

Produtos Notáveis e Fatoração

PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são identidades que podem ser obtidas de maneira prática. Assim, como são muito frequentes no cálculo algébrico, vamos listar os principais:

- i) Quadrado da soma de dois termos
 $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$
- ii) Quadrado da diferença de dois termos
 $(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$
- iii) Produto da soma pela diferença de dois termos
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- iv) Cubo da soma de dois termos
 $(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$
- v) Cubo da diferença de dois termos
 $(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Desenvolver os seguintes produtos notáveis:

A) $\left(\frac{a}{3} - b\right)^2$

Resolução:

$$\left(\frac{a}{3} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot b + (b)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{2ab}{3} + b^2$$

B) $(x + 3y)(x - 3y)$

Resolução:

$$(x + 3y)(x - 3y) = (x)^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$$

02. (UNIMEP-SP) A diferença entre o quadrado da soma de dois números inteiros e a soma de seus quadrados não pode ser:

- A) 12.
- B) 6.
- C) 4.
- D) 2.
- E) 9.

Resolução:

Sejam x e y dois números inteiros. Temos:

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$$

Como o número obtido é par, temos que o único valor que não corresponde à expressão é 9. Portanto, a alternativa correta é a E.

FATORAÇÃO

Seja uma expressão algébrica escrita como uma soma de termos. Fatorar essa expressão significa escrevê-la na forma de um produto. Para tanto, existem determinadas técnicas, descritas a seguir:

Fator comum

Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo em evidência.

Exemplos:

1º) $ab + ac = a(b + c)$

2º) $24x^3y^2 - 6x^4y + 12x^2y^5 = 6x^2y(4xy - x^2 + 2y^4)$

Agrupamento

Às vezes, não é possível identificar, de início, um fator comum a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos em evidência um fator comum a todos os grupos.

Exemplos:

1º) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

2º) $8x^2 - 4xz - 6xy + 3yz = 4x(2x - z) - 3y(2x - z) = (2x - z)(4x - 3y)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Fatorar a expressão $a^2 - 4ba + 3b^2$.

Resolução:

$$\begin{aligned} a^2 - 4ba + 3b^2 &= a^2 - ba - 3ba + 3b^2 \\ &= a(a - b) - 3b(a - b) \\ &= (a - b)(a - 3b) \end{aligned}$$

Soma e diferença de cubos

Trata-se de identidades muito úteis em cálculo algébrico.

São elas:

i) Soma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

ii) Diferença de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemplo:

Vamos fatorar a expressão $x^3 - 27$:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

Identificação de um produto notável

Exemplos:

1º) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \Rightarrow$ Quadrado da soma.

2º) $a^4b^2 - c^6 = (a^2b)^2 - (c^3)^2 = (a^2b + c^3)(a^2b - c^3)$
 \Rightarrow Produto da soma pela diferença.

3º) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3 \Rightarrow$ Cubo da diferença.

Fatoração do trinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Esse trinômio pode ser escrito na forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

OBSERVAÇÃO

As raízes podem ser obtidas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ sendo } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemplo:

Vamos fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$.

Cálculo das raízes:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

Substituindo na forma fatorada, temos $1(x - 2)(x - 3)$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM



01. (IFCE) O valor da expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$ é:

- A) ab
- B) $2ab$
- C) $3ab$
- D) $4ab$
- E) $6ab$

02. (CEFET-MG) O valor numérico da expressão $\sqrt{68^2 - 32^2}$ está compreendido no intervalo:



- A) $[30,40[$
- B) $[40,50[$
- C) $[50,60[$
- D) $[60,70[$

03. (UTFPR-2017) Uma indústria fabrica uma placa metálica no formato de um retângulo de lados $(ax + by)$ e $(bx + ay)$. Encontre, de forma fatorada, o perímetro desse retângulo.

