FUNÇÕES

GABARITO COMENTADO

1)
   a. Não é função, pois não há correspondente para 5 em B
   b. Não é função, pois há dois correspondentes para 1 em B
   c. É função
   d. É função

2) Se a relação de amizade é simétrica (ou seja, A é amigo de B se e só se B é amigo de A), então é impossível que Sandro tenha 79 amigos e Paula tenha 0 amigos, dado que a turma possui 80 alunos. Dentre os 79 amigos de Sandro, com certeza Paula está inclusa e, portanto, Sandro é amigo de Paula e, pela simetria, Paula é amiga de Sandro. Logo, $f(Paula) \geq 1$.

3) (**Letra E**) Pelas condições do problema, $f(3)$ não pode ser nem 2, nem 3 nem 4, ou seja, $f(3)$ só pode ser 1 ou 5.

   Suponha que $f(3) = 1$. Logo, pela condição II, $f(1)$ não pode ser nem 3 nem 4 e, pela condição I, também não pode ser nem 1 nem 2. Logo, $f(1) = 5$.

   Se $f(1) = 5$, pela condição II, $f(5)$ não pode ser nem 1 nem 2 e, pela condição I, também não pode ser nem 4 nem 5. Logo, $f(5) = 3$.

   Aqui temos um problema, pois não sabemos $f(2)$ nem $f(4)$, sobrando apenas 2 e 4 no conjunto. Pela condição I, $f(2)$ não pode ser 2. Se $f(2) = 4$, então $f(4)$ não pode ser 2. Logo, a hipótese inicial de $f(3) = 1$ não se sustenta.

   Finalmente, $f(3) = 5$.

4) (**Letra D**)
   Restrição: $x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1$. Portanto, $Dom(f) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5) (**Letra A**) Necessariamente, as quantidades de célula são potências de 2; por isto, a única opção que representa esta observação é $f(x) = 2^{x-1}$.

6) $y = \frac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow xy - 3y = 2x + 1 \Leftrightarrow x(y-2) = 3y + 1$. Nesta igualdade, se $y = 2$ obteríamos $0 = 7$, o que é impossível. Logo, $y \neq 2$ e então $x = \frac{3y+1}{y-2}$. Isto nos mostra

que o conjunto imagem da função (ou seja, os possíveis valores que y pode retornar para um dado x) são todos os $y \neq 2$.

Definida de $\mathbb{R} - \{3\}$ em $\mathbb{R}$, esta função não é sobrejetora (pois $y = 2$ não tem correspondente no domínio) e, portanto, não será bijetora. Para injetividade, vejamos:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+1}{a-3} = \frac{2b+1}{b-3} \Rightarrow -6a + b = -6b + a \Rightarrow a = b$$

Portanto, $f(a) = f(b)$ implicou $a = b$, ou seja, f é **injetiva**.

7)

a. Bijetora; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$
b. Não sobrejetora; não injetora
c. Não sobrejetora
d. Não injetora; sobrejetora
e. Injetora; não sobrejetora
f. Bijetora
g. Bijetora; $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{2}}$

8)

a. Como $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ e $f(3) = 9$, logo $f(\{1,2,3\}) = \boxed{\{1,4,9\}}$.
b. Como $f(1) = f(-1) = 1$, $f(2) = f(-2) = 4$ e $f(3) = f(-3) = 9$, logo $f^{-1}(\{1,4,9\}) = \boxed{\{-3,-2,-1,1,2,3\}}$.
c. Como $f(x) = x^2$ é crescente em $[1,4]$, logo $f([1,4]) = [f(1), f(4)] = \boxed{[1,16]}$.
d. Como $f(1) = f(-1) = 1$ e $f(2) = f(-2) = 4$, $f^{-1}([1,4]) = \boxed{[-2,-1] \cup [1,2]}$.

9) (**Letra D**) Vamos calcular os primeiros valores da função:

$$\begin{gathered}
f(1) = 0 \\
f(2) = f(1) + 4 = 4 \\
f(3) = 4f(1) + 1 = 1 \\
f(4) = f(2) + 4 = 8 \\
f(5) = 4f(2) + 1 = 17 \\
f(6) = f(3) + 4 = 5 \\
f(7) = 4f(3) + 1 = 5 \\
f(8) = f(4) + 4 = 12 \\
f(9) = 4f(4) + 1 = 33 \\
f(10) = f(5) + 4 = 21 \\
\ldots
\end{gathered}$$

Perceba que, para valores ímpares de n, claramente $f(n)$ é ímpar, pois a lei de formação é da forma $4k+1$. Para valores pares de n, veja que somente obteremos $f(n)$ par se n for uma potência de 2. Desta forma, se retirarmos as potências de 2 de 1 até 2020, todos os inteiros restantes possuirão valores numéricos ímpares em f. Sendo assim:

Potências de 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 → 11 casos

Logo, $2020 - 11 = 2009$ valores.

10)Fazendo $x = 2$, teremos: $f(2) + 2f(1001) = 6$. Apareceu um $f(1001)$ que não sabemos ainda. Portanto, fazendo $x = 1001$, teremos: $f(1001) + 2f(2) = 3003$. Assim:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(1001) = 6 \\ f(1001) + 2f(2) = 3003 \end{cases} \xRightarrow{Mult.\ a\ 2^{a}\ equação\ por\ 2\ e\ (-)} -3f(2) = 6 - 6006$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(2) = 2000}$$

11)(**Letra B**) Fazendo $x = 1$, teremos: $f(0) = -2f(1) + 3$. Apareceu um $f(0)$ que não sabemos ainda. Portanto, fazendo $x = 0$, teremos: $0 = -3f(0) + 3 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Assim, $1 = -2f(1) + 3 \Leftrightarrow f(1) = 1$.

12)(**Letra D**) Veja que $f\left(\frac{2019}{2019}\right) = f(1) = 1(1-1) = 0$. Agora, veja que:

$$f(1-x) = (1-x)\big(1-(1-x)\big) = f(x)$$

Finalmente, perceba os extremos da soma pedida:

$$\frac{2018}{2019} = 1 - \frac{1}{2019} \Rightarrow f\left(\frac{2018}{2019}\right) = f\left(1 - \frac{1}{2019}\right) = f\left(\frac{1}{2019}\right)$$

$$\frac{2017}{2019} = 1 - \frac{2}{2019} \Rightarrow f\left(\frac{2017}{2019}\right) = f\left(1 - \frac{2}{2019}\right) = f\left(\frac{2}{2019}\right)$$

$$\frac{2016}{2019} = 1 - \frac{3}{2019} \Rightarrow f\left(\frac{2016}{2019}\right) = f\left(1 - \frac{3}{2019}\right) = f\left(\frac{3}{2019}\right)$$

...

Ou seja, os extremos da soma dada são simétricos e, por isso, a soma destes números é nula. Portan :

$$f\left(\frac{1}{2019}\right)-f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{3}{2019}\right)-f\left(\frac{4}{2019}\right)+\cdots+f\left(\frac{2017}{2019}\right)-f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2019}{2019}\right)$$

$$=\boxed{1}$$

13)(**Letra D**) Fazendo $x=-4$, teremos: $f(0)=f(-4)\cdot f(4)$. Como não temos $f(0)$, façamos $x=0$ e então $f(4)=f(0)\cdot f(4)\Leftrightarrow f(0)=1$. Portanto, $f(-4)=\frac{f(0)}{f(4)}=\boxed{\frac{1}{5}}$.

14)(**Letra A**) Veja que $f(1,2)=1+2=3$, $f(1,3)=1+3=4$ e $f(2,3)=5$. Portanto, a função associa imagens distintas a elementos do domínio distintos, mas não associa todos os elementos de B a algum elemento de A. Portanto, f é injetora e não sobrejetora.

15)(**Letra D**) O domínio da composição $f\circ g$ é o domínio da função mais interna, no caso g, ou então um subconjunto de $Dom(g)$. Assim, $E\subset D$. O contradomínio da composição $f\circ g$ é o contradomínio da função mais externa, no caso f, ou então um subconjunto de $CD(f)$. Assim, $K\subset B$.

16)Veja que $f\big(g(x)\big)=4g(x)-1$ e então:

$$4g(x)-1=3x^2+7x+1\Leftrightarrow \boxed{g(x)=\frac{3x^2+7x+2}{4}}$$

17)Veja que $f\Big(f\Big(f\big(f(4)\big)\Big)\Big)=f\Big(f\big(f(5)\big)\Big)=f\big(f(2)\big)=f(1)=4$, ou seja, compondo a função f 4 vezes em $x=4$, voltamos a obter 4. Logo, se compusermos a função 2004 vezes e, dado que 2004 é múltiplo de 4, então $f(f(\ldots f(4)\ldots)=4$.

18)Fazendo $x=3$, teremos: $f(3)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=3$

Fazendo $x=-\frac{1}{2}$, teremos: $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

Fazendo $x=\frac{2}{3}$, teremos: $f\left(\frac{2}{3}\right)+f(3)=\frac{2}{3}$

Somando todas as igualdades, teremos:

$$2\left(f(3)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{19}{6}\Leftrightarrow f(3)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{19}{12}$$

Assim, como $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, então $f(3)=\frac{19}{12}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{25}{12}}$.