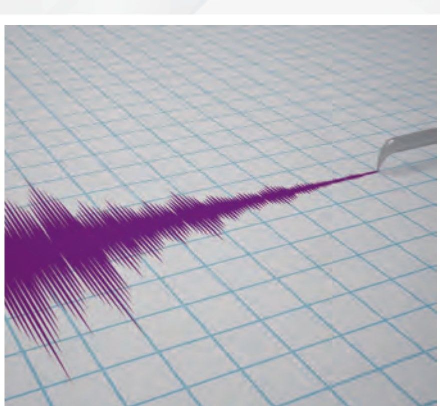
SEP

SISTEMA DE ENSINO
PREPARAENEM

MATEMÁTICA


4

SEP

SISTEMA DE ENSINO

PREPARAENEM

MATEMÁTICA

Volume 4 - 1ª Edição

Goiânia

CLASSIS EDITORA

2015

SISTEMA DE ENSINO PREPARAENEM - MATEMÁTICA
Volume 4

AUTORES
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira

DIREÇÃO EDITORIAL
Alexandre Pullig Corrêa

COORDENAÇÃO DE ARTE
Gedson Clei Ribeiro Alves

CAPA
Gedson Clei Ribeiro Alves

IMAGEM DE CAPA
dollarphotoclub.com

EDIÇÃO DE ARTE
Alex Alves da Silva
Gedson Clei Ribeiro Alves
Luiz Felipe Magalhães

REVISÃO
Alex Alves da Silva
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira
Danielle Pullig Corrêa
Gedson Clei Ribeiro Alves

PREPARAÇÃO DE TEXTOS
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira

PROJETO GRÁFICO
Gedson Clei Ribeiro Alves
Alexandre Pullig Corrêa

DIAGRAMAÇÃO
Gedson Clei Ribeiro Alves

Goiânia - 1ª edição - 2015

CLASSIS EDITORA
Av. Eng. Eurico Miranda, Qd. 04, Lt. 12/14 - Sala 209
Ed. Concept Office - Vila Maria José
CEP: 74815465 - Goiânia - Goiás - Brasil
Fone: +55 (62) 3877 3214
classiseditora@gmail.com

ISBN: 978-85-88249-32-5

IMPRESSÃO E ACABAMENTO
POLIGRÁFICA

> "Competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos – como saberes, habilidades e informações – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Pensar em termos de competência significa pensar a sinergia, a orquestração de recursos cognitivos e afetivos diversos para enfrentar um conjunto de situações que apresentam analogias de estrutura."
>
> *Philippe Perrenoud*

Caro estudante,

Os novos desafios e mudanças propostas para a melhoria da educação brasileira têm provocado significativas transformações, exigindo mudanças tanto por parte da escola como por parte dos estudantes do ensino médio.

Nossa tradição escolar ainda tem muito do enciclopedismo iluminista. Muitos educadores ainda acreditam que devem fazer com que os alunos absorvam todo o conhecimento que existe no mundo, o que é impossível.

O novo aprendizado deve promover, não apenas a mera reprodução de dados, mas sim ajudá-lo a responder às transformações da sociedade e da cultura em que está inserido, desenvolvendo a capacidade cognitiva de interpretar textos, solucionar problemas e relacionar diferentes áreas do conhecimento.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), desde a sua criação em 1998, procura avaliar as competências e habilidades adquiridas pelos estudantes ao término do ensino médio. Em 2009 o ENEM foi reformulado e, a partir de então, ganhou maior importância no cenário nacional, tornando-se o principal instrumento de seleção para as universidades no país. Ademais, ainda é o primeiro passo na promoção de um novo currículo para o ensino médio do Brasil.

A adoção do ENEM por todas as instituições federais de ensino superior do país em 2013 e o número recorde de inscritos em 2014 (que superou os 9,5 milhões de candidatos), revela que, além de ser hoje a forma principal de conquistar a tão sonhada vaga no curso superior, o exame está cada vez mais concorrido.

Com o intuito de oferecer condições mais efetivas para o aprendizado e o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas pelo exame, o Sistema de Ensino PreparaEnem (SEP), apresenta os conteúdos de forma a desvendar os mistérios do exame, e de outros vestibulares, para garantir a você uma preparação completa e eficaz.

Grupo PREPARAENEM

SUMÁRIO

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

FRENTE A – GEOMETRIA ESPACIAL

FRENTE B – GEOMETRIA ANALÍTICA

FRENTE C – GEOMETRIA PLANA

FRENTE D – FUNÇÃO LOGARÍTMICA

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL)	dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. Compreender fenômenos (CF)	construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. Enfrentar situações-problema (SP)	selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. Construir argumentação (CA)	relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. Elaborar propostas (EP)	recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Competência de área 1	
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2	
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3	
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4	
Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5	
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6	
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7	
Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO ASSOCIADOS À MATRIZ DE REFERÊNCIA

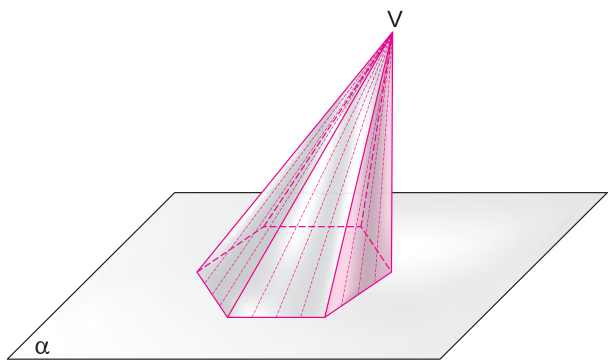
Conhecimentos numéricos	operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
Conhecimentos geométricos	características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
Conhecimentos de estatística e probabilidade	representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
Conhecimentos algébricos	gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
Conhecimentos algébricos/ geométricos	plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em : 28 jul. 2014.

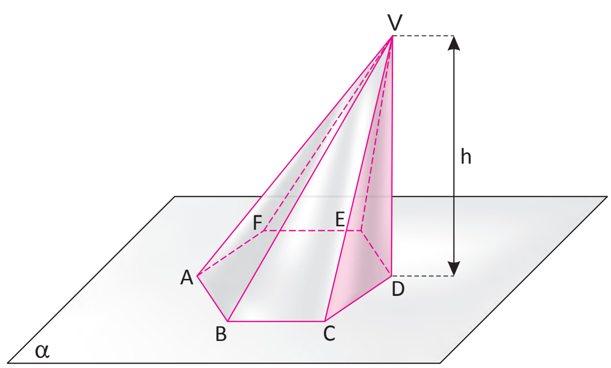
PIRÂMIDES

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dado um plano α, uma superfície poligonal P contido em α e um ponto V fora de α. Dá-se o nome de pirâmide, à figura geométrica espacial obtida pela união de todos os segmentos com uma extremidade no ponto V outra extremidade em um ponto da superfície P. Observe a figura a seguir:



Note que, assim como no prisma, a pirâmide é um sólido delimitado por faces planas. Na figura a seguir, podemos destacar os seus principais elementos.



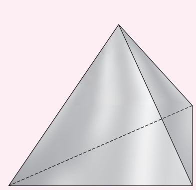
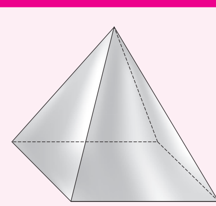
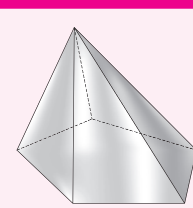
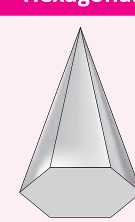
- O polígono ABCDEF é a base da pirâmide.
- As demais faces são as faces laterais da pirâmide.
- Os lados das bases são as arestas da base da pirâmide.
- Os lados das faces laterais são as arestas laterais da pirâmide.
- Os vértices das faces também são os vértices da pirâmide.
- A distância h entre V e α é a altura da pirâmide.

OBSERVAÇÃO:

Todas as faces laterais de uma pirâmide são triângulos.

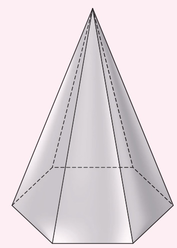
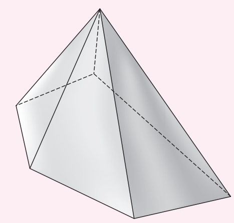
NOMENCLATURA DAS PIRÂMIDES

As pirâmides recebem nomes diferentes de acordo com os polígonos que formam as suas bases. Observe as figuras a seguir:

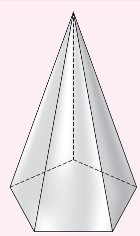
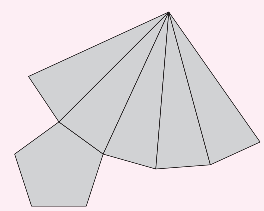
Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal
			

PIRÂMIDE REGULAR

Denomina-se pirâmide regular toda pirâmide cujas bases são polígonos regulares (lados e ângulos congruentes) e as arestas laterais são congruentes entre si. Observe as figuras a seguir:

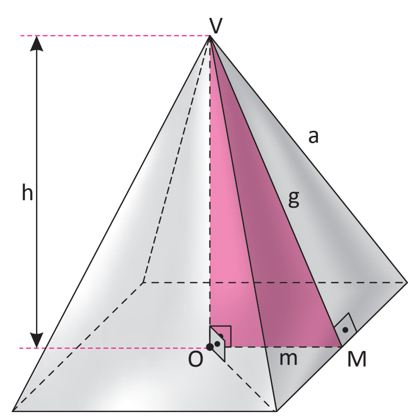
Pirâmide regular	Pirâmide irregular
	

Assim como nos prismas, uma pirâmide também pode ser representada por meio de planificações de sua superfície. Na figura a seguir, temos a planificação de uma pirâmide pentagonal regular:

Forma espacial	Forma planificada
	

ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE REGULAR

Dada a pirâmide quadrangular regular a seguir, podemos destacar os seguintes elementos:



- m é a medida do apótema da base da pirâmide.
- g é a medida do apótema da pirâmide.
- h é a medida da altura da pirâmide.

Para uma pirâmide regular, pode-se ainda destacar que:

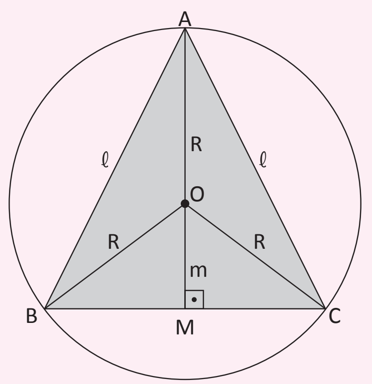
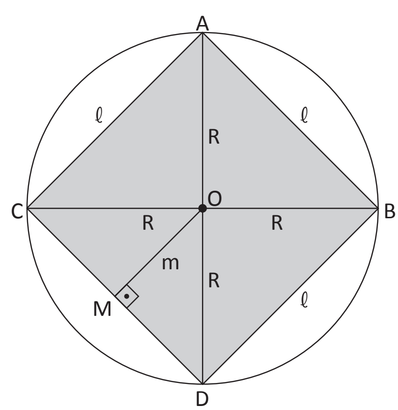
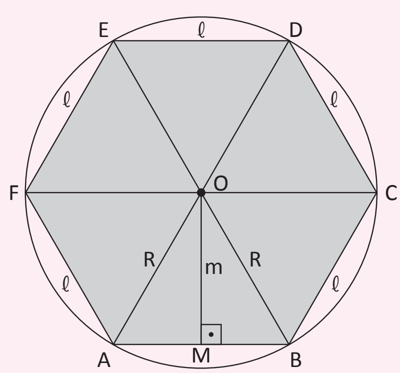
- A projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base.
- Todas as suas faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
- O apótema da pirâmide é a altura de suas faces laterais em relação à aresta da base.

RELAÇÃO NOTÁVEL

Em toda pirâmide regular, o triângulo formado por seu apótema, pelo apótema da base e pela altura é retângulo. Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos que:

$$g^2 = m^2 + h^2$$

Na tabela a seguir, temos as relações entre as medidas do lado, do apótema e o raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero, um quadrado é um hexágono regular. Tais polígonos são as bases mais comuns no estudo das pirâmides regulares.

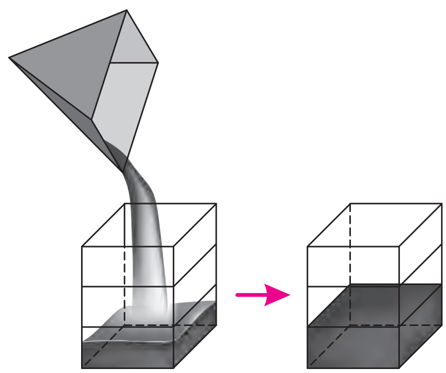
Base	Lado	Apótema
	$\ell = R\sqrt{3}$	$m = \frac{R}{2}$
	$\ell = R\sqrt{2}$	$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
	$\ell = R$	$m = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

ÁREAS DA SUPERFÍCIE DE UMA PIRÂMIDE

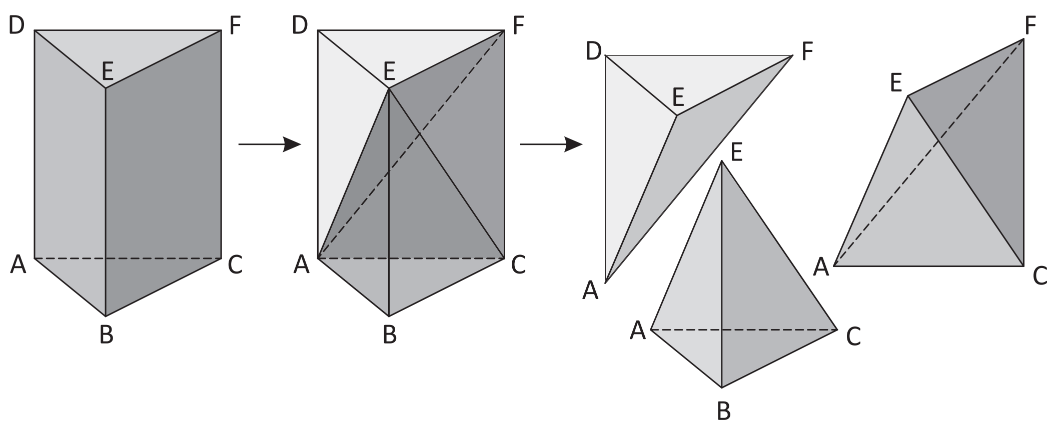
- **Área da base (A_B):** a área da base de uma pirâmide é a área delimitada pelo polígono que compõe a base.
- **Área lateral (A_L):** a área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas de todas as suas faces laterais.
- **Área total (A_T):** a área total de uma pirâmide é a soma das áreas de todas as suas faces, ou seja, a soma das áreas da base com a área lateral.

VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

Considerando um prisma e uma pirâmide de bases e alturas congruentes, é possível mostrar experimentalmente que para preencher um volume do prisma com um líquido são necessários três volumes da pirâmide. Observe a figura a seguir:



Percebe-se também que, dado um prisma triangular é possível, a partir dele, obter três pirâmides de mesma altura e mesma base. Observe o esquema abaixo:

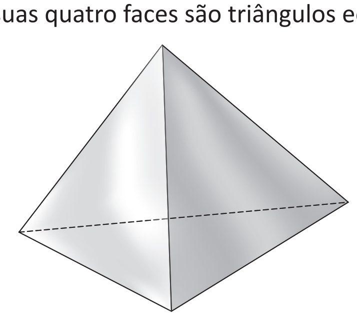


Portanto, se o volume do prisma triangular é $V = A_B.h$, cada pirâmide destacada tem volume é igual a:

$$V = \frac{A_B.h}{3}$$

TETRAEDRO REGULAR

Tetraedro regular é uma pirâmide o qual suas quatro faces são triângulos equiláteros. Observe a figura a seguir:



ÁREA TOTAL DE UM TETRAEDRO REGULAR

A área total de um tetraedro regular (A_T) de aresta a é igual a soma das áreas de suas quatro faces triangulares. Assim, temos que:

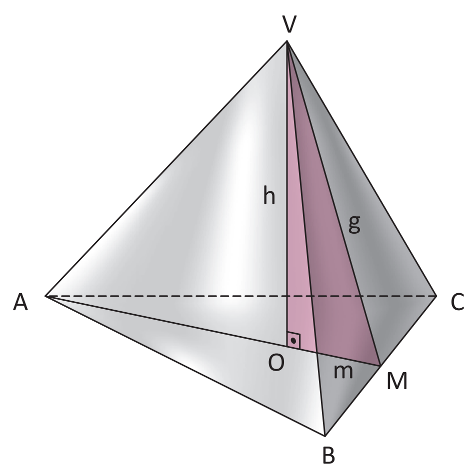
$$A_T = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto:

$$A_T = a^2\sqrt{3}$$

ALTURA DE UM TETRAEDRO REGULAR

Para determinar a altura de um tetraedro regular de aresta a, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo VOM da figura a seguir.



Note que: $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $m = \frac{g}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Assim, temos que:

$$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2$$

Portanto:

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

VOLUME DE UM TETRAEDRO REGULAR

O volume de um tetraedro regular de aresta a é dado por:

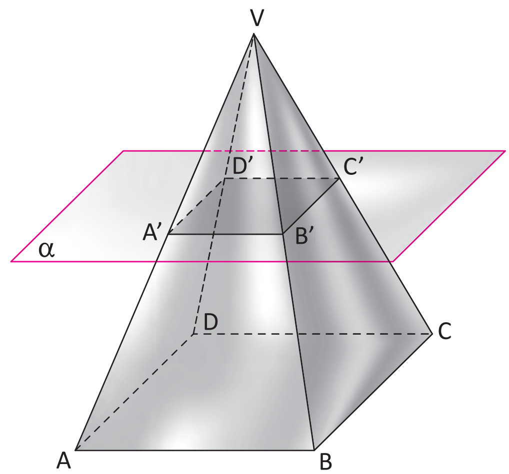
$$V = \frac{1}{3}.A_B.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Portanto:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA PIRÂMIDE

A intersecção de uma pirâmide com um plano α paralelo à sua base é denominada secção transversal da pirâmide. Na figura a seguir, o polígono A'B'C'D' é uma secção transversal da pirâmide VABCD.



Nessa situação, obteremos dois novos sólidos. Uma pirâmide (figura 1) acima do plano α e um sólido abaixo do plano α chamado de tronco de pirâmide (figura 2). Observe as figuras a seguir:

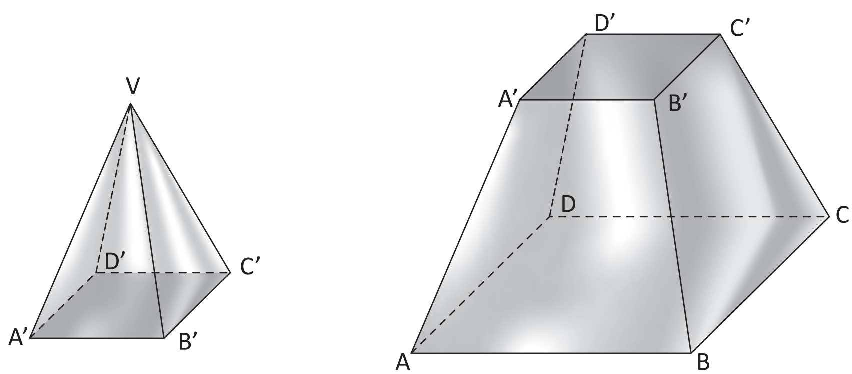
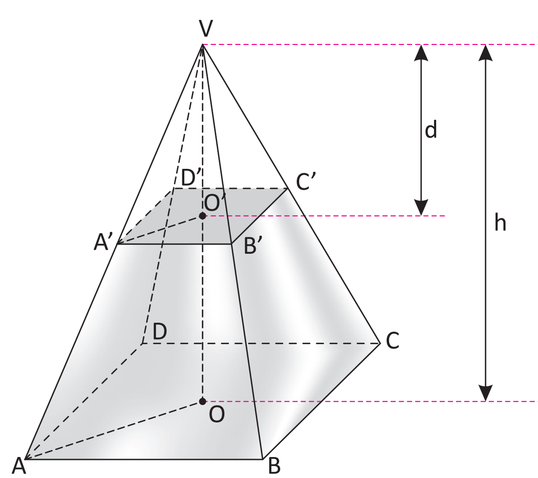


Figura 1 Figura 2

PIRÂMIDES SEMELHANTES

Ao seccionarmos uma pirâmide de altura h por um plano paralelo à base, distando d de seu vértice, obteremos as pirâmides VABCD e VA'B'C'D'. Essas duas pirâmides são sólidos semelhantes. Observe a figura a seguir:



As arestas laterais e as arestas das bases das pirâmides VABCD e VA'B'C'D' são proporcionais às suas alturas. Assim, temos que:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{d}{h} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{d}{h} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

Se a razão entre os elementos lineares homólogos de dois polígonos semelhantes é k, então a razão entre suas áreas é k^2. Assim, sendo A_1 a área da base da pirâmide VA'B'C'D' e A_2 a área da base da pirâmide VABCD, temos que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$$

Sendo V_1 a área da base da pirâmide VA'B'C'D' e V_2 a área da base da pirâmide VABCD, vamos calcular a razão entre esses volumes:

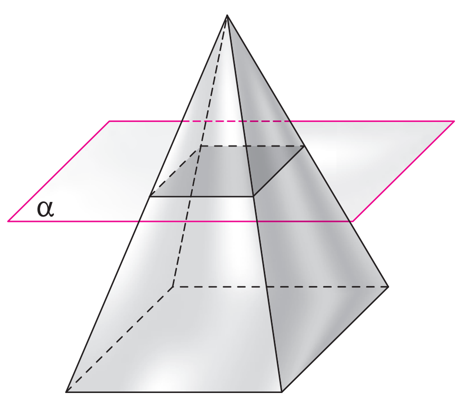
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{A_1 . d}{3}}{\frac{A_2 . h}{3}} = \frac{A_1 . d}{A_2 . h} = k^2 . k = k^3$$

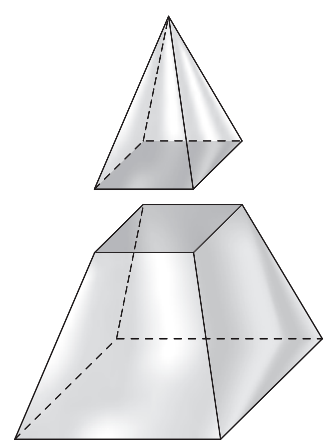
Portanto, Sendo V_1 o volume da pirâmide VA'B'C'D' e V_2 o volume da pirâmide VABCD, temos que:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d}{h}\right)^3$$

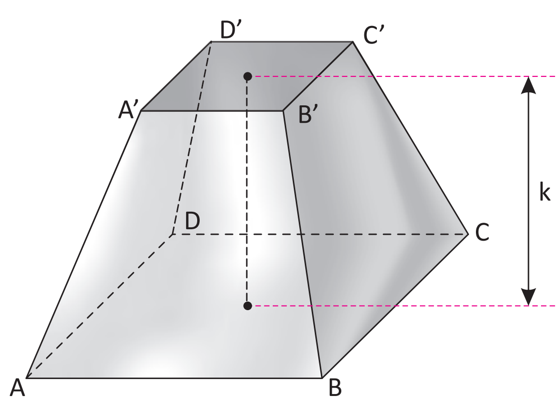
TRONCO DE PIRÂMIDE

Já sabemos que, ao interceptar uma pirâmide por um plano α paralelo à sua base obteremos uma nova pirâmide acima de α e um tronco de cone abaixo de α. Observe as figuras a seguir.





Na figura a seguir, podemos destacar os principais elementos de um tronco de pirâmide.



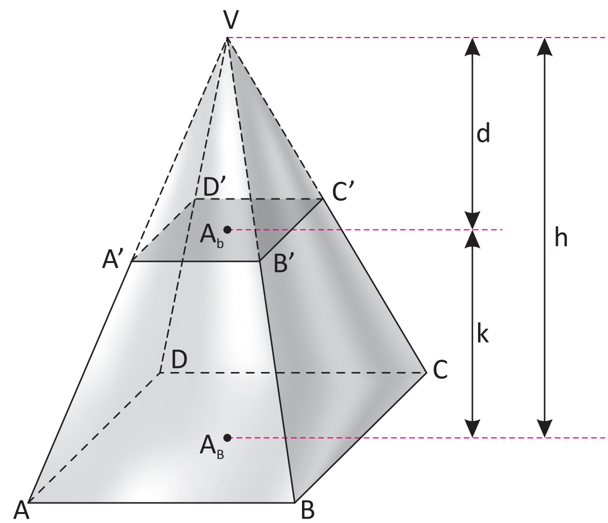
- A superfície poligonal ABCD é sua base maior.
- A superfície poligonal A'B'C'D' é sua base menor.
- As superfícies trapezoidais AA'B'B, BB'C'C, C'CDD' e DD'A'A são suas faces laterais.
- k a medida de sua altura.

ÁREAS DA SUPERFÍCIE DE UM TRONCO DE PIRÂMIDE

- **Área da base maior (A_B):** a área da base maior de um tronco de pirâmide é a área delimitada pelo polígono que compõe essa base.
- **Área da base menor (A_b):** a área da base menor de um tronco de pirâmide é a área delimitada pelo polígono que compõe essa base.
- **Área lateral (A_L):** a área lateral de um tronco de pirâmide é a soma das áreas de todas as suas faces laterais.
- **Área total (A_T):** a área total de um prisma é a soma das áreas de todas as suas faces, ou seja, é a soma das áreas das bases com a área lateral.

VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

Considere o tronco de pirâmide da figura a seguir.



Para essa figura, temos que:

- A_B é a área de sua base maior do tronco.
- A_b é a área de sua base menor do tronco.
- h é a altura da pirâmide VABCD.
- d é a altura da pirâmide VA'B'C'D'.
- k é a altura do tronco.
- V é o volume do tronco.

Pela figura, podemos observar que:

V = volume da pirâmide VABCD – volume da pirâmide VA'B'C'D'

Assim, temos que:

$$V = \frac{1}{3}.A_B.h - \frac{1}{3}.A_b.(h-d) = \frac{1}{3}[(A_B - A_b).h + A_b.d]$$

Utilizando as relações entre as pirâmides semelhantes, temos que:

$$\frac{A_B}{A_b} = \frac{d_2}{h^2} = \frac{(h-k)^2}{h^2} \Rightarrow h = \frac{k\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}$$

Substituindo, na expressão do volume do tronco, temos que:

$$V = \frac{1}{3}\left[(A_B - A_b).\frac{k\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} + A_b.d\right]$$

Desenvolvendo essa expressão, temos que:

$$V = \frac{k}{3}.(A_B + \sqrt{A_B.A_b} + A_b)$$

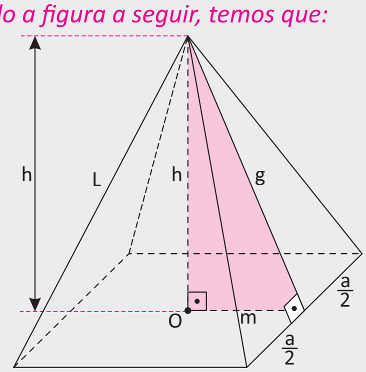
R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Considere uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 6 dm. Sabendo que a área da base é igual a 32 dm², determine:

A) a aresta da base.
B) o apótema da base.
C) a altura da pirâmide.
D) a aresta lateral.
E) a área lateral.
F) a área total.

Resolução:

Observando a figura a seguir, temos que:



A) *A aresta (a) da base é dada por:*

$A_B = a^2 \Rightarrow 32 = a^2 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ dm

B) *O apótema (m) é dado por:*

$m = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ dm

C) *A altura (h) é dada por:*

$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow 6^2 = (2\sqrt{2})^2 + h^2$

$36 = 8 + h^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{7}$ dm

D) *A aresta lateral (L) é dada por:*

$L^2 = g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = 6^2 + (2\sqrt{2})^2$

$L = 2\sqrt{11}$ dm

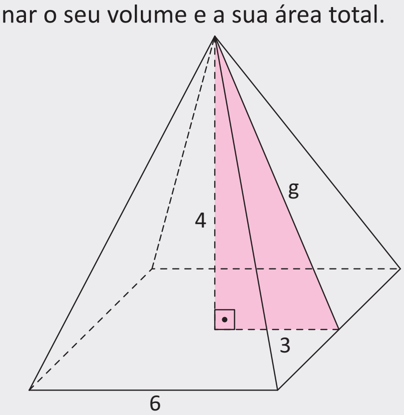
E) *A área lateral (A_L) é dada por:*

$A_L = 4.\frac{4\sqrt{2}.6}{2} = 48\sqrt{2}$ cm²

F) *A área total (A_T) é dada por:*

$A_T = A_B + A_L = 48\sqrt{2} + 32 = 16(3\sqrt{2} + 2)$ dm²

02| Na figura abaixo temos uma pirâmide quadrangular regular de 4 m de altura e aresta da base medindo 6 m. Determinar o seu volume e a sua área total.



Resolução:

O volume (V) da pirâmide é dado por:

$V = \frac{A_B.h}{3} = \frac{6^2.4}{3} = 48$ m³

A área da base (A_B) é dada por:

$A_B = 6^2 = 36$ m²

O apótema da pirâmide (g) é dada por:

$g^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow g = 5$ m

A área lateral (A_L) é dada por:

$A_L = 4.\frac{6.5}{2} = 60$ m²

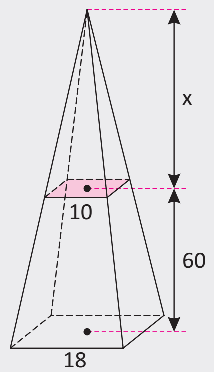
A área total (A_T) é dada por:

$A_T = A_B + A_L = 36 + 60 = 96$ m²

Portanto, o volume é 48 m³ a área total é 96 m².

03| Seja uma pirâmide regular de base quadrada seccionada por um plano paralelo à base e situado a 60 metros de altura. Se os lados da base da pirâmide medem 18 m e a área da secção é de 100 m², qual é a altura da torre?

Resolução:

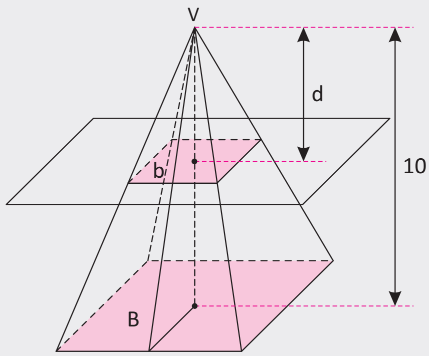


Pela figura, temos que:

$$\frac{10}{18} = \frac{x}{60+x} \Rightarrow 75\ m$$

Portanto, a altura da torre é 135 m.

04| Na figura a seguir, temos uma pirâmide de altura 10 m que foi seccionada por um plano paralelo à base de tal forma que a pirâmide obtida e o tronco de pirâmide restante tenham o mesmo volume. Determine a distância d do vértice de V ao plano secante.



Resolução:

Sendo V o volume da pirâmide obtida e do tronco, temos que o volume da pirâmide maior é V + V = 2V.

Pela relação entre os volumes de duas pirâmides semelhantes, temos que:

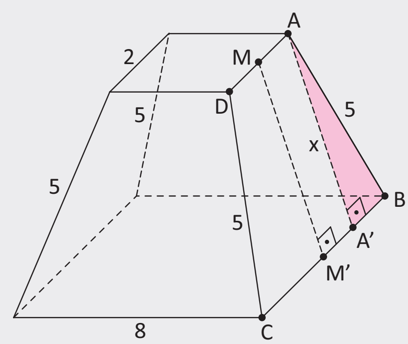
$$\frac{V}{2V} = \left(\frac{d}{10}\right)^3 \Rightarrow \frac{d^3}{1.000} = \frac{1}{8} \Rightarrow d = 5\sqrt[3]{4}\ m$$

Portanto, a distância é $5\sqrt[3]{4}$ m.

05| Uma caixa tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular. Sabendo-se que a sua aresta lateral mede 5 m e as arestas das bases medem 8 cm e 2 cm, calcule a quantidade total de papel necessária para embrulhar esta caixa sem que haja desperdícios e sobreposição do material usado no embrulho.

Resolução:

Observando a figura a seguir, temos que:



M é o ponto médio de AD e M' o ponto médio de BC, logo temos que:

$A'B = 4 - 1 = 3$ cm.

$AB = 5$ cm, logo $5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = 4$ cm

A área total do tronco (A_T) é dada por:

$$A_T = 8^2 + 5^2 + 4.\frac{(8+5).4}{2} = 148\ cm^2$$

Portanto, a área total é 148 cm².

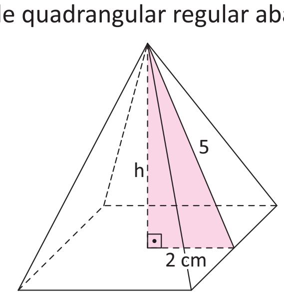
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 m de altura e aresta da base medindo 6 m. Determine:

A) A sua área lateral.
B) A sua área da base.
C) A sua área total.
D) O seu volume.

02| Calcule o perímetro da base de uma pirâmide quadrangular regular que possui 12 cm de altura e 15 cm de apótema.

03| Calcular a área da base, área lateral, área total e o volume da pirâmide quadrangular regular abaixo.



04| Para a fabricação de uma joia na forma de um tetraedro regular, um designer irá usar placas de prata nas faces laterais e uma placa de ouro na base. Se o preço da prata é de R$ 30,00 por centímetro quadrado, e o de ouro é de R$ 50,00 por centímetro quadrado, qual seria o custo, em reais, dessa joia? (Despreze a espessura das placas e considere $\sqrt{3} = 1,7$).

05| Um engenheiro deseja construir uma pirâmide cuja base é um quadrado com 100 m de lado e cuja altura é também de 100 m. No projeto, feitos os cálculos de forma precisa, o engenheiro desistiu de sua construção. Gastaria-se tempo demais! É que para construir cada parte da pirâmide, equivalente a 1.000 m^3, os pedreiros gastariam, em média, 54 dias. A persistir essa média, calcule quantos anos comerciais (360 dias) seriam gastos em sua construção.

06| Considere um tronco de pirâmide regular quadrada de arestas das bases com medidas 4 m e 12 m. Se a altura desse tronco é de 3 m, determine:

- **A** A área lateral.
- **B** A área total.
- **C** O volume.
- **D** A medida de uma aresta lateral.

07| Um recipiente em forma de tronco de pirâmide regular de bases quadradas tem volume de 336 cm^3. Determine a sua altura e a sua área lateral sabendo que os lados das bases medem 6 cm e 12 cm.

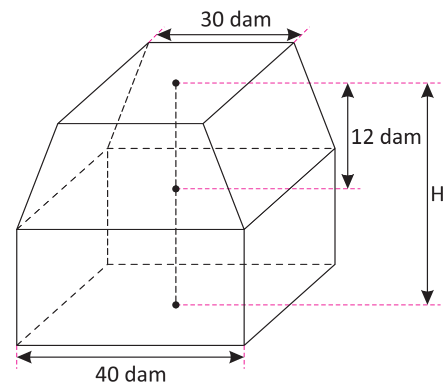
08| Um frasco de perfume tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal de aresta lateral 5 cm e áreas das bases iguais a 54 cm^2 e 6 cm^2.

Calcule o volume desse frasco. Dado $\sqrt{3} = 1,7$.

09| Um depósito tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal regular. Sabendo que a altura do tronco vale 0,6 dam e as arestas das bases medem 0,2 dam e 0,4 dam, determinar, em metros cúbicos, o seu volume.

10| UNESP Para calcularmos o volume aproximado de um iceberg, podemos compará-lo com sólidos geométricos conhecidos.

O sólido da figura, formado por um tronco de pirâmide regular de base quadrada e um paralelepípedo reto-retângulo, justapostos pela base, representa aproximadamente um iceberg no momento em que se desprendeu da calota polar da Terra. As arestas das bases maior e menor do tronco de pirâmide medem, respectivamente, 40 dam e 30 dam, e a altura mede 12 dam.



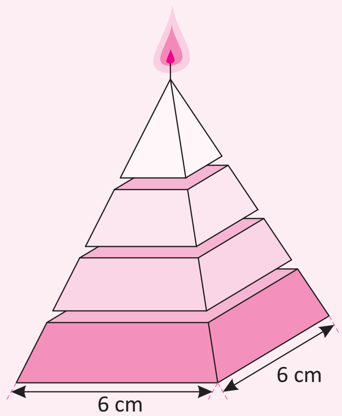
Passado algum tempo do desprendimento do iceberg, o seu volume era de 23.100 dam^3, o que correspondia a $\frac{3}{4}$ do volume inicial. Determine a altura H, em dam, do sólido que representa o iceberg no momento em que se desprendeu.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

- **A** Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
- **B** Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
- **C** Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
- **D** O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
- **E** O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

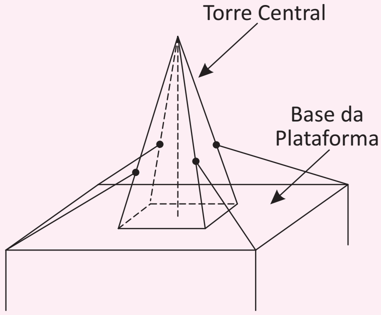
02| ENEM Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura; 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior; espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- **A** 156 cm^3
- **B** 189 cm^3
- **C** 192 cm^3
- **D** 216 cm^3
- **E** 540 cm^3

03| ENEM Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central. Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.



