ÁREAS

Em geometria plana, como estudamos objetos formados em duas dimensões, é natural pensarmos na **área** que cada objeto ocupa. Esta área nada mais é do que a “quantidade” de superfície que determinado objeto plano possui. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de medida de área é o metro quadrado (m²).

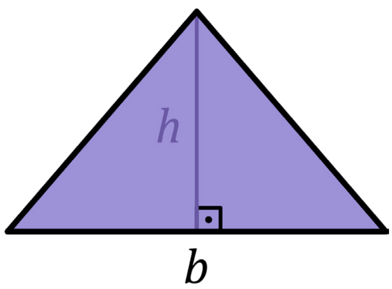
Observação: se em determinada ocasião as unidades de comprimento do objeto não estiverem especificadas, podemos colocar unidades de área (u.a) como sendo a unidade de superfície do objeto.

Vamos estudar como se calcula a área dos seguintes polígonos: triângulo, trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

ÁREAS E PERÍMETRO DO TRIÂNGULO

Em geometria plana um triângulo qualquer possui **cinco** modos distintos de se calcular sua área. Veremos esses modos a seguir.

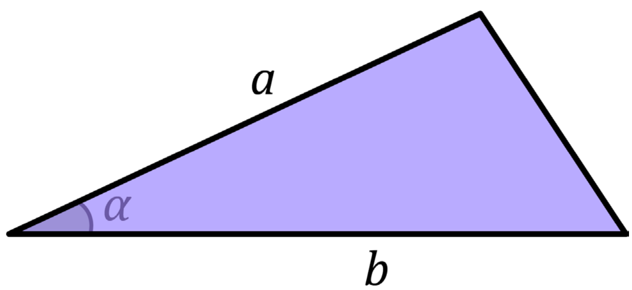
1. Área de um triângulo com base b e altura h conhecida.



Para o triângulo mostrado na figura acima, sua área é calculada pelo produto da base média com a altura:

$$A = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$$

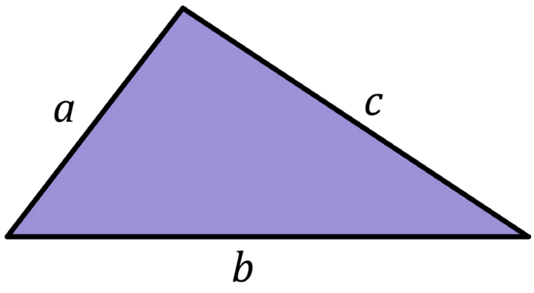
2. Área de um triângulo com ângulo α e lados adjacentes conhecidos.



Se conhecemos um dos ângulos de um triângulo, como mostrado acima e também seus lados adjacentes, sua área é calculada conforme abaixo:

$$A = \frac{1}{2}a.b.sen\ \alpha$$

3. Área de um triângulo com os três lados conhecidos.



Para o triângulo qualquer que conhecemos a medida de seus três lados, antes de calcularmos sua área, fazemos um cálculo intermediário para determinar seu semiperímetro p:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

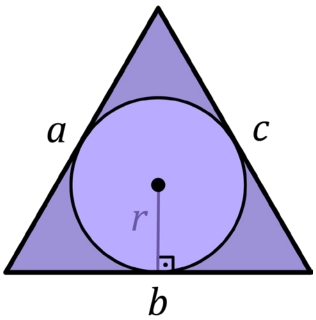
Com este valor determinado, é possível calcularmos sua área da seguinte forma:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Observações:

- A fórmula acima para cálculo da área é conhecida como **Fórmula de Heron**;
- Chamamos o semiperímetro de p, mas essa nomenclatura pode variar em diferentes bibliografias.

4. Área de um triângulo com perímetro e raio da circunferência inscrita conhecidos.

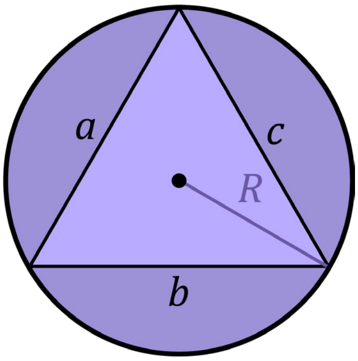


Neste caso, assim como no anterior, é necessário determinarmos seu semiperímetro p. Após este cálculo, descobrimos sua área através da fórmula abaixo:

$$A = p \cdot r$$

Em que r é o raio da circunferência inscrita ao triângulo.

5. Área de um triângulo com os três lados e o raio da circunferência circunscrita conhecidos.



Quando conhecemos o raio da circunferência circunscrita ao triângulo qualquer e as medidas dos lados do triângulo, determinamos sua área conforme abaixo:

$$A = \frac{a.b.c}{4R}$$

Lembre-se: o perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos seus lados. Assim, um triângulo de lados a, b e c possui perímetro igual a $2p=a+b+c$.

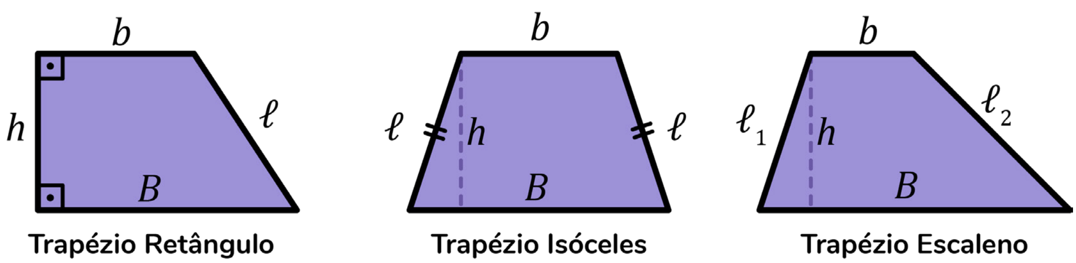
Observação: Chamamos o perímetro de $2p$, mas essa nomenclatura pode variar em diferentes bibliografias.

Agora que já aprendemos como se calcula a área de um triângulo, podemos prosseguir para nosso próximo objeto: o trapézio.

ÁREA E PERÍMETRO DO TRAPÉZIO

Em qualquer trapézio (retângulo, isósceles ou escaleno), sua área pode ser calculada como o produto da altura pela base média do trapézio:

$$A = h \cdot \frac{(b+B)}{2} = \frac{(b+B)\cdot h}{2}$$



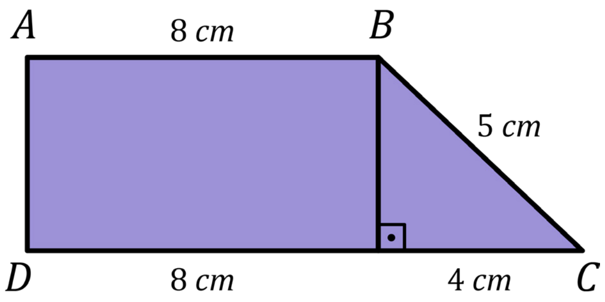
É possível calcular o perímetro do trapézio da seguinte forma:

- No trapézio retângulo: $2p = B + h + b + l$
- No trapézio isósceles: $2p = B + l + b + l$
- No trapézio escaleno: $2p = B + l_1 + b + l_2$

Vamos fixar ideias.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule a área do trapézio ABCD mostrado na figura abaixo.



Solução:

Para calcularmos a área de um trapézio retângulo, como o da figura acima, necessitamos do valor das bases e da altura. Já temos o valor das bases, nos resta apenas descobrir a altura. Observe que a altura do trapézio possui o mesmo comprimento de um dos catetos do triângulo retângulo mostrado na direita. Vamos utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir o valor deste cateto, que chamaremos de h:

$$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3\ cm$$

Com o valor do cateto (que é o mesmo valor da altura do trapézio), podemos determinar a área do trapézio:

$$A = \frac{(b + B)}{2} \cdot h$$

$$A = \frac{(8 + 12)}{2} \cdot 3$$

$$A = 10.3$$

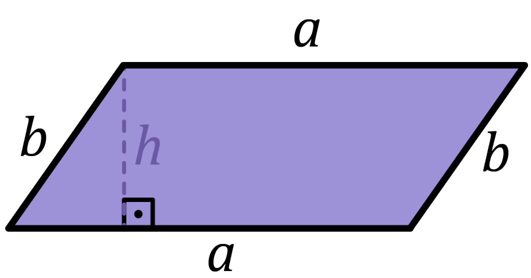
$$A = 30\ cm^2$$

Logo, a área do trapézio vale $30\ cm^2$.

Chegou a hora de falarmos sobre o paralelogramo.

ÁREA E PERÍMETRO DO PARALELOGRAMO

A seguir, temos um paralelogramo de altura h e lados a e b.



Sua área é calculada conforme descrito na seguinte equação:

$$A = a \cdot h$$

E o seu perímetro é calculado da seguinte forma:

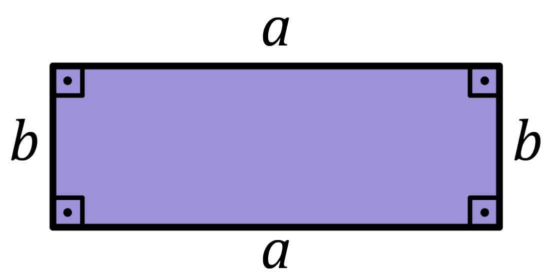
$$2p = 2a + 2b$$

Observação: perceba que podemos calcular a área do paralelogramo através de base média vezes altura, mas neste caso a base média vale $\frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

Agora, falaremos sobre os retângulos.

ÁREA E PERÍMETRO DO RETÂNGULO

Observe o retângulo ilustrado na figura abaixo.



Podemos calcular sua área de forma bem simples, através do produto de um lado pelo outro:

$$A = a \cdot b$$

E o seu perímetro é calculado da seguinte forma:

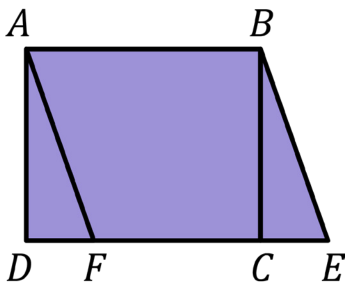
$$2p = 2a + 2b$$

Observação: perceba que podemos calcular a área do retângulo através de base média vezes altura, análogo ao paralelogramo.

Pratiquemos um pouco com o exemplo a seguir.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Na figura abaixo, o retângulo ABCD possui perímetro igual a 36 cm e área igual a 80 cm². Encontre a área do paralelogramo ABEF.



Solução:

Sabemos que para encontrar a área do paralelogramo usamos:

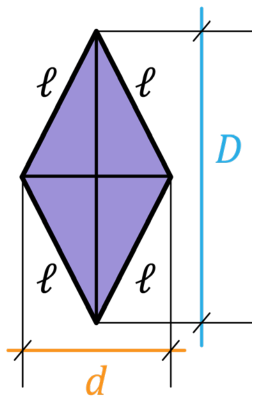
$$A = a \cdot h$$

Em que h é sua altura e a é o valor de sua base. No entanto, um dos lados do retângulo corresponde ao lado do paralelogramo. Ainda, a altura do paralelogramo é exatamente igual à altura do retângulo. Como o cálculo da área do retângulo é feito de forma semelhante ao do paralelogramo e a base e altura do retângulo correspondem ao do paralelogramo, as suas áreas vão ser iguais. Assim, a área do paralelogramo é igual a 80 cm².

Encerrado o estudo do retângulo, vamos ao losango.

ÁREA E PERÍMETRO DO LOSANGO

O losango da figura abaixo possui lado l e diagonais d e D.



Sua área é calculada pelo produto das diagonais dividido por dois:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

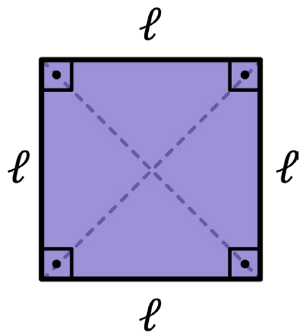
E o seu perímetro é calculado da seguinte forma:

$$2p = 4l$$

Por fim, chegamos ao quadrado.

ÁREA E PERÍMETRO DO QUADRADO

Observe o quadrado de lado l abaixo.



Sabemos que todo quadrado é um retângulo; logo, calculamos sua área de forma idêntica ao retângulo, ou seja, pelo produto de seus lados:

$$A = l^2$$

E o seu perímetro é calculado da seguinte forma:

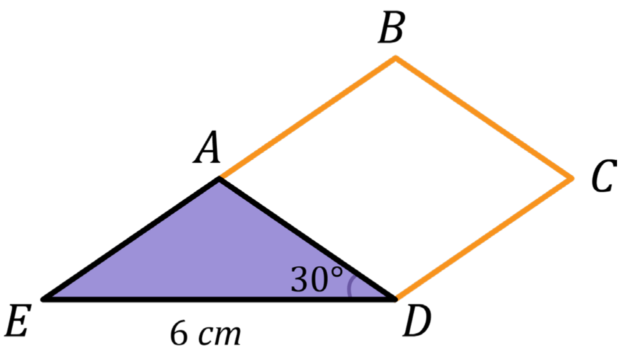
$$P = 4l$$

Observação: perceba que podemos calcular a área do quadrado através de base média vezes altura, análogo ao retângulo e ao paralelogramo.

Encerramos a apostila com o exemplo a seguir.

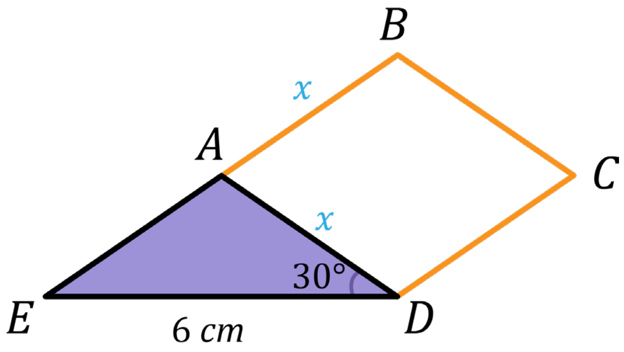
EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sabendo que a área do triângulo ΔADE é de 15 cm², calcule a área do quadrado ABCD.



Solução:

Para calcular a área do quadrado ABCD, necessitamos encontrar a medida do seu lado. Nota-se que um de seus lados coincide com o lado do triângulo adjacente ao ângulo conhecido, como mostrado na figura. Redesenhamos o problema conforme abaixo.



Já que temos o valor da área do triângulo, podemos utilizar a fórmula da área com ângulo conhecido para descobrirmos quanto mede o seu lado:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\ \alpha$$

$$15 = \frac{1}{2} 6 \cdot x \cdot sen\ 30°$$

$$15 = 3 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$x = 10\ cm$$

Agora, com o valor do lado do quadrado, calculamos sua área:

$$A = x^2$$

$$A = 10^2$$

$$A = 100\ cm^2$$

O valor da área do quadrado ABCD é de $100\ cm^2$.