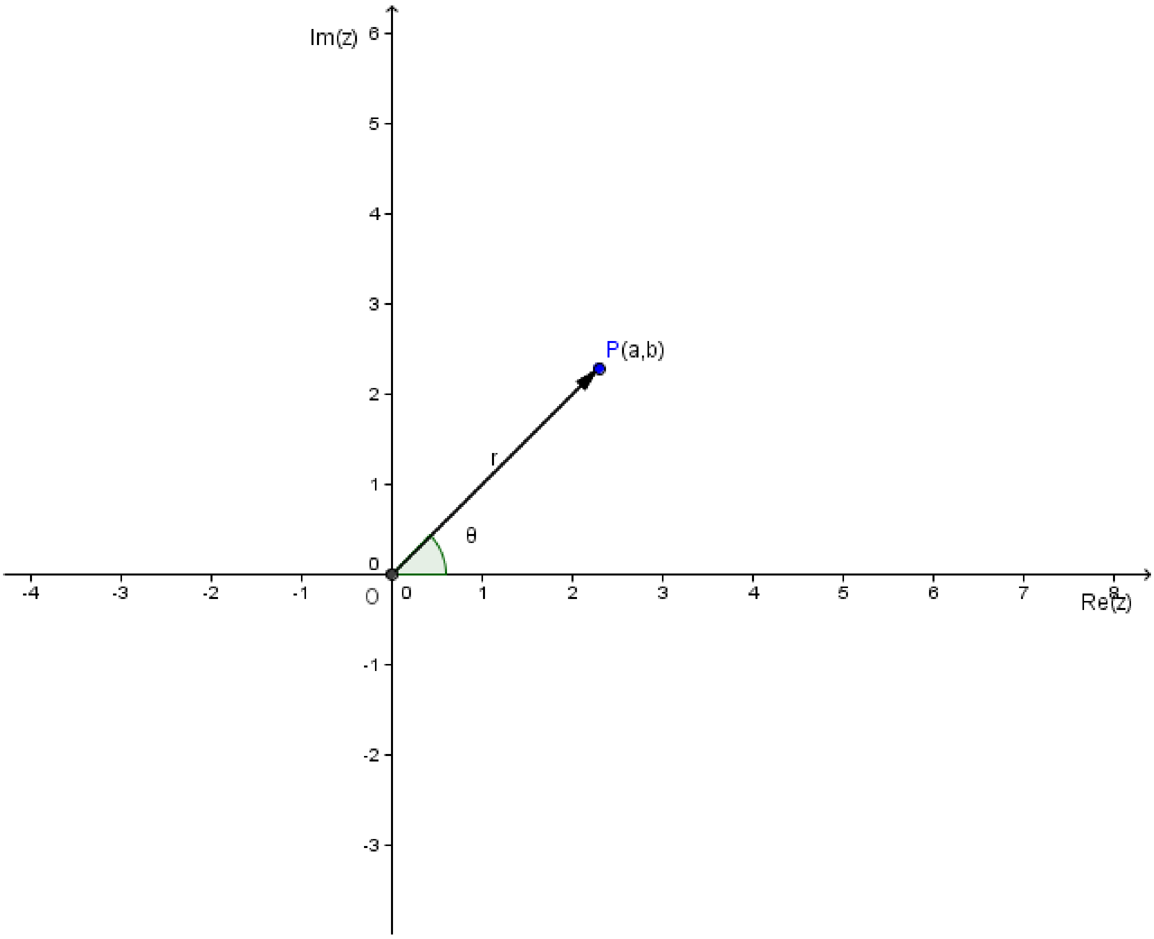
“Quanto maiores são as dificuldades, maior será a satisfação da vitória."

(Marcus Cícero)

SUMÁRIO

COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE COMPLEXOS



Seja z = (a, b) = a + bi

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ módulo do complexo z.

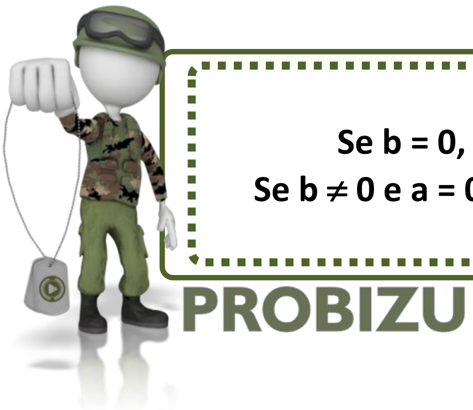
$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$; $\text{sen}\theta = \dfrac{b}{r} \Leftrightarrow a = r\cos\theta$ e $b = r\text{sen}\theta$

$z = r \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta) = r \cdot \text{cis}\theta.$

Com $\theta \in [0, 2\pi]$, θ é o argumento principal.

Isto é, a forma trigonométrica do número complexo z é:

z = r (cosθ + i . senθ), que se abrevia z = rcisθ.



Se b = 0, z é um número real.
Se b $\neq$ 0 e a = 0, z é um imaginário puro.

2. MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Considere dos complexos de módulos r_1 e r_2 com argumentações θ_1 e θ_2.

$$(r_1.\text{cis}\theta_1).(r_2.\text{cis}\theta_2) = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

$$r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + i\cos\theta_1\text{sen}\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_2)$$

$$r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + i(\cos\theta_1\text{sen}\theta_2 + \text{sen}\theta_1\cos\theta_2))$$

$$r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2))$$

CONCLUSÃO: Multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos.

$$(r_1.\text{cis}\theta_1).(r_2.\text{cis}\theta_2) = r_1r_2.\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$$

3. CONJUGADO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Seja $\overline{z}_1 = r_1 \cdot cis\theta_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i sen\theta_1)$, o conjugado de z, na forma trigonométrica, é

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 - i sen\theta_1) = r_1 \cdot (\cos(-\theta_1) + i sen(-\theta_1)) = r \cdot cis(-\theta_1).$$

4. DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sejam $z_1 = r_1.cis\theta_1$ e $z_2 = r_2.cis\theta_2$ com $z_1 \neq 0$.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2.\overline{z}_1}{z_1.\overline{z}_1} = \frac{r_1r_2cis(\theta_2 - \theta_1)}{r_1r_1cis(\theta_1 - \theta_1)} = \frac{r_2cis(\theta_2 - \theta_1)}{r_1cis0} = \frac{r_2}{r_1}.cis(\theta_2 - \theta_1)$$

CONCLUSÃO: Dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos.

$$\frac{r_2.cisq_2}{r_1.cisq_1} = \frac{r_2}{r_1}.cis(\theta_2 - \theta_1)$$

5. PRIMEIRA FÓRMULA DE MOIVRE

Consideremos o complexo $z = r \cdot (\cos\theta + i sen\theta) = r \cdot cis\theta$ e seja dado o número natural n, temos:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\theta + i sen n\theta) = r^n \cdot cis n\theta$$

EXEMPLO:

$z = \sqrt{3} + i$ => $z = 2[\cos(\pi/6) + i.sen(\pi/6)]$

$z^4 = 2^4[\cos(4\pi/6) + i.sen(4\pi/6)] = 16[\cos(2\pi/3) + i.sen(2\pi/3)] = 16[-1/2 + \sqrt{3}\,i/2] = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

6. SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE

Nos Números reais sabemos que

$$\sqrt[4]{16} = 2\ .$$

No corpo dos números complexos temos que

$$2^4 = 16;\ (-2)^4 = 16,\ (2i)^4 = 16;\ (-2i)^4 = 16\ .$$

Então o número 16 em C tem 4 raízes quartas .

Dados complexo $z = r \cdot (\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) = r \cdot \mathrm{cis}\theta$ e o número natural *n* (*n*≥ 2), então existem *n* raízes enésimas de *z* que são da forma:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i.\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

com $k \in \mathbb{Z}$ variando de 0 até n-1

Como $\sqrt[n]{r}$ é constante e os argumentos diferem de $2\pi/n$ (para valores consecutivos de *n*), conclui-se que as imagens das *n* raízes de um número complexo são vértices de um polígono regular de *n* lados, inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$, tendo uma das raízes o argumento θ/n.

EXEMPLO:

Determinar as raízes cúbicas de *z* = 8

z | = $\sqrt{8^2 + 0^2}$ = 8 $\therefore \cos\theta = 1$ $\mathrm{sen}\,\theta = 0$ $\Rightarrow \theta = 0$ $\therefore z = 8(\cos 0 + i.\mathrm{sen}\ 0)$

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{0 + 2k\pi}{3}\right] = 2\left[\cos\frac{2k\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right]$$

O número k deve variar entre 0 e 2

k = 0 => $w_0 = 2(\cos 0 + i.\text{sen } 0) = 2(1 + 0i) = 2$

k = 1 => $w_1 = 2(\cos 2\pi/3 + i.\text{sen } 2\pi/3) = 2(-1/2 + \sqrt{3}\, i/3) = -1 + \sqrt{3}i$

k = 2 => $w_2 = 2(\cos 4\pi/3 + i.\text{sen } 4\pi/3) = 2(-1/2 - \sqrt{3}\, i/2) = -1 - \sqrt{3}i$

7. RAÍZES ENÉSIMAS DA UNIDADE

As raízes da equação $z^n - 1 = 0$ são chamadas as raízes da unidade.

As raízes da unidade são:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0,1,2,...,n\text{-}1\}.$$

1. Dados z = 2.cis50° e w = 3.cis40°, calcule:

a) $z \cdot w$

b) w^3

c) z^6

2. (UFRJ-89) Dados os números complexos a = 2.(cos 30° + i.sen 30°) e b = 3.(cos α + i.sen α), determine o menor valor positivo de α, de modo que o produto a.b seja um número real.

3. Determine a forma trigonométrica do número complexo dado:

a) z = 1 + i

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

c) z = -1 + i

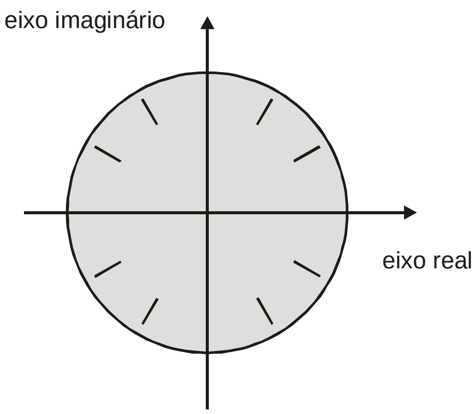
d) z = 2i

e) z = -3

4. (UFRJ 2005) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir:

$$z = \alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],\ w = z^2,$$

sendo α um número real fixo, $0 < \alpha < 1$.



Determine a hora do jantar.

5. (EFOMM-00) Escrevendo-se na forma trigonométrica o complexo $z = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{i}$, encontra-se:

a) $2\sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

b) $2\sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]$

c) $2\sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right]$

d) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

6. (AFA-99) A representação trigonométrica do conjugado do número complexo $z = (1 + \sqrt{3}\,i)^5$, sendo $\underline{i}$ a unidade imaginária e $k \in Z$, é:
a) $32\cos(\pi/3 + 2k\pi) - 32i\,\mathrm{sen}(\pi/3 + 2k\pi)$.
b) $32\cos(5\pi/4 + 10k\pi) - 32i\,\mathrm{sen}(5\pi/4 + 10k\pi)$.
c) $32\cos(5\pi/6 + 10k\pi) - 32i\,\mathrm{sen}(5\pi/6 + 10k\pi)$.
d) $32\cos(5\pi/3 + 10k\pi) - 32i\,\mathrm{sen}(5\pi/3 + 10k\pi)$.

7. (IME) Considere os números complexos $z_1 = \mathrm{sen}\alpha + i\cos\alpha$ e $z_2 = \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\alpha$, onde α é um número real. Mostre que, se $z = z_1 \cdot z_2$, então $-1 \le R_e(z) \le 1$ e $-1 \le I_m(z) \le 1$, onde $R_e(z)$ e $I_m(z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

8. (FUVEST) Seja z um número complexo de módulo 2 e argumento principal 120°. O conjugado de z é:
a) $2 - 2i\sqrt{3}$
b) $2 + 2i\sqrt{3}$
c) $-1 - i\sqrt{3}$
d) $-1 + i\sqrt{3}$
e) $1 + i\sqrt{3}$

9. (IME)Seja $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z e i é a unidade imaginária. Sabe-se que $\rho = 2a\cos\theta$, onde a é uma constante real positiva. A representação de z no plano complexo é

10. (EEAr-2008) Dado $x \in \mathbb{R}$, para que o número $z = (2 - xi)(x + 2i)$ seja real, o valor de x pode ser

a) 4.
b) 0.
c) −1.
d) −2.

11. (EFOMM 2012) A solução da equação $|z| + z = 1 + 3i$ é um número complexo de módulo:

a) $\frac{5}{4}$
b) 5
c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{5}{2}$

12. Sendo "w" um número complexo e $z_1 = 2 \cdot (\cos 10° + i \cdot \text{sen} 10°)$ a sua raiz oitava de menor argumento, a soma dos argumentos principais de todas as raízes oitavas de "w" é:

a) 256°
b) 1600°
c) 1180°
d) 1340°
e) 2680°

13. (AFA 2014)- Considere os números complexos $z_1 = x - i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = -1 + 2i$ e $z_4 = x + yi$ em que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ e $i^2 = -1$ e as relações:

I. $\text{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \le \text{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$
II. $|z_3 \cdot z_4| = \sqrt{5}$

O menor argumento de todos os complexos z_4 que satisfazem, simultaneamente, as relações I e II é

a) $\frac{\pi}{6}$
b) 0
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{3}$

14. (IME 2012) As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por 1, w e w^2, onde w é um número complexo. O intervalo que contém o valor de $(1-w)^6$ é:

a) $(-\infty,-30]$

b) $(-30,-10]$

c) ..

d) $(10,30]$

e) $(30,\infty)$

15. Os números complexos z e w têm argumentos que variam de 0 a 2π radianos e satisfazem as relações $|w|=|z|$; $z+\overline{z}=\sqrt{2}$; $iz=\overline{z}$ e $\arg(z)-\arg(w)=\frac{5\pi}{3}$. Calcule $\text{Im}(z)+\mathbb{R}\text{e}(w)$.

16. Os pontos que representam os números complexos z_1 e z_2 encontram-se sobre uma circunferência no plano complexo, cujo centro é o ponto associado ao número complexo i e o raio é 1. A parte real de $\overline{z_1}\cdot z_2$ é 0 e o argumento de z_1 é $\frac{\pi}{6}$. O valor de z_2 é:

a) $1+i$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

17. (ITA 2012) Seja $z=n^2(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}45^\circ)$ e $w=n(\cos 15^\circ+i\,\text{sen}15^\circ)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3}+i$.

b) $2(\sqrt{3}+i)$.

c) $2(\sqrt{2}+i)$.

d) $2(\sqrt{2}-i)$.

e) $2(\sqrt{3}-i)$.

18. (IME 2011) Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left[\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right] = \dfrac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.

OBS.: $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w.

19. (IME) Sabendo que $x^{-1} + x = 1.\cos\theta$ x, mostre que é real a seguinte expressão, e a calcule, em função de θ: $x^{-2008} + x^{2008}$.

20. (ITA) O número complexo z a seguir possui argumento igual a 45°. Determine o valor de a.

$$z = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a.\cos a} + i.\frac{1 - 2\cos a + \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a} \;\; ; \;\; a \in \left(0.\pi/2\right)$$

21. (ITA) Sendo $2.\operatorname{cis}\left(\pi/20\right)$ uma raiz quíntupla de w. Determine as raízes da equação:

$$z^4 - 2.z^2 + \frac{w - 16i\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = 0 .$$

1.

a) $z \cdot w = 6\text{cis}90^0 = 6i.$

b) $w^3 = 27\text{cis}120^0 = -\dfrac{27}{2} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2}i.$

c) $z^6 = 64\text{cis}300^0 = 32 - 32\sqrt{3}i.$

2.

a = 2 cis 30° b = 3 cis α

a . b = 6 cis (30° + α) = 6 cos (30° + α) + [6 sen (30° + α)] i

a . b real $\Rightarrow$ 6 sen (30° + α) = 0 $\Rightarrow$ 30° + α = 180° k $\Rightarrow$ k = 1, temos $\boxed{\alpha = 150°}$

RESPOSTA: α = 150°

3.

a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

d) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $z = 3(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi)$

4.

$$z=\alpha \text{ cis } \frac{\pi}{2}=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{2}+i \text{ sen } \frac{\pi}{2}\right)=\alpha\cdot i$$

$$\omega=z^2=\alpha^2 i^2=-\alpha^2, \text{ com } \alpha^2<\alpha$$

Pois $0<\alpha<1$

Como $\alpha<1$, $\alpha^2<\alpha$

Portanto o ponteiro das horas aponta para o 9 e o dos minutos para o 12.

A hora do jantar secreto é às 9h da noite ou 21h.

5.

$$z=\frac{\sqrt{3}-3i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{\sqrt{3}i-3i^2}{-1}=-3-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\cdot\text{cis}\frac{7\pi}{6}$$

RESPOSTA: C

6.

RESPOSTA: D

$$z=(2\text{cis}\frac{\pi}{3})^5=32\text{cis}\frac{5\pi}{3}\Leftrightarrow \bar{z}=32(\cos\frac{5\pi}{3}-i\cdot\text{sen}\frac{5\pi}{3}).$$

7.

$$z=z_1\cdot z_2=(\text{sen}\alpha+i\cos\alpha)(\cos\alpha-i\text{sen}\alpha)\Leftrightarrow z=2\text{sen}\alpha\cos\alpha+i(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow z=\text{sen}2\alpha+i\cos2\alpha\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\text{Re}(z)=\text{sen}2\alpha\in[-1,1]\\ \text{Im}(z)=\cos2\alpha\in[-1,1]\end{cases}$$

8.

$|z| = 2$

$$z = 2 \text{ cis } 120° = 2(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$

$$\bar{z}=-1-i\sqrt{3}.$$

RESPOSTA:C

9.

Como $z=\rho\cdot e^{i\theta}$, $e^{i\theta}=(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta)$

$\Leftrightarrow z=\rho(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta)$

$\Leftrightarrow z=2a\cos^2\theta+2a\mathrm{sen}\theta\cos\theta i$

$\Leftrightarrow z=\cancel{2}a\left(\frac{1+\cos 2\theta}{\cancel{2}}\right)+a\mathrm{sen}2\theta i \qquad \Leftrightarrow z=(a+a\cos 2\theta)+(a\mathrm{sen}2\theta)i$

Sendo x a parte real e y a parte imaginária de z,

$$\begin{array}{l} (x-a)^2=a^2\cos^2 2\theta \\ \quad y^2=a^2\mathrm{sen}^2 2\theta \quad + \\ \hline (x-a)^2+y^2=a^2\underbrace{(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)}_{1} \end{array}$$

$(x–a)^2 + y^2 = a^2$: circunferência de centro (a,0) e raio a.

10.

$z=(2-xi)(x+2i)=2x+4i-x^2i-2xi^2=2x+4i-x^2i-2x(-1)=4x+(4-x^2)i$

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

RESPOSTA: D

11.

Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, então $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

$|z|+z=1+3i\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=1+3i\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=1\\ y=3\end{cases}$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+9}+x=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=1-x\Leftrightarrow x^2+9=1-2x+x^2\ \wedge\ x\le 1\Leftrightarrow x=-4$

$\Leftrightarrow z=-4+3i\Rightarrow|z|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

RESPOSTA: D

12.

$w=z_1^8=\left[2\left(\cos 10^\circ+i\mathrm{sen}10^\circ\right)\right]^8=2^8\mathrm{cis}80^\circ$

$\sqrt[8]{w}=2\mathrm{cis}\frac{80^\circ+360^\circ K}{8}=2\mathrm{cis}\left(10^\circ+45^\circ K\right)$, $K\in 0,1,2,3,4,5,6,7$

Logo, a soma dos argumentos principais é a soma de uma P.A. de oito termos com primeiro termo 10° e razão 45°, ou seja, $\frac{\left(10^\circ+10^\circ+45^\circ\cdot 7\right)\cdot 8}{2}=1340^\circ$

RESPOSTA: D

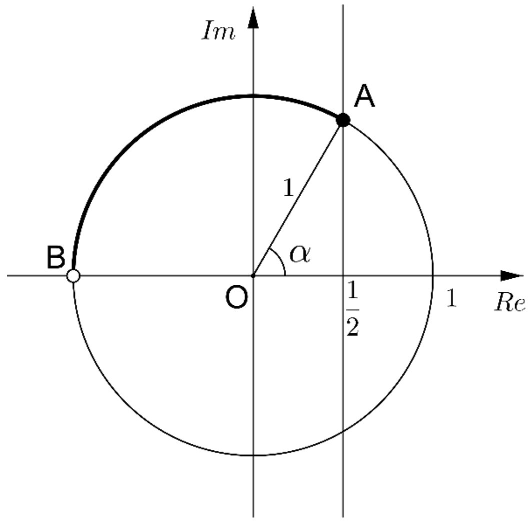
13.
RESOLUÇÃO: (O enunciado dessa questão foi adaptado para ficar mais coerente)

$$\text{Re}\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=\text{Re}\left(z_1+z_2\right)=\text{Re}\left(z_1\right)+\text{Re}\left(z_2\right)x+0=x$$

$$\text{Im}\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=\text{Im}\left((x+i)+\left(-\frac{1}{2}i\right)\right)=\text{Im}\left(x+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}$$

$$\text{Re}\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\le\text{Im}\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\Leftrightarrow x\le\frac{1}{2}\quad(*)$$

$$\left|z_3\cdot z_4\right|=\left|z_3\right|\left|z_4\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow x^2+y^2=1\quad(**)$$



Representando as condições (*) e (**) no plano de Argand-Gauss e considerando que $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}_+^*$, obtém-se, para o lugar geométrico dos números complexos $z_4=x+yi$, um arco de circunferência com extremidades em A e B.

Dentre esses números complexos, o de menor argumento é o com extremidade em A, cujo argumento é α tal que $\cos\alpha=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}\text{rad}$.

RESPOSTA: D

14.
Como w é uma raiz cúbica da unidade $w^3=1$.

Como $w\neq1$ e $w^3-1=(w-1)\left(w^2+w+1\right)=0\Rightarrow w^2+w+1=0\Leftrightarrow w^2+w=-1$

Aplicando a fórmula do binômio de Newton, temos:

$$(1-w)^6=1-6w+15w^2-20w^3+15w^4-6w^5+w^6=1-6w+15w^2-20+15w-6w^2+1=$$
$$=-18+9\left(w+w^2\right)=-18+9\cdot(-1)=-27\in\left(-30,-10\right]$$

RESPOSTA: B

15.

$$z=a+bi\Rightarrow \bar{z}=a-bi$$

$$z+\bar{z}=\sqrt{2}\Rightarrow 2a=\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$iz=\bar{z}\Rightarrow i(a+bi)=a-bi\Leftrightarrow -b+ai=a-bi\Leftrightarrow a=-b\Rightarrow b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=1\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}i\right)=1\cdot\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\Rightarrow |z|=1 \text{ e } \arg(z)=\frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(w)=\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{12} \text{ e } |w|=1\Rightarrow w=1\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}$$

$$\operatorname{Im}(z)+\mathbb{R}e(w)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{12}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

RESPOSTA: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

16.

No plano complexo seja O a origem e C o ponto associado ao complexo i, então a circunferência citada no enunciado tem centro em C e passa por O.

$$\arg z_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow O\hat{Z}_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow O\hat{C}Z_1=C\hat{O}Z_1=C\hat{Z}_1O=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \text{o triângulo } COZ_1 \text{ é equilátero}\Rightarrow OZ_1=1$$

$$\Rightarrow z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow \bar{z}_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=x+yi\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\bar{z}_1\cdot z_2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}=0\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x$$

Se $z_2=x+yi$ está na circunferência de centro i e raio 1, temos:

$$|z_2-i|=1\Rightarrow |x+(y-1)i|=1\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow\left(-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+(y-1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-6y=0\Leftrightarrow y=0 \text{ ou } y=\frac{3}{2}\Rightarrow z_2=0 \text{ ou } z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

RESPOSTA: D

17.

$$(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^n=\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\operatorname{cis}\left(45^\circ\cdot n\right)\in\mathbb{R}\Rightarrow n=4$$

$$\frac{z}{w}=\frac{n^2\left(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right)}{n\left(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ\right)}=n\left(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen}30^\circ\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=2\left(\sqrt{3}+i\right)$$

RESPOSTA: B

18.

$$z=x+yi\Rightarrow \frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x+yi)-(10+6i)}{(x+yi)-(4+6i)}=\frac{(x-10)+(y-6)i}{(x-4)+(y-6)i}=\frac{[(x-10)+(y-6)i][(x-4)-(y-6)i]}{(x-4)^2+(y-6)^2}=$$

$$=\frac{(x-10)(x-4)+(y-6)^2}{(x-4)^2+(y-6)^2}+\frac{6(y-6)}{(x-4)^2+(y-6)^2}i$$

$$\arg\left[\frac{z-z_1}{z-z_2}\right]=\frac{\pi}{4}\text{ e } tg\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow Re\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=Im\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)$$

$$\Rightarrow (x-10)(x-4)+(y-6)^2=6(y-6)\Leftrightarrow (x-7)^2+(y-9)^2=18$$

$$\Rightarrow |z-7-9i|=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\,.$$

RESPOSTA: $3\sqrt{2}$

19.

$$x^{-1}+x=2.\cos\theta\Rightarrow \frac{1+x^2}{x}=2.\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2-(2\cos\theta)x+1=0\Rightarrow \frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4(\cos^2\theta-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\cos\theta\pm 2.\sqrt{-sen^2\theta}}{2}=\cos\theta\pm i.sen\theta=cis(\pm\theta)$$

Com isso:

$$x^{-2008}+x^{2008}=\left(cis(\pm\theta)\right)^{-2008}+\left(cis(\pm\theta)\right)^{2008}$$

$$=\left(cis(\mp 2008.\theta)\right)+\left(cis(\pm 2008.\theta)\right)$$

$$=2.\cos(2008.\theta)$$

$$\boxed{x^{-2008}+x^{2008}=2.\cos(2008.\theta)}$$

20.

O número complexo z possui argumento igual a 45° quando sua parte imaginária for igual sua parte real. Vejamos a condição para que isso ocorra:

$$\frac{1-\cos a}{sen a.\cos a}=\frac{1-2\cos a+2.sen a}{sen 2a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos a}{sen a.\cos a}=\frac{1-2\cos a+2.sen a}{2.sen a.\cos a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos a=1-2\cos a+2 sen a\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow sen a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{6}}$$

21.

$$w=\left(2.\text{cis}\frac{\pi}{20}\right)^5=32.\text{cis}\frac{\pi}{4}=16\sqrt{2}+i.16\sqrt{2}$$

$$z^4-2.z^2+\frac{w-16i\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=0\Rightarrow z^4-2.z^2+2=0\Rightarrow z^2=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=1\pm i$$

$$\Rightarrow z^2=\begin{cases}\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow z=\begin{cases}2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}+k.\pi\right)\\ 2^{1/4}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}+k.\pi\right)\end{cases}k=0,1$$

$$\boxed{z=2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right),2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right),2^{1/4}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right),2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right)}$$