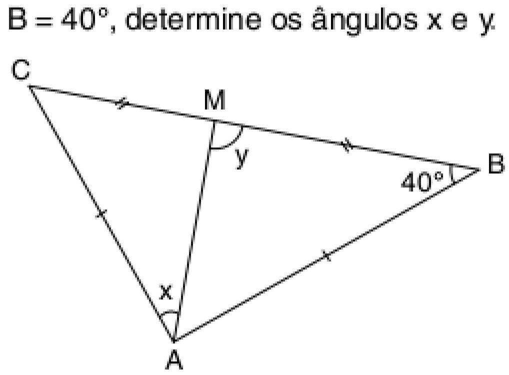


O triângulo ABC é equilátero.

O triângulo ACD é isósceles.

$\alpha - (\gamma + \beta)$ é divisível por 2.

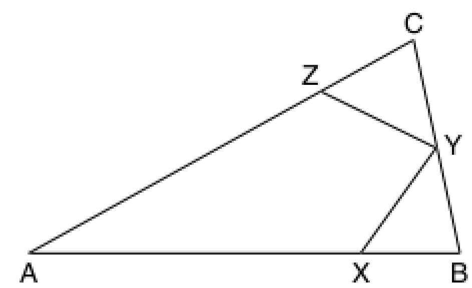
16 Em um triângulo isósceles ABC, com AB = AC, AM é mediana. Se B = 40°, determine os ângulos x e y.



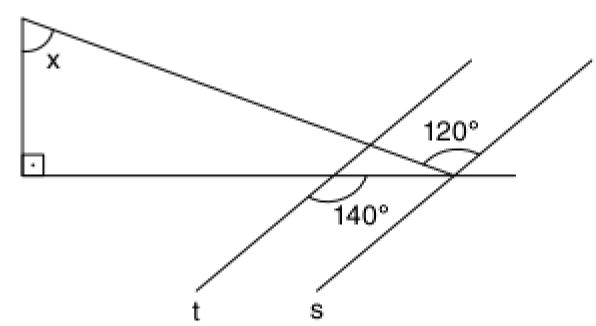
17 Os três ângulos de um triângulo têm, para suas medidas, as respectivas expressões: 5x – 40°, 2x + 20°, 3x. Verifique se esse triângulo é equilátero.

18 Determine o ângulo formado por duas medianas de um triângulo equilátero.

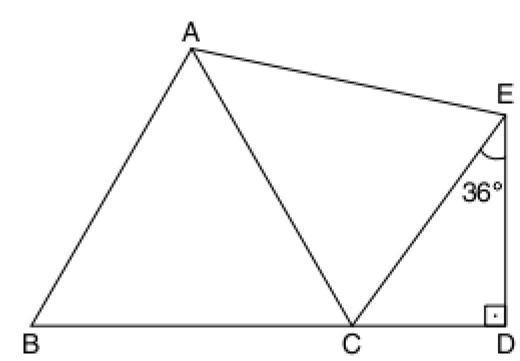
19 **Fuvest (Adapt.)** Na figura adiante, AB = AC, BX = BY e CZ = CY. Se o ângulo A mede 40°, determine a medida do ângulo XŶZ.



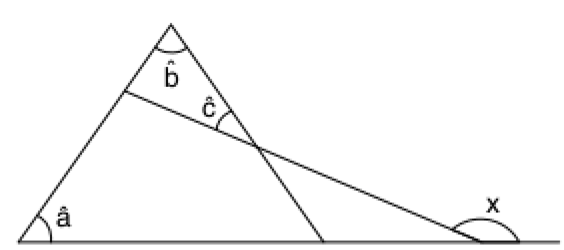
20 Calcule o ângulo x, sendo t // s.



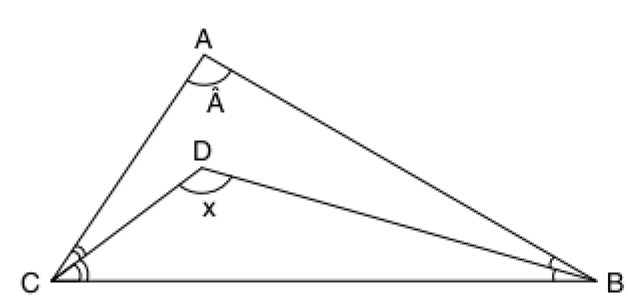
21 O ΔABC é equilátero, AC = AE. Calcule CÂE.



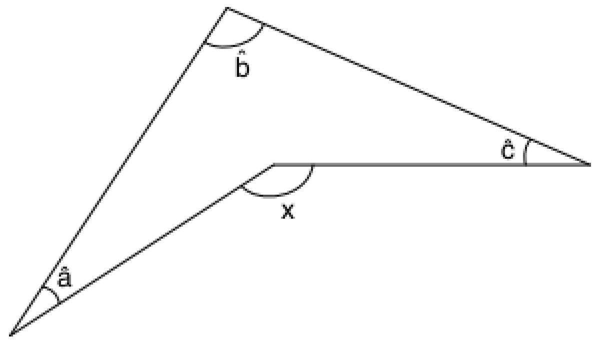
22 Calcule x em função de â, $\hat{b}$ e ĉ.



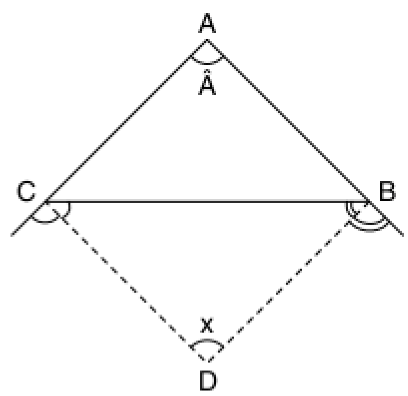
23 Calcule x em função de Â, sabendo que $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes.



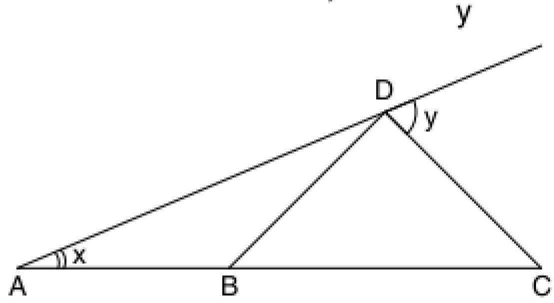
24 Calcule x em função de $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$.



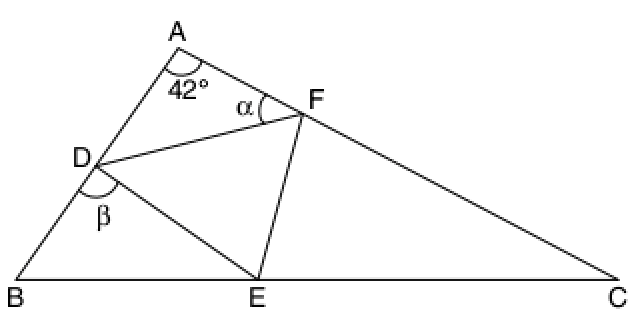
25 Calcule x em função de Â, sabendo que $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes.



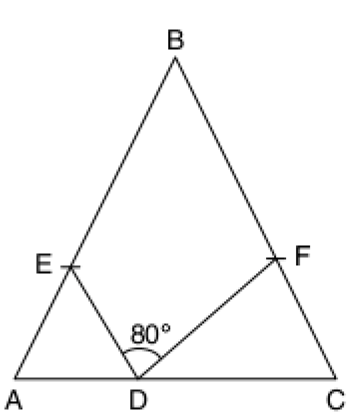
26 **Fuvest** Sendo AB = BD = CD, calcule $\frac{x}{y}$.



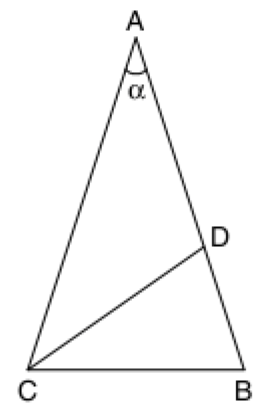
27 O ΔDEF é equilátero. Calcule $\alpha - \beta$.



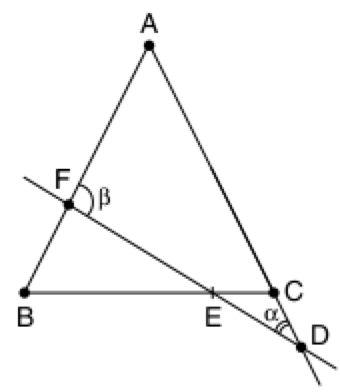
28 **Fuvest** Na figura a seguir, tem-se que AD = AE; CD = CF e BA = BC. Se o ângulo $E\hat{D}F = 80°$, calcule $A\hat{B}C$.



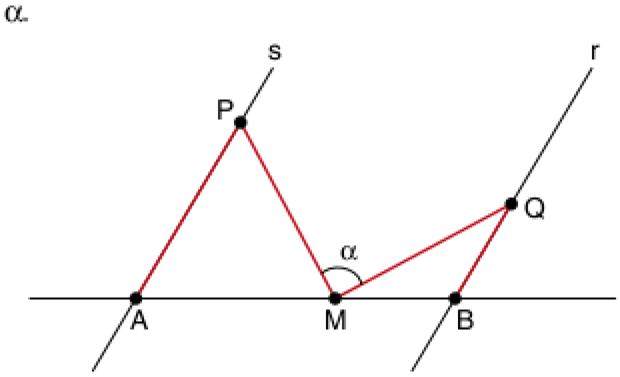
29 Na figura, tem-se AB = AC e AD = DC = CB. Calcule α.



30 Na figura, tem-se AB = AC e CD = CE. Demonstre que $\beta = 3\alpha$.



31 Da figura a seguir, sabe-se que r//s, AM = AP e BM = BQ. Calcule α.

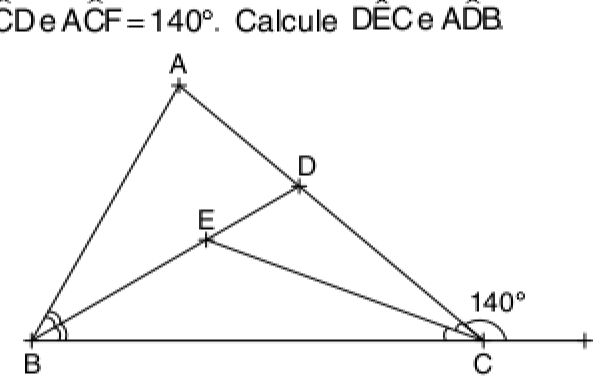


32 Em um triângulo retângulo, a altura e a bissetriz relativa à hipotenusa formam um ângulo de 14°. Determine o maior dos ângulos agudos.

33 Determine o ângulo Â de um triângulo ABC qualquer, sabendo que as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo de 50°.

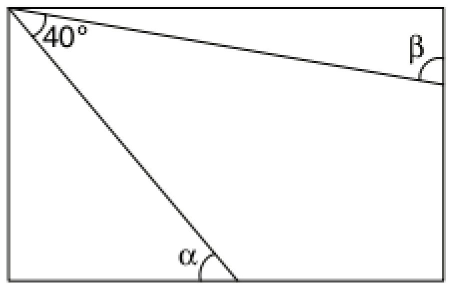
34 Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem 50° e 70°, respectivamente. A bissetriz relativa ao vértice A forma com a reta $\overleftrightarrow{BC}$ ângulos proporcionais a quais números?

35 Na figura AB = AC, $\overline{BD}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, $\overline{CE}$ é bissetriz de $B\hat{C}D$ e $A\hat{C}F = 140°$. Calcule $D\hat{E}C$ e $A\hat{D}B$.



36 Em um triângulo isósceles, um ângulo é o quádruplo do outro. Qual o menor ângulo do triângulo?

37 No retângulo a seguir, calcule o valor de $\alpha + \beta$.



38 No ΔABC, a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ forma com a bissetriz externa do ângulo $\hat{C}$ um ângulo α. Determine a medida do ângulo interno $\hat{A}$.

39 Por um ponto M da bissetriz de um ângulo $X\hat{O}Y$, traça-se a paralela ao lado OX. Essa paralela intercepta o lado OY em N. Mostre que o ΔOMN é isósceles.

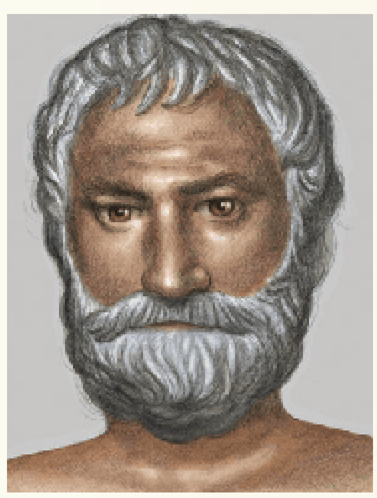
40 Prolonga-se a mediana AM de um triângulo ABC de um segmento $\overline{MD} = \overline{AM}$ e une-se B com D. Mostre que a reta BD é paralela ao lado AC.

41 P é um ponto da bissetriz de um ângulo $X\hat{O}Y$. A mediatriz do segmento OP intercepta OX em M. Mostre que MP e OY são paralelas.

TEXTO COMPLEMENTAR

A matemática grega de Tales a Pitágoras

Tales de Mileto e Pitágoras de Samos são figuras imprecisas historicamente, pois não se sabe se eles escreveram ou não grandes obras matemáticas. O que temos há séculos é muita tradição em torno desses dois personagens.


Tales de Mileto.

Tales (624-548 a.C.), aparentemente, aprendeu geometria no Egito e, no governo de Nabucodonosor, na Babilônia, entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Diz a tradição que previu um eclipse solar no ano de 585 a.C.

Muito se diz de Tales. Aristóteles relata que Tales fez fortuna monopolizando prensas para se fazer azeite (em um ano de colheita abundante de azeitonas), outros diziam que era um mercador de sal que adquiriu conhecimentos matemáticos durante suas viagens.

Dos feitos matemáticos, relata-se que Tales mediu a altura das pirâmides do Egito, observando os comprimentos das sombras da pirâmide e de um bastão vertical fincado na areia.

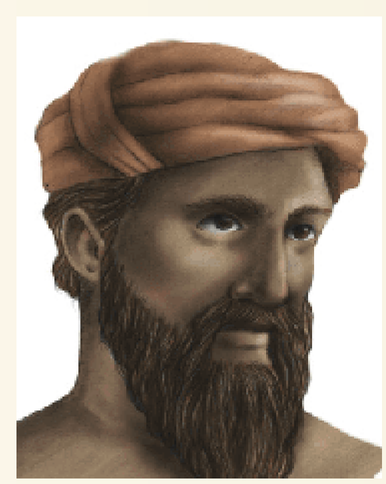
Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas, e é o fundador da organização dedutiva da geometria. Diz novamente a lenda que Tales enunciou e demonstrou os seguintes teoremas:

1. Um círculo é dividido ao meio por um diâmetro.
2. Ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Critérios de congruência (ALA).
5. Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, próxima de Mileto. Sua vida é rodeada de mais lendas do que a de Tales.

Em suas viagens ao Egito, Babilônia e até a Índia, absorveu ideias matemáticas, astronômicas e religiosas.

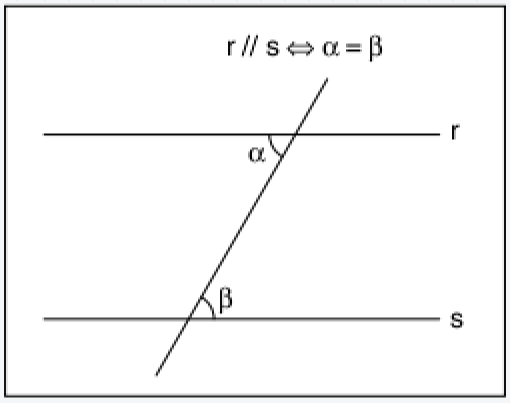
Após essas viagens, estabeleceu-se em Crotona (atual região da Itália) e fundou uma sociedade filosófico-matemática, na qual o lema era "Tudo é número".

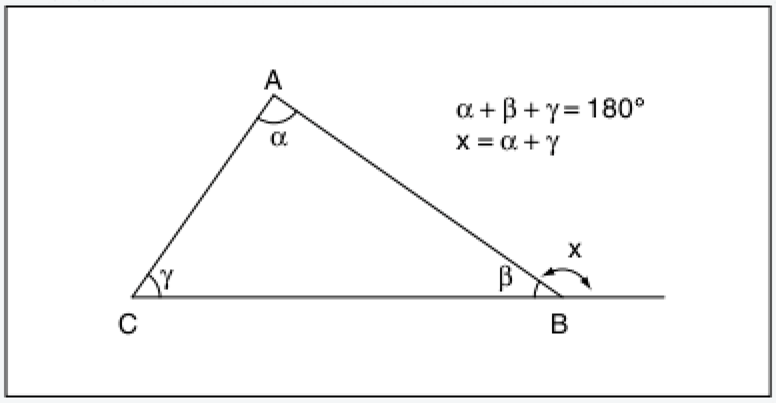

Pitágoras de Samos.

A escola pitagórica era politicamente conservadora, seus membros eram vegetarianos, pois Pitágoras acreditava que a alma de amigos mortos poderia estar nos animais.

Sabemos que Pitágoras é conhecido pelo famoso "Teorema de Pitágoras" (o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos), mas, na verdade, o teorema é proveniente dos babilônios. Contudo, foram os pitagóricos que deram a primeira demonstração do teorema, por isso o nome "Teorema de Pitágoras".

RESUMINDO





QUER SABER MAIS?

SITES

- Fractais
  <www.fractarte.com.br/>.
- Fractal de Mandelbrot
  <http://neave.com/pt/fractal/>.

Exercícios complementares

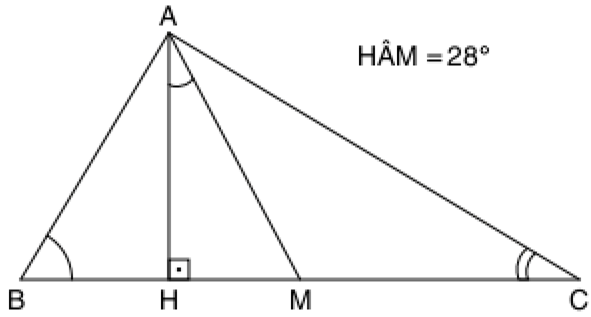
Desigualdade triangular

1 Quando as medidas dos três lados de um triângulo estão em progressão geométrica, a razão dessa progressão é um número compreendido entre $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Prove.

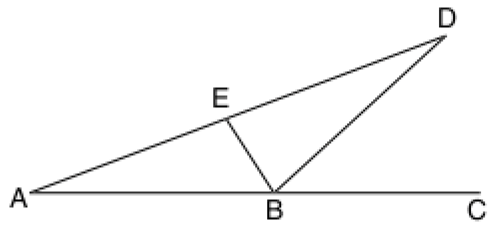
2 Mostre que se a, b e c são lados de um triângulo, então o trinômio: $a^2x^2 + (b^2 - a^2 - c^2)x + c^2$ é positivo; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ângulo no triângulo

3 Um triângulo ABC é retângulo em A. A altura AH forma com a mediana AM um ângulo de 28°. Calcule os ângulos agudos do triângulo ABC.



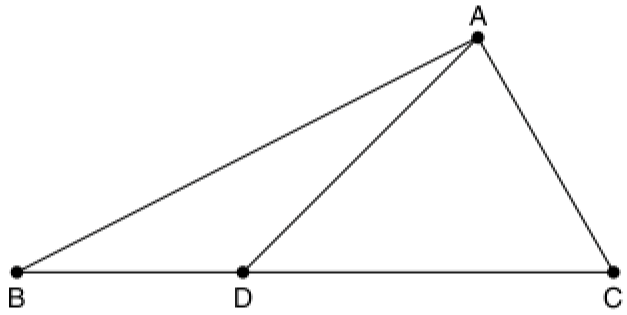
4 **Fuvest** Observe a figura.



Nessa figura, AB = BD = DE e o segmento BD é bissetriz de $E\hat{B}C$. A medida de $A\hat{E}B$, em graus, é:

(a) 96
(b) 100
(c) 104
(d) 108
(e) 110

5 **UFMG** Observe a figura a seguir. Nessa figura, AD = BD, $\hat{C} = 60°$ e $D\hat{A}C$ é o dobro de $\hat{B}$.



A razão $\frac{AC}{BC}$ é igual a:

(a) $\frac{1}{3}$

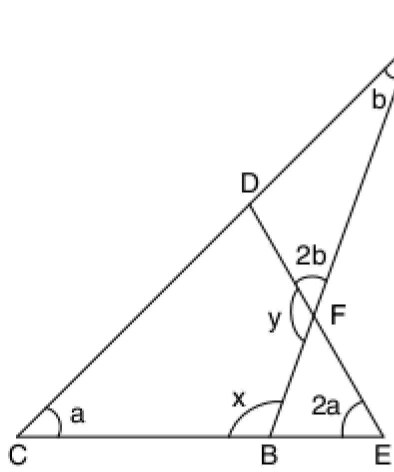
(b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

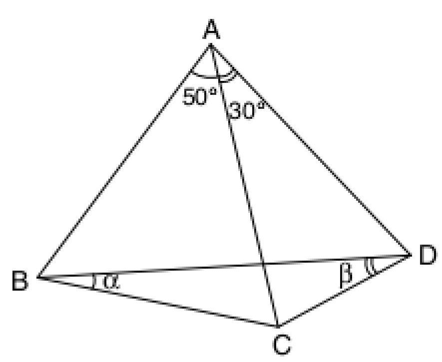
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

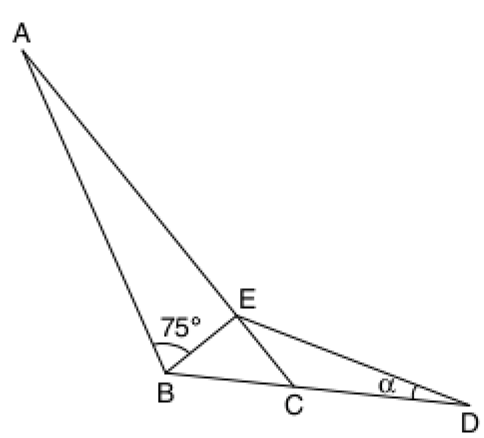
6 **UFMG** Na figura a seguir, calcule x e y em função de a e b.



7 Considerando AB = AC = AD, calcule α e β.

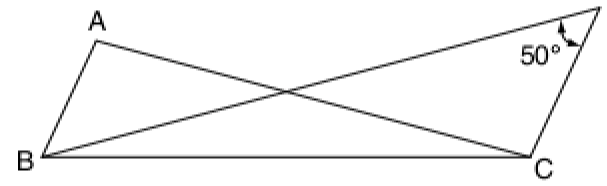


8 AE = AB = BC e AC = BD. Calcule α.



9 **UFRJ** Considere um triângulo isósceles de vértices A, B e C, em que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos formados em cada um de seus respectivos vértices. Sendo $\hat{B} = 70°$, $\hat{C} > \hat{A}$ e r a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, calcule o menor ângulo formado pela altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e r.

10 **Vunesp** Considere o triângulo ABC da figura adiante.



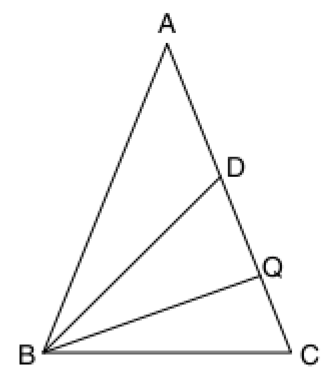
Se a bissetriz interna do ângulo B forma com a bissetriz externa do ângulo C um ângulo de 50°, determine a medida do ângulo interno A.

11 **Unicamp** Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo α e um ângulo obtuso β. Suponha que, em um tal trapézio, a medida de β seja igual a cinco vezes a medida de α.

a) Calcule a medida de α, em graus.

b) Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de α e β é reto.

12 **UFMG** Observe a figura.



Tendo:

AB = AC = 6, BC = BD = 4 e $C\hat{B}Q = Q\hat{B}D$. A tangente $\left(\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\right)$ do ângulo $C\hat{B}Q$ é:

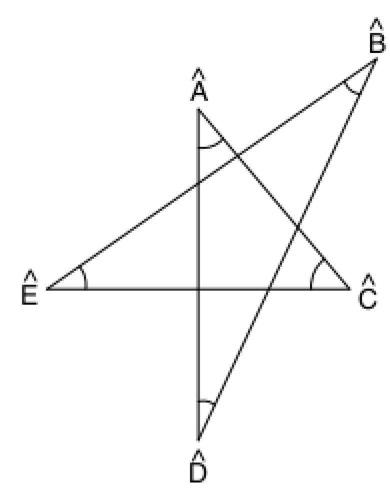
(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

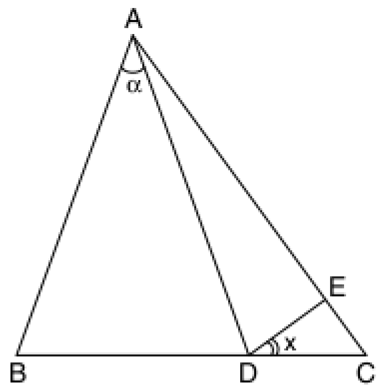
(c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{2}$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

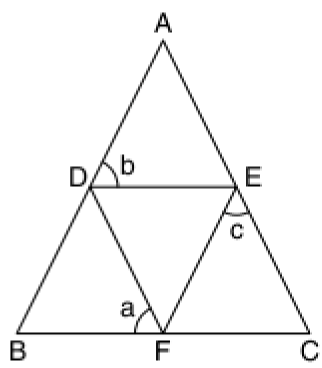
13 Calcule a soma dos ângulos assinalados:



14 Na figura, temos: AB = AC e AD = AE. Calcule x em função de α.



15 ΔABC é isósceles, com AB = AC. Nele está inscrito um triângulo DEF equilátero. Demonstre que $a = \frac{b + c}{2}$.



16 Sendo dado o ΔABC, tal que $\hat{B} = 30°$ e $\hat{C} = 80°$, transportam-se sobre AB os comprimentos AD e AE, iguais a AC. Depois, ligam-se os pontos E e D a C. Calcule os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{E}C$.

17 Em um ΔABC, prolonga-se os lados AB e AC de segmentos $\overline{AD} = \overline{AB}$ e $\overline{AE} = \overline{AC}$. Mostre que as retas BC e DE são paralelas.

18 Demonstre que é isósceles o triângulo ABC, no qual a bissetriz do ângulo externo em A é paralela ao lado BC.

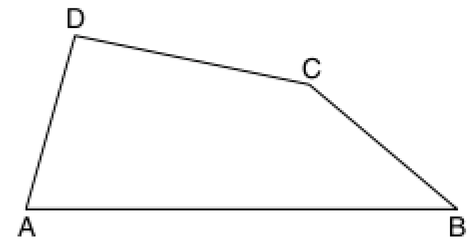
19 ABC é um triângulo retângulo e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $H\hat{A}C$ são perpendiculares.

20 Em um triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos externos em B e C formam um ângulo de 40º e a altura relativa ao lado BC forma, com a bissetriz do ângulo Â, um ângulo de 25º. Calcule os ângulos do triângulo.

21 Trace a altura e a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Demonstre que o ângulo formado por essas duas cevianas é a semidiferença dos ângulos da base do triângulo.

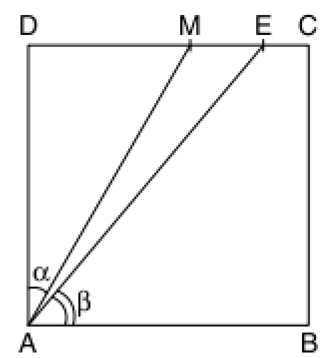
22 ABC é um triângulo isósceles no qual os ângulos da base $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais a $\frac{1}{4}$ do ângulo do vértice Â. Demonstre que a reta perpendicular à base BC traçada por C intercepta o prolongamento do lado BA em um ponto M tal que o triângulo ACM é equilátero.

23 **Fuvest** No quadrilátero ABCD, temos AD = BC = 2 e o prolongamento desses lados forma um ângulo de 60°.

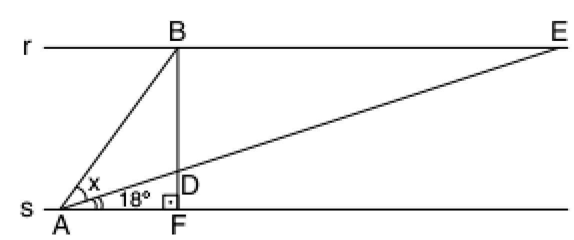


a) Indicando por $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$, respectivamente, as medidas dos ângulos internos do quadrilátero de vértices A, B, C e D, calcule a soma dos ângulos $\hat{A} + \hat{B}$ e $\hat{C} + \hat{D}$.
b) Seja J o ponto médio do segmento DC, M o ponto médio do segmento AC e N o ponto médio do segmento BD. Calcule JM e JN.
c) Calcule a medida do ângulo MJN.

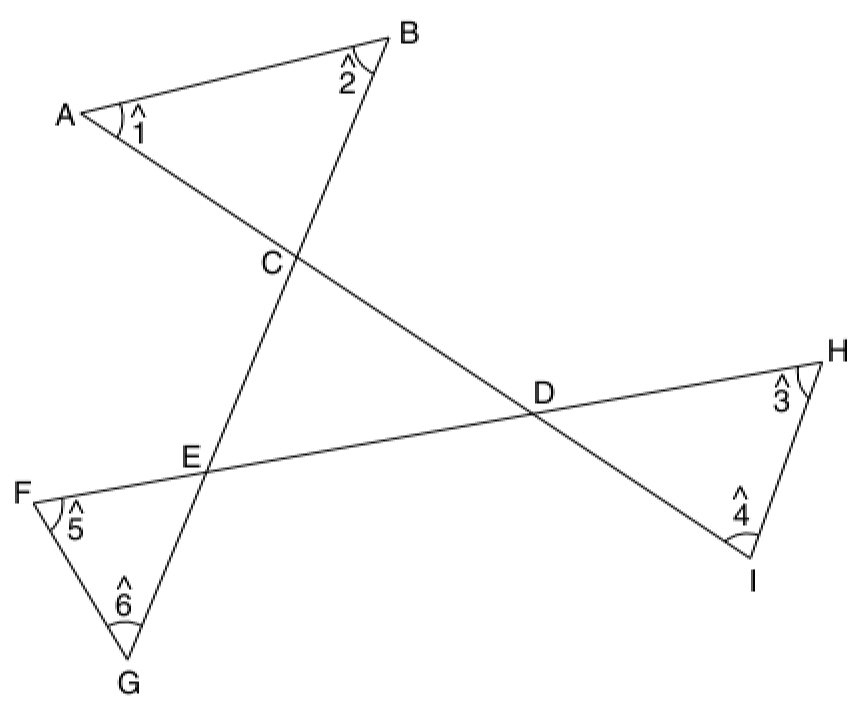
24 ABCD é um quadrado, DM = MC e AE = CE + CB. Calcule $\frac{\beta}{\alpha}$.



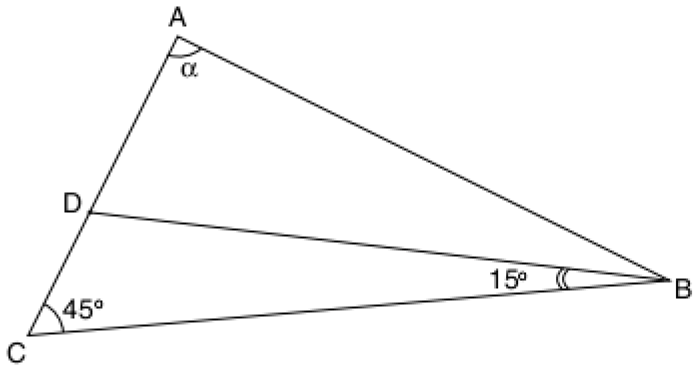
25 As retas r e s são paralelas e DE = 2 AB. Calcule x.



26 Calcule a soma dos ângulos adicionados.

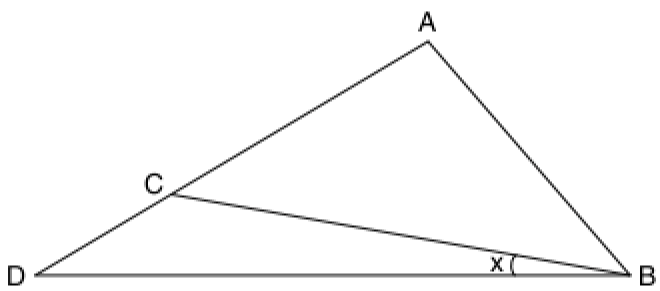


27 Calcule o valor de α, tal que AD = 2DC.

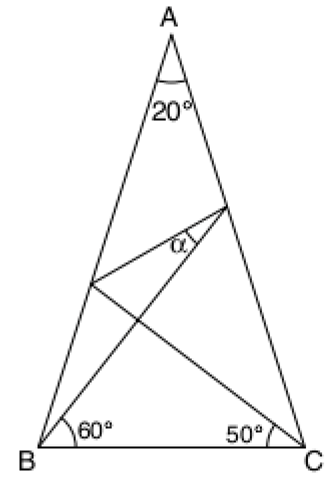


28 No triângulo ABC, AB = 20, AC = 21 e BC = 29. Os pontos D e E sobre o lado $\overline{BC}$ são tais que BD = 8 e EC = 9. Determine a medida do ângulo DÂE em graus.

