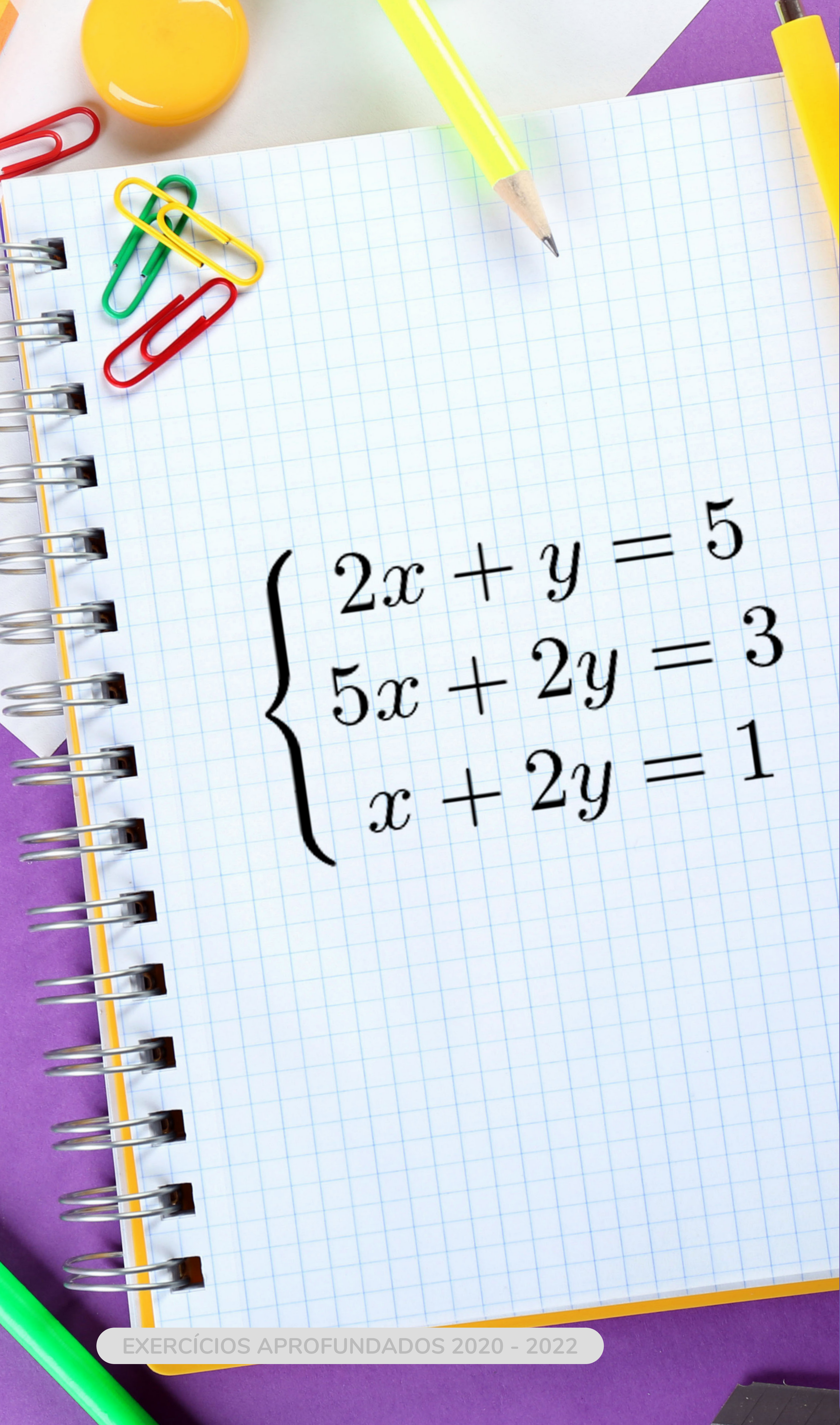


$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

SISTEMAS LINEARES

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

SISTEMAS LINEARES

Nesta série de apostilas conheceremos o que são equações lineares, sistemas lineares e aprenderemos a resolver um sistema linear com duas ou mais equações.

Esta subárea é composta pelos módulos:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

SISTMA LINEARES

1. (EPCAR (AFA) 2019) Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=9 \\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}=3 \\ \dfrac{3}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{c^2}=-4 \end{cases}$$

Sabendo-se que a, b e c são números reais não nulos, é INCORRETO afirmar que

a) $|a|+|b|+|c| \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

b) $a^2+b^2+c^2>2$

c) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & b^2 & 4 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$ é igual a $\dfrac{1}{6}$.

d) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ é par.

