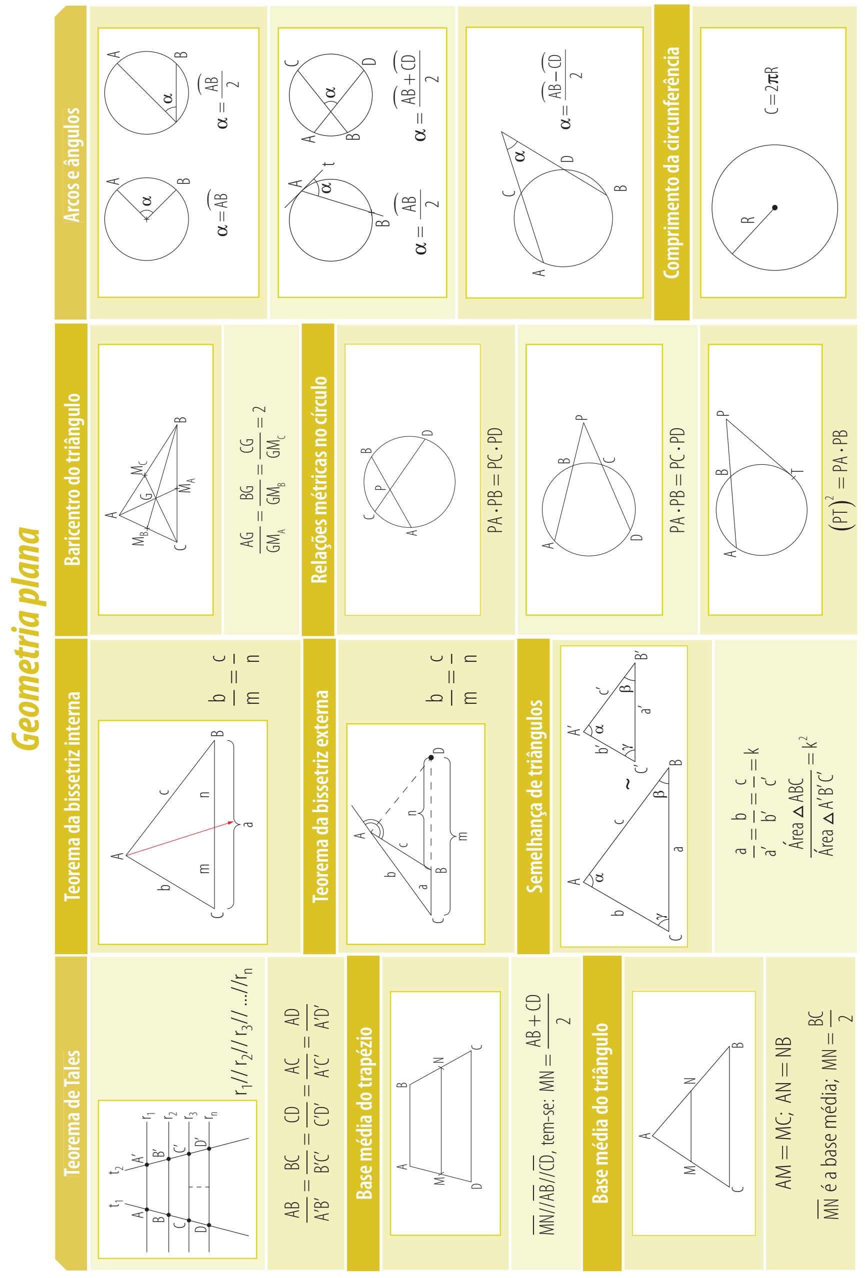
Matemática

Geometria plana



Polígonos convexos

Sendo:
n = número de lados
d = número de diagonais
S_i = soma dos ângulos internos
S_e = soma dos ângulos externos

Tem-se:
$$d=\frac{n(n-3)}{2}$$
$S_i = (n-2)\cdot 180°$
$S_e = 360°$

Áreas

Triângulos

$$\text{área}=\frac{bh}{2}$$

$$\text{área}=\frac{\ell^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{área}=\frac{1}{2}ab\cdot\text{sen}\,\alpha$$

$$\text{área}=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},$$ em que $p=\frac{a+b+c}{2}$

área $= pr$, em que $p=\frac{a+b+c}{2}$

$$\text{área}=\frac{abc}{4R}$$

Retângulo

área $= b\cdot h$

Quadrado

área $= a^2$

Losango

$$\text{área}=\frac{D\cdot d}{2}$$

Paralelogramo

área $= b\cdot h$

Círculo

área $= \pi R^2$

Trapézio

$$\text{área}=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Setor circular

$$\text{área}=\frac{\alpha\cdot\pi\cdot R^2}{360°},\ \alpha \text{ em graus}$$

$$\text{área}=\frac{\alpha\cdot R^2}{2},\ \alpha \text{ em radianos}$$

$$\text{área}=\frac{\ell\cdot R}{2}$$

Geometria espacial

Sólidos

Cubo

área $= 6a^2$
Volume $= a^3$
Diagonal $= d = a\sqrt{3}$

Cilindro

$A_\ell = 2\pi Rh$

Volume $= \pi R^2\cdot h$

Paralelepípedo reto-retângulo

área $= 2(ab + ac + bc)$
Volume $= a\cdot b\cdot c$
Diagonal $= d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Pirâmide

Volume $= \frac{1}{3}A_B\cdot h$,
em que A_B = área da base

Prisma

Volume $= A_B\cdot h$,
em que A_B = área da base

Cone

área lateral $= \pi Rg$

$$\text{Volume}=\frac{\pi R^2\cdot h}{3}\qquad \theta=\frac{360°\cdot R}{g}$$

Esfera

área $= 4\pi R^2$

$$\text{volume}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Poliedros convexos

Relação de Euler

Sendo:
V = nº de vértices
A = nº de arestas
F = nº de faces

Tem-se:
$V - A + F = 2$

Geometria analítica

Equações da reta

Equação geral da reta: $ax + by + c = 0$

Equação reduzida da reta: $y = mx + n$

Feixes de retas

Por $(x_0; y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$
Paralelas: $y = mx + n$, m fixo e $n \in \mathbb{R}$

Posições relativas entre retas

$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$

$r \perp s \Leftrightarrow m_r\cdot m_s = -1$

Ângulo entre retas

$$\text{tg}\,\theta=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s\cdot m_r}\right|$$

Distâncias

Entre dois pontos: $d_{A;B}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Entre ponto e reta: $d_{P;r}=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Baricentro do triângulo ABC

$$G=\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Condição de alinhamento para três pontos

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$$

Área do triângulo ABC

$$\text{área}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{matrix}\right\|$$

Equações da circunferência

Equação geral da circunferência:
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Equação reduzida da circunferência de centro (x_0, y_0):
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Números complexos

$i^2 = -1$

$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ \ldots$
$z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$

Conjugado de z

$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Módulo de z

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Forma trigonométrica de z

$z = |z|(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)$

Operações na forma trigonométrica

Sejam:
$$z=|z|(\cos\theta+i\cdot\text{sen}\,\theta)$$
$$z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\cdot\text{sen}\,\theta_1)$$
$$z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\cdot\text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\cdot\text{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

$$z^n=|z|^n\cdot[\cos(n\theta)+i\cdot\text{sen}(n\theta)],\ n\in\mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$
$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $0 \le k < n$

Matemática financeira básica

Porcentagem

$$x\% = \frac{x}{100}$$

$$x\% \text{ do total} = \frac{x}{100}\cdot\text{total}$$

Juros simples

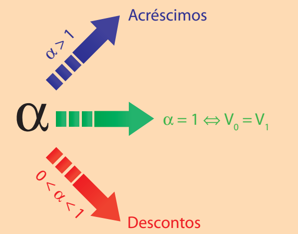
$J = C\cdot i\cdot t$
$M = C + J = C\cdot(1 + it)$

Juros compostos

$M = C\cdot(1 + i)^t$

Acréscimos e descontos

Valor inicial × fator de correção = Valor final
$V_0 \times \alpha = V_1$



Lucro e prejuízo

Lucro = Venda – Custo
Prejuízo = Custo – Venda

ISBN 978-85-7901-619-6

POLIEDRO SISTEMA DE ENSINO

Potenciação e radiciação

Potenciação

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ fatores}}$$

$a^0 = 1$

1. $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$
4. $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

Radiciação

$\sqrt[n]{b} = a \Rightarrow a^n = b$

1. $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
6. $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

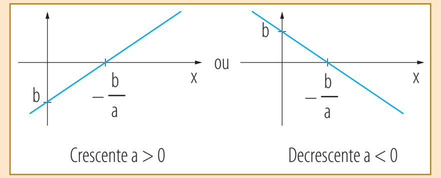
Produtos notáveis e fatoração

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot(ab + ac + bc)$

$ab + ac = a\cdot(b + c)$
$ab + ac + db + dc = a\cdot(b+c) + d\cdot(b+c) = (b+c)\cdot(a+d)$
$ax^2 + bx + c = a\cdot(x - a_1)\cdot(x - a_2)$, em que a_1 e a_2 são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$
$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Função do 1º grau

$f(x) = ax + b \qquad (a \neq 0)$



Função do 2º grau

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

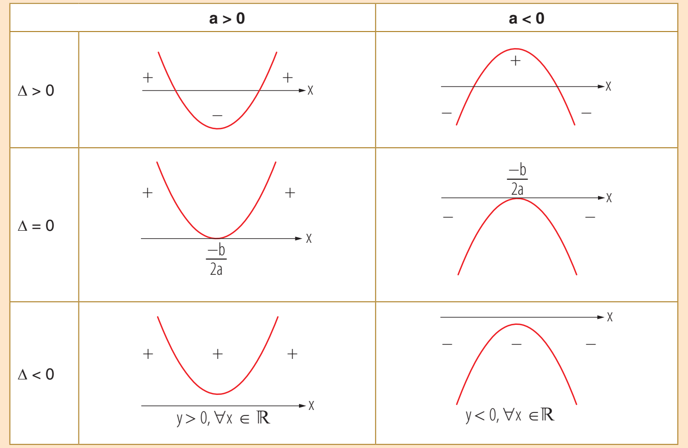
Raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Soma das raízes: $\frac{-b}{a}$

Produto das raízes: $\frac{c}{a}$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: duas raízes reais diferentes
- $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais
- $\Delta < 0$: $\nexists$ raízes reais



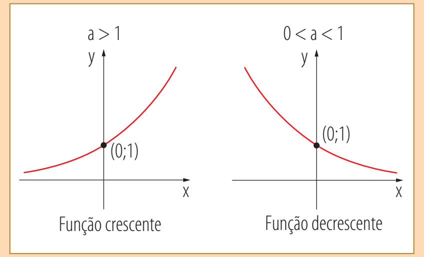
Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Imagem: $\left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \text{ se } a > 0 \text{ ou } y \leq \frac{-\Delta}{4a} \text{ se } a < 0 \right\}$ **Domínio:** $\mathbb{R}$

Função exponencial

$f(x) = a^x \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$

$Im_f = \mathbb{R}_+^* \quad D_f = \mathbb{R}$



- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- Se $a > 1$; $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Se $0 < a < 1$; $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Função logarítmica

$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x \ (a > 0 \text{ e } 0 < b \neq 1)$

$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b;\ a > 0, b > 0, 0 < c \neq 1$

$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;\ a > 0,\ b > 0,\ 0 < c \neq 1$

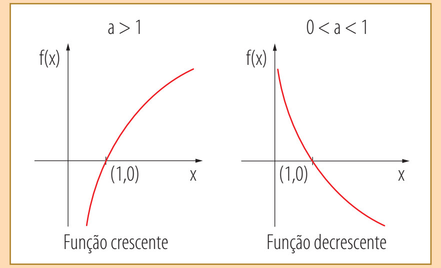
$\log_c a^m = m \cdot \log_c a;\ a > 0, 0 < c \neq 1 \text{ e } m \in \mathbb{R}$

$\log_{c^m} a = \frac{1}{m} \cdot \log_c a;\ a > 0,\ 0 < c \neq 1 \text{ e } m \in \mathbb{R}^*$

$\log_c a = \frac{\log_d a}{\log_d c};\ a > 0,\ 0 < c \neq 1 \text{ e } 0 < d \neq 1$

$f(x) = \log_a x \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$

$Im_f = \mathbb{R} \qquad D_f = \mathbb{R}_+^*$



PA e PG

PA

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n), n \in \mathbb{N}$
$a_n = a_{n-1} + r$

- PA (..., a, b, c, ...)
  $a + c = 2b$
- PA $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$
  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Soma dos n termos: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

PG

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n), n \in \mathbb{N}$
$a_n = a_{n-1} \cdot q$

- PG (..., a, b, c, ...)
  $a \cdot c = b^2$
- PG $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$
  $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots$

Termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q},\ -1 < q < 1$

Análise combinatória

Fatorial

$0! = 1;\ 1! = 1$
$n! = n \cdot (n-1)!,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$

Permutação

Simples: $P_n = n!$

Com repetição: $P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$

Arranjo

Simples: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Com repetição: $(AR)_{n,p} = n^p$

Combinação simples

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$

Estatística

Médias

$M_a = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

$M_{ap} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$

$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

$M_h = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)}$

$M_q = \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$

Moda

É o valor que ocorre com a maior frequência.

Mediana

É o valor central, ou a média aritmética dos dois valores centrais, do conjunto organizado em ordem crescente ou decrescente.

Amplitude total

É a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto.

Desvio médio

$\text{Desvio médio} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$

Desvio padrão

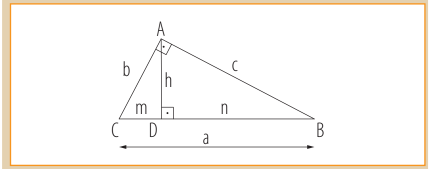
$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

Variância

s^2

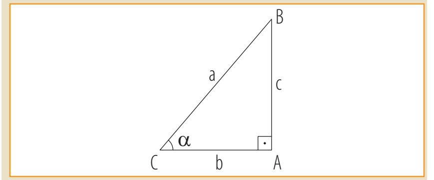
Trigonometria

Relações métricas no triângulo retângulo



$h^2 = m \cdot n$
$b^2 = a \cdot m$
$c^2 = a \cdot n$
$b \cdot c = a \cdot h$
$a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras)

Razões trigonométricas

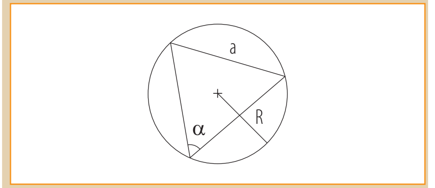


$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a}$

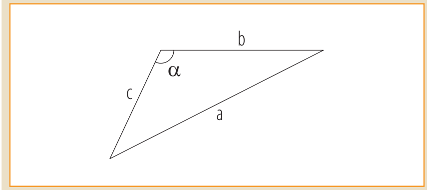
$\cos \alpha = \frac{b}{a}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b}$

Triângulo qualquer



$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2R$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

Valores notáveis

	seno	cosseno	tangente
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–

Relações fundamentais

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ (\forall x \in \mathbb{R})$

$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \ (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \ (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Consequências $\left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$

$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$

$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

Funções circulares inversas

$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$

$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Adição e subtração de arcos

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Arco duplo

$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \\ \text{ou} \\ 2\cos^2 a - 1 \\ \text{ou} \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \end{cases}$

$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

Arco triplo

$\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$

Arco metade

$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Transformação em produto

$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$

$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$

$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$

$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$

Equações trigonométricas fundamentais

$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi$

$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$

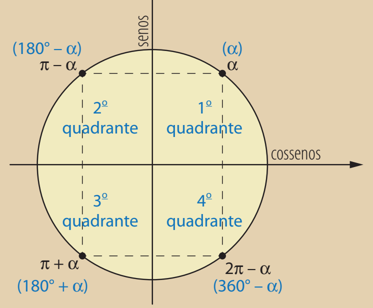
Simetrias no ciclo trigonométrico

$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$



$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha \end{cases}$