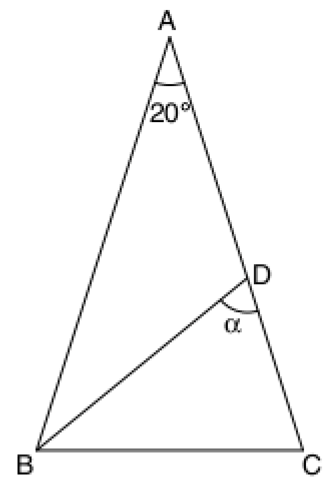
29 AB = AC, AD = BC e Â = 100°. Determine x.



30 Na figura a seguir, AB = AC, calcule α.

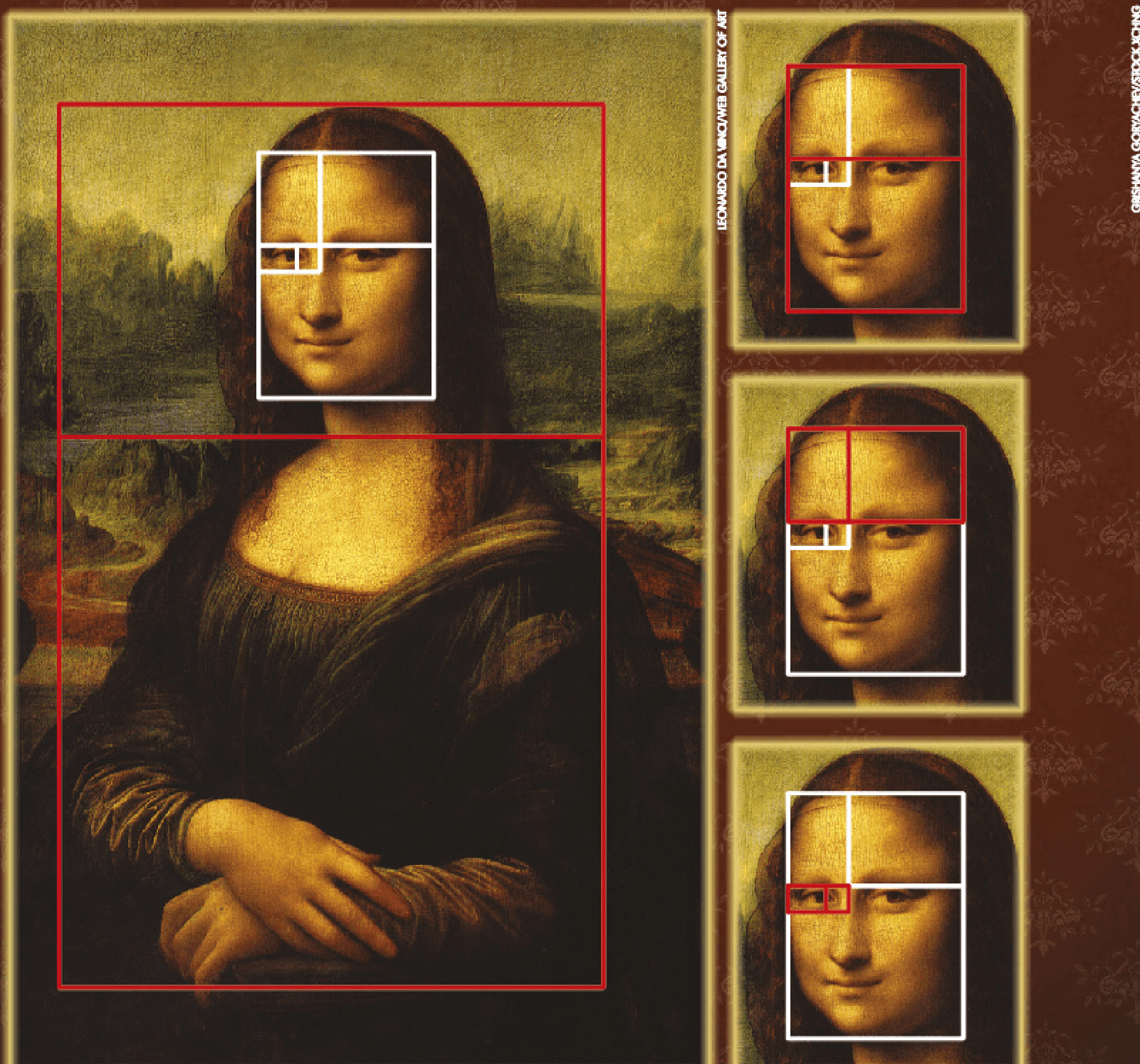


31 O triângulo ABC é isósceles com AB = AC e BÂC = 20º. Se AD = BC, determine a medida do ângulo B$\hat{D}$C.



FRENTE 3

5 Segmentos proporcionais



Mona Lisa, também conhecida como *La Gioconda*, é a obra mais notável de Leonardo da Vinci. Foi pintada entre 1503 e 1507 e pertence ao Museu do Louvre, na França. A obra, antes de ser colocada no museu, adornava os aposentos do general francês Napoleão Bonaparte. Observe na figura o preciosismo estético de Leonardo da Vinci ao centralizar a figura dentro de um retângulo áureo.

Introdução

A noção de razão entre duas linhas na geometria é fundamental para a construção de figuras e variações do seu formato. Com isso, grandes artistas conseguiram criar suas obras com a beleza plástica necessária. O retângulo áureo pode ser considerado a plataforma para a criação de belíssimas imagens. Antes de observarmos suas aplicações, veja o que é o retângulo áureo.

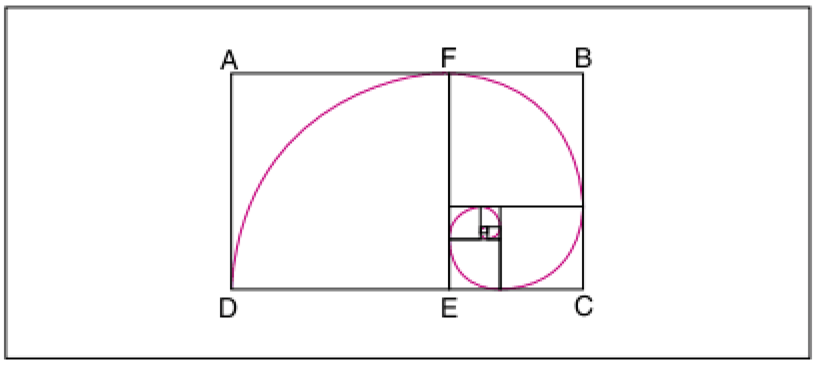


Fig. 1 Sequência de retângulos áureos gerando uma espiral.

ABCD é um retângulo áureo quando retiramos o quadrado AFED e resulta em um outro retângulo FBCE semelhante ao primeiro. Assim:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{b}{a}\therefore a^2-ab=b^2\therefore b^2+ab-a^2=0\therefore$$

$$\therefore\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)-1=0\therefore\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{ (razão áurea)}$$

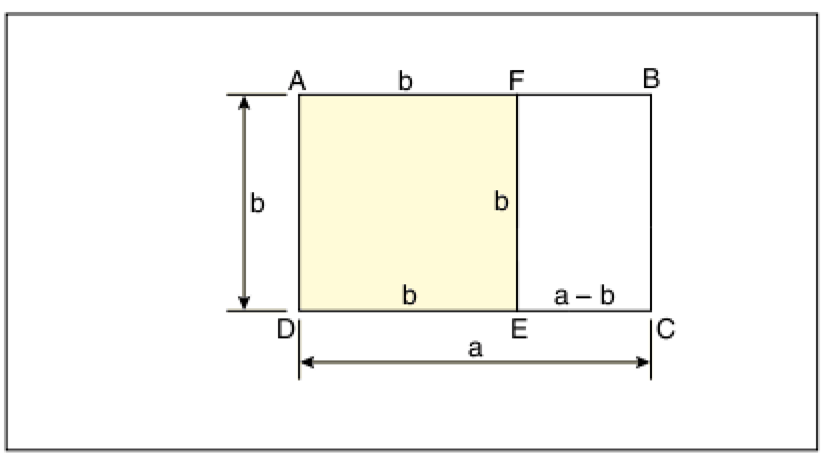


Fig. 2 Retângulo de dimensões a e b.

Segmentos proporcionais

Considere um feixe de retas paralelas (três ou mais retas) coplanares e retas transversais, de acordo com a figura 3.

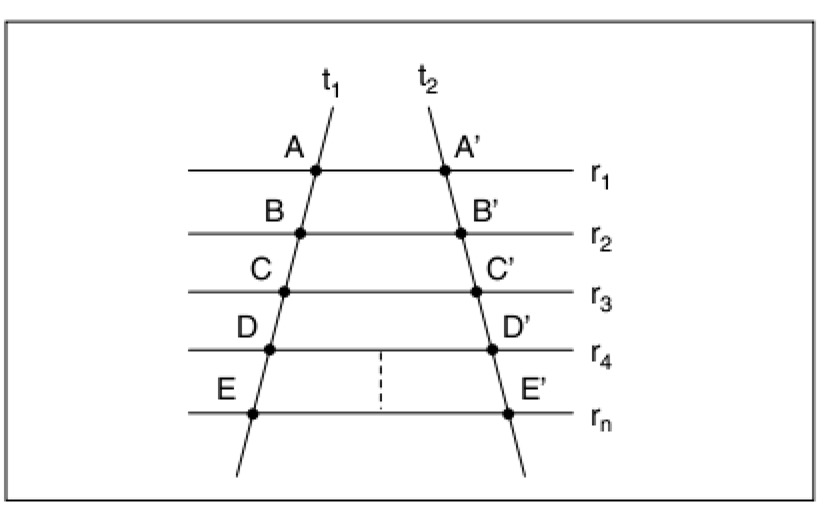


Fig. 3 Feixe de paralelas e transversais.

Chamamos de segmentos correspondentes os segmentos contidos em transversais diferentes, mas entre as mesmas paralelas.

Observe os exemplos abaixo.

Transversal t_1	Transversal t_2
$\overline{AB}$	$\overline{A'B'}$
$\overline{DE}$	$\overline{D'E'}$
$\overline{BD}$	$\overline{B'D'}$

Tab. 1 Segmentos correspondentes.

Propriedade auxiliar do teorema de Tales

Vamos enunciar uma propriedade interessante e que nos ajudará na demonstração do teorema de Tales.

ATENÇÃO!

Em um feixe de retas paralelas, uma transversal é dividida em α partes congruentes. Pelos pontos de divisão, são conduzidas retas, paralelas a outra transversal, que serão também divididas em α partes congruentes entre si.

Parece um pouco assustador, mas vamos demonstrar e exemplificar esse resultado.

Considere um feixe de paralelas e a transversal t_1 na figura a seguir.

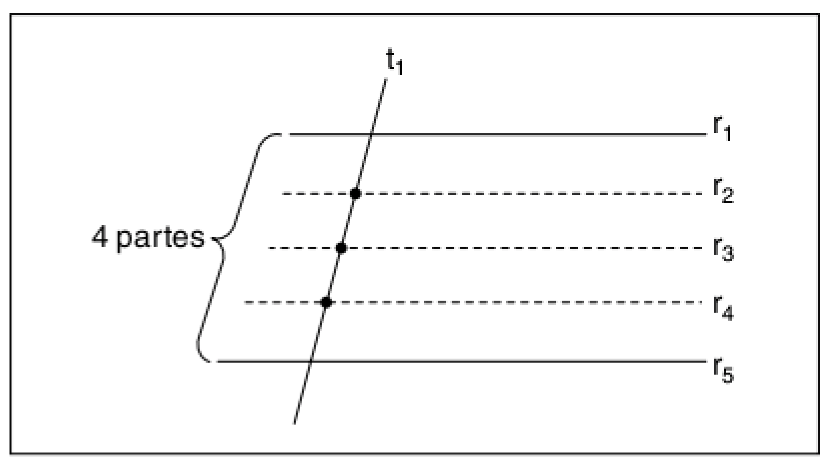


Fig. 4 Exemplo da propriedade.

Se entre r_1 e r_5 a tranversal t_2 for dividida em 3 partes, por exemplo, teremos a seguinte situação:

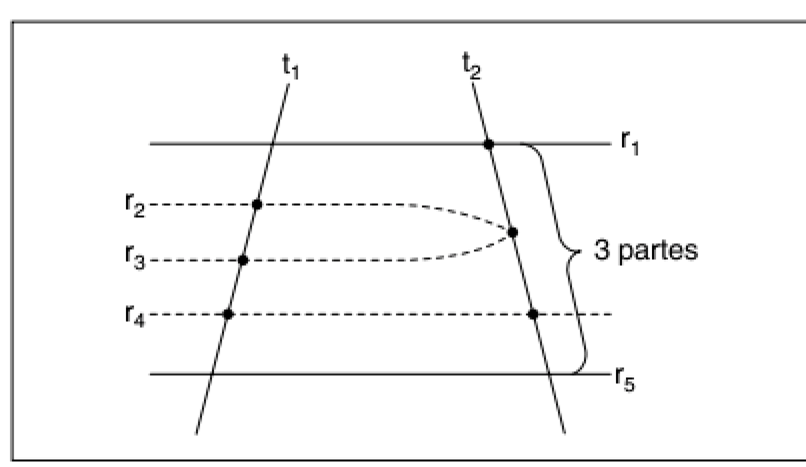


Fig. 5 Contraexemplo.

Isso é um absurdo, pois as retas r_2 e r_3 são paralelas e elas teriam de se cruzar para formar as 3 partes em t_2!

Se fizermos o contrário, teremos a transversal t_1 dividida em 3 partes e a transversal t_2 dividida em 5 partes. Dessa maneira, também chegaríamos a outro absurdo. (Faça você mesmo como exercício). Com isso, provamos, até agora, que o número de partes que um feixe de paralelas produz em transversais é o mesmo. No entanto, falta deduzir que os segmentos são iguais entre si. Observe:

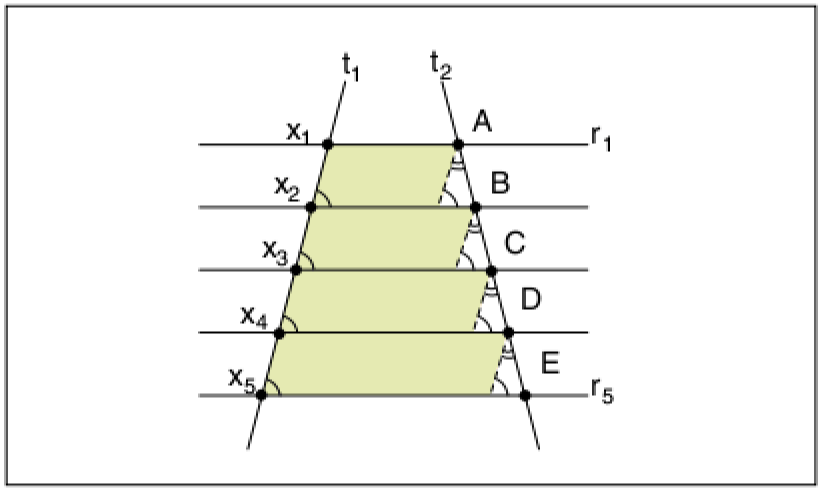


Fig. 6 Exemplo da propriedade.

Observando a figura 6, trace retas paralelas a t_1 por A, B, C e D. Formam-se, então, paralelogramos que possuem os lados opostos iguais. A sequência de triângulos que se forma na transversal t_2 é congruente pelo critério ALA. Portanto:

$$AB = BC = CD = DE$$

Teorema de Tales

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois pares de segmentos correspondentes é igual.

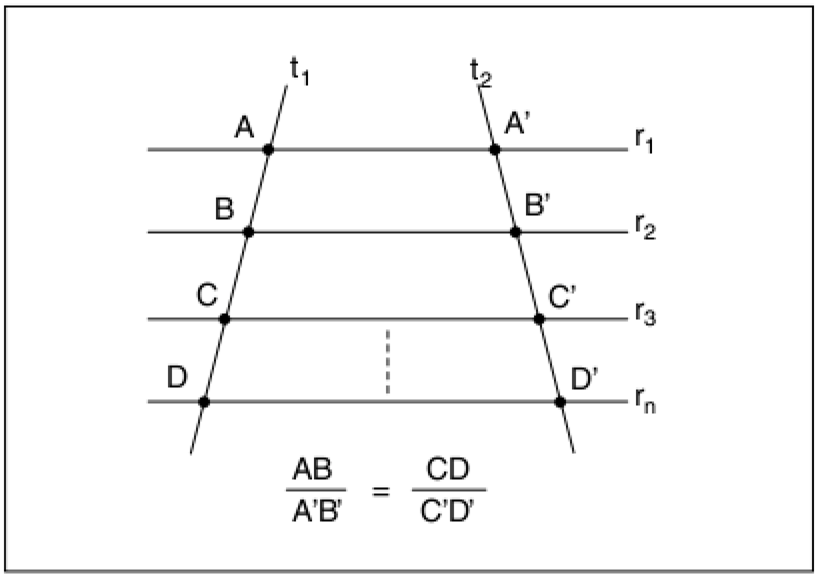


Fig. 7 Teorema de Tales.

A demonstração do teorema possui duas partes:

1ª parte: segmentos comensuráveis

Com base na propriedade mostrada anteriormente, temos a figura a seguir.

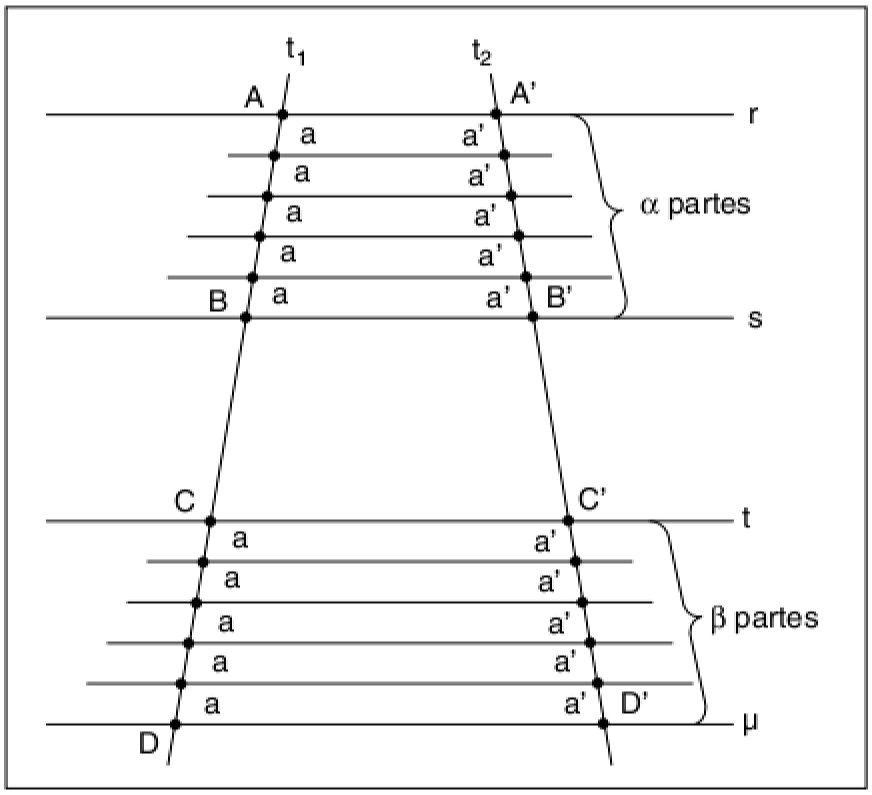


Fig. 8 Teorema de Tales dos segmentos comensuráveis.

Segundo a figura 8, temos:

$$AB = \alpha . a,\ A'B' = \alpha . a' \therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{a}{a'}$$

e também: $CD = \beta . a;\ C'D' = \beta . a' \therefore \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{a}{a'}$

portanto: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

2ª parte: segmentos incomensuráveis

Não existe um segmento que é submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (incomensurabilidade).

Podemos fazer o seguinte: a é submúltiplo de $\overline{AB}$, ou seja, $AB = \alpha . a;\ \alpha \in \mathbb{Z}$, mas não é submúltiplo de $\overline{CD}$, ou seja, $\beta \in \mathbb{Z},\ \beta . a < CD < (\beta + 1) . a$

Dividindo a desigualdade por AB, temos:

$$\frac{\beta . a}{AB} < \frac{CD}{AB} < \frac{(\beta+1)a}{AB} \therefore$$

$$\therefore \frac{\beta . a}{\alpha . a} < \frac{CD}{AB} < \frac{(\beta+1)a}{\alpha . a} \therefore$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} < \frac{CD}{AB} < \frac{\beta+1}{\alpha}$$

Observe a figura 9.

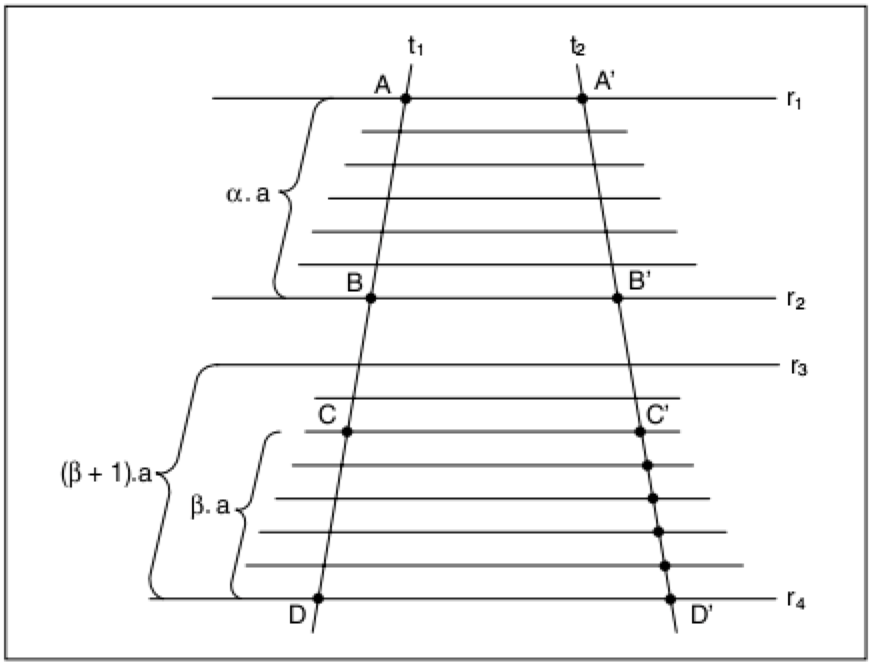


Fig. 9 Teorema de Tales dos segmentos incomensuráveis.

Aplicando o resultado na transversal t_2, temos:

$A'B' = \alpha . a'$ e $B . a' < C'D' < (\beta + 1)a' \therefore$

$\therefore \dfrac{\beta . a'}{A'B'} < \dfrac{C'D'}{A'B'} < \dfrac{(\beta+1)a'}{A'B'} \therefore$

$\therefore \dfrac{\beta . a'}{\alpha a'} < \dfrac{C'D'}{A'B'} < \dfrac{(\beta+1)a'}{\alpha a'} \therefore$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{C'D'}{A'B'} < \dfrac{\beta+1}{\alpha}$

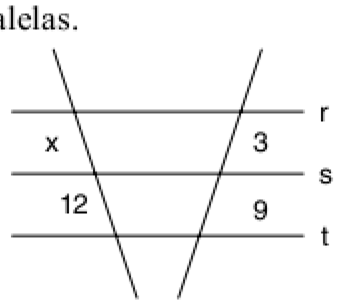
Essa desigualdade e a anterior definem um único número real, assim:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$$

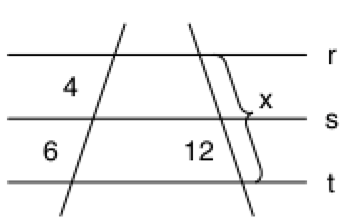
Exercícios resolvidos

1 Determine o valor de x, sabendo que r, s e t são retas paralelas.

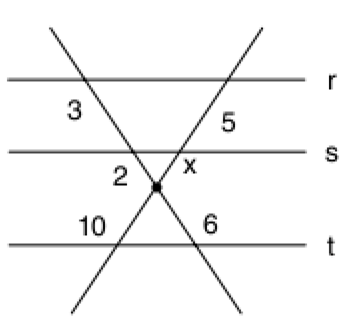
a)



b)



c)



Resolução:

a) *Utilizando o teorema de Tales:*

$\dfrac{x}{12} = \dfrac{3}{9} \therefore 9x = 36 \therefore x = 4$

b) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{4+6}{6}$ *(fiquem atentos com a correspondência entre os segmentos)*

$6x = 12 . 10 \therefore x = 20$

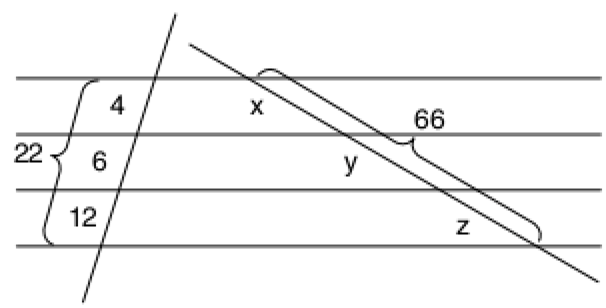
c) *Neste exemplo, nós temos as transversais se cruzando. Aplicando corretamente o teorema, temos:*

$\dfrac{x}{10} = \dfrac{2}{6} \therefore 6x = 20 \therefore x = \dfrac{10}{3}$

2 Um feixe de 4 paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 4 cm, 6 cm e 12 cm. Indique os comprimentos dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede 66 cm.

Resolução:

Colocando os dados no desenho, observe a figura abaixo.



$\dfrac{x}{66} = \dfrac{4}{22} \Rightarrow x = 12\ cm$

$\dfrac{y}{66} = \dfrac{6}{22} \Rightarrow y = 18\ cm$

$\dfrac{z}{66} = \dfrac{12}{22} \Rightarrow z = 36\ cm$

Teorema das bissetrizes

O teorema das bissetrizes é um dos principais resultados de aplicação do teorema de Tales. O nosso problema é determinar a posição de corte de uma bissetriz no lado oposto de um triângulo qualquer. Observe a figura abaixo.

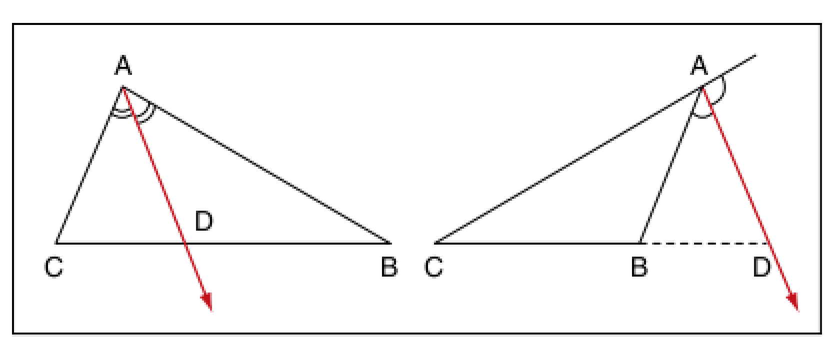


Fig. 10 Bissetriz interna e bissetriz externa.

Teorema da bissetriz interna

Uma bissetriz interna de um triângulo qualquer divide o lado oposto em dois segmentos aditivos proporcionais aos lados adjacentes.

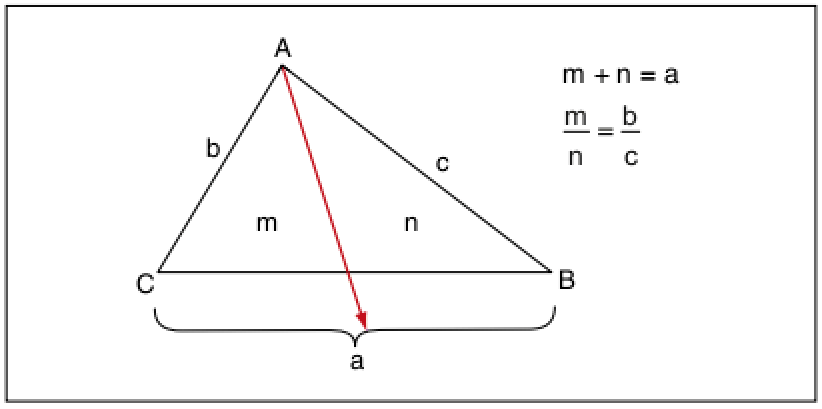


Fig. 11 Teorema da bissetriz interna.

Demonstração:

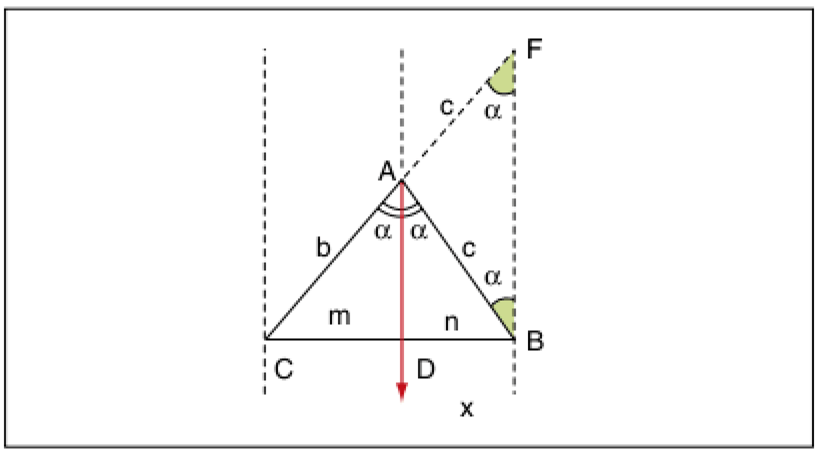


Fig. 12 Demonstração do teorema da bissetriz interna.

1. Prolongue o lado $\overline{AC}$ de um segmento $\overline{AF} = c$.
2. O ΔAFB é isósceles e $A\hat{B}F = A\hat{F}B = \alpha$.
3. O ângulo $B\hat{A}C$ é externo do ΔAFB; logo, $B\hat{A}C = 2\alpha$ e, como $\overline{AD}$ é bissetriz, $C\hat{A}D = B\hat{A}D = \alpha$.
4. $\overline{AB}$ é transversal à $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$, e os ângulos alternos internos são iguais $\Rightarrow \overline{AD} \,//\, \overline{BF}$.
5. Com base no item 4 e no teorema de Tales, temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{c} \text{ (c.q.d.)}$$

Teorema da bissetriz externa

Uma bissetriz de um ângulo externo intercepta o prolongamento do lado oposto e o divide em dois segmentos subtrativos proporcionais aos lados adjacentes.

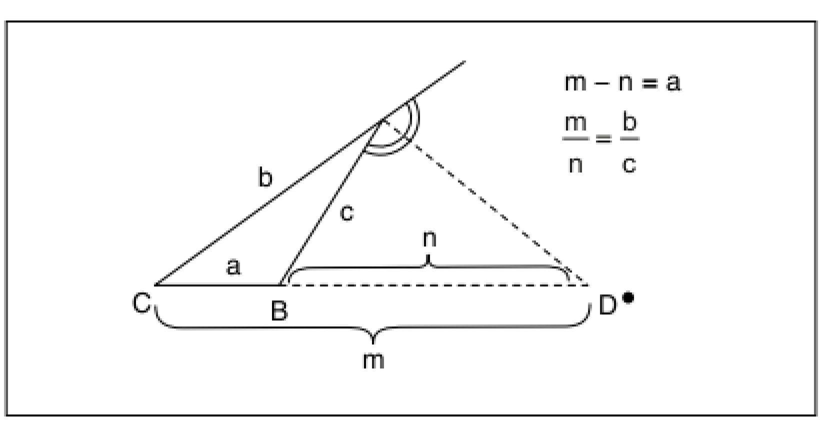


Fig. 13 Teorema da bissetriz externa.

Demonstração:

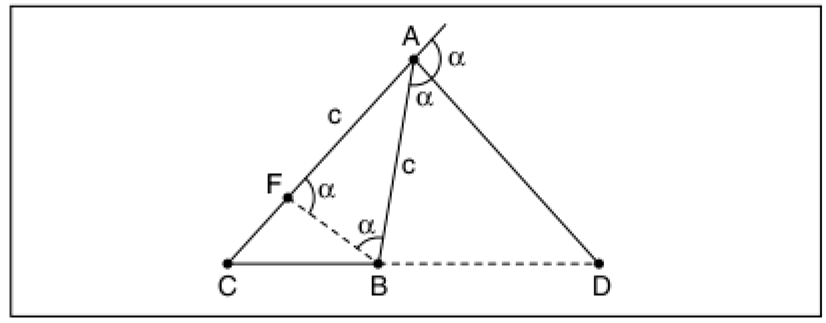


Fig. 14 Demonstração do teorema da bissetriz externa.

1. Pelo ponto B, trace $\overline{BF} \,//\, \overline{AD}$.
2. $A\hat{B}F = B\hat{A}D$ (alternos internos).
3. $B\hat{F}A = \alpha$ (ângulos correspondentes).
4. ΔAFB é isósceles.
5. Observe o feixe de paralelas e as transversais a seguir.

