# GEOMETRIA PLANA

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

# GEOMETRIA PLANA

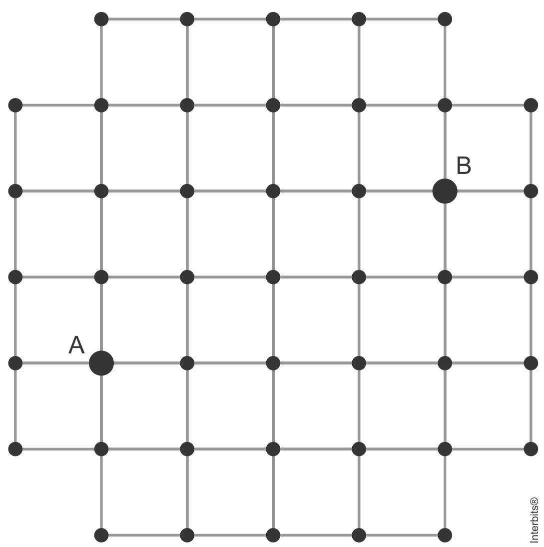
Conheça os conceitos básicos de geometria, aprenda sobre semelhança e congruência de triângulos, a calcular áreas de figuras planas e muito mais!

**Esta subárea é composta pelos módulos:**

1. Exercícios Aprofundados: Fundamentos da Geometria Plana, Ângulos e Triângulos
2. Exercícios Aprofundados: Semelhança de Triângulos, Polígonos e Quadriláteros
3. Exercícios Aprofundados: Circunferência, Áreas e Polígonos Regulares

# FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA PLANA, ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

**1.** (ESPM 2019) A figura abaixo representa uma parte de um bairro, onde os segmentos são as ruas e os pontos são as esquinas. Como só podemos caminhar pelas ruas, a distância entre os pontos $A$ e $B$ é de $6$ quarteirões.




O número de esquinas assinaladas no mapa, que são equidistantes de $A$ e $B$, é igual a:

a. 5

b. 6

c. 9

d. 8

e. 7

**2.** (UEM 2016) Usando conhecimentos sobre trigonometria, assinale o que for **correto**.

01. Num triângulo isósceles, a base mede $10$ e os ângulos da base medem, cada um deles, $\frac{\pi}{4}$. Portanto o perímetro desse triângulo é $10+10\sqrt{2}$.

02. Vale a igualdade $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

04. Se $y=\dfrac{\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{2}+\operatorname{cossec}\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}$ e $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, então $y=1$.

08. Se $\operatorname{tg}x=a$ e $\operatorname{cotg}x=b$, então $a\cdot b=1$.

16. Supondo que $\operatorname{sen}x=\frac{3}{4}$ e $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$, então $\sec x=\frac{1}{4}$.

**3.** (IME 2016) Em um triângulo $ABC$, o ponto $D$ é o pé da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Sabe-se que $\overline{AC}=\overline{AD}$, $r=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e que $\hat{C}=\alpha$.

Portanto o valor de $\operatorname{sen}^2\alpha$ é

a. $\frac{3r-1}{4}$

b. $\frac{3r-1}{4r}$

c. $\frac{r+3}{4}$

d. $\frac{3r+1}{4r}$

e. $\frac{3r+1}{4}$

**4.** (ESC. NAVAL 2016) Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de $15°$. O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

a. $3(\sqrt{3}+2)$

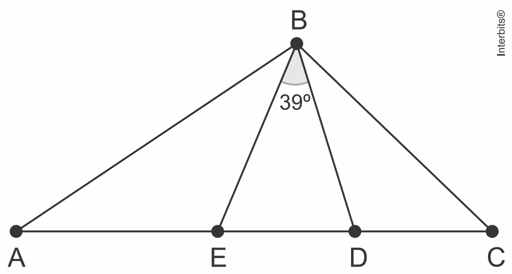
b. $4(2\sqrt{3}+3)$

c. $\sqrt{8\sqrt{3}+12}$

d. $\sqrt{2}(2\sqrt{3}+3)$

e. $6(\sqrt{2}+1)$

**5.** (FGV 2015) A figura representa um triângulo $ABC$, com $E$ e $D$ sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que $AB = AD$, $CB = CE$ e que $E\hat{B}D$ mede $39°$.




Nas condições dadas, a medida de $A\hat{B}C$ é

a. $102°$

b. $108°$

c. $111°$

d. $115°$

e. $117°$

**6.** (UEPG 2014) Em um triângulo, as medidas dos lados, em cm, são números inteiros consecutivos e o ângulo maior é igual ao dobro do ângulo menor. Se o cosseno do ângulo menor vale $\frac{3}{4}$, assinale o que for correto.