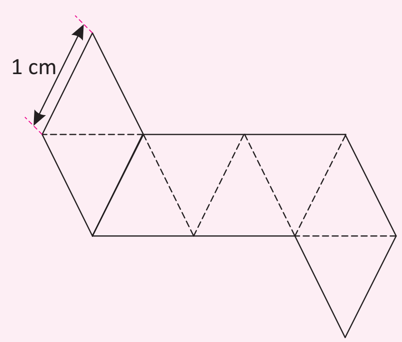
Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a:

- **A** $\sqrt{288}$
- **B** $\sqrt{313}$
- **C** $\sqrt{328}$
- **D** $\sqrt{400}$
- **E** $\sqrt{505}$

04| UFRR Uma barraca de acampamento tem a forma de uma pirâmide com 1 m de altura, cuja base é um quadrado com 2 m de lado. A quantidade de lona usada nas faces laterais da barraca é, em metros quadrados:

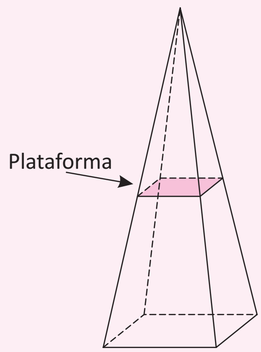
- **A** 8
- **B** 12
- **C** $\sqrt{2}$
- **D** $4\sqrt{2}$
- **E** $4 + \sqrt{4}$

05| UFLA Dobrando a figura plana nas linhas tracejadas, é possível construir um octaedro regular de volume igual a:



- **A** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^3
- **B** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^3
- **C** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ cm^3
- **D** $\sqrt{3}$ cm^3
- **E** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3

06| UFG A figura abaixo representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada, na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela à base. Se os lados da base e da plataforma medem, respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da torre, em metros, é:



A) 75

B) 90

C) 120

D) 135

E) 145

07| UEPB Uma peça de cristal de rocha tem o formato de um tetraedro regular. Se cada aresta da peça mede 2 cm, então o volume desse cristal, em centímetros cúbicos, é igual a:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

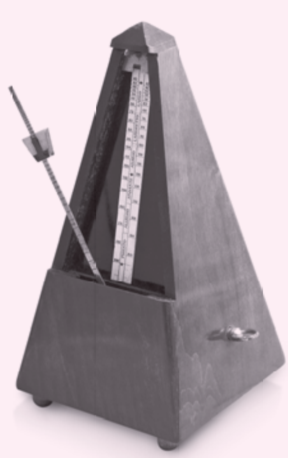
B) $\sqrt{2}$

C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $2\sqrt{2}$

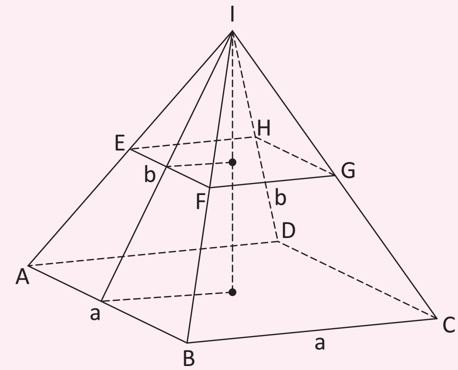
E) $3\sqrt{2}$

08| PUC O metrônomo é um relógio que mede o tempo musical (andamento). O metrônomo mecânico consiste num pêndulo oscilante, com a base fixada em uma caixa com a forma aproximada de um tronco de pirâmide, como mostra a foto.



Shutterstock.com

Na representação a seguir, a é o lado da base maior, b é o lado da base menor e V é o volume do tronco de pirâmide ABCDEFGH. Se a = 4b e p é o volume total da pirâmide ABCDI, então:



A) $V = \frac{3}{4}p$

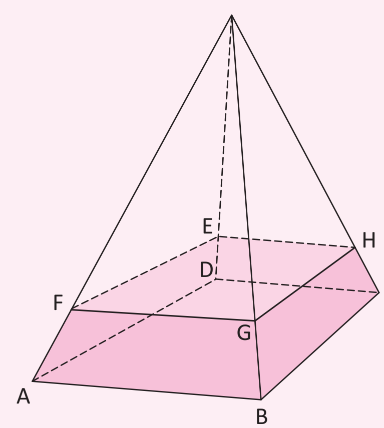
B) $V = \frac{3}{16}p$

C) $V = \frac{15}{16}p$

D) $V = \frac{15}{64}p$

E) $V = \frac{63}{64}p$

09| UFPB As rapaduras, fabricadas no Engenho JB, têm a forma de um tronco de pirâmide regular ABCDEFGH, conforme ilustra a figura a seguir.



Sabendo-se que os segmentos AB e EF medem, respectivamente, 15 cm e 12 cm, e que a altura da pirâmide VABCD mede 20 cm, o volume de cada rapadura, em cm^3, é igual a:

A) 2.304

B) 1.500

C) 768

D) 732

E) 500

10| ENEM O Museu do Louvre, localizado em Paris, na França, é um dos museus mais visitados do mundo. Uma de suas atrações é a Pirâmide de Vidro, construída no final da década de 1.980. A seguir tem-se, na Figura 1, uma foto da Pirâmide de Vidro do Louvre e, na Figura 2, uma pirâmide reta de base quadrada que a ilustra.

Watcharee Suphaluxana / Shutterstock.com

Figura 1

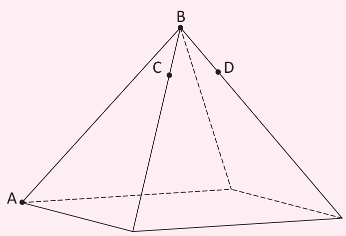
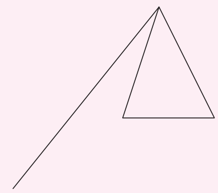


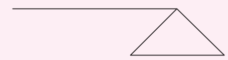
Figura 2

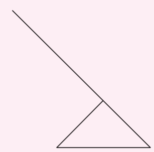
Considere os pontos A, B, C, D como na Figura 2. Suponha que alguns reparos devem ser efetuados na pirâmide. Para isso, uma pessoa fará o seguinte deslocamento: 1) partir do ponto A e ir até o ponto B, deslocando-se pela aresta AB; 2) ir de B até C, deslocando-se pela aresta que contém esses dois pontos; 3) ir de C até D, pelo caminho de menor comprimento; 4) deslocar se de D até B pela aresta que contém esses dois pontos.

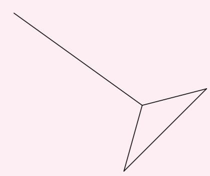
Disponível em: http://viagenslacoste.blogspot.com. Acesso em: 29 fev. 2.012.

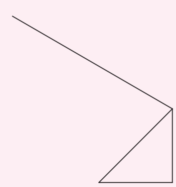
A projeção do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide é melhor representada por:

A


B


C


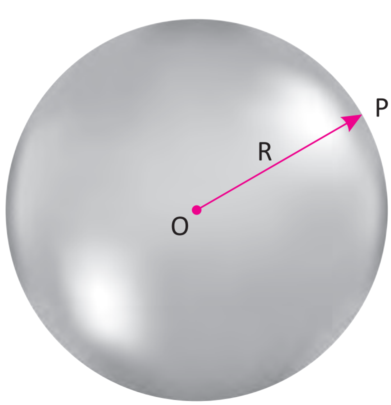
D


E


ESFERAS

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dados um ponto O e um segmento de medida R. Dá-se o nome de esfera ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R. Observe a figura a seguir:



Na esfera dessa figura, temos que:

- O ponto O é o seu centro.
- A medida R é o seu raio.
- O ponto P é um ponto de sua superfície.

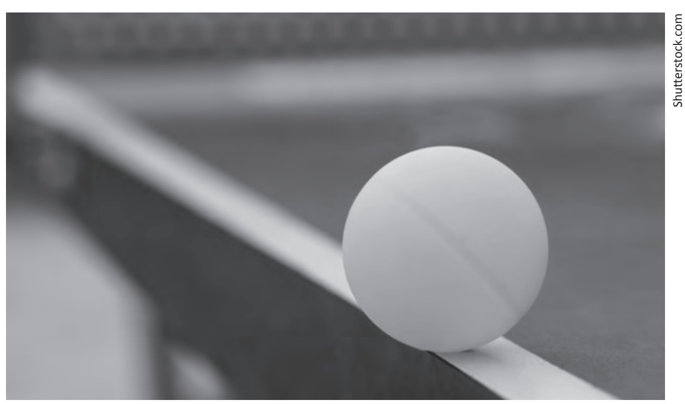
É importante diferenciar os termos esfera e superfície esférica.

- **Esfera** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro O é menor ou igual a R.
- **Superfície ou casca esférica** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro O igual a R.

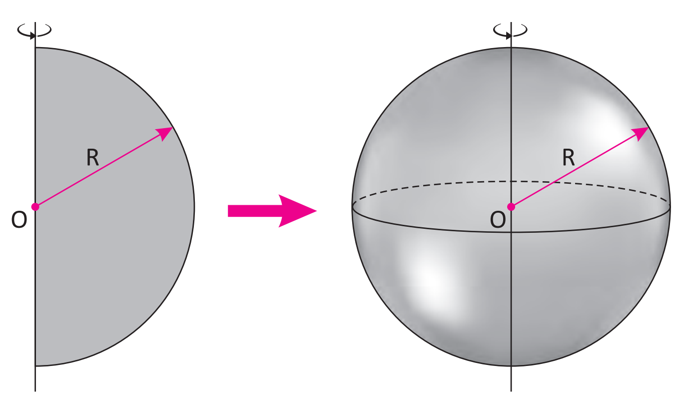
Por exemplo:

- Uma bolinha de gude é uma esfera. Observe a figura a seguir:

- Uma bolinha de tênis de mesa é uma superfície ou casca esférica. Observe a figura a seguir:

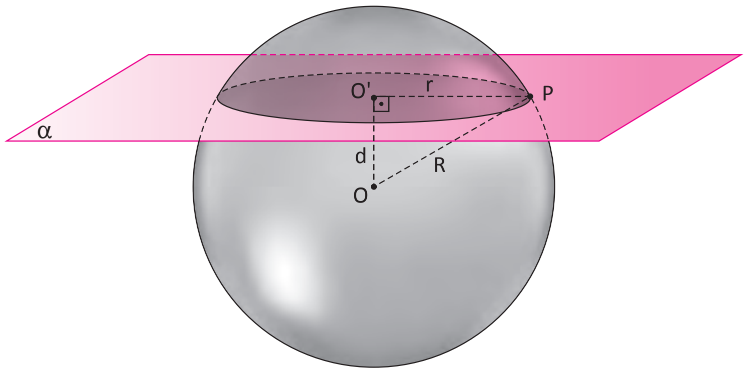


A esfera também é um sólido de revolução, pois pode ser obtida através da revolução (rotação) de 360° de um semicírculo em torno do um eixo que contém o seu centro. Observe as figuras a seguir:



SECÇÕES DA ESFERA

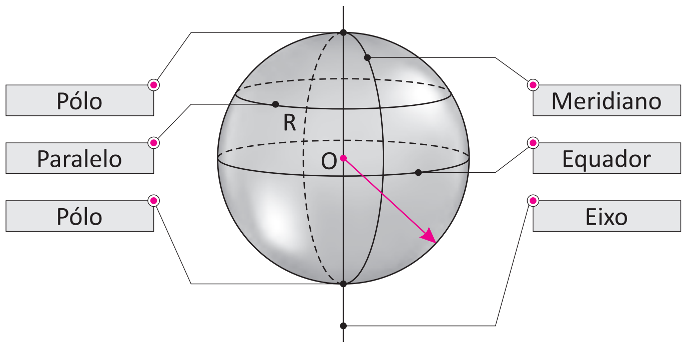
A secção de uma esfera é um círculo obtido através da intersecção da esfera por um plano α. Observe a figura a seguir:



A partir do triângulo retângulo OO'P, pode-se estabelecer uma relação entre a distância (d) do plano ao centro da esfera, o raio (r) da seção e o raio da esfera (R) através do teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

Na figura a seguir, podemos destacar os elementos de uma esfera de centro O e raio R.



- Os polos são as intersecções da superfície esférica com o eixo da esfera.
- O equador é a secção máxima determinada pela intersecção de um plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro da esfera.
- Os paralelos são secções determinadas pela intersecção de planos perpendiculares ao eixo que não passam pelo centro da esfera.
- Os meridianos são secções máximas determinadas pela intersecção de planos que contém o eixo da esfera.

OBSERVAÇÃO:

- Dá-se o nome de hemisfério a cada uma das duas metades de uma esfera dividida por um plano que passa por seu centro.

ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

É possível demonstrar que a área da superfície de uma esfera de raio R é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

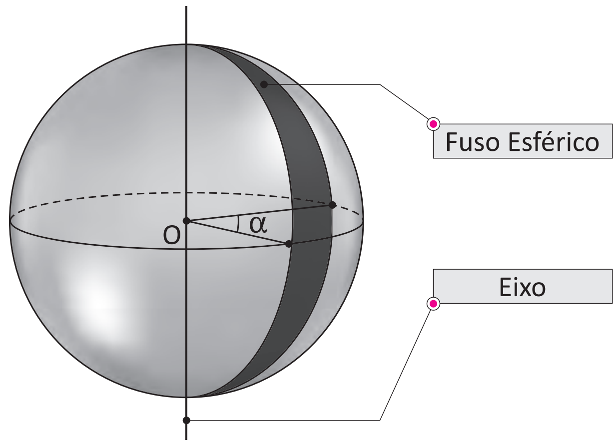
VOLUME DA ESFERA

É possível demonstrar que o volume de uma esfera de raio R é dada por:

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3$$

FUSO ESFÉRICO

Fuso esférico é uma superfície obtida através de um semicírculo que gira α graus, com 0° < α < 360°, em torno do seu eixo. Observe a figura a seguir.



Observe que ao dobrando o ângulo α, a área do fuso também dobra, triplicando o ângulo α, a área do fuso também triplica, e assim sucessivamente. Assim, podemos afirmar que o ângulo α é proporcional à área do fuso.

Para α = 360°, o fuso esférico se transforma na superfície da esfera. Logo, a expressão da área de um fuso esférico pode ser obtida através da seguinte regra de três simples.

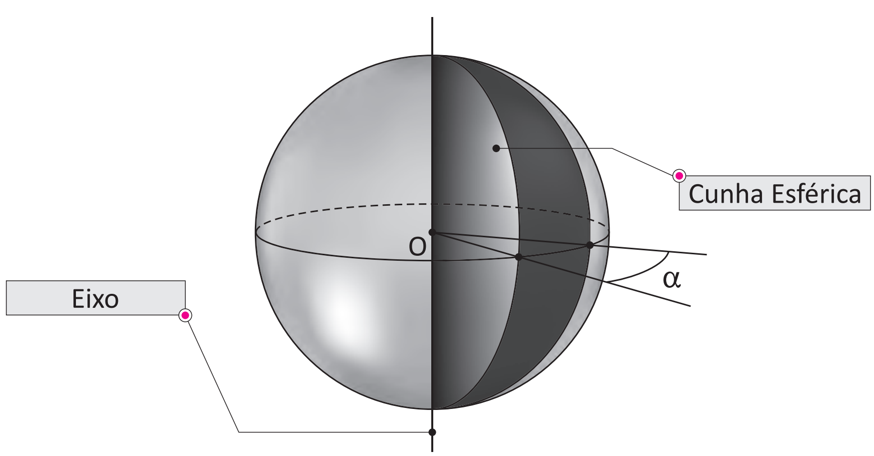
Medida do ângulo	Área do fuso esférico
360°	$4\pi R^2$
α	A_F

Daí, temos que:

$$A_F = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}$$

CUNHA ESFÉRICA

Cunha esférica é um sólido obtido através de uma semicírculo que gira α graus, com 0° < α < 360°, em torno do seu eixo. Observe a figura a seguir.



Observe que ao dobrando o ângulo α, o volume da cunha também dobra, triplicando o ângulo α, o volume da cunha também triplica, e assim sucessivamente. Assim, podemos afirmar que o ângulo α é proporcional ao volume da cunha.

Para $\alpha = 360°$, a cunha esférica se transforma na esfera. Logo, a expressão do volume de uma cunha esférica pode ser obtido através da seguinte regra de três simples.

Medida do ângulo	Área do fuso esférico
360°	$\frac{4}{3}\pi R^3$
α	V_c

Daí, temos que:

$$V_C = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$$

OBSERVAÇÃO:

- A área total da cunha esférica de raio R é dada pela soma da área do fuso esférico de raio R e as áreas de dois semicírculos também de raio R.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Determine o volume de uma bola de borracha cuja superfície tem área de 324π cm^2.

Resolução:

Determinando o raio dessa esfera, temos que:

$4\pi R^2 = 324\pi \Rightarrow R^2 = 81 \Rightarrow R = 9$ cm

Com a medida do raio da bola (esfera), podemos calcular seu volume:

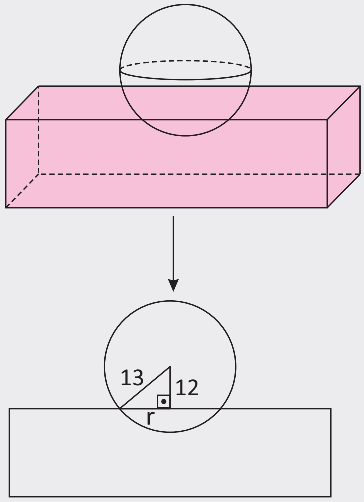
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.9^3 = 972\pi$ cm^3

Portanto, o volume da bola é 972π cm^3.

02| Uma esfera, com 26 cm de diâmetro, flutua sobre a água de um aquário, afundando 1 cm no mesmo. Qual é o raio da circunferência definida na superfície da água desse aquário?

Resolução:

Ilustrando a situação descrita, temos:



O raio pedido é o da secção transversal formada pelo plano que no caso, é a superfície da água. Pela figura, note que temos um triângulo retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$R = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm

Portanto, o raio da circunferência é 5 cm.

03| Uma fruta em formato esférico, com um caroço também esférico no centro, apresenta $\frac{7}{8}$ de seu volume ocupado pela polpa. Desprezando-se a espessura da casca, considerando que o raio da esfera referente à fruta inteira é de 12 cm, qual é a área da superfície do caroço? Adote $\pi = 3,1$.

Resolução:

Determinando o volume da esfera, temos que:

$V = \frac{4}{3}.\pi.12^3 = 2.304\pi$ cm^3

Sendo r o raio do caroço, temos que:

$\frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{1}{8}.2.304\pi$ cm$^3 \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r = 6$ cm

Assim, a área da superfície do caroço é de:

$A_{caroço} = 4\pi.6^2 = 144.3,1 = 446,40$ cm^2

Portanto, a área do caroço é de 446,40 cm^2.

04| De quantos por cento aumentará o volume de uma esfera cujo raio foi aumentado em 20%?

Resolução:

Sendo r o raio da esfera inicial, se o seu aumento foi de 20%, então o raio da esfera final é R = 1,2 r. Assim, temos:

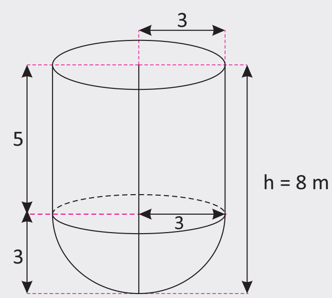
O volume inicial é $V_i = \frac{4}{3}.\pi.r^3$.

O volume inicial é $V_f = \frac{4}{3}.\pi.(1,2r)^3 = \frac{4}{3}.\pi.1,728r^3$

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{\frac{4}{3}\pi.1,728r^3}{\frac{4}{3}\pi.r^3} = 1,728 = 172,8\%$$

Portanto, o volume final é 72,8% maior que o volume inicial.

05| Uma semiesfera está colada em um cilindro, assim como nos mostra a figura abaixo. Sabe-se que a medida do raio da semiesfera é de 3 m e essa medida é a mesma do raio da base do cilindro. Se a altura do conjunto desses dois sólidos é de 6 m, qual é o volume desse conjunto?



Resolução:

O volume de todo o conjunto (semiesfera mais cilindro) é dado pela soma dos seus volumes.

O volume (V_{SE}) *da semiesfera é dada por:*

$$V_{SE} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi 3^3}{3} = 18\pi\ m^3$$

O volume (V_{Cl}) *da cilindro é dada por:*

$$V_{Cl} = \pi r^2.h = \pi 3^2.5 = 45\pi\ m^3$$

O volume total (V_T) *é dado por:*

$$V_T = 18\pi + 45\pi = 63\pi\ m^3$$

Portanto, o volume total é $63\pi\ m^3$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Calcule a área da superfície e o volume de uma esfera de 4 metros de diâmetro.

02| A área da superfície de uma esfera é 144 cm². Determine o seu volume.

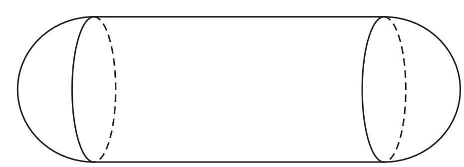
03| Calcular a área da superfície esférica sabendo que o volume da esfera em questão é 32 cm³.

04| Considerando o planeta terra como uma esfera e sabendo que o seu raio é algo próximo de $6,3.10^3$ km, determine a área aproximada de sua superfície. Dê a resposta em notação científica.

05| Se a área total de um cone circular reto e a área da superfície de uma esfera são iguais, calcule o raio e o volume da esfera sabendo que o volume do cone é de $12\pi\ dm^3$ e o raio de sua base é 30 cm.

06| Em um recipiente de capacidade igual a 300 ml são mergulhadas 60 bolas iguais e perfeitamente esféricas de raio 1 cm cada. Calcule, em mililitros, o volume de água existente nesse recipiente sabendo que o mesmo está completamente cheio.

07| Um tanque de comprimento 4 m tem forma de um cilindro acrescido de duas semiesferas como mostra a figura a seguir.



Determine a altura e o raio da parte cilíndrica de modo que a área total do tanque seja igual a 4 m².

08| Uma tangerina de 12 gomos iguais assemelha-se a uma esfera de raio R. Qual a área da superfície total de cada gomo?

09| Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então, qual é o valor de n?

10| **FGV** Um sorvete de casquinha consiste de uma esfera (sorvete congelado) de raio 3 cm e um cone circular reto (casquinha), também com 3 cm de raio.

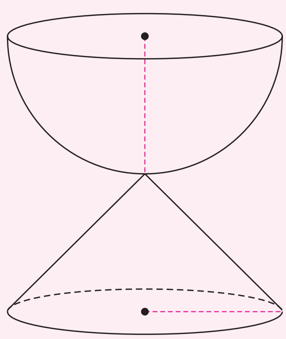
Se o sorvete derreter, ele encherá a casquinha completa e exatamente. Suponha que o sorvete derretido ocupe 80% do volume que ele ocupa quando está congelado. Calcule a altura da casquinha.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ACAFE Um tubo cilíndrico reto de volume 128π cm^2 contém oito bolinhas de tênis de mesa congruentes entre si e tangentes externamente. Sabendo que o cilindro está circunscrito à reunião dessas bolinhas, o percentual do volume ocupado pelas bolinhas dentro do tubo é, aproximadamente, de:

A) 75
B) 50
C) 33
D) 66

02| CEFET Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto o volume de areia, em cm^3, é:

A) 16π
B) $\frac{64\pi}{3}$
C) 32π
D) $\frac{128\pi}{3}$
E) 64π

03| ESPCEX Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente Iguais. A superfície total de cada gomo mede:

A) $\frac{4^3\pi}{3}$ cm^2
B) $\frac{4^3\pi}{9}$ cm^2
C) $\frac{4^2\pi}{3}$ cm^2
D) $\frac{4^2\pi}{9}$ cm^2
E) $4^3\pi$ cm^2

04| UECE Um círculo de raio R gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume V. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em:

A) 100,0 %
B) 125,0 %
C) 215,0 %
D) 237,5 %

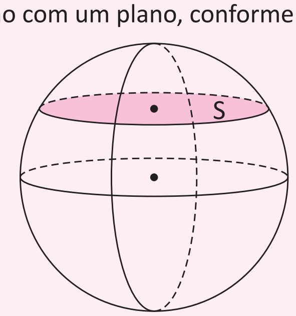
05| UNEB Sua bexiga é um saco muscular elástico que pode segurar até 500 ml de fluido. A incontinência urinária, no entanto, tende a ficar mais comum à medida que envelhecemos, apesar de poder afetar pessoas de qualquer idade; ela também é mais comum em mulheres que em homens (principalmente por causa do parto, mas também em virtude da anatomia do assoalho pélvico).

(BREWER. 2.013, p. 76).

Considerando-se que a bexiga, completamente cheia, fosse uma esfera e que $\pi = 3$ pode-se afirmar que o círculo máximo dessa esfera seria delimitado por uma circunferência de comprimento, em cm, igual a:

A) 20
B) 25
C) 30
D) 35
E) 40

06| UDESC Seja S uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme figura.



Se S está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16π cm^2 então o volume desta esfera é:

A) 36π cm^3
B) $\frac{256\pi}{3}$ cm^3
C) 100π cm^3
D) 16π cm^3
E) $\frac{500\pi}{3}$ cm^3

07| PUC Resolver a questão com base na regra 2 da FIFA, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68 cm a 70 cm. Considerando a mesma circunferência de 70 cm, o volume da bola referida na questão anterior é ______ cm^3.

A) $\frac{4.70^2}{3\pi}$

B) $\frac{4.70^3}{3\pi^2}$

C) $\frac{4.35^2}{3\pi^3}$

D) $\frac{4.35^2}{3\pi^2}$

E) $\frac{4.35^3}{3\pi^2}$

08| ENEM Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera. Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio R da esfera assim construída é igual a:

A) 15

B) 12

C) 24

D) $\sqrt[3]{60}$

E) $6\sqrt[3]{30}$

09| ENEM Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

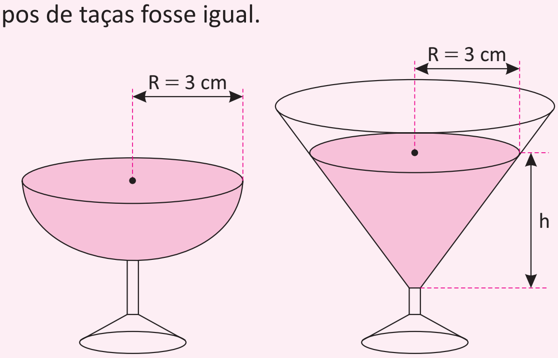


Figura 1 Figura 2

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

A) 1,33

B) 6,00

C) 12,00

D) 56,52

E) 113,04

10| FUVEST Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm é:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

11| UFPE Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

A) 3

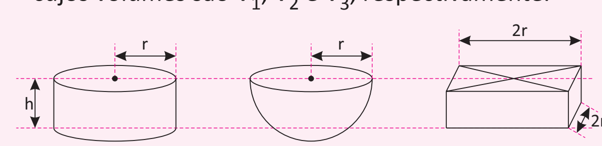
B) 9

C) 18

D) 21

E) 27

12| UFF Na figura estão representados três sólidos de mesma altura h — um cilindro, uma semi-esfera e um prisma — cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.



A relação entre V_1, V_2 e V_3 é:

A) $V_3 < V_2 < V_1$

B) $V_2 < V_3 < V_1$

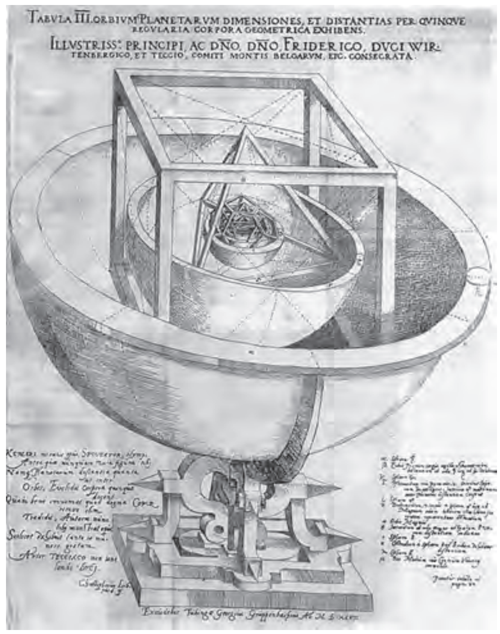
C) $V_1 < V_2 < V_3$

D) $V_3 < V_1 < V_2$

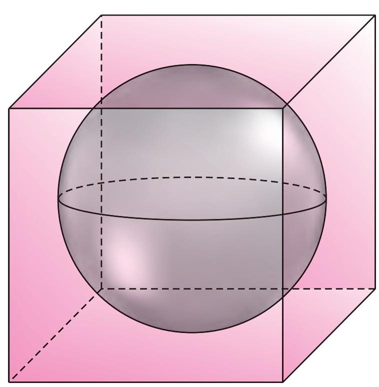
E) $V_2 < V_1 < V_3$

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE UMA ESFERA

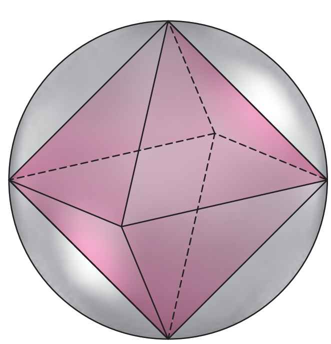
Iremos estudar aqui, casos nos quais teremos uma esfera inscrita ou circunscrita a um outro sólido. São casos particularmente relevantes dentro do estudo da geometria espacial. Examinaremos as situações mais comuns, aquelas que representam várias situações práticas ou de fenômenos recorrentemente observados na natureza. Na figura a seguir, temos o modelo do sistema solar idealizado por Johannes Kepler. Ele utiliza inscrição e circunscrição de alguns sólidos geométricos.



Uma esfera está inscrita em um poliedro se, e somente se, ela tangencia todas as faces do poliedro. Nesse caso, dizemos que o poliedro está circunscrito à esfera. Na figura a seguir, temos uma esfera inscrita em um cubo.

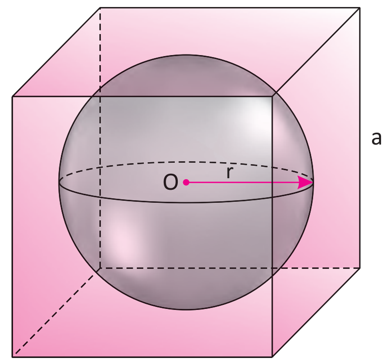


Uma esfera está circunscrita a um poliedro se, e somente se, todos os vértices do poliedro pertencem à superfície da esfera. Nesse caso, dizemos que o poliedro está inscrito na esfera. Na figura a seguir, temos uma esfera circunscrita em um octaedro.



ESFERA INSCRITA EM UM CUBO

Dada uma esfera de raio r inscrita em um cubo de aresta a.

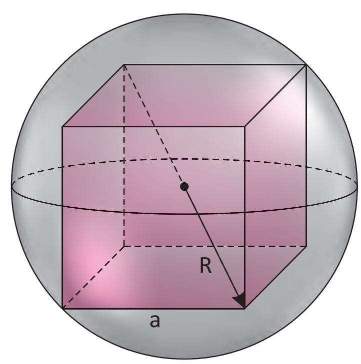


Observe que a aresta do cubo é igual ao diâmetro da esfera. Portanto, temos que:

$$a = 2r$$

ESFERA CIRCUNSCRITA A UM CUBO

Dada uma esfera de raio R circunscrita a um cubo de aresta a.

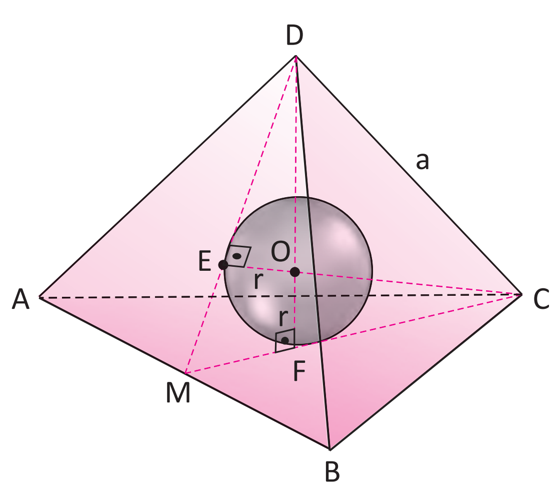


Observe que a diagonal do cubo é igual ao diâmetro da esfera. Portanto, temos que:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ESFERA INSCRITA EM UM TETRAEDRO REGULAR

Dada uma esfera de raio r inscrita em um tedraedro de aresta a.



Observe que os triângulos DFM e DOE são semelhantes. A partir dessa semelhança, temos que:

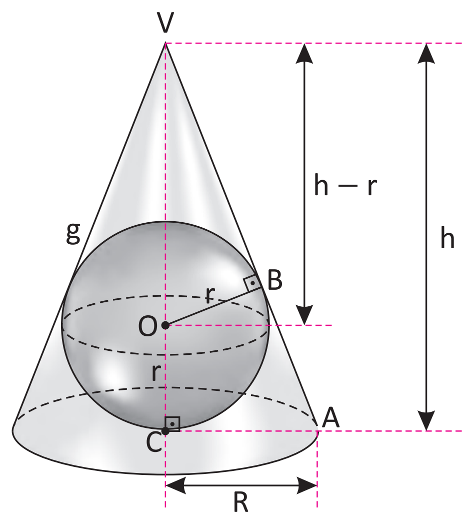
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Para obter o raio R da esfera circunscrita no tetraedro, basta observar que a soma dos raios das esferas inscrita e circunscrita é igual a altura do tetraedro. Portanto, temos que:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

ESFERA INSCRITA EM UM CONE CIRCULAR RETO

Dada uma esfera de raio r inscrita em um cone circular reto de raio da base R e altura h.

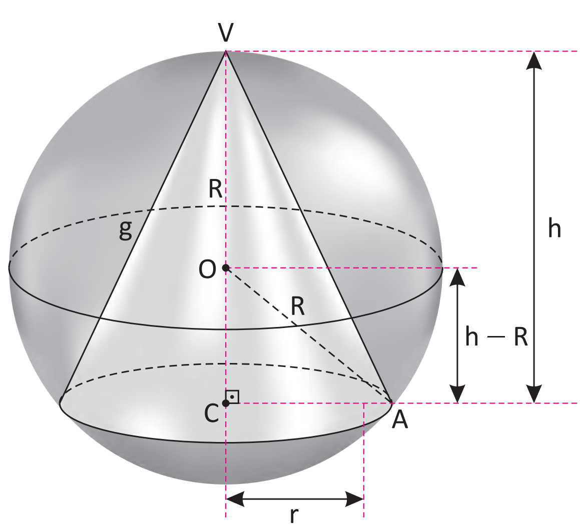


Observe que os triângulos VCA e VOB são semelhantes. Portanto, temos que:

$$r = \frac{R.(h-r)}{g}$$

ESFERA CIRCUNSCRITA EM UM CONE CIRCULAR RETO

Dada uma esfera de raio R circunscrita a um cone circular reto de raio da base r e altura h.

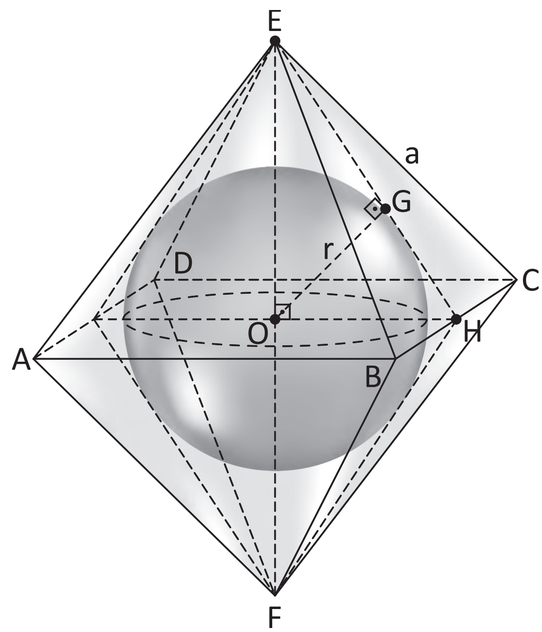


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAC, temos:

$$R^2 = r^2 + (h - R)^2$$

ESFERA INSCRITA EM UM OCTAEDRO REGULAR

Dada uma esfera de raio r inscrita em um octaedro de aresta a.

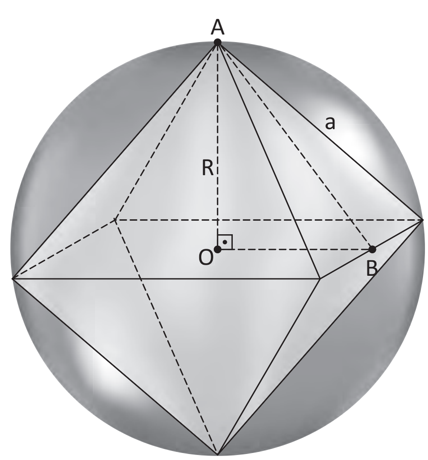


Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo OEH, temos:

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

ESFERA CIRCUNSCRITA A UM OCTAEDRO REGULAR

Dada uma esfera de raio r circunscrita a um octaedro de aresta a.



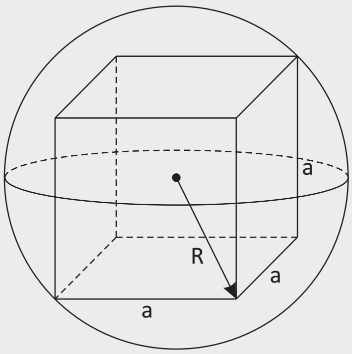
Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAB, temos:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Calcule a área total de um cubo inscrito em uma esfera de raio R.

Resolução:



Sabemos que a aresta do cubo em função do raio da esfera, é dada por:

$$a = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Área total do cubo é dada por:

$$A_T = 6a^2$$

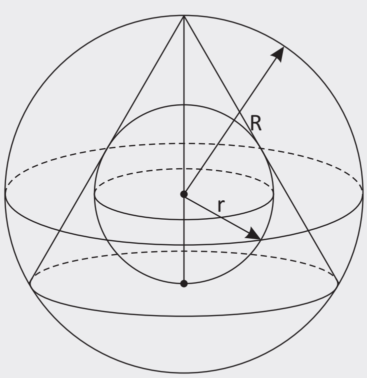
Assim temos que:

$$A_T = 6.\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 8R^2$$

Portanto, a área é $8R^2$.

02| Encontre a razão entre o volume da esfera inscrita e da esfera circunscrita a um cone equilátero.

Resolução:



Sendo h a altura do cone, temos que:

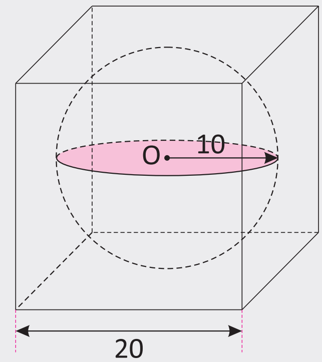
$$h = 3r \text{ e } R = \frac{2}{3}h, \text{ logo } R = 2r$$

$$\frac{V_{inscrita}}{V_{circunscrita}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{r}{2r}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Portanto, a razão é $\frac{1}{8}$.

03| Uma esfera está inscrita num cubo cuja aresta mede 20 cm. Calcule a área da superfície esférica adotando para π, o valor de aproximado de 3,14.

Resolução:



O raio da esfera inscrita é igual a metade da medida da aresta do cubo, ou seja, $r = \frac{20}{2} = 10$ cm.

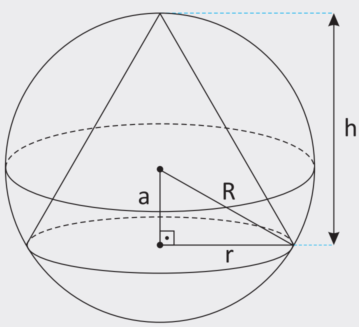
A área dessa esfera é dada por:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi.10^2 = 400\pi = 400.3,14 = 1.256\ cm^2$$

Portanto, a área é igual a 1.256 cm^2.

04| Calcule o volume da esfera circunscrita a um cone equilátero cujo raio da base mede $3\sqrt{3}$ m.

Resolução:



O lado (ℓ) da secção meridiana é dado por:

$$\ell = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm$$

A altura (h) do cone é dada por:

$$h = \frac{6\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = 9\ cm$$

O apótema (a) da secção meridiana é dado por:

$$a = \frac{9}{3} = 3\ cm$$

O raio (R) da esfera é dado por:

$$R^2 = a^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \therefore R = 6\ cm$$

O volume (V) da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

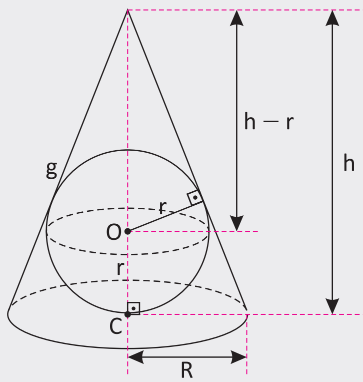
Portanto, o volume é 288π cm³.

05| Uma esfera é inscrita num cone de revolução de raio R e altura h. Encontre o raio da esfera em função de R e h.

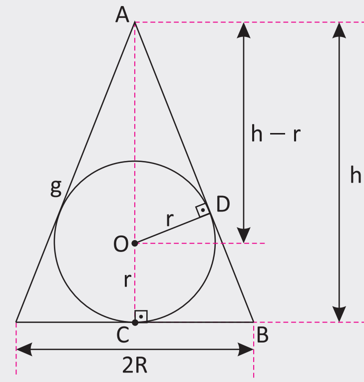
Resolução:

Ilustrando a situação descrita, temos:

I.



II.



Na figura, os triângulos AOD e ABC são semelhantes. Assim teremos:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-r}{g} \Rightarrow r = \frac{hR}{g+R} \quad (I)$$

Através do Teorema de Pitágoras, temos que:

$$g = \sqrt{h^2 + R^2} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$r = \frac{hR}{\sqrt{h^2+R^2}+R}$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Dada uma esfera de volume igual a 36π m³, calcule a área total de um octaedro regular nela inscrito.

02| Seja um cone equilátero que circunscreve uma esfera de raio r. Calcule a sua área lateral, a sua área total e o seu volume.

03| Calcule a medida da diagonal de um cubo circunscrito em uma esfera que possui volume de 36π cm³.

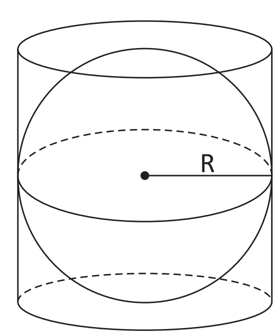
04| Dado um cubo de aresta a. Nele há uma esfera inscrita. Há, ainda, uma outra, maior, que o circunscreve. Determine a razão entre o volume da esfera maior e o volume da esfera menor.

05| De um cristal de rocha, com o formato de uma esfera, foi lapidada uma joia na forma de um octaedro regular, como mostra a figura seguinte.

Se a joia tem $9\sqrt{2}$ cm³ de volume, determine quantos centímetros cúbicos de rocha foram retirados do cristal original para lapidá-la. (Use: $\pi = 3$)

06| UFRRJ Em uma caixa d'água cúbica vazia de lado 2 m, é colocada, cheia de água, uma esfera inscrita, com espessura da parede desprezível. Estoura-se a esfera e retiram-se seus resíduos. Qual a altura de água que permanecerá dentro da caixa?

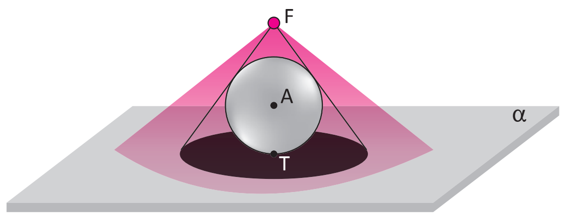
07| A figura abaixo nos mostra um cilindro circunscrevendo uma esfera de raio R.



Calcule o valor de $\frac{V_1 - V_1 V_2}{V_2}$, sendo que V_1 é o volume da esfera inscrita e V_2 é o volume do cilindro circunscrito.

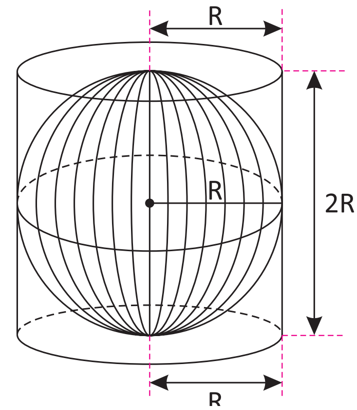
08| Numa caixa em forma de paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 26 cm, 17 cm e 8 cm, que deve ser tampada, coloca-se a maior esfera que nela couber. Qual é o maior número de esferas iguais a essa que cabem juntas nessa caixa?

09| Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:



Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa. Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então, qual é a distância $\overline{FT}$?

10| Por motivo de segurança, construiu-se um superaquário de vidro, em formato esférico, dentro de um cilindro também de vidro, conforme esquematizado na figura a seguir. A esfera está completamente cheia de água e, caso quebre, toda a água passará para o cilindro.



Desconsidere a pequena diferença entre os raios da esfera e do cilindro e o volume de água deslocado pelos pedaços de vidro da esfera quando quebrada. Supondo que R é igual a 2 m, determine:

A O volume de água da esfera.

B A capacidade volumétrica do cilindro.

C A altura do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. Use 3 como valor aproximado para π. A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

A 168

B 304

C 306

D 378

E 514

02| EPCAR Uma caixa cúbica, cuja aresta mede 0,4 metros, está com água até $\frac{7}{8}$ de sua altura. Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, não provoca transbordamento de água é:

A uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm.

B uma pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam 30 cm.

C um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}$ dm e a altura 3 dm.

D um cilindro equilátero, cuja altura seja 20 cm.

03| IFPE Um designer criou pesos para papel usando cubos e esferas. Nas peças criadas a esfera está inscrita no cubo, que tem aresta medindo 6 cm. Para dar um efeito visual, ele colocou na parte interna do cubo, e externa à esfera, um líquido vermelho. Com 1 litro desse líquido o designer pode confeccionar no máximo quantas peças?

A 9

B 12

C 18

D 24

E 27

04| UEPA A ideologia dominante também se manifesta por intermédio do acesso aos produtos do mercado, sobretudo daqueles caracterizados por tecnologias de ponta. O "Cubo Magnético" é um brinquedo constituído por 216 esferas iguais e imantadas. Supondo que esse brinquedo possa ser colocado perfeitamente ajustado dentro de uma caixa, também no formato de um cubo, com aresta igual a 30 mm, a razão entre o volume total das esferas que constituem o "Cubo Magnético" e o volume da caixa que lhe serve de depósito é:

A) $\frac{\pi}{6}$

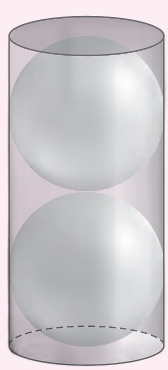
B) $\frac{\pi}{5}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{3}$

E) $\frac{\pi}{2}$

05| UFRGS Duas esferas de raio r foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura 4r, raio da base r e espessura desprezível, como na figura a seguir.



Nessas condições, a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas é:

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{2}{3}$

06| UNESP O trato respiratório de uma pessoa é composto de várias partes, dentre elas os alvéolos pulmonares, pequeninos sacos de ar onde ocorre a troca de oxigênio por gás carbônico. Vamos supor que cada alvéolo tem forma esférica e que, num adulto, o diâmetro médio de um alvéolo seja, aproximadamente, 0,02 cm. Se o volume total dos alvéolos de um adulto é igual a 1.618 cm^3, o número aproximado de alvéolos dessa pessoa, considerando $\pi = 3$, é:

A) $1.618 \cdot 10^3$

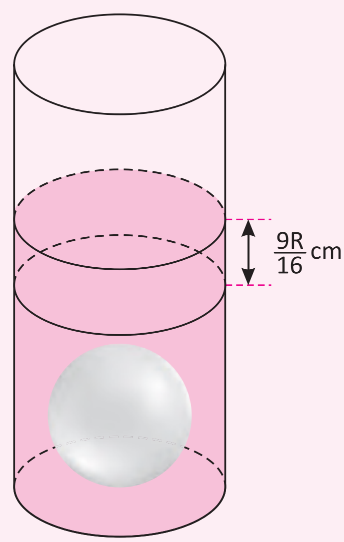
B) $1.618 \cdot 10^4$

C) $5.393 \cdot 10^2$

D) $4.045 \cdot 10^4$

E) $4.045 \cdot 10^5$

07| UFPR Um recipiente com água tem, internamente, o formato de um cilindro reto com base de raio R cm. Mergulhando nesse recipiente uma esfera de metal de raio r cm, o nível da água sobe $\frac{9R}{16}$ cm. Qual é o raio dessa esfera?



A) $r = \frac{9R}{16}$ cm

B) $r = \frac{3R}{5}$ cm

C) $r = \frac{3R}{4}$ cm

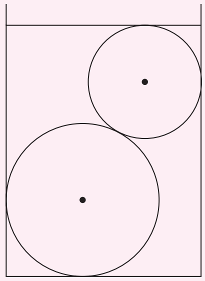
D) $r = \frac{R}{2}$ cm

E) $r = \frac{2R}{3}$ cm

08| UNIFOR Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto. Se o volume da esfera é igual a 36π cm³, o volume do cilindro, em centímetros cúbicos, é igual a:

A) 48π
B) 50π
C) 54π
D) 57π
E) 60π

09| UERJ Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Neste recipiente despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.



Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente. A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a:

A) 10,6
B) 12,4
C) 14,5
D) 25,0

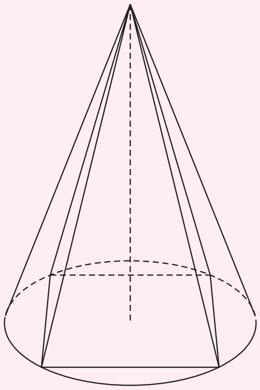
10| EFOA Um paralelepípedo retângulo, inscrito em uma esfera de raio r, tem área igual a 992 cm². Sabendo-se que suas três arestas são proporcionais a 2, 3 e 5, o valor de r, em cm, é:

A) $4\sqrt{38}$
B) $2\sqrt{39}$
C) $3\sqrt{38}$
D) $2\sqrt{38}$
E) $4\sqrt{39}$

11| MACK Um cubo está inscrito numa esfera. Se a área total do cubo é 8, o volume da esfera é:

A) $\frac{8\pi}{3}$
B) $\frac{4\pi}{3}$
C) $\frac{16\pi}{3}$
D) 12π
E) 8π

12| UFOP Uma pirâmide reta de base quadrada está inscrita num cone reto de raio da base $2\sqrt{2}$ cm. A relação entre os volumes do cone e da pirâmide, nesta ordem, é:

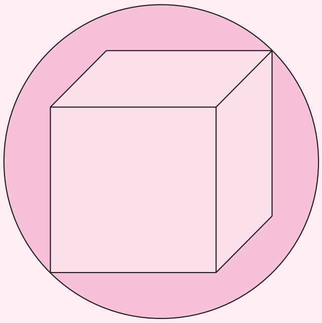


A) $\frac{\pi}{6}$
B) $\frac{\pi}{3}$
C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{2}$

13| UECE Uma esfera está circunscrita a um cubo cuja medida da aresta é 2 m. A medida do volume da região exterior ao cubo e interior à esfera é:

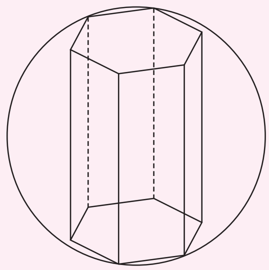
A) $4(\pi\sqrt{3} - 2)\,m^3$
B) $3(\pi\sqrt{3} + 2)\,m^3$
C) $4(\pi\sqrt{3} + 2)\,m^3$
D) $3(\pi\sqrt{3} - 2)\,m^3$

14| UFPE Qual o volume do cubo que tem todos os vértices em uma superfície esférica de raio 3 cm?



A) $24\sqrt{3}$ cm³
B) $18\sqrt{3}$ cm³
C) $24\sqrt{2}$ cm³
D) $28\sqrt{2}$ cm³
E) 48 cm³

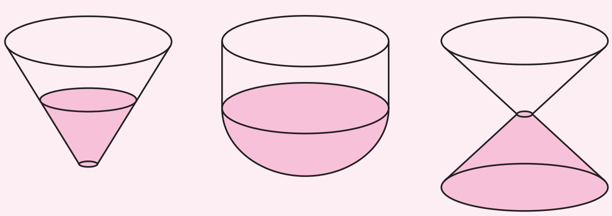
15| UESPI Um prisma hexagonal regular, com lado da base medindo 3 cm e altura 8 cm, está inscrito em uma esfera, como ilustrado a seguir.



Qual a área da superfície da esfera?

A) 92π cm^2
B) 94π cm^2
C) 96π cm^2
D) 98π cm^2
E) 100π cm^2

16| ENEM Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V1, V2 e V3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se

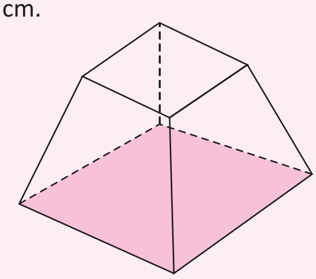


A) $V_1 = V_2 = V_3$
B) $V_1 < V_3 < V_2$
C) $V_1 = V_3 < V_2$
D) $V_3 < V_1 < V_2$
E) $V_1 < V_2 = V_3$

17| UDESC Algumas caixas de pizza para entrega têm o formato de um prisma regular de base hexagonal. Considere uma caixa destas com altura de 4 cm e, com base, um polígono de perímetro 72 cm. Se a pizza tem o formato de um cilindro circular, então o volume máximo de pizza que pode vir nesta caixa é:

A) $216\sqrt{3}$ cm^3
B) 576π cm^3
C) $864\sqrt{3}$ cm^3
D) 108π cm^3
E) 432π cm^3

18| UCS A embalagem de um minipanetone tem a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular (Veja a figura abaixo.). A aresta da base maior, a aresta da base menor e a aresta lateral, medidas externamente, têm, respectivamente, 10 cm, 8 cm e 10 cm. Desconsiderando dobras e sobreposições, foram necessários, aproximadamente, ___________ cm^2 de material para confeccionar a embalagem. E, considerando, para efeitos de cálculo, que o panetone tenha forma de cilindro, o raio máximo que a base desse panetone pode ter, sem levar em conta a espessura do material da embalagem, é de ___________ cm.



Assinale a alternativa que completa, correta e respectivamente, as lacunas acima.
Dado: $(3{,}32)^2 = 11{,}0224$

A) 459,84 e 5
B) 459,84 e 4
C) 522,56 e 4
D) 522,56 e 5
E) 520,40 e 5

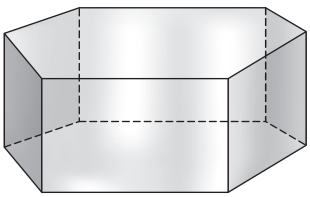
19| PUCPR Em certas culturas, é de extremo bom gosto presentear com frutas, como melancia, melão, laranja ou ameixa. Um bom presente requer uma embalagem à altura. Pode ser, por exemplo, uma bela caixa para presente em forma de cubo. Vamos considerar que as frutas selecionadas sejam muito próximas de esferas e que o lado da caixa tenha 32 cm. Quanto ao diâmetro das frutas, levemos em conta que melancias têm 32 cm de diâmetro; melões, 16 cm; laranjas, 8 cm e ameixas, 4 cm.
Com base nessas informações, constatamos que, na caixa cheia com o mesmo tipo de fruta, cabem: 1 melancia, ou 8 melões, ou 64 laranjas, ou 512 ameixas.
Pergunta: qual é o volume resultante, VR, do espaço vazio dentro da caixa, isto é, qual é a diferença entre o volume da caixa e das frutas dentro da caixa?

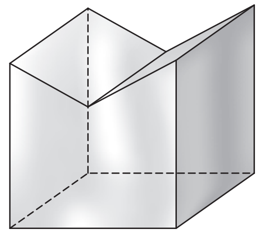
A) A melancia deixa o maior volume do espaço vazio dentro da caixa; os 8 melões, o segundo maior, as laranjas, o terceiro, e as ameixas, o menor.
B) A relação do volume resultante é, respectivamente: $\frac{VR}{16} : \frac{VR}{8} : \frac{VR}{4} : \frac{VR}{2}$
C) O volume resultante é próximo de 0 cm^3.
D) Nada podemos afirmar sobre o volume resultante.
E) O volume resultante é VR $= 15.610{,}7$ cm^3, independente do tipo das frutas.

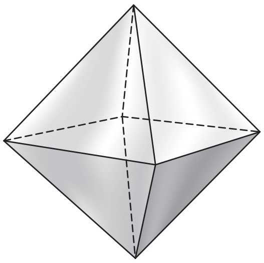
POLIEDROS

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Poliedro é um sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos que pertencem a planos diferentes e que possuem dois a dois, exatamente um lado comum. Observe as figuras a seguir:





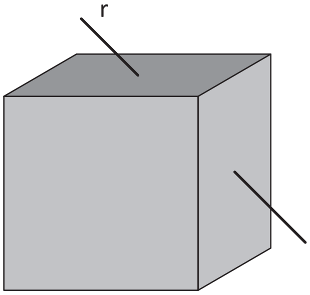


Para os poliedros em geral, temos que:

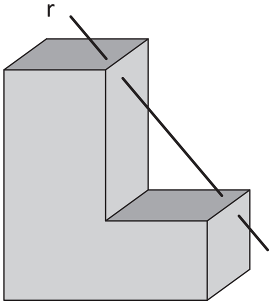
- Os polígonos são chamados de faces do poliedro.
- Os lados dos polígonos são chamados de arestas do poliedro.
- Os vértices dos polígonos são chamados de vértices dos poliedros.

POLIEDROS CONVEXOS

Dizemos que um poliedro é convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois de seus pontos está totalmente contido no poliedro. Caso contrário, o poliedro é chamado de côncavo (ou não convexo). Observe as figuras a seguir:



Poliedro Convexo



Poliedro Côncavo

NOMENCLATURA DOS POLIEDROS

Os poliedros recebem seus nomes de acordo com o número de faces que possuem. Observe a tabela a seguir:

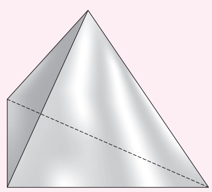
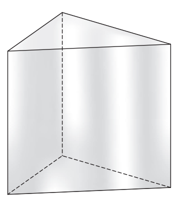
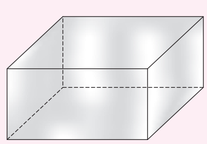
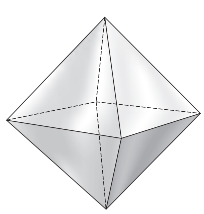
FACES	NOME
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
15	Pentadecaedro
20	Icosaedro

RELAÇÃO DE EULER

É uma expressão criada pelo matemático suíço Leonhard Euler que relaciona o número de arestas, vértices e faces de todos os poliedros convexos. Assim, dado um poliedro convexo que possui V vértices, F faces e A arestas, temos a seguinte relação:

$$V - A + F = 2$$

Note a validade da relação de Euler em cada um dos casos da tabela a seguir:

Poliedro	Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (A)
 Tetraedro	4	4	6
 Pentaedro	6	5	9
 Hexaedro	8	6	12
 Octaedro	6	8	12

QUANTIDADE DE ARESTAS DE UM POLIEDRO CONVEXO

- Em função do número de faces: Considere um poliedro que possui F faces com n arestas cada face. O número A de arestas desse poliedro é dado por:

$$A = \frac{F.n}{2}$$

- Em função do número de vértices: Considere um poliedro que possui V vértices com m arestas cada vértice. O número A de arestas desse poliedro é dado por:

$$A = \frac{V.m}{2}$$

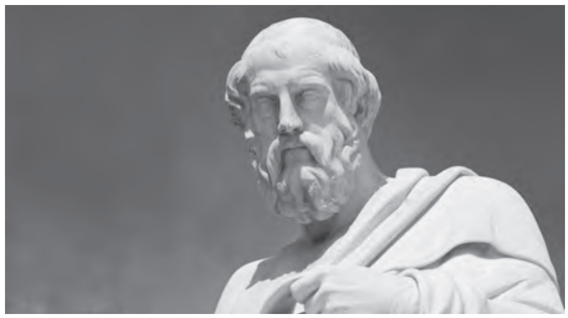
SOMA DOS ÂNGULOS DE TODAS AS FACES

Dado um poliedro convexo que possui V vértices, a soma (S) dos ângulos de todas as faces desse poliedro é dada por:

$$S = (V - 2).360°$$

POLIEDROS DE PLATÃO

Platão foi um filósofo grego, que viveu entre os séculos V e IV a.C., e estabeleceu importantes propriedades em alguns poliedros.

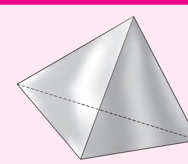
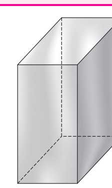
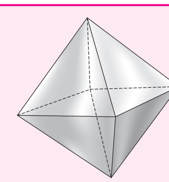
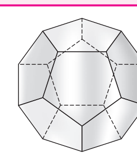
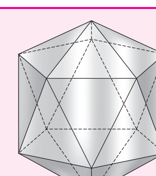


Shutterstock.com

Um poliedro convexo é poliedro de Platão se:

- todas as suas faces tenham o mesmo número de arestas;
- todos seus vértices concorrem exatamente o mesmo número de arestas.

Existem exatamente 5 poliedros de Platão. Observe a tabela a seguir:

Poliedro	Características	Ilustrações
Tetraedro regular	4 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Hexaedro regular	6 faces quadrangulares, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Octaedro regular	8 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 4 arestas	
Dodecaedro regular	12 faces pentagonais, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Icosaedro regular	20 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 5 arestas	

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. Calcule o número de vértices desse poliedro.

Resolução:

O número de arestas desse poliedro é dado por:

$A = \dfrac{4.3 + 2.4 + 1.6}{2} = \dfrac{12 + 8 + 6}{2} = 13$ *arestas*

O número total de faces é dado por:

$F = 4 + 2 + 1 = 7$ *faces.*

Utilizando a relação de Euler, temos que:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 13 + 7 = 2 \Rightarrow V = 8$

Portanto, o número de vértices é dado por:

02| Se a soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1.440°, calcule o número de arestas desse poliedro.

Resolução:

A soma dos ângulos das faces em função do número de vértices é dada por:

$S = (V - 2).360° \Rightarrow 1.440 = 360V - 720$

$V = 6$ *vértices*

O poliedro regular com 6 vértices é o octaedro regular, que possui 8 faces. Assim, temos que:

$V - A + F = 2 \Rightarrow A + 2 = 6 + 8 \Rightarrow A = 12$ *arestas*

Portanto, que o poliedro possui 12 arestas.

03| Um poliedro convexo possui 8 faces, todas triangulares. Calcule o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

Resolução:

Cada uma das 8 faces triangulares possui 3 arestas. Assim, o número de arestas (A) é dado por:

$A = \dfrac{F.n}{2} = \dfrac{8.3}{2} = 12$ *arestas*

Utilizando a relação de Euler, temos que:

$V - 12 + 8 = 2 \Rightarrow V = 6$ *vértices*

Portanto, o poliedro tem 12 arestas e 6 vértices.

04| Um poliedro tem dez ângulos poliédricos, todos triedros. Determine quantas arestas e quantas faces tem esse poliedro.

Resolução:

Ângulo triédrico é aquele composto por um vértice no qual chegam três arestas. Assim, o número A de arestas desse poliedro é dado por:

$A = \dfrac{10.3}{2} = 15$ *arestas*

Utilizando a relação de Euler, temos que:

$10 - 15 + F = 2 \Rightarrow F = 7$ *faces*

Portanto, o poliedro possui 7 faces.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Num poliedro convexo, o número de vértices é 8 e o número de arestas é 12. Calcule o número de faces.

02| Um poliedro convexo tem 10 faces, todas quadrangulares. Calcule o número de vértices desse poliedro.

03| Calcule o número de arestas e o número de vértices de um icosaedro regular, sabendo que todas as faces do icosaedro são triangulares.

04| Um heptaedro convexo tem uma face quadrangular, 2 faces pentagonais e 4 faces triangulares. Determine o seu número de arestas e o seu número de vértices.

05| Um poliedro convexo tem 20 vértices e de cada um deles saem 3 arestas. Determine:

A O seu número de arestas.

B O seu número de faces.

06| Calcule o número de vértices de um poliedro convexo de 10 faces quadrangulares.

07| Um poliedro convexo possui faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que ele tem 12 arestas e que a soma dos ângulos das faces é 1.800°, quantas faces existem de cada tipo?

08| Num poliedro convexo, o número de arestas supera o número de vértices em 10 unidades. Qual é o número de faces desse poliedro?

09| **UFGO** Um joalheiro produzirá um ornamento para um pingente a partir de uma pedra preciosa, originalmente em forma de um cubo. Para isso, ele retirará de cada vértice do cubo um tetraedro cujos vértices são o vértice do cubo e os pontos médios das arestas que concorrem neste vértice.

Os tetraedros serão descartados. Considerando-se as condições apresentadas, calcule:

A O número de faces do poliedro que constitui o ornamento.

B A fração do volume do cubo original que constitui cada tetraedro retirado.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UNIFICADO Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 aresta, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

- A 16
- B 18
- C 24
- D 30
- E 44

02| FCC O número de diagonais de um poliedro regular com 10 vértices é:

- A 50
- B 40
- C 20
- D não existe poliedro regular com 10 vértices.
- E nenhuma das anteriores.

03| UFSCAR Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de:

- A um hexaedro regular
- B um cubo
- C um octaedro
- D um icosaedro regular
- E um dodecaedro regular

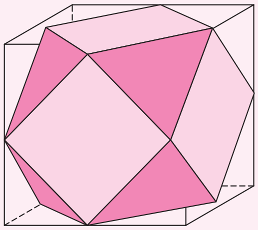
04| MACK Seja V o vértice de uma pirâmide. Cada uma de suas faces tem no vértice V um ângulo de 50°. O número máximo de faces dessa pirâmide é:

- A 5
- B 6
- C 7
- D 8
- E 9

05| UFAM Um poliedro convexo tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais. Então o número de vértices desse polígono é igual a:

- A 7
- B 15
- C 10
- D 12
- E 9

06| UNIFESP Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo. O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:



- A 8 e 8
- B 8 e 6
- C 6 e 8
- D 8 e 4
- E 6 e 6

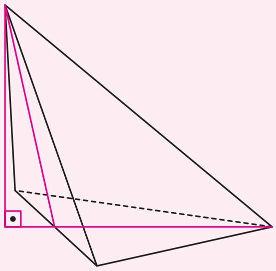
07| IME O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é:

- A $\frac{V}{2}$
- B $\frac{V}{4}$
- C $\frac{V}{8}$
- D $V\frac{\sqrt{2}}{2}$
- E $V\frac{\sqrt{3}}{2}$

08| UEPB Um poliedro convexo tem 25 arestas e todas as suas faces pentagonais. Então o número de faces e de vértices do poliedro são respectivamente:

- A 14 e 16
- B 12 e 14
- C 10 e 14
- D 10 e 12
- E 10 e 17

09| UESPI Um tetraedro tem cinco arestas medindo 6 cm, e a sexta aresta mede $6\sqrt{2}$ cm. Qual o volume do tetraedro?



A) 28 cm^3

B) $19\sqrt{2}$ cm^3

C) 26 cm^3

D) 27 cm^3

E) $18\sqrt{2}$ cm^3

10| FUVEST Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é:

A) $2\sqrt{3}$

B) 4

C) $3\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{3}$

E) 6

11| UDESC Considere um prisma triangular reto e um tetraedro de mesma base, a qual é um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa medindo $3\sqrt{2}$ cm. Sabendo que a altura do tetraedro é igual a um terço da altura do prisma, e que a diferença entre o volume do tetraedro e o volume do prisma é igual a 8 cm^3, então a altura do prisma é:

A) $\frac{8}{3}$ cm

B) $\frac{24}{3}$ cm

C) 1 cm

D) $\frac{2}{3}$ cm

E) 2 cm

12| UECE Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono é:

A) 90

B) 72

C) 60

D) 56

13| UECE Se um poliedro convexo tem exatamente 20 faces e todas são triangulares, então o número de vértices deste poliedro é:

A) 16

B) 14

C) 12

D) 10

14| UFCE Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então, o número de faces triangulares é:

A) 12

B) 11

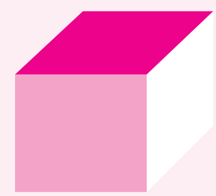
C) 10

D) 9

E) 8

15| ENEM Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

A)

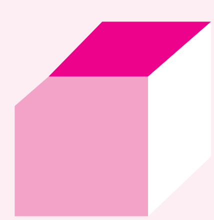


B)

C)

D)

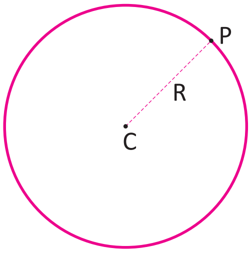
E)



CIRCUNFERÊNCIA

DEFINIÇÃO

Dados um ponto C e uma distância R, denomina-se circunferência o conjunto de pontos do plano distantes R do ponto C. Observe a figura a seguir:

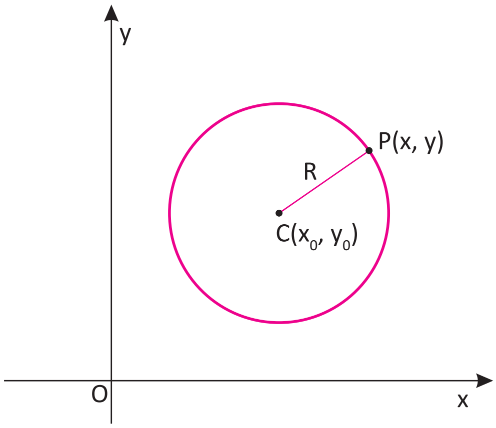


Nessa circunferência, temos que:

- O segmento CP de medida R é o seu raio.
- O ponto C é o seu centro.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Sendo P(x, y) um ponto qualquer de uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R, a distância entre esses pontos é constante e igual R. Observe a figura a seguir:



Daí, temos que:

$$d_{PC} = R \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado, temos que:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

Essa é a **equação reduzida** de uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R.

Por exemplo:

- Para determinar o centro e o raio da circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$, basta comparar essa equação com $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

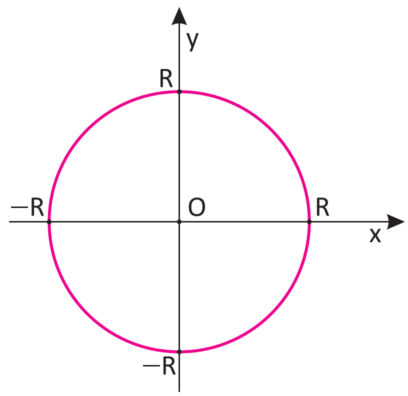
Assim, temos que:

- $-x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = 2$.
- $-y_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3$.
- $R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

Portanto, essa circunferência tem centro C(2, −3) e raio R = 5.

OBSERVAÇÕES:

- Para obter as coordenadas do centro a partir da equação reduzida, basta trocar os sinais dos números que acompanham x e y.
- Para obter a medida do raio a partir da equação reduzida, basta extrair a raiz quadrada do número do segundo membro.
- A equação de uma circunferência com o centro na origem do sistema cartesiano e raio R é dada por $x^2 + y^2 = R^2$. Observe a figura a seguir:



EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

A equação geral de uma circunferência é a equação obtida a partir do desenvolvimento da equação reduzida. Assim, dada uma circunferência de equação reduzida $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, temos que:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

Daí, temos que:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$$

Essa é a **equação geral (ou desenvolvida)** da circunferência.

Por exemplo:

- Para determinar a equação geral da circunferência de centro C(−4, 3) e raio 2, temos:

  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 4$

Portanto, a equação geral dessa circunferência é $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$.

OBSERVAÇÃO:

- Fazendo $-2x_0 = m$, $-2y_0 = n$ e $x_0^2 + y_0^2 - R^2 = k$, a equação geral de uma circunferência também pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0$$

DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DO RAIO A PARTIR DA EQUAÇÃO GERAL

Dada a equação geral de uma circunferência, os elementos que a definem (centro e raio) não ficam evidentes. Com isso, vamos apresentar dois métodos para, a partir da equação geral, se obter o centro e o raio dessa circunferência.

MÉTODO DA COMPARAÇÃO

Dada a circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, podemos determinar seu centro e raio comparando sua equação com a equação geral $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$. Assim, temos:

- $-2x_0 = -6 \Rightarrow x_0 = 3$.
- $-2y_0 = 4 \Rightarrow y_0 = -2$.
- $x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 12$.

Daí, temos que:

- $3^2 + (-2)^2 - R^2 = 12 \Rightarrow R = 1.$

Portanto, a circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ tem centro $C(3, -2)$ e raio $R = 1$.

MÉTODO DOS QUADRADOS PERFEITOS

Dada a circunferência de equação geral $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, podemos determinar seu centro e raio transformando-a numa soma de dois trinômios quadrados perfeitos (equação reduzida).

- Agrupando os termos em x, os termos em y e passando o termo independente para o 2º membro da equação, temos:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -6$$

- Adicionando em ambos os membros da equação os mesmos números de modo que os agrupamentos em x e y se transformem em quadrados perfeitos, temos:

$$(x^2 + 2x + \mathbf{1}) + (y^2 - 6y + \mathbf{9}) = -6 + \mathbf{1} + \mathbf{9}$$

Note que o termo a ser somado ao agrupamento em x é o quadrado da metade de coeficiente de x e o termo a ser somado ao agrupamento em y é o quadrado da metade do coeficiente de y.

- Escrevendo a equação na forma reduzida, temos:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

Portanto, a circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ tem centro $C(-1, 3)$ e raio $R = 2$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Denomina-se equação do 2º grau nas variáveis x e y toda a equação na forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = 0$$

Sendo $\{A, B, C, D, E\} \subset IR$ com A, B e C não simultaneamente nulos.

Essa equação representa uma circunferência se, e somente se, obedecer às três condições a seguir:

- **1ª condição:** $A = B \neq 0$.
- **2ª condição:** $C = 0$.
- **3ª condição:** obedecidas as duas primeiras condições, ao obter uma equação equivalente na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, sendo $\{a, b, c\} \subset IR$ (forma reduzida), o valor numérico da constante c^2 deve ser positivo.

Por exemplo:

Vamos analisar qual das equações a seguir representam circunferências.

- $2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 1 = 0.$

Não é uma circunferência pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes.

- $x^2 + y^2 + 3xy + x - 3y + 6 = 0.$

Não é uma circunferência pois o coeficiente de xy é diferente de zero.

- $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8 = 0.$

Essa equação obedece às duas primeiras condições. Vamos verificar a terceira condição, transformando-a numa soma de dois trinômios quadrados perfeitos (equação reduzida).

- $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -8 + 4 + 1 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -3$.

Não é uma circunferência pois, o termo do segundo membro da equação reduzida é negativo.

- $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 67 = 0$.

Essa equação obedece às duas primeiras condições. Vamos verificar a terceira condição, transformando-a numa soma de dois trinômios quadrados perfeitos (equação reduzida).

- $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 6 + 9 + 1 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

É uma circunferência pois, o termo do segundo membro da equação reduzida é positivo.

OBSERVAÇÃO:

- Nem toda equação da forma $x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0$, sendo $\{m, n, k\} \in IR$, representa uma circunferência.

Por exemplo:

- Vamos determinar os valores reais de k para que a equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y + k = 0$ represente uma circunferência pelo método dos quadrados perfeitos:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + k = 0 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = -k + 9 + 16 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = -k + 25$$

Comparando essa equação com a equação reduzida $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, com $R^2 > 0$, temos que:

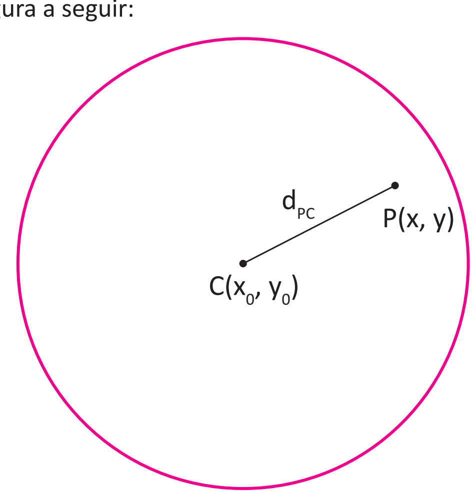
- $-x_0 = 3 \Rightarrow x_0 = -3$.
- $-y_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4$.
- $R^2 = -k + 25 \Rightarrow -k + 25 > 0 \Rightarrow k < 25$.

Portanto, a equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y + k = 0$ representa uma circunferência para $\{k \in IR \mid k < 25\}$.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Dados um ponto P(x, y) e uma circunferência λ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Esse ponto pode ser interior, exterior ou pertencer a circunferência λ. Assim, temos que:

- O ponto P(x, y) é interior a λ se, e somente se, a distância entre ele e o centro da circunferência for menor que a medida do raio. Observe a figura a seguir:



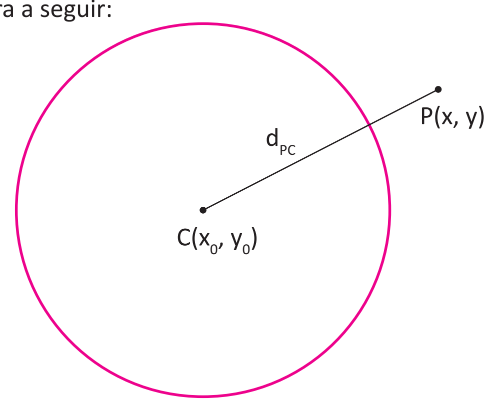
$d_{PC} < R$

Nessa situação, temos que:

$$d_{PC} < R \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

Assim, um ponto P(x, y) é interior a λ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$. Essa desigualdade representa a **região interior** à λ.