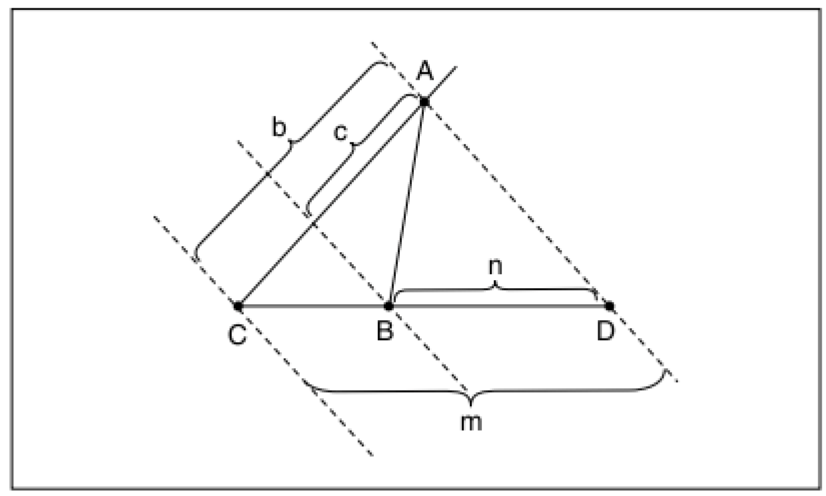


Fig. 15 Teorema de Tales.

6. A figura 15 mostra a aplicação do teorema de Tales.

Observe: $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$

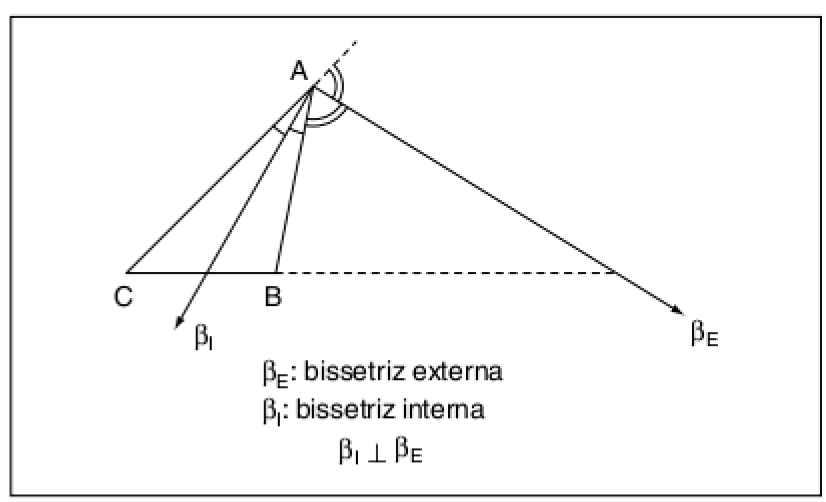
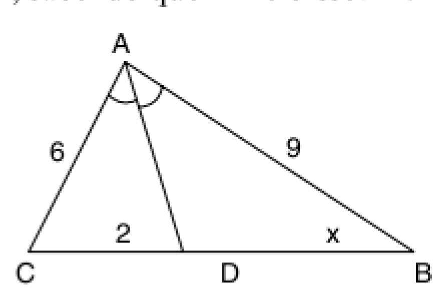


Fig. 16 As bissetrizes são perpendiculares.

Exercícios resolvidos

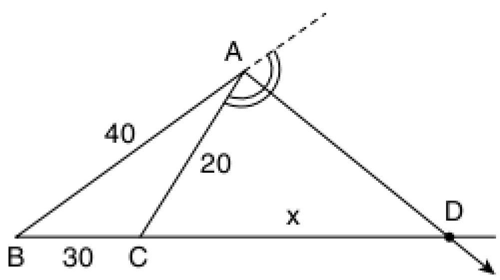
3 Calcule x, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz.



Resolução:

$\frac{2}{x} = \frac{6}{9}$ ∴ $6x = 18$ ∴ $x = 3$

4 Calcule a distância do ponto D ao vértice C, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz externa.



Resolução:

As fórmulas para as duas situações são idênticas, mas cuidado porque, no caso da bissetriz externa, os segmentos m e n são subtrativos, ou seja, m – n = a.

Observe:

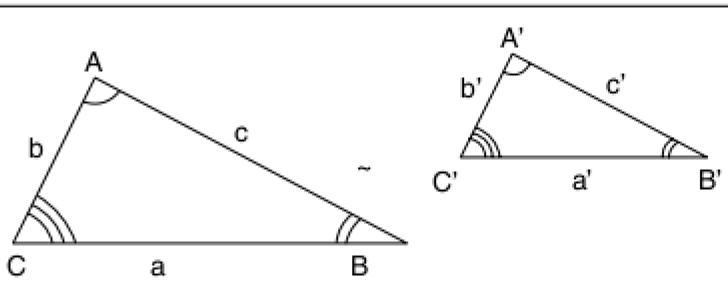
$m = 30 = + x$ e $n = x$

$\frac{m}{n} = \frac{40}{20}$ ∴ $\frac{30 + x}{x} = \frac{40}{20}$ ∴ $\frac{30 + x}{x} = 2$ ∴

∴ $2x = 30 + x$ ∴ $x = 30$

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os ângulos internos iguais e os lados correspondentes proporcionais.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{pmatrix} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k: constante de proporcionalidade (razão de semelhança)

Fig. 17 Definição de triângulos semelhantes.

Critério de semelhança

Se dois triângulos possuem dois ângulos iguais, então eles são semelhantes.

Demonstração:

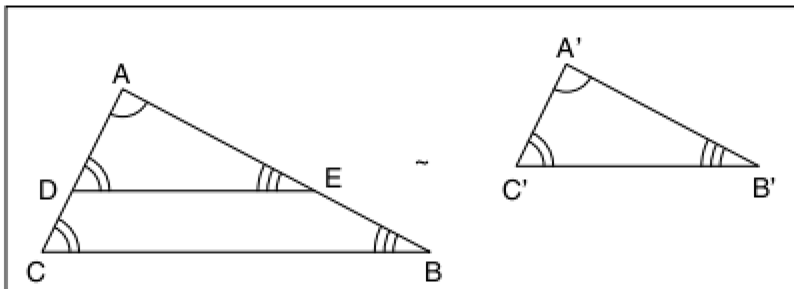


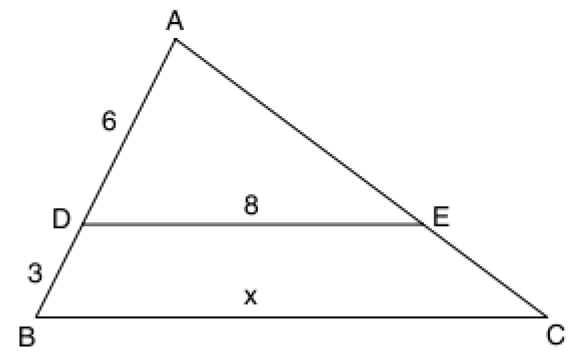
Fig. 18 Critério de semelhança.

Suponha que os triângulos não sejam congruentes.

1. Marque AD ≅ A'C' no lado AC
2. $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$
3. ΔADE ≅ ΔA'C'B' (ALA)
4. O ΔABC ~ ΔADE ⇒ ΔABC ~ ΔA'B'C' (c.q.d.).

Exercícios resolvidos

5 Calcule x, se $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.

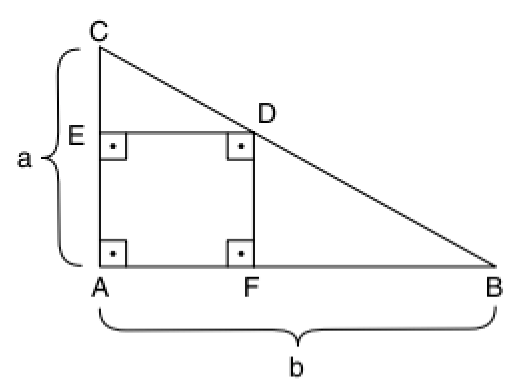


Resolução:

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ∴ $\frac{6}{9} = \frac{8}{x}$ ∴

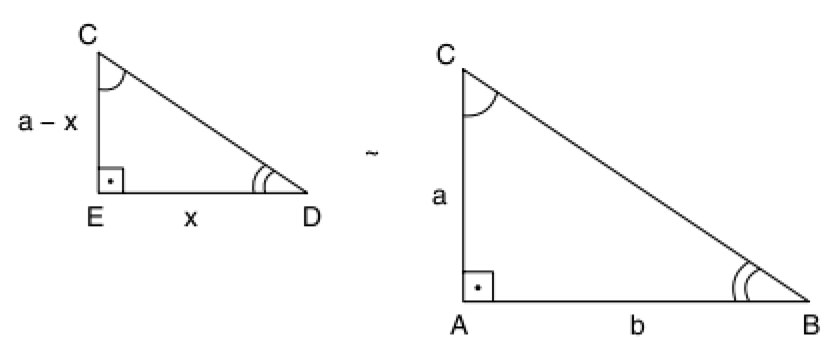
∴ $6x = 9 . 8$ ∴ $6x = 72$ ∴ $x = 12$

6 Calcule o lado do quadrado da figura, sabendo que o ΔABC é retângulo de catetos a e b.



Resolução:

Os triângulos ABC, FBD e EDC são semelhantes. Escolhendo o ΔEDC e o ΔABC, temos:



$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{a}$ ∴ $ax = b(a - x)$ ∴ $ax = ab - bx$ ∴ $(a + b)x = ab$ ∴

∴ $x = \frac{ab}{a + b}$

Base média do triângulo

A base média de um triângulo qualquer é o segmento que une os pontos médios de dois lados. Observe a figura abaixo.

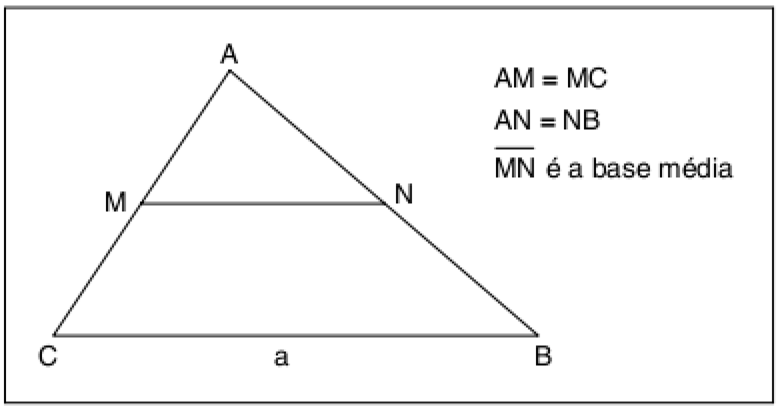


Fig. 19 Base média do triângulo.

Teorema:

A base média $\overline{MN}$ de um triângulo qualquer ABC possui as seguintes características:

a) $\overline{MN} // \overline{BC}$

b) $\overline{MN} = \frac{a}{2}$

Demonstração:

1) Como AM = MC e AN = NB, assim $\frac{AM}{MC} = \frac{AN}{NB}$, com base no teorema de Tales, temos $\overline{MN} // \overline{BC}$.

2) $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ e a razão de semelhança é $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$, assim $\overline{MN} = \frac{a}{2}$.

Revisando

1 Um feixe de retas paralelas determina sobre uma secante os segmentos AB = 3 cm, BC = 5 cm e CD = 7 cm. Calcule os segmentos MN, NP e PQ, determinados pelo mesmo feixe sobre uma outra secante, sabendo que MQ = 60 cm.

2 Calcule o perímetro de um triângulo ABC, sabendo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ diferem em 3 cm e que a bissetriz do ângulo Â determina no lado $\overline{BC}$ segmentos de 6 cm e 5 cm.

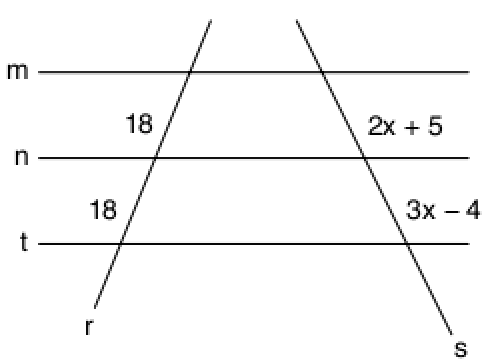
3 Os lados de um triângulo medem 12 m, 16 m e 20 m. Calcule os segmentos subtrativos determinados, no maior lado, pela bissetriz do ângulo externo do vértice oposto a esse lado.

4 Os lados de um triângulo ABC medem AB = 15 m, AC = 12 m e BC = 21 m. Pelo ponto D, sobre o lado, traça-se uma paralela ao lado $\overline{BC}$, formando o quadrilátero BDEC, cujo perímetro vale 44 m. Calcule o perímetro do triângulo ADE.

Exercícios propostos

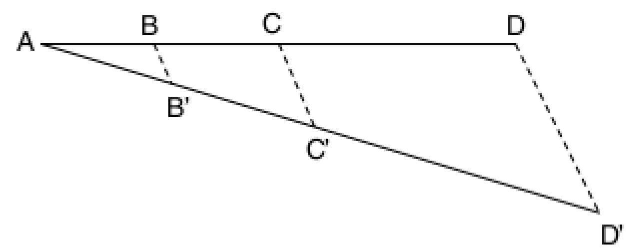
Teorema de Tales

1 Na figura a seguir, as medidas são dadas em cm. Sabendo que m // n // t, determine o valor de x.

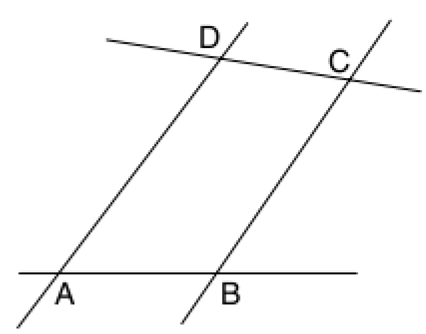


2 Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$, em um triângulo ABC, determina sobre o lado $\overline{AB}$ segmentos de 3 cm e 12 cm. Calcule as medidas dos segmentos que essa reta determina sobre o lado $\overline{AC}$, de medida 10 cm.

3 **Unicamp** A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: AB = 2 cm, BC = 3 cm e CD = 5 cm. O segmento AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD'. Determine os comprimentos dos segmentos AB', B'C' e C'D'.



4 **UFMG** Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, AD = 8, AB = 3 e BC = 7.



Sendo P o ponto de interseção das retas AB e DC, a medida do segmento $\overline{BP}$ é:

(a) 23
(b) 22
(c) 24
(d) 21

5 Um feixe de 3 retas paralelas determina sobre uma transversal “a” os pontos A, B, C, tal que AB = 10 cm e BC = 25 cm, e sobre a transversal “b” os pontos M, N e P, tal que MN = 20. Quais as medidas dos segmentos MN e NP determinados sobre a transversal “b”? (Faça a figura)

Teoremas das bissetrizes

6 Ache os três lados de um triângulo ABC, no qual CD é a bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{C}$, sabendo que: AC = x + 2, BC = 5x – 2, AD = x, DB = 5x – 8.

7 A bissetriz do ângulo $\hat{B}$ de um triângulo ABC determina no lado oposto AC = 21 cm os segmentos x e y. Sabendo que a + c = 35 cm e a – y = 6 cm, calcule os dois lados incógnitos do triângulo ABC.

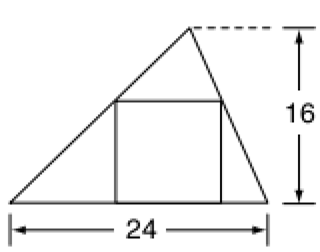
8 ABCD é um paralelogramo, no qual AB = 12 cm e AD = 8 cm. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ intercepta a diagonal BD em M e o lado CD em N. Calcule a razão $\frac{MN}{MA}$.

9 Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa relativas ao ângulo $\hat{A}$ interceptam o lado BC e o seu prolongamento em P e Q, respectivamente. Sabendo que BP = 5 cm e PC = 3 cm, calcule CQ.

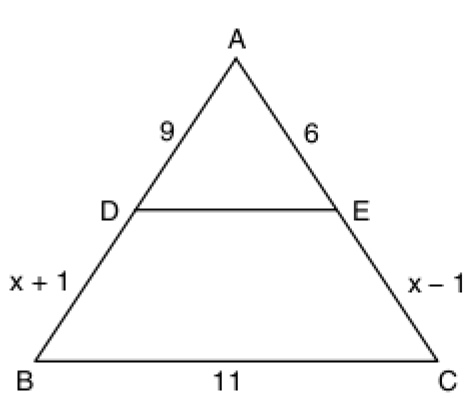
Semelhança de triângulos

10 Em uma planta de escala 1:100, qual deve ser o comprimento de uma cozinha cujo comprimento real é 5 m?

11 A figura a seguir mostra um quadrado inscrito em um triângulo de base 24 cm e altura 16 cm. Calcule o lado desse quadrado.



12 No triângulo da figura a seguir, DE // BC.

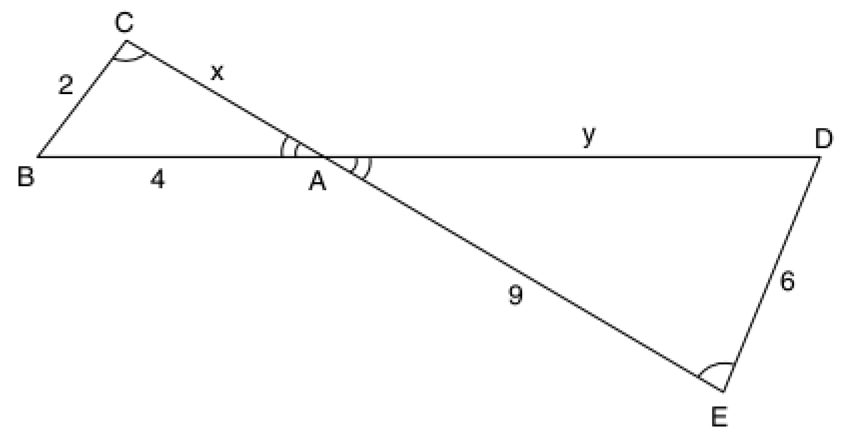


Nessas condições, determine:

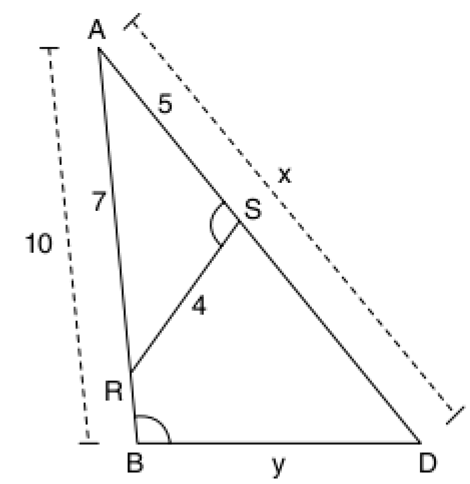
a) a medida x.

b) o perímetro do ΔABC.

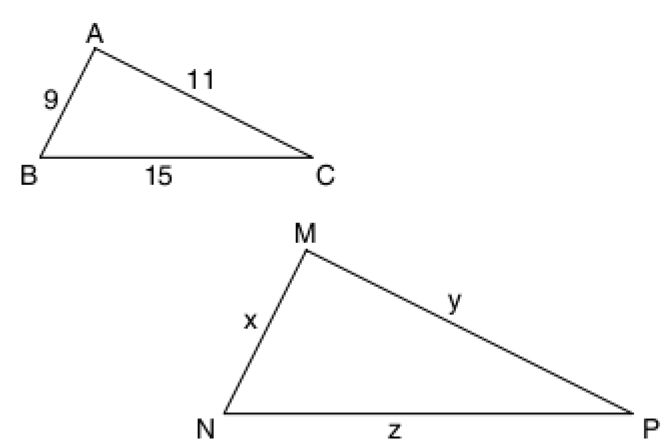
13 Na figura a seguir, $\hat{C} = \hat{E}$, BC = 2 cm, AB = 4 cm, DE = 6 cm e AE = 9 cm. Calcule AC = x e AD = y.



14 Na figura abaixo, sabe-se que $\hat{S}$ e $\hat{B}$ são congruentes, AR = 7 cm, AS = 5 cm, SR = 4 cm e AB = 10 cm. Determine AD = x e BD = y.



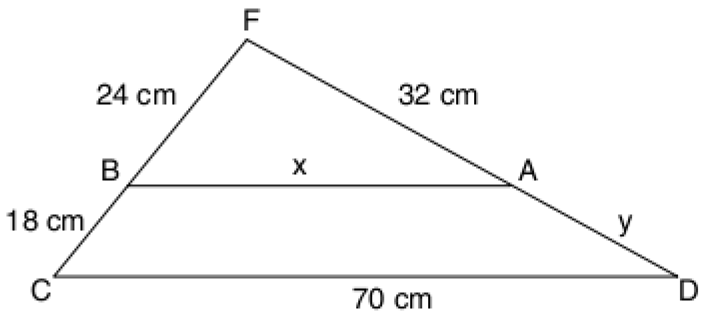
15 Em um triângulo ABC, os lados medem AB = 9 cm, AC = 11 cm e BC = 15 cm. Um triângulo MNP, semelhante ao triângulo ABC, tem 105 cm de perímetro. Determine as medidas dos lados do triângulo MNP.



16 A alternativa verdadeira é:

(a) todos os triângulos são semelhantes.
(b) todos os triângulos retângulos são semelhantes.
(c) todos os triângulos isósceles são semelhantes.
(d) todos os triângulos equiláteros são semelhantes.

17 Na figura a seguir, $\overline{BA} // \overline{CD}$.



Então, x e y valem, respectivamente:

(a) 25 cm e 13 cm
(b) $\frac{4}{3}$ cm e $\frac{16}{3}$ cm
(c) 20 cm e 12 cm
(d) 40 cm e 24 cm

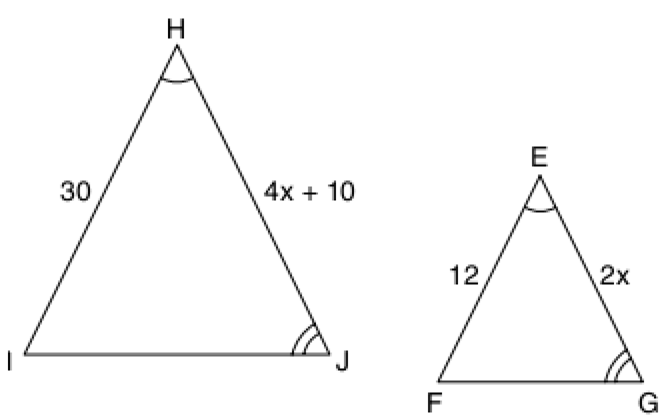
18 Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 7 cm, 9 cm e 14 cm. Qual é o perímetro do triângulo semelhante ao dado cujo lado maior é de 21 cm?

(a) 45 cm
(b) 55 cm
(c) 60 cm
(d) 75 cm

19 Em um triângulo ABC, AB = 15 m, AC = 20 m. Sabendo-se que AM = 6 m (sobre o lado $\overline{AB}$), o valor do segmento AN sobre o lado $\overline{AC}$, de modo que o segmento $\overline{MN}$ seja paralelo ao lado $\overline{BC}$, é:

(a) 2
(b) 3
(c) 5
(d) 8

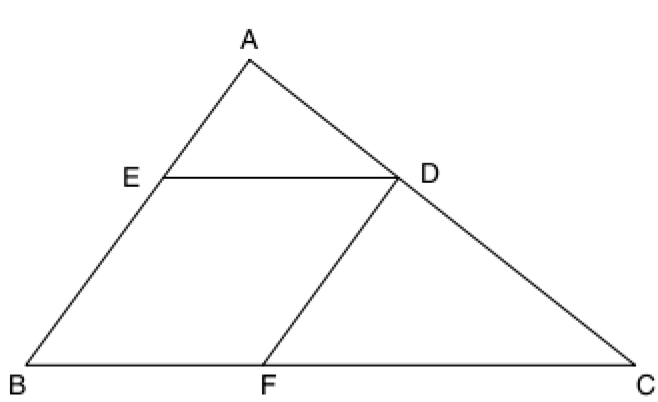
20 Na figura a seguir, os triângulos são semelhantes.



Então, o valor de x é:

(a) 10
(b) 11
(c) 12
(d) 13

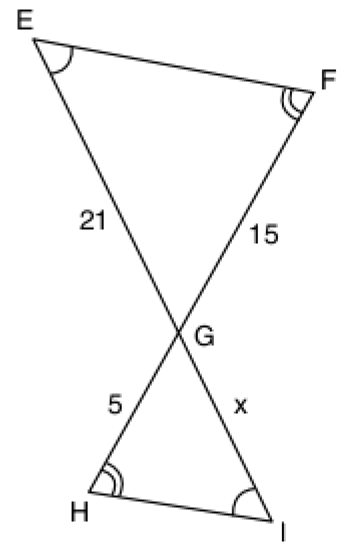
21 **UFMG** Observe a figura:



Nela, AB = 8, BC = 12 e BFDE é um losango inscrito no triângulo ABC. A medida do lado do losango é:

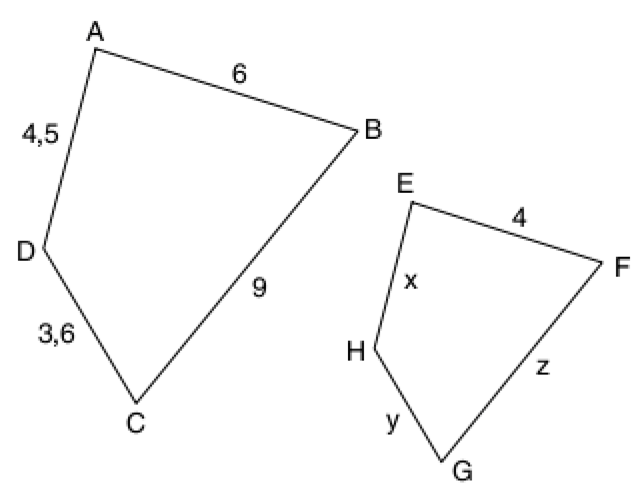
(a) 4
(b) 4,8
(c) 5
(d) 5,2

22 Na figura a seguir, o valor de x é:



(a) 6
(b) 7
(c) 8
(d) 9

23 Os quadriláteros ABCD e EFGH a seguir são semelhantes.



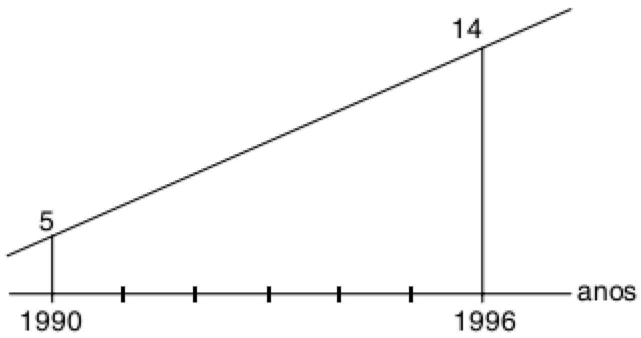
Nessas condições, determine:

a) a razão de semelhança de ABCD e EFGH.
b) as medidas x, y e z.

24 **Mackenzie** Em um triângulo retângulo, um cateto é o dobro do outro. Então, a razão entre o maior e o menor dos segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa é:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) $\frac{3}{2}$
(e) $\sqrt{5}$

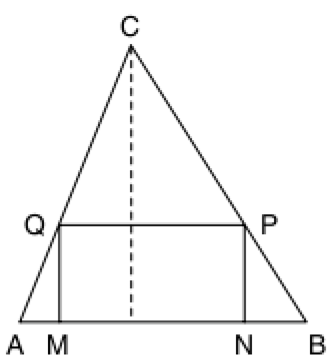
25 **UEL** O gráfico a seguir mostra a atividade de café, em milhões de toneladas, em certo município do estado do Paraná.



De acordo com o gráfico, é correto afirmar que, em 1994, a produção de café nesse município foi, em milhões de toneladas:

(a) 9,5
(b) 9
(c) 10,5
(d) 11
(e) 12,5

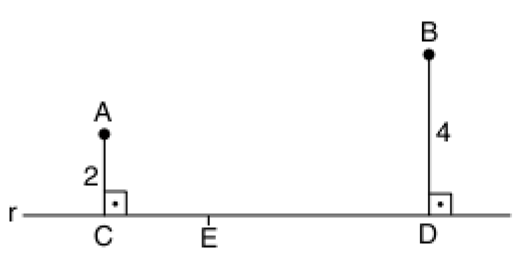
26 **Fuvest** No triângulo acutângulo ABC, a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC.



O perímetro desse retângulo, em cm, é:

(a) 4
(b) 8
(c) 12
(d) 14
(e) 16

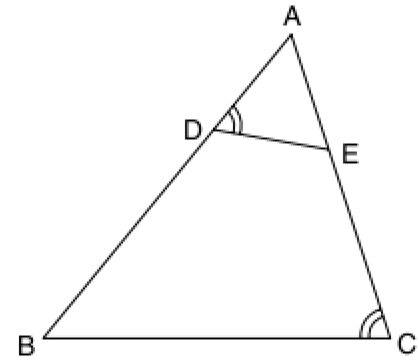
27 **Fuvest** Na figura adiante, as distâncias dos pontos A e B à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D.



Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
(e) 7

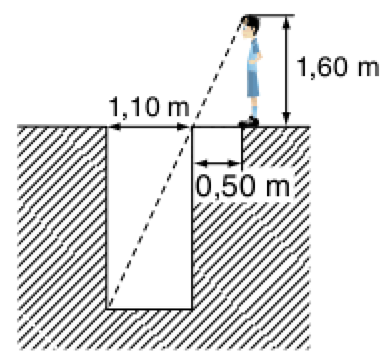
28 **PUC** Os triângulos ABC e AED, representados na figura a seguir, são semelhantes, sendo o ângulo $A\hat{D}E$ congruente ao ângulo $A\hat{C}B$.



Se BC = 16 cm, AC = 20 cm, AD = 10 cm e AE = 10,4 cm, o perímetro do quadrilátero BCED, em centímetros, é:

(a) 32,6
(b) 36,4
(c) 40,8
(d) 42,6
(e) 44,4

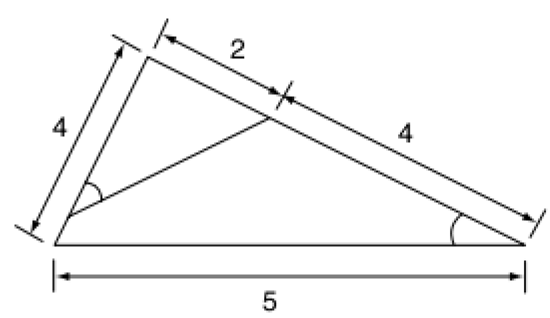
29 **UFRGS** Para estimar a profundidade de um poço, com 1,10 m de largura, uma pessoa, cujos olhos estão a 1,60 m do chão, posiciona-se a 0,50 m de sua borda. Dessa forma, a borda do poço esconde exatamente seu fundo, como mostra a figura abaixo:



Com base nos dados anteriores, a pessoa conclui que a profundidade do poço é:

(a) 2,82 m
(b) 3,00 m
(c) 3,30 m
(d) 3,52 m
(e) 3,85 m

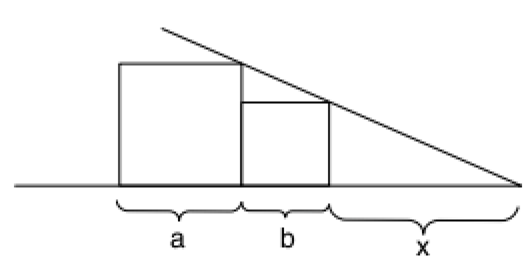
30 **Unirio** Observe os dois triângulos representados a seguir, em que os ângulos assinalados são congruentes.



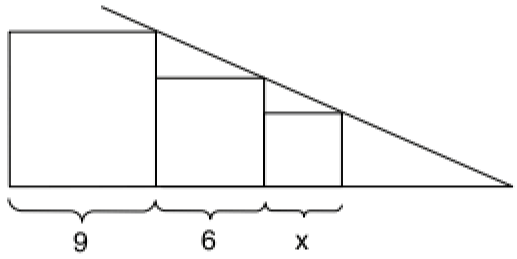
O perímetro do menor triângulo é:

(a) 3
(b) $\dfrac{15}{4}$
(c) 5
(d) $\dfrac{15}{2}$
(e) 15

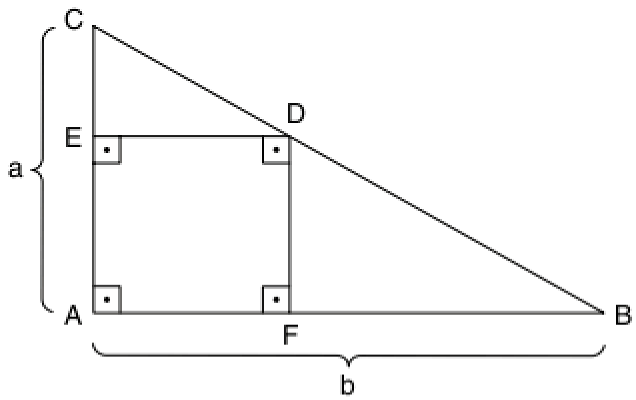
31 Na figura abaixo, consideremos os quadrados de lados a e b (a > b). Calcule x.



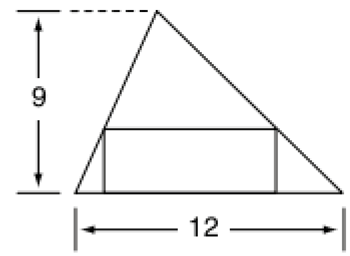
32 Na figura abaixo, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine x.



33 Determine a medida do lado do quadrado a seguir.



34 Um retângulo, cuja base é o dobro da altura, está inscrito em um triângulo de base 12 cm e altura 9 cm, conforme a figura a seguir. Calcule a medida do perímetro desse retângulo.



35 **Unirio (Adapt.)** Consideremos um ponto de luz no chão a 12 m de um edifício. Em uma posição entre a luz e o edifício, encontra-se um homem de 2 m de altura, cuja sombra projetada no edifício, pela mesma luz, mede 8 m.
Diante do exposto, calcule a distância entre o homem e o edifício.

36 **Cesgranrio** Certa noite, uma moça, de 1,50 m de altura, estava a dois metros de distância de um poste de luz de 4 m de altura. O comprimento da sombra da moça no chão era de:

(a) 0,75 m
(b) 1,20 m
(c) 1,80 m
(d) 2,40 m
(e) 3,20 m

37 A distância entre dois pontos notáveis de uma cidade, tomada em um mapa, mede 50 cm. Sabendo que a escala desse mapa é de 1:5.000, qual a distância real entre esses dois pontos notáveis?

TEXTOS COMPLEMENTARES

A altura da pirâmide de Quéops

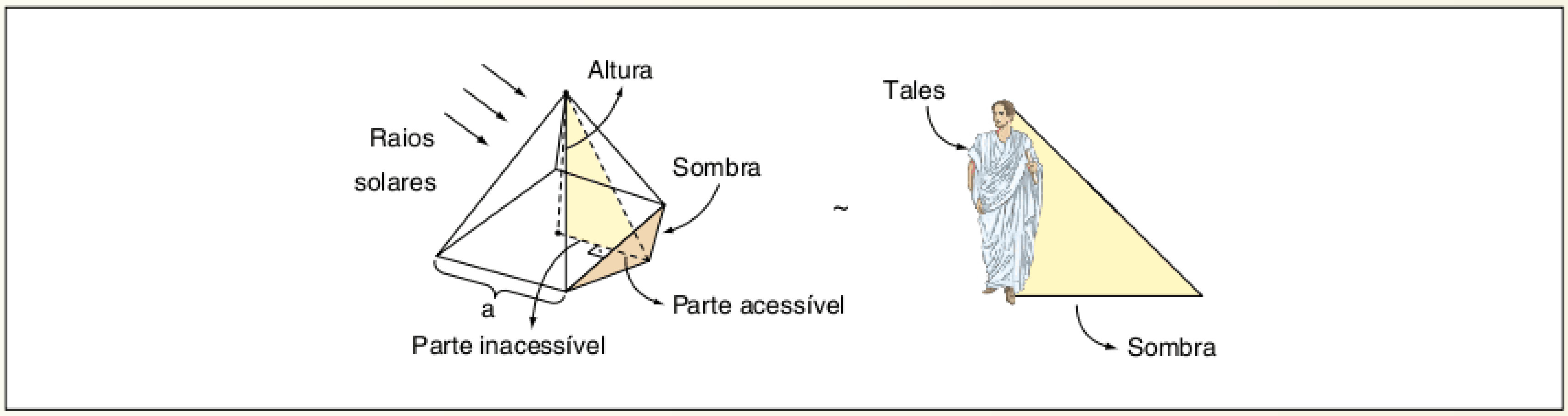
Tales de Mileto propôs-se a calcular a altura da pirâmide de Quéops, localizada em Gizé.

Parece uma tarefa fácil! Mas, pense bem, não é muito fácil subir no topo da pirâmide com uma corda na mão e um ajudante na base esticando a corda, para depois contar os nós. (Obs.: Nós equidistantes em uma corda serviam como unidade de medida.)

Tales queria efetuar os cálculos sem se arriscar a "escalar" a pirâmide. Tudo deveria ser feito nas areias do deserto, em terra firme.

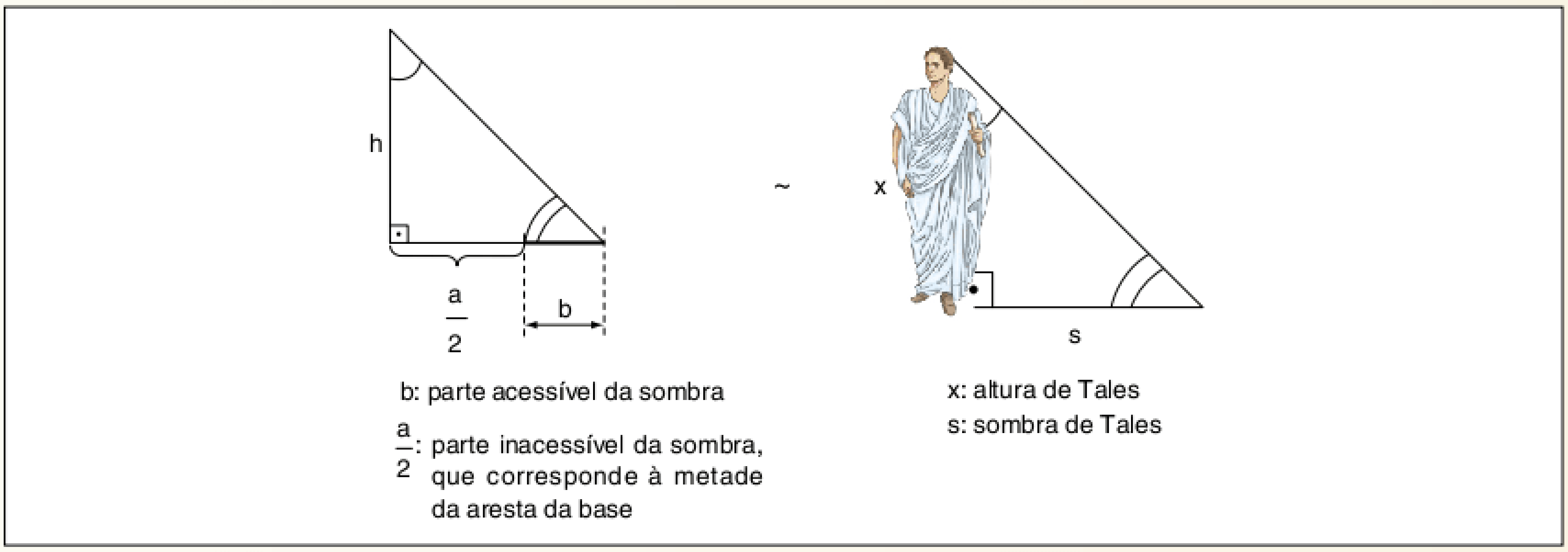
Tales lançou mão da sua astúcia e conhecimentos matemáticos adquiridos em suas viagens e imaginou resolver o problema por semelhança de triângulos. Mas o problema possui algumas complicações práticas que foram superadas por Tales com muita destreza.

O problema vai ser resolvido pela comparação das sombras entre dois objetos. O primeiro é a pirâmide, e o segundo o próprio Tales.



Representação do esquema utilizado por Tales para a medição da altura da pirâmide de Quéops.

Na figura anterior, temos os dois triângulos em que faremos a semelhança. No triângulo retângulo interno da pirâmide, os seus elementos são:



Triângulos semelhantes.

Esses dois triângulos são semelhantes, logo: $\dfrac{h}{\dfrac{a}{2}+b} = \dfrac{x}{s}$

Inteligentemente, Tales esperou o momento em que o Sol projetaria uma sombra igual ao seu tamanho. Assim, o triângulo é isósceles! O assistente de Tales, no momento em que a sombra se igualou à de seu mestre, correu até a pirâmide e mediu com as cordas a parte acessível da sombra (b).

Como já se sabia o valor de a, teremos $\dfrac{a}{2} + b = h$. Pronto! Tales calculou h!

Nos valores de hoje, Tales encontrou 145 metros, enquanto o valor correto é 147 metros! Curioso, a altura de Tales, segundo os cálculos, era de 1,73 m!

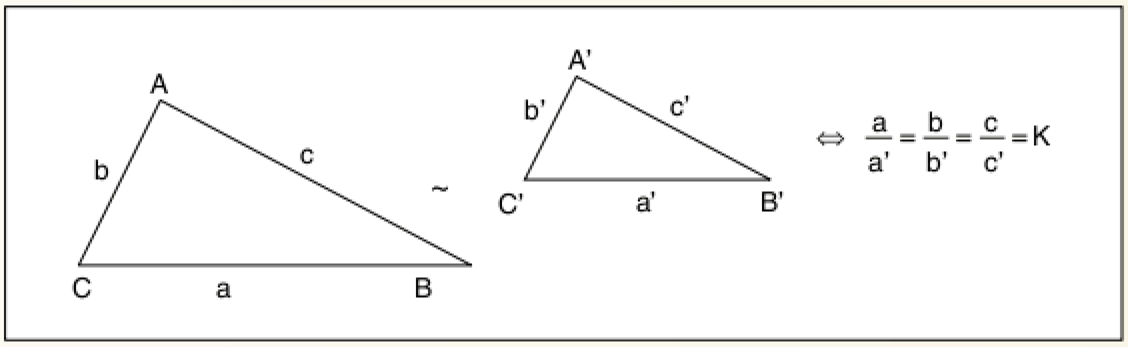
Critérios de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os seus ângulos são iguais e os seus lados são proporcionais. Os critérios de semelhança são condições que garantem a semelhança entre dois triângulos.

O primeiro critério de semelhança já foi apresentado e demonstrado. Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos congruentes.

Vamos analisar agora outros dois critérios de semelhança:

a) dois triângulos são semelhantes quando possuem os lados proporcionais.

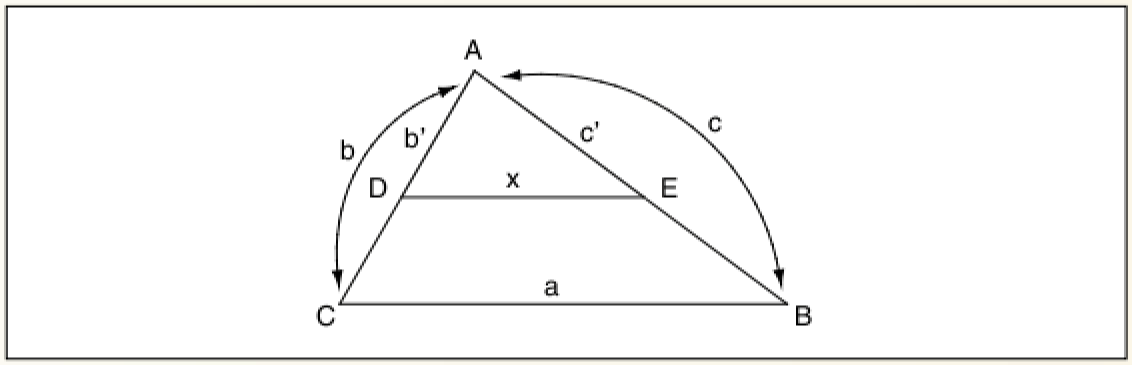


Demonstração:

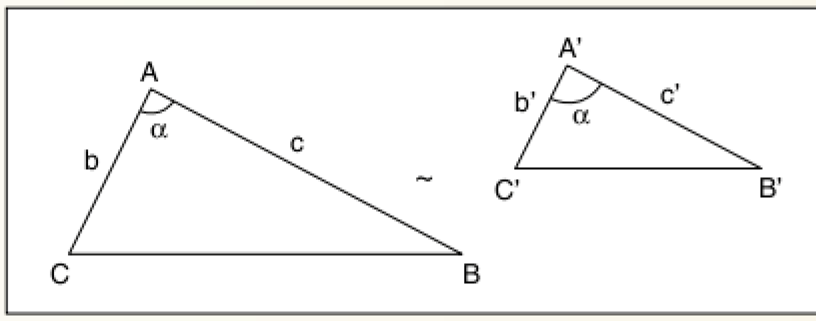
1) marcamos $AD = b'$ e $AE = c'$, e como temos por hipótese $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, assim $\overline{DE} // \overline{CB}$ e

$\Delta ADE \sim \Delta ACB$ com $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow a' = x$

2) $\Delta ADE \cong \Delta A'C'B'$(LLL)



b) dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes.



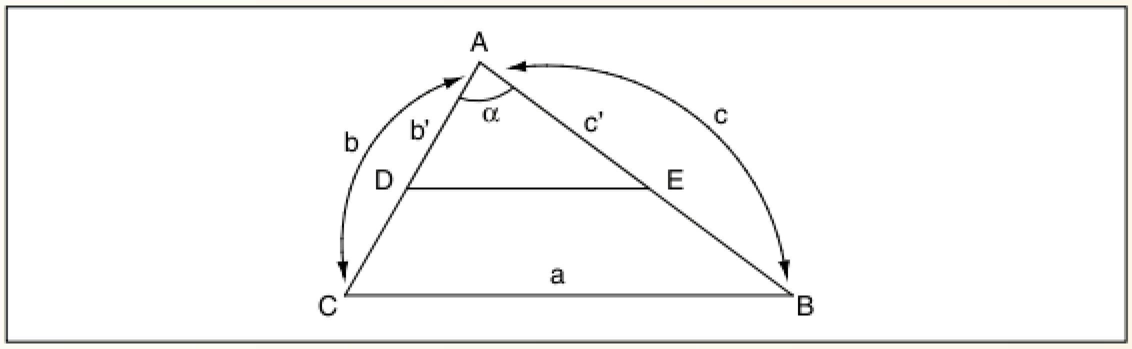
$$\Leftrightarrow \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}'$$

Demonstração:

1) marcamos $AD = b'$ e $AE = c'$ e $\Delta ADE \cong \Delta A'C'B'$(LAL)

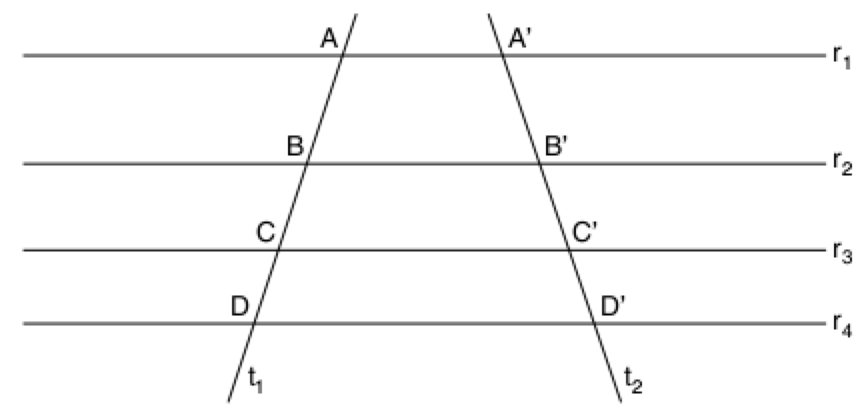
2) $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

3) de 1) e 2), temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



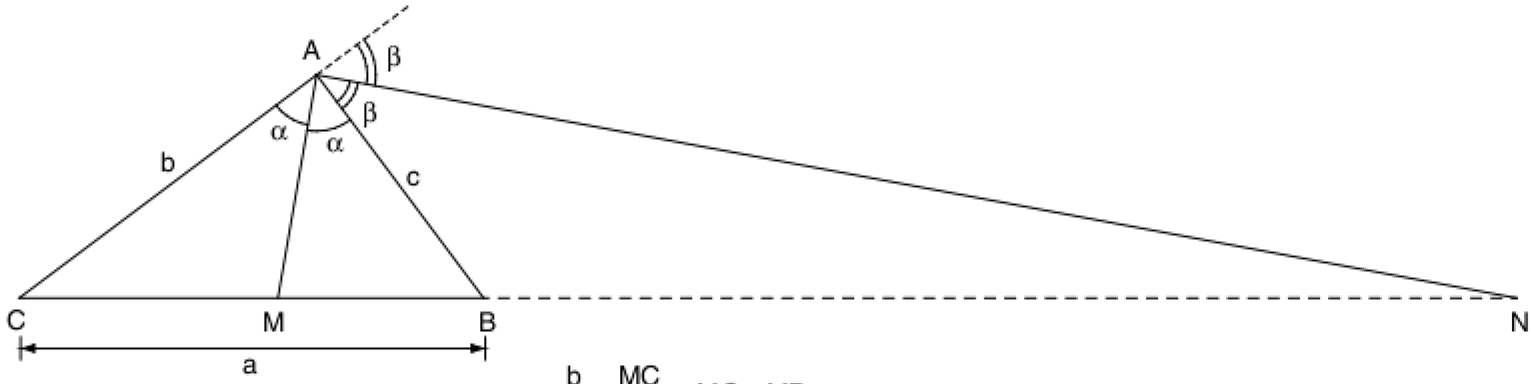
RESUMINDO

Teorema de Tales



$$r_1 // r_2 // r_3 // r_4 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

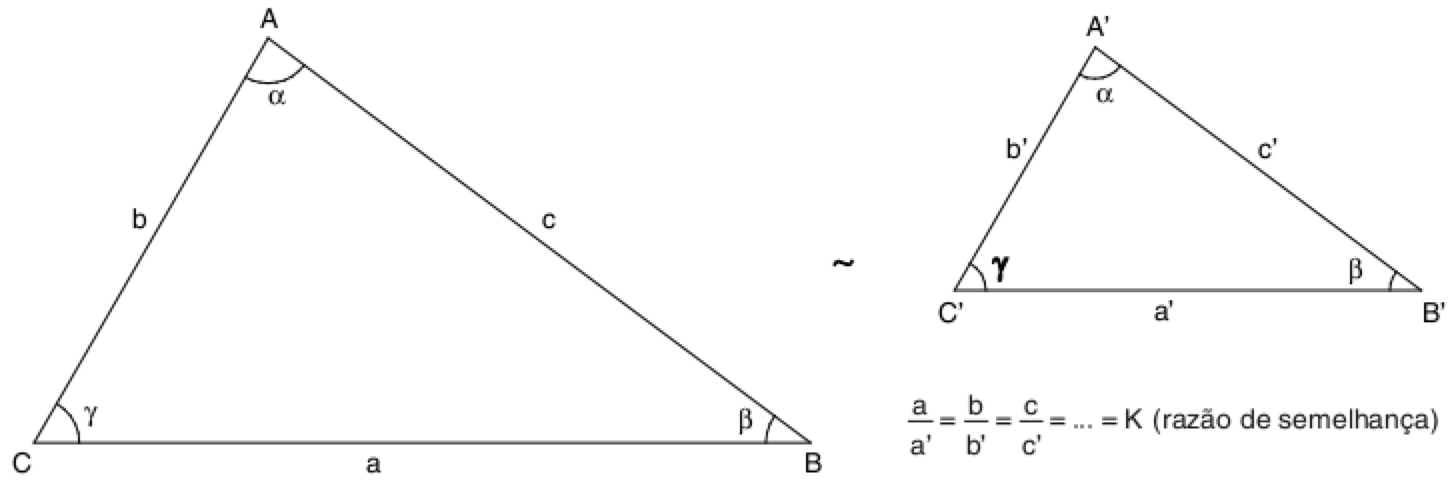
Teorema das bissetrizes



$\frac{b}{c} = \frac{MC}{MB}$ e $MC + MB = a$

$\frac{b}{c} = \frac{NC}{NB}$ e $|NC - NB| = a$

Triângulos semelhantes



$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = K$ (razão de semelhança)

QUER SABER MAIS?

SITES

- <www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=text&cod=_semelhancadetriangulos>.
- <http://demonstrations.wolfram.com/EinsteinsMostExcellentProof/>.

FILME

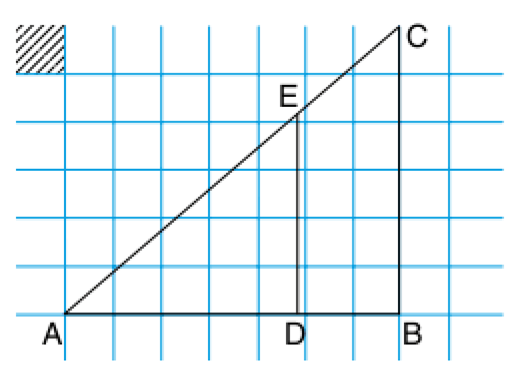
- *Einstein's Most Excellent Proof* (The Wolfram Demonstrations Project). Por John Kiehl.

Exercícios complementares

Semelhança de triângulos

1 **Vunesp** Um obelisco de 12 m de altura projeta, num certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. Calcule a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra.

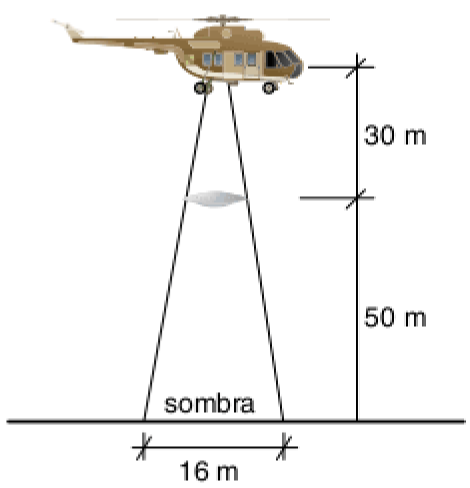
2 **Vunesp** No papel quadriculado da figura a seguir, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. DE é palalelo a BC.



Para que a área do triângulo ADE seja a metade da área do triângulo ABC, a medida de AD, na unidade adotada, é:

(a) $7\frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) 4
(c) $3\sqrt{3}$
(d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
(e) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

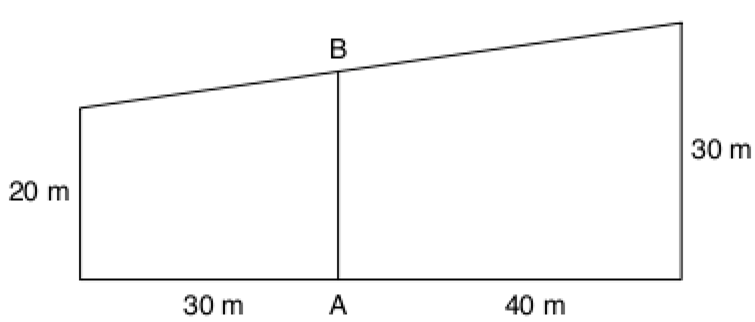
3 **Unirio** Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura a seguir.



Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em m, aproximadamente:

(a) 3,0
(b) 3,5
(c) 4,0
(d) 4,5
(e) 5,0

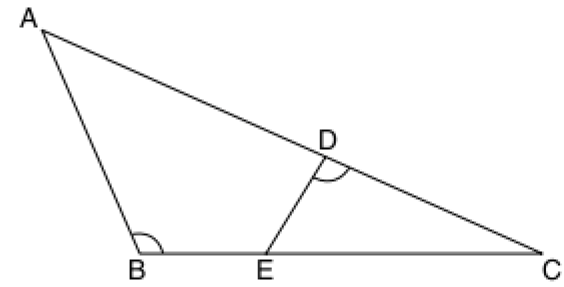
4 **UFRE** Qual o número inteiro mais próximo do comprimento do segmento AB indicado na figura a seguir?



5 **Unicamp** Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

6 **UEL** Na figura a seguir, são dados: $A\hat{B}C = E\hat{D}C$, AB = 6 cm, BC = 9 cm, AC = 12 cm e DE = 2,5 cm.

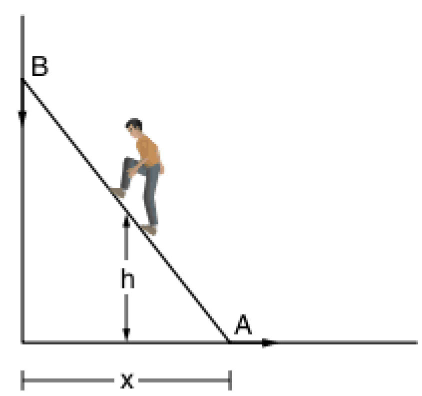


Se os triângulos da figura são semelhantes, o perímetro do triângulo EDC é, em centímetros:

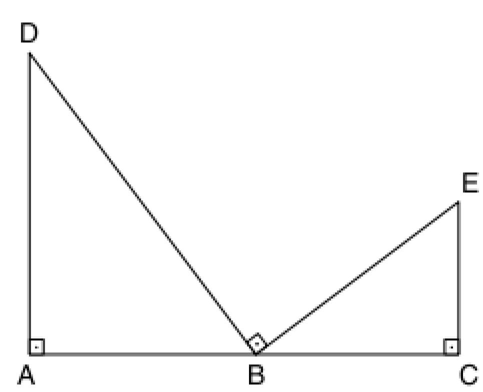
(a) 11,25
(b) 11,50
(c) 11,75
(d) 12,25
(e) 12,50

7 **Vunesp** Um homem sobe numa escada de 5 metros de comprimento, encostada em um muro vertical. Quando ele está num degrau que dista 3 metros do pé da escada, esta escorrega, de modo que a extremidade A se desloca para a direita, conforme a seta da figura a seguir, e a extremidade B desliza para baixo, mantendo-se aderente ao muro.

Encontre a fórmula que expressa a distância h, do degrau em que está o homem até o chão, em função da distância x, do pé da escada ao muro.



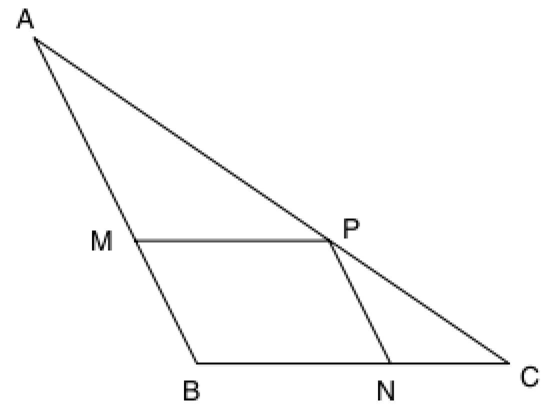
8 **Vunesp** Na figura abaixo, B é um ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos.



Se o segmento AD = 6 dm, o segmento AC = 11 dm e o segmento EC = 3 dm, as medidas possíveis de AB, em dm, são:

(a) 4,5 e 6,5
(b) 7,5 e 3,5
(c) 8 e 3
(d) 7 e 4
(e) 9 e 2

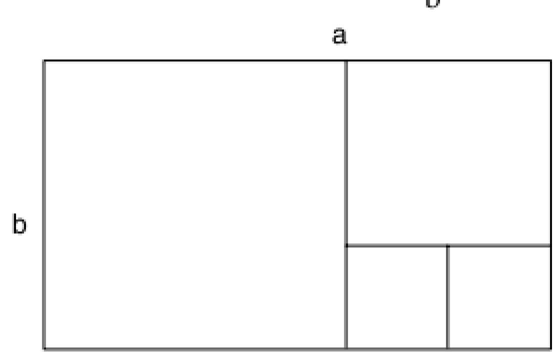
9 **Fuvest** No triângulo ABC a seguir, AB = 20 cm, BC = 5 cm e o ângulo $A\hat{B}C$ é obtuso. O quadrilátero MBNP é um losango, de área 8 cm².



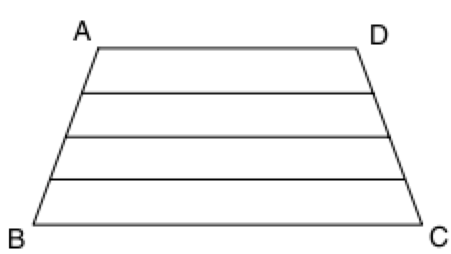
A medida, em graus, do ângulo $B\hat{N}P$ é:

(a) 15
(b) 30
(c) 45
(d) 60
(e) 75

10 **Fuvest** O retângulo a seguir de dimensões a e b está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão $\frac{a}{b}$?



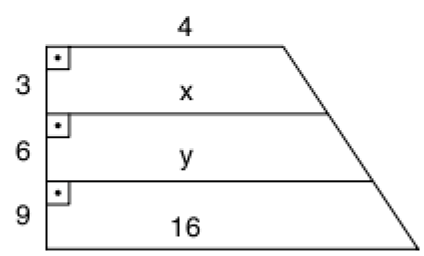
11 Na figura abaixo, tem-se o trapézio isósceles ABCD, no qual as bases medem 15 cm e 27 cm. Os lados AB e CD foram divididos em quatro partes iguais e, pelos pontos de divisão, foram traçados três segmentos paralelos às bases.



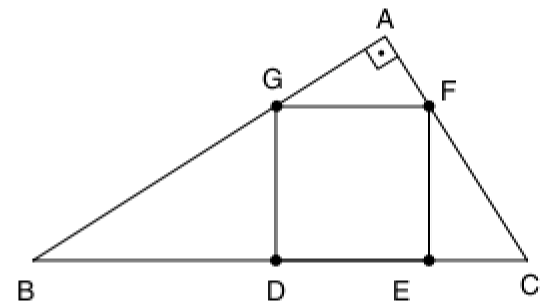
A soma das medidas dos três segmentos traçados é, em centímetros:

(a) 52
(b) 58
(c) 59
(d) 61
(e) 63

12 **Mackenzie** Determine x e y da figura abaixo:



13 Sendo BD = 8 cm e CE = 2 cm, calcule o perímetro do quadrado DEFG abaixo.



14 ABCD é um retângulo, no qual AB = 24 cm e AD = 18 cm; a reta determinada pelo vértice C e pelo ponto médio M do lado AB intercepta a diagonal BD em I. Calcule as distâncias do ponto I aos lados AB e BC do retângulo.

15 AB = 5 m e AC = 2 m são os catetos de um triângulo retângulo. A mediatriz da hipotenusa BC intercepta o cateto AB em I. Calcule AI.

16 As bases de um trapézio medem 18 cm e 25 cm; a altura mede 14 cm. Calcule a altura do menor triângulo que se obtém prolongando os lados não paralelos até se encontrarem.

17 Em um trapézio, cujas bases medem 20 m e 32 m, e a altura 9 m, traça-se uma reta paralela às bases, que dista 3 m da base maior. Calcule o segmento dessa paralela compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.

18 Em um trapézio, cujas bases medem 20 cm e 32 cm, e a altura 18 cm, traça-se uma paralela às bases. Calcule o segmento dessa paralela que é interno ao trapézio, sabendo que ele é igual ao dobro de sua distância à base menor.

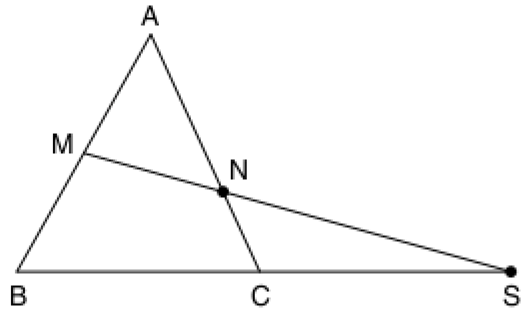
19 AB = 8 cm, AC = 5 cm e BC = 7 cm são os lados de um triângulo ABC. Inscreve-se nesse triângulo uma circunferência e traça-se a tangente paralela ao lado BC, cujos pontos de interseção com os lados AB e AC são D e E. Calcule a razão ID/IE, sendo I o ponto de contato da tangente DE com a circunferência inscrita no triângulo ABC.

20 As bases de um trapézio retângulo ABCD são AD = a e BC = b (a > b), e a altura AB = c. Determine as distâncias do ponto de interseção das diagonais do trapézio aos lados AD e AB.

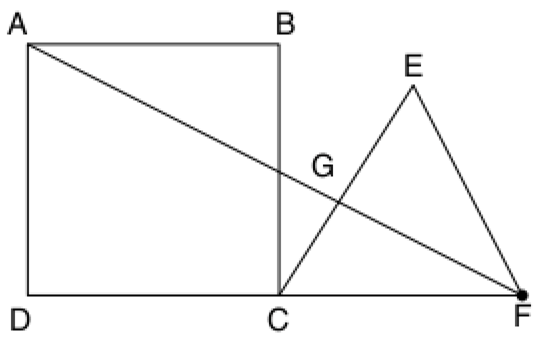
21 Em um triângulo de base B e de altura H está inscrito um retângulo de base b e de altura h. Demonstre a relação: $\frac{b}{B} + \frac{h}{H} = 1$.

22 Pelas extremidades A e B de um segmento AB, trace as perpendiculares e sobre elas tome os segmentos $\overline{AC}$ = 9 cm e $\overline{BD}$ = 6 cm. Em AB, toma-se um ponto E, tal que os ângulos $A\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$ sejam congruentes. Calcule os comprimentos dos segmentos AE e BE, sabendo que $\overline{AB}$ = 20 cm.

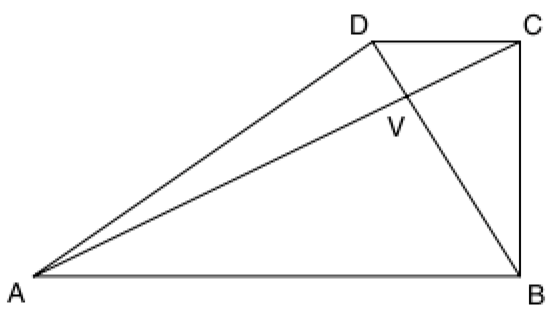
23 Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero, com um perímetro de 60 cm, M é o ponto médio do lado AB e AB e $\overline{CS}$ = 12 cm. Calcule a medida do segmento CN.



24 ABCD é um quadrado e ΔCEF é equilátero, ambos de lado a. Unindo A e F, obtemos um segmento CG no lado CE. Calcule a medida do $\overline{CG}$ em função de a.

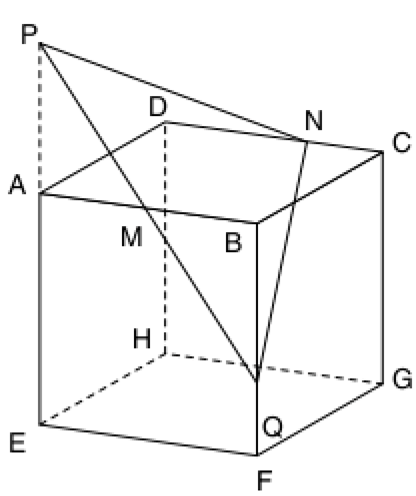


25 **Fuvest** ABCD é um trapézio; BC = 2, BD = 4 e o ângulo $A\hat{B}C$ é reto.



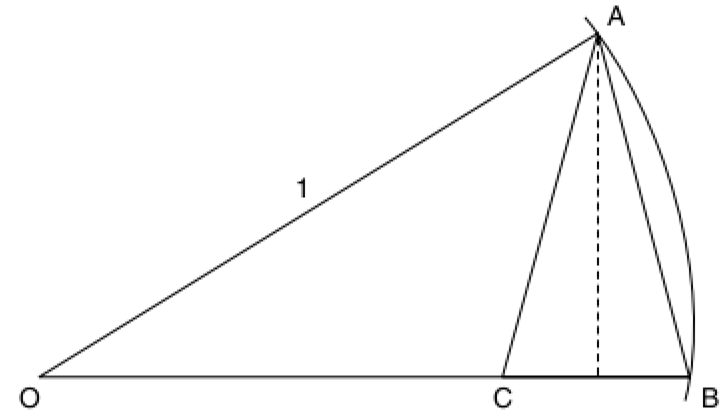
a) Calcule a área do triângulo ACD.
b) Determine AB, sabendo que BV = 3VD.

26 **Fuvest** Considere um cubo ABCDEFGH de lado 1 unidade de comprimento, como mostra a figura a seguir. M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Para cada ponto P da reta AE seja Q o ponto de interseção das retas PM e BF.



a) Prove que ΔPQN é isósceles.
b) A que distância do ponto A deve estar o ponto P para que o ΔPQN seja retângulo?

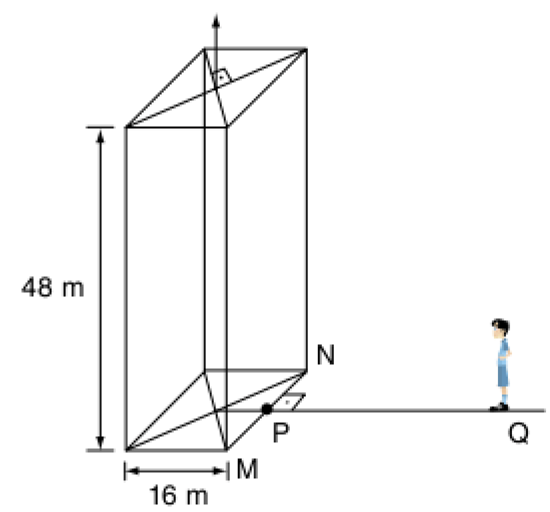
27 **Fuvest (Adapt.)** Na figura adiante, $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ é o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1 e centro O.



a) Calcule o valor de ℓ.

b) Mostre que $\cos 36^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

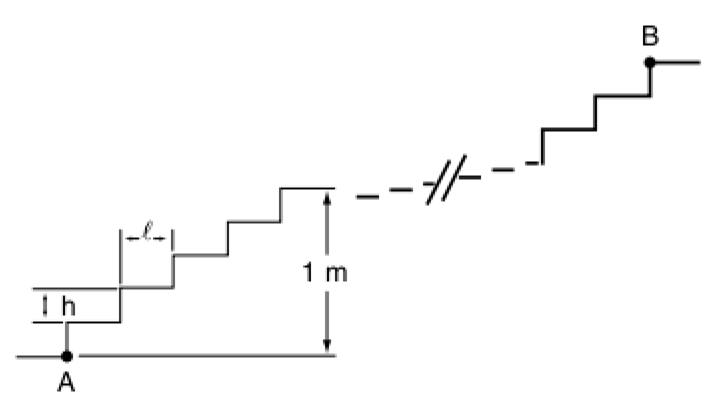
28 **UFF** Um prédio com a forma de um paralelepípedo retângular tem 48 m de altura. No centro da cobertura desse prédio, e perpendicularmente a essa cobertura, está instalado um para-raios. No ponto Q sobre a reta r – que passa pelo centro da base do prédio e é perpendicular ao segmento MN – está um observador que avista somente uma parte do para-raios.



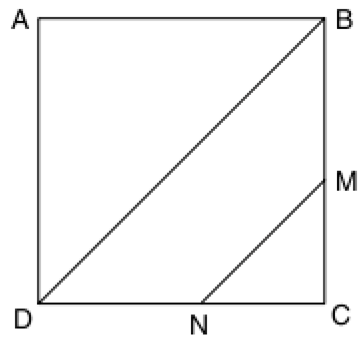
A distância do chão aos olhos do observador é 1,8 m e o segmento PQ = 61,6 m.
O comprimento da parte do para-raios que o observador não consegue avistar é:

(a) 16 m
(b) 12 m
(c) 8 m
(d) 6 m
(e) 3 m

29 **Vunesp** Uma escada tem 25 degraus iguais. A altura h de cada degrau está para sua largura ℓ assim como 2 está para 5. O desnível entre o 5º degrau e o pé da escada, A, é 1 metro. Qual é a distância entre o pé da escada, A, e o topo da escada, B?

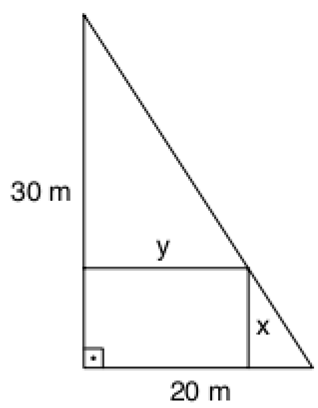


30 **Vunesp** A área do quadrado ABCD da figura adiante é 1. Nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ tomam-se, respectivamente, os pontos M e N de modo que MN seja paralelo à diagonal $\overline{DB}$.



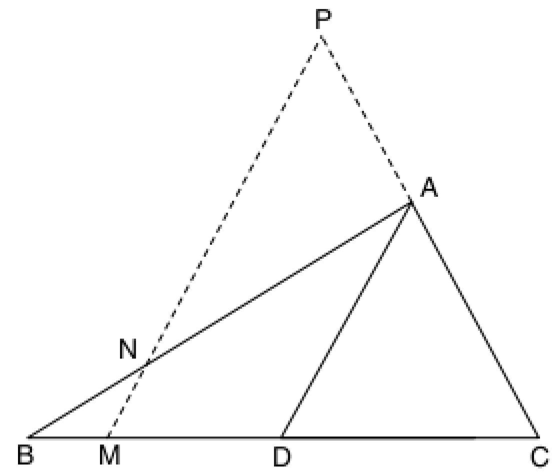
Se as áreas do triângulo CMN do trapézio MNDB e do triângulo ABD formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, calcule a medida de MC.

31 **Fuvest** Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, como indicado na figura adiante.



a) Exprima y em função de x.
b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?

32 **ITA** Considere o ΔABC, em que $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$. Por um ponto arbitrário M do segmento $\overline{BD}$ traçamos o segmento $\overline{MP}$ paralelo à $\overline{AD}$, em que P é o ponto de interseção dessa paralela com o prolongamento do lado $\overline{AC}$.



Se N é o ponto de interseção de $\overline{AB}$ com $\overline{MP}$, podemos afirmar que:
(a) MN + MP = 2 BM
(b) MN + MP = 2 AB
(c) MN + MP = 2 AC
(d) MN + MP = 2 CM
(e) MN + MP = 2 AD

33 P é um ponto interior de um triângulo de lados a, b e c, pelo qual se traçam paralelas aos lados do triângulo. Se os segmentos das paralelas compreendidas entre os lados do triângulo têm a mesma medida, calcule o seu valor.

Pontos notáveis do triângulo

6

FRENTE 3

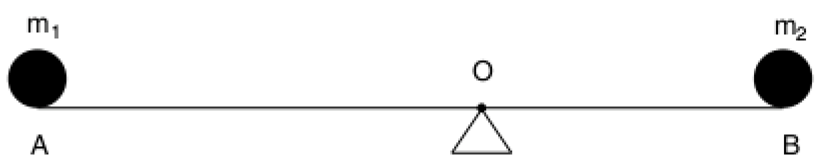
"Deem-me um ponto de apoio e uma alavanca que eu moverei o mundo".

Arquimedes de Siracusa.

Contexto histórico

O grego Arquimedes de Siracusa, um dos maiores cientistas de todos os tempos, foi inventor, matemático e físico. Entre seus trabalhos, podemos citar um método para calcular o número π, os princípios da hidrostática e também aplicações do princípio da alavanca.

Arquimedes foi o primeiro a estudar o baricentro de dois pontos de massas m_1 e m_2. A palavra baricentro é de origem grega (*barus* = peso), designando inicialmente o "centro dos pesos". Atualmente, ele também é conhecido como centro da gravidade. Na figura, temos uma definição física de baricentro como sendo o ponto O, tal que $m_1 \cdot \overline{OA} + m_2 \cdot \overline{OB} = \overline{O}$.



Na Matemática, essa noção foi estendida para um sistema de n pontos. O baricentro assim definido é também chamado de **centro de massa**.

Fig. 1 Localização do baricentro no sistema Terra-Lua.

Lugar geométrico

Lugar geométrico, simbolizado por LG, é uma figura na qual todos os seus pontos possuem uma propriedade característica e somente seus pontos possuem essa propriedade. Os exemplos a seguir nos ajudarão a compreender esse conceito importantíssimo.

Circunferência

$$\lambda = \{P \in \alpha \mid PO = \text{constante} = \text{raio}\}$$

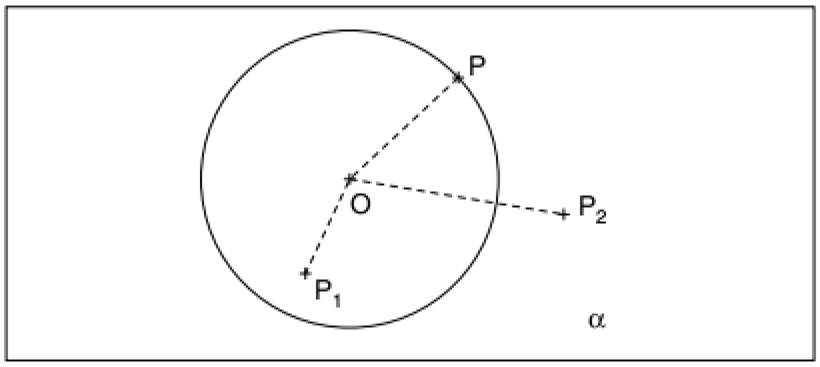


Fig. 2 Circunferência.

A propriedade característica é distar igualmente de O.

$$P \in LG,\ P_1 \notin LG(\overline{P_1O} < \text{raio}),\ P_2 \notin LG(\overline{P_2O} > \text{raio})$$

Mediatriz

É o LG dos pontos do plano equidistante de dois pontos dados, extremidades do segmento dado.

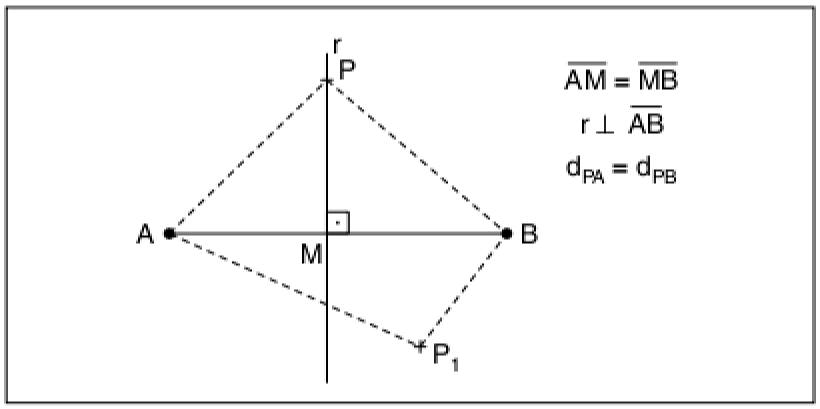


Fig. 3 Mediatriz.

Justificativa:

Na figura 3, os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes (critério LAL), assim $\overline{PA} = \overline{PB}$.

$$P_1 \notin LG, \text{ logo } \overline{P_1B} \neq \overline{P_1A}$$

Bissetriz

É o LG dos pontos do plano equidistante dos lados de um ângulo.

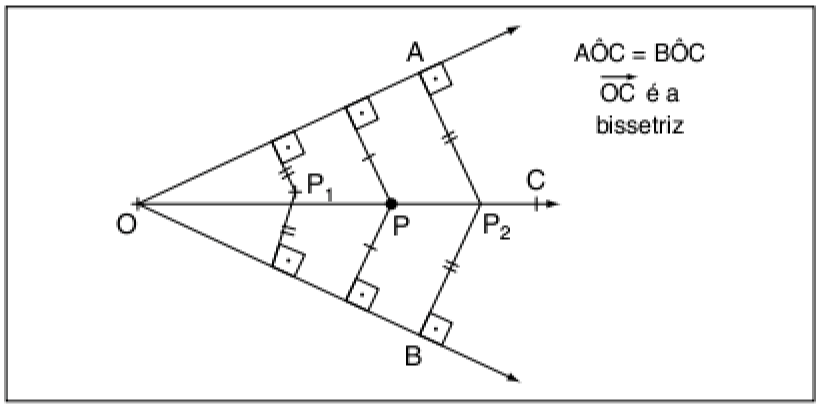


Fig. 4 Bissetriz.

Justificativa:

Os triângulos ΔOAP_2 e ΔOBP_2 são congruentes (caso especial).

$P_1 \notin LG$, pois não equidista dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, de acordo com a figura 4.

Pontos notáveis do triângulo

Baricentro (G)

É o ponto de encontro das medianas de um triângulo. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos que estão na razão 2:1. Observe a figura 5.

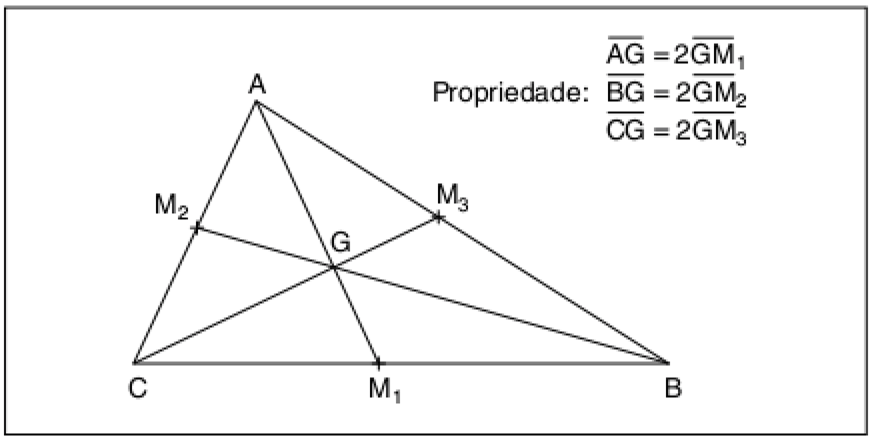


Fig. 5 Baricentro.

Demonstração:

Considere a figura 6 na qual $\overline{BM_2}$ e $\overline{CM_3}$ são medianas que se cruzam em X (não sabemos ainda se é o baricentro).

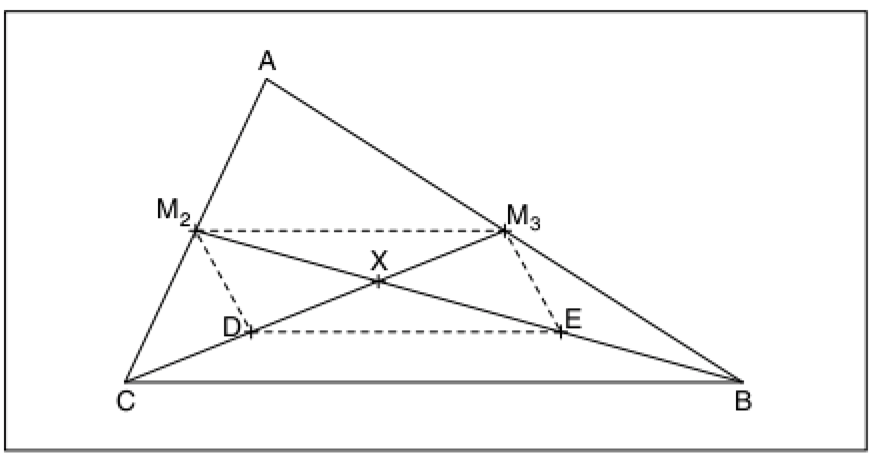


Fig. 6 Propriedade do baricentro I.

$\overline{M_2M_3}$ é base média do $\Delta ABC \Rightarrow \overline{M_2M_3} // \overline{BC}$ e $\overline{M_2M_3} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Tomamos os pontos D e E, pontos médios de $\overline{CX}$ e $\overline{BX}$, respectivamente. $\overline{DE}$ é base média do $\Delta XBC \Rightarrow \overline{DE} // \overline{BC}$ e $\overline{DE} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Concluímos então que $\overline{DE} // \overline{M_2M_3}$ e $\overline{DE} = \overline{M_2M_3}$. Assim, o quadrilátero M_2M_3ED é um paralelogramo, cuja propriedade principal é que suas diagonais se cruzam no ponto médio. Podemos então dizer que $\overline{DX} = \overline{XM_3}$, mas $\overline{DX} = \dfrac{\overline{CX}}{2}$, logo $\dfrac{\overline{CX}}{2} = \overline{XM_3} \therefore \overline{CX} = 2\overline{XM_3}$.

Analogamente, obtemos $\overline{BX} = 2\overline{XM_2}$. Vamos agora traçar as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{BM_2}$. Observe a nova figura.

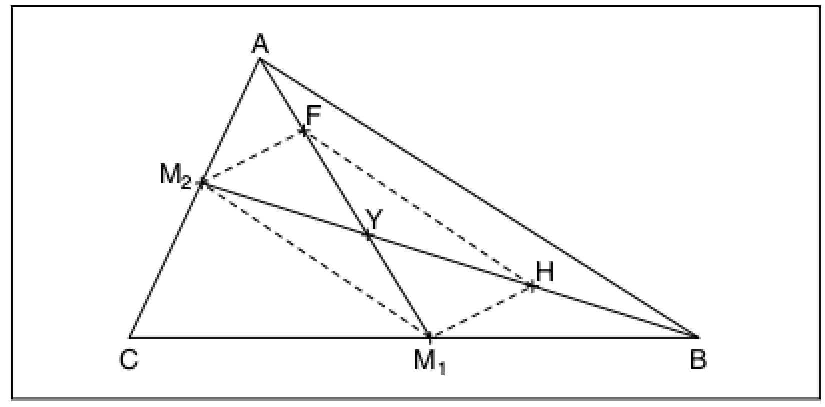


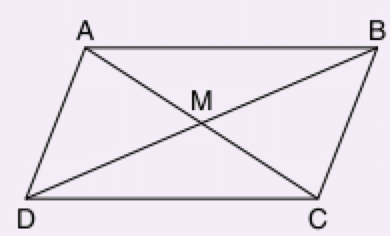
Fig. 7 Propriedade do baricentro II.

As medidas $\overline{AM_1}$ e $\overline{BM_2}$ cruzam-se em Y. O procedimento é análogo ao das medianas $\overline{CM_1}$ e $\overline{CM_2}$, e vamos concluir que $\overline{BY} = 2\overline{YM_2}$ e $\overline{AY} = 2\overline{YM_1}$. Observe que na figura 6 demonstramos que $\overline{BX} = 2\overline{XM_2}$ $\overline{BX} = 2\overline{XM_2}$, logo os pontos X e Y são coincidentes.

A união de todos os resultados comprovam que as medianas concorrem em um mesmo ponto (baricentro) e dividem as medianas em segmentos na razão 2:1 (c.q.d.).

ATENÇÃO!

O paralelogramo é o quadrilátero notável cujos lados opostos são paralelos.



Propriedade

$\overline{AM} = \overline{MC}$

$\overline{BM} = \overline{MD}$

As diagonais cruzam-se no ponto médio.

Incentro (I)

É o ponto de encontro das bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Observe a figura 8.

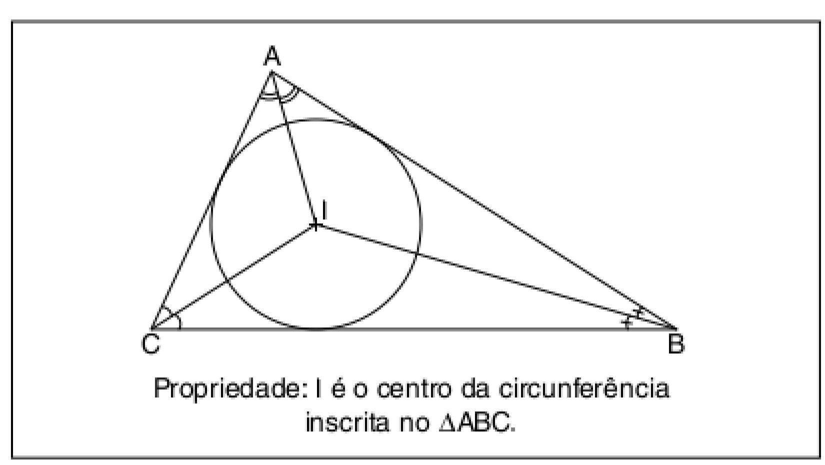


Fig. 8 Incentro.

Demonstração:

Considere a figura 9, na qual $\overline{AX}$ e $\overline{CX}$ são bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

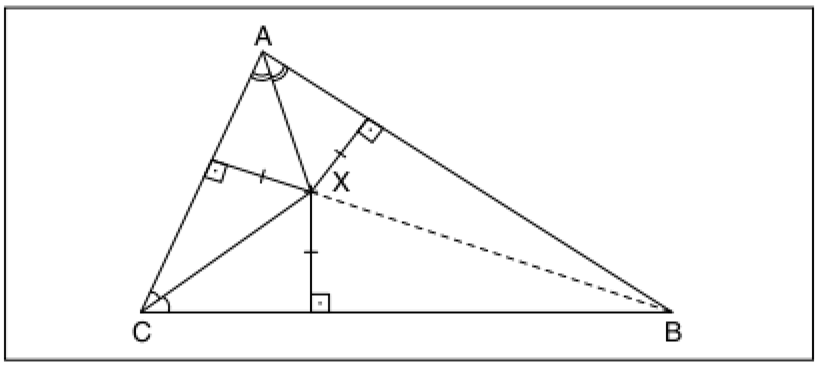


Fig. 9 Propriedade no incentro.

Sabemos que bissetriz é o LG dos pontos do plano equidistante dos lados de um ângulo. Ligando B a X, $\overline{BX}$ será bissetriz de $\hat{B}$, pois X é equidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Assim X é I, o incentro (c.q.d.)

Circuncentro (O)

É o ponto de encontro das mediatrizes dos lados do triângulo. Observe a figura 10.

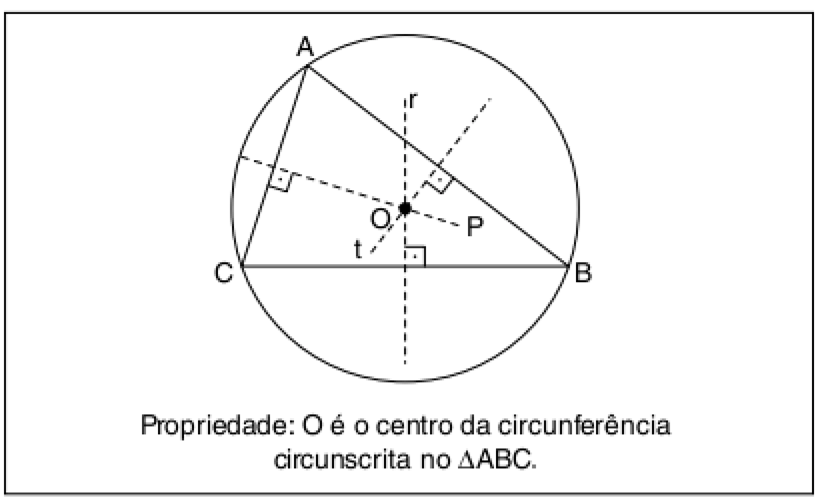


Fig. 10 Circuncentro.

Demonstração:

As mediatrizes r e t são os LG dos pontos equidistantes de B e C de A e B, respectivamente. Então, o cruzamento de r e s é o ponto equidistante dos vértices A, B e C, ou seja, trata-se do circuncentro (c.q.d.).

Quando o triângulo é retângulo, o circuncentro está localizado no ponto médio da hipotenusa. Observando a figura 11, o ΔABC possui circuncentro O. Os triângulos AOC e AOB são isósceles.

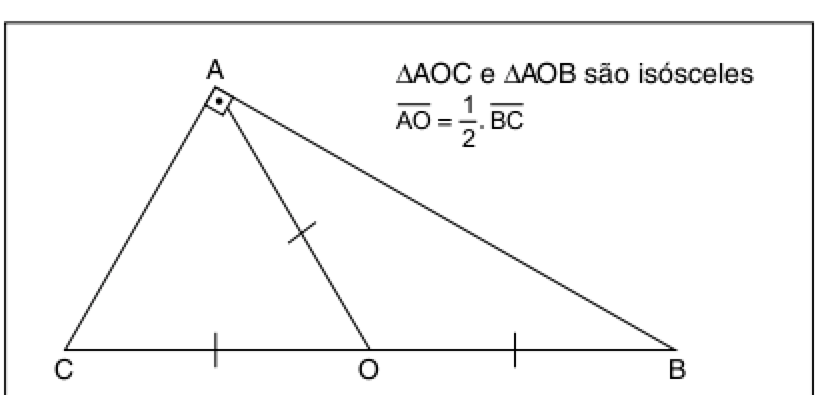


Fig. 11 Circuncentro de um triângulo retângulo.

Ortocentro (H)

É o ponto de encontro das alturas de um triângulo. Observe a figura 12.

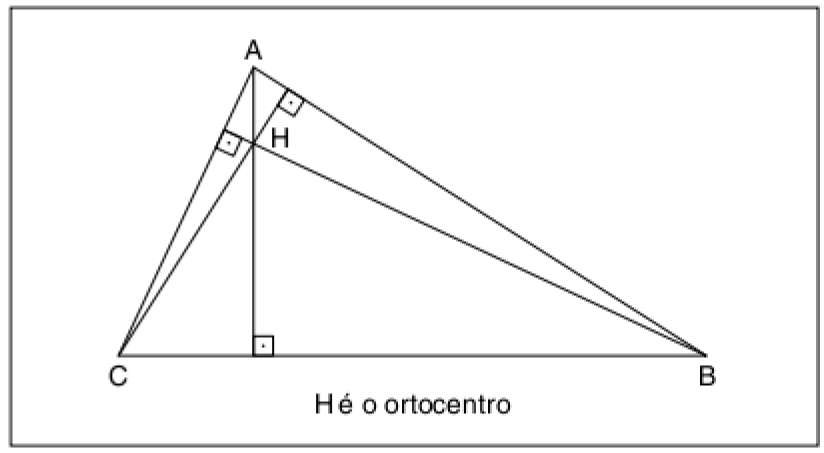


Fig. 12 Ortocentro.

Demonstração:

Considere a nova figura abaixo.

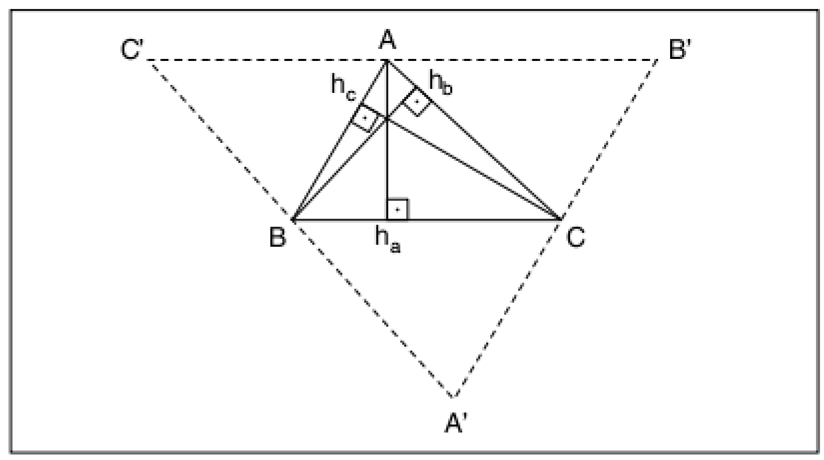


Fig. 13 Propriedade do ortocentro.

Pelos vértices do ΔABC, traçamos retas paralelas aos lados opostos. Observe que ACBC' e ACA'B são paralelogramos e que $\overline{AC} = \overline{BA'}$ e $\overline{AC} = \overline{C'B}$. Logo, B é ponto médio de $\overline{A'C'}$.

Como $\overline{AC} // \overline{A'C'}$ e $h_b \perp \overline{AC} \Rightarrow h_b \perp \overline{A'C'}$.

As alturas do ΔABC pertencem às mediatrizes do ΔA'B'C'. Portanto, como as mediatrizes concorrem em um ponto, as alturas também concorrem em um ponto (c.q.d.).

Ex-incentros (I_A, I_B e I_C)

As bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo e a interna do terceiro ângulo encontram-se em um ponto chamado ex-incentro, que é o centro da circunferência tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois. Observe a figura 14 a seguir.

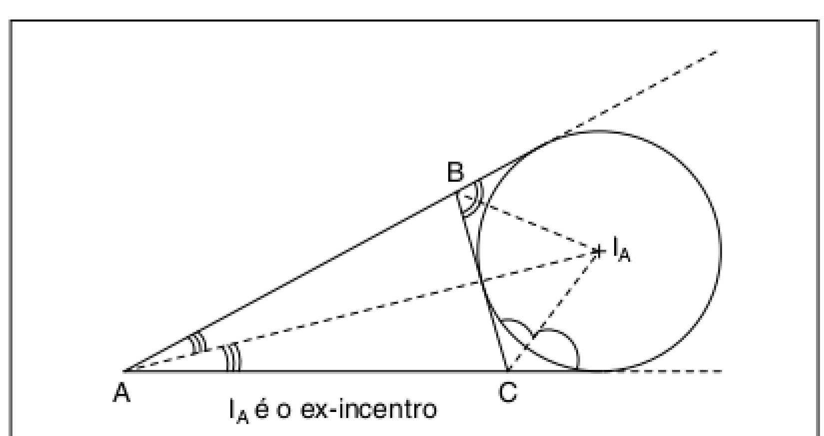
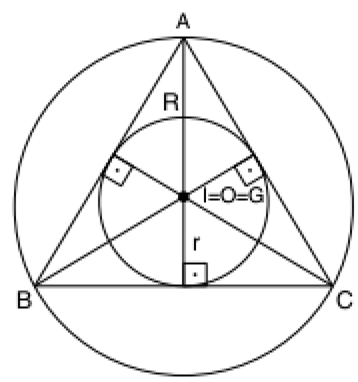


Fig. 14 Ex-incentro.

ATENÇÃO!

Em um triângulo equilátero, os pontos notáveis (G; H; O e I) são coincidentes, pois nesse triângulo a altura é bissetriz e mediana. Observe a figura.

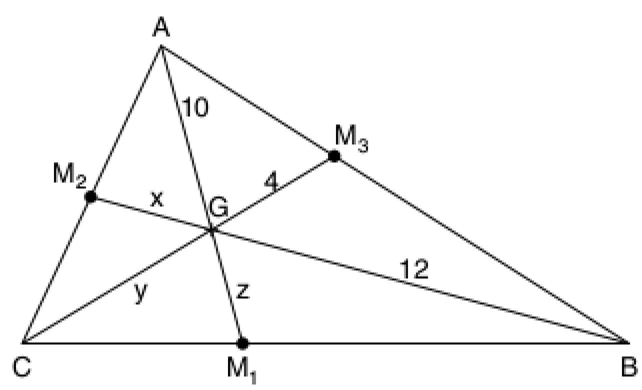


R: raio da circunferência circunscrita
r: raio da circunferência inscrita R = 2r (propriedade do baricentro)

Fig. 15 Pontos notáveis no Δ equilátero.

Exercícios resolvidos

1 No triângulo ABC, G é o baricentro. Calcule x, y e z.



Resolução:
Como G é baricentro, divide cada mediana em segmentos na razão 2:1. Assim:

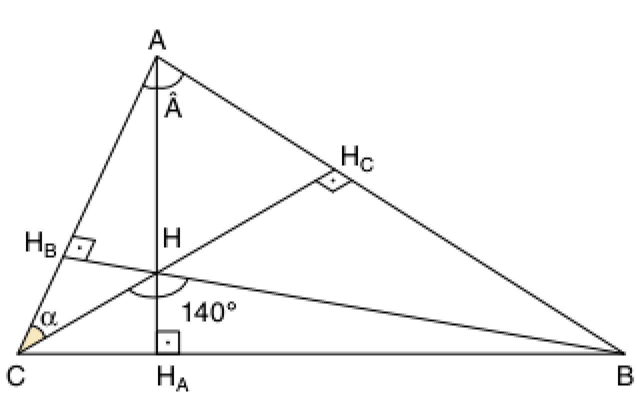
$10 = 2z \therefore z = 5$

$y = 2 . 4 \therefore y = 8$

$12 = 2x \therefore x = 6$

2 Em um triângulo ABC, H é o seu ortocentro e $B\hat{H}C = 140°$. Calcule $\hat{A}$.

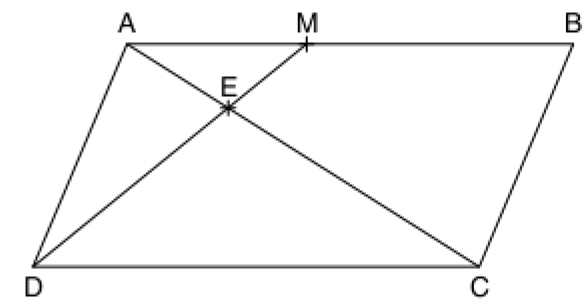
Resolução:
De acordo com o enunciado, podemos construir a seguinte figura:



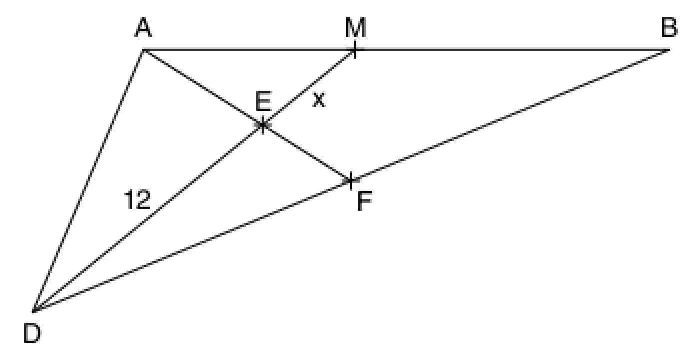
Os triângulos AH_CC e HH_BC são semelhantes, sendo α o ângulo comum. Assim:

$\hat{A} = C\hat{H}H_B, \ \hat{A} = 180° - B\hat{H}C \therefore \hat{A} = 40°$

3 O quadrilátero ABCD da figura é um paralelogramo e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Determine x, se $\overline{DE} = 12$ cm.



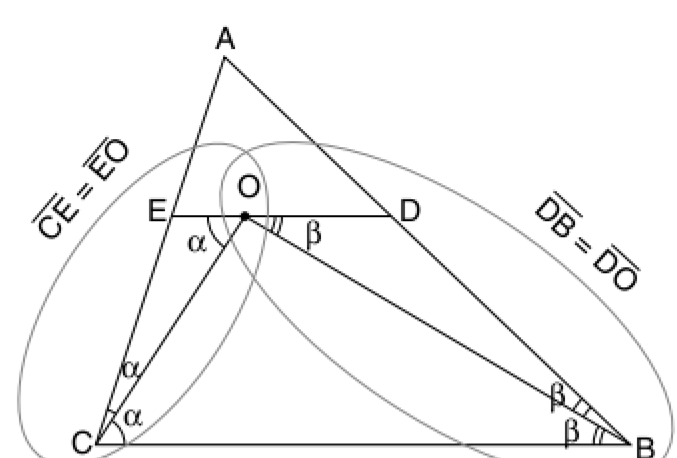
Resolução:
Traçando a diagonal $\overline{BD}$, observe o ΔABD:



F é o cruzamento das diagonais e durante o estudo do capítulo você não se esqueceu de que utilizamos a propriedade: as diagonais de um paralelogramo se cruzam nos seus pontos médios.
Assim, $\overline{AF}$ é mediana e $\overline{MD}$ também por hipótese. Portanto, E é o baricentro do $\Delta ABD \Rightarrow 12 = 2x \therefore x = 6$ cm.

4 Em um triângulo ABC, as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$ encontram-se em O. Traça-se $\overline{DOE}$ paralela a $\overline{BC}$ (D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$). Demonstre que $\overline{DE} = \overline{EC} + \overline{BD}$.

Resolução:
De acordo com o enunciado, temos o seguinte desenho:



O é o incentro do ΔABC.

Os triângulos OEC e BOD são isósceles, então:

$\overline{OE} = \overline{EC}$ *e* $\overline{BD} = \overline{DO}$.

Assim, $\overline{DE} = \overline{OE} + \overline{OD} = \overline{EC} + \overline{BD}$.

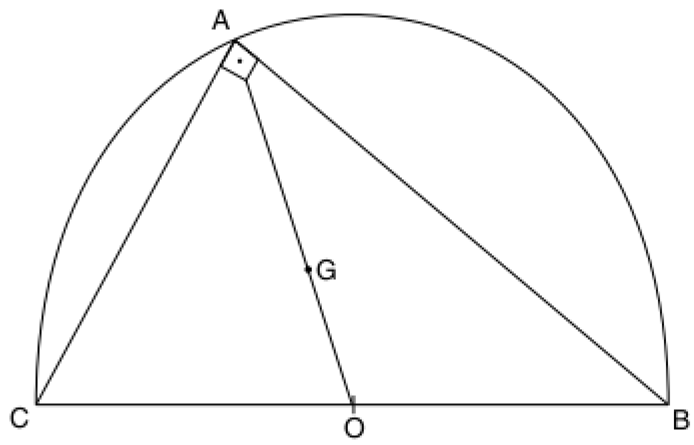
5 Em um triângulo retângulo ABC, reto em A, o raio da circunferência circunscrita mede R. Então:

a) determine a hipotenusa.

b) calcule AG, sendo G o seu baricentro.

Resolução:

O circuncentro de um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.



a) *Hipotenusa* $\overline{BC}$ *é o diâmetro da circunferência circunscrita. Assim,* $\overline{BC} = 2R$.

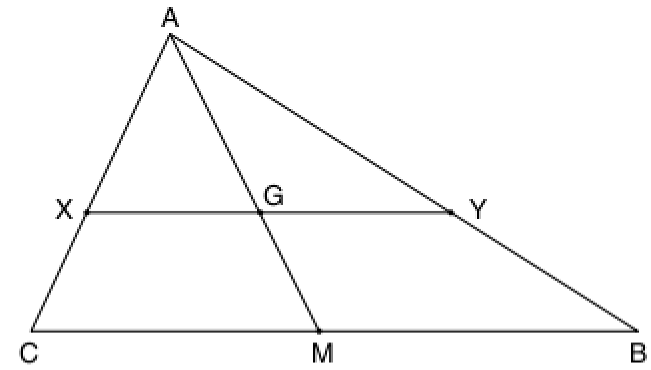
b) $\overline{AO} = R$ *é a mediana relativa à hipotenusa.*

$\overline{AG} = \frac{2}{3} . \overline{AO} = \frac{2}{3}R$

6 O triângulo ABC possui perímetro 2p e G é o seu baricentro. Traçamos uma reta paralela à base $\overline{BC}$ determinando X em $\overline{AC}$ e y em $\overline{AB}$. Calcule o perímetro do ΔAXY.

Resolução:

De acordo com o texto, temos a seguinte situação:



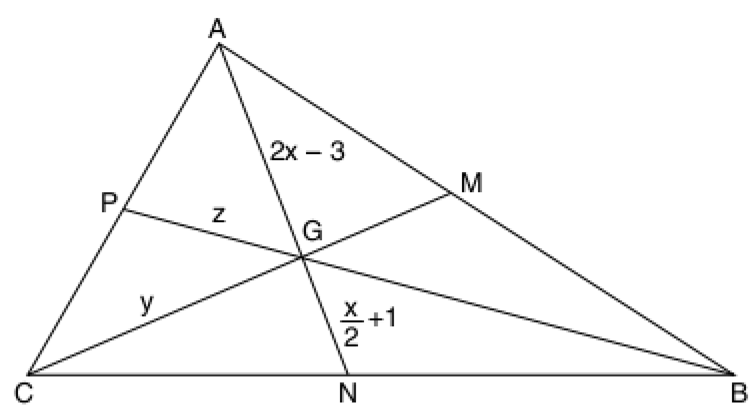
$\overline{AM}$ *é mediana e* $\overline{AG} = \frac{2}{3}\ \overline{AM}$.

ΔAXY é semelhante ao triângulo ACB e a razão de semelhança é $\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}$.

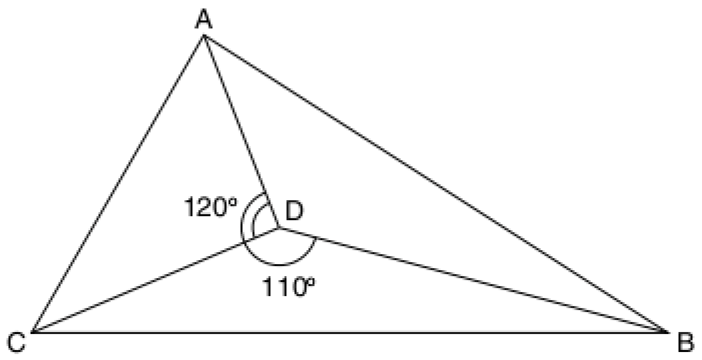
Assim, o perímetro do ΔAXY é $\frac{2}{3} . 2p = \frac{4p}{3}$.

Revisando

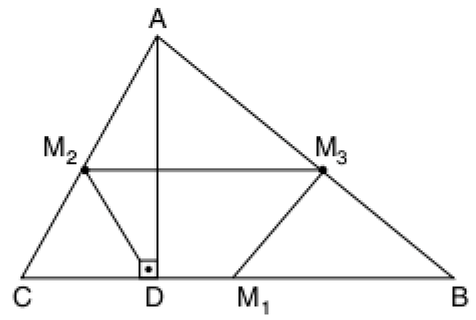
1 No triângulo ABC da figura a seguir, G é o seu baricentro, $\overline{MC}$ = 12 cm e $\overline{PB}$ = 15 cm. Calcule o valor de x, y e z.



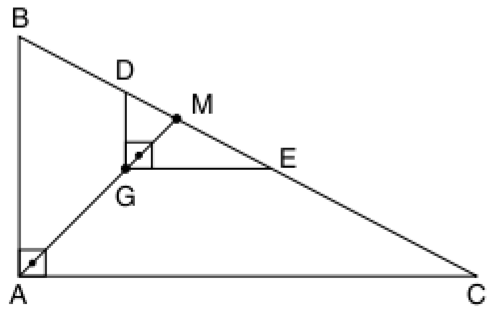
2 No triângulo ABC da figura a seguir, D é o incentro do triângulo. Calcule a medida dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.



3 No ΔABC a seguir, M_1 M_2 M_3 são pontos médios dos lados do triângulo e $\overline{AD}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Prove que o trapézio $M_1DM_2M_3$ é isósceles.



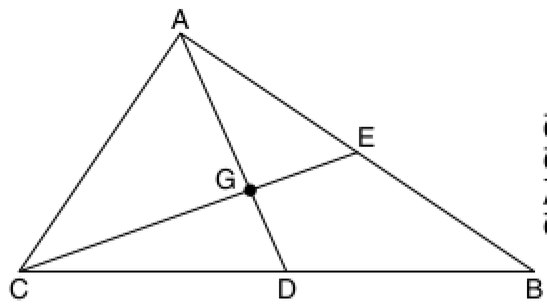
4 No triângulo retângulo ABC da figura, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Seja G o baricentro desse triângulo e $\overline{DG} // \overline{AB}$ e $\overline{GE} // \overline{AC}$, determine o perímetro do ΔDGE em função de a, b e c.



Exercícios propostos

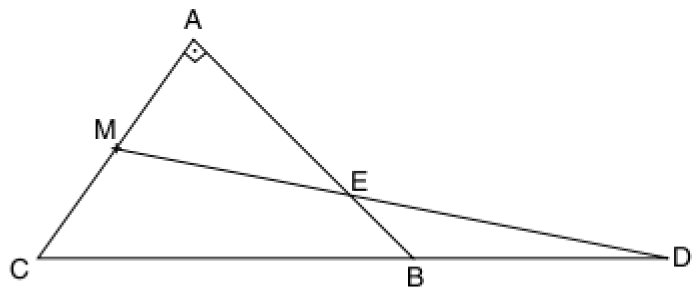
Baricentro

1 No triângulo ABC, G é o baricentro. Calcule x e y.



$\overline{CG} = y + 2$
$\overline{GE} = x$
$\overline{AG} = y$
$\overline{GD} = 7 - x$

2 O triângulo ABC é retângulo e isósceles de cateto a. Se $\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BC} = \overline{BD}$, calcule a medida do segmento $\overline{BE}$.



3 $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência de centro O. Toma-se um ponto C desse círculo e prolonga-se $\overline{AC}$ de um segmento $\overline{CD}$ igual a $\overline{AC}$. O segmento $\overline{OD}$ corta a circunferência em E e corta o segmento $\overline{BC}$ em F. Se $\overline{AB}$ = a e $\overline{OD}$ = b, calcule $\overline{EF}$.

4 Considere o ΔABC de lados a, b e c e baricentro G. Traçam-se $\overline{GE}$ e $\overline{GF}$ paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Calcule os lados do ΔGEF.

Cevianas e pontos notáveis de um triângulo

5 **Unitau** O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

(a) mediana.
(b) mediatriz.
(c) bissetriz.
(d) altura.
(e) base.

6 Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

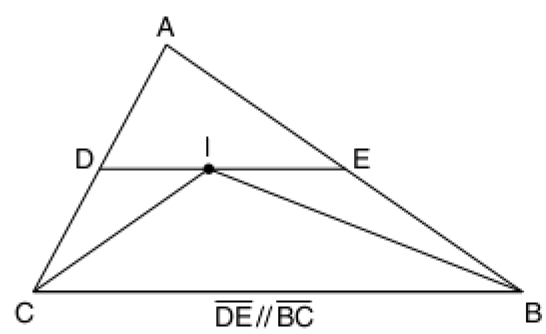
( ) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
( ) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
( ) O incentro é interno ao triângulo.
( ) O baricentro é interno ao triângulo.
( ) O ortocentro é interno ao triângulo.
( ) O circuncentro é interno ao triângulo.
( ) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

7 Diga qual o triângulo que satisfaz a condição dada nos casos:

a) ortocentro e o baricentro são coincidentes.
b) circuncentro e o incentro são coincidentes.
c) ortocentro é um dos vértices.
d) ortocentro é externo.
e) o circuncentro é externo.
f) o circuncentro está em um dos lados.
g) o ortocentro é um ponto interno.

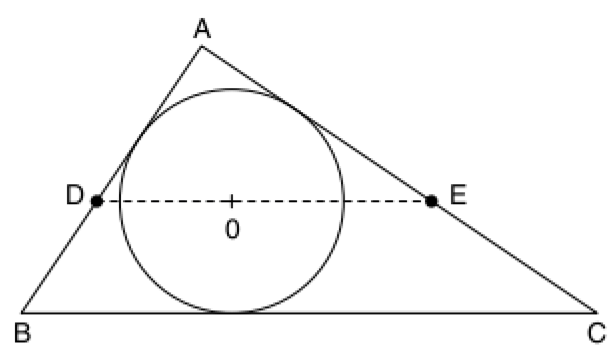
Incentro

8 Determine o perímetro do ΔADE, no qual $\overline{AB}$ mede x e $\overline{AC}$ mede y, sabendo que I é o incentro do triângulo ABC.



9 Se P é o incentro do triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine $\hat{A}$.

10 No ΔABC de incentro O, DOE é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Temos $\overline{AB} = 18$, $\overline{AC} = 23$ e $\overline{BC} = 20$. Calcule o perímetro do ΔADE.



TEXTOS COMPLEMENTARES

A reta de Euler

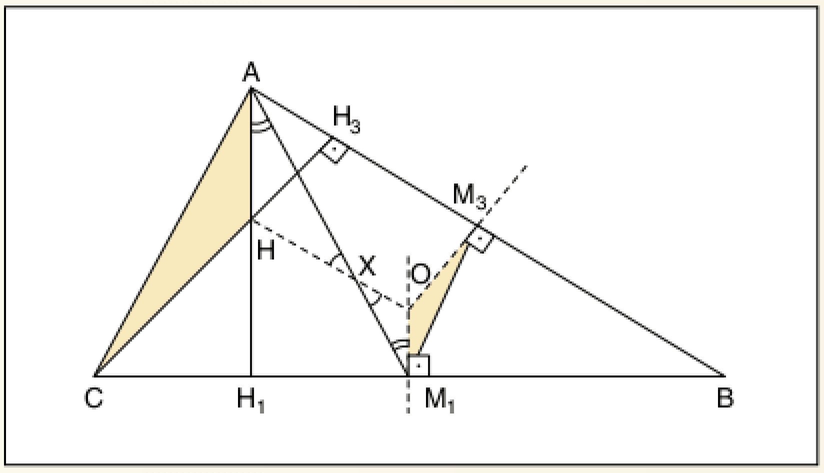
Caros alunos, quando vocês iniciaram o capítulo de pontos notáveis, não imaginavam o quanto são notáveis esses pontos. Neste texto complementar, vamos estudar um pouco das propriedades da reta de Euler.

A reta de Euler contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo qualquer. Siga com atenção a demonstração ao lado.

H é o ortocentro e O é o circuncentro do ΔABC.

$\Delta AHC \cong \Delta M_1OM_3$ (triângulos de lados paralelos)

$\overline{M_1M_3}$ é base média e $M_1M_3 = \dfrac{AC}{2}$, assim a razão de semelhança é 2. Ligando A com M_1, temos uma mediana do ΔABC.



Reta de Euler.

Unindo H com O, encontramos o ponto X.

$\Delta AHX \sim \Delta M_1OX \rightarrow \dfrac{AH}{OM_1} = \dfrac{AX}{XM_1}$, mas $\dfrac{AH}{OM_1} = 2$, assim $\dfrac{AH}{XM_1} = 2$ e, como $\overline{AM_1}$ é a mediana, X é o baricentro, $X \equiv G$.

O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo qualquer estão alinhados.

As circunferências ex-inscritas e o triângulo órtico

Nós conhecemos a circunferência inscrita e a circunscrita de um triângulo qualquer, obtidas respectivamente pelo incentro e pelo circuncentro.

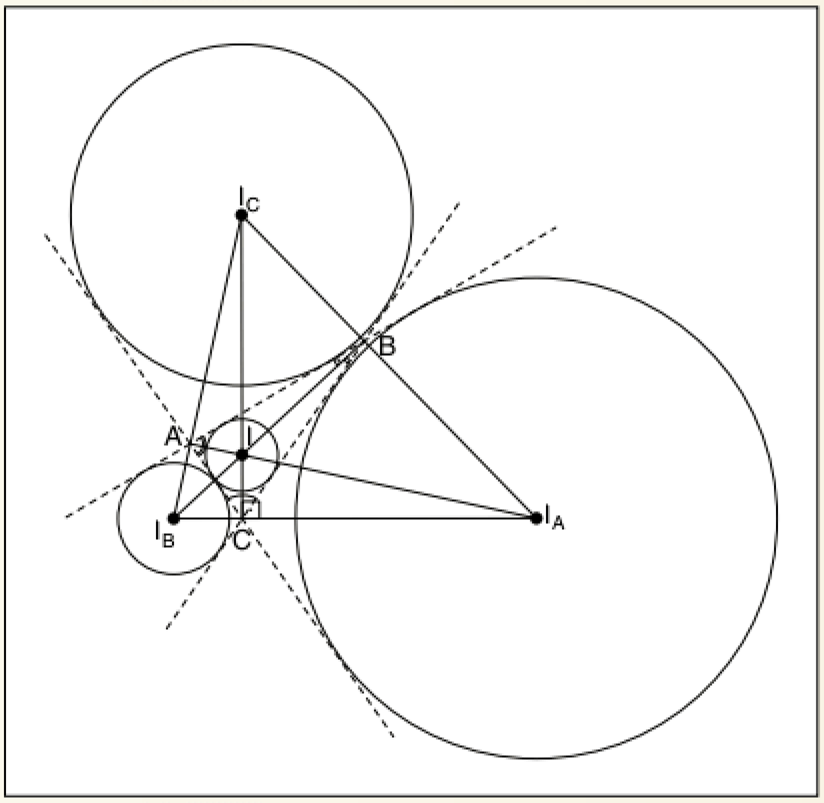
Neste capítulo, conhecemos mais uma circunferência importante dos triângulos, a ex-inscrita, que é tangente a um lado do triângulo e ao prolongamento dos outros dois.

Os centros das circunferências ex-inscritas são constituídas pelas bissetrizes interna e externa de dois ângulos adjacentes do triângulo, formando assim o ex-incentro.

Vamos agora construir as quatro circunferências inscritas e ex-inscritas de um triângulo qualquer.

Observando a figura ao lado, para obtermos I_A, traçamos a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com a bissetriz externa do ângulo $\hat{C}$. Relembre-se de uma "velha" propriedade angular: "as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares", assim $\overline{CI} \perp \overline{CI_A}$.

Pela construção do ΔABC e dos três círculos ex-inscritos, construímos também o $\Delta I_AI_BI_C$, cujas alturas são exatamente as bissetrizes internas do ΔABC, ou seja, I é ortocentro do triângulo maior e incentro do menor, agora chamado de triângulo órtico.



O triângulo órtico e as circunferências ex-inscritas.

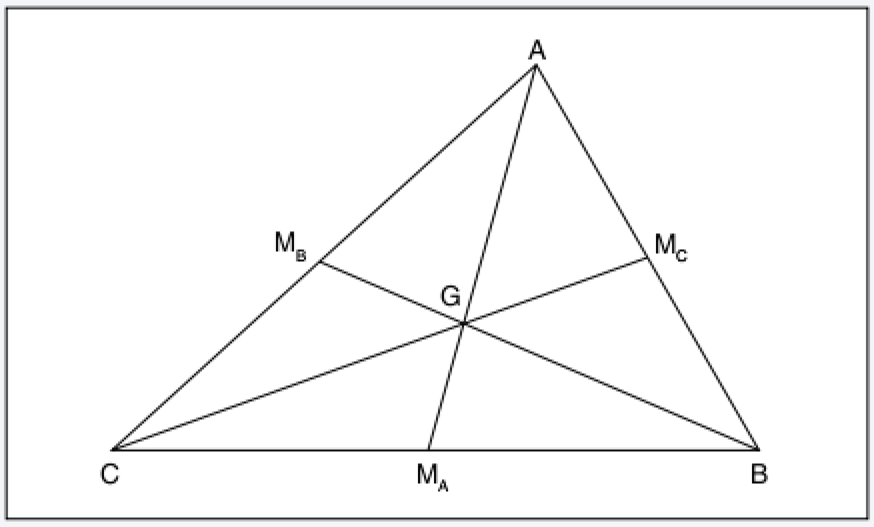
Resumindo

Construindo um triângulo qualquer, os pés das alturas desse triângulo formam o chamado triângulo órtico (ΔABC é órtico do $\Delta I_AI_BI_C$). O ortocentro do $\Delta I_AI_BI_C$ é incentro do ΔABC.

RESUMINDO

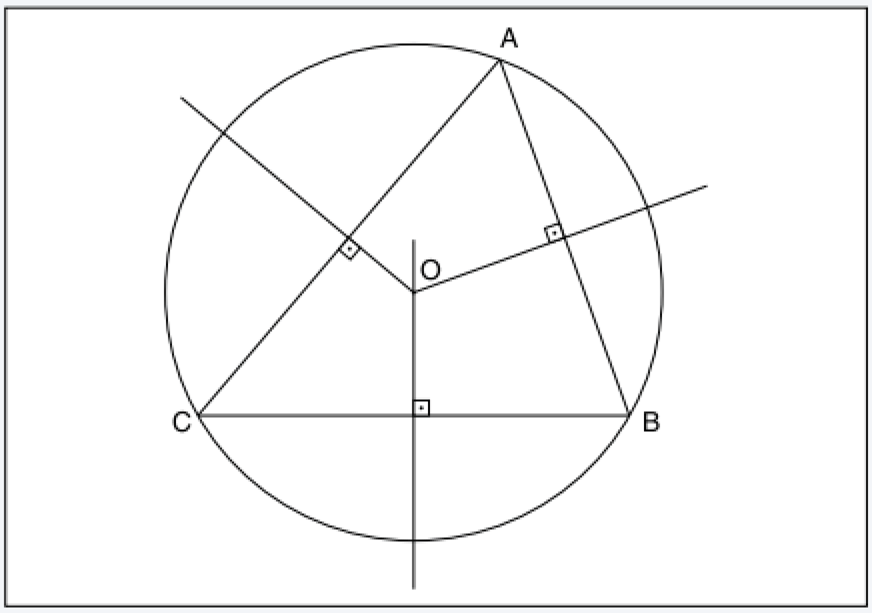
Pontos notáveis do triângulo

- Baricentro (cruzamento das medianas)



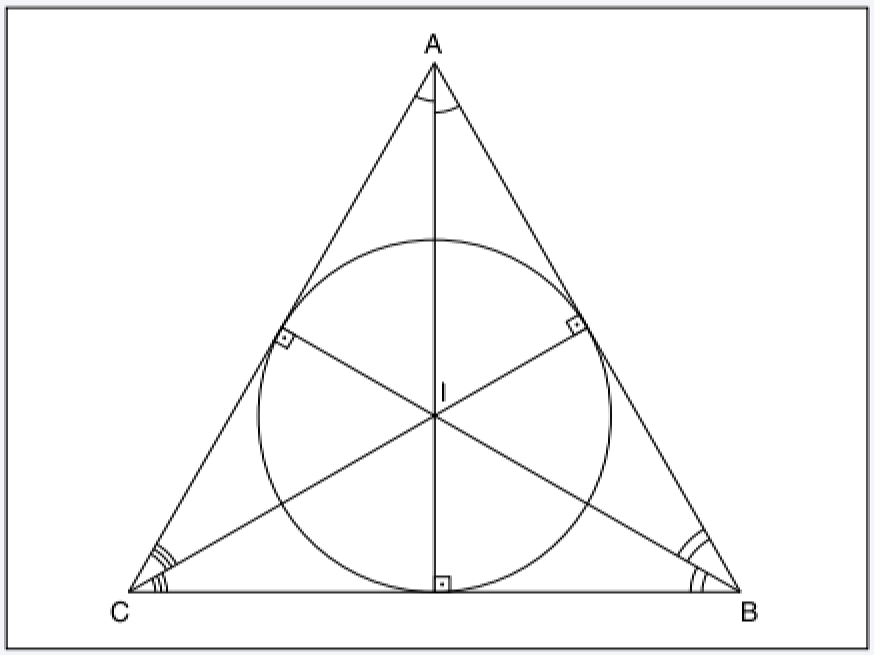
Propriedade: $\dfrac{AG}{GM_A} = \dfrac{BG}{GM_B} = \dfrac{CG}{GM_C} = 2$

- Circuncentro (cruzamento das mediatrizes)



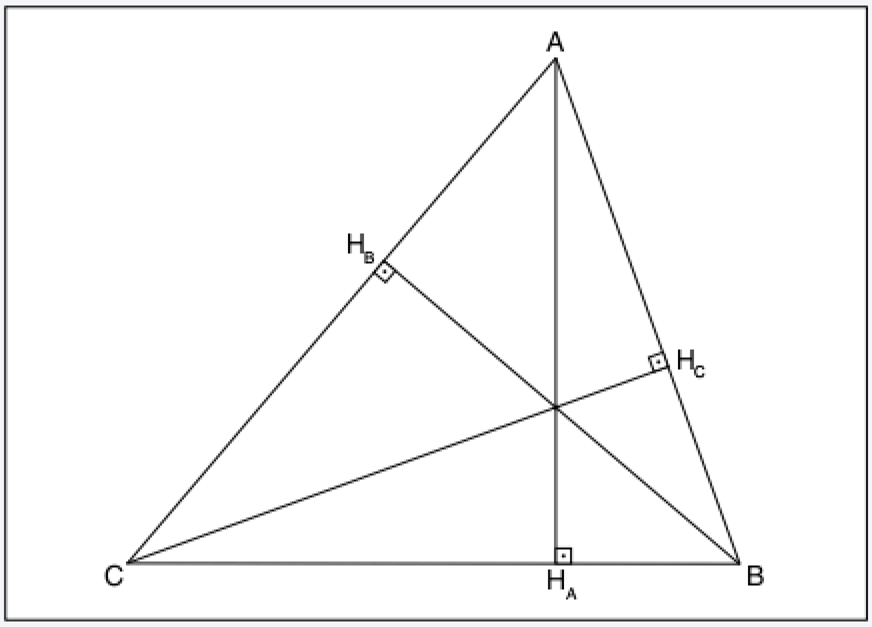
Propriedade: O é o centro da circunferência circunscrita.

- Incentro (cruzamento das bissetrizes internas)



Propriedade: I é o centro da circunferência inscrita.

- Ortocentro (cruzamento das alturas)



Propriedade: $\Delta H_AH_BH_C$ é o triângulo de menor perímetro inscrito no ΔABC.

QUER SABER MAIS?

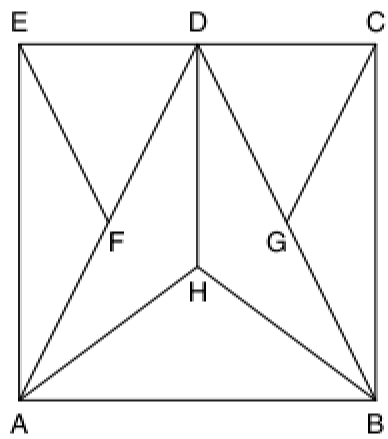
SITES

- Baricentro e Ortocentro
<www.youtube.com/watch?v=NeNReYkk5Y8>.
- Circuncentro e Incentro
<www.youtube.com/watch?v=6GnVQUdAvPc>.

Exercícios complementares

Pontos notáveis no triângulo retângulo

1 **Unirio** Na figura, o triângulo ABD é equilátero, e seu lado mede 3 metros; H é o ortocentro, sendo que os pontos F e G são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, respectivamente.



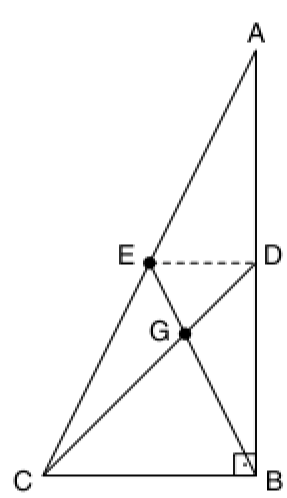
Quantos rolos de fita adesiva serão necessários, no mínimo, para cobrir todos os segmentos da figura, se cada rolo possui 1 metro de fita?

(a) 18
(b) 20
(c) 22
(d) 24
(e) 26

2 **UFPE** Seja r o raio, em cm, da circunferência inscrita em um triângulo retângulo com catetos medindo 6 cm e 8 cm, quanto vale 24r?

3 Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a.

4 Na figura, D é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo AC = 54 cm, calcule $\overline{GB}$.



5 A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm e um dos ângulos 20º.

a) Calcule a mediana relativa à hipotenusa.
b) Qual a medida do ângulo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto?

Ortocentro

6 Sendo H o ortocentro do ΔABC e $B\hat{H}C = 40°$, determine $\hat{A}$.

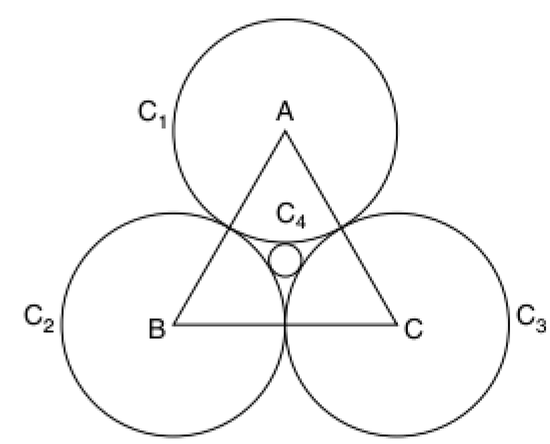
7 H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 40°$, determine os ângulos do triângulo.

8 Considere um triângulo ABC. Une-se o ponto médio M do lado $\overline{BC}$ aos pés D e E das alturas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$. Classifique o ΔMDE.

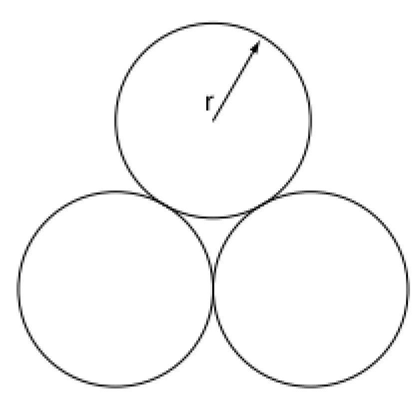
Pontos notáveis no triângulo equilátero

9 **PUC-Rio** Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1cm em que O é o ponto de encontro das alturas, quanto mede o segmento $\overline{AO}$?

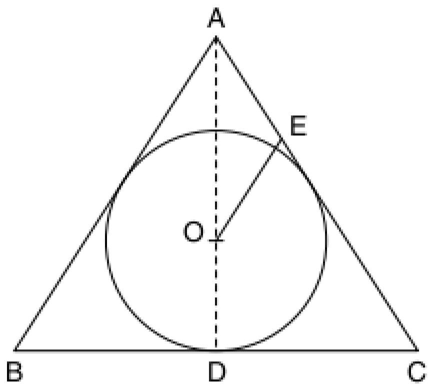
10 **UFPE** Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero com lados de comprimento 2 cm. Os três círculos C_1, C_2, e C_3 têm raios de mesmo comprimento iguais a 1 cm e seus centros são os vértices do triângulo ABC. Seja r > 0, o raio do círculo C_4 interior ao triângulo ABC e simultaneamente tangente aos círculos C_1, C_2 e C_3, calcule $9(1 + r)^2$.



11 **Unicamp** Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio r, dispostos como indica a figura adiante, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio R, de modo que fiquem presos sem folga. Expresse o valor de R em termos de r para que isso seja possível.



12 **PUC-MG** Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro O e raio 2 cm. $\overline{AD}$ é altura do triângulo.

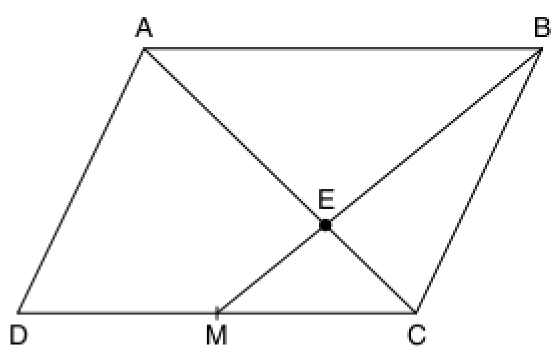


Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:

(a) $2\sqrt{3}$
(b) $2\sqrt{5}$
(c) 3
(d) 5
(e) $\sqrt{26}$

Problemas gerais

13 No paralelogramo ABCD, M é ponto médio de $\overline{DC}$. Se $\overline{AE} = a$, calcule $\overline{EC}$.

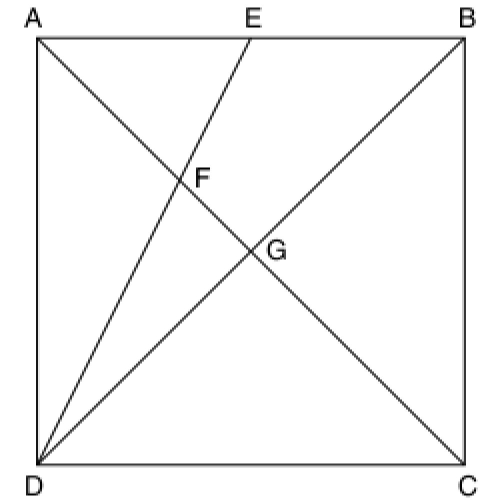


14 Em um triângulo ABC, os ângulos A e B medem, respectivamente, 86º e 34º. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e pela bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

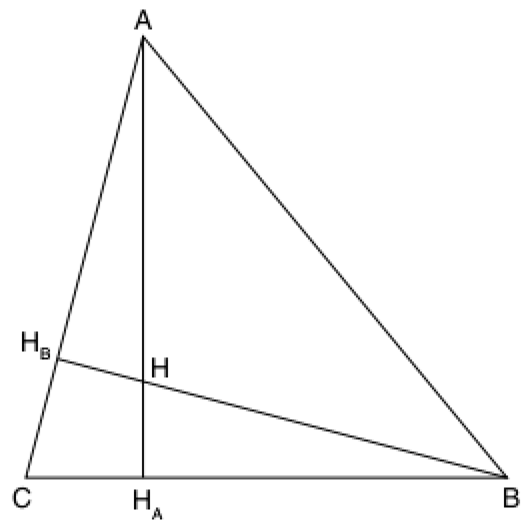
15 Em um triângulo ABC, a reta r que passa pelo baricentro e o incentro é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo. Demonstrar que os lados do triângulo formam uma progressão aritmética.

16 Descreva a posição dos pontos notáveis de um triângulo em função da natureza do triângulo.

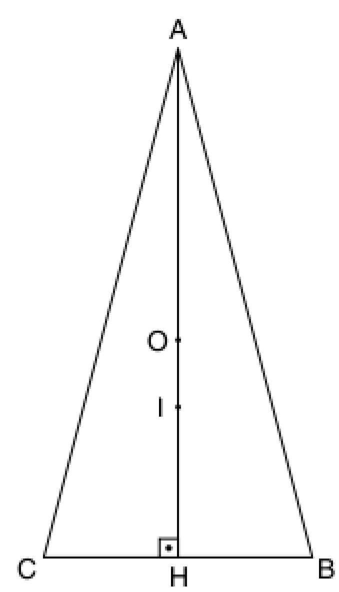
17 O quadrado ABCD da figura a seguir possui lado medindo a. Seja E o ponto médio de $\overline{AB}$, determine a medida do segmento $\overline{FG}$.



18 O triângulo acutângulo ABC possui lados medindo AB = c, BC = a e AC = b. Seja H o seu ortocentro e $CH_B = d$, determine a medida de CH_A.



19 Considere o triângulo isósceles da figura a seguir com lados AB = AC = a, BC = b e altura AH = c. Seja O o circuncentro e I o incentro do triângulo, determine a distância entre O e I em função de a, b e c.



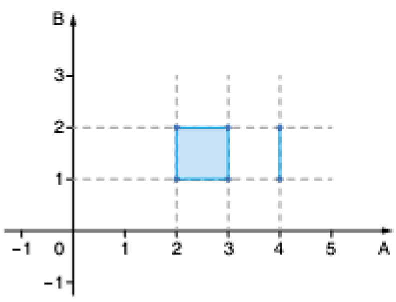
Gabarito

Frente 1

1 Teoria elementar dos conjuntos

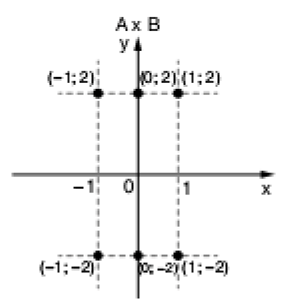
Revisando

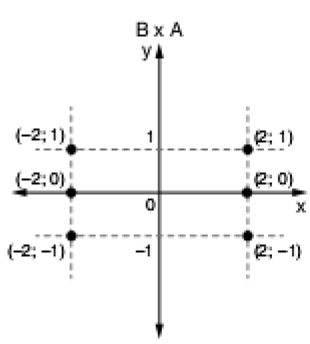
1. a) U e) {f}
   b) {a; c; e} f) {b; e; f; g}
   c) {b; f} g) U
   d) {b; d; f}
2. V; F; V; F; F; F; F; F; V; V
3. F; V; V; V; V; V; F; F; V; V
4. 155 alunos.
5.



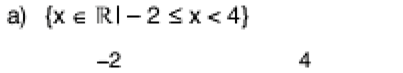
Exercícios propostos

1. a) ∈ d) ⊃
   b) ⊂ e) x, x ≠ 7
   c) ⊅
2. C 3. D 4. C 5. D
6. A ∪ B = {1; 2; 3; 5; 7; 8; 9}
   A ∩ B = {3; 8}
   A – C = {3; 5; 7}
   (A ∪ B) ∩ C = {2; 8}
   (A ∩ B ∩ C) = {8}
7. {7; 8; 9} 8. {2}
9. {0; 1; –2; 3; 4; 5}
10. {3; {1}}
11. C 13. D 15. 162 17. B
12. C 14. 230 16. 71 18. E
19.





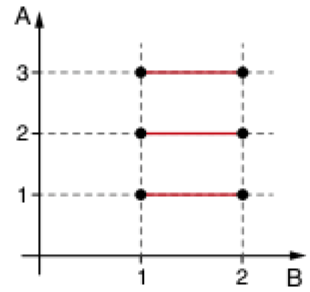
20. $x = \frac{2}{7}; y = 6$
21. A = {1}
    B = {0; 1; 2}
22. B 24. D 26. B
23. E 25. D 27. D
28. a) {x ∈ ℝ | – 2 ≤ x < 4}



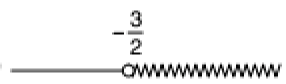
b) {x ∈ ℝ | 1 ≤ x < 3}

c) ∅

29.



30. C
31. a)



b)

32. E
33. a) 315
    b) 75
    c) 235
    d) 135
34. a) 48 caixas.
    b) 38 caixas.
    c) 86 caixas.
35. C 37. B 39. 50
36. B 38. D

Textos complementares

1. F; V; V; V; V
2. A
3. E
4. a)

p	q	r	p∨q	~(p∨q)	~(p∨q)∧r
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

b)

p	q	r	p∧q	(p∧q)→r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

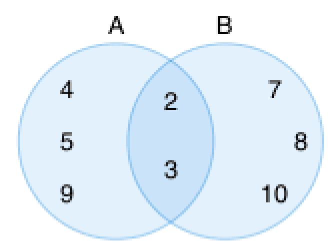
c)

p	q	r	~p	~p∨q	~p∨q→r
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

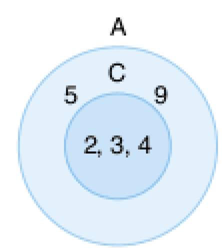
Exercícios complementares

1. A
2. ∅, {0}, {5}, {10}, {0,5}, {0,10}, {5,10}, {0,5,10}
3. D
4. Z = {5}
5. F; V; F; F; F; F; V; V; V
6. A
7. a) {–1; 2; 1} e) {2}
   b) {3} f) {–1; 1}
   c) {0} g) {–1; 0; 1; 2; 3}
   d) {2; 3} h) {–1; 1}
8. {a; c}
9. a) {0, 1, 2, 3}
   b) {8, 9, 10, 11, 12}
   c) ∅
   d) {0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12}
   e) {0, 1, 2, 3}
10. A
11. a) {0, 5, 7, 9, 10, 90}
    b) {0, 5, 7, 9, 10, 90}
    c) {5, 7, 9, 10, 90}
    d) {7, 8, 9, 10}
12. A 13. B 14. 21
15.

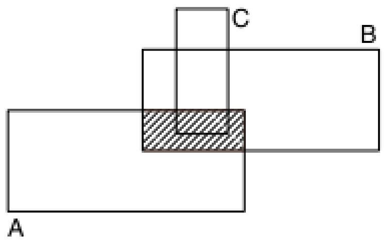
a)



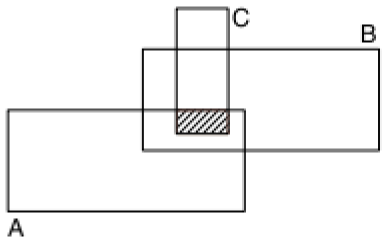
b)



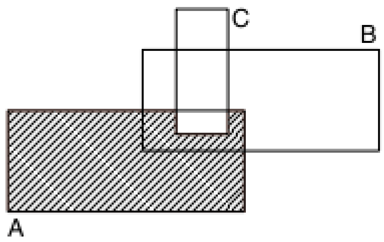
16. D
17. B
18. V; V; V; V; F
19. C
20. F; F; F; V
21. a) {1, 6, 5, 4} ∪ {1, 7, 2, 6} =
       = {1, 2, 4, 5, 6, 7}
    b) {2, 9, 10} ∪ {4, 5, 90, 7} =
       = {2, 4, 5, 7, 9, 10, 90}
22. B
23. C
24. F; F; F; F; F
25. a)



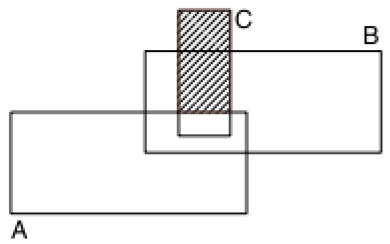
b)



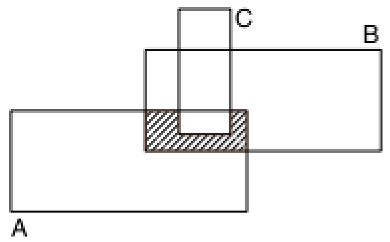
c)



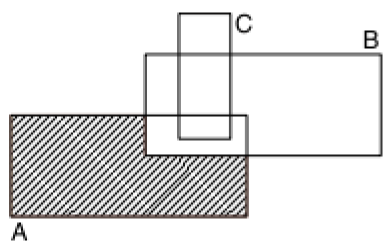
d)



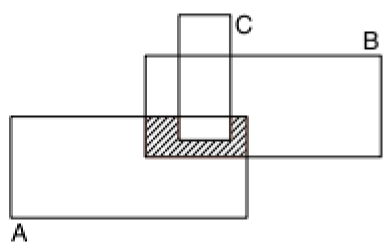
e)



f)



g)



26. a) P = {3, 4, 5, 7}; Q = {1, 2, 3, 7}; R = {2, 5, 6, 7}
b) $(P \cap Q) - R = \{3\}$
c) $(P \cup Q) \cap R = \{2, 5, 7\}$
d) $(P \cup R) - P = \{2, 6\}$
e) $(Q \cap R) \cup P = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

27. B **28.** B **29.** D

30. a) 180 c) 130
b) 70 d) 370

31. a) (1,–1); (1,0); (2,–1); (2,0); $(\frac{3}{5}, -1)$; $(\frac{3}{5}, 0)$
b) 9
c) 4

32. A

33. A x B = $(1, \frac{2}{3})$; (1, 8); $(2, \frac{2}{3})$; (2, 8); $(-4, \frac{2}{3})$; (–4, 8)
A x A = (1, 1); (1, 2); (1, –4); (2, 1); (2, 2); (2, –4); (–4, 1); (–4, 2); (–4, –4)

34. D **35.** E **36.** A

37. a) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap \bar{B} =$
$(\bar{B} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = \varnothing \cup (A \cap B) =$
$A \cap \bar{B} = A - B$

b) $A - (B \cup C) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) =$
$A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) =$
$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = (A - B) \cap (A - C)$

c) $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap \bar{C} =$
$(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{C} \cap \bar{C}) =$
$(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) =$
$(A - C) \cap (B - C)$

d) $\overline{(A - B)} = \overline{A \cap \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{\bar{B}} = \bar{A} \cup B$

e) $(A \cup B) - (A \cap B) =$
$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) =$
$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) =$
$\left[(A \cup B) \cap \bar{A}\right] \cup \left[(A \cup B) \cap \bar{B}\right] =$
$\left[(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap A)\right] \cup$
$\left[(\bar{B} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A)\right] =$
$\left[(\bar{A} \cap B) \cup \varnothing\right] \cup \left[\varnothing \cup (A \cup \bar{B})\right] =$
$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cup \bar{B}) =$
$(B - A) \cup (A - B)$

f) $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \bar{A}) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap (B) =$
$A \cup B = B$ (pois $A \subset B$)

38. Demonstração

39. a) A
b) $[-1; 0] \cup]3; 5[$
c) B

40. a)]–3, 0]
b) [7, 10]

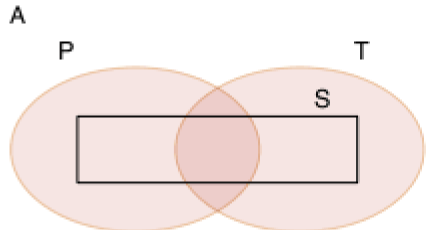
41. a) 10%
b) 57%

42. a) {8, 9, 10, ...}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
c) {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}
d) {1, 2, 3, 4, 5}

43. A = {1, 3}
B = {4, 8, 16}

44. A

45.



$S \subset (T \cup P)$

46. B **48.** C **50.** E
47. A **49.** B
51. 21
52. C
53. E

54. a) $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$

55. E **57.** E **59.** D **61.** E
56. D **58.** D **60.** D

2 Relações e funções

Revisando

1. A função f é bijetora; logo, é inversível.
Assim, $f^{-1} : [0; 6] \to [1; 1]$ e $x = 3y + 3$ ∴
∴ $\frac{x-3}{3} = y$ e $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{3}$

2. $fog(x) = gof(x)$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$ ∴ $f(g(x)) = g(f(x))$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$2g(x) + 1 = a\,f(x) + b$ ∴ $2(ax + b) + 1 = a(2x + 1) + b$
∴ $2ax + 2b + 1 = 2ax + a + b \Rightarrow a - b = 1$
Tomando como exemplo a = 3 e b = 2, tem-se $g(x) = 3x + 2$.
Assim, $fog(x) = f(g(x)) - 2g(x) + 1 =$
$= 2(3x + 2) + 1 = 6x + 5$
$gof(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = 3(2x + 1) + 2 = 6x + 5$

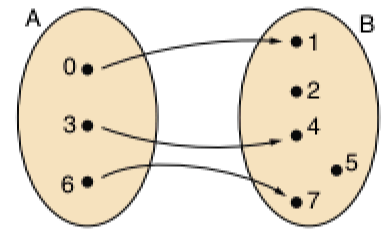
3. f é bijetora, g é bijetora e h não é sobrejetora.

4. a = – 2, b = 1 e c = 2

Exercícios propostos

1. {6; 9; 12}

2.



3. E **5.** A **7.** D
4. A **6.** D **8.** D

9. f(–17) = 26

10. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

11. C **12.** D **13.** B

14. $h(x) = \frac{3x}{5} + 4$

15. a) $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$
b) $S = \left]-\infty; -6\right] \cup \left\{\frac{1}{3}; -\frac{5}{4}\right\}$
c) $S = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
d) $S = \left]-\frac{1}{5}; \frac{3}{4}\right]$
e) $S = \left]-\infty; -10\right[\cup \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$
f) $S = \left[\frac{1}{2}; 3\right[\cup \left]5; +\infty\right[$
g) $S =]0; 1[\cup]2; +\infty[$
h) $S =]-1; 0] \cup \left]\frac{1}{3}; 1\right[\cup [3; +\infty[$

16. C **18.** C **20.** A **22.** D
17. A **19.** B **21.** B **23.** A
24. 3a – b = 3
25. V; F; V; F
26. A **27.** C **28.** C

Exercícios complementares

1. C **2.** C **3.** E **4.** D

5. 6 unidades de área.

6. $x = \frac{1}{2}$; $y = -9$

7. 72 e 60

8. E **9.** C **10.** A

11. a) F = 95
b) C = 160

12. C **14.** D **16.** C
13. B **15.** E

17. $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$

18. $\left]-\infty; -3\right[\cup \left]\frac{5}{2}; \infty\right[$

19. a) $f^{-1}(x) = \frac{(x-1)}{2}$
b) $\frac{9}{4}$

20. a) $fog(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 2 =$
$= (x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$
b) $gof(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = x^2 + 2 - 3 =$
$= x^2 - 1$
c) $fof(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 2 =$
$= (x^2 + 2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$
d) $gog(x) = g(g(x)) = g(x) - 3 = x - 3 - 3 = x - 6$

21. $gof(x) = g(f(x)) = 4f(x) + 3 = 4(1 - x) + 3 =$
$= 4 - 4x + 3 = -4x + 7$
$ho(g(f(x))) = 2g(f(x)) - 5 = 2(-4x + 7) - 5 = -8x + 9$

22. $fog(x) = x^2 - 2x + 2$ ∴ $f(g(x)) = x^2 - 2x + 2$ ∴
∴ $2g(x) + 7 = x^2 - 2x + 2$
$2g(x) = x^2 - 2x - 5$ ∴ $g(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{5}{2}$

23. $fog(x) = 2x^2 - 4x + 3 \therefore f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 3 \therefore$
$\therefore f(2x-1) = 2x^2 - 4x + 3$
$2x - 1 = t$ e $f(t) = 2x^2 - 4x + 3$

Como $x = \dfrac{t+1}{2}$, temos

$$f(t) = 2\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t+1}{2}\right) + 3 =$$

$$= 2.\frac{(t+1)^2}{4} - 2(t+1) + 3 \therefore$$

$$\therefore f(t) = \frac{t^2+2t+1}{2} - 2t - 2 + 3 = \frac{t^2}{2} - t + \frac{3}{2}$$

Assim: $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2}$

24. $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ e $x = \dfrac{y+1}{y-2} \therefore$

$\therefore xy - 2x = y + 1 \therefore xy - y = 2x + 1 \therefore$
$\therefore y(x-1) = 2x + 1$

$y = \dfrac{2x+1}{x-1}$, ou seja, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$$fof(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-2} = \frac{\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-2} =$$

$$= \frac{x+1+x-2}{x+1-2(x-2)} = \frac{2x-1}{-x+5}$$

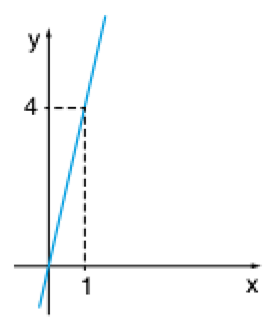
25. D **26.** C

27. a) 160 gramas
b) 295 gramas

28. B **30.** B **32.** E
29. B **31.** E

33. a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{5} = \dfrac{(15-24)}{10} = -\dfrac{9}{10} = -0,9$

b)



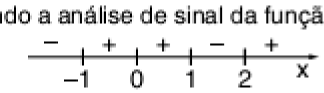
34. B **36.** B **38.** D **40.** B
35. B **37.** D **39.** B

41. a) $m \neq 2$ e $m \neq -2$ e $m \neq 0$
b) $m = -2$
c) $m = 2$

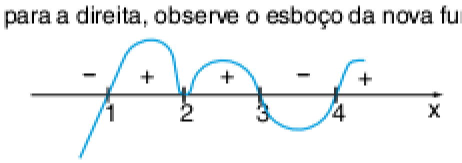
42. C

43. 60

44. Fazendo a análise de sinal da função, temos:



A função $f(x - 2)$ desloca o gráfico 2 unidades para a direita, observe o esboço da nova função:



45. $f(-x) = \sqrt{2^{(-x)^2} - 1} = \sqrt{2^{x^2} - 1} = f(x)$, ou seja, x e –x são elementos distintos do domínio e f(–x) = f(x), logo ela não pode ser injetora.

46. Fazendo $x \to \dfrac{1}{x}$ $\quad 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 3f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

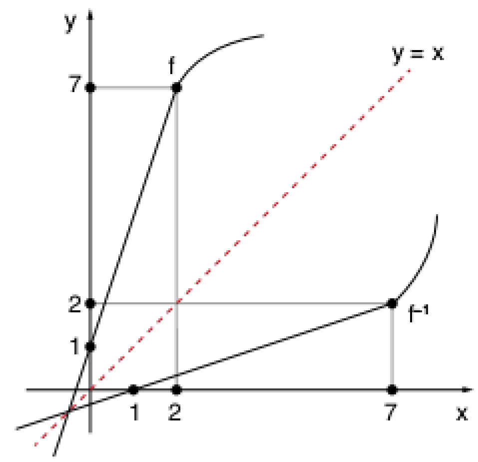
obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \\ 3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \sim \begin{cases} -4f(x) + 6f\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^2 \\ 9f(x) - 6f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-3}{x^2} \end{cases} \oplus$$

$$\to 5f(x) = -2x^2 - \frac{3}{x^2} \therefore f(x) = -\frac{2x^2}{5} - \frac{3}{5x^2}$$

47. $y = \begin{cases} 2x+3;\ x \geq 2 \\ 3x+1;\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+3;\ x \geq 2 \text{ e } y \geq 7 \\ y = 3x+1;\ x < 2 \text{ e } y < 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y+3;\ y \geq 2 \text{ e } x \geq 7 \\ x = 3y+1;\ y < 2 \text{ e } x < 7 \end{cases} \sim f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2};\ x \geq 7 \\ \frac{x-1}{3};\ x < 7 \end{cases}$



48. $\begin{matrix} x = 1 & f(1) + 2f(5) = 1 \\ x = 5 & f(5) + 2f(1) = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2f(5) + f(1) = 1 \\ f(5) + 2f(1) = 5 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} 2f(5) + f(1) = 1 \\ -2f(5) - 4f(1) = -10 \end{cases}$
$-3f(1) = -9 \therefore$
$\therefore f(1) = 3$

49. $fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) - 4g + 3;\ g \geq 2 \\ 2g - 3 \quad ;\ g < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} (2x+3)^2 - 4(2x+3) + 3;\ 2x+3 \geq 2 \\ 2(2x+3) - 3;\ 2x+3 < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 4x^2 + 4x;\ x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x + 3;\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

$gof(x) = 2f(x) + 3 =$

$= \begin{cases} 2\left(x^2 - 4x + 3\right) + 3;\ x \geq 2 \\ 2(2x - 3) + 3;\ x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9;\ x \geq 2 \\ 4x - 3;\ x < 2 \end{cases}$

3 Função do 2º grau

Revisando

1. $x^2 - \dfrac{161}{36}x + \dfrac{17}{18} = 0$
2. $\dfrac{-155}{238}$
3. $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{x-9}{x+7}\right)$
4. $a + c = 17$
5. $a < 0$; $c > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
6. $f^{-1}: [-1; +\infty[\to \mathbb{R}^-$ e $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$

Exercícios propostos

1. a) V = {–3, –2}
b) V = {–5, 0}

2. B **4.** D **6.** C
3. D **5.** A

7. $m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

8. $m = \dfrac{7}{4}$ **9.** D **10.** $-\dfrac{27}{4}$

11. D
12. a = 8
13. 50 u
14. a) 1 segundo
b) 0,75 metro

15. A

16. a) A receita por sessão é de R\$ 12.000,00.
b) O preço a ser cobrado é de R\$ 50,00.

17. a) 220 b) $10 \leq x \leq 20$

18. $\dfrac{1}{8}$

Como a função que define a área corresponde a uma parábola com a concavidade voltada para baixo, ela não apresenta valor mínimo.

19. A **21.** 93 **23.** A
20. C **22.** D **24.** C

25. a) P (7, 24)
b) $x < 5$; $x \neq 1$

26. $x < -4$ ou $x > -2$

27. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

28. A **29.** E **30.** B **31.** D

32. $]-1; 1[\cup [2; +\infty[\cup \{-3\}$

33. E **35.** 28 **37.** 10
34. 56 **36.** B

Exercícios complementares

1. a) $V = \left\{\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}\right\}$

b) $\left\{8 - \sqrt{39},\ 8 + \sqrt{39}\right\}$

c) $V = \left\{2, \dfrac{17}{4}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\left(6 - \sqrt{48}\right)}{2}, \dfrac{\left(6 + \sqrt{48}\right)}{2}\right\}$

e) $V = \left\{\dfrac{-13}{5}, 3\right\}$

2. a) S = {4, –1}
b) S = {(4, – 4), (–1, 6)}

3. B **5.** C

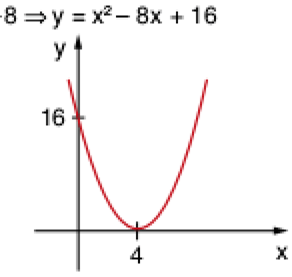
4. x = 4

6. a) t < 4 b) t = 4 c) t > 4

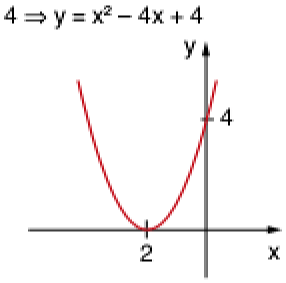
7. B

8. a) P(3) = 0, $\forall$ k $\in \mathbb{R}$
b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid k \leq 4 - 2\sqrt{6} \text{ ou } k \geq 4 + 2\sqrt{6}\right\}$

9. $m = -8 \Rightarrow y = x^2 - 8x + 16$



$m = 4 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4$



10. a) $\dfrac{7}{5}$ c) $\dfrac{159}{25}$

b) $\dfrac{-11}{5}$ d) $\dfrac{-7}{11}$

11. B **14.** B **17.** E **20.** E
12. A **15.** C **18.** A **21.** D
13. $\dfrac{a^2+4}{a}$ **16.** C **19.** A

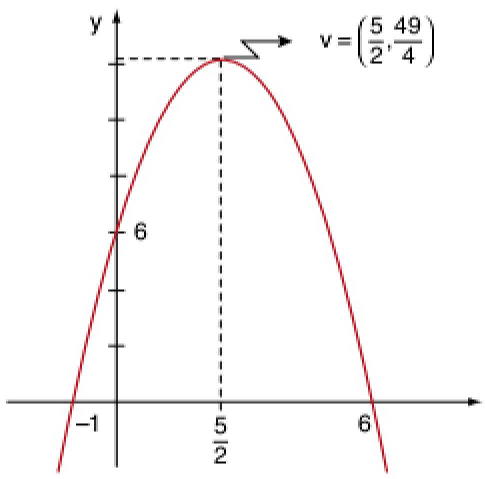
22. V; V; F; V; F **23.** 10

24. a) O lucro é nulo para 100 peças ou para 500 peças.
b) O lucro é negativo para $0 \leq x < 100$ e $500 < x \leq 600$.
c) Devem ser vendidas 150 ou 450 peças.

25. C
26. (0; 8)
27. B
28. a) $y = 4x - 8$ b) $y = -x^2 + 2x$ c) $x = -1$

29. D	32. C	35. C	38. A
30. A	33. A	36. C	39. C
31. A	34. 62	37. D	

40. a) 25 e a mulher é levemente obesa.
 b) h = 1,8 m.
41. a) $d = \left(\frac{1}{150}\right) \times (90.000 - v^2)$
 b) 600 km
42. 82,8
43. F; V; V; F; V
44. C
45. a) a = –1, b = 5 e c = 6
 b) O gráfico da função obtida no item a está esquematizado no gráfico adiante:

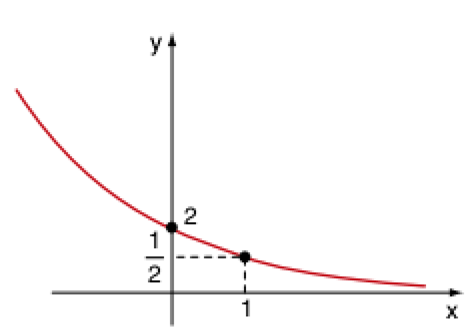


46. m = –3
47. bb' = 2(ca' + c'a)
48. D
49. Todos possuem 1 ponto em comum no eixo do x, a raiz (1; 0).
50. E 51. D 52. B
53. f é periódica de período 2a.
54. a) $a = -2$, $b = \frac{-1}{4}$ e $g = \frac{-1}{16}$
 b) 1 e $\sqrt{2}$.
55. D
56. A
57. m∈]–∞;–1[U]0;2[
58. B
59. a ∈ [–3; 3]
60. B

4 Função exponencial

Revisando

1. a) $\frac{7}{8}$ b) 6^n c) 4
2. 1
3.



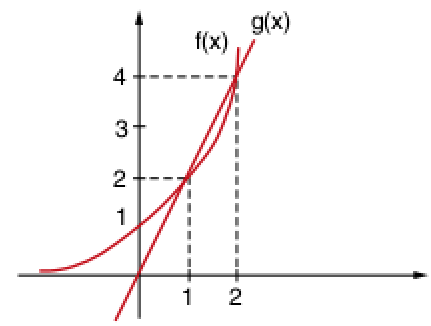
4. S = {1}
5. S =]–∞; 1 [U] 2; +∞[

Exercícios propostos

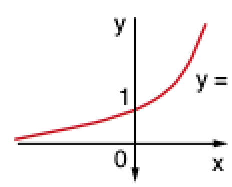
1. S = {4}
2. E
3. x = 2, y = 3 ou x = 3, y = 2

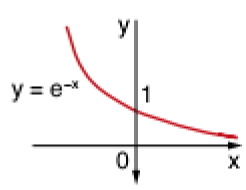
4. 03	8. A	12. A	16. D
5. C	9. E	13. A	17. B
6. A	10. C	14. D	18. A
7. B	11. E	15. C	19. C

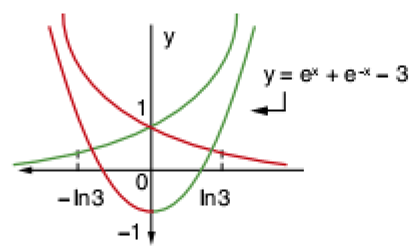
20. a)



 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\}$
 c) $2\sqrt{2}$ é o maior
21.