- A) $2(a + b)(x + y)$
- B) $4(a + b)(x + y)$
- C) $2(a - b)(x - y)$
- D) $4(a - b)(x - y)$
- E) $(a + b)(x + y)$

04. (UFRGS) Se $x + y = 13$ e $xy = 1$, então $x^2 + y^2$ é:

- A) 166.
- B) 167.
- C) 168.
- D) 169.
- E) 170.

05. (ESPM-SP-2020) O valor da expressão numérica $2 \cdot 10^{-5} + \frac{99\,998^2}{99\,999^2 - 1}$ é igual a:

- A) 0
- B) 2
- C) 1
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{4}$

06. (UEPB) Dado $x - \frac{1}{x} = 13$, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:



- A) 171.
- B) 169.
- C) 167.
- D) 130.
- E) $\frac{168}{13}$.

07. (IFCE) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x + y = -16$ e $xy = 64$.



O valor da expressão $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ é:

- A) -2.
- B) -1.
- C) 0.
- D) 1.
- E) 2.

08. (UTFPR-2018) Dados $A = x + y$, $B = x - y$ e $C = x \cdot y$, para $x \neq y$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Simplificando a expressão algébrica,



$\frac{A^2 - B^2}{C}$ obtém-se:

- A) 0
 B) $\frac{2y}{x}$
 C) 4
 D) $-\frac{2x}{y}$
 E) $\frac{4}{xy}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS



01. (UPE-2019) Sabendo-se que $(4 - y) = 1,5 \cdot 10^{-6}$ e $(4 + y) = 2,5 \cdot 10^{-7}$, qual é o valor numérico da expressão $\sqrt{256} - \sqrt{y^4}$?

- A) $375 \cdot 10^{-15}$
 B) $37,5 \cdot 10^{13}$
 C) $3,75 \cdot 10^{-14}$
 D) $0,375 \cdot 10^{12}$
 E) $0,0375 \cdot 10^{-13}$

02. (Insper-SP) O valor de $\frac{2\ 009^2 - 4}{2\ 009^2 + 2\ 009 - 2}$ é igual a:

- A) $\frac{2\ 007}{2\ 008}$
 B) $\frac{2\ 008}{2\ 009}$
 C) $\frac{2\ 007}{2\ 009}$
 D) $\frac{2\ 009}{2\ 008}$
 E) $\frac{2\ 009}{2\ 007}$

03. (UTFPR) A expressão algébrica: $\left(\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{1-x^2}{2}$ equivale a:

- A) $2x$
 B) x
 C) $-2x$
 D) $-x$
 E) $\frac{x^2}{x^2 - 1}$

04. (ESPM-SP) Considerando-se que $x = 9\ 731^2$, $y = 3\ 907^2$ e $z = 2\sqrt{xy}$, o valor da expressão $\sqrt{x + y - z}$ é:



- A) 6 792.
 B) 5 824.
 C) 7 321.
 D) 4 938.
 E) 7 721.

05. (IFCE) Se $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 = 3$, então $x^3 + y^3$ vale:



- A) 4.
 B) 5.
 C) 6.
 D) 7.
 E) 8.

06. (IFCE) Para cada número real positivo m , a expressão

$\left(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ é igual a:

- A) $m^{\frac{1}{2}}$
 B) $m + 1$
 C) $m + 2$
 D) $m + 3$
 E) $m + \frac{1}{m}$

07. (CEFET-MG) Simplificando a fração algébrica



$\frac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x^2 - y^2}$, sendo x e y números reais, tais que

$x + y \neq 0$ e $x - y = 4$, obtém-se o valor:

- A) 1,5.
 B) 1,0.
 C) 0,5.
 D) 0,0.

08. (UTFPR) Simplificando a expressão $\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2}$, com $x \neq y$, obtém-se:



- A) $2 - 4xy$
 B) $\frac{x-y}{x+y}$
 C) $\frac{2xy}{x+y}$
 D) $-2xy$
 E) $-\frac{4xy}{x-y}$

09. (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e $a - b - c = 10$, com a , b e c números reais. Então, o valor de $a + b + c$ é igual a:



- A) 1.
 B) 2.
 C) 4.
 D) 10.
 E) 20.