- O ponto P(x, y) é exterior a λ se, e somente se, a distância entre ele e o centro da circunferência for maior que a medida do raio. Observe a figura a seguir:



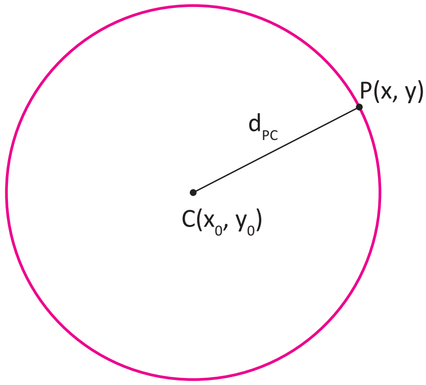
$d_{PC} > R$

Nessa situação, temos que:

$$d_{PC} > R \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} > R \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 > R^2$$

Assim, um ponto P(x, y) é exterior a λ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 > R^2$. Essa desigualdade representa a **região exterior** à λ.

- O ponto P(x, y) pertence a λ se, e somente se, a distância entre ele e o centro da circunferência for igual a medida do raio. Observe a figura a seguir:



$d_{PC} = R$

Nessa situação, temos que:

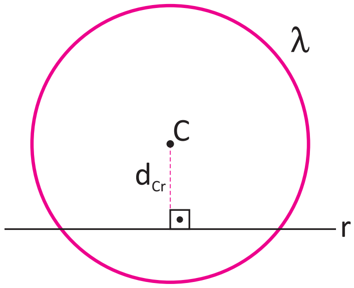
$$d_{PC} = R \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$$

Assim, um ponto P(x, y) pertence a λ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem $(x-x_0)^2+(y+y_0)^2 = R^2$.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

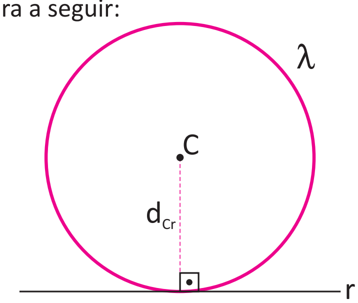
Dadas uma reta r: ax + by + c = 0 e uma circunferência λ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Essa reta pode ser secante, tangente ou exterior a circunferência λ. Assim, temos que:

- A reta r: ax + by + c = 0 é secante a λ se, e somente se, a distância entre ela e o centro da circunferência for menor que a medida do raio. Observe a figura a seguir:



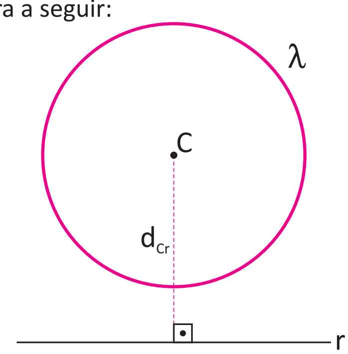
$d_{Cr} < R$

- A reta r: $ax + by + c = 0$ é tangente a λ se, e somente se, a distância entre ela e o centro da circunferência for igual a medida do raio. Observe a figura a seguir:



$d_{Cr} = R$

- A reta r: $ax + by + c = 0$ é exterior a λ se, e somente se, a distância entre ela e o centro da circunferência for maior que medida do raio. Observe a figura a seguir:



$d_{Cr} > R$

OBSERVAÇÃO:

- Para determinar os pontos de intersecção da circunferência λ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ e da reta r: $ax + by + c = 0$, basta resolver o sistema a seguir formado por suas equações.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Ao substituirmos a equação da reta na equação da circunferência, obteremos uma equação do segundo com apenas uma variável. A análise do seu discriminante (Δ) nos dirá o número de soluções e, consequentemente, o número de pontos de intersecção. Assim, para determinar a posição da reta r em relação à circunferência λ, temos que:

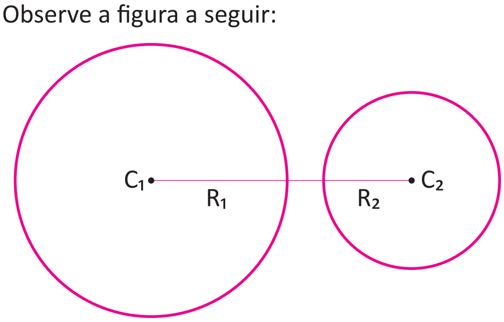
- Se $\Delta > 0$, temos duas soluções reais distintas, ou seja, dois pontos de intersecção. Nessa situação, a reta é secante.
- Se $\Delta = 0$, temos duas soluções reais iguais, ou seja, um ponto de intersecção. Nessa situação, a reta é tangente.
- Se $\Delta < 0$, não temos soluções reais, ou seja, não temos pontos de intersecção. Nessa situação, a reta é exterior.

A vantagem desse método está no fato dele ser capaz de determinar as coordenadas dos pontos de intersecção da reta e da circunferência.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

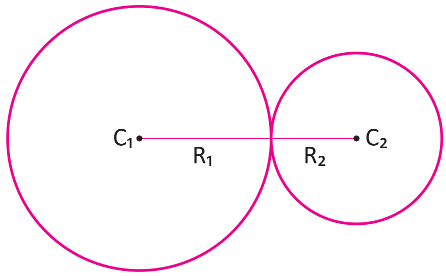
Dadas as circunferências λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios medindo R_1 e R_2, respectivamente, temos que:

- As circunferências λ_1 e λ_2 são exteriores se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 é maior que a soma das medidas dos raios. Observe a figura a seguir:



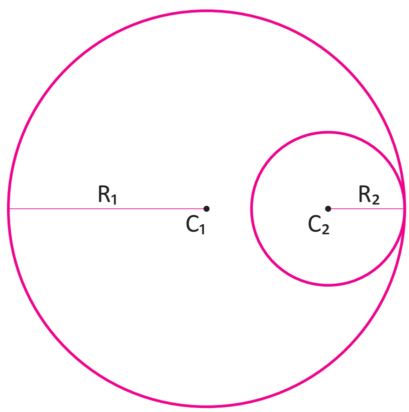
$d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$

- As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes exteriores se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a soma das medidas dos raios. Observe a figura a seguir:



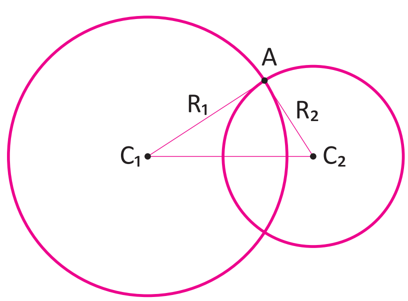
$$d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$$

- As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes interiores se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 for igual ao módulo da diferença das medidas dos raios. Observe a figura a seguir:



$$d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$$

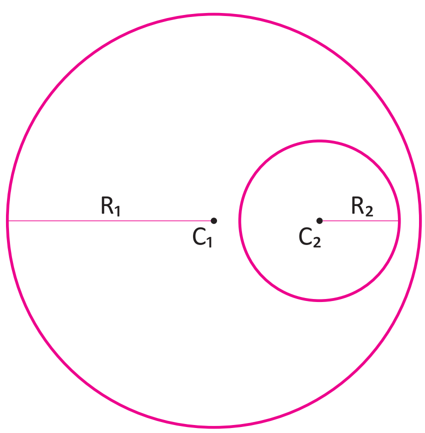
- As circunferências λ_1 e λ_2 são secantes se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 for menor que a soma e maior que o módulo da diferença das medidas dos raios. Observe a figura a seguir:



$$|R_1 - R_2| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$$

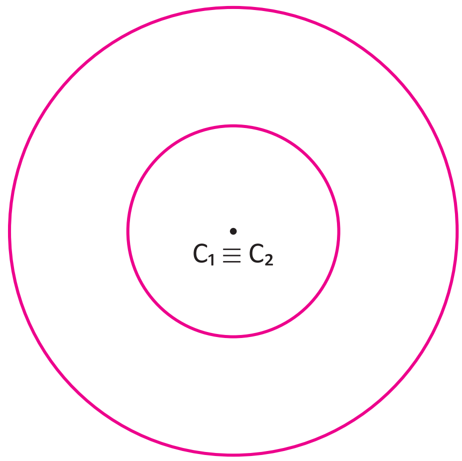
Note que essa expressão é a condição de existência do triângulo AC_1C_2.

- As circunferências λ_1 e λ_2 são interiores se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 for menor que o módulo da diferença das medidas dos raios e maior que zero. Observe a figura a seguir:



$$0 < d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$$

- As circunferências λ_1 e λ_2 são concêntricas se, e somente se, a distância entre os centros C_1 e C_2 for igual a zero. Observe a figura a seguir:

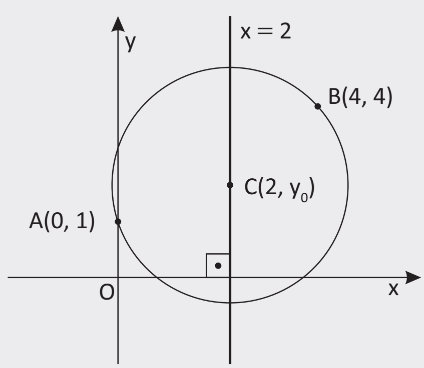


$d_{C_1C_2} = 0$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Determine a equação da circunferência que contêm os pontos A(0, 1) e B(4, 4), sabendo que seu centro está sobre a reta x = 2.

Resolução:



Como o centro C pertence a reta x = 2, temos que C(2, y_0):

Substituindo o ponto A(0, 1) na equação, temos:

$(0-2)^2 + (1-y_0)^2 = R^2$ **(I)**

Substituindo o ponto B(0, 1) na equação, temos:

$(4-2)^2 + (4-y_0)^2 = R^2$ **(II)**

Fazendo **(I) = (II)**, *temos:*

$(-2)^2 + (1-y_0)^2 = (2)^2 + (4-y_0)^2$

$4 + 1 - 2y_0 + y_0^2 = 4 + 16 - 8y_0 + y_0^2$

$6y_0 = 15 \Rightarrow y_0 = \frac{15}{6} = \frac{5}{3}$

Então:

$C\left(2, \frac{5}{3}\right)$

Substituindo $y_0 = \frac{5}{3}$ *em* **(I)**, *temos:*

$4 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{40}{9}$

Portanto a equação reduzida da circunferência é $(x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$.

02| Verifique se as equações representam circunferências e, em caso afirmativo, determine o seu centro e raio:

A $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 16 = 0$

B $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

Resolução:

A *As duas primeiras condições são válidas, ou seja,* $A = B = 1 \neq 0$ *e* $C = 0$.

Aplicando o método dos quadrados perfeitos, temos:

$x^2 - 2x + \_\_\_ + y^2 - 2y + \_\_\_ = -16 + \_\_\_ + \_\_\_$

$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 = -16 + 1^2 + 1^2$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -14 < 0$

Logo, não é uma circunferência.

B *As duas primeiras condições são válidas, ou seja,* $A = B = 1 \neq 0$ *e* $C = 0$.

Aplicando o método dos quadrados perfeitos, temos:

$x^2 - 8x + \_\_\_ + y^2 + 4y + \_\_\_ = -11 + \_\_\_ + \_\_\_$

$x^2 - 8x + 4^2 + y^2 + 4y + 2^2 = -11 + 4^2 + 2^2$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = -11 + 16 + 4$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$

Logo, é uma circunferência de centro C(4, –2) e raio R = 3.

03| Para quais valores de p, o ponto A(−1, p) não é exterior à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 7x + 4y - 6 = 0$?

Resolução:

Para que o ponto não seja externo a circunferência, basta que ele satisfaça a condição de ser interno ou pertencer a circunferência, ou seja, $d_{CP} \leq R$. Também podemos substituir as coordenadas do ponto P na desigualdade $x^2 + y^2 - 7x + 4y - 6 \leq 0$. Assim, temos que:

$(-1)^2 + p^2 - 7.(-1) + 4p - 6 \leq 0$

$p^2 + 4p + 3 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq p \leq -1$

Portanto, temos que: $\{p \in IR \mid -3 \leq p \leq -1\}$

04| Determine as equações das retas t tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, que passam pelo ponto P(2, 0).

Resolução:

Primeiramente, vamos verificar a posição relativa do ponto em relação a circunferência.

$d_{CP} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2 > R$

Então o ponto P é externo a circunferência, sendo assim, devemos determinar as duas retas tangentes que possuem o ponto P em comum. Como a única informação é um único ponto, será necessário utilizar a equação fundamental, de modo a determinar os coeficientes angulares.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = m(x - 2)$

$y = mx - 2m \Rightarrow mx - y - 2m = 0$

Basta determinar a distância do centro a reta e garantir que tal distância será igual ao raio.

Então:

$$d_{Ct} = \frac{|m.0 - 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 1$$

$$|-2m| = \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \therefore m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, *temos:* $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$

Para $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, *temos:* $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$

05| Qual a equação da circunferência de centro $C_1(7, 3)$ que é tangente a circunferência de equação $\lambda_2: x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$.

Resolução:

Como já sabemos a posição relativa das circunferências, temos que utilizar a condição de tangência para determinar o raio da circunferência C_1, ou seja $d_{C_1, C_2} = R_1 + R_2$.

Portanto é necessário determinar pela equação dada, o centro e o raio da circunferência λ_2:

Pelo método da comparação temos:

$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$

$$\begin{matrix} 2x_0 = 6 \Rightarrow x_0 = 3 \\ 2y_0 = 6 \Rightarrow y_0 = 3 \end{matrix} \Rightarrow C_2(3, 3)$$

$x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 14$

$3^2 + 3^2 - R^2 = 14$

$R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$

Verificando a condição temos:

$d_{C_1 C_2} = R_1 + R_2$

$\sqrt{(3-7)^2 + (3-3)^2} = R_1 + 2$

$4 = R_1 + 2$

$R_1 = 2$

Então:

$\lambda_1: (x-7)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

Portanto, $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 54 = 0$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R nos seguintes casos.

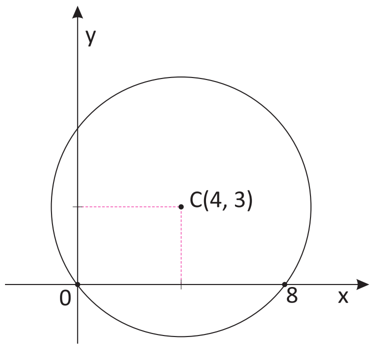
A C(0, 0) e R = 2

B C(1, 2) e R = 2

C C(−1, 2) e R = $\sqrt{3}$

D C(0, −5) e R = $2\sqrt{2}$

02| Escreva a equação reduzida da circunferência representada no gráfico a seguir.



03| Obtenha o centro C e o raio R das circunferências a seguir:

A $x^2 + y^2 = 9$

B $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

C $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

D $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$

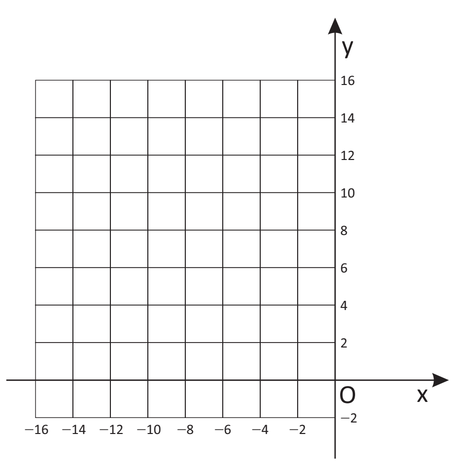
E $(x - 0,5)^2 + (y + 1)^2 = 1,44$

F $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 36$

G $(x + 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

04| UEMA O proprietário de um lote, visando a sua ornamentação, dividiu-o em área circular, tendo subdividido-o em dois triângulos idênticos opostos, inscritos no círculo, cujos vértices são A(−14, 9), B(−4, 9) e C(−9, 14), sendo AB o diâmetro da circunferência. Considerando as condições descritas e as medidas em metros,

A faça a ilustração gráfica desse lote no sistema cartesiano ortogonal do plano.



B determine a equação da circunferência.

C determine a área correspondente aos triângulos idênticos.

05| Escreva cada uma das equações a seguir na forma geral.

A $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

B $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

C $(x + 0,5)^2 + (y - 0,3)^2 = 1,44$

D $x^2 + (y + 1)^2 = 7$

E $(x - 5)^2 + y^2 = 1$

06| UNICAMP Os ciclistas A e B partem do ponto P(−1, 1) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista A segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:

A Quais as coordenadas do ponto Q, distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?

B Se a velocidade do ciclista A for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista B para que cheguem no mesmo instante ao ponto Q?

07| UFRRJ Em um circo, no qual o picadeiro tem, no plano cartesiano, a forma de um círculo de equação igual a $x^2 + y^2 - 12x - 16y - 300 \leq 0$, o palhaço acidentou-se com o fogo do malabarista e saiu desesperadamente do centro do picadeiro, em linha reta, em direção a um poço com água localizado no ponto (24, 32). Calcule a distância d percorrida pelo palhaço, a partir do momento em que sai do picadeiro até o momento em que chega ao poço.

08| Determine, caso existam, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência λ nos itens a seguir.

A $r: x + y - 3 = 0$

$\lambda: x^2 + y^2 = 5$

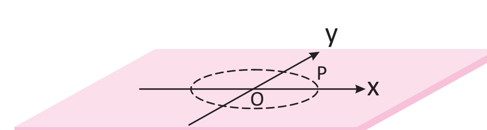
B $s: x + 2y - 5 = 0$

$\lambda: (x - 6)^2 + y^2 = 10$

C $s: 2x + y - 5 = 0$

$\lambda: x^2 + y^2 = 5$

09| UERJ Um objeto de dimensões desprezíveis, preso por um fio inextensível, gira no sentido anti-horário em torno de um ponto O. Esse objeto percorre a trajetória T, cuja equação é $x^2 + y^2 = 25$. Observe a figura:



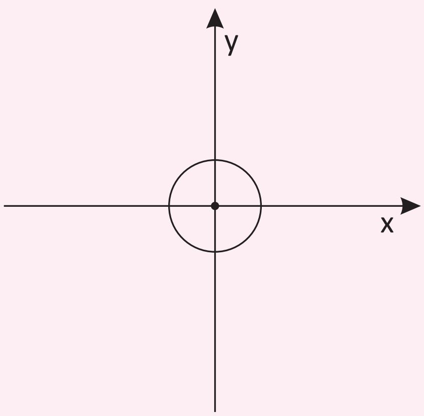
Admita que o fio arrebente no instante em que o objeto se encontra no ponto P(4, 3). A partir desse instante, o objeto segue na direção da reta tangente a T no ponto P. Determine a equação dessa reta.

10| Qual a equação da circunferência de centro $C_1(4, 4)$ que é tangente exterior à circunferência de equação $\lambda_2: x^2 + y^2 - 8x - 18y + 81 = 0$.

T ENEM E VESTIBULARES

01| PUC Resolver a questão com base na regra 2 da FIFA, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68 cm a 70 cm.

Considerando essa maior circunferência com 70 cm e usando um referencial cartesiano para representá-la, como no desenho abaixo, poderíamos apresentar sua equação como:



A $x^2 + y^2 = \frac{35}{\pi}$

B $x^2 + y^2 = \left(\frac{35}{\pi}\right)^2$

C $x^2 + y^2 = \frac{70}{\pi}$

D $x^2 + y^2 = \left(\frac{70}{\pi}\right)^2$

E $x^2 + y^2 = 70^2$

02| MACK Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. Suas folhas são grandes e têm formato circular, com uma capacidade notável de flutuação, graças aos compartimentos de ar em sua face inferior. Em um belo dia, um sapo estava sobre uma folha de vitória-régia, cuja borda obedece à equação $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$, apreciando a paisagem ao seu redor. Percebendo que a folha que flutuava à sua frente era maior e mais bonita, resolveu pular para essa folha, cuja borda é descrita pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$. A distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para não cair na água é:

A $2(\sqrt{2} - 1)$

B 2

C $2\sqrt{2}$

D $\sqrt{2} - 2$

E $\sqrt{5}$

03| UFU Inúmeras pinturas e desenhos em tela fazem uso de sobreposição de formas circulares, conforme ilustra a figura abaixo.

Disponível em: <http://www.google.com.br/>. Pinturas Circulares. Robert Delaunay. Acesso em: 1º jul. 2.012.

Para a representação gráfica desses trabalhos artísticos, faz-se necessária a determinação de elementos geométricos associados. Suponha que, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas xOy, duas circunferências, presentes no desenho, sejam dadas pelas equações $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$.

Assim sendo, a reta que passa pelos centros dessas circunferências pode ser representada pela equação:

A $2x + 3y = 9$

B $2x + 3y = -9$

C $x + 2y = 4$

D $x + 2y = -4$

04| UEPA Pilates é um sistema de exercícios físicos que integra o corpo e a mente como um todo, desenvolvendo a estabilidade corporal necessária para uma vida mais saudável. A figura abaixo mostra um dos exercícios trabalhado no Pilates e é observado que o corpo da professora gera um arco AB. Supondo que o arco gerado pelo corpo da professora seja um quarto de uma circunferência de equação $100x^2 + 100y^2 - 400x - 600y + 1075 = 0$, o valor aproximado da altura da professora é:

Fonte: http://www.apontador.com.br

A $0,24\pi$ u.c.

B $0,5\pi$ u.c.

C $0,75\pi$ u.c.

D $0,95\pi$ u.c.

E $1,24\pi$ u.c.

05| UFSM Uma luminária foi instalada no ponto C(−5, 10). Sabe-se que a circunferência iluminada por ela é tangente à reta que passa pelos pontos P(30, 5) e Q(−30, −15). O comprimento da linha central do passeio correspondente ao eixo y, que é iluminado por essa luminária, é:

A 10 m

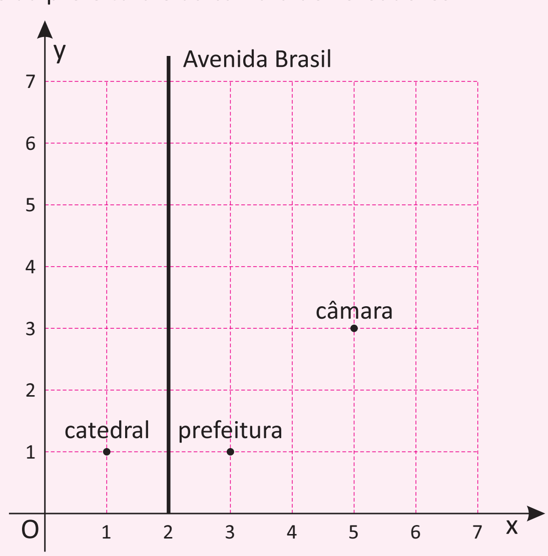
B 20 m

C 30 m

D 40 m

E 50 m

06| UNICAMP A figura a seguir apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano. Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



O ponto de interseção das avenidas Brasil e Juscelino Kubitschek pertence à região definida por:

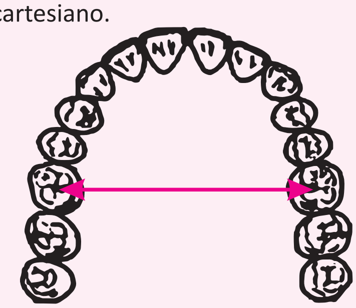
A $(x-2)^2+(y-6)^2 \leq 1$

B $(x-1)^2+(y-5)^2 \leq 2$

C $x \in]1, 3[$, $y \in]4, 6[$

D $x = 2$, $y \in [5, 7]$

07| EMESCAM Em anatomia, denomina-se arcada dentária o arco formado pelo conjunto de dentes e respectivos ossos de sustentação de cada maxilar. Considere que a parte da arcada acima da seta horizontal na figura abaixo tenha aproximadamente o formato de uma semicircunferência de raio R centrada no ponto (1, 2) de um diagrama cartesiano.



Considerando a circunferência completa, podemos afirmar que sua equação é dada por:

A $x^2+y^2+2x-4y=R^2-5$

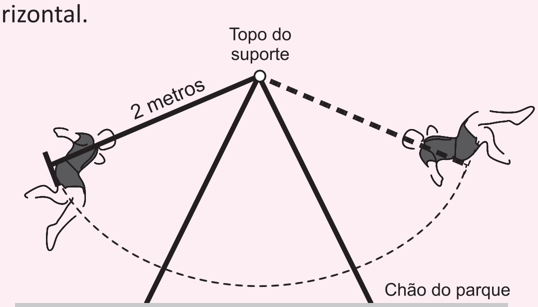
B $x^2+y^2-2x-4y=R^2-5$

C $x^2-y^2-2x-4y=R^2-5$

D $x^2+y^2-2x+4y=R^2-5$

E $x^2+y^2-2x-4y=R^2+5$

08| ENEM A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima. A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

A $f(x)=-\sqrt{2-x^2}$

B $f(x)=\sqrt{2-x^2}$

C $f(x)=x^2-2$

D $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$

E $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

09| UFSM Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a $900\ \pi km^2$ Essa antena está localizada no centro da região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto (0,10).

Assim, a equação da circunferência que delimita a região circular é

A $x^2 + y^2 - 20y - 800 = 0$

B $x^2 + y^2 - 20y + 70 = 0$

C $x^2 + y^2 - 20x - 800 = 0$

D $x^2 + y^2 - 20y - 70 = 0$

E $x^2 + y^2 = 900$

10| UEG Um espelho no formato de circunferência foi pendurado em uma parede. Considerando o canto inferior esquerdo como a origem de um sistema cartesiano, o espelho pode ser representado pela equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,84 = 0$. Dessa forma, constata-se que o espelho está a uma altura do chão de

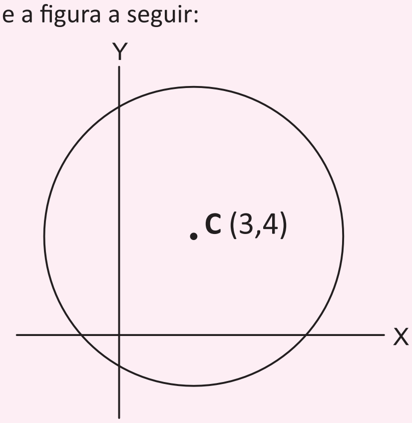
A 1,00 metros.

B 1,55 metros.

C 1,60 metros.

D 1,74 metros.

11| UEMA Um fabricante de brinquedos utiliza material reciclado: garrafas, latinhas e outros. Um dos brinquedos despertou a atenção de um estudante de Geometria, por ser confeccionado da seguinte forma: amarra-se um barbante em um bico de garrafa *pet* cortada e, na extremidade, cola-se uma bola de plástico que, ao girar em torno do bico, forma uma circunferência. O estudante representou-a no sistema por coordenadas cartesianas, conforme a figura a seguir:



Considerando o tamanho do barbante igual a 6 unidades de comprimento (u.c.) e o bico centrado no ponto a equação que representa a circunferência é igual a

A $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

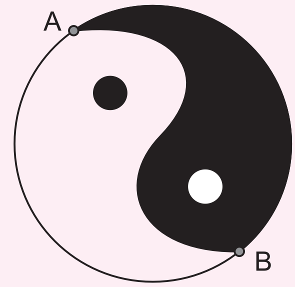
B $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 11 = 0$

C $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 11 = 0$

D $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 11 = 0$

E $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

12| UFSM O diagrama Taiji, da figura a seguir, representa, na filosofia chinesa, a integração entre Yin e Yang. Essa figura é encontrada em vários períodos da história da arte.



Sabendo que as coordenadas do diâmetro AB da circunferência externa ao diagrama Taiji são, respectivamente, A(13, 20) e B(1, 4), assinale verdadeira (V) ou falsa (F) nas afirmativas.

( ) A equação da reta que passa pelos pontos A e B é $x - 3y - 11 = 0$.

( ) O raio da circunferência é 10.

( ) A equação da circunferência é $x^2 - 14x + y^2 - 14y + 93 = 0$.

A sequência correta é

A F – F – F.

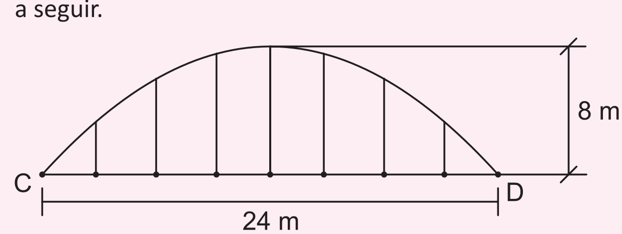
B F – F – V.

C F – V – F.

D V – F – V.

E V – V – V.

13| UFPB O Governo pretende construir armazéns com o intuito de estocar parte da produção da safra de grãos, de modo que não haja desperdícios por situações adversas. A seção transversal da cobertura de um desses armazéns tem a forma de um arco de circunferência, apoiado em colunas de sustentação que estão sobre uma viga. O comprimento dessa viga é de 24 m e o comprimento da maior coluna de sustentação é de 8 m, conforme figura a seguir.



Considerando um sistema cartesiano de eixos ortogonais xy, com origem no ponto C, de modo que o semieixo x positivo esteja na direção CD e o semieixo y positivo apontando para cima, é correto afirmar que a equação da circunferência que contém o arco CD da seção transversal do telhado, com relação ao sistema de eixos xy, é dada por:

A $(x-12)^2 + (y+5)^2 = 169$

B $(x-12)^2 + (y-7)^2 = 193$

C $(x-12)^2 + (y-6)^2 = 180$

D $(x-12)^2 + (y+6)^2 = 180$

E $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$

14| UFSM A massa utilizada para fazer pastéis folheados, depois de esticada, é recortada em círculos (discos) de igual tamanho. Sabendo que a equação matemática da circunferência que limita o círculo é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$ e adotando $\pi = 3{,}14$, o diâmetro de cada disco e a área da massa utilizada para confeccionar cada pastel são, respectivamente,

A 7 e 113,04

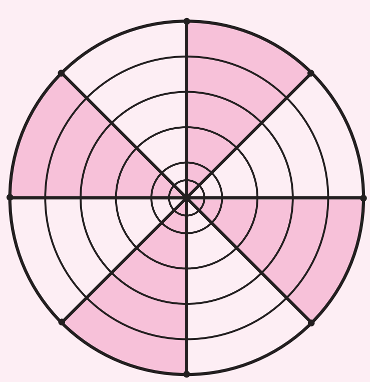
B 7 e 153,86

C 12 e 113,04

D 14 e 113,04

E 14 e 153,86

15| UFSM A construção da cobertura de um palanque usado na campanha política, para o 1º turno das eleições passadas, foi realizada conforme a figura. Para fixação da lona sobre a estrutura de anéis, foram usados rebites assim dispostos: 4 no primeiro anel, 16 no segundo, 64 no terceiro e assim sucessivamente.



Se, no plano cartesiano, a equação da circunferência externa do anel externo da figura é

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 43 = 0,$$

então o centro e o raio dessa circunferência são, respectivamente,

A (6, – 4) e 3

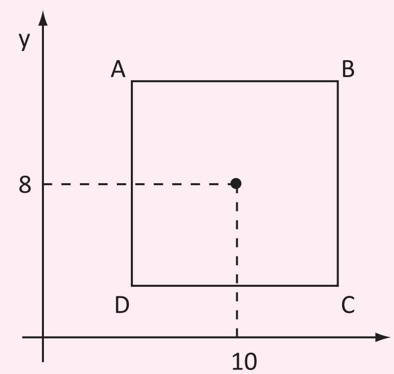
B (– 6, 4) e 9

C (6, – 4) e 9

D (– 6, 4) e 3

E (6, 4) e 3

16| UFSM A equipe de arquitetos e decoradores que fez o projeto de um shopping deseja circunscrever uma circunferência ao quadrado maior Q_1, que possui lado de 10 m. Se as coordenadas do centro da circunferência forem dadas pelo ponto (10, 8) e se forem usadas a parede da porta de entrada (x) e a lateral esquerda (y) como eixos coordenados referenciais, a equação da circunferência será



A $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0$

B $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 64 = 0$

C $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 114 = 0$

D $x^2 + y^2 - 20x - 16y - 36 = 0$

E $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 139 = 0$

17| FGV A cidade D localiza-se à mesma distância das cidades A e B, e dista 10 km da cidade C. Em um mapa rodoviário de escala 1:100 000, a localização das cidades A, B, C e D mostra que A, B e C não estão alinhadas. Nesse mapa, a cidade D está localizada na intersecção entre

A a mediatriz de AB e a circunferência de centro C e raio 10 cm.

B a mediatriz de AB e a circunferência de centro C e raio 1 cm.

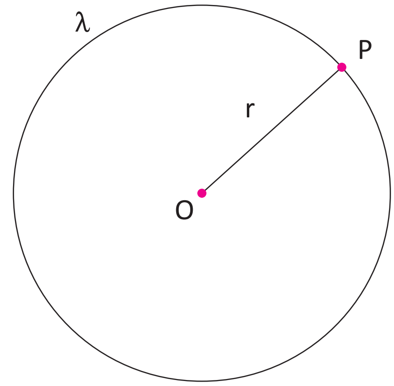
C as circunferências de raio 10 cm e centros A, B e C.

D as bissetrizes de CÂB e CB̂A e a circunferência de centro C e raio 10 cm.

E as bissetrizes de CÂB e CB̂A e a circunferência de centro C e raio 1 cm.

CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência é um conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância não nula. O ponto dado é seu centro e a distância o seu raio.

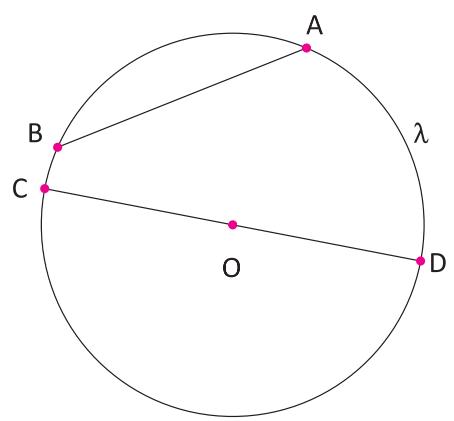


Circunferência λ de centro O e raio r $(P \in \lambda)$

CORDA E DIÂMETRO

Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

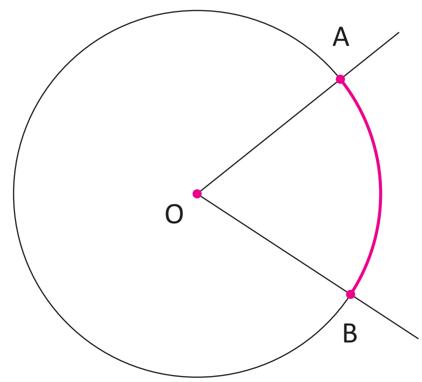
Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo seu centro.



$\overline{AB}$ é uma corda e $\overline{CD}$ é um diâmetro da circunferência λ.

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A e B e de todos os pontos da circunferência que estão no interior do ângulo AÔB.



COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

A razão entre o perímetro de uma circunferência (comprimento C) e seu diâmetro é um número constante representado por π.

$$\frac{C}{2.R} = \pi \Rightarrow C = 2.\pi.R$$

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

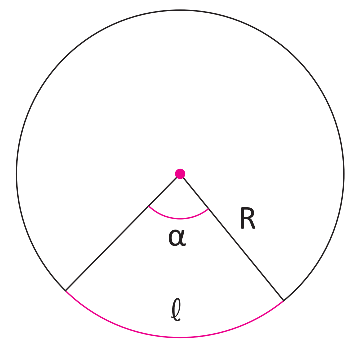
O comprimento de um arco de circunferência (ℓ) é proporcional à sua medida α.

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{lcl} 360° & \text{———} & 2\pi R \\ \alpha° & \text{———} & \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = \frac{\pi R \alpha}{180°}$$

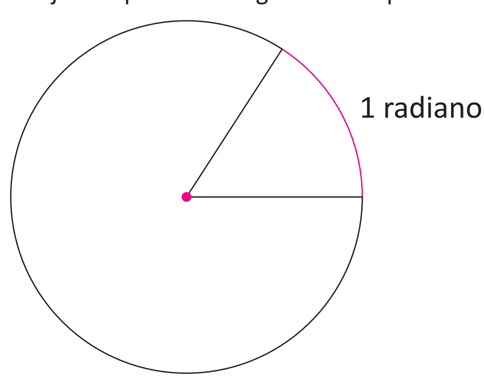
Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & \text{———} & 2\pi R \\ \alpha \text{ rad} & \text{———} & \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = R\alpha$$



RADIANO

Radiano é todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.

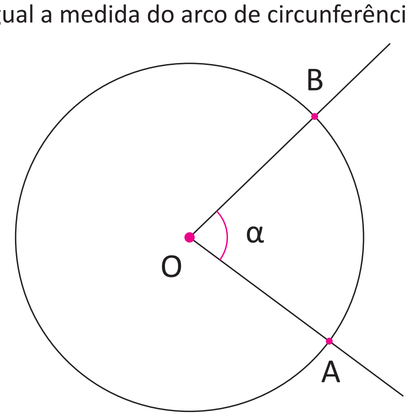


ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

ÂNGULO CENTRAL

Ângulo central relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

A medida de um ângulo central é igual a medida do arco de circunferência correspondente.

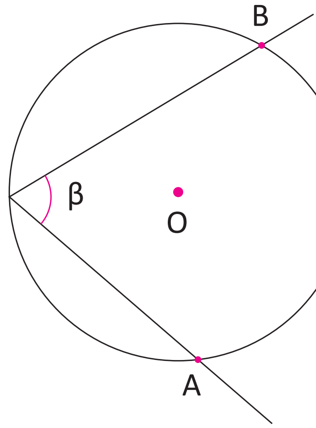


$$\alpha = \overparen{AB}$$

ÂNGULO INSCRITO

Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados secantes a ela, ou seja, interceptando a circunferência em dois pontos distintos.

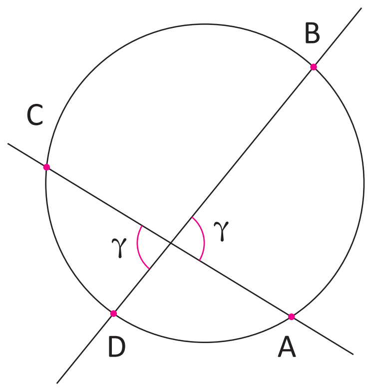
A medida de um ângulo inscrito é igual a metade da medida do arco correspondente.



$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

ÂNGULO EXCÊNTRICO INTERIOR

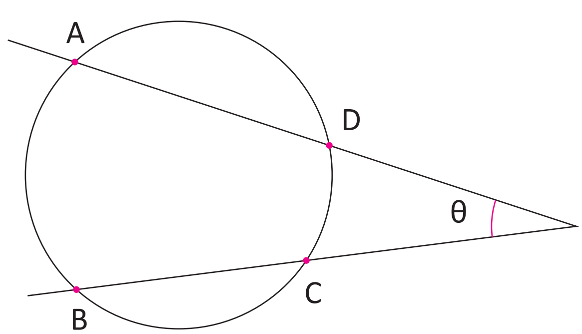
Ângulo excêntrico interior a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice sendo um ponto interno à circunferência.



$$\gamma = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

ÂNGULO EXCÊNTRICO EXTERIOR

Ângulo excêntrico exterior a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice sendo um ponto externo à circunferência.

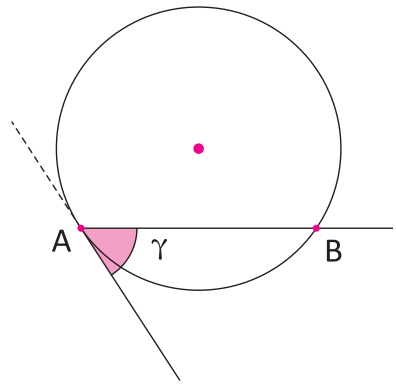


$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

ÂNGULO DE SEGMENTO

Ângulo de segmento relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.

A medida de um ângulo de segmento é igual a medida do arco correspondente.

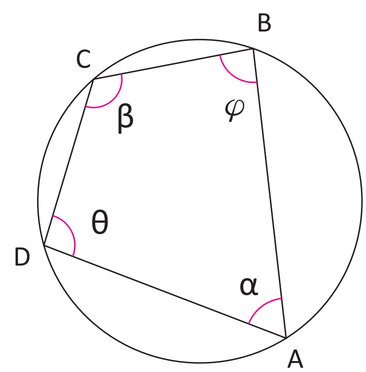


$$\gamma = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Quadrilátero inscritível é todo quadrilátero que tem os vértices pertencentes a uma circunferência.

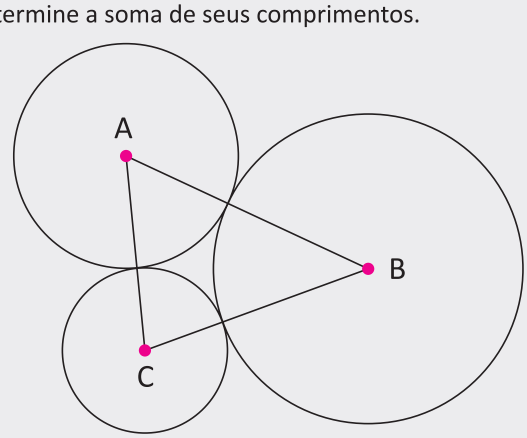
Todo quadrilátero inscritível admitirá ângulos opostos suplementares.



ABCD é inscritível $\Leftrightarrow \alpha + \beta = \varphi + \theta = 180^\circ$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| As circunferências destacadas abaixo são tangentes externas duas a duas e seus centros são os vértices do triângulo ABC. Se AB = 11 cm, AC = 9 cm e BC = 10 cm, determine a soma de seus comprimentos.



Resolução:

Sendo os raios das circunferências de centros A, B, e C, dados por: x, y e z, temos:

$x + y = 11\,(I)$

$y + z = 10\,(II)$

$x + z = 9\,(III)$

Adicionando as três equações, concluímos que:

$2x + 2y + 2z = 20$

$\Rightarrow x + y + z = 15\,(IV)$

Substituindo (I) *em* (IV):

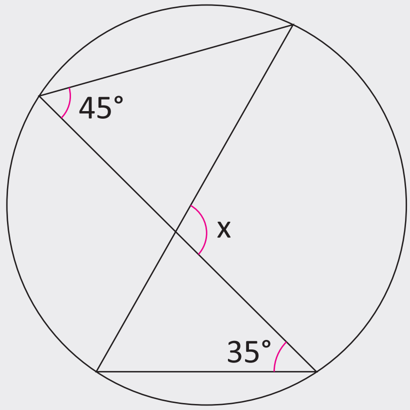
$11 + z = 15 \Rightarrow z = 4$, *logo:*

$y = 6$ *e* $x = 5$

Portanto, a soma de seus comprimentos é:

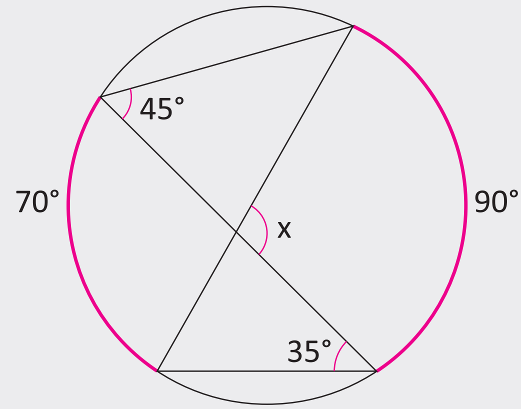
$2.\pi.4 + 2.\pi.5 + 2.\pi.6 = 30\pi$ *cm*

02| Determine a medida do ângulo x, na figura a seguir:



Resolução:

Os ângulos de 45° e 35° são ângulos inscritos na circunferência, logo, seus arcos medem 90° e 70°, veja:



Portanto: $x = \dfrac{90^\circ + 70^\circ}{2} = 80^\circ$

(ângulos excêntrico interior)

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

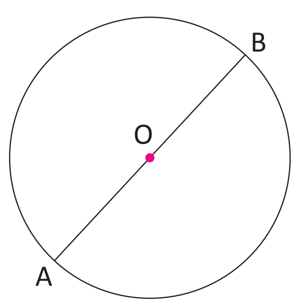
01| Se uma circunferência tem centro O e raio 4 cm, escreva se são internos, pertencentes ou externos à circunferência cada um dos pontos dados a seguir.

A Um ponto X que dista 3,5 cm de O.

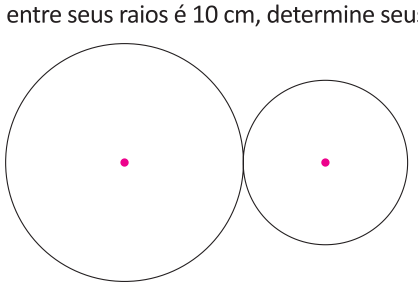
B Um ponto Y que dista 4,0 cm de O.

C Um ponto Z que dista 4,5 cm de O.

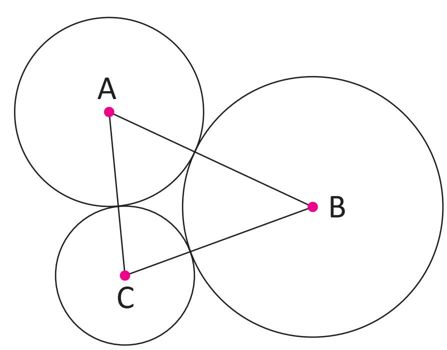
02| Considerando a circunferência de centro O e sabendo que $AB = 4x - 5$ e $AO = x + 2$, determine o valor de x.



03| Duas circunferências são tangentes externas se têm um único ponto comum e os demais pontos de uma são externos a outra. Sabendo que as circunferências abaixo são tangentes externas, a distância entre seus centros é 32 cm e a diferença entre seus raios é 10 cm, determine seus raios.



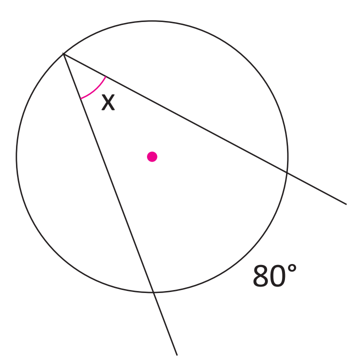
04| As circunferências destacadas abaixo são tangentes externas duas a duas e seus centros são os vértices do triângulo ABC. Se AB = 9 cm, AC = 7 cm e BC = 8 cm, determine seus raios.



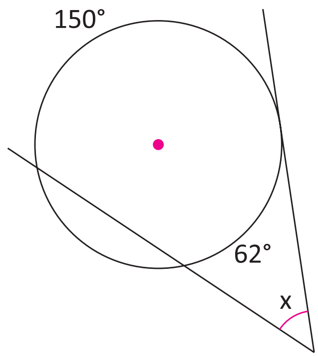
05| Qual é o comprimento de uma circunferência que tem raio igual a 6 cm? Use $\pi = 3,14$.

06| Determine o valor do ângulo x:

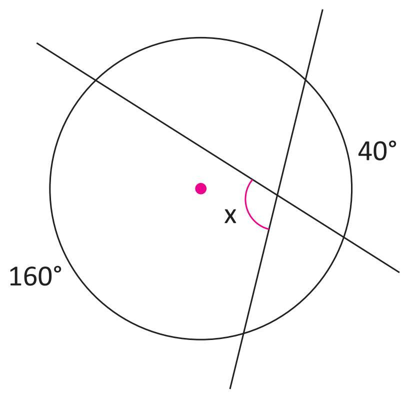
A



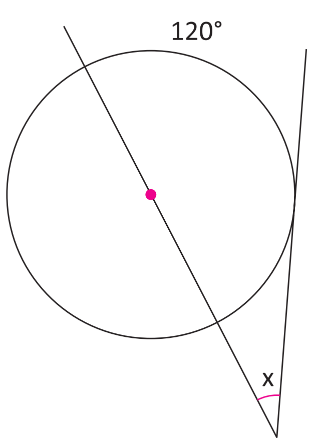
B



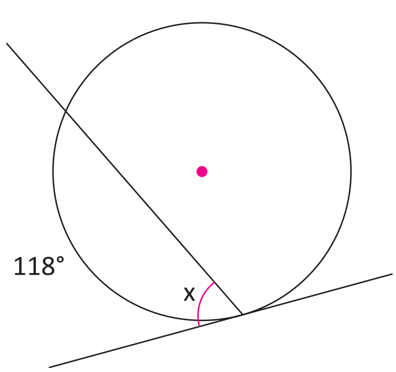
C



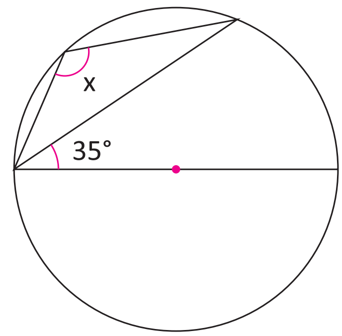
E



D

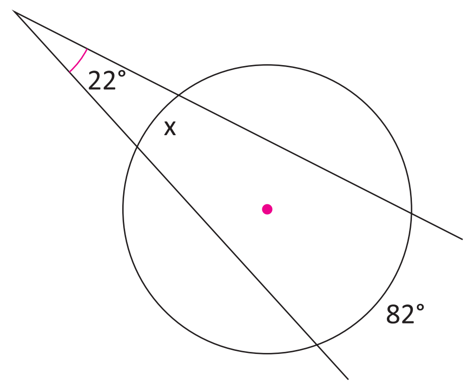


F

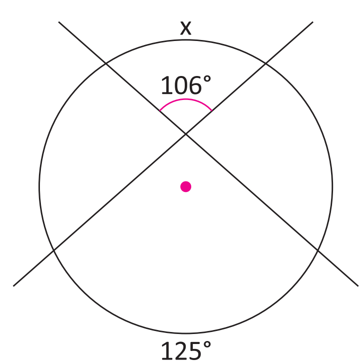


07| Determine o valor do arco x.

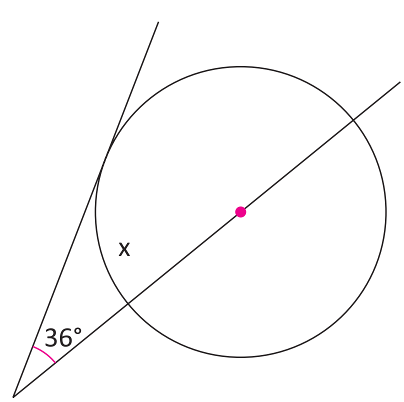
A



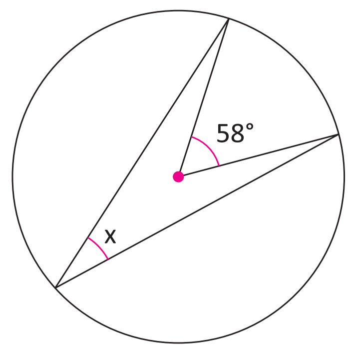
B



C

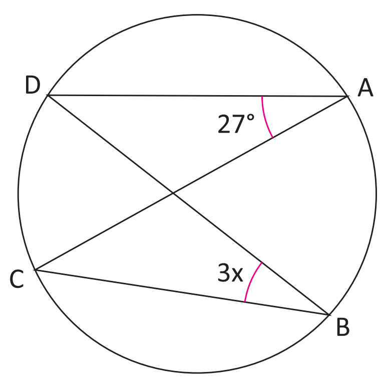


D

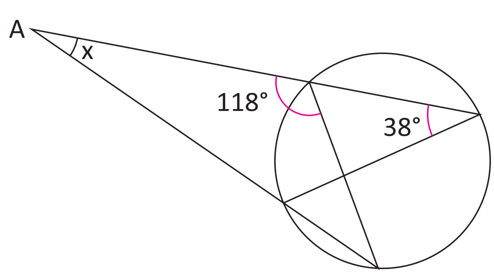


08| Determine o valor de x.

A

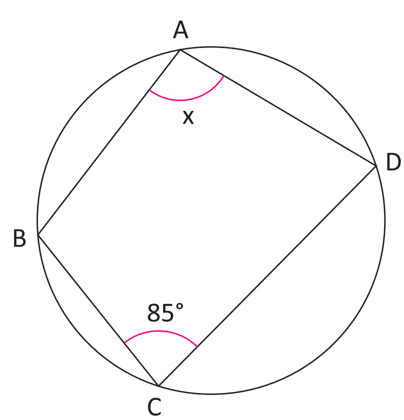


B

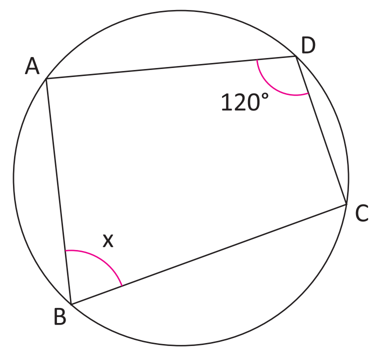


09| Nas figuras seguintes ABCD são quadriláteros inscritíveis, determine o valor de x.

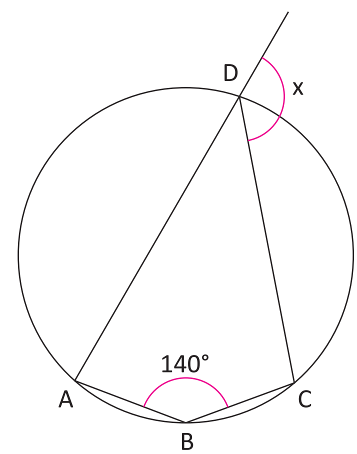
A



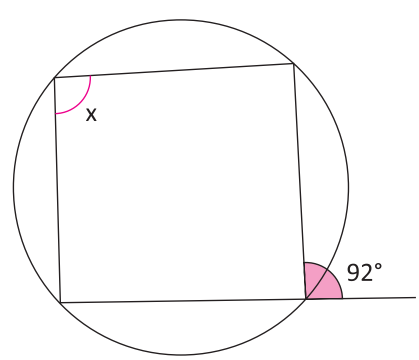
B



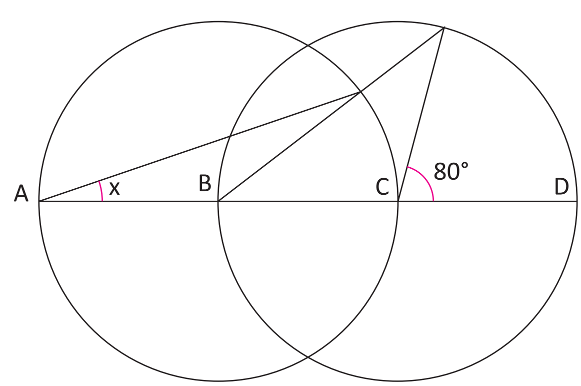
C



D



10| Calcule o valor de x na figura a seguir, sabendo que B e C são os centros das circunferências.



T ENEM E VESTIBULARES

01| IFAL A estrada que liga duas cidades tem 4.396 m de extensão. Quantas voltas completas dará uma das rodas da bicicleta que vai percorrer essa estrada se o raio da roda é 0,35 cm?

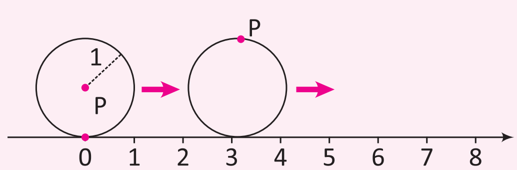
Considere $\pi = 3{,}14$

- **A** 50.000 voltas
- **B** 200.000 voltas
- **C** 100.000 voltas
- **D** 150.000 voltas
- **E** 20.000 voltas

02| IFMG Uma partícula descreve um arco de 1080° sobre uma circunferência de 15 cm de raio. A distância percorrida por essa partícula, em cm, é igual a:

- **A** 90π
- **B** 120π
- **C** 140π
- **D** 160π

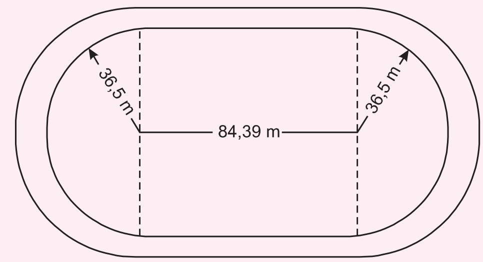
03| UFRGS Um disco de raio 1 gira ao longo de uma reta coordenada na direção positiva, como representado na figura abaixo.



Considerando-se que o ponto P está inicialmente na origem, a coordenada de P, após 10 voltas completas, estará entre:

- **A** 60 e 62
- **B** 62 e 64
- **C** 64 e 66
- **D** 66 e 68
- **E** 68 e 70

04| ENEM O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. *Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus*. 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

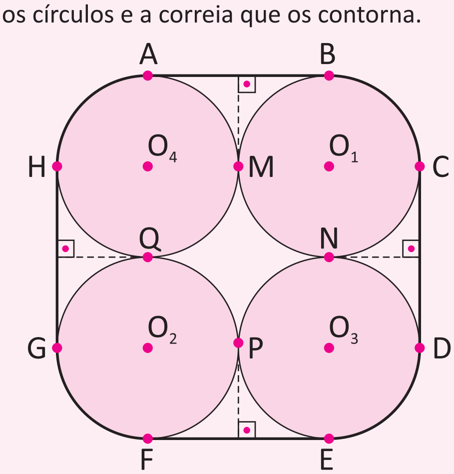
- **A** 1
- **B** 4
- **C** 5
- **D** 7
- **E** 8

05| UFTM O maior relógio de torre de toda a Europa é o da Igreja St. Peter, na cidade de Zurique, Suíça, que foi construído durante uma reforma do local, em 1970.

O mostrador desse relógio tem formato circular, e o seu ponteiro dos minutos mede 4,35 m. Considerando $\pi = 3{,}1$, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre durante 20 minutos é, aproximadamente:

- **A** 10 m
- **B** 9 m
- **C** 8 m
- **D** 7 m
- **E** 6 m

06| AFA Na figura abaixo, têm-se quatro círculos congruentes de centros O_1, O_2, O_3 e O_4 e de raio igual a 10 cm. Os pontos M, N, P, Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G, H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.



Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a:

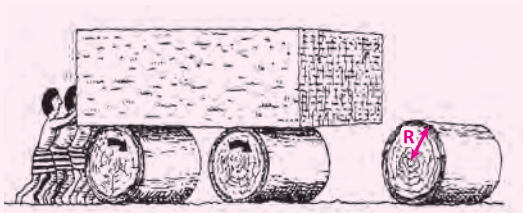
A $2(\pi + 40)$

B $5(\pi + 16)$

C $20(\pi + 4)$

D $5(\pi + 8)$

07| ENEM A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é:

A $y = R$

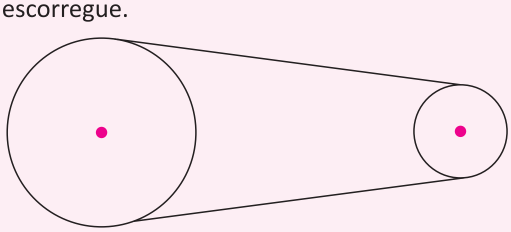
B $y = 2R$

C $y = \pi R$

D $y = 2\pi R$

E $y = 4\pi R$

08| UNIFESP A figura mostra duas roldanas circulares ligadas por uma correia. A roldana maior, com raio 12 cm, gira fazendo 100 rotações por minuto, e a função da correia é fazer a roldana menor girar. Admita que a correia não escorregue.



Para que a roldana menor faça 150 rotações por minuto, o seu raio, em centímetros, deve ser:

A 8

B 7

C 6

D 5

E 4

09| IFSP Uma mangueira de jardim enrolada forma uma pilha circular medindo cerca de 100 cm de um lado a outro. Se há seis voltas completas, o comprimento da mangueira é de, aproximadamente:

A 9 m

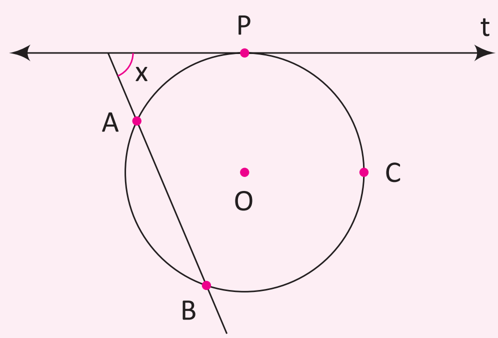
B 15 m

C 19 m

D 35 m

E 39 m

10| IFSP Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 100° e a do arco $\overset{\frown}{BCP}$ é 194°. O valor de x, em graus, é:



A 53

B 57

C 61

D 64

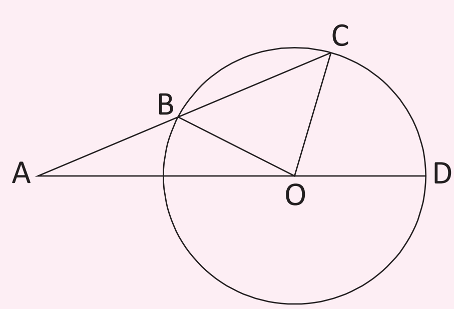
E 66

11| FUVEST Na figura, B, C e D são pontos distintos da circunferência de centro O, e o ponto A é exterior a ela. Além disso,

(1) A, B, C, e A, O, D, são colineares;

(2) AB = OB;

(3) $C\hat{O}D$ mede α radianos.



Nessas condições, a medida de $A\hat{B}O$, em radianos, é igual a:

A) $\pi - \left(\frac{\alpha}{4}\right)$

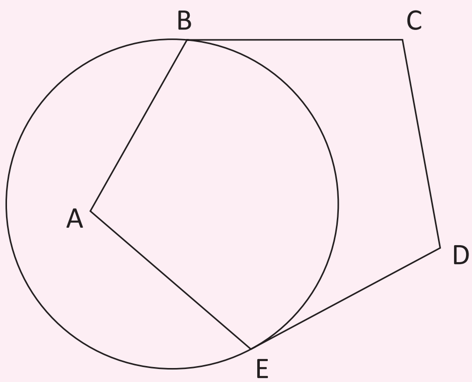
B) $\pi - \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

C) $\pi - \left(\frac{2\alpha}{3}\right)$

D) $\pi - \left(\frac{3\alpha}{4}\right)$

E) $\pi - \left(\frac{3\alpha}{2}\right)$

12| FGV Dado um pentágono regular ABCDE, constrói-se uma circunferência pelos vértices B e E de tal forma que BC e ED sejam tangentes a essa circunferência, em B e E, respectivamente.



A medida do menor arco BE na circunferência construída é:

A) 72°

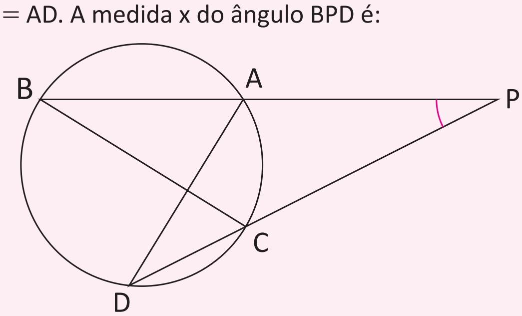
B) 108°

C) 120°

D) 135°

E) 144°

13| IFMG Na figura, os segmentos PB e PD são secantes à circunferência, as cordas AD e BC são perpendiculares e AP = AD. A medida x do ângulo BPD é:



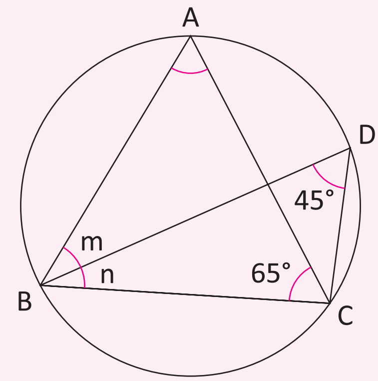
A) 30°

B) 40°

C) 50°

D) 60°

14| IFMG Na figura, os triângulos ABC e BCD estão inscritos na circunferência. A soma das medidas m + n, em graus, é:



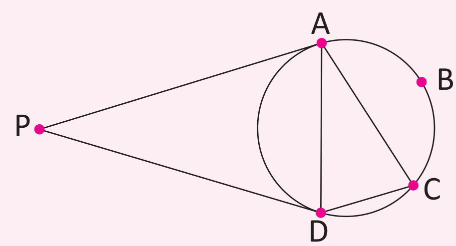
A) 70

B) 90

C) 110

D) 130

15| UFES Na figura, os segmentos de reta AP e DP são tangentes à circunferência, o arco ABC mede 110 graus e o ângulo CAD mede 45 graus. A medida, em graus, do ângulo APD é:



A) 15

B) 20

C) 25

D) 30

E) 35

16| ENEM As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

A) 16 horas

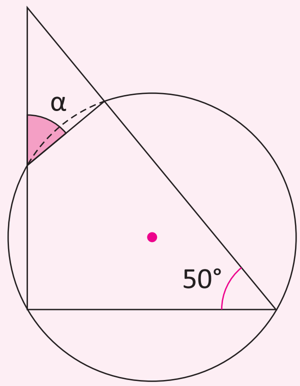
B) 20 horas

C) 25 horas

D) 32 horas

E) 36 horas

17| MACK



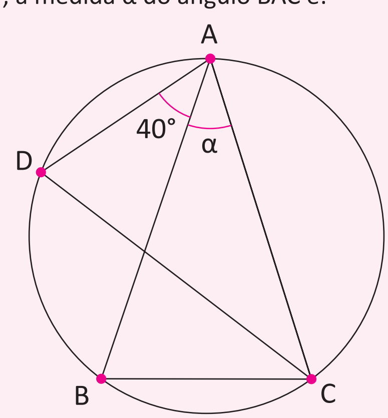
O ângulo α da figura mede:

- **A** 60°
- **B** 55°
- **C** 50°
- **D** 45°
- **E** 40°

18| FUVEST Um arco de circunferência mede 300°, e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio em metros?

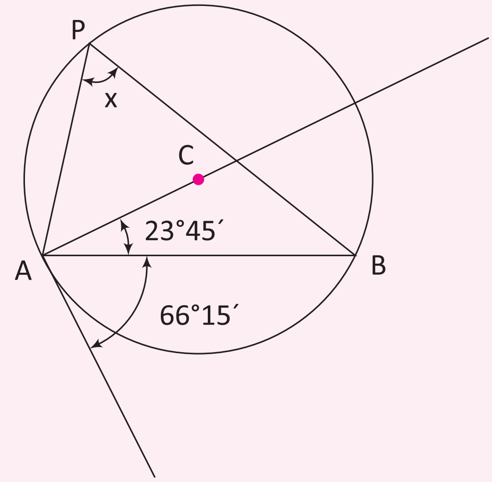
- **A** 157
- **B** 284
- **C** 382
- **D** 628
- **E** 764

19| UFES Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é:



- **A** 10°
- **B** 15°
- **C** 20°
- **D** 25°
- **E** 30°

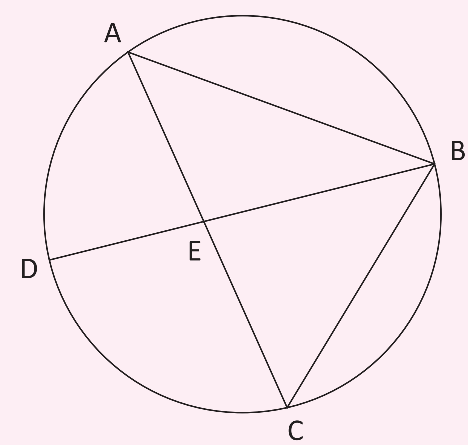
20| FATEC Na figura a seguir, o triângulo APB está inscrito na circunferência de centro C.



Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, então x é igual a:

- **A** 23°45'
- **B** 30°
- **C** 60°
- **D** 62°30'
- **E** 66°15'

21| UFMG Observe a figura.



Nessa figura, BD é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20° e 85°. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede :

- **A** 25°
- **B** 35°
- **C** 30°
- **D** 40°

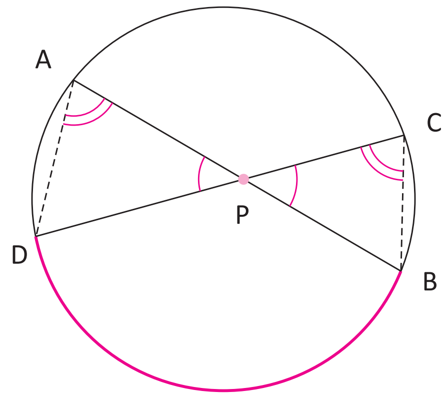
POTÊNCIA DE PONTO

INTRODUÇÃO

Considere as seguintes relações:

1ª RELAÇÃO:

Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra. Veja:

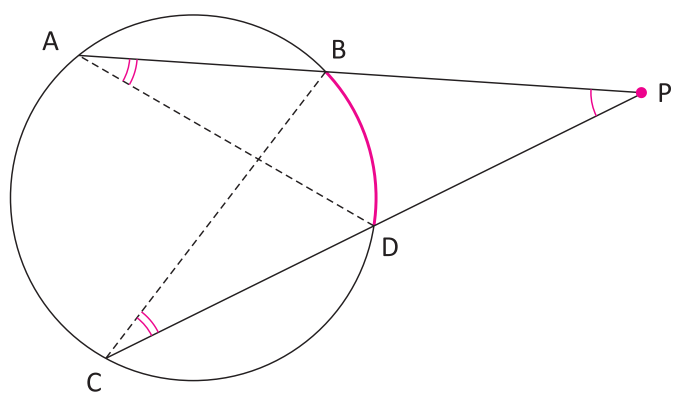


De fato: os triângulos PAD e PCB são semelhantes (A.A.), logo:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Leftrightarrow (\overline{PA}).(\overline{PB}) = (\overline{PC}).(\overline{PD})$$

2ª RELAÇÃO:

Se por um ponto P exterior a uma circunferência e traçarmos dois segmentos tangentes ($\overline{PA}$ e $\overline{PC}$), então o produto da medida do primeiro $\overline{PA}$ pela sua parte externa $\overline{PB}$ é igual ao produto da medida do segundo $\overline{PC}$ pela sua parte externa $\overline{PD}$. Veja:



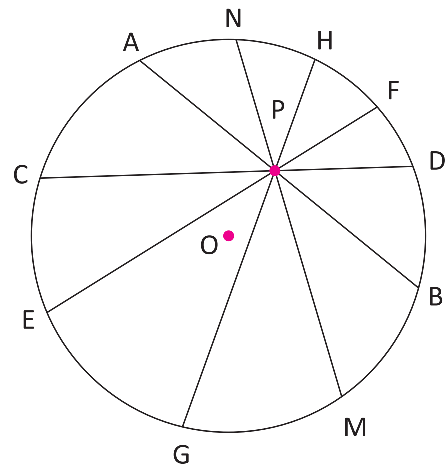
De fato: os triângulos PAD e PCB são semelhantes (A.A.), logo:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Leftrightarrow (\overline{PA}).(\overline{PB}) = (\overline{PC}).(\overline{PD})$$

POTÊNCIA DE PONTO

1º CASO:

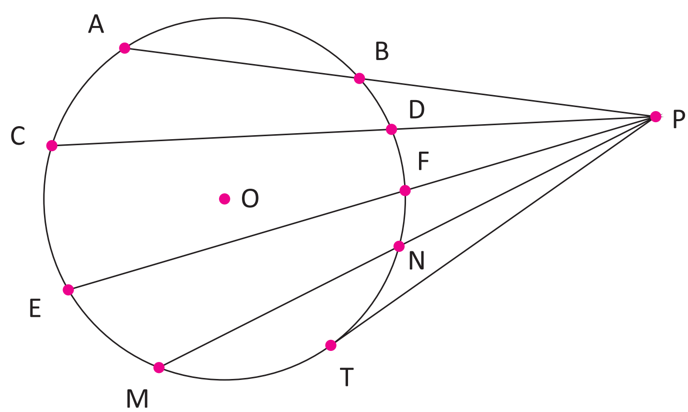
Sendo P um ponto interior a uma circunferência λ, chamamos de Potência de P em relação à circunferência λ o produto das medidas das duas partes de uma corda de λ que passe por P.



$(\overline{PA}).(\overline{PB}) = (\overline{PC}).(\overline{PD}) = (\overline{PE}).(\overline{PF}) = ... =$ Potência de P em relação a circunferência λ

2º CASO:

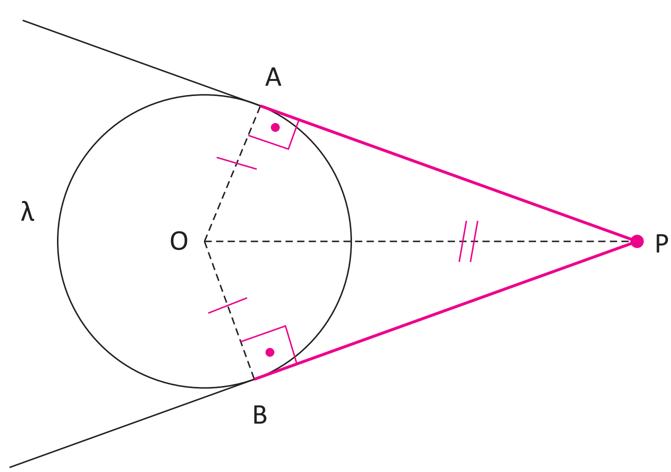
Sendo P um ponto exterior a uma circunferência λ, chamamos de Potência de P em relação à circunferência λ o produto das medidas do segmento secante com extremidade em P pela sua parte externa.



$(\overline{PA}).(\overline{PB}) = (\overline{PC}).(\overline{PD}) = (\overline{PE}).(\overline{PF}) = ... = (\overline{PT})^2 =$ Potência de P em relação a circunferência λ

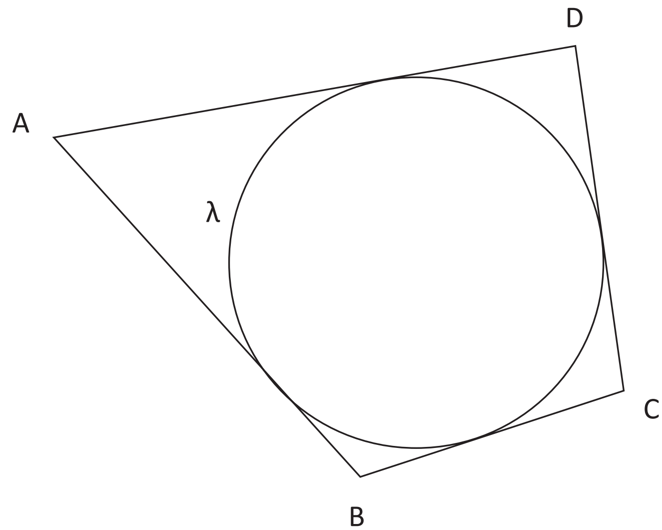
SEGMENTOS TANGENTES

Se de um ponto P exterior a uma circunferência λ traçarmos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a λ, com A e B em λ, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.



QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência λ se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.



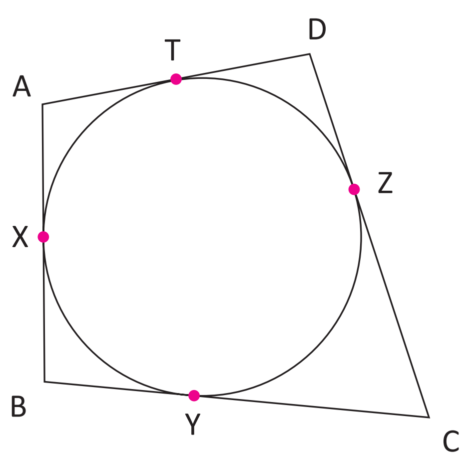
PROPRIEDADES

PROPRIEDADE 1

Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, então a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois.

PROPRIEDADE 2

Se num quadrilátero convexo a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois, então o quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência.



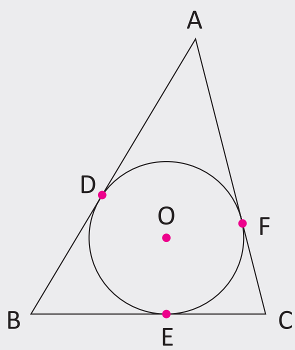
Em consequência da propriedade dos segmentos tangentes:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AX}\equiv\overline{AX}\\ \overline{BX}\equiv\overline{BY}\\ \overline{CZ}\equiv\overline{CY}\\ \overline{DZ}\equiv\overline{DT}\end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\overline{AX}+\overline{BX}}_{\overline{AB}} + \underbrace{\overline{CZ}+\overline{DZ}}_{\overline{CD}} = \underbrace{\overline{AT}+\underbrace{\overline{BY}+\overline{CY}}+\overline{DT}}_{\overline{AD}\ +\ \overline{BC}}$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| A circunferência de centro O na figura abaixo está inscrita no triângulo ABC. Sabendo que BD = 4, AF = 6 e EC = 3, determine o perímetro do triângulo ABC.



Resolução:

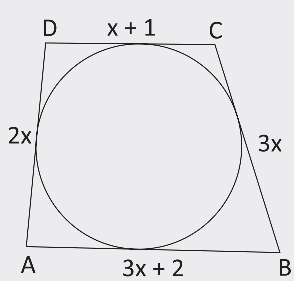
Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$

São dois a dois tangentes a circunferência, logo:

$\overline{BD} \equiv \overline{BE} = 4,\ \overline{AF} \equiv \overline{AD} = 6$ e $\overline{CE} \equiv \overline{CF} = 3$

Portanto: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 26\ cm$

02| Determine o perímetro do quadrilátero ABCD circunscritível, destacado abaixo.



Resolução:

Como o quadrilátero ABCD é circuscritível, podemos afirmar que a soma de seus lados opostos é igual, ou seja:

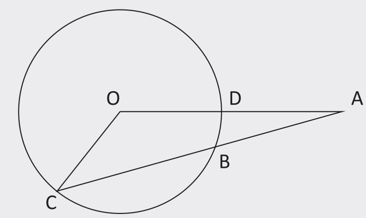
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BD}$

$\Rightarrow 3x + 2 + x + 1 = 2x + 3x \Rightarrow x = 3$

Logo: $\overline{AB} = 11, \overline{BC} = 9, \overline{CD} = 4$ e $\overline{DA} = 6$

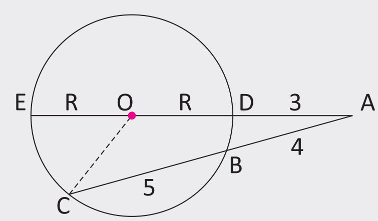
Portanto: $2p_{(ABCD)} = 11 + 9 + 4 + 6 = 30$

03| Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto O é o centro da circunferência. Determine o perímetro do triângulo AOC mede, em cm.



Resolução:

Prolongando o segmento $\overline{AO}$, temos:



$\overline{AC}$ *e* $\overline{AE}$ *são segmentos secantes, logo:*

$(3 + 2R).3 = (4 + 5).4$

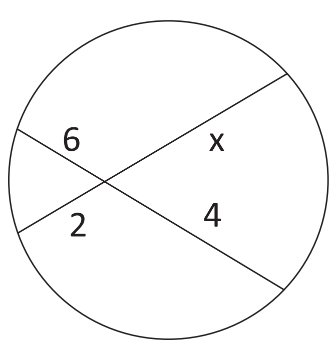
$\Rightarrow 9 + 6R = 36 \Rightarrow 6R = 27 \Rightarrow R = \frac{9}{2} cm$

$2p(\Delta AOC) = 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 9 = 21\ cm$

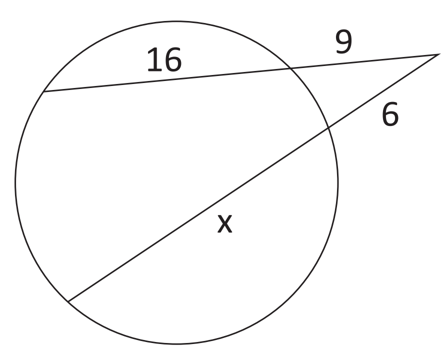
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Determine o valor de x:

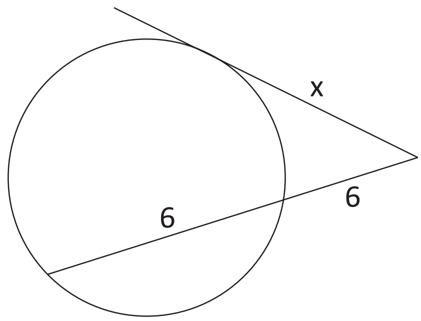
A



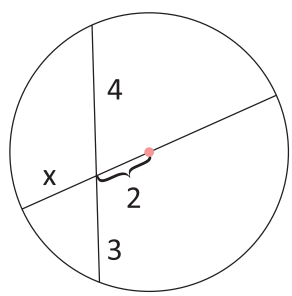
B



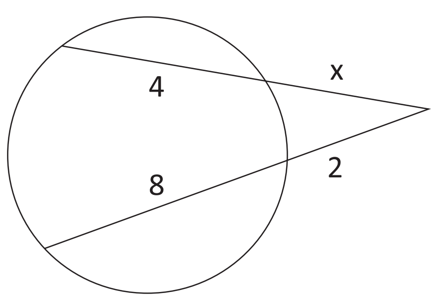
C



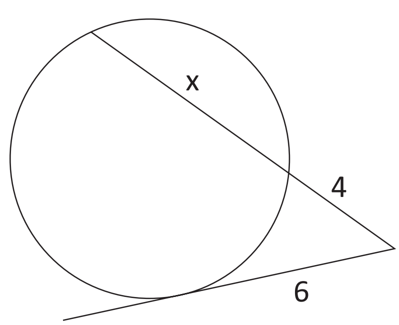
D



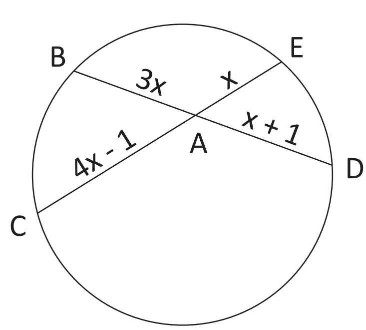
E



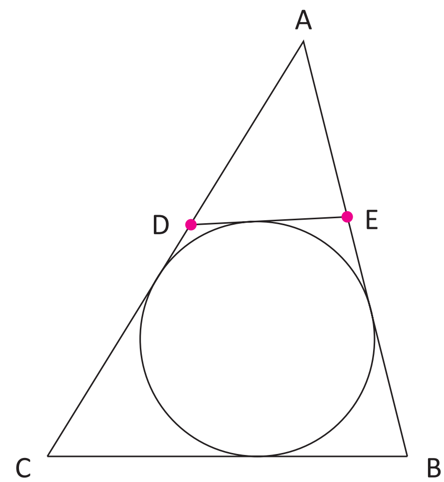
F



02| Calcule as medidas das cordas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.



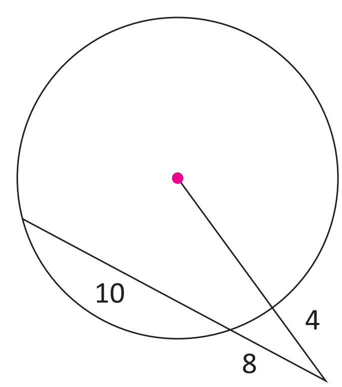
03| Sabendo que o perímetro do triângulo ABC vale 20 m, a base $\overline{BC}$ mede 8 m e que a circunferência está inscrita no quadrilátero BCDE, determine o perímetro do triângulo ADE.



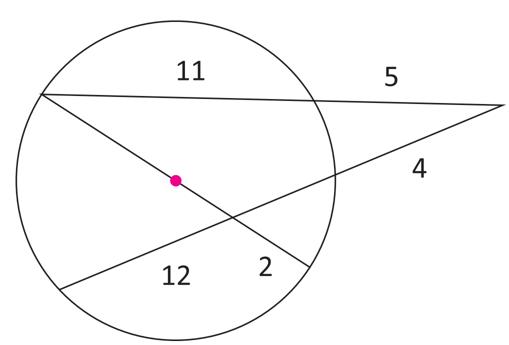
04| A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 dm e o raio da circunferência inscrita mede 2 dm. Determine o perímetro do triângulo.

05| Determine o raio dos círculos nos casos seguintes:

A

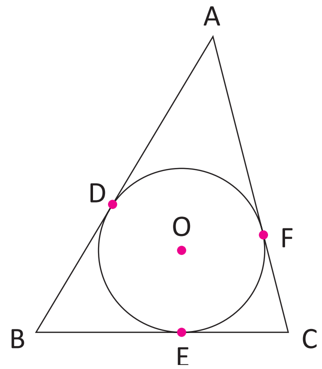


B

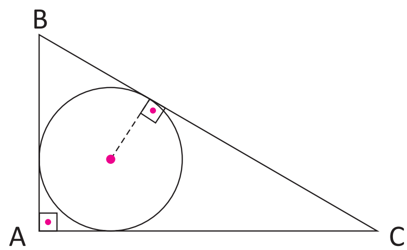


06| Determine a medida do diâmetro de uma circunferência inscrita num triângulo retângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm.

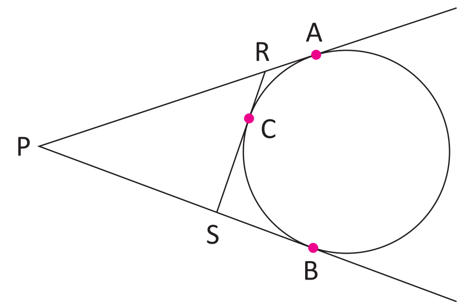
07| A circunferência de centro O na figura abaixo está inscrita no triângulo ABC. Sabendo que BD = 5, AF = 4 e EC = 7, determine o perímetro do triângulo ABC.



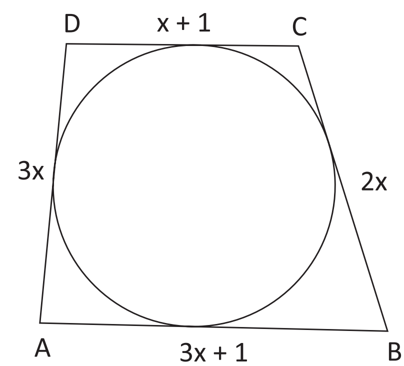
08| Calcule o raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC, sabendo que: AB = 8 cm, AC = 15 cm e BC = 17 cm.



09| Sabendo que PA = 18 cm, determine o perímetro do triângulo PRS.

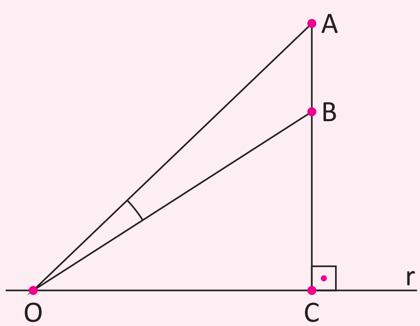


10| Determine o perímetro do quadrilátero ABCD circunscritível, destacado abaixo.



T ENEM E VESTIBULARES

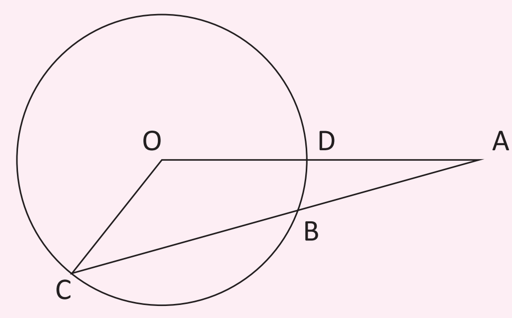
01| UNIFESP Na figura, o segmento AC é perpendicular à reta r. Sabe-se que o ângulo AÔB, com O sendo um ponto da reta r, será máximo quando O for o ponto onde r tangencia uma circunferência que passa por A e B.



Se AB representa uma estátua de 3,6 m sobre um pedestal BC de 6,4 m, a distância OC, para que o ângulo AÔB de visão da estátua seja máximo, é:

- **A** 10 m
- **B** 8,2 m
- **C** 8 m
- **D** 7,8 m
- **E** 4,6 m

02| CESGRANRIO Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



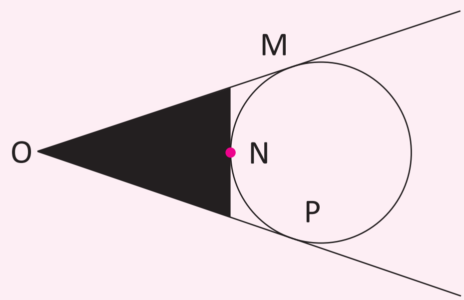
- **A** 36
- **B** 45
- **C** 48
- **D** 50
- **E** 54

03| ITA Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos EA e ED interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda AF da circunferência intercepta o segmento ED no ponto G.

Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

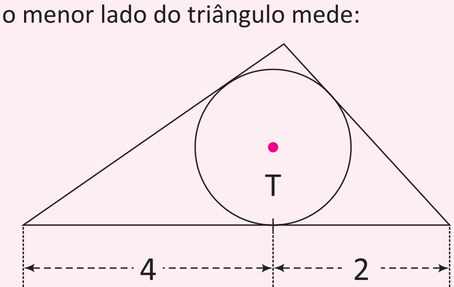
04| MACK Na figura a seguir, M, N e P são pontos de tangência e a medida de OM é 16. Então o perímetro do triângulo assinalado é:



A) 32
B) 34
C) 36
D) 38
E) 40

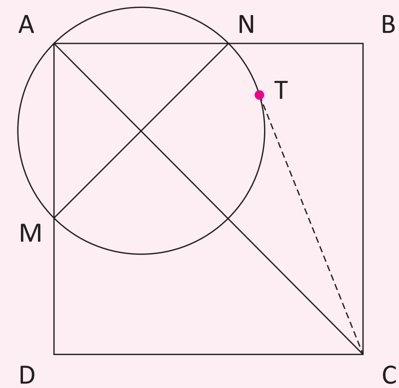
05| MACK No triângulo da figura a seguir, a circunferência inscrita tem raio 1 e T é o ponto de tangência.

Então o menor lado do triângulo mede:



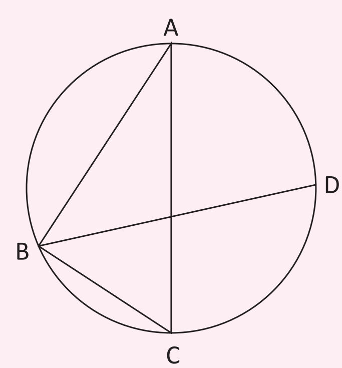
A) 3
B) $\frac{20}{7}$
C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{9}{2}$
E) $\frac{30}{7}$

06| MACK Na figura a seguir, M e N são pontos médios dos lados do quadrado ABCD e T é o ponto de tangência. Se CT mede k, então a área do quadrado vale:



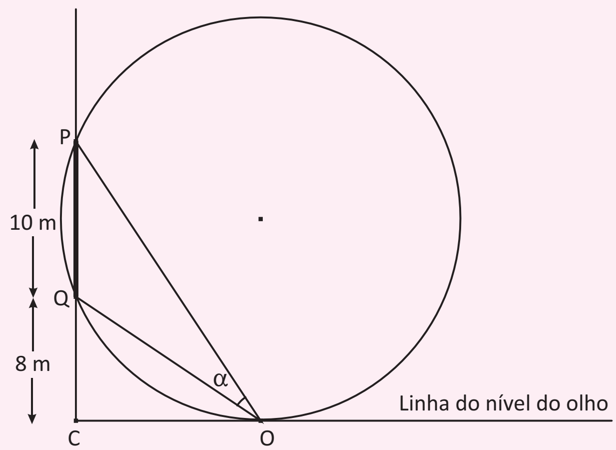
A) $2k^2$
B) $\frac{3k^2}{4}$
C) k^2
D) $\frac{k^2}{4}$
E) $\frac{4k^2}{5}$

07| CFTMG Na figura, AB = 4, BC = 2, AC é diâmetro e os ângulos ABD e CBD são iguais. A medida da corda BD é



A) $2\sqrt{3}+1$
B) $\frac{(9\sqrt{5})}{5}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $2+\sqrt{5}$

08| UFSC Em um centro de eventos na cidade de Madri, encontra-se um mural de Joan Miró (1893-1983) confeccionado pelo ceramista Artigas. O mural está colocado no alto da parede frontal externa do prédio e tem 60m de comprimento por 10m de altura. A borda inferior do mural está 8m acima do nível do olho de uma pessoa. A que distância da parede deve ficar essa pessoa para ter a melhor visão do mural, no sentido de que o ângulo vertical que subtende o mural, a partir de seu olho, seja o maior possível? O matemático Regiomontanus (1436-1476) propôs um problema semelhante em 1471 e o problema foi resolvido da seguinte maneira:



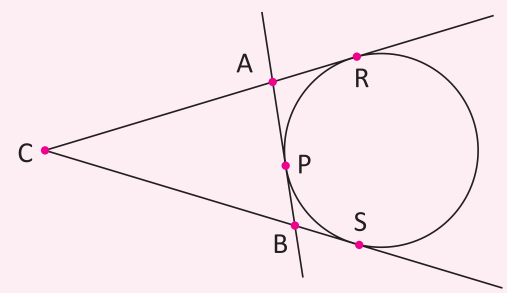
Imagine uma circunferência passando pelo olho O do observador e por dois pontos P e Q, verticalmente dispostos nas bordas superior e inferior do mural. O ângulo α será máximo quando esta circunferência for tangente à linha do nível do olho, que é perpendicular à parede onde se encontra o mural, como mostra a figura. Com estas informações, qual é a que distância que OC da parede deve ficar para que o observador tenha a melhor visão do mural de Joan?

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18

09| FUVEST As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, qual é a medida do comprimento P_1P_2?

A) 6
B) 10
C) 11
D) 12
E) 15

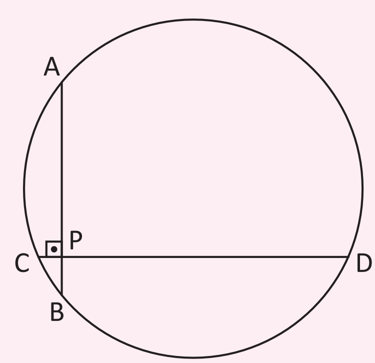
10| UNB A partir de um ponto C, exterior a uma circunferência traçam-se duas retas tangentes, como mostra a figura adiante. Os segmentos tangentes CR e CS, que são necessariamente congruentes, medem, cada um, 23,5 cm. Em um dos arcos de extremos R e S, escolhe-se, ao acaso, um ponto P, traçando-se o segmento AB, tangente a circunferência em P.



Qual é, em centímetros, o perímetro do triângulo ABC, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista?

A) 40
B) 42
C) 45
D) 47
E) 52

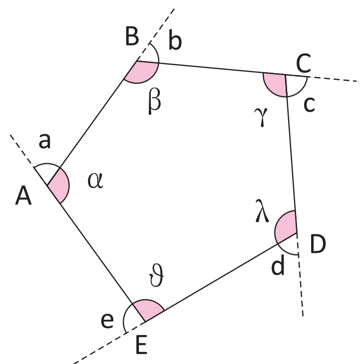
11| FGV As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares no ponto P, sendo que $AP = 6$, $PB = 4$ e $CP = 2$ O raio desse círculo mede



A) 5
B) 6
C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $5\sqrt{2}$

POLÍGONOS

É uma região plana formada por três ou mais segmentos de reta que se intersectam dois a dois. Os segmentos de reta são denominados lados do polígono e os pontos de intersecção são denominados vértices do polígono, veja:



ABCDE é um polígono

A, B, C, D e E são vértices

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são seus lados

$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varphi$ são seus ângulos internos

a, b, c, d, e são seus ângulos externos

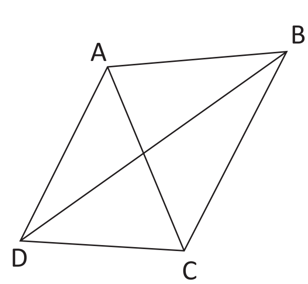
Existem polígonos convexos e côncavos, que são definidos pela medida de seus ângulos internos, ou seja, polígonos com ângulos internos convexos (maiores que zero e menores que 180°), são polígonos convexos e polígonos côncavos possuem ângulos internos côncavos (maiores que 180° e menores que 360°).

NOMENCLATURA

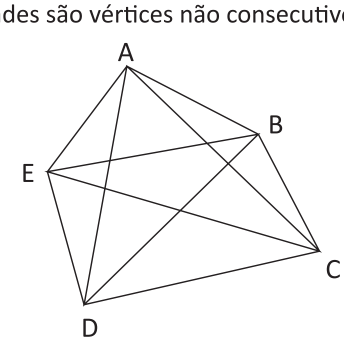
Número de lados	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Diagonal de um polígono é um segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono, veja:



(Quadrilátero) Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$



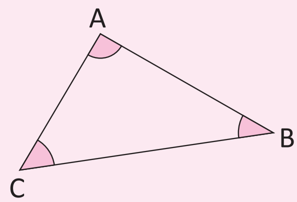
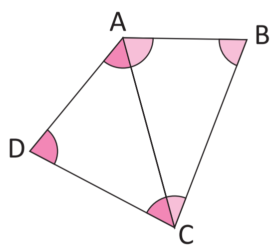
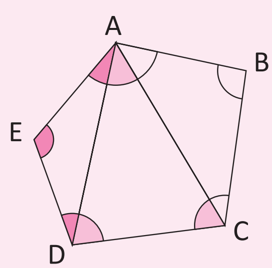
(Pentágono) Diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$

Com extremidade num dos vértices de um polígono, há n – 3 diagonais, então com extremidades nos n vértices teremos n.(n – 3) diagonais, no entanto, cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em dois vértices do polígono, portanto, o número de diagonais, d, de um polígono com n lados é:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

Observe abaixo como podemos calcular a soma dos ângulos internos Si de alguns polígonos convexos:

Polígono	Número de Triângulos	Soma dos Ângulos Internos
 Triângulo	1 Triângulo	180°
 Quadrilátero	2 Triângulos	2.180° = 360°
 Pentágono	3 Triângulos	3.180° = 540°

Traçando todas as diagonais que têm como extremidade um mesmo vértice do polígono, observamos que o número de triângulos determinados por essas diagonais é n – 2, como a soma dos ângulos internos de cada um desses triângulos é 180°, podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é:

$$S_i = (n-2).180^\circ$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO

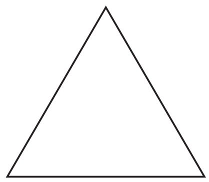
Considerando um polígono convexo qualquer de n lados, onde ai e ae, são, respectivamente, as medidas de um ângulo interno e do ângulo externo adjacente a ele, Si como sendo a soma dos ângulos internos e Se a soma dos ângulos externos. Sabemos que: $a_i + a_e = 180°$ para cada um dos vértices do polígono, portanto:

$$S_i + S_e = 180^\circ.n \Leftrightarrow S_e = 180^\circ.n - S_i \Leftrightarrow S_e = 180^\circ.n - (n-2).180^\circ \Leftrightarrow S_e = 360^\circ$$

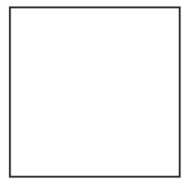
POLÍGONOS REGULARES

Polígono Regular é todo polígono convexo equilátero e equiângulo, ou seja:

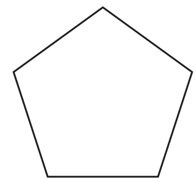
- Todos os seus lados são congruentes.
- Todos os seus ângulos internos são congruentes.



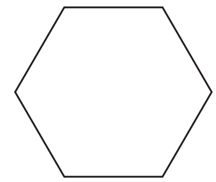
Triângulo Regular (Triângulo Equilátero)



Quadrilátero Regular (Quadrado)



Pentágono Regular

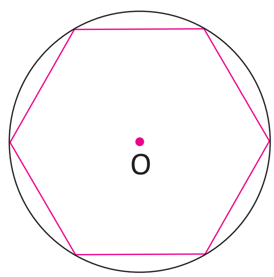


Hexágono Regular

PROPRIEDADES DE UM POLÍGONO REGULAR

PROPRIEDADE 1

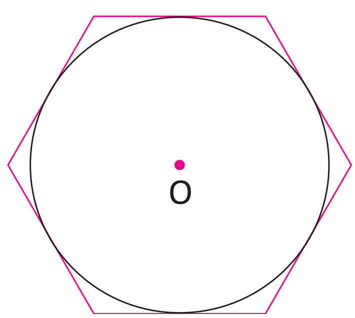
Todo polígono regular é inscritível, ou seja: existe uma circunferência que contém todos os seus vértices.



Hexágono Regular Inscrito

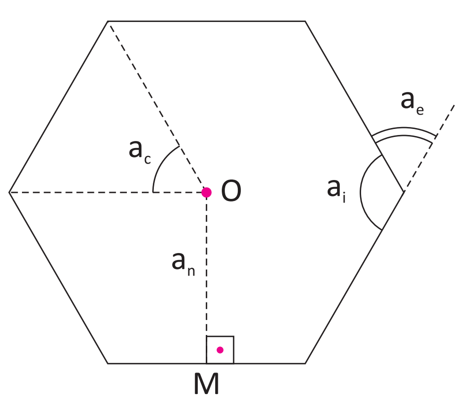
PROPRIEDADE 2

Todo polígono regular é circunscritível, ou seja: existe uma circunferência que é tangente a todos os seus lados.



Hexágono Regular Circunscrito

Veja alguns elementos importantes de um polígono regular:



O é o centro
M é o ponto médio do lado
$\overline{OM}$ é o apótema $= a_n$
a_c é o ângulo central
a_i é o ângulo interno
a_e é o ângulo externo

ADMITINDO UM POLÍGONO REGULAR DE N LADOS:

PROPRIEDADE 3

Ângulo Central: $a_c = \frac{360^\circ}{n}$

PROPRIEDADE 4

Ângulo Interno: $a_i = \frac{s_i}{n} = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$

PROPRIEDADE 5

Ângulo Externo: $a_e = \frac{s_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$

PROPRIEDADE 6

$a_i + a_e = 180^\circ$

PROPRIEDADE 7

Se n for PAR, exatamente $\frac{n}{2}$ diagonais passam pelo seu centro O.

PROPRIEDADE 8

Se n for ÍMPAR, nenhuma de suas diagonais passam pelo seu centro O.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Considerando um decágono, determine:

A O número de diagonais que saem de um de seus vértices;

B O número total de diagonais.

Resolução:

A $d_V = n - 3 = 10 - 3 = 7$

B $d = \frac{n.(n-3)}{2} = \frac{10.(10-3)}{2} = 35$

02| Determine o polígono regular com exatamente 14 diagonais.

Resolução:

$d = \frac{n.(n-3)}{2}$

$\Rightarrow 14 = \frac{n.(n-3)}{2} \Rightarrow 28 = n^2 - 3n$

$\Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4.(1).(-28)$

$\Delta = 9 + 112 = 121$

$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{121}}{2.(1)} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} n' = 7 \\ n'' = -4 \end{array} \right.$

Logo, n = 7, o polígono é o heptágono.

03| Um polígono regular possui a partir de cada um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Cada ângulo interno desse polígono mede em graus:

Resolução:

Um hexágono possui: $d = \frac{6.(6-3)}{2} = 9$

Logo, o polígono citado:

$d_V = n - 3 \Rightarrow 9 = n - 3 \Rightarrow n = 12$

é o dodecágono

Portanto:

$a_i = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$

$\Rightarrow a_i = \frac{10.180^\circ}{12} = 150^\circ$

04| A medida do ângulo central de um polígono regular é 20°. De acordo com esta informação, determine as seguintes medidas:

A Do ângulo interno.

B Do ângulo externo.

Resolução:

A $a_c = a_e = 20^\circ$, como $a_i + a_e = 180^\circ$

$a_i = 160^\circ$

B $a_c = a_e = 20^\circ$

05| O ângulo interno de um polígono regular mede 162°, determine quantas diagonais passam pelo seu centro.

Resolução:

$ai = \frac{(n-2).180^\circ}{n} \Rightarrow 162^\circ = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$

$\Rightarrow 162^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$

$\Rightarrow 18^\circ n = 360^\circ \Rightarrow n = 20$

Portanto:

$d_c = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 10$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Considerando um dodecágono, determine:

A) O número de diagonais que saem de um de seus vértices;

B) O número total de diagonais.

02| Determine o número de lados de um polígono convexo, sabendo que de um de seus vértices saem 20 diagonais.

03| Determine o número de diagonais de um icoságono.

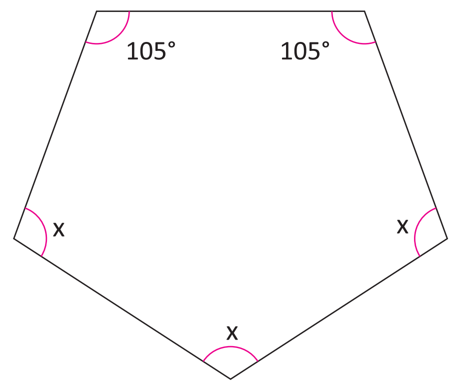
04| Determine o polígono cujo número de diagonais é o triplo do número de lados.

05| Determine o polígono cujo número de diagonais é o sêxtuplo do número de lados.

06| Determine o polígono que possui 20 diagonais distintas.

07| Determine a soma dos ângulos internos de um heptágono.

08| Determine x:



09| Qual é o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1080°?

10| Determine a soma dos ângulos internos de um polígono que possui 35 diagonais.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UTPR A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. A soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é:

A) 180°

B) 360°

C) 540°

D) 720°

E) 900°

02| PUCRIO Os ângulos internos de um quadrilátero medem $3x - 45$, $2x + 10$, $2x + 15$ e $x + 20$ graus. O menor ângulo mede:

A) 90°

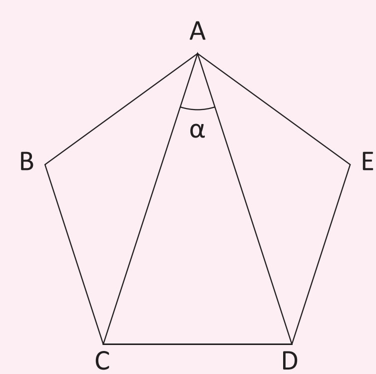
B) 65°

C) 45°

D) 105°

E) 80°

03| FUVEST Na figura adiante, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo α é:



A) 32°

B) 34°

C) 36°

D) 38°

E) 40°

04| ITA De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

A) 63
B) 65
C) 66
D) 70
E) 77

05| FUVEST Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. O número de lados do polígono é:

A) 6
B) 7
C) 13
D) 16
E) 17

06| ITA Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

A) Todas as afirmações são verdadeiras.
B) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
C) Apenas (I) é verdadeira.
D) Apenas (III) é verdadeira.
E) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

07| MACK Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então, o número de diagonais desse polígono é:

A) 90
B) 104
C) 119
D) 135
E) 152

08| FAAP A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

A) 60°
B) 45°
C) 36°
D) 83°
E) 51°

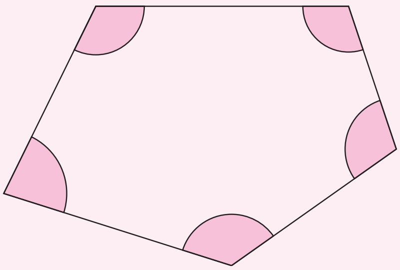
09| FEI A sequência a seguir representa o número de diagonais d de um polígono regular de n lados:

n	3	4	5	6	7	...	13
d	0	2	5	9	14	...	x

O valor de x é:

A) 44
B) 60
C) 65
D) 77
E) 91

10| MACK As medidas dos ângulos assinalados na figura a seguir formam uma progressão aritmética. Então, necessariamente, um deles sempre mede:



A) 108°
B) 104°
C) 100°
D) 86°
E) 72°

11| USF O polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo é o:

- **A** Pentágono
- **B** Hexágono
- **C** Octógono
- **D** Decágono
- **E** Dodecágono

12| ITA Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabese que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

- **A** 63
- **B** 69
- **C** 90
- **D** 97
- **E** 106

13| UNITAU O polígono regular convexo em que o nº de lados é igual ao nº de diagonais é o:

- **A** Dodecágono
- **B** Pentágono
- **C** Decágono
- **D** Hexágono
- **E** Heptágono

14| UECE Sejam P e Q polígonos regulares. Se P é um hexágono e se o número de diagonais do Q, partindo de um vértice, é igual ao número total de diagonais de P então a medida de cada um dos ângulos internos de Q é:

- **A** 144 graus
- **B** 150 graus
- **C** 156 graus
- **D** 162 graus

15| ENEM Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

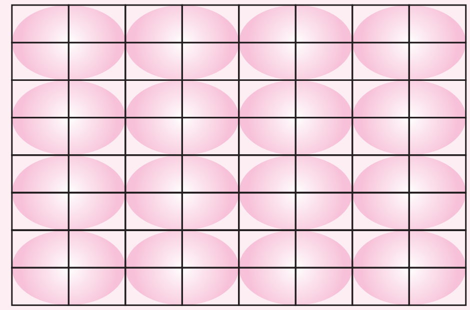


Figura 1: ladrilhos retangulares pavimentando o plano

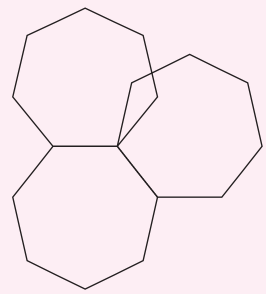
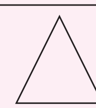
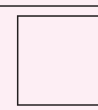
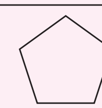
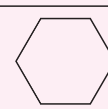
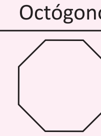


Figura 2: heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um:

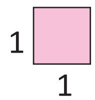
- **A** Triângulo
- **B** Quadrado
- **C** Pentágono
- **D** Hexágono
- **E** Eneágono

ÁREAS DAS SUPERFÍCIES PLANAS

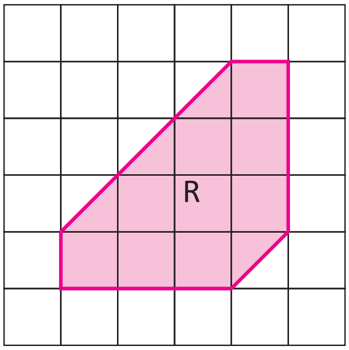
IDEIA INTUITIVA DE ÁREA

O cálculo de áreas tem sido uma preocupação constante na história da Matemática, desde o Egito, os homens procuravam medir e demarcar suas terras, surgindo o nome Geometria (medida da terra).

Estabelecendo como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento, e sua área por definição é igual a 1, ao compararmos a área de uma região plana R com a região quadrada unitária, obteremos um número que indicará a área da região plana R. Veja:



(Região quadrada unitária)

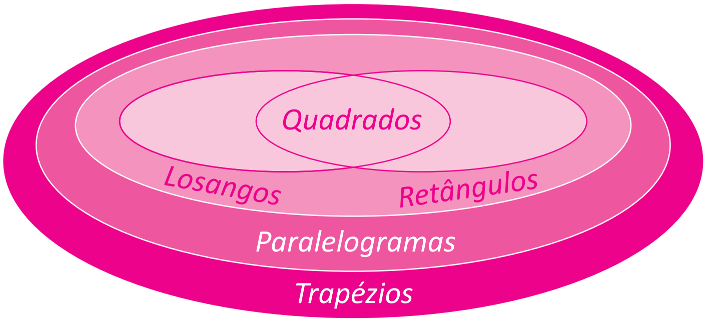


(Região plana R)

Admitindo como unidade de medida a área da região quadrada unitária igual a 1 unidade de área, concluímos que a área da região plana R é 11 unidades de área.

ÁREA DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

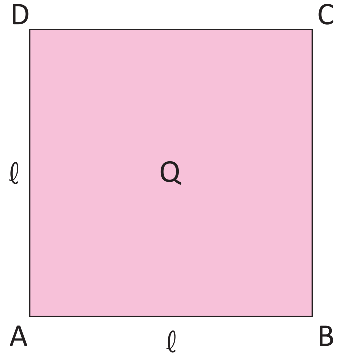
Os quadriláteros notáveis são: os quadrados, os retângulos, os losangos, os paralelogramos e os trapézios.



ÁREA DO QUADRADO

Quadrado é todo quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes (equiângulo e equilátero).

A área de um quadrado ABCD (Q) cujo lado mede ℓ é dada por: $A_Q = \ell^2$



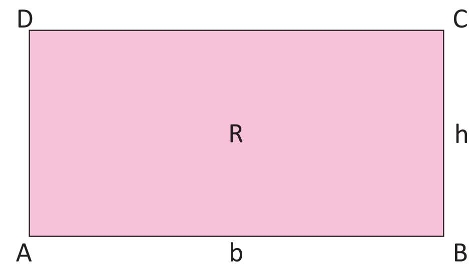
PROPRIEDADES DOS QUADRADOS

- As diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios;
- As diagonais são as bissetrizes dos ângulos internos;
- As diagonais são perpendiculares;
- As diagonais são congruentes.

ÁREA DO RETÂNGULO

Retângulo é todo quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos congruentes (equiângulo).

A área de um retângulo ABCD (R) de base b e altura h é dada por: $A_R = b.h$



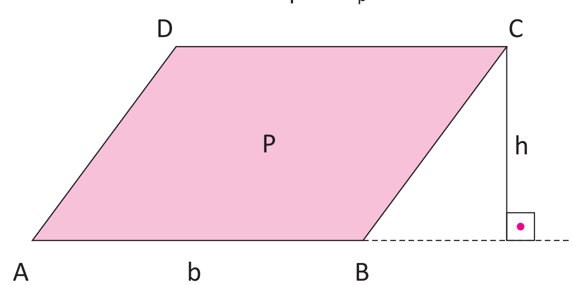
PROPRIEDADES DOS RETÂNGULOS

- Lados opostos congruentes;
- As diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios;
- As diagonais são congruentes.

ÁREA DO PARALELOGRAMO

Paralelogramo é todo quadrilátero plano convexo que possui lados opostos paralelos.

A área de um paralelogramo P de base b e altura h é dada por: $A_p = b.h$



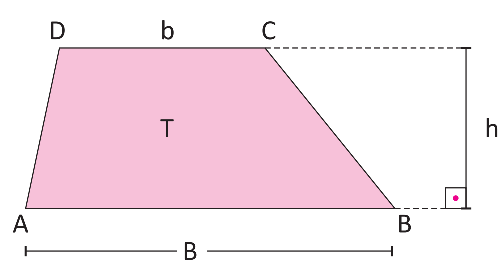
PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS

- Lados opostos congruentes;
- Ângulos opostos congruentes;
- As diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

ÁREA DO TRAPÉZIO

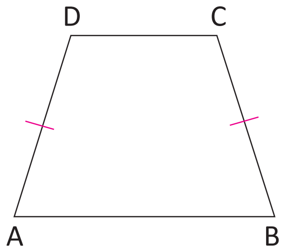
Trapézio é todo quadrilátero plano convexo que possui dois lados paralelos.

A área de um trapézio ABCD (T) de bases B, b e altura h é dada por: $A_T = \dfrac{(B+b).h}{2}$

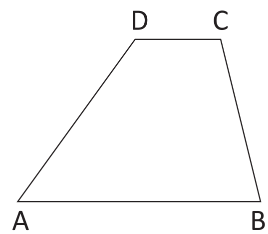


CLASSIFICAÇÃO DE UM TRAPÉZIO

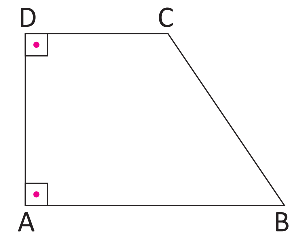
Um trapézio pode ser classificado em:



Trapézio Isósceles
(lados oblíquos congruentes)



Trapézio Escaleno
(lados oblíquos distintos)

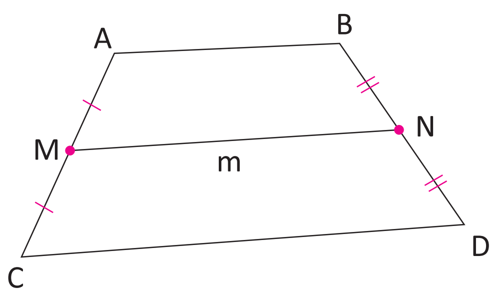


Trapézio Retângulo
(dois ângulos internos são retos)

PROPRIEDADES DOS TRAPÉZIOS

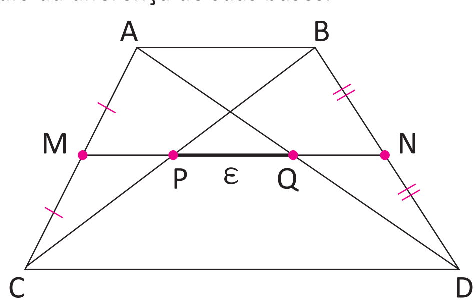
Os ângulos internos adjacentes a um mesmo lado oblíquo são suplementares.

BASE MÉDIA é o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos. O seu comprimento m é igual à média dos comprimentos das bases do trapézio.



$$m = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

MEDIANA DE EULER (segmento $\overline{PQ}$) é o segmento que une os pontos médios das diagonais do trapézio. O seu comprimento ε é igual a metade do módulo da diferença de suas bases.

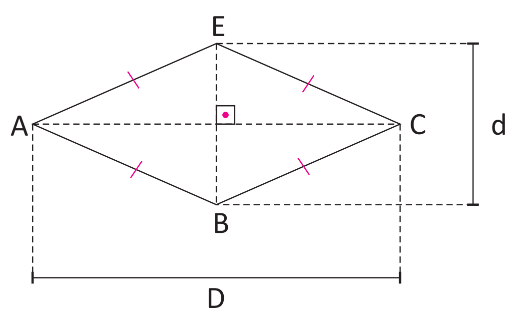


$$\varepsilon = \left| \frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{2} \right|$$

ÁREA DO LOSANGO

Losango é todo quadrilátero plano convexo que possui os quatro lados congruentes (equilátero).

A área de um losango ABCE cujas diagonais medem D e d é dada por: $A_L = \frac{D.d}{2}$



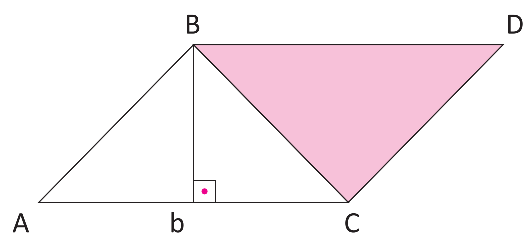
PROPRIEDADES DOS LOSANGOS

- Ângulos opostos congruentes;
- As diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios;
- As diagonais são as bissetrizes dos ângulos internos;
- As diagonais são perpendiculares.

ÁREA DO TRIÂNGULO

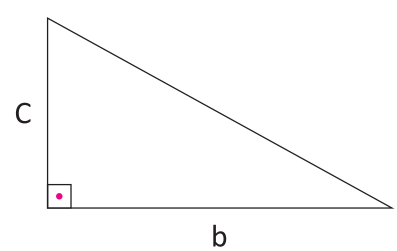
EM FUNÇÃO DE UM DE SEUS LADOS E DA ALTURA RELATIVA A ESSE LADO

Considerando um triângulo ABC, onde a base mede b e a altura mede h, e um triângulo BCD equivalente ao triângulo ABC. Podemos concluir que a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo ABCD, de base mede b e altura h.



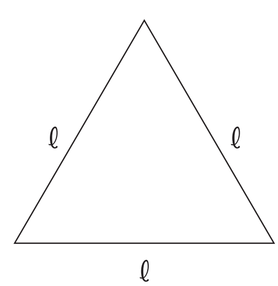
$$A_{\Delta} = \frac{b.h}{2}$$

PARA TRIÂNGULOS RETÂNGULOS



$$A_{\Delta} = \frac{b.c}{2}$$

PARA TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS



$$A_{\Delta} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

EM FUNÇÃO DE SEUS LADOS

Heron de Alexandria é o responsável por elaborar uma fórmula matemática que calcula a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados. A fórmula de Heron de Alexandria é muito útil nos casos em que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos lados. Em um triângulo cujos lados medem a, b e c podemos calcular sua área com o uso da fórmula de Heron:

$$A_{\Delta} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}, \text{ sendo: } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperímetro)}$$

EM FUNÇÃO DE SEU SEMIPERÍMETRO E O RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

Considerando um triângulo cujo semiperímetro é p e o raio da circunferência inscrita é r, sua área é dada por:

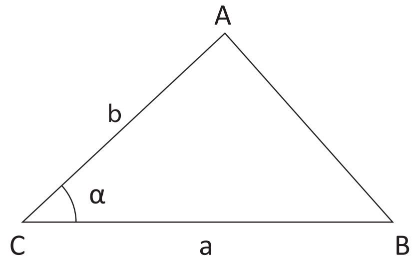
$$A_{\Delta} = p.r$$

EM FUNÇÃO DE SEUS LADOS E O RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

Considerando um triângulo cujos lados medem a, b e c e o raio da circunferência circunscrita é R, sua área é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{a.b.c}{4R}$$

EM FUNÇÃO DE DOIS DE SEUS LADOS E O ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES



$$A_{\Delta} = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

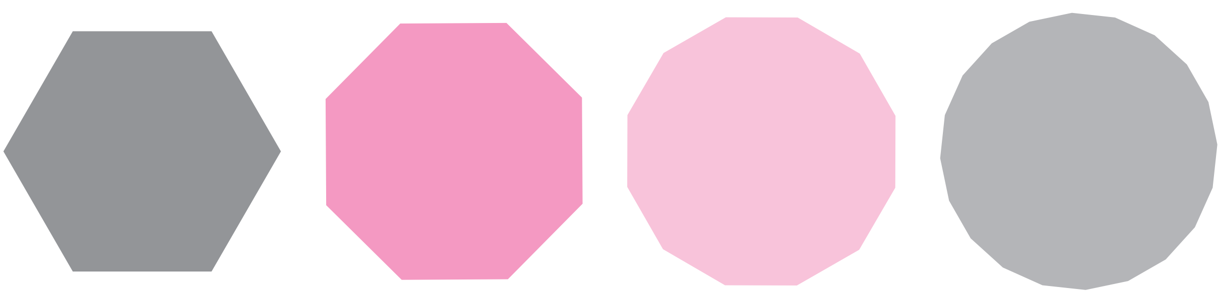
ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

Considerando um polígono regular de semiperímetro p e apótema a, sua área é dada por:

$$A = p.a$$

ÁREA DO CÍRCULO

O círculo é determinado de acordo com o aumento do número de lados de um polígono. Quanto mais lados um polígono admite, mais ele se assemelha a um círculo. Observe as figuras na seguinte ordem: hexágono (6 lados), octógono (8 lados), dodecágono (12 lados) e icoságono (20 lados).

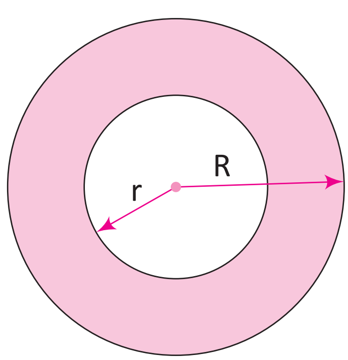


Admitindo um polígono regular de n lados, sendo n "muito grande", podemos observar que o perímetro do polígono regular tende ao comprimento da circunferência que limita o círculo e o apótema do polígono regular tende ao raio do círculo, logo:

$$A_{Polígono} = p.a = A_{Círculo} = \pi.R.R = \pi.R^2$$

ÁREA DA COROA CIRCULAR

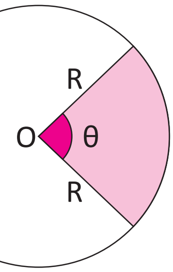
Coroa circular é uma região limitada por dois círculos concêntricos (mesmo centro). Sendo R o raio da circunferência externa e r o raio da circunferência interna, a área da coroa é dada pela diferença entre a área do círculo externo e a área do círculo interno, veja:



$$A_{Coroa} = \pi.R^2 - \pi.r^2 = \pi.(R^2 - r^2)$$

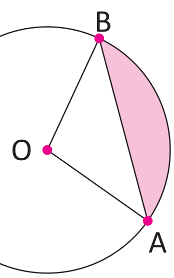
ÁREA DO SETOR CIRCULAR

Um setor circular (fatia de pizza) é a parte de um círculo limitada por dois raios e um arco. Sua área é diretamente proporcional ao seu ângulo central θ, calculada a partir de uma regra de três, veja:



$$360° \text{ ———— } \pi R^2$$
$$\theta \text{ ———— } A_{Setor}$$
$$\therefore 360°.A_{Setor} = \pi.R^2.\theta$$
$$\therefore A_{Setor} = \frac{\pi R^2 \theta}{360°} \ (\theta \text{ em graus})$$

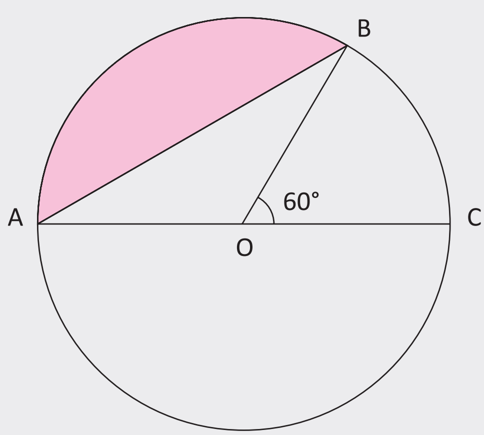
ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR



$$A_{Segmento\ circular} = A_{Setor} - A_{\Delta OAB}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| UEG A figura abaixo representa uma circunferência de raio r = 2 cm, em que AC é o diâmetro e AB é uma corda. Sabendo-se que o ângulo BÔC = 60°, calcule a área da região hachurada.



Resolução:

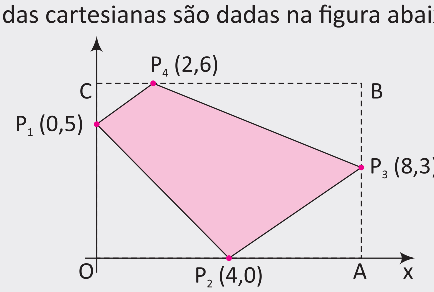
$A = A_{Setor(AOB)} - A_{\Delta AOB}$

$A = \frac{\pi.2^2.120°}{360°} - \frac{1}{2}.2.2.sen120°$

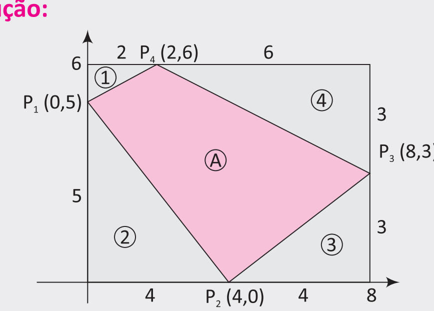
$A = \frac{4.\pi}{3} - \frac{1}{2}.2.2.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = \frac{4.\pi}{3} - \sqrt{3}\,cm^2$

02| UFPR Calcule a área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, cujas coordenadas cartesianas são dadas na figura abaixo.



Resolução:



$A = A_R - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$

$A = 8.6 - \frac{2.1}{2} - \frac{5.4}{2} - \frac{4.3}{2} - \frac{6.3}{2}$

$A = 48 - 1 - 10 - 6 - 9$

$A = 48 - 26$

$A = 22$ *unidades de área*

03| UFES Sob um segmento de reta AB é construído um quadrado ABCD. A partir do ponto médio E do lado DA do quadrado ABCD, o segmento de reta EA é prolongado em linha reta até o ponto F, de modo que os segmentos EF e EB sejam congruentes e o ponto A esteja entre os pontos E e F. Utilizando-se o segmento AF, é construído o quadrado AFGH, tendo o ponto H no segmento de reta AB. O lado GH do quadrado AFGH é, então, prolongado em linha reta até o ponto I no lado CD do quadrado ABCD.

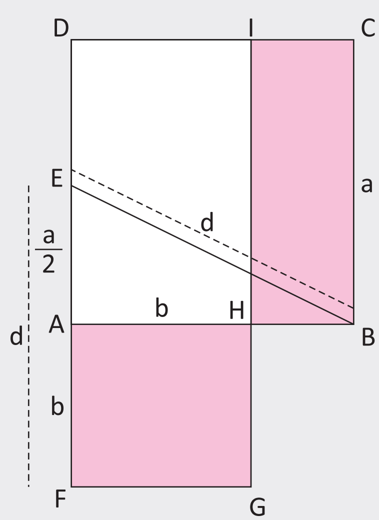
A Faça um esboço da figura descrita acima.

B Determine o valor numérico da razão entre as áreas do quadrado AFGH e do retângulo HBCI.

C Determine o valor numérico da razão entre os comprimentos dos segmentos AH e AB.

Resolução:

A



$$d^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a.(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$x = a - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a.(3-\sqrt{5})}{2}$$

B

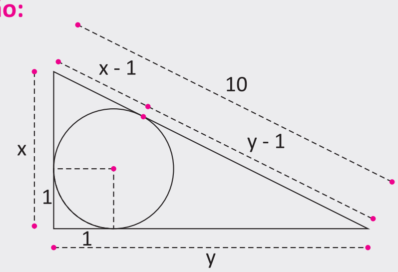
$$\frac{\left[\frac{a.(\sqrt{5}-1)}{2}\right]^2}{a.a\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{a^2.\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}{a^2.\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} = 1$$

C

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{a.(\sqrt{5}-1)}{2}}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

04| UFSC Calcule a área, em cm^2, de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 10 cm e cujo raio da circunferência inscrita mede 1 cm.

Resolução:



$x - 1 + y - 1 = 12$

$x + y = 12$

$x^2 + y^2 + 2xy = 144$

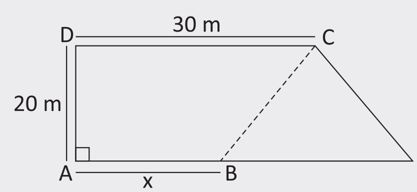
$100 + 2xy = 144$

$xy = 22$

Logo, a área de um triângulo será dada por:

$A = \frac{x.y}{2} = \frac{22}{2} = 11\,cm^2$

05| UEG O trapézio retângulo ABCD representa um terreno, com área de 800 m^2 situado em certo condomínio. Uma das cláusulas que regulamentam as construções nesse condomínio exige que a área construída, indicada pelo trapézio AECD na figura, ocupe no mínimo 50% e no máximo 70% da área do terreno.



Desse modo, determine:

A O intervalo de todos os possíveis valores que x pode assumir para atender à cláusula especificada.

B O valor de x, se a área não construída ocupar $\frac{2}{5}$ da área total do terreno.

Resolução:

A *De acordo com as informações, segue que:*

$0,5.(ABCD) \leq (AECD) \leq 0,7.(ABCD)$

$\Rightarrow 400 \leq \frac{x+30}{2}.20 \leq 560$

$\Rightarrow 10\,m \leq x \leq 26\,m$

B *Se a área não construída ocupar $\frac{2}{5}$ da área total do terreno, então a área construída ocupará $\frac{3}{5}$ da área total. Portanto, o valor de x deve ser tal que:*

$(AECD) = \frac{3}{5.800} \Rightarrow \frac{x+30}{2}.20 = 480$

$\Rightarrow x = 18\,m$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Julgue os itens:

- **A** (   ) Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.
- **B** (   ) Todo quadrado é um losango.
- **C** (   ) Todo quadrado é um retângulo.
- **D** (   ) Todo retângulo é um paralelogramo.
- **E** (   ) Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
- **F** (   ) Em todo paralelogramo não retângulo, a diagonal oposta aos ângulos agudos é menor que a outra.
- **G** (   ) Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

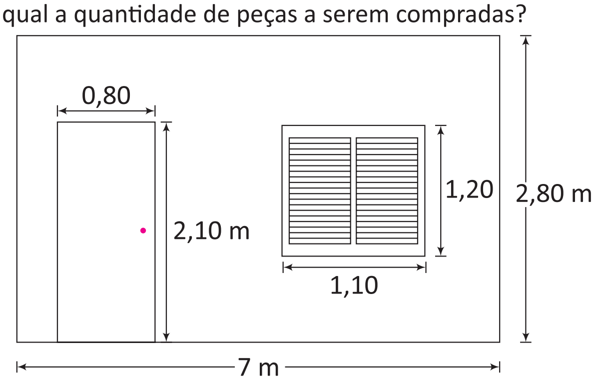
02| Na figura tem-se o trapézio isósceles ABCD no qual as bases medem 17 cm e 25 cm. Os lados AB e CD foram divididos em 4 partes iguais, e pelos pontos de divisão, foram traçados 3 segmentos paralelos às bases. Determine a soma das medidas dos três segmentos traçados.

03| Determine a área de um quadrado nos seguintes casos:

- **A** Seu lado tem 8 cm.
- **B** Seu perímetro é 44 cm.
- **C** Sua diagonal mede $5\sqrt{6}$ cm.

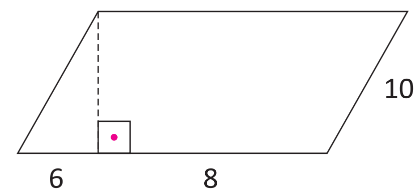
04| Determine o lado de um quadrado, sabendo que, se aumentarmos seu lado em 3 cm, sua área aumentará em 81 cm^2.

05| UFSC Queremos revestir uma parede usando azulejo de 20 cm x 20 cm. Já dispondo de 342 peças desse azulejo, qual a quantidade de peças a serem compradas?

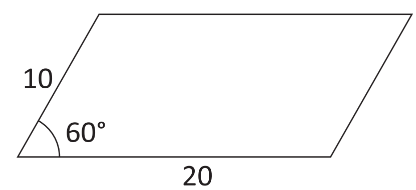


06| Determine a área do paralelogramo nos casos seguintes, sendo a unidade das medidas o metro:

A

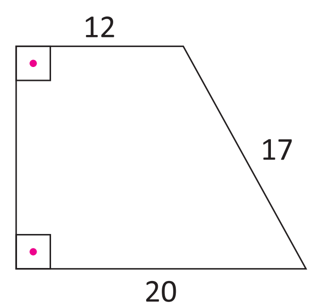


B

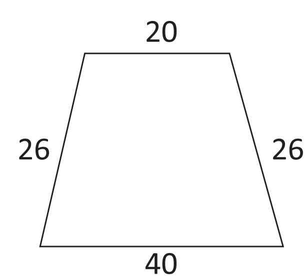


07| Determine a área do trapézio nos casos seguintes, sendo a unidade das medidas o metro:

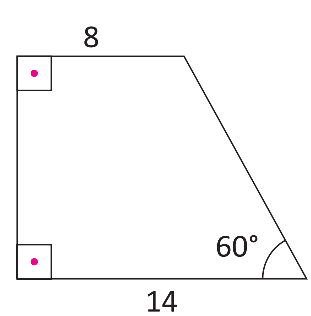
A



B

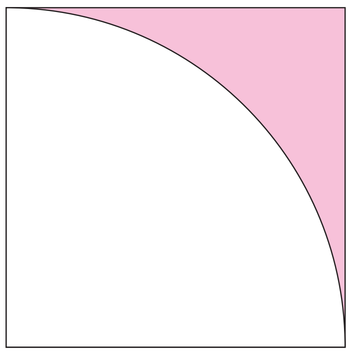


C

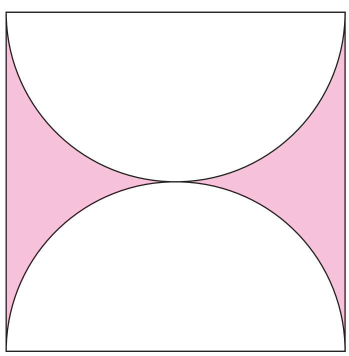


08| Determine a área da região hachurada nos casos seguintes:

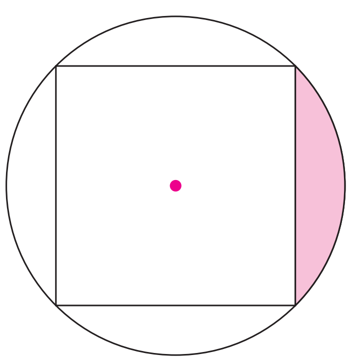
A Quadrado de lado 8 dm.



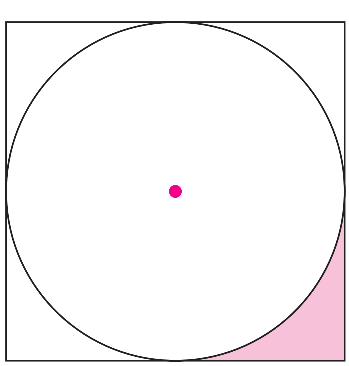
B Quadrado de diagonal $10\sqrt{2}$ m.



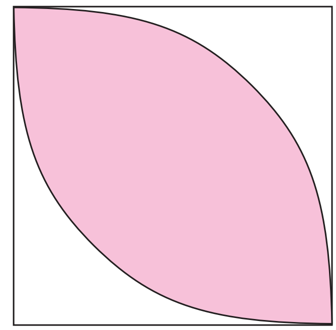
C Quadrado de lado 6 m.



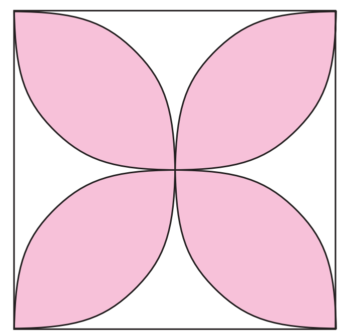
D Quadrado de perímetro 40 cm.



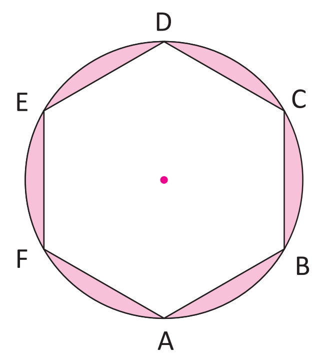
E Quadrado de lado 5 m.



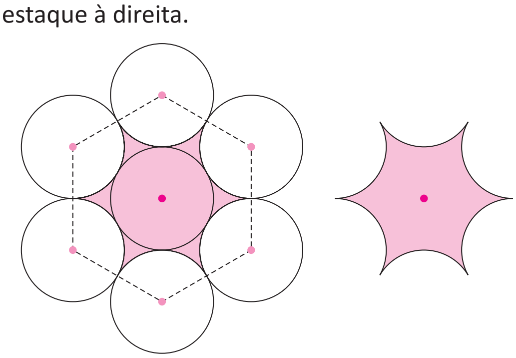
F Quadrado de perímetro 48 cm.



09| Determine a área da região hachurada, sabendo que ABCDEF é um hexágono regular de lado igual a 8 cm.

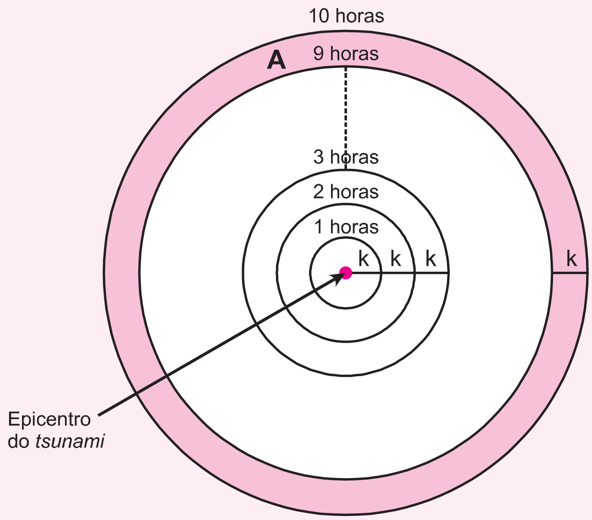


10| UNIFESP Na figura, são exibidas sete circunferências. As seis exteriores, cujos centros são vértices de um hexágono regular de lado 2, são tangentes à interna. Além disso, cada circunferência externa é também tangente às outras duas que lhe são contíguas. Nestas condições, calcule a área da região sombreada, apresentada em destaque à direita.



T ENEM E VESTIBULARES

01| UEL Considere que um tsunami se propaga como uma onda circular.



Representação da propagação de um *tsunami*

Se a distância radial percorrida pelo tsunami, a cada intervalo de 1 hora, é de k quilômetros, então a área A, em quilômetros quadrados, varrida pela onda entre 9 horas e 10 horas é dada por:

A) $A = \pi k^2$

B) $A = 9\pi k^2$

C) $A = 12\pi k^2$

D) $A = 15\pi k^2$

E) $A = 19\pi k^2$

02| UNICAMP Um vulcão que entrou em erupção gerou uma nuvem de cinzas que atingiu rapidamente a cidade de Rio Grande, a 40 km de distância. Os voos com destino a cidades situadas em uma região circular com centro no vulcão e com raio 25% maior que a distância entre o vulcão e Rio Grande foram cancelados. Nesse caso, a área da região que deixou de receber voos é:

A) Maior que 10000 km^2

B) Menor que 8000 km^2

C) Maior que 8000 km^2 e menor que 9000 km^2

D) Maior que 9000 km^2 e menor que 10000 km^2

03| UFPR Uma praça semicircular de 250 m de raio ficou lotada em um determinado evento. Considerando uma ocupação média de 5 pessoas por m^2, a melhor estimativa para o número de pessoas neste evento é de: (Use: $\pi = 3,14$)

A) 1 milhão

B) 500 mil

C) 200 mil

D) 100 mil

E) 20 mil

04| ENEM Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m

Terreno 2: 55 m por 55 m

Terreno 3: 60 m por 30 m

Terreno 4: 70 m por 20 m

Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4.

E) 5

05| FAAP Um outdoor retangular tem área A = base x altura. Se a base aumenta 50%, e a altura diminui 50%, então:

A) A área não se altera

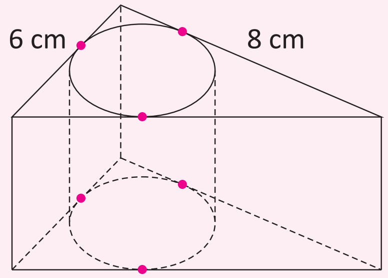
B) A área diminuirá 25%

C) A área aumentará 25%

D) A área aumentará 50%

E) A área diminuirá 50%

06| ENEM Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a:

A) 1 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 4 cm
E) 5 cm

07| IFTSC Para cobrir o piso de uma cozinha com 5 m de comprimento por 4 m de largura, serão utilizados pisos de 25 cm x 25 cm. Cada caixa contém 20 pisos. Supondo que nenhum piso se quebrará durante o serviço, quantas caixas são necessárias para cobrir o piso da cozinha?

A) 17 caixas
B) 16 caixas
C) 20 caixas
D) 15 caixas
E) 12 caixas

08| ENEM O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (Km^2)	Área / total Brasil
Amazônia	4.196.943	49,29%
Cerrado	2.036.448	23,92%
Mata atlântica	1.110.182	13,04%
Caatinga	844.453	9,92%
Pampa	176.496	2,07%
Pantanal	150.355	1,76%
Área Total Brasil	8.514.877	

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m x 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

A) 1.400
B) 14.000
C) 140.000
D) 1.400.000
E) 14.000.000

09| ENEM O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

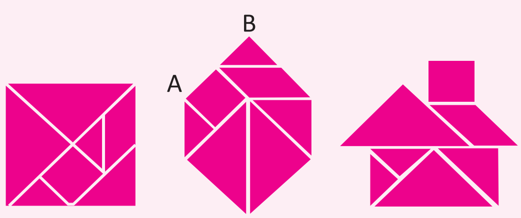


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3 que representa uma "casinha", é igual a:

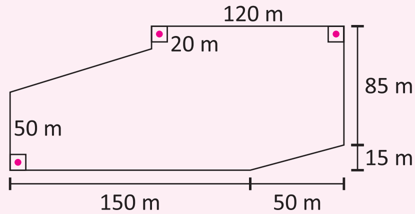
A) 4 cm^2
B) 8 cm^2
C) 12 cm^2
D) 14 cm^2
E) 16 cm^2

10| FAAP Para a instalação de um caixa eletrônico Bradesco Dia e Noite (BDN), dispõe-se de uma área triangular de esquina com frentes de 6 metros e 8 metros. As ruas formam um ângulo de 75°.

A área do terreno (em metros quadrados) é:

A) $6\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$
B) $12\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$
C) $6\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$
D) $\dfrac{24\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
E) $\dfrac{6\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

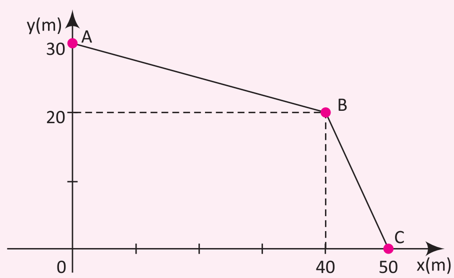
11| UEG



Na venda de uma chácara com formato e dimensões dados na figura acima, o corretor recebeu uma comissão de cinco por cento sobre o preço de venda. Como o preço de venda do metro quadrado foi de 12 reais, o corretor recebeu de comissão:

A) R$ 11.040,00
B) R$ 10.205,00
C) R$ 10.095,00
D) R$ 8.785,00

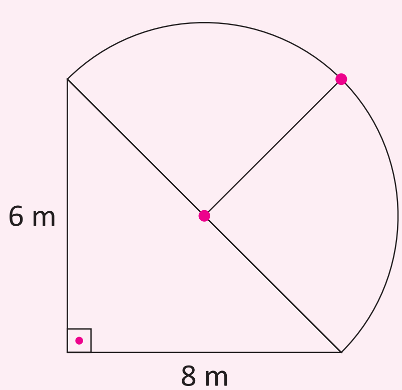
12| UFG Um terreno tem a planta representada num plano cartesiano, como mostra o gráfico a seguir.



A área do terreno, em metros quadrados, será:

A) 1400
B) 1100
C) 1000
D) 900
E) 800

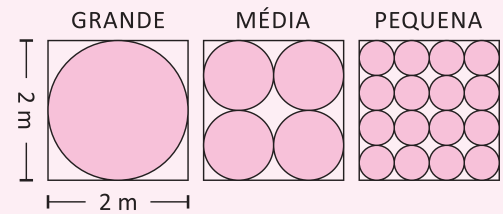
13| UEG



O jardim da casa de Terêncio tem o formato e as dimensões descritas na figura acima, em que uma parte é um semicírculo e a outra é um triângulo retângulo. Se cada planta que João tem no jardim ocupa $0{,}25\text{m}^2$ e utilizando a aproximação $\pi = 3{,}14$, a quantidade máxima de plantas que Terêncio poderá plantar é:

A) 222
B) 253
C) 287
D) 410

14| ENEM Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

A) A entidade I recebe mais material do que a entidade II.
B) A entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
C) A entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
D) As entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
E) As três entidades recebem iguais quantidades de material.

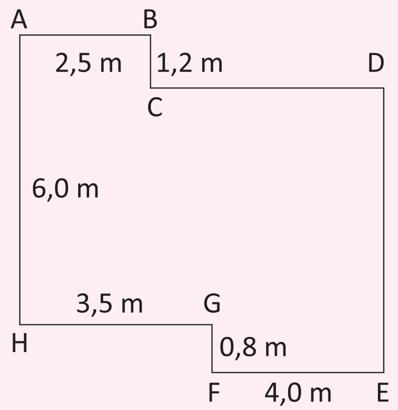
15| UFG A matemática grega, sintetizada nos Elementos de Euclides (300 a.C.), não conhecia números irracionais. No entanto, Euclides provou que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros. Se considerarmos dois círculos de raios r_1 e r_2 e áreas A_1 e A_2, respectivamente, a relação provada por Euclides pode ser escrita como:

A) $A_1/A_2 = r_1/r_2$
B) $A_1/A_2 = (r_1/r_2)^2$
C) $A_1/A_2 = r_1^2/r_2$
D) $A_1/A_2 = r_1/r_2^2$
E) $(A_1/A_2)^2 = r_1/r_2$

16| FATEC Três pedaços de arame de mesmo comprimento foram moldados: uma na forma de um quadrado, outro na forma de um triângulo equilátero e outro na forma de um círculo. Se Q, T e C são, respectivamente, as áreas das regiões limitadas por esses arames, então é verdade que :

A) $Q < T < C$
B) $C < T < Q$
C) $C < Q < T$
D) $T < C < Q$
E) $T < Q < C$

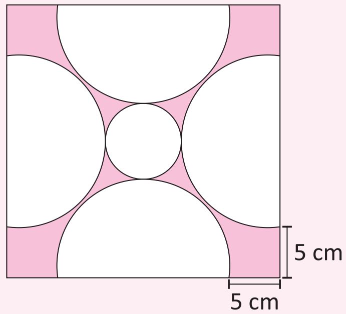
17| UNESP A figura adiante mostra a planta baixa da sala de estar de um apartamento. Sabe-se que duas paredes contíguas quaisquer incidem uma na outra perpendicularmente e que AB = 2,5 m, BC = 1,2 m, EF = 4,0 m, FG = 0,8 m, HG = 3,5 m e AH = 6,0 m.



Qual a área dessa sala em metros quadrados?

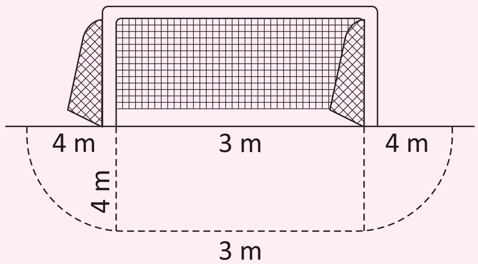
A) 37,2
B) 38,2
C) 40,2
D) 41,2
E) 42,2

18| UNIRIO Uma placa de cerâmica com uma decoração simétrica, cujo desenho está na figura a seguir, é usada para revestir a parede de um banheiro. Sabendo-se que cada placa é um quadrado de 30 cm de lado, a área da região hachurada é:



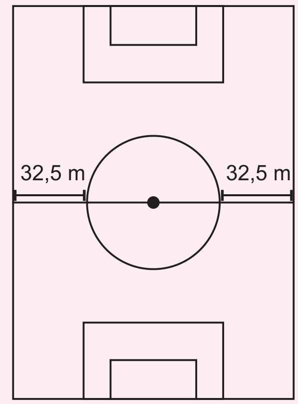
A) $900 - 125\pi$
B) $900\,(4 - \pi)$
C) $500\pi - 900$
D) $500\pi - 225$
E) $225\,(4 - \pi)$

19| CESGRANRIO No futebol de salão, a área de meta é delimitada por dois segmentos de reta (de comprimento de 11 m e 3 m) e dois quadrantes de círculos (de raio 4 m), conforme a figura. A superfície da área de meta mede, aproximadamente:



A) 25 m^2
B) 34 m^2
C) 37 m^2
D) 41 m^2
E) 61 m^2

20| IFSC Um campo de futebol tem o formato de um retângulo de comprimento (2x + 20) metros e largura (x + 45) metros, conforme a figura ao lado. Sabendo que a área desse campo é de 8500 m^2 assinale a alternativa que indica CORRETAMENTE a medida do raio do círculo central:



A) 10 m
B) 15 m
C) 20 m
D) 25 m
E) 30 m

LOGARITMOS

DEFINIÇÃO

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $b \neq 1$, dá-se o nome de logaritmo de **a** na base **b**, o número real **x** ao qual se eleva a base **b** para se obter **a**. Simbolicamente, temos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Sendo:

- **a** um número real positivo chamado de logaritmando ou antilogaritmo.
- **b** um número real positivo e diferente de 1 chamado de base.
- **x** um número real chamado de logaritmo.

Por exemplo:

- $\log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$. Portanto, $\log_2 64 = 6$.
- $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = x \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$. Portanto, $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$.
- $\log_{\sqrt{5}} 25 = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x = 25 \Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^2 \Rightarrow x = 4$. Portanto, $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$.

OBSERVAÇÃO:

Chamamos de sistema de logaritmos de base b, o conjunto de todos os logaritmos escritos na forma $\log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$.

Dois sistemas de logaritmos se destacam devido à sua grande aplicabilidade. São eles, o sistema de logaritmos decimais (base 10) e o sistema logaritmos naturais (base e).

- No logaritmo decimal, temos que $\log x = \log_{10} x$.
- No logaritmo natural, temos que $\ln x = \log_e x$, sendo $e = 2{,}7182...$ o número de Euler.

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $b \neq 1$, temos as seguintes consequências imediatas da definição de logaritmos.

a) O logaritmo de 1 na base b é igual a zero. Simbolicamente, temos:

$$\log_b 1 = 0$$

Fazendo $\log_b 1 = x$, temos que:

- $\log_b 1 = x \Leftrightarrow b^x = 1 \Rightarrow b^x = b^0 \Rightarrow x = 0$.
- Portanto $\log_b 1 = 0$.

b) O logaritmo do número **b** na base **b** é igual a 1. Simbolicamente, temos:

$$\log_b b = 1$$

Fazendo $\log_b b = x$, temos que:

- $\log_b b = x \Leftrightarrow b^x = b \Rightarrow b^x = b^1 \Rightarrow x = 1$.
- Portanto $\log_b b = 1$.

c) O logaritmo da potência $\mathbf{b^m}$ na base **b** é igual a **m**. Simbolicamente, temos

$$\log_b b^m = m$$

Fazendo $\log_b b^m = x$, temos que:

- $\log_b b^m = x \Leftrightarrow b^x = b^m \Rightarrow x = m$.
- Portanto $\log_b b^m = m$, para todo real m.

d) O número **b** elevado à $\log_b a$ é igual a **a**. Simbolicamente, temos:

$$b^{\log_b a} = a$$

Fazendo $\log_b a = x$, temos que:

- $\log_b a = x \Rightarrow b^x = a \therefore b^{\log_b a} = a$

e) O logaritmo de **a** na base **b** é igual ao logaritmo de **c** na base **b** se, e somente se, $a = c$. Simbolicamente, temos que:

$$\operatorname{colog}_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$$

Fazendo $\log_b a = \log_b c = x$, temos que:

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.
- $\log_b c = x \Leftrightarrow b^x = c$.
- Assim, $a = c$. Portanto, $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$.