A função $f(x) = e^x + e^{-x} - 3$ é par, ou seja, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se existe um número real b tal que $f(b) = 0$, então $f(-b) = 0$. Observa-se no gráfico que tais números reais não nulos existem.
Logo: $e^b + e^{-b} = 3$.
Portanto, $e^{3b} + e^{-3b} = (e^b)^3 + (e^{-b})^3 =$
$= (e^b + e^{-b})^3 - 3(e^b)^{2e-b} - 3^{eb}(e^{-b})^2 =$
$= (e^b + e^{-b})^3 - 3e^b e^{-b}(e^b + e^{-b}) =$
$= 3^3 - 3(1) \cdot 3 = 18$
22. C

Exercícios complementares

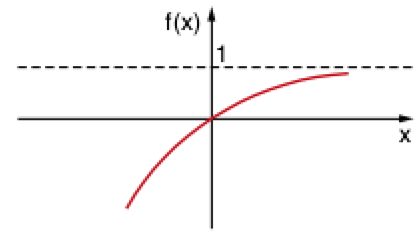
1. x = 7
2. x = 2
3. a) S = {3} d) S = {0}
 b) S = {1; –3} e) S = {3}
 c) S = {3}

4. A	7. D	10. S = {1; 2}
5. B	8. A	
6. C	9. S = {–5; 3}	

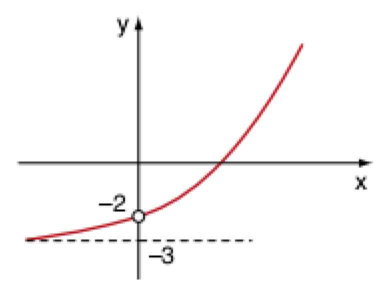
11. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
12. $2^{10} \cdot (1 + 2^5)$
13. B
14. K = 2.048; a = 4 min
15. E
16. A
17. A
18. a) S =] 0;+∞ [
 b) S =]– ∞;–1[∪] 7;+∞[
 c) S =]2;+∞[
 d) S =]– 1;1[
 e) S =]3;+∞[

19. C	23. A	27. E
20. D	24. B	28. C
21. V; V; F; F	25. $\frac{1}{2}$	29. D
22. A	26. D	

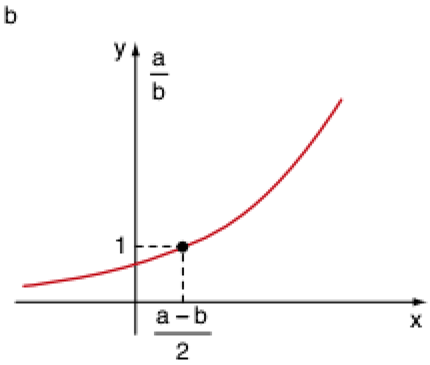
30.



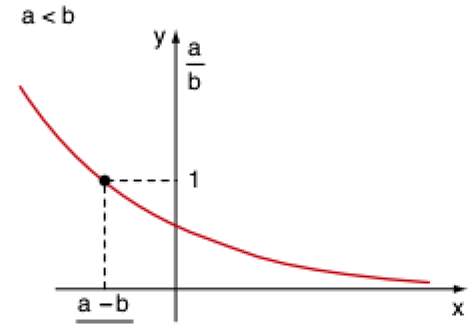
31. E
32. a) $\alpha = 54$ e $\beta = \frac{-1}{90}$
 b) 360
33. a) a = 120 e b = – ln2
 b) x = 3
34. D
35. $\left(1 - 2^{\frac{-1}{16}}\right) \cdot M(0)$
36. V; V; V; V
37. D 38. D 39. E 40. E
41. a) x = 0 ou x = –1
 b) $-12 < m \le 0$
42. C
43.



44. ∅
45. $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$
46. m ∈]–1; 1[
47. Vamos analisar três casos para provarmos o absurdo:
a = b 1 < 1 absurdo
a > b



$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$ absurdo
a < b



$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$ absurdo
48. S = {1; 2}

Frente 2

1 Conjuntos numéricos

Revisando

1. $\frac{13}{9}$
2. $\frac{281}{90}$
3. $\frac{40.501}{500}$
4. $-\frac{1}{2}$

Exercícios propostos

1. $-3^{-15} + 2^{-24}$
2. a) 0,4 d) $3\sqrt[3]{2}$
   b) 0,5 e) $10\sqrt{2}$
   c) $2\sqrt{2}$
3. a) $\sqrt[6]{3} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$
   b) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} < \sqrt[6]{40}$

4. $\sqrt[3]{ab}$ 6. $\sqrt[n]{a}$ 8. C
5. 5ab 7. 125 9. E
10. B < D < C < A
11. D
12. 2,5
13. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$
14. A < B < C

15. $\frac{23}{2}$ 17. $\frac{30}{377}$ 19. $\frac{1}{15}$
16. $\frac{2}{3}$ 18. A 20. E

Exercícios complementares

1. a) 1 b) –1 c) zero
2. a) 2
   b) $11a\sqrt{a}$
   c) $9\sqrt{3}$
   d) zero
3. a) 9
   b) $\frac{1}{2mn}$
   c) 14
   d) 6
4. –9
5. 0,666...
6. C 9. 8 12. B
7. E 10. C 13. D
8. C 11. A 14. B
15. $-2^{-(2k+1)}$
16. 15
17. a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \therefore$

$$\therefore a + \sqrt{b} = x + 2\sqrt{xy} + y \therefore$$

$$\therefore a + \sqrt{b} = (x+y) + \sqrt{4xy}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 4xy = b \end{cases} \longrightarrow 4x(a-x) = b \therefore$$

$$\therefore 4ax - 4x^2 = b \therefore 4x^2 - 4ax + b = 0$$

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \,.\, 4b}}{2 \,.\, 4} =$$

$$= \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2 - b}}{8} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Para reduzirmos o radical duplo para um radical simples, x não pode ter um radical; assim, $a^2 - b$ tem de ser quadrado perfeito.

b) Fazendo $\sqrt{a^2 - b} = c$, temos $x = \frac{a \pm c}{2}$

$$x = \frac{a+c}{2} \longrightarrow y = \frac{a-c}{2}$$

Portanto, $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$

18. $\sqrt{2}$ (dica: igualar a expressão a x e elevar ao quadrado os dois lados)
19. D
20. D

2 Conceitos preliminares da teoria dos números

Revisando

1. Devemos acrescentar 4.
2. Demonstração
3. 18
4. 238 + 476 + 714 + 952 = 2.380
5. 41

Exercícios propostos

1. 2
2. a = 3 e b = 0 ou a = 7 e b = 5
3. D 4. 154
5. A possui 44 e B 35 divisores.
6. ±1; ±2; ±4; ±5; ±8; ±10; ±20; ±40
7. 4 8. A
9. 24 e 144; 48 e 120; 72 e 96
10. 168 cm
11. A
12. C
13. Resto = 3
14. 15

Exercícios complementares

1. a; b; c; f: zero
   d; e: 2
2. E 3. A 4. A 5. 144
6. 7 valores inteiros e positivos para n: 0, 1, 2, 4, 7, 10 e 16.
7. 3 + (–1) + 2 = 4
8. Demonstração
9. Dica: substituir b por 2k + 1.
10. 30
11. Demonstração
12. a) x
    b) b – 2
    c) x – 1
    d) a + 2
13. a) $48x^6y^4z^3$
    b) $(a-b)^2 \,.\, (a+b)$
    c) $a^2(x-1)^2 \,.\, (x+1)$
    d) $2(x+1)^2 \,.\, (x-1) \,.\, (2x+1)$
14. 36 e 48, 12 e 144, 24 e 72
15. 235
16. 87
17. MDC = 294
18. 98
19. x = 9.461
20. A 21. 246 22. 6 23. 6
24. xy está entre 0 e x.
25. Não existem.
26. 10
27. B
28. I e II são verdadeiras.
29. D 30. E 31. zero
32. Demonstração
33. $a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^4 - 5a^2 + 4) = a(a^2 - 4)\,(a^2 - 1) =$
    $= a(a-2)\,(a+2)\,(a-1)\,(a+1) = (a-2)\,(a-1) =$
    $= a\,(a+1)\,(a+2)$
    Temos o produto de 5 números inteiros consecutivos, logo é múltiplo de 5.
    Temos o produto de 4 números inteiros consecutivos, logo é múltiplo de 4.
    Analogamente para 3 e 2. Assim, a expressão é divisível por 5 . 4 . 3 . 2 = 120.
34. $(a^2 - 1) = (a-1)\,(a+1)$.
    a não é divisível por 2
    $a = 2k + 1;\ k \in \mathbb{Z}$
    a não é divisível por 3
    $a = 3k + 1;\ 3k' + 2;\ k' \in \mathbb{Z}$
    Assim:
    $(a^2 - 1) = (a-1)\,(a+1) = 2k(2k+2) =$
    $= 4k(k+1)$ divisível por 8
    $(a^2 - 1) = (a-1)\,(a+1) = 3k'(3k'+2) =$
    $= (3k'+1)\,(3k'+3)$ divisível por 3
    Temos que a expressão é divisível por 24.
35. $m \in \{34; 27; 25; 0; 7; 9\}$
36. 12 páginas
37. $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b) =$ múltiplo de 9.
38. E

3 Fatoração

Revisando

1. a) $x^2 - 4xy + 4y^2$
   b) $1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4$
2. a) $(a^2 - 6a + 13) \,.\, (a^2 + 6a + 13)$
   b) $(a^2 + b^2 - ab) \,.\, (a^2 + b^2 + ab) \,.\, (a^2 - b^2 + 1)$
   c) $(x^2 + 2y^2 - 2xy) \,.\, (x^2 + 2y^2 + 2xy)$
   d) $(a-1) \,.\, (a+1) \,.\, (a-5)$
   e) $(a-1) \,.\, (a^2 + a + 1) \,.\, (a^2 + 1)$
   f) $(x-y)^2 \,.\, (x+y) \,.\, (x^2 + y^2)$
   g) $(a^2 + a\sqrt{6} + 3) \,.\, (a^2 - a\sqrt{6} + 3)$
   h) $(a^2 + 1) \,.\, (a^2 + a\sqrt{3} + 1) \,.\, (a^2 - a\sqrt{3} + 1)$
3. a) $(1 + x + 2x^2) \,.\, (1 + x - 2x^2)$
   b) $(x-y) \,.\, (x+y) \,.\, (x^2 + y^2)$
4. a) $(x+6) \,.\, (x+2)$
   b) $(x+2a) \,.\, (x+a)$
5. 2 6. $a^3 - 3a$ 7. 331

Exercícios propostos

1. a) $x^2y^2(y-x)$
   b) $(8z-3) \,.\, (x-y)$
   c) $(a-b) \,.\, (2b-3c) \to (a-y) \,.\, (2b-3c)$
   d) $(x^2+1) \,.\, (x+1)$
2. a) $(a+b+c) \,.\, (a+b-c)$
   b) $(a+b+1) \,.\, (a+b-1)$
   c) $(2a^2 + a - 1) \,.\, (2a^2 - a + 1)$
   d) $(x+1)^2 \,.\, (x-1)$
3. $(x-2)(x+2)(x+1)$
4. $-4xy$
5. $2x(x+3) \,.\, (x+2)$
6. $-\frac{41}{25}$
7. $-\frac{198}{125}$
8. 0,25
9. $x^2y^2(x^2 + y^2 + x^2y^2)$
10. x – 2
11. a – b
12. $\frac{1}{x-3}$
13. 1
14. 2ab(3b – a)
15. C
16. $\frac{17 + 8\sqrt{2}}{7}$
17. $x + 3 + \sqrt{3x}$
18. $\sqrt{2} - 1$
19. $\sqrt{2}(x-2)$
20. B
21. $\frac{25}{4}$

Exercícios complementares

1. a) $(x^2 + y^2) \,.\, (x-y) \,.\, (x+y)$
   b) $(a+b+c) \,.\, (a+b-c)$
   c) $(2a - 7b^m) \,.\, (2a + 7b^m)$
   d) $(4x-1) \,.\, (7-2x)$
2. a) $3(x-y)^2$
   b) $(x-y-6) \,.\, (x-y+4)$
   c) $(a+b) \,.\, (b-c)$
   d) $(x-1) \,.\, (x^3 - x^2 - 8)$
   e) $(2a-3b+5) \,.\, (2a-3b-5)$

f) Dica: $2x^2 + 5x - 3 \equiv 2x^2 + 6x - x - 3$
Resposta: $(2x - 1) . (x + 3)$
g) $(9x - y^8) . (9x + y^8)$
h) $(1 - y) . (x - y - 1)$
3. $(c - a + b) . (c + a - b) . (a + b + c) . (a + b - c)$
4. $4x$
5. zero
6. $(a + b) . (c - a) . (b + c)$
7. $(x + 2y)\ (x^2 + xy + y^2)$
8. $(a - c) . (c - b) . (a - b)$
9. $(a + b) . (a + c) . (b + c)$
10. $(a+2).(a+6).(a^2+8a+10)$
11. $(a^2+1+a).(a^2+1-a).(a^2+1-a\sqrt{3}).(a^2+1+a\sqrt{3})$
12. Demonstração
13. a) $(x - 2) . (x^2 + 2x + 4)$
b) $(x - y) . (x + y) . (x^2 + xy + y^2) . (x^2 - xy + y^2)$
c) $9(m + 1) . (m^2 + m + 1)$
d) $(a^m + 1) . (a^{2m} - a^m + 1)$
14. zero
15. $4ax(bx - 1) . (bx + 1)$
16. $\dfrac{a+b+c}{a-b+c}$
17. 2^{28} 18. D 19. D 20. $4x^3$
21. a) $(a^2 + 1 + a) . (a^2 + 1 - a)$
b) $(1 + x - y) . (1 - x + y)$
c) $(x + y + 1) . (x + y - 1) . (x - y + 3) . (x - y - 3)$
d) $(a - 2b - 2c) . (a - 2b + 2c)$
e) $(ab - 1) . (ab + 1 - a - b)$
f) $(x + y - z) . (x - y + z + 1)$
g) $(x + y) . (x - y + 1) . (x - y - 1)$
h) $(a + 1) . (a^2 + 1 + a) . (a^2 + 1 - a)$
22. 2
23. – 32
24. $z(x - y)$
25. Demonstração
26. $(x + y + z) . (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$
27. B 28. C
29. A expressão vale 4.

4 Problemas de 1º e 2º graus

Revisando
1. Diofonte viveu 84 anos.
2. 18 minutos
3. 12

Exercícios propostos
1. 48 2. 10 3. 16 4. 14h24
5. 8 notas de R$ 5,00 e 13 notas de R$ 1,00
6. A = 25 anos e B = 10 anos
7. 98
8. R$ 720,00
9. a) 160 g
b) 295 g
10. a) R$ 1,60
b) 50; 120 e 130 melões
11. R$ 414,30
12. R$ 6.000,00
13. D 15. –2 ou 5 17. 0 ou 5
14. C 16. 14
18. 3 ou $-\dfrac{1}{3}$
19. 80 21. 54 h e 27 h 23. C
20. 5 anos 22. 27 e 5
24. 3h16min $21\dfrac{9}{11}$s
25. 400 mL
26. 95
27. João tem 7 discos e José, 5 discos.
28. 18 30. E
29. D

Exercícios complementares
1. 17 galinhas e 4 carneiros.
2. 15 e 25, respectivamente.
3. João nunca terá $\dfrac{1}{4}$ da idade de Pedro.
4. O pai tem 44 anos e o filho, 22 anos.
5. 1.225
6. R$ 200,00
7. 25
8. 4
9. Pedro R$ 30.000,00 e João R$ 42.000,00.
10. a) 7
b) R$ 8,00
11. R$ 302,00; R$ 1.208,00; R$ 594,00 e R$ 614,00
12. 40 13. B 14. B 15. 6 anos
16. a) 3 minutos
b) 3 gatos
17. 7,9
18. D
19. R$ 200.000,00
20. C 21. B 22. D
23. 15 e 16
24. 4 e 5
25. $\dfrac{3}{5}$
26. 35
27. 30
28. 10 anos
29. 3; 5 e 7
30. 12 dias e 20 km
31. 10 e 9 km/h
32. 6 km/h
33. 24 km/h
34. 12 e R$ 150,00
35. 5 37. 8 e 4 39. 5 41. A
36. 5 e 2 38. 4 e 7 40. A
42. 1ª torneira enche em 37 min e 30 s e a 2ª em 25 min.
43. 4 45. 30 e 6 47. 5 km/h
44. 720 46. 30 min 48. 12 km/h
49. 4h54min $32\dfrac{9}{11}$s
50. 300 53. 48 m² 56. 20
51. 96 54. 36 57. 22
52. 32 55. 369 58. A
59. 14 altas e magras; 3 baixas e magras
60. 1º de janeiro
61. 22 e 24
62. 75%
63. 3.535 selos
64. 26 metros; 31 horas
65. $\dfrac{133}{60}$
66. C 68. A 70. B
67. E 69. 1.806

5 Porcentagem

Revisando
1. 50 homens. 4. R$ 100,00
2. 6 kg de cobre. 5. 27,1%
3. R$ 120,00 6. 33,1%

Exercícios propostos
1. 98
2. 3,3
3. a) 17.600 b) 55.000
4. E
5. A
6. $\dfrac{10}{3}$ kg
7. C
8. 50 L
9. F; V; F; V; V
10. C
11. F; V; V
12. D 13. C 14. B
15. $\dfrac{5C}{6}$ reais
16. C
17. $100[(1,1)^{12} - 1]\%$
18. C
19. R$ 180,00
20. R$ 100.000,00
21. B
22. a) R$ 46.137,00 b) R$ 21.000,00
23. 12% ao ano
24. R$ 72.000,00 26. R$ 20,00
25. R$ 150,00 27. R$ 17,00
28. D 29. D 30. E 31. D

Exercícios complementares
1. 45 dias
2. 30 meses
3. R$ 3.500,00
4. a) 800 + 10X
b) É preferível um aumento de 20% (de 5% para 6%) na taxa de comissão.
5. C
6. E
7. R$ 6.000,00
8. E
9. É mais vantajoso à vista, já que o preço será menor.
10. E
11. A
12. a) É mais vantajoso à vista, já que a aplicação renderá menos.
b) x = 10%, pois esse valor iguala os rendimentos.
13. a 15. E 17. D
14. 3.600 λ 16. B 18. 5%
19. a) zero e R$ 150,00
b) Para rendas maiores ou iguais a R$ 3.000,00, a alíquota será de 27,5%. A parcela a deduzir para a alíquota de 20% será de R$ 250,00.
20. $\dfrac{10.000}{10.000 - p^2}$
21. R$ 0,72
22. C

Frente 3

1 Conceitos básicos

Revisando
1. $\dfrac{a+b}{2}$
2. $\dfrac{a-b}{2}$
3. 1ª possibilidade: $\overline{MN} = 20$ cm
2ª possibilidade: $\overline{MN} = 10$ cm
4. $\overline{AC} = 10$ cm; $\overline{BC} = 15$ cm

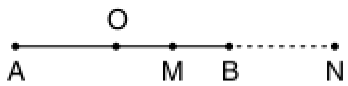
Exercícios propostos
1. a) 42 b) 24 c) $\dfrac{38}{3}$
2. 9 cm
3. 4 cm
4. 14
5. 21
6. 70 cm
7. Demonstração
8. Demonstração
9. Demonstração

Textos complementares

1. Temos 2 respostas para a situação apresentada:

   Razão $\frac{3}{4}$: $\overline{NA} = 63$ cm, $\overline{AM} = 9$ cm e $\overline{MB} = 12$ cm.

   Razão $\frac{5}{4}$: $\overline{NA} = 105$ cm, $\overline{AM} = \frac{35}{3}$ cm e $\overline{MB} = \frac{28}{3}$ cm

2. 

   $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \therefore \frac{\overline{AO}+\overline{OM}}{\overline{AO}-\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}+\overline{ON}}{\overline{ON}-\overline{AO}} \Rightarrow$

   $\Rightarrow \overline{AO}^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$

3. A razão da divisão harmônica recíproca é $\frac{\overline{MB}}{\overline{NB}} = \frac{x}{y} = \frac{K-1}{K+1}$
4. $b.b' = 2(c'a + ca')$

Exercícios complementares

1. 5 cm; 9,5 cm
2. 24 cm; 8 cm e 4 cm
3. Demonstração
4. F; F; V; F; V
5. Demonstração
6. Existem 2 possibilidades
   1ª) Q está entre P e R
   PQ = 30 cm e QR = 10 cm
   2ª) R está entre P e Q
   PQ = 60 cm e QR = 20 cm
7. Demonstração
8. Demonstração
9. 8 cm ou 32 cm
10. AB = 35 cm e BC = 7 cm
11. 36 cm ou 45 cm ou 20 cm
12. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
13. $AB = C\frac{(a+b)}{(a-b)}$
14. $\frac{MO}{MO'} = \frac{M'O}{M'O'} = \frac{5}{3}$

2 Ângulos

Revisando

1. $x = 62°$
2. O menor ângulo é 56°.
3. O ângulo formado é de 135°.

Exercícios propostos

1. 144°
2. 22°17'43", 112°17'43" e 292°17'43", respectivamente.
3. 40°, 60°, 100° e 160°
4. 59°, 60° e 61°
5. $x = 2$
6. 45° 20"
7. 30°
8. 54°
9. 18° e 60°
10. $90° - 2b + a$
11. $110° + 2a - 3b$
12. 35°
13. $X\hat{O}A = B\hat{O}Y = 80°$ e $A\hat{O}B = 20°$
14. $x = 18°$ e $y = 42°$
15. Demonstração
16. Demonstração
17. 9°
18. Demonstração
19. Demonstração
20. Demonstração
21. 111°
22. C
23. 12h20
24. 13h05min27s

Exercícios complementares

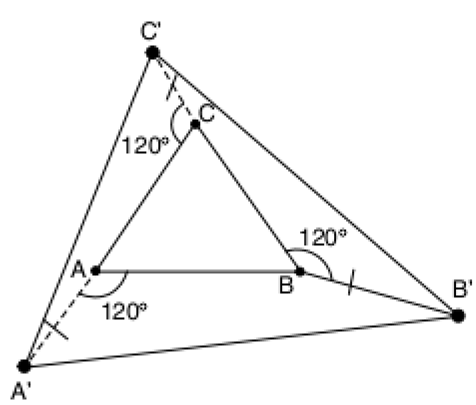
1. 45°
2. 105°, 115° e 65°
3. 165°
4. 4h $5\frac{5}{11}$min e 4h $38\frac{2}{11}$min
5. 60°
6. 45° e 60°
7. 90°
8. Demonstração
9. $A\hat{O}C = 100°$, $C\hat{O}D = 30°$ e $D\hat{O}B = 50°$.
10. $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são semirretas opostas.
11. 52 gr, 102 gr e 46 gr
12. $\theta = \frac{3\hat{b}+\hat{a}}{2}$
13. $x = 6°$

3 Triângulos

Revisando

1. Como $x \in \mathbb{Z}$, temos $x \in \{5; 6; 7; 9; 10; 11\}$
2. $\Delta AEC \equiv \Delta ADB(ALA) \Rightarrow \overline{EC} = \overline{BD}$
3. AB = 10

Exercícios propostos

1. $7 < \overline{AC} < 23$
2. $\overline{AC} = 12$ cm
3. 38 cm
4. Não, pois:
   $18 - 8 < 5 < 18 + 8 \therefore 10 < 5 < 26$ (falso)
5. Pela desigualdade triangular, temos:
   $a < b + c \Rightarrow a + a < a + b + c$
   $2a < 2p \therefore a < p$ (c.q.d.).
6. D
7. $x = 50°$ e $y = 15$
8. Isósceles
9. F; V; F; V; V; F; F; F
10. T_3 e T_5 (LAL)
    T_2 e T_7 (LAL)
    T_1 e T_8 (LAL)
    T_6 e T_{10} (LLL)
    T_4 e T_{11} (ALA)
    T_9 e T_{12} (LAAo)
11. B
12. 

    $\Delta AB'C' \equiv \Delta BC'B' \equiv \Delta CA'C''(LAL) \Rightarrow$
    $\Rightarrow C'A' = A'B' = B'C' \Rightarrow \Delta A'B'C'$
    é equilátero
13. Isósceles
14. Isósceles
15. Demonstração
16. $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $O\hat{A}C = O\hat{B}C$
17. Demonstração
18. Isósceles
19. 1

Exercícios complementares

1. Demonstração
2. Demonstração
3. $-5 < K < -2$ ou $2 < K < 5$
4. $\frac{6}{5} < x < \frac{26}{3}$
5. (6; 6; 2); (6; 5; 3); (6; 4; 4) e (5; 5; 4)
6. 17 cm
7. Demonstração
8. AMC e DMB; AMB e DMC; ABD e DCA; BDC e CAB
9. 1
10. 1
11. $\overline{MD} = \overline{ME}$; AMD = AME
12. O ponto O é a interseção das mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
13. Isósceles
14. 60° e 120°
15. ABC e BDC; ABH e DBH; CAH e CDH
16. $\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$
17. Demonstração
18. Demonstração
19. Demonstração
20. Demonstração
21. Demonstração

4 Ângulos no triângulo

Revisando

1. a) $x = 50°$
   b) $x = 20°$ e $y = 120°$
2. a) $x = 120°$
   b) $x = 60°$
3. O maior dos ângulos agudos é 55°.

Exercícios propostos

1. $x = 30°$, $y = 150°$ e $z = 30°$
2. 150°
3. 92°
4. Demonstração
5. a) $x = 10°$ e $y = 160°$
   b) $x = 125°$
   c) $x = 100°$
   d) $x = 72°$
   e) $x = 52°$
   f) $x = 45°$ e $y = 60°$
6. $\hat{3} = 100°$
7. $x = 108°$
8. Demonstração
9. 58°
10. Demonstração
11. 100°
12. 30°
13. 20°
14. 36°
15. V; V; V
16. $x = 50$; $y = 90$
17. É equilátero
18. 120°
19. 70°
20. 70°
21. 48°
22. $x = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$
23. $x = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$
24. $x = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$
25. $x = 90° - \frac{\hat{A}}{2}$
26. $\frac{1}{3}$
27. $\alpha - \beta = 18°$
28. $A\hat{B}C = 20°$
29. $\alpha = 36°$
30. Demonstração
31. $\alpha = 90°$
32. $\hat{C} = 59°$
33. 80°
34. 4 e 5
35. $D\hat{E}C = 40°$ e $A\hat{D}B = 60°$
36. 20° ou 30°
37. $\alpha + \beta = 130°$
38. $\hat{A} = 2\alpha$
39. Demonstração
40. Demonstração
41. Demonstração

Exercícios complementares

1. Demonstração
2. Demonstração
3. Os ângulos agudos valem 31° e 59°.
4. D
5. B
6. $x = 2(a + b)$ e $y = 3a + b$
7. $\alpha = 15°$ e $\beta = 25°$
8. 15°
9. $x = 55°$
10. 100°
11. a) 30°

    b) Sendo q a medida, em graus de um dos ângulos formados pelas bissetrizes CE e DE dos ângulos a e b, no triângulo ECD, de acordo com o teorema do ângulo externo, tem-se:

    $$q = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow q = \left(\frac{a + b}{2}\right) \Leftrightarrow$$

    $$q = \frac{180°}{2} \Leftrightarrow q = 90°$$

    $C\hat{E}D$ é ângulo reto.
12. D
13. 180°
14. $x = \frac{\alpha}{2}$
15. Demonstração
16. 55° e 35°
17. Demonstração
18. Demonstração
19. Demonstração
20. 15°; 65° e 100°
21. Demonstração
22. Demonstração
23. a) $A + B = 120°$ e $C + D = 240°$

    b) $JM = 1$ e $JN = 1$

    c) $MJN = 60°$
24. $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2x}{x} = 2$
25. $x = 36°$
26. 360°
27. 75°
28. 45°
29. $x = 10°$
30. $\alpha = 30°$
31. 30°

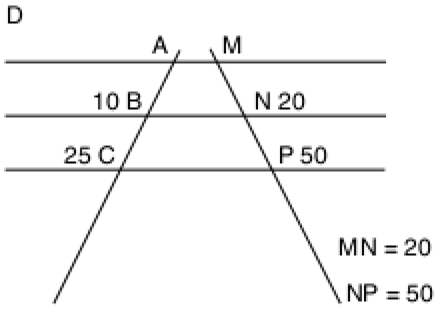
5 Segmentos proporcionais

Revisando

1. MN = 12 cm, NP = 20 cm e PQ = 28 cm.
2. O perímetro é igual a 44 cm.
3. 60 m e 80 m.
4. O perímetro é de 32 cm.

Exercícios propostos

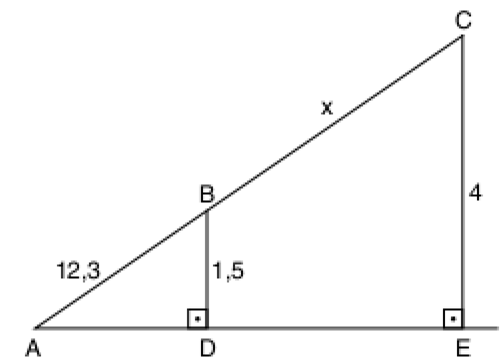
1. $x = 9$
2. As medidas dos segmentos são 8 cm e 2 cm.
3. AB' = 2,6 cm; B'C' = 3,9 cm; C'D' = 6,5 cm.
4. D
5.



6. 6; 16; 18
7. 15 cm e 20 cm
8. $\frac{2}{3}$
9. 12 cm
10. 5 cm
11. 9,6 cm
12. a) 5 b) 36
13. $x = 3$; $y = 12$
14. $x = 14$; $y = 8$
15. As medidas dos lados do triângulo são 27 cm; 33 cm e 45 cm.
16. D
17. D
18. A
19. D
20. A
21. B
22. B
23. a) $\frac{3}{2}$ b) $x = 3$; $y = 2{,}4$; $z = 6$
24. C
25. D
26. B
27. A
28. E
29. D
30. D
31. $x = \frac{b^2}{a - b}$
32. $x = 4$
33. $x = \frac{ab}{a + b}$
34. 21,6 cm
35. 9 m
36. B
37. 2,5 km

Exercícios complementares

1. 4,08
2. A
3. A
4. 24
5. a)



   b) 20,5
6. A
7. $h = \left(\frac{3}{\ }\right)\sqrt{25 - x^2}$
8. E
9. B
10. $\frac{5}{3}$
11. E
12. $x = 6$ e $y = 10$
13. 16 cm
14. 6 cm; 8 cm
15. 2,1 m
16. 36 cm
17. 28 cm
18. 30 cm
19. $\frac{2}{5}$
20. $\frac{ac}{a + b}$; $\frac{ab}{a + b}$
21. Demonstração
22. AE = 12 cm e BE = 8 cm
23. $\frac{60}{11}$ cm
24. $CG = \frac{2a(2\sqrt{3} - 1)}{11}$
25. a) $2\sqrt{3}$ u área

    b) $6\sqrt{3}$ u comprimento
26. a) O ângulo PMA é congruente ao ângulo QMB (OPV). O ângulo A é congruente ao ângulo B (retos).

    $AM = MB = \frac{1}{2}$. Pelo postulado ALA $\rightarrow \Delta PAM$ é congruente ao ΔQBM.

    Como o segmento MN é paralelo ao segmento AD e o segmento AD é perpendicular ao plano, contendo os pontos A, P, M e Q, conclui-se que o segmento MN é perpendicular ao segmento PQ. Como PM = MQ, MN é a mediatriz do segmento PQ, do qual PN = QN, ou seja, o triângulo PQN é isósceles.

    b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
27. a) $\ell = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$

    b) Pelo teorema dos cossenos, temos:
    $\ell^2 = 1^2 + 1^2 - 2 . 1 . 1 . \cos 36°$, substituindo o valor de ℓ do item a, temos: $\cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.
28. D
29. 13 m
30. $MC = \frac{\sqrt{3}}{3}$
31. a) $y = \frac{2}{3}(30 - x)$

    b) Para x = 15 metros, y = 10 metros.
32. E
33. $\frac{2abc}{ab + ac + bc}$

6 Pontos notáveis do triângulo

Revisando

1. $x = 5$, $y = 8$ e $z = 5$
2. $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 80°$
3. Demonstração
4. $\frac{a + b + c}{3}$

Exercícios propostos

1. $x = 4$ e $y = 6$
2. $\frac{a}{3}$
3. $\frac{3a - 2b}{6}$
4. $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ e $\frac{c}{3}$
5. D
6. V; V; V; V; F; F; F
7. a) equilátero

   b) equilátero

   c) retângulo

   d) obtusângulo

   e) obtusângulo

   f) retângulo

   g) acutângulo
8. $x + y$
9. 70°
10. 41

Exercícios complementares

1. E
2. 48
3. $r = \frac{b + c - a}{2}$
4. 18 cm
5. a) AM = 10 cm b) 25°
6. 140°
7. 20°, 20° e 140°
8. Isósceles
9. $AO = \frac{(\sqrt{3})}{3}$ cm
10. 12
11. $R = \frac{r(2\sqrt{3} + 3)}{3}$
12. A
13. $\overline{EC} = \frac{a}{2}$
14. 60°
15. Demonstração
16. O incentro e o baricentro de um triângulo qualquer estão localizados no seu interior. O ortocentro no triângulo retângulo é o vértice de seu ângulo reto. No caso do triângulo obtusângulo, ele será exterior ao triângulo. O circuncentro no triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa. No caso do triângulo obtusângulo, ele será exterior. No triângulo equilátero, todos os pontos notáveis serão coincidentes.
17. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$
18. $\frac{bd}{a}$
19. $\overline{OI} = \left|\frac{2ac}{2a + b} - \frac{a^2}{2c}\right|$