01. O perímetro do triângulo é igual a $15\text{cm}$.

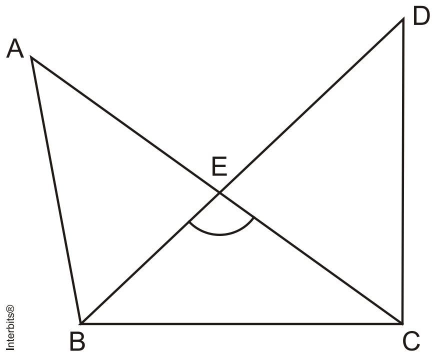
02. A altura relativa ao lado maior é igual a $\frac{\sqrt{17}}{4}\text{cm}$.

04. O seno do ângulo maior vale $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

08. A área do triângulo vale $\frac{15\sqrt{7}}{4}\text{cm}^2$.

16. O triângulo é obtusângulo.

**7.** (IFSC 2014) Durante uma queda de luz, Carla e Sabrina resolveram brincar fazendo desenhos com as sombras das mãos. Para isso, pegaram duas lanternas diferentes, apontando os feixes de luz para a parede BC. Márcio, que estava no andar superior, observou tudo. A figura a seguir mostra a visão que Márcio tinha da situação. Dados: o ângulo entre as duas paredes CD e BC é 90° e DC=BC, sendo D o ponto onde Carla está e A o ponto onde se encontra Sabrina. Também sabemos que BEC vale 75°.




Com base nas informações, analise as proposições abaixo e assinale a soma da(s) **CORRETA**(**S**).

01. O ângulo BDC vale 45°.

02. O ângulo BAC vale 80°.

04. O ângulo BCE vale 60°.

08. O ângulo CED vale 105°.

16. O ângulo ABE vale 80°.

32. O ângulo ECD vale 60°.

**8.** (UECE 2014) No triângulo OYZ, os lados OY e OZ têm medidas iguais. Se W é um ponto do lado OZ tal que os segmentos YW, WO e YZ têm a mesma medida, então, a medida do ângulo YÔZ é

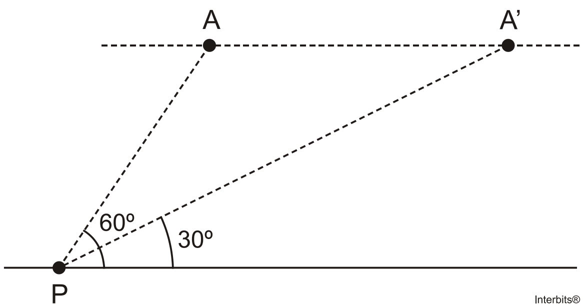
a. 46°.

b. 42°.

c. 36°.

d. 30°.

**9.** (ESPM 2014) Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo.




A velocidade desse avião era de:

a. 180 km/h

b. 240 km/h

c. 120 km/h

d. 150 km/h

e. 200 km/h

**10.** (ITA 2014) Em um triângulo isósceles $ABC$, cuja área mede $48\,cm^2$, a razão entre as medidas da altura $AP$ e da base $BC$ é igual a $\frac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $AB$ e $AC$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se $\alpha$ é o ângulo formado pela base $BC$ com a mediana $BM$, relativa ao lado $AC$, então $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

a. Apenas I.

b. Apenas II.

c. Apenas III.

d. Apenas I e III.

e. Apenas II e III.

**11.** (UEM 2013) Considere um triângulo ABC com medidas $\overline{AB} = 5\,cm$, $\overline{AC} = 2\,cm$ e $\overline{BC} = 4\,cm$. Sejam D o ponto médio de $BC$ e E o ponto médio de $AB$. Assinale o que for **correto**.

01. Os triângulos ABC e EBD são congruentes.

02. A área do triângulo ABC é menor do que 4 cm$^2$.

04. O triângulo EBD é obtusângulo.

08. O centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC está no interior desse triângulo.

16. A área do quadrilátero AEDC é o triplo da área do triângulo EBD.

**12.** (UFPR 2010) Com base nos estudos de geometria, identifique as afirmativas a seguir como verdadeiras (V) ou falsas (F).

(  ) Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

(  ) A razão entre dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{7}$. O complemento do menor vale 140 graus.

(  ) A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles que gira em torno de um dos catetos, gerando um sólido cujo volume é $\frac{\pi}{3}\text{cm}^3$, é $\sqrt{2}$ cm., é 2 cm.

(  ) Se três retas são, duas a duas, reversas e não paralelas a um mesmo plano, então, por qualquer ponto de uma das retas, passa uma reta que se apoia nas outras duas.

(  ) Se um polígono regular possui, a partir de um dos seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono, então esse polígono é um dodecágono.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, de cima para baixo.

a. V – F – V – F – V.

b. F – V – F – V – F.

c. F – V – V – F – V.

d. V – V – V – V – V.

e. V – F – F – F – F.

**13.** (ITA 2020) Seja $A$ um ponto externo a uma circunferência $\lambda$ de centro $O$ e raio r. Considere uma reta passando por $A$ e secante a $\lambda$ nos pontos $C$ e $D$ tal que o segmento $\overline{AC}$ é externo a $\lambda$ e tem comprimento igual a r. Seja $B$ o ponto de $\lambda$ tal que $O$ pertence ao segmento $\overline{AB}$ Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a. $25°$.

b. $30°$.

c. $35°$.

d. $40°$.

e. $45°$.

**14.** (EFOMM 2020) Seja $ABC$ um triângulo inscrito em uma circunferência de centro $O$. Sejam $O'$ e $E$ o incentro do triângulo $ABC$ e o ponto médio do arco $BC$ que não contém o ponto $A$, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos $EB$, $EO'$ e $EC$.

a. $EB = EO' = EC$

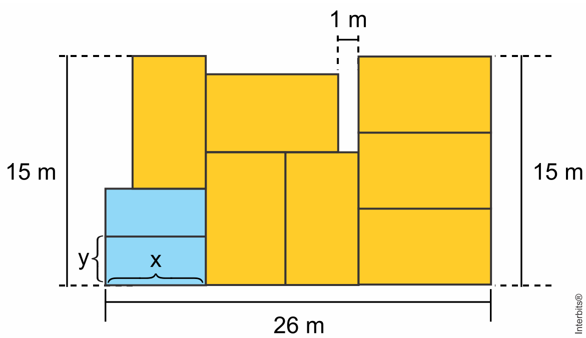
b. $EB < EO' = EC$

c. $EB > EO' > EC$

d. $EB = EO' > EC$

e. $EB < EO' < EC$

**15.** (FAMERP 2019) A figura, feita em escala, indica um painel formado por sete retângulos amarelos idênticos e dois retângulos azuis idênticos. Cada retângulo azul tem dimensões $x$ e $y$, ambas em metros.




Na situação descrita, $x - y$ é igual a

a. 2,5 m.

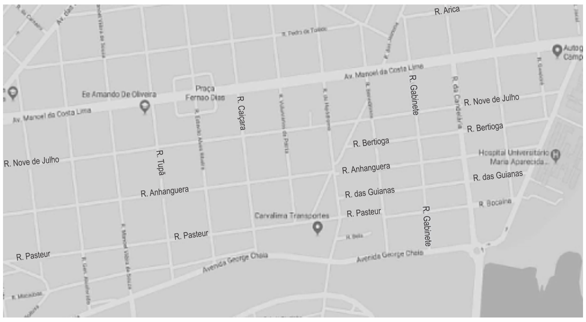
b. 4 m.

c. 3,5 m.

d. 3 m.

e. 2 m.

**16.** (UFMS 2019) A figura a seguir mostra parte do mapa da cidade de Campo Grande – MS, no qual se leem os nomes de algumas ruas e avenidas.




(Disponível em: https://www.google.com.br/maps/place/Campo+Grande,+MS/@-20.5001896,-54.6233011,16.39z/data=!4m5!3m4!1s0x9486e6726b2b9f27:0xf5a8469ebc84d2c1!8m2!3d-20.4697105!4d-54.6201211. Acesso em 10 nov. 2018).

Fazendo uma análise das vias como segmentos de retas, são paralelas e concorrentes, respectivamente:

a. R. Tupã e R. Anhanguera, R. Gabinete e R. Arica.

b. R. Bertioga e R. das Guianas, R. Tupã e R. Caiçara.

c. R. Tupã e R. Nove de Julho, R. Bertioga e R. Pasteur.

d. R. Bertioga e R. Pasteur, R. Bertioga e R. das Guianas.

e. R. Bertioga e R. Nove de Julho, R. Tupã e R. Nove de Julho.