PROPRIEDADES

Sendo a, b e c números reais e positivos, com $b \neq 1$, temos as seguintes propriedades:

a) Logaritmo do produto:

O logaritmo do produto entre **a** e **c** na base **b** é igual à adição dos logaritmos de **a** e **c** na base **b**. Simbolicamente, temos:

$$\log_b (a \,.\, c) = \log_b a + \log_b c$$

Fazendo $\log_b a = x$, $\log_b c = y$ e $\log_b (a.c) = z$, temos que:

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.
- $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.
- $\log_b (a.c) = z \Leftrightarrow b^z = a.c \Rightarrow b^z = b^x.b^y \Rightarrow b^z = b^{x+y}$
- Assim, $z = x + y$. Portanto $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$.

b) Logaritmo do quociente:

O logaritmo do quociente entre **a** e **c** na base **b** é igual à subtração dos logaritmos de **a** e **c** na base **b**. Simbolicamente, temos:

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

Fazendo $\log_b a = x$, $\log_b c = y$ e $\log_b (a.c) = z$, temos que:

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.
- $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.
- $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = z \Leftrightarrow b^z = \frac{a}{c} \Rightarrow b^z = \frac{b^x}{b^y} \Rightarrow b^z = b^{x-y}$.
- Assim, $z = x - y$. Portanto $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$.

c) Logaritmo da potência:

O logaritmo da potência a^m na base **b** é igual à **m** vezes o logaritmo de **a** na base **b**. Simbolicamente, temos:

$$\log_b a^n = n.\log_b a$$

Fazendo $\log_b a = x$, $\log_b a^n = y$, temos que:

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$
- $\log_b a^n = y \Leftrightarrow b^y = a^n \Rightarrow b^y = (b^x)^n \Rightarrow b^y = b^{nx}.$
- $y = nx \Rightarrow \log_b a^n = n.\log_b a.$

COLOGARITMO

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $b \neq 1$, dá-se o nome de cologaritmo de **a** na base **b** ao oposto do logaritmo de **a** na base **b**. Simbolicamente, temos que:

$$\text{co}\log_b a = -\log_b a = \log_b a^{-1} = \log_b\left(\frac{1}{a}\right)$$

MUDANÇA DE BASE

Sendo **a**, **b** e **c** números reais e positivos, com $b \neq 1$ e $c \neq 1$, temos que o logaritmo de **a** na base **b** é igual à razão do logaritmo de **a** na base **c** pelo logaritmo de **b** na base **c**, nessa ordem. Simbolicamente, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Fazendo $\log_b a = x$, $\log_c a = y$ e $\log_c b = z$, temos que:

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \Rightarrow b = a^{\frac{1}{x}}.$
- $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a \Rightarrow c = a^{\frac{1}{y}}.$
- $\log_c b = z \Leftrightarrow c^z = b$
- $\left(a^{\frac{1}{y}}\right)^z = a^{\frac{1}{x}} \Rightarrow a^{\frac{z}{y}} = a^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{1}{x}$
- Assim, $x = \frac{y}{z}$. Portanto, $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Consequências:

a) O logaritmo de a na base b igual ao inverso do logaritmo de b na base a. Simbolicamente, temos:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Mudando a base de $\log_b a$ para a base a, temos:

- $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$

b) O logaritmo de a na base b^n é igual $\frac{1}{n}$ vezes o logaritmo de a na base b. Simbolicamente, temos:

$$\log_{b^n} a = \left(\frac{1}{n}\right).\log_b a$$

Mudando a base de $\log_{b^n}$ para a base b, temos:

- $\log_{b^n} a = \frac{\log_b a}{\log_b b^n} = \frac{\log_b a}{n} = \left(\frac{1}{n}\right).\log_b a$

EQUAÇÕES

Equações logarítmicas na variável x são aquelas que a incógnita x se apresenta no logaritmando ou na base dos logaritmos dessa equação. Para resolvê-las, deve-se:

- Estabelecer as condições de existência de cada logaritmo da equação.
- Resolver a equação utilizando a definição, suas consequências e as propriedades.
- Verificar se as soluções obtidas na resolução satisfazem as condições de existência.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função f: $IR_+^* \rightarrow IR$ é chamada de função logarítmica de base **b** se, e somente se, for expressa pela seguinte lei de formação.

$f(x) = \log_b x$, com $b \in IR_+^*$ e $b \neq 1$.

Assim, são exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x) = \log_2 x$, com $b = 2$.
- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, com $b = \frac{1}{3}$.

A partir das funções logarítmicas do tipo $f(x) = \log_b x$, podemos obter outras funções logarítmicas mais complexas.

Por exemplo:

- $f(x) = \log_2 (x - 1)$
- $g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}} x$

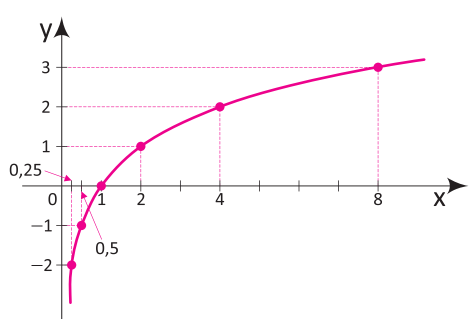
GRÁFICO CARTESIANO

O formato do gráfico cartesiano de uma função do tipo $f(x) = \log_b x$, com $b \in IR_+^*$ e $b \neq 1$, é chamado de **curva logarítmica**. Para ilustrá-lo, considera-se dois casos:

1º caso: $b > 1$, por exemplo, a função $f(x) = \log_2 x$.

Para esboçar esse gráfico podemos montar uma tabela numérica escolhendo alguns valores arbitrários para x e calculando os correspondentes valores de y.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3



Assim, para o gráfico de $f(x) = \log_2 x$, temos que:

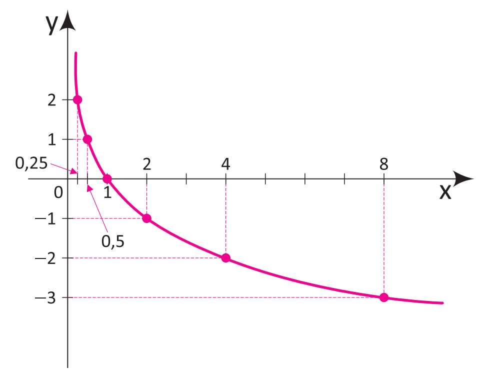
- O seu domínio é o conjunto $D(f) = IR_+^*$.
- A sua imagem é o conjunto $Im(f) = IR$.

- É uma função crescente e bijetora.
- Passa pelo ponto (1, 0).
- Quando x aumenta indefinidamente, temos que y = f(x) também aumenta indefinidamente.
- Quando x se aproxima cada mais de zero, temos que y = f(x) diminui indefinidamente.

2º caso: $0 < b < 1$, por exemplo, a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Para esboçar esse gráfico podemos montar uma tabela numérica escolhendo alguns valores arbitrários para x e calculando os correspondentes valores de y.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	−1	−2	−3

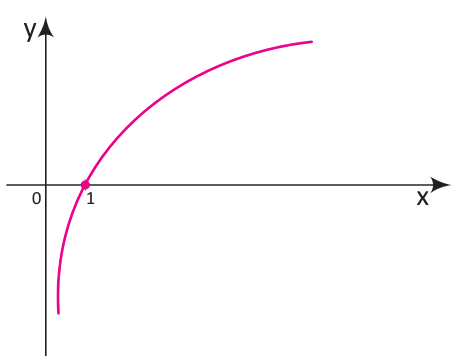


Assim, para o gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, temos que:

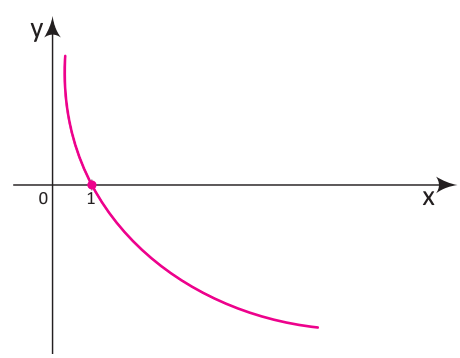
- O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- A sua imagem é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}$.
- É uma função decrescente e bijetora.
- Passa pelo ponto (1, 0).
- Quando x aumenta indefinidamente, temos que y = f(x) diminui indefinidamente.
- Quando x se aproxima cada mais de zero, temos que y = f(x) aumenta indefinidamente.

Assim, de maneira geral, os gráficos de funções do tipo $f(x) = \log_b x$, se comportam de acordo com as ilustrações a seguir:

Para $b > 1$



Para $0 < b < 1$



Portanto, para a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ expressa por $f(x) = \log_b x$, são válidas as seguintes propriedades:

- O gráfico de f é crescente para $b > 1$ e decrescente para $0 < b < 1$.
- O gráfico de f intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0), pois $f(1) = \log_b 1 = 0$.

- O gráfico de f não intercepta o eixo das ordenadas pois, o domínio de f é IR_+^*.
- Para $b > 1$, os valores de $y = f(x)$ diminuem indefinidamente para valores de x cada vez mais próximos de zero.
- Para $0 < b < 1$, os valores de $y = f(x)$ aumentam indefinidamente para valores de x cada vez mais próximos de zero.
- A imagem de f é o conjunto $Im(f) = IR$.

Nessa imagem, temos um molusco marinho chamado *nautilus*. É incrível como sua concha se assemelha a uma curva chamada *espiral logarítmica*.

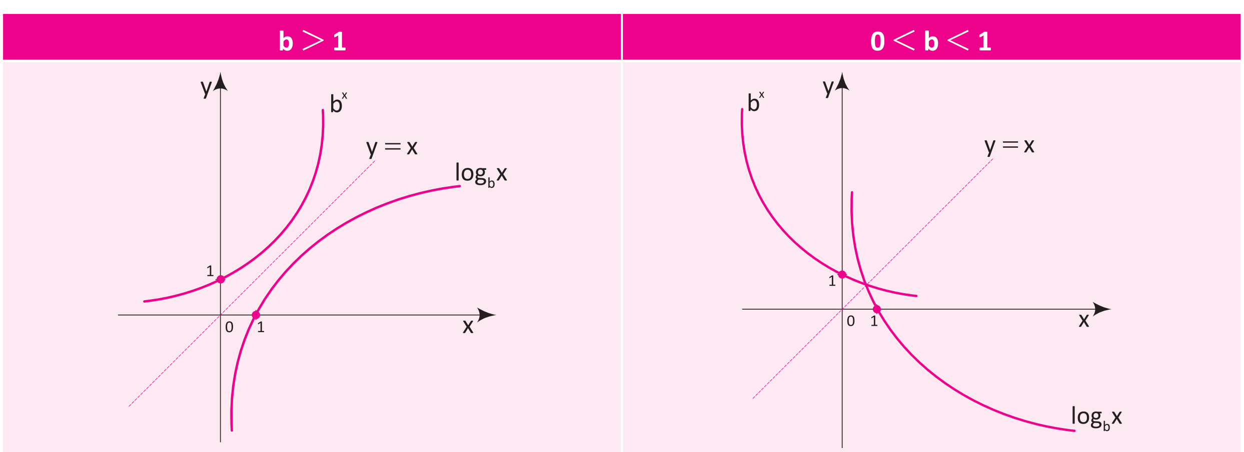
FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

Através da definição de logaritmos, percebe-se que existe uma importante relação entre os logaritmos e as exponenciais e, em especial, entre a função logarítmica e a função exponencial. Observe:

Dada a função bijetora $f: IR \to IR_+^*$ definida pela lei $f(x) = b^x$. Permutando as suas variáveis x e y, e em seguida, isolando a variável y, temos:

- $y = b^x \Rightarrow x = b^y \Rightarrow y = \log_b x \therefore f^{-1}(x) = \log_b x$.

Assim, conclui-se que as funções logarítmicas e exponenciais são inversas entre si. Portanto, seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares). Observe as figuras a seguir:

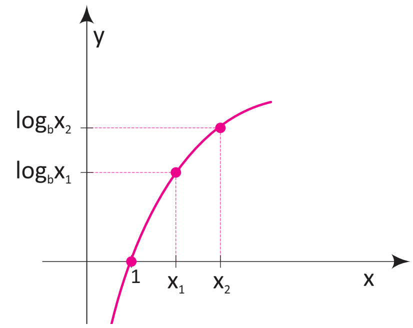


INEQUAÇÕES

Inequações logarítmicas na variável x são aquelas que a incógnita x se apresenta no logaritmando ou na base dos logaritmos dessa inequação. Para resolvê-las, deve-se:

- Estabelecer as condições de existência de cada logaritmo da inequação.
- Resolver a inequação utilizando uma das seguintes propriedades:

1º caso: Para a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, com $b > 1$, temos o seguinte gráfico:

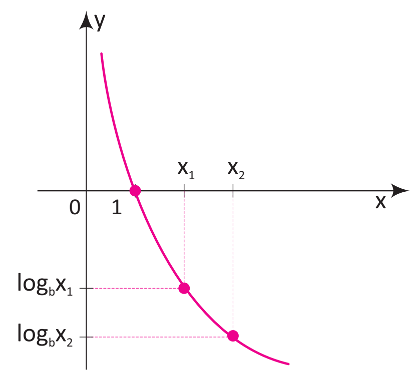


Nesse caso, observe que a função f é crescente, assim, temos que:

$$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$$

Portanto, para resolver uma inequação de base $b > 1$, basta conservar a desigualdade.

2º caso: Para a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, com $0 < b < 1$, temos o seguinte gráfico:



Nesse caso, observe que a função f é decrescente, assim, temos que:

$$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$$

Portanto, para resolver uma inequação de base $0 < b < 1$, basta inverter a desigualdade.

- Verificar se as soluções obtidas na resolução satisfazem as condições de existência.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Utilizando a definição, calcule o valor de cada um dos logaritmos a seguir:

A $\log_5 125$

B $\log_{10} 0{,}01$

C $\log_{\sqrt{2}} 128$

D $\log_{81}\left(\frac{1}{3}\right)$

Resolução:

A $\log_5 125 = x \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $\log_5 125 = 3$

B $\log_{10} 0{,}01 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

Portanto, $\log_{10} 0{,}01 = -2$

C $\log_{\sqrt{2}} 128 = x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 128 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 128$

$2^{\frac{x}{2}} = 2^7 \Rightarrow x = 14.$

Portanto, $\log_{\sqrt{2}} 128 = 14$

D $\log_{81}\left(\frac{1}{3}\right) = x \Rightarrow 81^x = \frac{1}{3} \Rightarrow (3^4)^x = 3^{-1}$

$3^{4x} = 3^{-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Portanto, $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

02| Aplicando as propriedades dos logaritmos, calcule o valor de x que satisfaz a igualdade a seguir, sendo a, b e c números reais positivos.

$\log x = 2.\log a - 3.\log b + \log c$

Resolução:

Aplicando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$\log x = \log a^2 - \log b^3 + \log c$

$\log x = \log\left(\frac{a^2.c}{b^3}\right) \Rightarrow x = \frac{a^2.c}{b^3}$

03| O pH é uma escala muito utilizada na Química para indicar o grau de acidez ou basicidade de uma solução aquosa. Para o cálculo do pH pode-se usar a expressão a seguir:

$pH = \text{colog}\,[H^+]$

Sendo:

- pH um número que varia de 0 a 14
- $[H^+]$ é a concentração de íons de hidrogênio em mol/litro.

Nessas condições, qual o pH de um suco de limão que a concentração de íons de hidrogênio é de 5.10^{-3} mol/litro? Dado: log 5 = 0,7.

Resolução:

Fazendo $[H^+] = 5.10^{-3}$, temos:

$pH = \text{colog}\,[5.10^{3}] = -\log(5.10^{-3})$

$pH = -(\log 5 + \log 10^{-3}) = -(0{,}7 - 3) = 2{,}4.$

Portanto, o pH desse suco de limão é 2,4.

04| A altura h, em metros, de uma árvore de pequeno porte t anos após sua plantação é dada pela expressão a seguir:

$h(t) = 2 + 0{,}5.\log_2(t+1)$, para $0 \leq t \leq 20$

Nessas condições, determine:

A O comprimento dessa árvore no momento em que ela foi plantada.

B O tempo necessário para essa árvore atinja 4 metros de altura após ter sido plantada.

Resolução:

A *Fazendo t = 0, temos:*

$h(0) = 2 + 0{,}5.\log_2(0+1) = 2 + 0 = 2$

Portanto, a árvore foi plantada com 2 metros de altura.

B *Fazendo h(t) = 4, temos:*

$4 = 2 + 0{,}5.\log_2(t+1) \Rightarrow \log_2(t+1) = 4$

$t + 1 = 2^4 \Rightarrow t + 1 = 16 \Rightarrow t = 15$

Portanto, a árvore terá 4 metros após 15 anos.

05| Suponha que atualmente a poupança renda juros compostos de 9% ao ano. Se uma pessoa fizer hoje um único deposito de R$ 300,00 o valor V, em reais, acumulado pela poupança após n meses é dado pela função exponencial a seguir:

$V(n) = 300 . 1{,}09^n$

Após quantos anos o valor acumulado pela poupança será de R$ 900,00? Suponha que nesse período não haverá nenhum deposito ou retirada?

Dados: ln 1,09 = 0,09 e ln 3 = 1,08.

Resolução:

Fazendo V(n) = 900, temos que:

$900 = 300.\ 1{,}09^n \Rightarrow 3 = 1{,}09^n \Rightarrow \ln 3 = \ln 1{,}09^n$

$\ln 3 = n.\ln 1{,}09 \Rightarrow 1{,}08 = 0{,}09n \Rightarrow n = 12.$

Portanto, o valor será de R$ 900,00 após 12 meses.

06| Resolva as inequações logarítmicas a seguir:

A $\log_5(2x-6) < \log_5 12$

B $\log_{\frac{1}{2}}(-x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 7$

C $\log_3(5x-2) \geq 1$

Resolução:

A $\log_5(2x-6) < \log_5 12$

Estabelecendo a condição de existência, temos:

$2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$ **(1)**

Resolvendo a inequação, temos:

$\log_5(2x-6) < \log_5 12 \Rightarrow 2x - 6 < 12 \Rightarrow x < 9$ **(2)**

Observe que ao comparar os logaritmandos, a desigualdade foi mantida.

A solução da inequação é dada pela intersecção de **(1)** *e* **(2)**. *Portanto, S = {x ∈ IR | 3 < x < 9}*

B $\log_{\frac{1}{2}}(-x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 7$

Estabelecendo a condição de existência, temos:

$-x + 2 > 0 \Rightarrow x < 2$ **(1)**

Resolvendo a inequação, temos:

$\log_{\frac{1}{2}}(-x+2) < \log_{\frac{1}{2}} 7 \Rightarrow -x + 2 > 7 \Rightarrow x < -5$ **(2)**

Observe que ao comparar os logaritmandos, desigualdade foi invertida.

*A solução da inequação é dada pela intersecção de **(1)** e **(2)**. Portanto, $S = \{x \in IR \mid x < -5\}$.*

c) $\log_3 (5x - 2) \geq 1$

Estabelecendo a condição de existência, temos:

$5x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$ **(1)**

Resolvendo a inequação, temos:

$\log_3 (5x - 2) \geq 1 \Rightarrow 5x - 2 \geq 3^1 \Rightarrow x \geq 5$ **(2)**

Observe que ao utilizar a definição, desigualdade foi mantida.

*A solução da inequação é dada pela intersecção de **(1)** e **(2)**. Portanto, $S = \{x \in IR \mid x \geq 5\}$.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Utilizando a definição, calcule o valor de cada um dos logaritmos a seguir:

A) $\log_2 \frac{1}{8}$

B) $\log_{10} 0{,}0001$

C) $\log_{25} 125$

D) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}25$

02| Aplicando a definição, calcule o valor das expressões a seguir.

A) $A = \log_{\sqrt{27}} 9 + \log_2 \sqrt[5]{16} + \log_{0,2} 5$

B) $B = \log_{0,3} 0{,}027 - \log_{81} \sqrt[3]{9} - \log_{\sqrt[5]{4}} 32$

03| UFG As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionados pela fórmula:

$$R_2 - R_1 = \log_{10}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

onde M_1 e M_2 medem as energias liberadas pelos respectivos terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando que ocorreram dois terremotos, um correspondente a $R_1 = 6$ e outro correspondente a $R_2 = 4$, determine a razão entre as energias liberadas pelos mesmos.

04| Calcule os valores numéricos de cada uma das expressões a seguir:

A) $2^{\log_2 5 . \log_5 12}$

B) $3^{-\log_3 4 . \log_4 9}$

C) $4^{-\log_{11} 2 . \log_4 11}$

D) $e^{2 . \log_4 5 . \ln 4}$

05| Calcule o valor numérico de cada umas das expressões a seguir:

A) $A = \log_{12} 18 + \log_{12} 8$

B) $B = \log_2 600 - \log_2 25 - \log_2 3$

C) $C = \log_{15} 243 + \log_{15} 625 - \log_{15} 27 - \log_{15} 25$

06| Marcio aplicou R$ 4.000,00 em um fundo de renda fixa que rende 2,4% ao mês. Assim, supondo que não houve novas aplicações ou retiradas, o valor V, em reais, acumulado por Marcio após n meses é dado pela expressão a seguir:

$$V = 4.000 \;.\; 1{,}024^n$$

Após quantos meses inteiros, o valor acumulado por Marcio será superior a R$ 8.000,00? Dado: $\log 2 = 0{,}301$.

07| UFRN Os habitantes de um certo país são apreciadores dos logaritmos em bases potências de dois. Nesse país, o Banco Zig oferece empréstimos com a taxa (mensal) de juros $T = \log_8 225$, enquanto o Banco Zag trabalha com a taxa mensal $S = \log_2 15$. Com base nessas informações:

A) Estabeleça uma relação entre T e S.

B) Determine em qual dos bancos um cidadão desse país, buscando a menor taxa de juros, deverá fazer empréstimo.

08| UFGO A capacidade de produção de uma metalúrgica tem aumentado em 10% a cada mês em relação ao mês anterior. Assim, a produção no mês m, em toneladas, tem sido de $1800.1{,}1^{m-1}$. Se a indústria mantiver este crescimento exponencial, quantos, meses, aproximadamente, serão necessários para atingir a meta de produzir, mensalmente, 12,1 vezes a produção do mês um? Dado: $\log 1{,}1 = 0{,}04$.

09| UFGO Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função $S(t) = 1000.\log_2 (1 + t)$, onde t é o número de anos e S o número de sapatos produzidos, contados, a partir do início de atividade da indústria.

Determine:

A) o número de sapatos produzidos no primeiro ano de atividades da indústria;

B) o tempo necessário para que a produção total seja o triplo da produção do primeiro ano.

10| **UNICAMP** As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

A Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

B Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

T ENEM E VESTIBULARES

01| **UNICAMP** Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = (t_0 - t_{AR}).10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$$

sendo t o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

A $12[\log(7) - 1]$ minutos

B $12[1 - \log(7)]$ minutos

C $12\log(7)$ minutos

D $\dfrac{[1 - \log(7)]}{12}$ minutos

02| **INSPER** Para combater um incêndio numa floresta, um avião a sobrevoa acima da fumaça e solta blocos de gelo de uma tonelada. Ao cair, cada bloco se distancia da altitude em que foi solto pelo avião de acordo com a lei $d = 10t^2$, em que t é o tempo em segundos. A massa M do bloco (em quilogramas) varia, em função dessa distância de queda d (em metros), conforme a expressão $M = 1.000 - 250.\log d$. Se o bloco deve chegar ao chão totalmente derretido, a altitude mínima em que o avião deve soltá-lo e o tempo de queda nesse caso devem ser:

A 10.000 metros e 32 segundos

B 10.000 metros e 10 segundos

C 1.000 metros e 32 segundos

D 2.000 metros e 10 segundos

E 1.000 metros e 10 segundos

03| **UFGO** Em um experimento hipotético com cinco espécies de bactérias em meio de cultura, cada uma com população inicial de 10 células, registraram-se as populações apresentadas na tabela a seguir, uma hora após o início do experimento.

Bactéria	Número de células uma hora após o início
Chlamydia trachomatis	160
Escherichia coli	50
Leptospira interrogans	40
Streptococcus pneumoniae	100
Vibrio cholerae	80

Considerando-se que o número de bactérias duplica a cada geração, define-se o número de geração, n, quando a população chega a N células, pela fórmula

$$N = N_0 \, . \, 2^n$$

em que N_0 é o número inicial de células. O tempo de geração é definido como o tempo necessário para a população dobrar de tamanho, e pode ser obtido dividindo-se o tempo decorrido para a população passar de N_0 a N pelo número de geração correspondente. O bacilo, nesse experimento, causa diarreia e seu tempo de geração, em minutos, foi de: Dado: $\log 2 = 0{,}3$

A 30

B 26

C 20

D 18

E 15

04| **MACK** A expressão $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$ é igual a:

A $\dfrac{13}{2}$

B $-\dfrac{13}{2}$

C 0

D $\dfrac{5}{4}$

E $-\dfrac{19}{2}$

05| UFSM Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2.011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares.

Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t(em anos), por

$$V = 6{,}775 \,.\, 1{,}05^{t-1}$$

com t = 1 correspondendo a 2.011, t = 2 a 2.012 e assim por diante. Em que ano o valor movimentado será igual a 13,55 bilhões de dólares? Dados: log 2 = 0,3 e log 1,05 = 0,02.

A 2.015

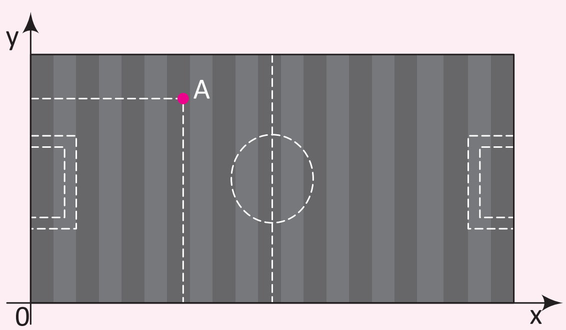
B 2.016

C 2.020

D 2.025

E 2.026

06| UFSM Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.



Para que $A(\log_{10}(x+1)+1, \log_{10}(x^2+35))$ tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que:

A $x > -1$

B $x = 5$

C $x < -1$

D $x = -5$

E $x > 5$

07| UPE Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é $M = \frac{2}{3} \,.\, \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2.011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

A 10^{14} Joules

B 10^{16} Joules

C 10^{17} Joules

D 10^{18} Joules

E 10^{19} Joules

08| FUVEST O número real x que satisfaz a equação logarítmica $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:

A $\log_2 5$

B $\log_2 \sqrt{3}$

C 2

D $\log_2 \sqrt{5}$

E $\log_2 3$

09| FUVEST Seja $f(x) = \log_3(3x+4) - \log_3(2x-1)$

Os valores de x, para os quais f está definida e satisfaz $f(x) > 1$, são:

A $x < \frac{7}{3}$

B $\frac{1}{2} < x$

C $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$

D $-\frac{4}{3} < x$

E $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

10| UFMG Seja $n = 8^{2\log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de n é:

A 5^2

B 8^3

C 2^5

D 5^3

11| FUVEST Se log 8 = a, então log 5 vale:

A a^3

B $5a - 1$

C $\frac{2a}{3}$

D $1 + \frac{a}{3}$

E $1 - \frac{a}{3}$

12| PUC Se log 2 = x e log 3 = y, então log 375 é:

A) $y + 3x$

B) $y + 5x$

C) $y - x + 3$

D) $y - 3x + 3$

E) $3.(y + x)$

13| FUVEST Se x é um número real, $x > 2$ e

$\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

A) $4 - 2\sqrt{3}$

B) $4 - \sqrt{3}$

C) $2 + 2\sqrt{3}$

D) $4 + 2\sqrt{3}$

E) $2 + 4\sqrt{3}$

14| UFES Sabe-se que $\log_{10} 3 = 0{,}477$, aproximado até a terceira casa decimal. O número de algarismos do inteiro $N = 30^{30}$ é igual a:

A) 43

B) 44

C) 45

D) 46

E) 47

15| ESPM Se $\log_{15} 2 = a$ e $\log_{10} 2 = b$, o valor de $\log_{10} 3$ é:

A) $a + \frac{a}{b} - 1$

B) $b + \frac{b}{a} - 1$

C) $a + \frac{b}{a} + 1$

D) $b + \frac{a}{b} + 1$

E) $a + \frac{a}{b} + b$

16| ESPCEX Considerando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48 o número real x, solução da equação $5^{x-1} = 150$ pertence ao intervalo:

A) $]-\infty, 0]$

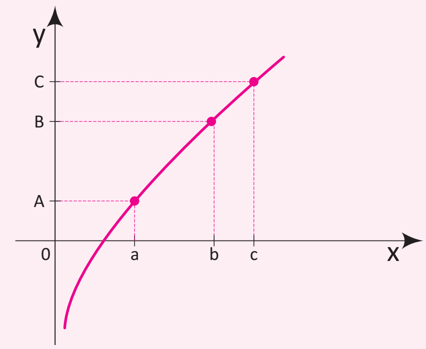
B) $[4, 5[$

C) $]1, 3[$

D) $[0, 2[$

E) $[5, +\infty[$

17| UNESP A figura representa o gráfico de $y = \log_{10} x$. Sabe-se que OA = BC. Então pode-se afirmar que:



A) $\log_a b = c$

B) $a + b = c$

C) $a^c = b$

D) $ab = c$

E) $10^a + 10^b = 10^c$

18| ENEM A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1.979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(m_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1.995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY, Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2.010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.

Acesso em: 1 maio 2.010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

A) $10^{-5,10}$

B) $10^{-0,73}$

C) $10^{12,00}$

D) $10^{21,65}$

E) $10^{27,00}$

FRENTE A
PIRÂMIDES
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 20)

01|
a) $60\ m^2$ c) $96\ m^2$
b) $36\ m^2$ d) $48\ m^3$

02| 72 cm

03| $A_B = 16\ cm^2$, $A_L = 40\ cm^2$, $A_T = 56\ cm^2$ e $V = \frac{16\sqrt{21}}{3}\ cm^3$

04| R$ 23.800,00

05| 50 anos

06|
a) $160\ m^2$ c) $208\ m^3$
b) $320\ m^2$ d) $\sqrt{41}\ m$

07| $h = 4$ cm e $A_L = 180\ cm^2$

08| $132{,}6\ cm^3$

09| $84\sqrt{3}\ m^3$

10| 22 dam

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 21)

01| C	04| D	07| A	10| C
02| B	05| A	08| E	
03| D	06| D	09| D	

FRENTE A
ESFERAS
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 29)

01| $A = 16\pi\ m^2$ e $V = \frac{32\pi}{3}\ m^3$

02| $288\pi\ cm^3$

03| $48\pi\ cm^2$

04| $5.10^8\ km^2$

05| $R = \sqrt{6}$ dm e $V = 8\pi\sqrt{6}\ dm^3$

06| 60 ml

07| $h = 3$ m e $R = 0{,}5$ m

08| $\frac{4\pi R^2}{3}$

09| 6

10| 9,6 cm

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 30)

01| D	04| D	07| E	10| E
02| A	05| C	08| D	11| E
03| A	06| E	09| B	12| E

FRENTE A
INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE UMA ESFERA
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 37)

01| $36\sqrt{3}\ m^2$

02| $A_L = 6\pi r^2$, $A_T = 9\pi r^2$ e $V = 3\pi r^3$

03| $6\sqrt{3}$ cm

04| $3\sqrt{3}$

05| $18\sqrt{2}$

06| $\frac{\pi}{3}$ m

07| 2

08| 6

09| 8 dm

10|
a) $\frac{32\pi}{3}\ m^3$ c) $\frac{8}{3}$ m
b) $16\pi\ m^3$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 38)

01| E	06| E	11| B	16| B
02| D	07| C	12| C	17| E
03| A	08| C	13| A	18| C
04| A	09| C	14| A	19| E
05| D	10| D	15| E	

FRENTE A
POLIEDROS
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 45)

01| 6 faces

02| 12 vértices

03| 30 arestas e 12 vértices

04| 13 arestas e 8 vértices

05|
a) 30 arestas
b) 12 vértices

06| 12

07| 4 faces triangulares e 3 faces quadrangulares

08| 12 faces

09|
a) 14 faces b) $\frac{1}{48}$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 46)

01| A	05| C	09| E	13| C
02| D	06| B	10| A	14| E
03| C	07| A	11| E	15| C
04| C	08| E	12| C	

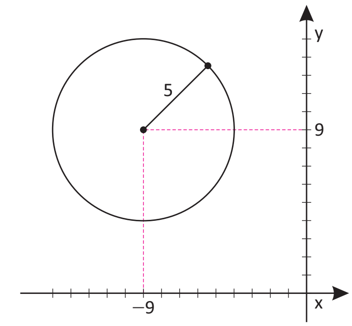
FRENTE B
CIRCUNFERÊNCIA
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 56)

01|
a) $x^2 + y^2 = 4$
b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$
d) $x^2 + (y+5)^2 = 8$

02| $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

03|
a) $C(0, 0)$ e $R = 3$
b) $C(0, 1)$ e $R = \sqrt{5}$
c) $C(-2, 0)$ e $R = 4$
d) $C(3, -4)$ e $R = 1$
e) $C(0{,}5; -1)$ e $R = 1{,}2$
f) $C(-5, -1)$ e $R = 6$
g) $C(-10, 10)$ e $R = 10$

04|
a)



b) $(x+9)^2 + (y-9)^2 = 25$
c) $50\ m^2$

05|
a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$
c) $x^2 + y^2 + x - 0{,}6y - 1{,}1 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2y - 6 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$

06|
a) Q(7, 7)
b) 10π km/h

07| $d = 10$

08|
a) $(2, 1)$ e $(1, 2)$
b) $(3, 1)$ e $\left(\frac{43}{5}, -\frac{9}{5}\right)$
c) $(2, 1)$

09| $4x + 3y - 25 = 0$

10| $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 58)

01| B	06| B	11| A	16| C
02| A	07| B	12| C	17| A
03| A	08| D	13| A	
04| C	09| A	14| E	
05| C	10| C	15| A	

FRENTE C
CIRCUNFERÊNCIA
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 66)

01|
a) Interno. c) Externo.
b) Pertence.

02| $x = \frac{9}{2}$

03| 21 e 11

04| 3, 4 e 5

05| 37,68 cm

06|
a) x = 40° d) x = 59°
b) x = 44° e) x = 30°
c) x = 100° f) x = 125°

07|

a) x = 38°
b) x = 87°
c) x = 54°
d) x = 29°

08|

a) x = 9°
b) x = 24°

09|

a) x = 95°
b) x = 60°
c) x = 140°
d) x = 92°

10| x = 20°

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 69)

01| B	07| E	13| A	19| C
02| A	08| A	14| A	20| E
03| B	09| C	15| B	21| A
04| A	10| D	16| C	
05| B	11| C	17| C	
06| C	12| E	18| C	

FRENTE C

POTÊNCIA DE PONTO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 76)

01|

a) x = 12
b) $x = \frac{63}{2}$
c) $x = 6\sqrt{2}$
d) x = 2
e) x = 1
f) x = 5

02| $\overline{BD} = 17$ e $\overline{CE} = 19$

03| 12

04| 44 dm

05|

a) R = 16 b) R = 13

06| 4 cm

07| 32

08| 3 cm

09| 36 cm

10| 20

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 78)

01| C	04| C	07| C	10| D
02| D	05| A	08| B	11| E
03| B	06| C	09| D	

FRENTE C

POLÍGONOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 85)

01|

a) 9 b) 54

02| 23

03| 170

04| Eneágono

05| Pentadecágono

06| Octógono

07| 900°

08| x = 110°

09| Octógono

10| 1440°

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 85)

01| D	05| B	09| C	13| B
02| B	06| B	10| A	14| B
03| C	07| D	11| C	15| B
04| B	08| E	12| D	

FRENTE C

ÁREAS DAS SUPERFÍCIES PLANAS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 95)

01|

a) F
b) V
c) V
d) V
e) V
f) V
g) V

02| 63 cm

03|

a) 64 cm^2
b) 121 cm^2
c) 75 cm^2

04| 12 cm

05| 73 peças

06|

a) 112 m^2
b) $100\sqrt{3}\ m^2$

07|

a) 240 m^2
b) 720 m^2
c) $66\sqrt{3}\,m^2$

08|

a) $16(4-\pi)dm^2$
b) $25(4-\pi)dm^2$
c) $\frac{9(\pi-2)}{2}m^2$
d) $\frac{25(4-\pi)}{4}cm^2$
e) $\frac{25.(\pi-2)}{2}m^2$
f) $72(\pi-2)cm^2$

09| $32(2\pi-3\sqrt{3})$

10| $32(3\sqrt{3}-\pi)cm^2$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 97)

01| E	06| B	11| C	16| E
02| B	07| B	12| B	17| E
03| B	08| E	13| B	18| E
04| C	09| B	14| E	19| C
05| B	10| A	15| B	20| A

FRENTE D

LOGARITMOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 109)

01|

a) 5
b) 4
c) 4
d) 3

02|

a) $\frac{17}{15}$
b) $-\frac{29}{3}$

03| $M_1 = 100.M_2$

04|

a) 12
b) $\frac{1}{9}$
c) 0,5
d) 25

05|

a) 2
b) 3
c) 2

06| 31 meses

07|

a) $T = \frac{2}{3}S$
b) T

08| 28

09|

a) 1.000 sapatos
b) 7 anos

10|

a) $A(1) = 2, A(7) = 6, B(1) = 3, B(7) = 5$
b) após 3 anos a população da cidade A é maior

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 110)

01| C	06| B	11| E	16| B
02| A	07| D	12| D	17| D
03| B	08| E	13| D	18| E
04| B	09| C	14| C	
05| E	10| D	15| B	

"Conte-me e eu esqueço.
Mostre-me e eu apenas me lembro.
Envolva-me e eu compreendo."

Confúcio

prepara enem

62 3877 3223 | 3877 3222

WWW.GRUPOPREPARAENEM.COM.BR

ISBN 978-85-88249-32-5

CLASSIS EDITORA