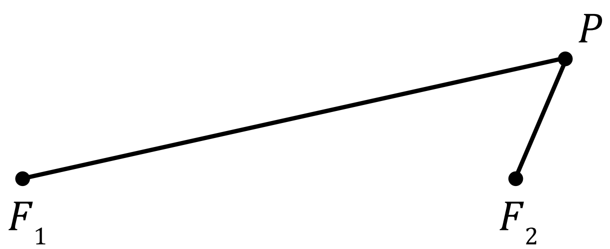
HIPÉRBOLE

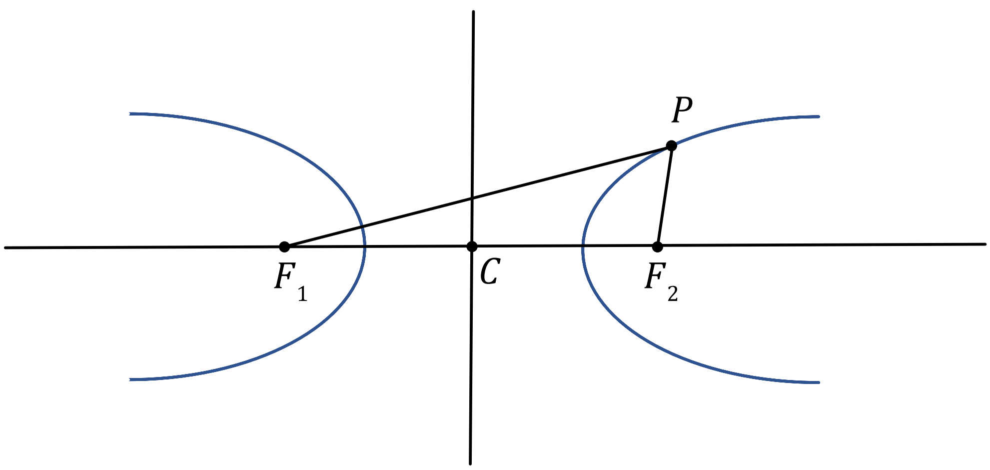
No módulo anterior, vimos como são formadas as cônicas, em uma delas está a hipérbole, que é gerada por um corte em um cone duplo que se inicia pela base e saia pelo topo. Em geral, hipérboles são formas geométricas cuja a diferença das distâncias entre um ponto e os focos é sempre a mesma. Aqui também podemos elencar dois elementos que estarão presentes no estudo de hipérboles: focos e distância. Para realizar a construção de uma hipérbole iniciamos com dois pontos, aos quais chamaremos de focos F_1 e F_2.

Podemos afirmar que sempre é possível escolher um número real positivo r de modo que r seja menor que a distância entre os focos F_1 e F_2, ou seja, $d(F_1, F_2)>r$. Vamos considerar agora um ponto P qualquer de modo que a distância entre P e F_1 menos a distância entre P e F_2 seja igual ao valor de r escolhido. Algébrica e geometricamente falando:

$$|d(F_1, P)-d(F_2, P)|=r$$



Todos os pontos que satisfazerem essa equação compõe a hipérbole de focos F_1 e F_2. Após encontrarmos todos os pontos que satisfazem a equação chegamos no seguinte resultado:



ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

Após obtida nossa hipérbole, vamos conhecer alguns de seus elementos. O primeiro elemento é o eixo real que consiste no segmento A_1A_2, no qual A_1 e A_2 são os pontos de interseção da reta que contém os focos F_1 e F_2, também chamados de vértices da hipérbole. O eixo real possui tamanho $2a$, onde a corresponde à metade do tamanho do segmento A_1A_2, conforme ilustrado abaixo. O segundo elemento é a distância focal que como o próprio nome já indica, consiste na distância entre os focos, cujo tamanho é $2c$. O terceiro elemento é o eixo imaginário formado pelo segmento B_1B_2 cuja distância entre eles é $2b$, ou seja, $d(B_1, B_2)=2b$ no qual b deve satisfazer a relação $a^2+b^2=c^2$.

Legenda

$2a$ – Eixo real

$2b$ – Eixo imaginário

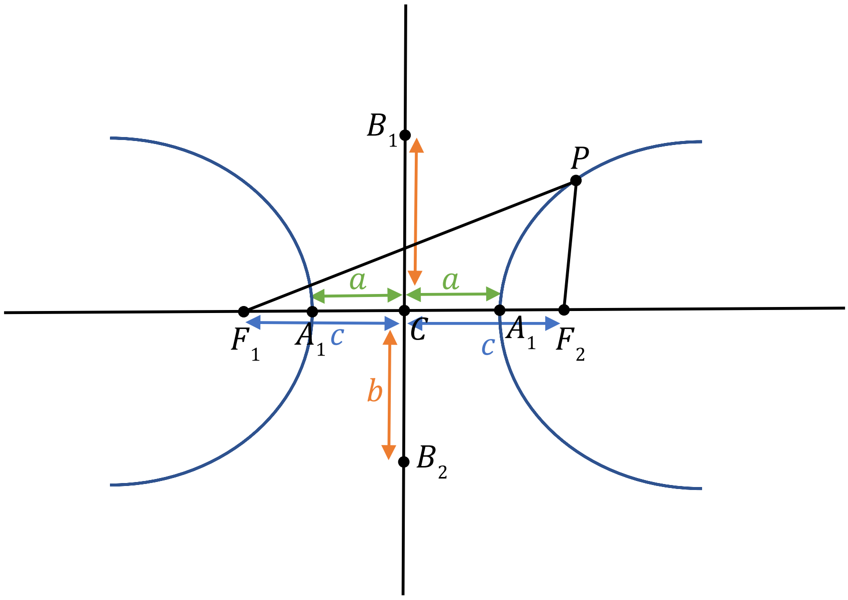
$2c$ – Distância focal

F_1 e F_2 – Focos

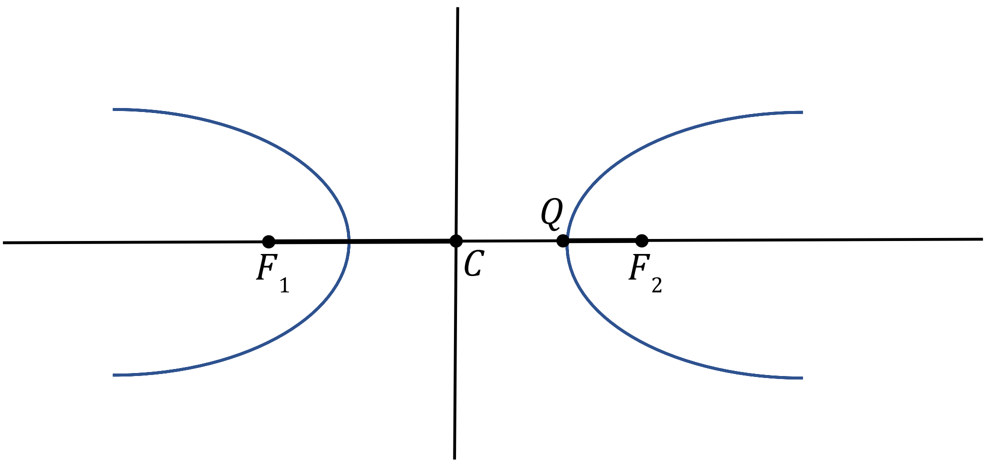
P – Ponto da hipérbole

A_1 e A_2 – Extremos do eixo real

B_1 e B_2 – Extremos do eixo imaginário



Com todos os elementos da hipérbole demonstrados, tomemos o ponto Q sobre uma hipérbole de focos F_1 e F_2:



Pela relação que vimos anteriormente, $|d(F_1, Q)-d(F_2, Q)|=r$. Porém, sabemos que a distância de F_1 até Q é a soma da distância do centro até o foco (c) mais a medida da distância do centro até um dos vértices do eixo real (a), ou seja, $d(F_1, Q)=a+c$. Além disso, a distância de F_2 até Q é a diferença entre a distância do centro ao foco (c) com a distância do centro até um dos vértices do eixo real (a), isto é, $d(F_1, Q)=c-a$. Sendo assim, r pode ser expresso como:

$$|d(F_1, Q)-d(F_2, Q)|=r$$

$$|a+c-(c-a)|=r$$

$$|2a|=r$$

Como as medidas são positivas, então o valor r é igual a $2a$. Dessa forma, a relação que obtemos é:

$$|d(F_1, Q)-d(F_2, Q)|=2a$$

EXCENTRICIDADE

Ao contrário da elipse, na hipérbole o valor de c é sempre maior do que o valor de $a(c>a)$, neste caso, a excentricidade, razão entre a distância focal e o eixo real:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a},$$

será um valor $e>1$.

EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Vamos conhecer duas formas que a equação da hipérbole pode aparecer. Elas estão relacionadas ao fato do eixo real estar na horizontal ou na vertical. Caso o eixo real esteja na horizontal, a equação que descreve a hipérbole de centro $C=(x_c, y_c)$ e focos F_1 e F_2 será:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Quando o eixo real estiver na vertical, a equação terá alteração na ordem dos numeradores, resultando em:

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1.$$

Por exemplo, a equação $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y+3)^2}{3^2}=1$. Temos que o centro é $C=(2, -3)$, $a=4$ e $b=3$. Com essas informações encontramos os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2. Para os pontos A_1 e A_2 precisamos lembrar que eles pertencem ao mesmo segmento horizontal, ou seja, o valor de y não muda, logo, basta calcular:

$$x_c-x_{A_1}=a \text{ e } x_{A_2}-x_c=a$$

$$2-x_{A_1}=4 \text{ e } x_{A_2}-2=4$$

$$x_{A_1}=-2 \text{ e } x_{A_2}=6$$

Logo os vértices são $A_1=(-2,-3)$ e $A_2=(6,-3)$. Analogamente, encontramos os valores B_1 e B_2, observando que agora o valor de x que não varia, uma vez que eles estão em um segmento vertical:

$$y_c-y_{B_1}=b \text{ e } y_{B_2}-y_c=b$$

$$-3-y_{B_1}=3 \text{ e } y_{B_2}-(-3)=3$$

$$y_{B_1}=-6 \text{ e } y_{B_2}=0$$

Logo os pontos são $B_1=(2,0)$ e $B_2=(2,-6)$. Para encontrar os focos, primeiro precisamos determinar o valor de c utilizando $a^2+b^2=c^2$.

$$a^2+b^2=c^2$$

$$4^2+3^2=c^2$$

$$25=c^2$$

$$c=\pm 5$$

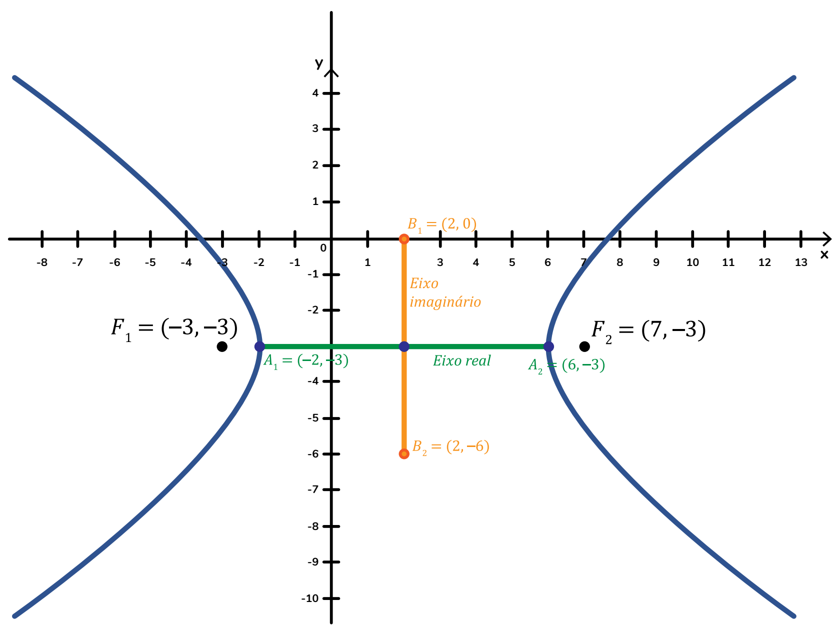
Assim, o valor de conveniente aqui é $c=5$. Agora, podemos usar uma lógica semelhante àquela usada para encontrar os pontos A_1 e A_2, pois os focos estão sempre no sentido vértices. Logo, estando na horizontal, o y não varia, e os valores x de cada um dos focos estão à uma distância c deles, resultando

$$x_{F_1}=x\_c-c \text{ e } x_{F_2}=x\_c+c$$

$$x_{F_1}=2-5 \text{ e } x_{F_2}=2+5$$

$$x_{F_1}=-3 \text{ e } x_{F_2}=7$$

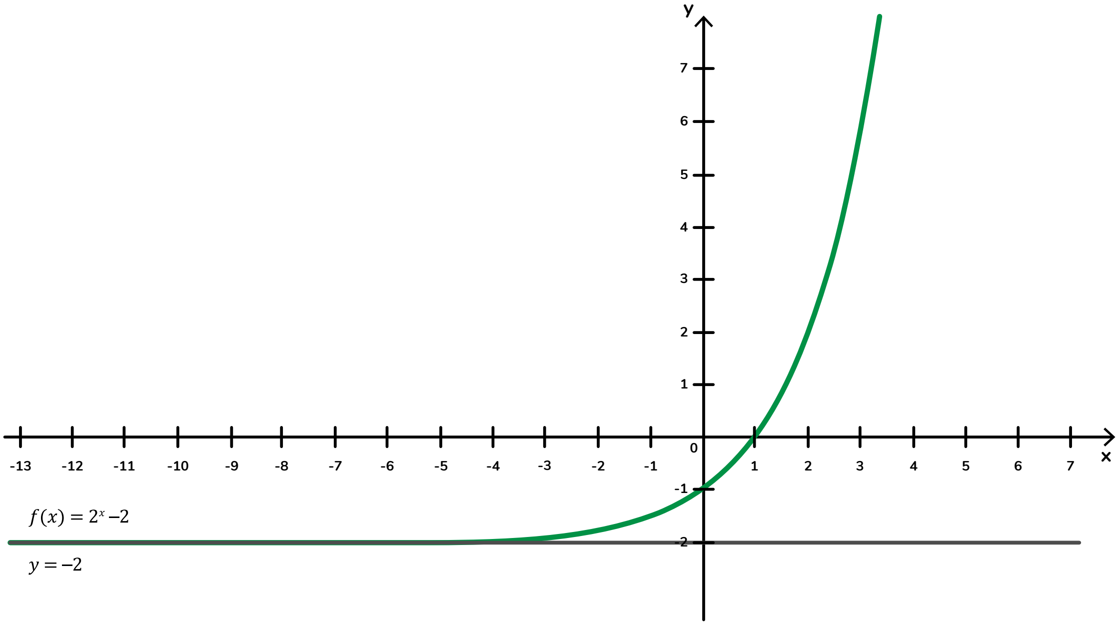
Portanto, os focos serão $F_1=(-3,-3)$ e $F_2=(7,-3)$.



Utilizando essas relações apresentadas, podemos encontrar os elementos que compõe qualquer hipérbole, estando o eixo real na vertical ou horizontal.

ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

Imagine que você precise estudar objetos matemáticos no infinito, não parece uma tarefa fácil, não é mesmo? No caso de algumas curvas, temos um conceito que muitas vezes facilita esse estudo, com um pequeno preço a ser pago. Assíntota é uma reta que se assemelha ao comportamento de uma curva no infinito. Por exemplo, para funções exponenciais é sempre possível determinar uma reta que se assemelha ao comportamento de uma reta no infinito. Vamos utilizar a função $f(x)=2^x-2$. Afirmo que a assíntota à essa função tem equação $y=-2$, conforme expresso na imagem abaixo.



A depender do que precisamos, ao invés de calcular $f(-6)$ cujo resultado é $-\frac{127}{64}=-1.984375$, podemos utilizar o valor -2, assim como para qualquer outro valor para qualquer $x<-6$. Aqui, o preço a ser pago é um erro de $0{,}015625$. Contudo, a depender do contexto, esse erro é inaceitável, alto demais, para previsões do tempo, por exemplo, qualquer mínima alteração nos cálculos prediz resultados muito distintos dos reais. Essa pequena discussão tem o objetivo único de mostrar o que são assíntotas e como elas podem nos ajudar. Assíntotas podem não existir, podem haver uma ou várias, isso dependerá da curva analisada.

O foco deste tópico não é utilizar as assíntotas, nem pensar nas suas aplicações, mas encontra-la quando estivermos em posse da equação de uma hipérbole. Vamos considerar uma hipérbole centrada num ponto do plano $C=(x_0, y_0)$ com eixo real na horizontal, cuja equação seja:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

a equação das assíntotas à essa hipérbole serão:

$$r_1:\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \text{ e } r_2:\ y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

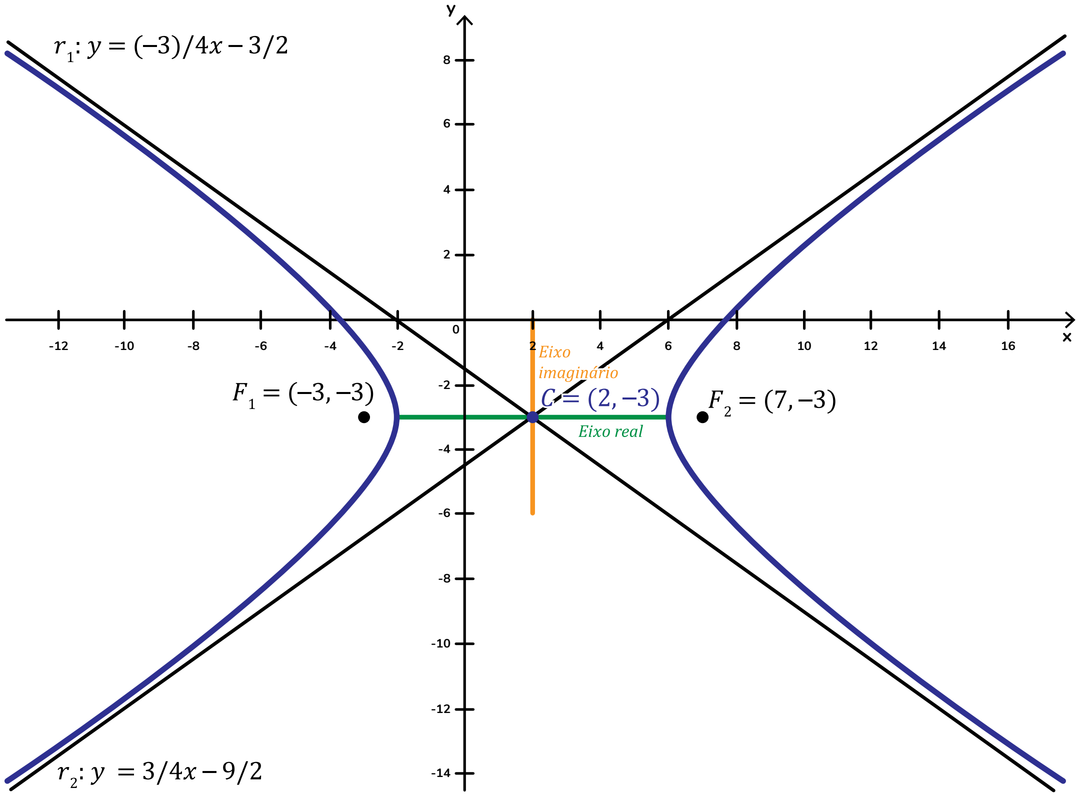
Considere a hipérbole de equação $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$. Temos que o centro é $C{=}(2,-3)$, $a^2{=}16$ e $b^2{=}9$, ou seja, $a{=}4$ e $b{=}3$. As equações das assíntotas serão:

$$r_1:\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \text{ e } r_2:\ y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$r_1:\ y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 2) \text{ e } r_2:\ y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

Portanto, as equações das retas assíntotas da hipérbole cuja equação é $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ são:

$$r_1:\ y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2} \text{ e } r_2:\ y = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}$$



ANOTAÇÕES