**17.** (EFOMM 2018) Num triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida $50°$. Calcule o ângulo interno do vértice A.

a. $110°$

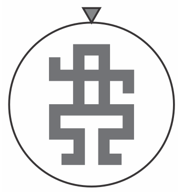
b. $90°$

c. $80°$

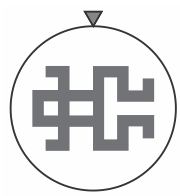
d. $50°$

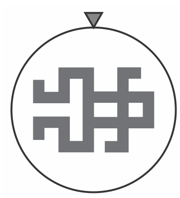
e. $20°$

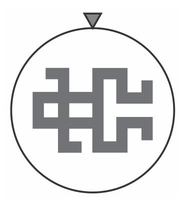
**18.** (FATEC 2017) Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

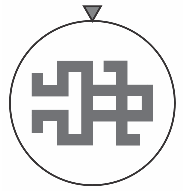


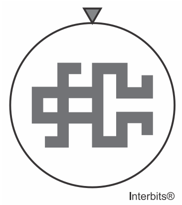
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

a. 

b. 

c. 

d. 

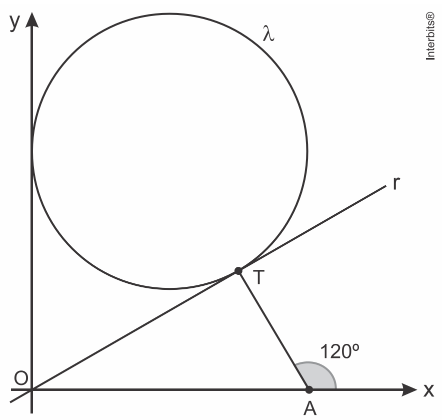
e. 


**19.** (INSPER 2016) No plano cartesiano ortogonal de origem $O(0, 0)$ estão representadas:

- uma circunferência $\lambda$, tangente à reta $r$ em $T$ e ao eixo das ordenadas;

- o triângulo retângulo $OAT$, com $A(6, 0)$ e um ângulo externo de medida $120°$.

Sabe-se, ainda, que $r$ passa pela origem do plano.




Nas condições dadas, o raio de $\lambda$ tem medida igual a

a. $\frac{5}{2}$.

b. $2\sqrt{2}$.

c. $3$.

d. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

e. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

**20.** (ESPM 2016) Num mapa, uma estrada retilínea passa sucessivamente pelas cidades $A, B$ e $C$ e uma cidade $D$, distante $120$ km de $A$, está localizada de tal forma que o ângulo $D\hat{A}B$ mede $36°$. Um viajante fez o trajeto $AB, BD$ e $DC$, percorrendo em cada trecho a mesma distância. Se ele tivesse ido diretamente de $A$ até $C$, teria percorrido uma distância de:

a. $120$ km

b. $60\sqrt{3}$ km

c. $(120 \cdot \cos 36°)$ km

d. $\frac{120}{\cos 36°}$ km

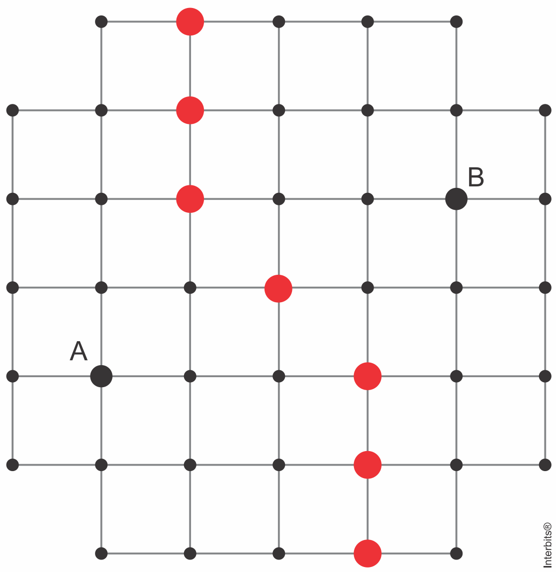
e. $140$ km

**ANOTAÇÕES**

# GABARITO

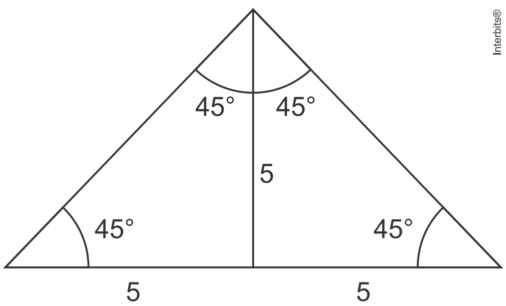
**1.** [E]

Os pontos que estão a mesma distância de $A$ e $B$ caminhando apenas pelas ruas, estão destacados na figura abaixo. São $7$ no total.




**2.** 01 + 04 + 08 = 13.

[01] Verdadeiro. Sendo cada um dos ângulos da base igual a $\pi/4 = 45°$, logo o ângulo faltante mede $90°$. Assim, traçando uma reta que divide o ângulo maior em dois iguais, até a base, dividindo-a também em duas partes iguais, pode-se dividir o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos de catetos $5$. Ou seja:




Por Pitágoras, pode-se concluir que a hipotenusa de cada um dos triângulos retângulos será igual a:

$$h^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow h = \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Assim, o perímetro do triângulo será:

$$p = 10 + 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10 + 10\sqrt{2}$$

[02] Falso. Calculando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[04] Verdadeiro. Calculando:

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$y = \frac{\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{cossec}\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)^2} \rightarrow y = 1$$

[08] Verdadeiro. Calculando:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \rightarrow \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1$$

[16] Falso. Calculando:

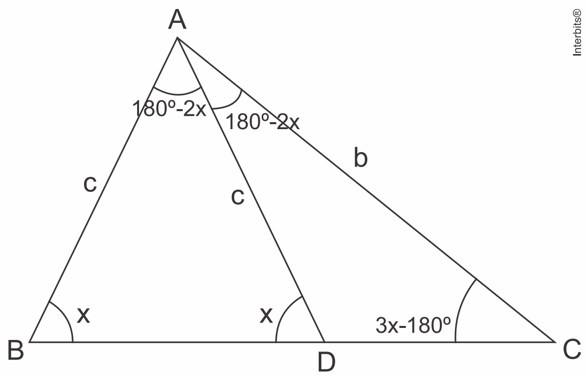
$$\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{3/4}{\cos x} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{3}$$

**3.** [D]

Sendo $\alpha = x$, pode-se desenhar, com base no enunciado:




Nota-se que $ABD$ é isósceles. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{b}{\text{sen } x} = \frac{c}{\text{sen}\,(3x - 180°)} \to \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } x}{-\text{sen } 3x}$$

$$r = \frac{-\text{sen } x}{\text{sen } x \cdot \left(3 - 4 \cdot \text{sen}^2 x\right)} = \frac{1}{4 \cdot \text{sen}^2 x - 3} \to \frac{1}{r} = 4 \cdot \text{sen}^2 x - 3$$

$$\text{sen}^2 x = \text{sen}^2 á = \frac{3r + 1}{4r}$$

**4.** [A]

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = 2R \to \frac{2\sqrt[4]{3}}{\text{sen}\,15°} = 2R \to \frac{2\sqrt[4]{3}}{\text{sen}(45° - 30°)} = 2R$$

$$2\sqrt[4]{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2R \to R = \sqrt[4]{3} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Apótema triângulo equilátero inscrito} \to R/2 \\ \text{Apótema hexágono regular inscrito} \to R\sqrt{3}/2 \end{array}\right\rangle \text{Produto} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

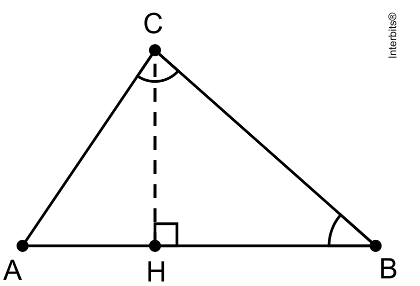
$$\frac{\left[\sqrt[4]{3} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3} = 3\left(\sqrt{3} + 2\right)$$

**5.** [A]

Seja $C\hat{B}D = x$. Logo, dado que $\overline{CB} = \overline{CE}$, vem $C\hat{E}B = x + 39°$. Em consequência, usando o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo BED é igual a $180°$, obtemos $E\hat{D}B = 102° - x$. Além disso, como $\overline{AB} = \overline{AD}$, segue que $A\hat{B}E = 63° - x$. Portanto, a resposta é $102°$.

**6.** 01 + 04 + 08 = 13.

Considere o triângulo ABC da figura, em que $A\hat{C}B = 2\theta$, $A\hat{B}C = \theta$, $\overline{AC} = x\,\text{cm}$, $\overline{BC} = (x + 1)\,\text{cm}$ e $\overline{AB} = (x + 2)\,\text{cm}$.




Sabemos que $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$.