2. (ITA 2019) Assinale a opção que identifica o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear

$$S:\begin{cases} -x+5y=10 \\ \left(\dfrac{a^2}{5}+5b^2\right)x+10aby=1 \end{cases}.$$

a) Uma elipse

b) Uma reta

c) Uma parábola

d) Uma hipérbole

e) Um único ponto

3. (FAC. ALBERT EINSTEIN - MEDICINA 2018) Um parque tem 3 pistas para caminhada, X,Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8.400 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de7.940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8.110 metros. O comprimento da maior dessas pistas, excede o comprimento da menor pista em

a) 1.130 metros.

b) 1.350 metros.

c) 1.570 metros.

d) 1.790 metros.

4. (IME 2018) Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1+x_2-sx_3=0 \\ -2x_1+x_2+x_3=1 \\ sx_1-2x_2=0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

a) $s<-2$

b) $-2<s<0$

c) $0<s<1$

d) $1<s<2$

e) $s>2$

5. (G1 - CFTMG 2018) Se $x+y+z=\sqrt[4]{9}$ e $x+y-z=\sqrt{3}$, então o valor da expressão $x^2+2xy+y^2-z^2$ é

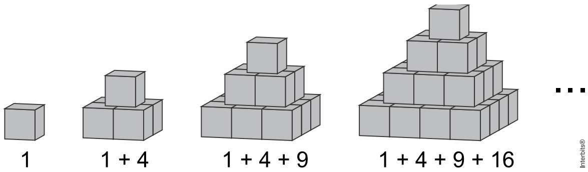
a) $3\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{3}$.

c) 3.

d) 0.

6. (FAMERP 2018) As figuras indicam uma sequência de empilhamentos de cubos de 1cm^3. Da primeira pilha em diante, os volumes das pilhas, em cm^3, são iguais a 1, 5, 14, 30, 55, e assim sucessivamente.



Sabe-se que a soma $1+2^2+3^2+4^2+5^2+...+x^2$ é um polinômio do terceiro grau, dado por $P(x) = mx^3 + nx^2 + px$, com m, n e p racionais. Portanto, $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 14$, $P(4) = 30$ e assim por diante. Nas condições dadas, m é igual a

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{3}$

7. (ITA 2018) Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

d) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$.

e) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

8. (UEM 2018) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z dado por meio da seguinte operação com matrizes AX = B, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, de forma que a, b e c sejam números reais dados e fixos.

Assinale o que for correto.

01) Se $a = b = c = 0$, isto é, se o sistema for homogêneo, então ele será possível e indeterminado.

02) Se a e b forem nulos e distintos de c, então o sistema será impossível.

04) O determinante da matriz A é não nulo.

08) Se a =b = 1 e c = 0, então a terna (−1, 1, 0) é uma solução do sistema.

16) Se o sistema for homogêneo, então a terna (2, 1, 0) é uma solução do sistema.

9. (UECE 2017) O produto dos valores dos números reais λ para os quais a igualdade entre pontos do $\mathbb{R}^2$, $(2x + y, x - y) = (\lambda x, \lambda y)$ ocorre para algum $(x, y) \neq (0, 0)$ é igual a

a) −2.

b) −3.

c) −4.

d) −5.

10. (UEPG 2017) Num bazar, o preço total de 3 camisas, 7 calças e 1 sapato é R$ 31,50. Mudando-se as quantidades para 4 camisas, 10 calças e 1 sapato, o preço total passa para R$ 42,00. Se P é o preço total, em reais, de 1 camisa, 1 calça e 1 sapato, nesse mesmo bazar, assinale o que for correto.

01) P é uma solução da equação $2x^2 - 25x + 42 = 0$.

02) P é igual aos juros simples da aplicação de R$ 100,00, durante dois meses à taxa de 5,25% ao mês.

04) P é igual ao montante produzido na aplicação a juros simples de R$ 10,00, durante três meses à taxa de 2% ao mês.

08) P é maior que R$ 12,00.

ANOTAÇÕES

GABARITO

1: [B]

Fazendo $\frac{1}{a^2} = x$, $\frac{1}{b^2} = y$ e $\frac{1}{c^2} = z$,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Escalonado o sistema acima, $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$

x = 1, y = 3 e z = 2

Logo,

$$a^2 = 1,\ b^2 = \frac{1}{3},\ c^2 = \frac{1}{2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 2$$

Portanto, a afirmativa [B] é INCORRETA.

2: [B]

Uma condição necessária para que o sistema linear seja impossível é:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ \frac{a^2}{5} + 5b^2 & 10ab \end{vmatrix} = 0$$

$$-10ab - 5 \cdot \left(\frac{a^2}{5} + 5b^2 \right) = 0$$

$$-10ab - a^2 - 25b^2 = 0$$

$$a^2 + 10ab + 25b^2 = 0$$

$$(a + 5b)^2 = 0$$

$$a = -5b$$

Verificação:

Como a = –5b,

$$s: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ 10b^2x - 50b^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y = 10 & \text{(i)} \\ 10b^2 \cdot (x - 5y) = 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Das equações (i) e (ii),

$$10b^2 \cdot (-10) = 1$$

$$b^2 = -\frac{1}{100} \text{ (impossível)}$$

Assim, o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear dado, é uma reta de equação a = –5b.

3: [A]

Calculando:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ x + 2y + 2z = 7940 \\ 4x + 3y = 8110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ -3x - 4y = -8900 \\ 4x + 3y = 8110 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ -9x - 12y = -26700 \\ 16x + 12y = 32440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ 3x + 4y = 8900 \\ 7x = 5740 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 820 \\ y = 1610 \\ z = 1950 \end{cases}$$

$$z - x = 1950 - 820 = 1130\text{m}$$

4: [D]

De $\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix} = s^2 - 3s + 2$$

De $s^2 - 3s + 2 = 0$,

s = 1 ou s = 2

Se s = 1,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{(SI)}$$

Se s = 2,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \text{(SI)}$$

Dessa forma, para s ≠ 1 e s ≠ 2,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 & \text{(i)} \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{(ii)} \\ sx_1 - 2x_2 = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Da equação (i),

$x_1 = sx_3 - x_2$

Substituindo $x_1 = sx_3 - x_2$ na equação (ii),

$-2(sx_3 - x_2) + x_2 + x_3 = 1$

$-2sx_3 + 2x_2 + x_2 + x_3 = 1$

$3x_2 + (1-2s)x_3 = 1 \qquad \text{(iv)}$

Substituindo $x_1 = sx_3 - x_2$ na equação (iii),

$s \cdot (sx_3 - x_2) - 2x_2 = 0$

$s^2x_3 - sx_2 - 2x_2 = 0$

$x_2 \cdot (-s-2) + s^2x_3 = 0 \qquad \text{(v)}$

Da equação (v),

$$x_3 = \frac{-x_2 \cdot (-s-2)}{s^2}$$

$$x_3 = \frac{x_2 \cdot (s+2)}{s^2}$$

Substituindo $x_3 = \dfrac{x_2 \cdot (s+2)}{s^2}$ na equação (iv),

$$3x_2 + (1-2s) \cdot x_2 \cdot \frac{(s+2)}{s^2} = 1$$

$$x_2 = \frac{s^2}{s^2 - 3s + 2}$$

$x_2 < 0,$

$$\frac{s^2}{s^2 - 3s + 2} < 0$$

$s^2 - 3s + 2 < 0$

$1 < s < 2$

Substituindo $x_2 = \dfrac{s^2}{s^2 - 3s + 2}$ na equação

$$x_3 = \frac{x_2 \cdot (s+2)}{s^2},$$

$$x_3 = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 2}$$

$x_3 < 0,$

$$\frac{s+2}{s^2 - 3s + 2} < 0$$

Como $s^2 - 3s + 2 < 0,$

$s + 2 > 0 \Rightarrow s > -2$

Substituindo $x_2 = \dfrac{s^2}{s^2 - 3s + 2}$ e $x_3 = \dfrac{s+2}{s^2 - 3s + 2}$

na equação $x_1 = sx_3 - x_2,$

$$x_1 = \frac{2s}{s^2 - 3s + 2}$$

$x_1 < 0,$

$$\frac{2s}{s^2 - 3s + 2} < 0$$

Como $s^2 - 3s + 2 < 0,$

$2s > 0$

$s > 0$

Portanto, se $1 < s < 2$, as soluções do sistema serão todas negativas.

5: [C]

Desenvolvendo temos:

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt[4]{9} \\ x + y - z = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (\times -1) \begin{cases} x + y + z = \sqrt[4]{9} \\ x + y - z = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{cases} -x - y - z = -\sqrt[4]{9} \\ x + y - z = \sqrt{3} \end{cases}} +$$

$$-2z = \sqrt{3} - \sqrt[4]{9} \Rightarrow z = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt[4]{9}}{2}$$

Elevando a segunda equação ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt[4]{9} \\ x + y = \sqrt{3} + z \end{cases} \Rightarrow (x + y)^2 = (\sqrt{3} + z)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 3 + 2\sqrt{3}z + z^2 x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

$$= 3 + 2\sqrt{3}z \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} \times \frac{(-\sqrt{3} + \sqrt[4]{9})}{2} x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

$$= 3 - 3 + \sqrt{3} \times \sqrt[4]{3^2} = 3x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 3$$

6: [E]

Calculando:

$P(1) = m + n + p = 1$

$P(2) = 8m + 4n + 2p = 5$

$P(3) = 27m + 9n + 3p = 14$

$$m = \frac{D_m}{D}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&2\\27&9&3\end{vmatrix}=12+54+72-108-24-18=-12$$

$$D_m=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&4&2\\14&9&3\end{vmatrix}=12+28+45-56-15-18=-4$$

$$m=\frac{D_m}{D}=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$$

7: [B]

Como o sistema dado é homogêneo e admite infinitas soluções, temos:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2a^2&2a^4-a\\1&a&a^3-1\end{vmatrix}=0$$

Daí,

$$2a^2\cdot\left(a^3-1\right)+2a^4-a-2a^2-a\cdot\left(2a^4-a\right)=0$$

$$2a^4-3a^2-a=0$$

$$a\cdot\left(2a^3-3a-1\right)=0$$

$a=0$ ou $2a^3-3a-1=0$

Na equação $2a^3-3a-1=0,$ verifica-se, por inspeção, que -1 é raiz.

Então,

-1	2	0	-3	-1
	2	-2	-1	0

Assim, as raízes da equação $2a^2-2a-1=0$ também são raízes da equação $2a^3-3a-1=0.$

Da equação $2a^2-2a-1=0,$

$$a=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$$

$$a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ \text{ou}\ a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, os possíveis valores do parâmetro a que fazem com que o sistema dado admita infinitas soluções são:

$$0,-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

8: 01 + 02 = 03.

[01] CORRETA. Se o sistema for homogêneo então ele será possível e indeterminado.

[02] CORRETA. Os coeficientes da matriz A são proporcionais entre si (L2=2·L1; L3=3·L1). Para que o sistema seja possível, os coeficientes dos termos independentes (matriz B) também devem ser proporcionais.

[04] INCORRETA. Calculando:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}=36+36+36-36-36-36=0$$

[08] INCORRETA. O sistema será impossível. Os coeficientes da matriz A são proporcionais entre si (L2=2·L1; L3=3·L1). Para que o sistema seja possível, os coeficientes dos termos independentes (matriz B) também devem ser proporcionais.

[16] INCORRETA. Se o sistema for homogêneo seus termos independentes serão iguais a zero, portanto a terna dada não será solução.

9: [B]

De acordo com a igualdade acima, podemos escrever que:

$$\begin{cases}2x+y=\lambda\cdot x\\x-y=\lambda\cdot y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-\lambda)\cdot x+y=0\\x-(1+\lambda)\cdot y=0\end{cases}$$

Para que o sistema homogêneo admita outras soluções além da (0, 0) devemos considerar que seu determinante dos coeficientes seja nula:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&-(1+\lambda)\end{vmatrix}=0$$

$$-(2-\lambda)\cdot(1+\lambda)-1=0$$

$$-(2+2\lambda-\lambda-\lambda^2)-1=0$$

$$\lambda^2-\lambda-3=0$$

Logo, o produto das raízes λ_1 e λ_2 será dado por:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{-3}{1} = -3$$

10: 01 + 02 = 03.

Calculando:

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 31{,}5 & \text{(I)} \\ 4x + 10y + z = 42 & \text{(II)} \\ x + y + z = P & \text{(III)} \end{cases}$$

De $(\text{II}) - (\text{I})$:

$$x + 3y = 10{,}5$$

De $(\text{I}) - (\text{III})$:

$$2x + 6y = 31{,}5 - P$$

Assim:

$$\begin{cases} x + 3y = 10{,}5 \\ 2x + 6y = 31{,}5 - P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 6y = -21 \\ 2x + 6y = 31{,}5 - P \end{cases} \Rightarrow P = 10{,}5$$

Analisando as alternativas:

[01] CORRETA. Calculando:

$$2x^2 - 25x + 42 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (10{,}5)^2 - 25 \cdot (10{,}5) + 42 = 0$$

$$\Rightarrow 220{,}50 - 262{,}5 + 42 = 0$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$J = 100 \cdot 2 \cdot \frac{5{,}25}{100} \Rightarrow J = 10{,}50$$

[04] INCORRETA. Calculando:

$$J = 10 \cdot 3 \cdot \frac{2}{100} \Rightarrow J = 0{,}6$$

[08] INCORRETA. P = 10,5.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut