Terceira Lista de Preparação para a XLI IMO
e XV Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

PROBLEMA 1

Encontre todos os inteiros positivos n tais que existe um polinômio P, com coeficientes reais, satisfazendo $P(x^{1998} - x^{-1998}) = x^n - x^{-n}$ para todo real não nulo x.

PROBLEMA 2

Existe uma seqüência infinita $\{x_n\}$ de reais satisfazendo simultaneamente as seguintes condições?

(i) $|x_n| \leqslant 0{,}666$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(ii) $|x_m - x_n| \geqslant \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{m(m+1)}$ para quaisquer inteiros positivos distintos m, n.

PROBLEMA 3

São dados 75 pontos em um cubo de aresta 1, sendo que não há três colineares. Mostre que existe um triângulo cujos vértices estão entre estes pontos e cuja área é menor ou igual a $7/72$.

PROBLEMA 4

As seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são definidas por

$$x_n = \begin{cases} 365, & \text{se } n = 0 \\ x_{n-1}(x_{n-1}^{1986} + 1) + 1622, & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 16, & \text{se } n = 0 \\ y_{n-1}(y_{n-1}^{3} + 1) - 1952, & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Prove que $x_n \neq y_k$ para todos os inteiros positivos n, k.

PROBLEMA 5

Seja k um inteiro ímpar maior do que 1. Para n inteiro positivo, seja $f(n)$ o maior número tal que $2^{f(n)}$ divida $k^n - 1$. Determine $f(n)$ em termos de k e n.

PROBLEMA 6

Sejam G o baricentro e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Os prolongamentos de AG, BG e CG encontram novamente a circunferência circunscrita nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que

$$\frac{3}{R} \leqslant \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \leqslant \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right)$$

PROBLEMA 7

Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. As tangentes ao círculo de diâmetro BC passando por A tangenciam-no nos pontos P e Q. Prove que P, Q e H são colineares.

PROBLEMA 8

Seja f uma função de $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada real positivo c, existe um polinômio com coeficientes reais $P_c(x)$ satisfazendo $|f(x) - P_c(x)| \leqslant cx^{1998}$ para todo real x. Prove que $f(x)$ é também um polinômio.

PROBLEMA 9

Encontre o maior n satisfazendo a seguinte condição: existe um grafo com n vértices, cada vértice com grau menor ou igual a 4, tal que para quaisquer dois vértices A e B, ou eles são adjacentes ou existe um vértice C adjacente a ambos os vértices A e B.

O coelho da Páscoa determinou: prazo de entrega de 4 semanas.