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, vem

$$\begin{aligned} x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \frac{3}{4} &\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 + 6x + 5 - \frac{3}{2} \cdot (x^2 + 3x + 2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Em consequência, temos $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ e $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

Além disso, desde que $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ e $0° < \theta < 180°$, vem

$$\text{sen}^2\,\theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{16}}$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

[01] Correto. O perímetro do triângulo ABC é igual $4 + 5 + 6 = 15\,\text{cm}$.

[02] Incorreto. Seja H o pé da perpendicular baixada de C sobre AB. Assim, do triângulo BCH, obtemos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CH} = \frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

[04] Correto. O seno do ângulo maior vale

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

[08] Correto. De fato, a área do triângulo ABC vale

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}\,\text{cm}^2.$$

[16] Incorreto. O triângulo ABC é acutângulo, pois $6^2 < 4^2 + 5^2$.

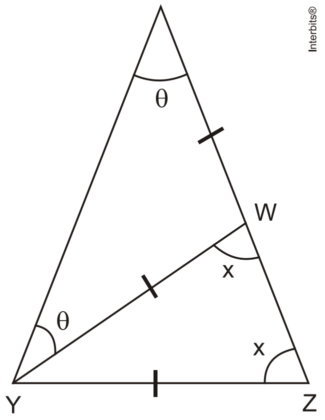
**7.** 01 + 04 + 08 = 13.

O triângulo DCB é isósceles, logo os ângulos que conseguimos calcular são:

$$C\hat{B}D = B\hat{D}C = 45°$$
$$D\hat{E}C = 180° - 75° = 105°$$
$$E\hat{C}B = 180° - 45° - 75° = 60°$$
$$ECD = 90° - 60° = 30°$$

Portanto, as proposições [01], [04] e [08] são verdadeiras e [02], [16] e [32] são falsas.

**8.** [C]




No $\Delta YWO: x = 2\cdot q$ (ângulo externo)

No $\Delta OYZ: q + 2x = 180° \Rightarrow 5\cdot q = 180° \Rightarrow q = 36°$

Logo, $\boxed{Y\hat{O}Z: 36°}$.

**9.** [B]

Seja $P'$ o pé da perpendicular baixada de $P$ sobre a reta $\overleftrightarrow{AA'}$. É fácil ver que $P'\hat{A}P = 60°$. Daí, como $P'\hat{A}P$ é ângulo externo do triângulo $AA'P$ segue-se que $A\hat{A'}P = 30°$, o que implica em $\overline{AA'} = \overline{AP} = 8\,\text{km}$.

Portanto, a velocidade do avião no trecho $AA'$ era de

$$\frac{8}{\frac{2}{60}} = 240\,\text{km/h}.$$

**10.** [A]

[I] Verdadeira. Sabendo que a área do triângulo $ABC$ mede $48\,\text{cm}^2$ e que $\overline{AP} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BC}$, vem

$$\begin{aligned}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AP} &\Leftrightarrow 48 = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}\\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = 3^2\cdot 4^2\\ &\Rightarrow \overline{BC} = 12\,\text{cm}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{AP} = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8\,\text{cm}.$$

Como $P$ é ponto médio de $BC$, é imediato, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo $APC$, que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\,\text{cm}$.

Portanto, sendo $M$ o pé da mediana relativa ao lado $AC$, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) - \overline{AC}^2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot(10^2 + 12^2) - 10^2}\\ &= \sqrt{122 - 25}\\ &= \sqrt{97}\,\text{cm}.\end{aligned}$$

[II] Falsa. De fato, sendo $G$ o baricentro do triângulo $ABC$, temos

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\cdot\overline{AP} = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8\,\text{cm}.$$

[III] Falsa. Sabendo que $\overline{BM} = \sqrt{97}\,\text{cm}$, vem $\overline{BG} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BM} = \frac{2\sqrt{97}}{3}\,\text{cm}$. Assim, do triângulo $BGP$, obtemos

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{BG}} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{97}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{97}}.$$

**11.** 02 + 04 + 16 = 22.

[01] **Incorreto**. Como $DE$ é uma base média do triângulo $ABC$, é fácil ver que os triângulos $ABC$ e $EBD$ são semelhantes, com razão de semelhança igual a $2$.

[02] **Correto**. Pela Fórmula de Heron, temos

$$\begin{aligned}(ABC) &= \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2} - 4\right)\left(\frac{11}{2} - 2\right)\left(\frac{11}{2} - 5\right)}\\ &= \sqrt{\frac{11}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{231}}{4}\\ &< \frac{\sqrt{256}}{4}\\ &= 4\,\text{cm}^2.\end{aligned}$$

[04] **Correto**. Como $ABC$ e $EBD$ são semelhantes, basta mostrar que $ABC$ é obtusângulo. De fato,

$$\overline{AB}^2 > \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 5^2 > 4^2 + 2^2.$$

[08] **Incorreto**. Do item [04] sabemos que $ABC$ é obtusângulo. Portanto, segue-se que o circuncentro de $ABC$ não está no seu interior.

[16] **Correto**. Do item [01], temos

$$\frac{(ABC)}{(EBD)} = 2^2 = 4.$$

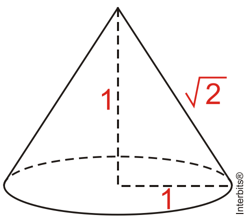
Daí, como $(ABC) = (EBD) + (AEDC)$, segue que $(AEDC) = 3 \cdot (EBD)$.

**12.** [A]

(verdadeiro) definição de ângulos opostos pelo vértice.

(falsa) 2x + 7x = 180 ⇔ x = 20° e 2x = 40°. O complemento de 40° (menor) é 50°

(Verdadeiro)




$$V = \frac{1\pi 1^2.1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

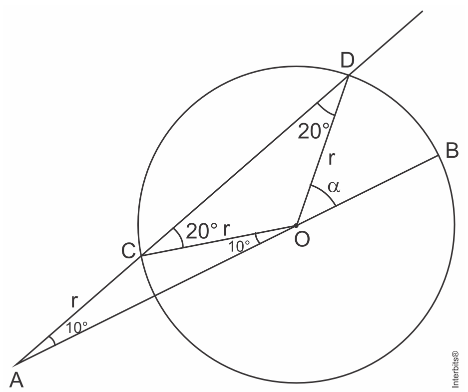
(falso) definição de retas reversas.

(verdadeiro) d = $\frac{6.(6-3)}{2} = 9$

$$n - 3 = 9 \Leftrightarrow n = 12$$

**13.** [B]

Do enunciado, temos a seguinte figura:




Note que o triângulo OAC é isósceles e sua base é o lado $\overline{AO}$.

Daí, como $O\hat{A}C = 10°$, $C\hat{O}A = 10°$.

O ângulo $D\hat{C}O$ é externo do triângulo ACO, logo,

$$D\hat{C}O = 10° + 10°$$

$$D\hat{C}O = 20°$$

O triângulo OCD é isósceles, com $OC = OD$.

Então,

$$C\hat{D}O = 20°$$

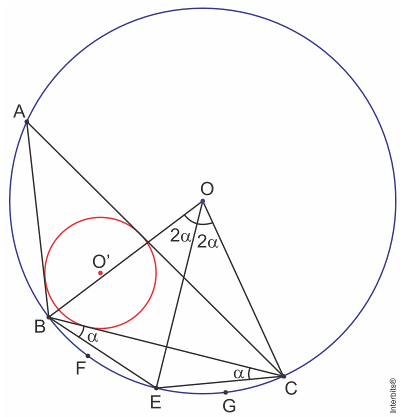
O ângulo $B\hat{O}D$ é externo do triângulo DOA, logo,

$$\alpha = 10° + 20°$$

$$\alpha = 30°$$

**14.** [A]

Do enunciado, temos a seguinte figura:




$$\overset{\frown}{BFE} = \overset{\frown}{EGC} = 2\alpha$$

$C\hat{B}E$ é ângulo inscrito em relação ao arco $\overset{\frown}{EGC}$, logo, $C\hat{B}E = á$.

$B\hat{C}E$ é ângulo inscrito em relação ao arco $\overset{\frown}{BFE}$, logo, $B\hat{C}E = \alpha$.

Como $C\hat{B}E = B\hat{C}E = \alpha$, o triângulo BCE é isósceles, com $EB = EC$.

**15.** [B]

Sendo a e b as medidas dos retângulos amarelos, pode-se calcular:

$3a = 15 \Rightarrow a = 5$ m

$b + 1 = 2a \Rightarrow b + 1 = 10 \Rightarrow b = 9$ m

$x + 2a + b = 26 \Rightarrow x + 10 + 9 = 26 \Rightarrow x = 7$ m

$2y + b = 15 \Rightarrow 2y + 9 = 15 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

$x - y = 7 - 3 = 4$

**16.** [E]

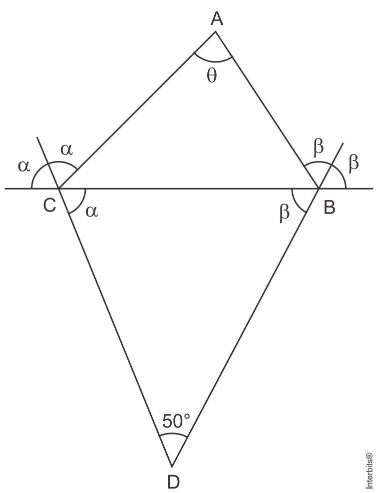
São paralelas entre si as ruas: Arica, Bertioga, Anhanguera, das Guianas, Pasteur e Nove de Julho.

As ruas Gabinete, Caiçara e Tupã também são paralelas entre si.

Por outro lado, os pares de ruas concorrentes são: Arica e Gabinete, Caiçara e Nove de Julho, Caiçara e Anhanguera, Caiçara e Pasteur, Tupã e Nove de Julho, Tupã e Anhanguera, Tupã e Pasteur, Gabinete e Nove de Julho, Gabinete e Bertioga, Gabinete e Anhanguera, Gabinete e das Guianas, Gabinete e Pasteur.

A resposta é a alternativa [E].

**17.** [C]




No triângulo BCD,

$\alpha + \beta + 50^\circ = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 130^\circ$

No triângulo ABC,

$\theta + 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$

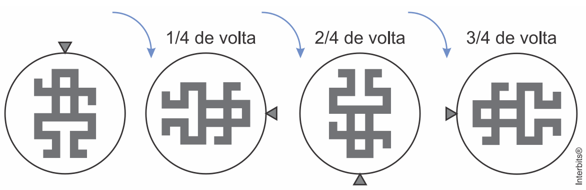
$\theta - 2(\alpha + \beta) = -180^\circ$

$\theta - 2 \cdot 130^\circ = -180^\circ$

$\theta = -180^\circ + 260^\circ$

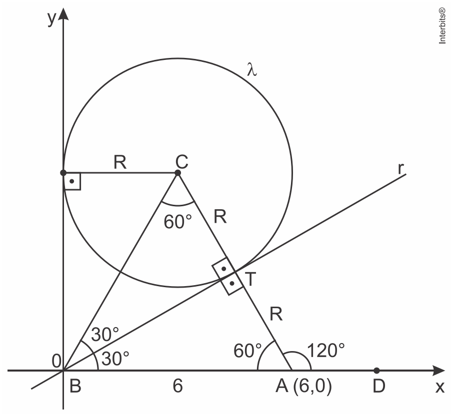
$\theta = 80^\circ$

**18.** [E]




**19.** [C]

Do enunciado e da figura, temos:




Como $D\hat{A}T = 120^\circ$ e $D\hat{A}B = 180^\circ$,

$B\hat{A}T = 180^\circ - 120^\circ$

$B\hat{A}T = 60^\circ$

$C\hat{T}B = 90^\circ$, pois $T$ é ponto de tangência.

$A\hat{T}B = 90^\circ$, pois $C\hat{T}A = 180^\circ, C\hat{T}B = 90^\circ$ e $A\hat{T}B = C\hat{T}A - C\hat{T}B.$

No triângulo $ABT,$

$90^\circ + 60^\circ + A\hat{B}T = 180^\circ$

$A\hat{B}T = 30^\circ$

No triângulo $CBT,$

$90^\circ + 30^\circ + B\hat{C}T = 180^\circ$

$B\hat{C}T = 60^\circ$

Assim, o triângulo $ABC$ é equilátero e a medida de seu lado é $6.$

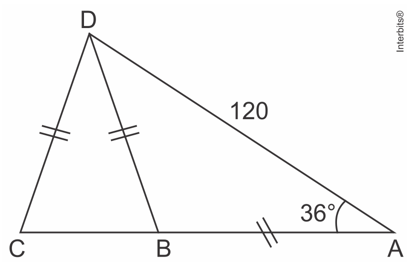
Como $AC = 2R,$

$2R = 6$

$R = 3$

**20.** [A]

Teremos:



$\overline{BA} = \overline{BD} \rightarrow DAB = ADB = BDC = 36°$

$2 \cdot 36 + ABD = 180° \rightarrow ABD = 108° \rightarrow DBC = BCD = 72°$

Logo:

$ADC = ACD = 72 \rightarrow \overline{AC} = \overline{AD} = 120 \text{ km}$

**ANOTAÇÕES**