10. (CEFET-RJ) O único par de números naturais m e n que satisfaz a igualdade $m^2 - n^2 = 17$ é tal que



- A) seu produto é 72.
 B) sua soma é 18.
 C) seu quociente é 17.
 D) sua diferença é 2.

11. (EPCAR-MG) O valor da expressão $\left(\frac{x^2 - y^2}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right)$,



em que x e $y \in \mathbb{R}^*$ e $x \neq y$ e $x \neq -y$ é:

- A) -1.
 B) -2.
 C) 1.
 D) 2.

12. (UFRGS-RS-2017) Se $x - y = 2$ e $x^2 + y^2 = 8$, então $x^3 - y^3$ é igual a

- A) 12.
 B) 14.
 C) 16.
 D) 18.
 E) 20.

13. (EPCAR-MG-2017) Simplificando as expressões

0810



$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}} \text{ e } B = \frac{x^2 - xy}{2x}, \text{ nas quais } y > x > 0,$$

é correto afirmar que:

- A) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$
- B) $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$
- C) $A \cdot B > 0$
- D) $A + B > 0$

14. (CEFET-MG) Simplificando a expressão $\frac{x^3 - 1}{x^2 - x} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$

6MWP



para $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ obtém-se:

- A) x
- B) x^2
- C) $x - 1$
- D) $x^2 - 1$

15. (Unesp) A expressão $\frac{4x + 8}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$,

$x \neq -2$, é equivalente a:

- A) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}$
- B) $\frac{1}{x+1}$
- C) $\frac{7}{x+1}$
- D) $\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-1}$
- E) $\frac{1}{x-1}$

16. (ESPM-SP) Em relação ao número $N = 2^{48} - 1$, pode-se afirmar que

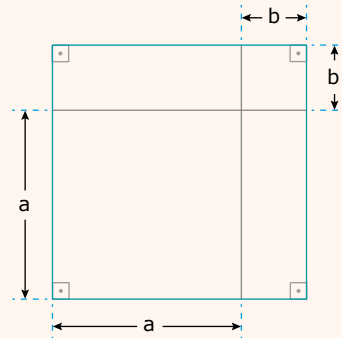
5UI6



- A) ele é primo.
- B) ele é par.
- C) ele é múltiplo de 7.
- D) ele não é múltiplo de $2^{24} + 1$.
- E) ele não é divisível por 9.

SEÇÃO ENEM

01. Em Matemática, verifica-se, em várias situações, uma correspondência entre um modelo algébrico e um modelo geométrico. Como exemplo, observe a figura a seguir:



A área da figura anterior corresponde ao produto notável:

- A) $(a - b)^2$
- B) $(a + b)^2$
- C) $(a + b)(a - b)$
- D) $(a + b)^3$
- E) $(a - b)^3$

02. Anselmo foi encarregado de calcular o valor da expressão $A = 4\,000 \cdot 206^2 - 4\,000 \cdot 204^2$ sem utilizar calculadora. Seu amigo Fernando recomendou a utilização de técnicas de fatoração, além do conhecimento dos produtos notáveis. Ao seguir o conselho de Fernando, Anselmo obteve:

- A) 3 280 000.
- B) 360 000.
- C) 2 380 000.
- D) 1 680 000.
- E) 1 240 000.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei _____ Errei _____

- 01. D
- 02. D
- 03. A
- 04. B
- 05. C
- 06. A
- 07. E
- 08. C

Propostas

Acertei _____ Errei _____

- 01. A
- 02. A
- 03. B
- 04. B
- 05. B
- 06. D
- 07. A
- 08. B
- 09. C
- 10. A
- 11. A
- 12. E
- 13. C
- 14. A
- 15. C
- 16. C

Seção Enem

Acertei _____ Errei _____

- 01. B
- 02. A



Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %