Análise Combinatória - ENEM

1)Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 opções por questão?

Resolução:

Podemos dividir a decisão de escolher um gabarito, nas divisões mais simples de escolher a opção de cada uma questão. Portanto teremos:

Decisão 1: Primeira questão - 5 opções de gabarito.
Decisão 2: Segunda questão - 5 opções de gabarito.
.
.
.
Decisão 10: Décima questão: 5 opções de gabarito.

Pelo princípio multiplicativo, temos 5x5x5x5x5x5x5x5x5x5 = 5^10

Resposta: Temos 5^10 possíveis gabaritos.

2)Se um conjunto possui n elementos, quantos são os seus subconjuntos?

Resolução:

Se temos um conjunto com n elementos e queremos formar um subconjunto, basta lembrarmos que um subconjunto possui OU NÃO determinado elemento do conjunto que o contém. Então vamos representar o conjunto da seguinte forma:

A = {a1,a2,a3,a4,...,an}, onde n(A) = n.

O primeiro elemento pode estar OU NÃO no subconjunto, portanto para (a1) temos duas opções [estar ou não estar no subconjunto. O segundo elemento pode estar ou NÃO no subconjunto, portanto para (a2) temos duas opções, e assim por diante. Temos então:

Decisão 1: 2 opções.
Decisão 2: 2 opções.
Decisão 3: 2 opções.
.
.
.
Decisão n: 2 opções.

Pelo princípio multiplicativo, temos 2x2x2x2x2x2x...x2 = (2^n) opções.

Resposta: A quantidade de subconjuntos que podemos formar é (2^n).

3)De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras enfileiradas?

Resolução:

Vamos pensar essa questão sobre o ponto de vista das cadeiras: Temos 5 pessoas para sentar na primeira cadeira, 4 pessoas para sentar na segunda e 3 pessoas na terceira. Com isso temos, 5x4x3 = 60 modos diferentes de organizar essas pessoas.

Resposta: Três pessoas podem se sentar em 5 cadeiras enfileiradas de 60 modos diferentes.

4)De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, considerando-se que, em cada banco, deva haver um homem e uma mulher?

Resolução:

Podemos pensar em dividir o problema nos casos de escolher como ocuparemos cada banco de dois lugares.

primeiro lugar: 5 possibilidades de homem.
segundo lugar: 5 possibilidades de mulher.
terceiro lugar: 4 possibilidades de homem.
quarto lugar: 4 possibilidades de mulher.
quinto lugar: 3 possibilidades de homem.
sexto lugar: 3 possibilidades de mulher.
sétimo lugar: 2 possibilidades de homem.
oitavo lugar: 2 possibilidades de mulher.
nono lugar: 1 possibilidade de homem.
décimo lugar: 1 possibilidade de mulher.

Então, a princípio, temos:

5x5x4x4x3x3x2x2x1x1 = 14400

Mas, como cada casal pode ser permutado de 2! Formas (homem a esquerda e mulher a direita e vice-versa) temos que multiplicar o resultado por 2! para cada um dos 5 casais formados, daí:

14400x2!x2!x2!x2!x2! = 460800

Resposta: Podemos sentá-los de 460800 maneiras diferentes.

5)De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro de 8x8? E se os reis fossem iguais?

Resolução:

Primeiramente, se temos um tabuleiro de dimensões 8x8, ao todo temos 64 casas. Então poderíamos pensar [a princípio] em dividir o problema em dois casos, a escolha da casa em que estará o primeiro rei e a escolha da casa em que estará o segundo rei.

Para o primeiro rei temos 64 possibilidades [pois ele pode estar em qualquer casa]. E para o segundo rei? Quantas possibilidades temos? A resposta é depende! Depende da localização do primeiro rei.

Colocando o primeiro rei, por exemplo em um dos quatro cantos, o segundo rei não pode ser posto em quatro casas [três em torno do primeiro rei e uma sendo a própria casa onde está o primeiro rei]. Daí temos:

4x(64-4) = 4x60 = 240
[4 pois são quatro cantos.]
[(64-4) pois não podemos colocar o segundo rei em 4 casas.]

Colocando o primeiro rei, por exemplo na lateral [nas casas encostadas na parede do tabuleiro], sem contar com os 4 cantos, temos 24 possibilidades. Mas, ao colocar o primeiro rei na lateral do tabuleiro, NÃO podemos colocar o segundo rei de 6 formas diferentes [5 casas em volta e uma onde o primeiro rei está]. Daí temos:

24x(64-6) = 24x58 = 1392
[24 casas laterais para o 1º rei.]
[(64-6) casas restantes para o 2º rei.]

Colocando o primeiro rei em uma das 36 casas centrais [sem contar as laterais e os cantos], NÃO podemos colocar o segundo rei de 9 maneiras diferentes [8 casas em volta do primeiro rei e uma casa onde o primeiro rei está]. Daí temos:

36x(64-9) = 36x55 = 1980

Notemos que agora já cumprimos todas as possibilidades para o primeiro rei, ou seja, como ele pode estar OU em um dos 4 cantos, OU em uma das 24 casas laterais OU em uma das 36 casas centrais, temos: 4+24+36 = 64.

E, como pode ocorrer um caso OU o outro, vamos somar os resultados.

240+1392+1980 = 3612

Notemos também, que a todo momento tratamos do 1º e do 2º rei, ou seja, são reis distintos. Portanto essa solução será para a primeira resposta da questão.

Resposta 1) Se os reis forem diferentes, temos 3612 maneiras de colocá-los em casas não adjacentes de um tabuleiro 8x8.

Ao considerarmos os reis iguais, não estamos nos importando com a ordem deles, então temos que dividir o resultado anterior pela quantidade de maneiras de ordenar dois reis, no caso 2!. Daí ficamos com:

3612/(2!) = 3612/2 = 1806

Resposta 2) Se os reis forem iguais, temos 1806 formas diferentes de de colocá-los em casas não adjacentes de um tabuleiro 8x8.

6)De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8x8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

Resolução:

Podemos dividir o problema nos casos de escolher que casa de que coluna será ocupada por uma torre [qualquer, pois não estamos nos preocupando com a ordem das torres, já que primeiramente são iguais]. Daí temos:

Primeira coluna: 8 possibilidades

Segunda coluna: 7 possibilidades [pois não pode estar na mesma linha que a torre da primeira coluna.]

Terceira coluna: 6 possibilidades [pois não pode estar na mesma linha que a torre da primeira coluna e também não pode estar na mesma linha que a torre da segunda coluna].

.
.
.

Sétima coluna: 2 possibilidades.

Oitava coluna: 1 possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo temos:

8x7x6x5x4x3x2x1 = 8! = 40320

Resposta 1) Podemos colocar oito torres IGUAIS, nestas condições, de 40320 maneiras diferentes.

No caso das torres sendo diferentes, temos que levar em consideração a ordem de escolha das torres. Como podemos ordenar 8 torres de 8! formas, temos que multiplicar o resultado anterior por 8!

$8!x8! = (8!)^2$

Resposta 2)Se as torres fossem diferentes teríamos $(8!)^2$ de colocá-las no tabuleiro.

7)De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito, considerando-se que a primeira carta deva ser de copas e a segunda carta não deva ser um rei?

Resolução:

Devemos considerar dois casos:

A primeira carta é o rei de copas: O que nos dá 1 possibilidade para a primeira carta e, agora, restando 51 cartas para escolher, temos 48 possibilidades para a segunda carta não ser um rei.

1x48 = 48

A primeira carta é de copas mas não é o rei: O que nos dá 12 possibilidades para a primeira carta e, agora, tendo 51 cartas para escolher, temos 47 possibilidades para a segunda carta não ser um rei.

12x47 = 564

Total: 48 + 564 = 612

Resposta: 612

8)O conjunto A possui 4 elementos, e o conjunto B, 7. Quantas funções f:A -->B existem? Quantas delas são injetivas?

Resolução:

a)Devemos, para cada elemento de A, escolher sua imagem em B. Há 7 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de A, 7 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

A resposta é; 7x7x7x7 = 2 401

b)Agora, elementos diferentes devem ter imagens diferentes. Há 7 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de A, 6 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

A resposta é: 7x6x5x4 = 840

R: 2401 e 840

9)Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não puderem receber a mesma cor?

Resolução:

[Aqui, consideremos o primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes como no plano cartesiano, ou seja, contando o primeiro como o dos pontos de coordenadas positivas e girando no sentido anti-horário.]

A princípio, para o primeiro quadrante temos 5 possibilidades, para o segundo quadrante temos 4 possibilidades [não pode ser igual ao primeiro], para o terceiro quadrante 4 possibilidades [não pode ser igual ao segundo]. E para o quarto quadrante? Isso depende. Se o primeiro quadrante tiver a mesma cor que o terceiro, temos que excluir uma possibilidade. Já, se o terceiro quadrante tiver uma cor diferente do primeiro, temos que excluir duas possibilidades. Temos que dividir então em dois casos:

O primeiro quadrante com a cor igual à do terceiro:

Para o primeiro quadrante: 5 possibilidades.
Para o segundo quadrante: 4 possibilidades [diferente do primeiro].
Para o terceiro quadrante: 1 possibilidade [igual à do primeiro].
Para o quarto quadrante: 4 possibilidades [pois como o primeiro é igual ao terceiro, temos que excluir apenas uma possibilidade].

Total neste caso: 5x4x1x4 = 80

O primeiro quadrante com a cor diferente à do terceiro:

Para o primeiro quadrante: 5 possibilidades.
Para o segundo quadrante: 4 possibilidades [diferente do primeiro].
Para o terceiro quadrante: 3 possibilidades [diferente do segundo E DO PRIMEIRO].
Para o quarto quadrante: 3 possibilidades [diferente do primeiro e do terceiro].

Total neste caso; 5x4x3x3 = 180

Como ocorre um caso OU o outro, temos; 180 + 80 = 260.

R: 260

10)De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

a)Há 26x26x26x26x26 = 11881376 palavras de 5 letras. Delas devemos subtrair as palavras que começam por A, 1x26x26x26x26 = 456976, e aquelas nas quais a letra A não figura, 25x25x25x25x25 = 9765625.

A resposta é 11881376 - 456976 - 9765625 = 1658775.

b)Há 4 posições para colocar a letra A; depois disso, as quatro casas vazias podem ser preenchidas de 25,24,23 e 22 modos.

A resposta é 4x25x24x23x22 = 1214400

R: 1658775 e 1214400

11)As placas de veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas diferentes podem ser formadas?

Resolução:

Temos que escolher 3 letras, cada uma pode ser escolhida de 26 maneiras. Temos que escolher 4 números, cada um pode ser escolhido de 10 maneiras. Logo:

26x26x26x10x10x10 = 175760000

R: 175760000

12)Um vagão de metrô em 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de cosas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm referência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

Resolução:

O número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de frente é 5x4x3x2 = 120; o número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de costas é 5x4x3 = 60; o número de modos de acomodar os demais passageiros é 3x2x1 = 6.

A resposta é 120x60x6 = 43200

R: 43200

13)Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

Resolução:

O número de inteiros positivos de 4 dígitos é 9x10x10x10 = 9000; dessa quantidade devemos tirar aqueles em que o 5 NÃO figura, que são 8x9x9x9 = 5832. Fica então: 9000 - 5832 = 3168

R: 3168

14)Em uma banca há 5 exemplares iguais da Veja, 6 exemplares iguais da Época e 4 exemplares iguais da Isto É. Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

Resolução:

Devemos decidir quantos exemplares de cada revista devem ser postos na coleção. Há 6 possibilidades para a revista Veja (0,1,2,3,4 ou 5 exemplares), 7 para a revista Época e 5 para a revista Isto É. O número de coleções é 6x7x5 = 210. Daí, como apenas uma coleção é vazia, o total de coleções NÃO VAZIAS é 209 = 210-1.

R: 209

15)Uma turma tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h às 14h e das 14h às 15h. As disciplinas são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

Resolução:

Para a primeira disciplina, temos 6 possibilidades de escolha de primeiro horário; tendo escolhido o primeiro horário, temos 4 possibilidades de escolha para o segundo horário [pois não podemos escolher o outro horário do mesmo dia]. Como a ordem da escolha dos horários não importa, dividimos por 2, então temos:

Primeira disciplina: (6x4)/2 = 24/2 = 12

Para a segunda disciplina, sobrou um dia com dois tempos e dois dias com um tempo cada um. Porém, não podemos escolher os dois dias com um tempo cada um, pois senão para a terceira disciplina, sobraria apenas um dia para escolher. Então, necessariamente, temos que escolher um dos dois tempos do dia com dois tempos. Como a ordem da escolha não importa, dividimos por 2. Temos então:

Segunda disciplina: (4x2)/2 = 4

Como já escolhemos todos os horários para as disciplinas anteriores, sobrou apenas dois tempos em dias distintos para a terceira disciplina, ficamos então com:

Terceira disciplina: 1 possibilidade

total: 12x4x1 = 48 possibilidades.

R: 48

16)Quantos são os anagramas da palavra "capítulo":
a)possíveis?

Resolução: Como todas as letras são distintas, temos: 8! = 40320 anagramas.

b)que começam e terminam por vogal?

Resolução: Para a primeira posição temos disponíveis 4 vogais, temos então 4 possibilidades. Tendo escolhida a primeira letra, para a última letra, como ela deve ser vogal também, temos 3 vogais disponíveis. Para as letras restantes vamos ter 6! formas

de permutá-las entre a primeira vogal e a última vogal. Logo a resposta fica:
4x6!x3 = 8640

c)que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

Resolução: A palavra tem 4 vogais e 4 consoantes, portanto será possível promover a intercalação. Podemos começando por vogal, temos;
4 possibilidades para a primeira letra. [tem que ser vogal]
4 possibilidades para a segunda letra.[tem que ser consoante]
3 possibilidades para a terceira letra. [tem que ser vogal e já usamos uma vogal]
3 possibilidades para a quarta letra. [tem que ser consoante e já usamos uma consoante]
2 possibilidades para a quinta letra.
2 possibilidades para a sexta letra.
1 possibilidade para a sétima letra.
1 possibilidade para a oitava letra.

Portanto, começando por vogal temos: 4x4x3x3x2x2x1x1 = 576
Começando por consoante, analogamente temos 576 formas distintas. Daí, o total é:
576+576 = 1152

d)que têm as letras, c,a,p juntas nessa ordem?

Resolução: Neste caso, podemos considerar as letras C,A,P como se fossem um elemento a ser permutado, daí temos então a permutação de 6 elementos no lugar de 8. Portanto a resposta é: 6! = 720

e)que têm as letras c,a,p juntas em qualquer ordem?

Resolução: Para tanto, basta utilizarmos o resultado anterior, levando em consideração que as letras C,A,P podem se permutar entre si. Como isso pode ocorrer de 3! formas, temos;
720x3! = 720x6 = 4320

f)que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo?

Resolução:

Para a primeira letra, temos 1 possibilidade, podendo apenas ser a letra A.
Para a segunda letra, temos 1 possibilidade, podendo ser apenas a letra P.
Já, as letras restantes podem se permutar de qualquer forma. Temos para elas então 6! formas de se permutar.
Portanto a resposta é: 1x1x6! = 6! = 720

g)que têm a letra e em primeiro lugar ou a letra a em segundo?

Resolução:

Primeiramente, vamos calcular a quantidade de permutações em que a letra E está em primeiro lugar.
Para a primeira letra, temos apenas 1 possibilidade, só pode ser a letra E. Para a segunda letra em diante, podemos calcular a permutação delas entre si, sem restrição alguma. Temos então neste caso: 1x7! = 7! = 5040

Agora, vamos calcular a quantidade de permutações em que a letra A está na segunda posição.
Para a segunda letra, temos apenas 1 possibilidade, só pode ser a letra A. Já a primeira letra, terceira, quarta, quinta, sexta, sétima e oitava, podem permutar entre si sem restrição alguma.
Daí temos novamente: 1x7! = 5040

Mas, temos que notar que o fato de ter a primeira letra E e a segunda letra A não são mutuamente excludentes. Ou seja, que quando contamos as permutações onde a primeira letra é E, estamos contando os casos em que a primeira letra é E e a segunda é A. E, quando estamos contando as permutações em que a segunda letra é A, também estamos contando os casos em que a primeira letra é E. Em outras palavras, contamos os casos em que a primeira letra é E e a segunda letra é A, duas vezes, então temos que tirar esta contagem dupla.

Casos em que a primeira letra é E e a segunda letra é A: Para a primeira letra e para a segunda, temos apenas uma possibilidade. Para a terceira em diante, podemos permutá-las entre si. Temos então: 1x1x6! = 720

A resposta é então: 5040+5040-720 = 9360

h)nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras á direita de p? [6720]

Resolução:

Para tanto, podemos imaginar as letras A,P,C, disponíveis nesta ordem e de quantas formas podemos introduzir as letras que restam [I,T,U,L,O], nos espaços antes, entre ou depois das letras A,P,C.

A princípio, para a primeira letra, temos: 4 espaços disponíveis [antes da letra A, depois da letra C, entre A e P, e entre P e C].
Para a segunda letra [já tendo posto a primeira letra em um dos espaços anteriores], temos: 5 espaços. Para a terceira letra, 6 espaços, para a quarta 7 espaços e para a quinta 8 espaços. Pelo princípio multiplicativo, temos que a resposta é: 4x5x6x7x8 = 6720