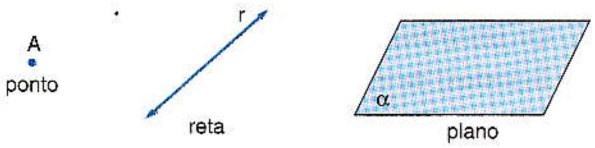
23 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Neste capítulo estudaremos entes geométricos, como ponto, reta, plano, ângulo e outros, sem nos preocuparmos com medidas. Entretanto, para exemplificação e compreensão de algumas noções, podem aparecer figuras que representam sólidos a serem estudados mais detalhadamente em capítulos posteriores, na Geometria Métrica.

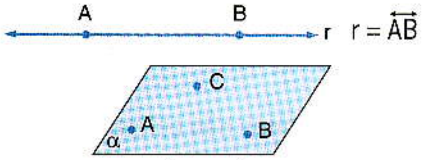
Noções primitivas e postulados

As primeiras noções na Geometria, chamadas noções primitivas, são as de ponto, reta, plano e espaço, conhecidas intuitivamente.



As primeiras propriedades na Geometria, apresentadas a seguir, são chamadas postulados (fatos aceitos sem demonstração) e relacionam as noções de ponto, reta, plano e espaço.

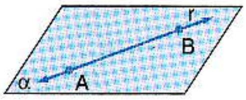
- Postulado da existência
  a) Existe reta, e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
  b) Existe plano, e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.
- Postulado da determinação
  a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
  b) Três pontos não colineares determinam um único plano que contém esses pontos.



$\alpha = (A, B, C)$

- Postulado da inclusão
  Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.
  Na figura a seguir, temos:

$$(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$$



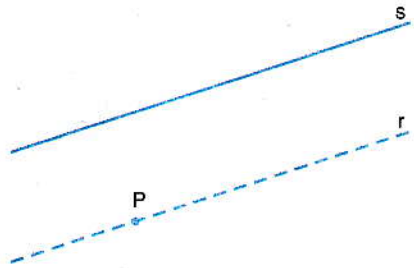
- Postulado das paralelas
  Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.
  Na figura abaixo, dada a reta *r*, temos: $P \in s$, $s \,/\!/\, r$, *s* é única.

Esse postulado, conhecido também como postulado de Euclides (300 a.C.), é a propriedade que caracteriza a Geometria Euclidiana.

Determinação de retas e planos

Retas

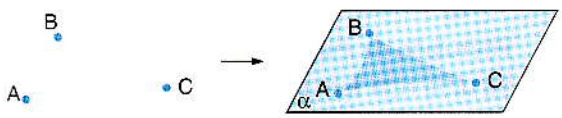
Além da maneira indicada no item *a* do postulado da determinação, uma reta pode ser determinada por um ponto e uma direção. Para determinar a reta *r*, basta que tenhamos um ponto $P \in r$ e a direção de *r*, dada por uma reta *s*, paralela a *r*.



Planos

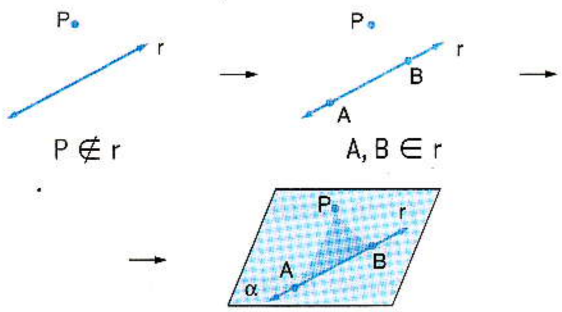
Um plano pode ser determinado de quatro modos, a saber:

- Por três pontos não colineares (item *b* do postulado da determinação)



$\alpha = (A, B, C)$

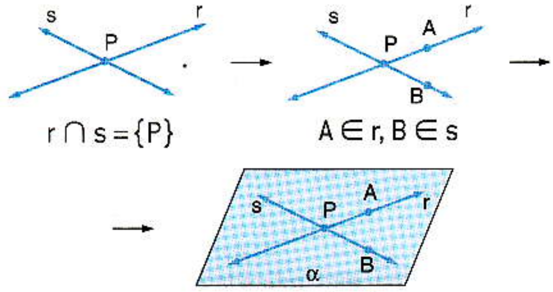
- Por uma reta e um ponto fora dela



$\alpha = (r, P)$

Basta tomar em *r* dois pontos distintos *A* e *B*, e o plano $\alpha = (A, B, P)$ é o plano determinado por *r* e *P*, isto é, $\alpha = (r, P)$.

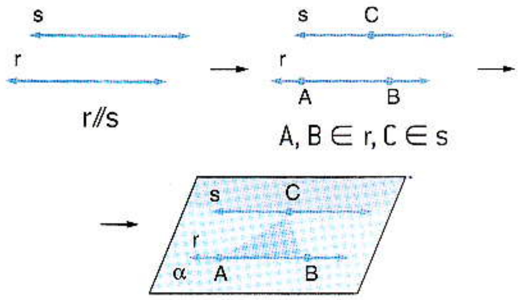
- Por duas retas concorrentes



$\alpha = (r, s)$

Basta tomar um ponto *A* em *r* e um ponto *B* em *s*, ambos distintos de *P*, e o plano $\alpha = (A, B, P)$ é o plano determinado por *r* e *s*, isto é, $\alpha = (r, s)$.

- Por duas retas paralelas distintas

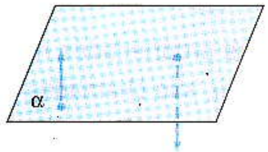


$\alpha = (r, s)$

Basta notar que duas retas distintas paralelas são coplanares; portanto, estão num plano. Para perceber que o plano é único, tomamos dois pontos distintos, *A* e *B*, numa das retas e um ponto *C* na outra. Assim, o plano $\alpha = (A, B, C)$ é o plano determinado por *r* e *s*, isto é, $\alpha = (r, s)$.

Observe a seguinte analogia entre os entes geométricos citados:

- Um ponto divide a reta em duas semi-retas (opostas) de mesma origem.
- Uma reta divide o plano em dois semiplanos (opostos) de mesma origem.
- Um plano divide o espaço em dois semi-espaços (opostos) de mesma origem.



exemplo 1

Vamos resolver e comentar um teste para elucidar alguns termos.

Classifique como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças:

a) Três pontos distintos determinam um único plano.

b) Os vértices de um triângulo são coplanares.

c) Se três pontos são coplanares, então eles são colineares.

d) Por três pontos distintos de uma circunferência passam infinitos planos.

Respostas e justificativas:

a) Falsa. Os três pontos distintos podem estar numa mesma reta e nesse caso eles não determinam um único plano (figura 1). Os três pontos precisariam não ser colineares para que ficasse determinado um único plano (figura 2).

b) Verdadeira. Os vértices de um triângulo são três pontos não colineares. Eles determinam um plano que contém o triângulo (figura 2).

c) Falsa. Três pontos podem ser coplanares sem estarem na mesma reta (figura 2).

d) Falsa. Três pontos de uma circunferência jamais podem estar alinhados. Assim, determinam um único plano (figura 3).

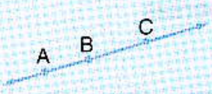


figura 1

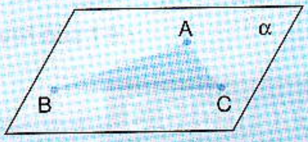


figura 2

figura 3

exemplo 2

Vejamos quantos são os planos determinados por três retas, duas a duas concorrentes, todas passando por um mesmo ponto.

Sendo a, b e c as retas, há duas possibilidades: ou as retas estão num mesmo plano α (figura 1) ou os planos $\alpha = (b, c)$, $\beta = (a, c)$ e $\gamma = (a, b)$ estão determinados (figura 2).

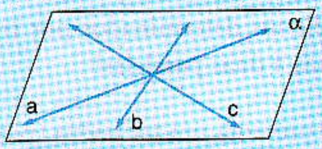


figura 1

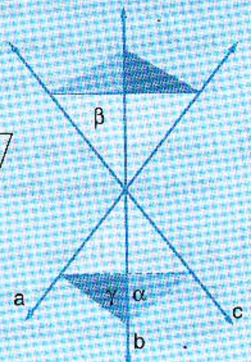


figura 2

Logo, as três retas determinam um ou três planos.

exercícios

1. Classifique cada sentença como verdadeira (V) ou falsa (F):

a) Dado um ponto, existe uma única reta passando por ele.

b) Dado um ponto, existe uma reta passando por ele.

c) Dado um ponto, existem infinitas retas que o contêm.

d) Dados dois pontos distintos, existe um plano que os contém.

e) Três pontos não alinhados determinam três retas.

f) Três pontos não alinhados determinam um plano.

g) Três retas determinam um plano.

h) Um ponto e uma reta que não o contém determinam um plano.

i) Por três pontos de um círculo passa um único plano.

j) Os semi-espaços são em número de dois.

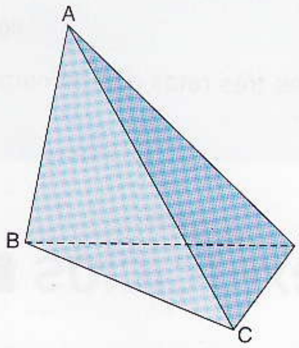
2. Quatro pontos, A, B, C e D, não são coplanares. Quantos planos eles determinam? Quais são?

3. É comum encontrarmos mesas com quatro pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam, obrigando a colocação de um calço em uma das pernas. Com base no que você estudou até aqui, explique por que isso acontece.

4. Quantos planos são determinados por três retas distintas, duas a duas concorrentes e que não passam por um mesmo ponto?

5. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas paralelas?

6. A figura abaixo representa um tetraedro (pirâmide de quatro faces). Quantos são os planos representados nessa figura? Quais são eles?



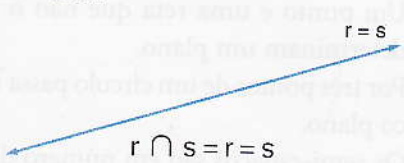
Posições relativas

Entre duas retas

Duas retas do espaço podem guardar entre si as seguintes posições relativas: coincidentes, concorrentes, paralelas e reversas.

Coincidentes

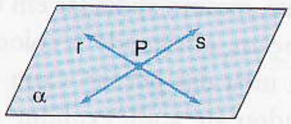
Duas retas são coincidentes quando equivalem a uma única reta.



$r \cap s = r = s$

Concorrentes

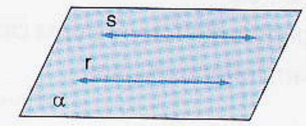
Duas retas são concorrentes quando têm um único ponto comum.



$r \cap s = \{P\} \quad r \subset \alpha, s \subset \alpha \quad \alpha = (r, s)$

Paralelas

Duas retas distintas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto comum.



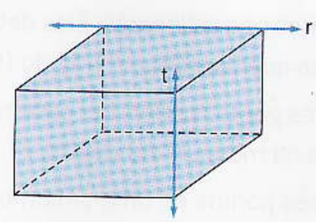
$r \cap s = \varnothing \quad r \subset \alpha, s \subset \alpha \quad \alpha = (r, s)$

Reversas

Duas retas distintas são reversas quando não existe plano que as contenha.

A figura abaixo representa um bloco retangular em que todas as faces são retângulos.

Observe as retas r e t representadas sobre o bloco:



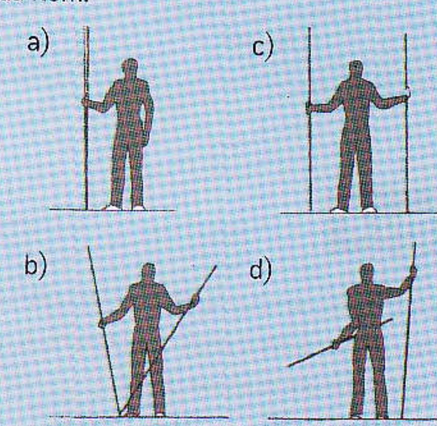
$r \cap t = \varnothing$

Não existe plano que contenha r e t.

r e t são reversas

exemplo 3

Utilizando-se de duas balizas um homem mostra as quatro posições relativas entre duas retas. Identifique qual é a posição ilustrada em cada item.



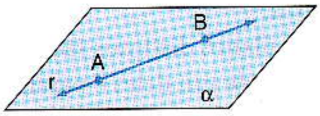
No item *a*, as retas são coincidentes.
No item *b*, as retas são concorrentes.
No item *c*, as retas são paralelas.
No item *d*, as retas são reversas.

Entre reta e plano

Uma reta e um plano podem ter as seguintes posições relativas:

Reta contida no plano

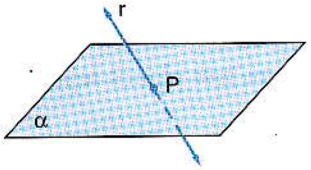
Uma reta está contida num plano quando todos os pontos da reta pertencem ao plano. (Reveja o postulado da inclusão, no início do capítulo)



$r \subset \alpha \quad r \cap \alpha = r$

Reta e plano concorrentes (ou secantes)

Uma reta e um plano são concorrentes ou secantes quando têm um único ponto comum.



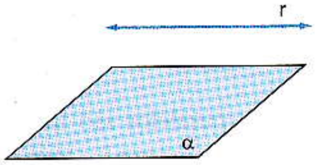
$r \cap \alpha = \{P\}$

r fura α em *P*

P é o traço de *r* em α

Reta e plano paralelos

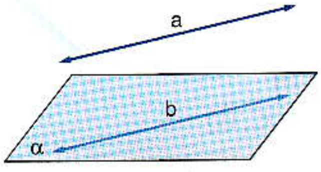
Uma reta e um plano são paralelos quando não têm pontos em comum.



$r \,/\!/\, \alpha \quad r \cap \alpha = \varnothing$

Vejamos agora uma propriedade importante do paralelismo entre reta e plano.

Se uma reta *a* não está num plano α e é paralela a uma reta *b* do plano, então ela é paralela ao plano.



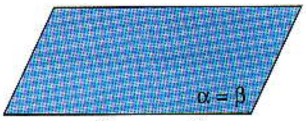
$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ a \,/\!/\, b \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \,/\!/\, \alpha$$

Entre dois planos

No espaço, dois planos podem ter as seguintes posições relativas:

Coincidentes

Dois planos são coincidentes quando equivalem a um mesmo plano.



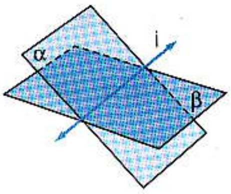
$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Secantes

Dois planos são secantes (ou concorrentes) quando são distintos e têm interseção não vazia.

A interseção de dois planos secantes é uma reta.

A reta comum a dois planos secantes é a interseção deles ou o traço de um deles no outro.



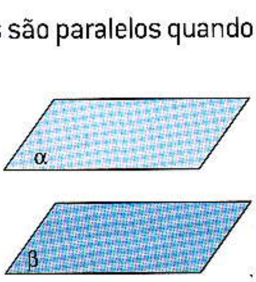
α e β secantes

$\alpha \cap \beta = i$

i é a interseção de α e β

Paralelos

Dois planos são paralelos quando não têm ponto comum.

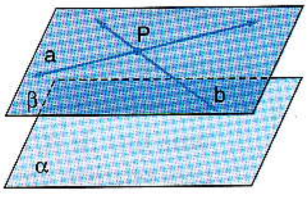


$\alpha \,/\!/\, \beta \quad \alpha \cap \beta = \varnothing$

Vejamos uma propriedade importante do paralelismo entre planos.

Se um plano β contém duas retas concorrentes, *a* e *b*, ambas paralelas a outro plano, α, então esses planos são paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \beta \\ b \subset \beta \\ a \cap b = \{P\} \\ a \,/\!/\, \alpha \\ b \,/\!/\, \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \,/\!/\, \beta$$



exercícios

7. Classifique como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças a seguir:

a) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
b) Duas retas distintas sem pontos comuns são paralelas.
c) Duas retas que determinam um plano são concorrentes ou paralelas.
d) Duas retas reversas podem ter ponto comum.

8. O que se pode afirmar sobre a posição relativa das retas *r* e *s* em cada caso?

a) $r \cap s = \{P\}$
b) $r \cap s = t$
c) $r \cap s = \varnothing$

9. Complete em seu caderno:

a) Duas retas distintas podem interceptar-se em ▲▲.
b) Dois planos distintos podem interceptar-se em ▲▲.
c) Se *A*, *B* e *P* são pontos do plano α e determinam o plano β, então ▲▲.
d) Se três pontos determinam ▲▲, eles também determinam ▲▲.
e) Se duas retas são ▲▲ e não têm ponto comum, elas são ▲▲.
f) Se duas retas distintas são ▲▲ ou ▲▲, elas são coplanares.

10. O que se pode afirmar sobre a posição relativa entre a reta *r* e o plano α em cada caso?

a) $r \cap \alpha = r$
b) $r \cap \alpha = \varnothing$
c) $r \cap \alpha = \{P\}$

11. Classifique como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das afirmações abaixo. A seguir, para cada situação verdadeira, dê a posição relativa entre o plano e a reta em questão.

a) Uma reta e um plano podem ter em comum um único ponto.
b) Uma reta e um plano podem ter em comum exatamente dois pontos.
c) Uma reta e um plano podem não ter pontos em comum.
d) Uma reta e um plano podem ter em comum infinitos pontos.

12. Responda:

a) Se uma reta *r* é paralela a um plano α e *s* é uma reta de α, quais são as possíveis posições relativas entre *r* e *s*?
b) Se *P* é o traço de *r* em α, que contém *s*, quais são as possíveis posições relativas entre *r* e *s*?

13. Julgue se as afirmações abaixo são falsas (*F*) ou verdadeiras (*V*):

a) Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.
b) Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
c) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
d) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.
e) Se duas retas são paralelas a um plano α, elas pertencem ao mesmo semi-espaço determinado por α.
f) Para que, em relação a α, dois planos pertençam ao mesmo semi-espaço, é necessário que os três planos sejam paralelos.

14. Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças abaixo:

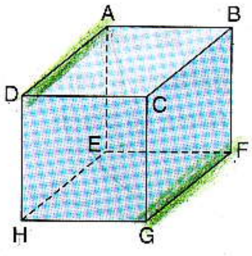
a) Se um plano α é paralelo a uma reta *r*, não existe plano que contenha *r* e alguma reta de α.
b) Se duas retas são reversas, qualquer plano que contenha uma delas intercepta a outra.
c) Sendo α e β dois planos secantes de modo que $\alpha \supset r$ e $\beta \supset s$, podemos ter $r \cap s \neq \varnothing$.
d) Três planos que se interceptam dois a dois podem não ter ponto em comum.

15. Se dois planos paralelos são interceptados por um outro plano, o que ocorre com as interseções?

16. A figura abaixo mostra um sólido geométrico, o cubo, em que todas as faces são quadradas.

a) Dê a posição relativa entre:

1. $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$
2. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
3. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EH}$
4. $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{BF}$
5. (A, B, D) e (C, F, G)
6. (A, G, E) e $\overleftrightarrow{DH}$
7. (A, D, H) e (B, C, G)



b) Cite quatro pares de retas reversas.

17. Sendo α // β e *r* concorrente com α, o que ocorre entre *r* e β?

18. *r* é uma reta de α e *s* é uma reta de β. Quais são as possíveis posições relativas entre *r* e *s*, sendo α // β?

19. Classifique como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada afirmação:

a) Se uma reta *r* passa através de um plano α, existe em α uma reta *s*, de modo que *r* e *s* são reversas.

b) Se dois planos são secantes, uma reta de um deles e uma reta do outro podem ser concorrentes.

c) Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um deles e uma reta do outro podem ser concorrentes.

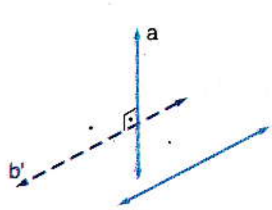
d) Se dois planos são secantes, uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.

Perpendicularidade

Retas ortogonais

Duas retas são ortogonais quando são reversas e a paralela a uma delas, conduzida por um ponto da outra, é perpendicular a esta.

Notemos que *a* e *b* são reversas, e se uma reta *b'*, paralela à reta *b* e concorrente com *a*, é perpendicular à reta *a*, então as retas *a* e *b* são ortogonais.



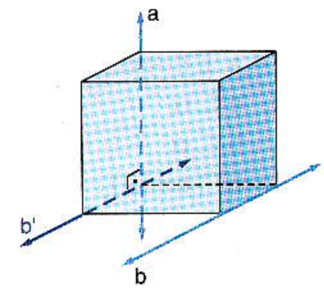
"perpendicular"

a ⊥ b'

a ⊥ b

"ortogonal"

Para facilitar o entendimento, veja o cubo da figura:



a ⊥ b'   a ⊥ b

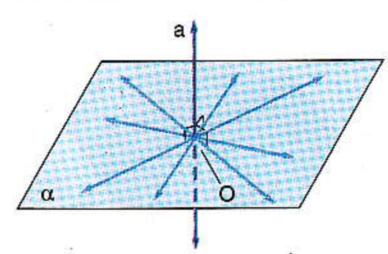
(Reveja o exercício 14, itens *b* e *d*)

Se duas retas formam ângulo reto entre si, são:

- ortogonais, se forem retas reversas;
- perpendiculares, se forem retas coplanares.

Reta e plano perpendiculares

Uma reta concorrente com um plano, num ponto *O*, é perpendicular ao plano quando é perpendicular a todas as retas do plano que passam por *O*.



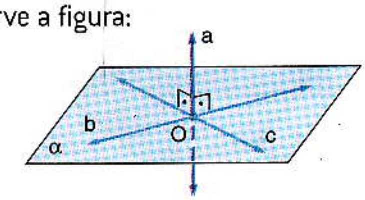
O ponto *O* é chamado pé da perpendicular.

A definição impõe, como condição, que a reta *a* seja perpendicular a todas as retas de α que passam por *O*, como vemos na figura acima. Na prática, porém, há um modo mais simples de assegurar que a ⊥ α.

Assim, é válida a propriedade:

Se uma reta *a* é perpendicular a duas retas, *b* e *c*, concorrentes de um plano α, então ela é perpendicular ao plano.

Observe a figura:



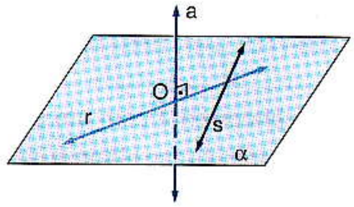
Se forem satisfeitas todas as condições:

$$a \perp b$$
$$a \perp c$$
$$c \subset \alpha$$
$$b \subset \alpha$$
$$b \cap c = \{O\}$$

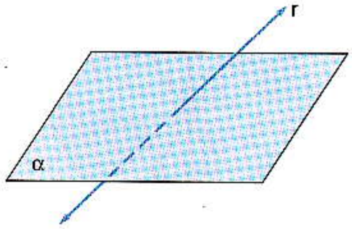
podemos garantir que a reta *a* é perpendicular ao plano, ou seja, $a \perp \alpha$.

Uma decorrência importante sobre a propriedade que acabamos de ver é que se a reta *a* é perpendicular a um plano α em *O*, *a* forma ângulo reto com qualquer reta de α. Sendo *r* e *s* duas retas de α, temos:

- *r* passa por $O \Rightarrow a \perp r$;
- *s* não passa por $O \Rightarrow a \perp s$.



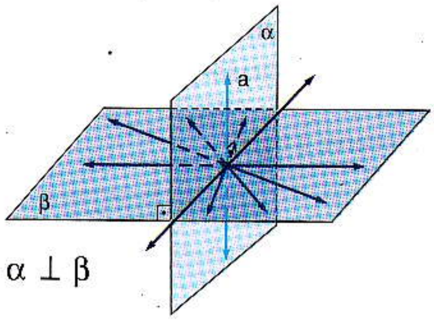
Se a reta *r* passa através do plano α e *r* não é perpendicular a α, dizemos que *r* e α são oblíquos.



Planos perpendiculares

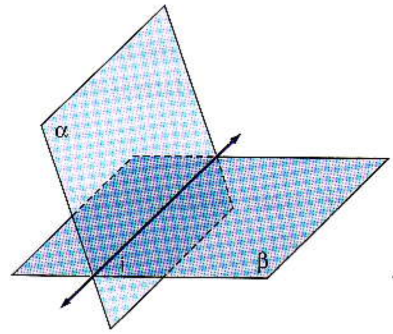
> **Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.**

Na figura abaixo, qualquer plano que contenha a reta *a* é perpendicular ao plano β.



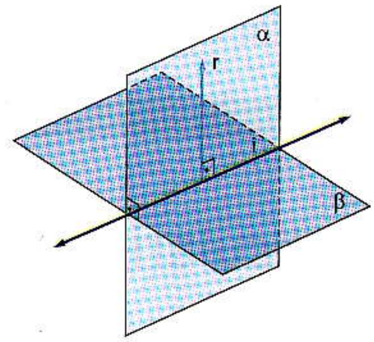
$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ a \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Quando dois planos secantes não são perpendiculares, eles são ditos oblíquos. Veja a figura a seguir.



Assim, vejamos uma propriedade importante sobre a perpendicularidade de dois planos:

> **Se dois planos, α e β, são perpendiculares e uma reta *r* de um deles (α) é perpendicular à interseção *i* dos planos, então ela é perpendicular ao outro plano (β).**



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ i = \alpha \cap \beta \\ r \subset \alpha \\ r \perp i \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \beta$$

exercícios

20. Classifique cada afirmação abaixo como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

a) Se duas retas formam ângulo reto, elas são perpendiculares ou ortogonais.

b) Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas é perpendicular à outra.

c) Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.

d) Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma delas forma ângulo reto com a outra.

21. Verdadeiro ou falso?

a) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.

b) Se $r \perp s$, $s \subset \beta$, então $r \perp \beta$.

c) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda perpendicular à reta dada é paralela ao plano.

d) Duas retas perpendiculares a um plano podem ser reversas.

22. Interprete, por meio de uma figura, a sentença:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = i\\ r \subset \alpha\\ s \subset \beta\\ r /\!/ s\end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ i \quad \text{e} \quad s /\!/ i$$

A seguir, escreva em linguagem corrente o enunciado da proposição.

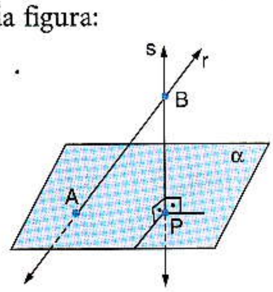
23. Comente a seguinte afirmação: "Se uma reta *r* é perpendicular a uma reta *s* de um plano α, então ela é perpendicular a todas as retas de α e, portanto, é perpendicular a α".

24. Analise a sentença abaixo, atribuindo-lhe *V* (verdadeira) ou *F* (falsa).

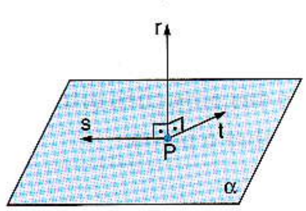
"Dados $r \perp s$, $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$, é possível afirmar que $\alpha \perp \beta$."

25. Faça uma descrição geométrica detalhada de cada figura:

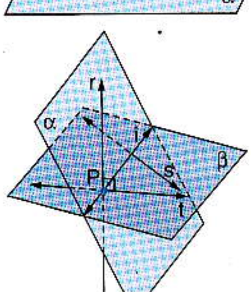
a)



b)



c)



26. (U. F. Uberlândia-MG) Em relação a paralelismo e perpendicularismo no espaço, decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

a) Duas retas distintas que são paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.

b) Duas retas distintas sem pontos comuns são paralelas.

c) Se dois planos distintos são paralelos entre si, então, toda reta de um desses planos é paralela a alguma reta do outro plano.

d) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada está contida ou é paralela ao plano.

27. Complete em seu caderno cada sentença com os símbolos convenientes para torná-la verdadeira:

a) $\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta\\ \pi \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \beta$ ▲▲ π

b) $\left.\begin{array}{l}\beta \perp \alpha\\ \beta \cap \alpha = r\\ s /\!/ r\end{array}\right\} \Rightarrow s$ ▲▲ α e s ▲▲ β

c) $\left.\begin{array}{l}r \perp \alpha\\ \beta \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow r$ ▲▲ β ou r ▲▲ β

d) $\left.\begin{array}{l}r /\!/ \alpha\\ r \perp \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha$ ▲▲ β

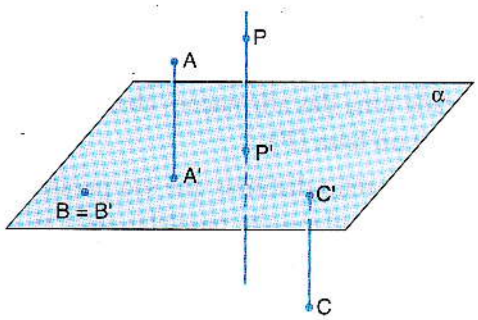
e) $\left.\begin{array}{l}r \neq s\\ r \perp \alpha\\ s \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow r$ ▲▲ s

f) $\left.\begin{array}{l}r /\!/ s\\ s \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow r$ ▲▲ α ou r ▲▲ α

Projeções ortogonais sobre um plano

Projeção de um ponto

A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.



Na figura acima:

- P' é a projeção ortogonal de P sobre α (indicação: $P' = \text{proj}_\alpha P$);
- α é o plano de projeção;
- a reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é a reta projetante de P.

Além disso:

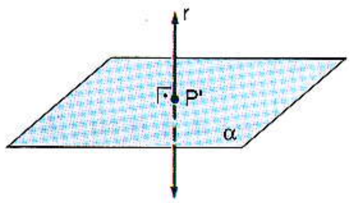
$A' = \text{proj}_\alpha A \qquad B' = B = \text{proj}_\alpha B \qquad C' = \text{proj}_\alpha C$

Projeção de uma reta

> **A projeção ortogonal de uma reta *r* sobre um plano α pode ser um ponto ou uma reta.**

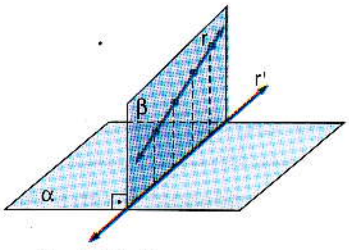
Vejamos:

- Se a reta r é perpendicular ao plano α, sua projeção sobre ele é o traço da reta no plano.



$P' = \text{proj}_\alpha r$

- Se a reta r não é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre α é o traço (interseção) em α, do plano β perpendicular a α, conduzido por r.



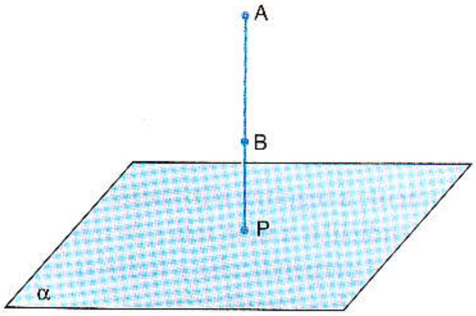
$r' = \text{proj}_\alpha r$
β é o plano projetante de r.

Projeção de um segmento de reta

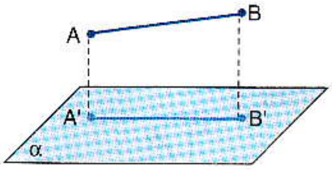
> **A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α pode ser um ponto ou um segmento.**

Vejamos:

- Se o segmento de reta $\overline{AB}$ é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre o plano é um ponto P, que é o traço da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em α.



- Se o segmento de reta $\overline{AB}$ não é perpendicular ao plano α, basta projetar suas extremidades sobre α para obter a projeção do segmento.



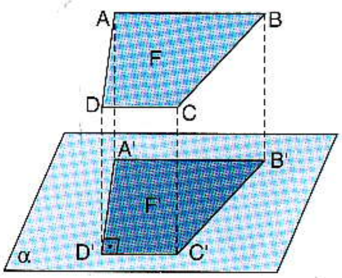
Assim, temos:

$A' = \text{proj}_\alpha A \qquad B' = \text{proj}_\alpha B \qquad \overline{A'B'} = \text{proj}_\alpha \overline{AB}$

Projeção de uma figura

> **A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre o plano.**

Na figura abaixo, temos $F' = \text{proj}_\alpha F$.



No caso em que um plano paralelo a α contém a figura a ser projetada, a figura e sua projeção são congruentes.

Distâncias geométricas

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos distintos, *A* e *B*, é o segmento de reta $\overline{AB}$ ou qualquer segmento congruente a ele.

Se *A* e *B* coincidem (A = B), a distância entre eles é nula.

A distância métrica entre *A* e *B* é a medida do segmento $\overline{AB}$.

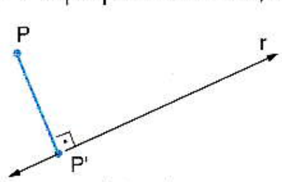
Indicamos por $d_{A,B}$ a distância de *A* a *B*, ou a distância de *B* a *A*.

$d_{A,B} = d_{B,A}$

Distância de ponto a reta

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto ao pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.

Na figura, $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a *r*, com *P'* em *r*.



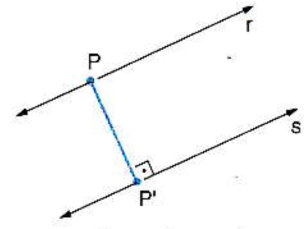
$d_{P,r} = d_{P,P'}$

Indicamos por $d_{P,r}$ a distância de *P* a *r*, ou a distância de *r* a *P*. Ela pode também ser indicada por $d_{P,P'}$.

Distância entre retas paralelas

A distância entre duas retas paralelas é a distância de um ponto qualquer de uma delas à outra reta.

Na figura abaixo, temos $P \in r$, $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a *s*, com $P' \in s$.



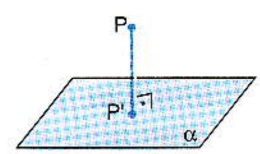
$d_{r,s} = d_{P,s} = d_{P,P'}$

Indicamos por $d_{r,s}$ a distância de *r* a *s*, ou a distância de *s* a *r*. Ela pode também ser indicada por $d_{P,s}$ ou $d_{P',r}$ ou $d_{P,P'}$.

Distância de ponto a plano

A distância de um ponto a um plano é a distância do ponto à sua projeção ortogonal no plano.

Na figura abaixo, temos $P' = proj_{\alpha}\,P$.



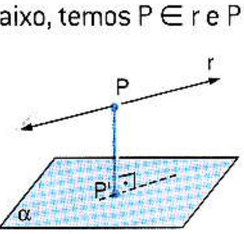
$d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$

Indicamos por $d_{P,\alpha}$ a distância de *P* a α, ou a distância de α a *P*. Ela também pode ser indicada por $d_{P,P'}$.

Distância entre reta e plano paralelos

A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

Na figura abaixo, temos $P \in r$ e $P' = proj_{\alpha}\,P$.

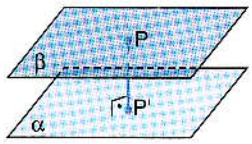


Indicamos por $d_{r,\alpha}$ a distância de *r* a α, ou a distância de α a *r*. Ela pode também ser indicada por $d_{P,\alpha}$, ou $d_{P,P'}$.

Distância entre planos paralelos

> **A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto qualquer de um deles ao outro plano.**

Na figura abaixo, temos $P \in \beta$ e $P' = proj_{\alpha}\, P$.



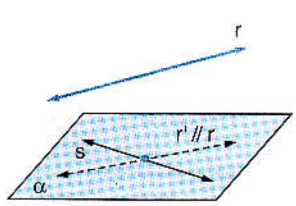
$$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$$

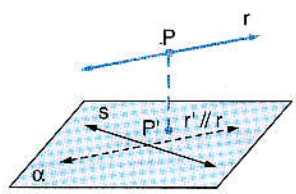
Indicamos por $d_{\alpha,\beta}$ a distância de α a β, ou a distância de β a α. Ela pode também ser indicada por $d_{P,\alpha}$ ou $d_{P,P'}$.

Distância entre duas retas reversas

> **A distância entre duas retas reversas é a distância de um ponto qualquer de uma delas ao plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.**

Para se achar a distância entre duas retas reversas, *r* e *s*, conduz-se por uma delas (por exemplo, *s*) um plano α paralelo à outra (*r*) e se obtém a distância dessa outra reta (*r*) ao plano α.





Na figura à direita, temos $P \in r$ e $P' = proj_{\alpha}\, P$.

Indicamos por $d_{r,s}$ a distância de *r* a *s*, ou a distância de *s* a *r*. Ela também pode ser indicada por $d_{r,\alpha}$, $d_{P,\alpha}$, ou $d_{P,P'}$.

Assim, temos:

- $d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$;
- α é o plano que passa por *s* e é paralelo a *r*.

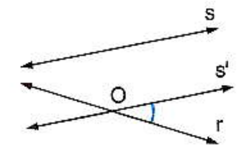
Ângulos

Já é conhecido o conceito de ângulo entre duas retas concorrentes.

Ângulo entre retas reversas

> **Ângulo entre duas retas reversas é aquele formado por uma delas com a reta paralela à outra, conduzida por um ponto da primeira.**

Na figura abaixo, o ângulo das retas *r* e *s* reversas é o ângulo da reta *r* com a reta *s'* paralela à reta *s* por um ponto *O*, pertencente à reta *r*.



r e *s* reversas

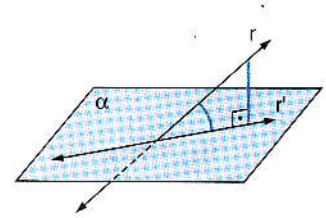
$O \in r$

$O \in s'$ e $s' // s$

$\widehat{rs} = \widehat{rs'}$

Ângulo entre reta e plano

> **Ângulo entre uma reta e um plano oblíquos é aquele formado pela reta com sua projeção ortogonal sobre o plano.**



$r' = proj_{\alpha}\, r$

$\widehat{r\alpha} = \widehat{rr'}$

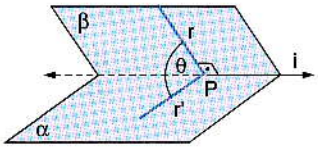
Quando uma reta e um plano são perpendiculares, o ângulo por eles formado é reto.

Quando uma reta está contida num plano ou é paralela a ele, dizemos que o ângulo da reta com o plano é nulo.

Ângulo entre dois planos

Quando dois planos são oblíquos, toda reta de um deles perpendicular à interseção é chamada reta de maior declive desse plano em relação ao outro. Assim, podemos definir:

> **Ângulo de dois planos oblíquos é aquele formado por uma reta de maior declive de um deles com o outro plano.**



α e β são planos oblíquos

$\alpha \cap \beta = i$

$r \subset \beta$ e $r \perp i$

$\widehat{\alpha\beta} = \widehat{r\alpha}$

- $\alpha \cup \beta$, indicado por $\widehat{\alpha i \beta}$, é chamado diedro ou ângulo diedro;
- θ é a medida do ângulo $\widehat{rPr'}$ — chamado seção normal do diedro — e é a medida do diedro.

Além disso:

- o ângulo de dois planos perpendiculares é reto;
- o ângulo entre dois planos paralelos é dito nulo.

exercícios

28. Avalie se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano pode não ser um ponto.

b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é sempre uma reta.

c) Projetando sobre um plano um segmento de reta obtemos um segmento paralelo a ele, ou um ponto.

d) A projeção de um ângulo reto sobre um plano é sempre um ângulo reto.

e) O comprimento da projeção de um segmento sobre um plano pode ser maior que o comprimento do próprio segmento.

f) Existe a possibilidade de, ao projetarmos sobre um plano um quadrado, obtermos um segmento de reta maior que o lado do quadrado.

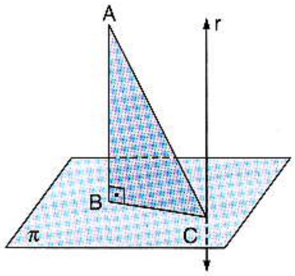
29. Duas retas paralelas r e s são projetadas ortogonalmente sobre o plano α. Quais são as posições relativas das projeções?

30. Dois círculos concêntricos coplanares são projetados ortogonalmente sobre um outro plano. Sabendo-se que a projeção é um segmento de reta, pergunta-se:

a) Qual é a posição relativa entre os planos?

b) Qual é a medida da projeção obtida?

31. Na figura abaixo, estão representados o plano π, que contém $\overline{BC}$, e o plano que contém o triângulo retângulo ABC e é perpendicular a π; r passa por C e é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.



Considerando as definições de distâncias apresentadas no presente capítulo, enumere *todas* as distâncias mostradas na figura.

32. Classifique cada item como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) A distância de um ponto a um plano é a distância do ponto a qualquer ponto do plano.

b) A distância entre um ponto e um plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.

c) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta a um ponto qualquer do plano.

d) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

e) A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto qualquer de um deles a um ponto qualquer do outro.

f) A distância entre dois planos paralelos distintos é igual à distância entre uma reta de um deles e o outro plano.

testes de vestibulares

1. (Ucsal-BA) Sejam duas retas distintas r e s e dois planos distintos α e β.

a) Se $r // s$ e $\alpha // \beta$, então $r // \alpha$.
b) Se $r \perp \alpha$ e $r \perp \beta$, então $\alpha // \beta$.
c) Se $r // \alpha$ e $r \perp s$, então $s // \alpha$.
d) Se $\alpha \perp \beta$ e $r \subset \alpha$, então $r \perp \beta$.
e) Se $r \perp \alpha$ e $r \perp s$, então $s \perp \alpha$.

2. (PUC-SP) Em relação ao plano α, os pontos A e B estão no mesmo semi-espaço e os pontos A e C em semi-espaços opostos. Em relação ao plano β, os pontos A e B estão em semi-espaços opostos, bem como os pontos A e C. É correto concluir que o segmento $\overline{BC}$:

a) é paralelo a $\alpha \cap \beta$.
b) encontra α e β.
c) encontra α, mas não β.
d) encontra β, mas não α.
e) não encontra nem α nem β.

3. (Mackenzie-SP) r, s e t são retas distintas tais que $s \perp r$ e $t \perp r$. Relativamente às retas s e t, é correto afirmar que elas podem ser:

a) unicamente paralelas ou concorrentes.
b) unicamente paralelas ou reversas.
c) unicamente concorrentes ou reversas.
d) paralelas, concorrentes ou reversas.
e) unicamente reversas.

4. (Unit-SE) Considere as afirmações seguintes:

I. Existem retas paralelas contidas em dois planos não paralelos.
II. Se dois planos distintos são paralelos entre si, uma reta de um deles e uma reta do outro podem ser concorrentes.
III. Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

É correto afirmar que:

a) I, II e III são verdadeiras.
b) I, II e III são falsas.
c) apenas I e II são verdadeiras.
d) apenas I é verdadeira.
e) apenas II é verdadeira.

5. (U. E. Londrina-PR) São dadas as proposições:

I. Duas retas distintas determinam um único plano.
II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
III. Se dois planos distintos são paralelos entre si, então toda reta de um deles é paralela a uma reta do outro.

É correto afirmar que *apenas*:

a) I e II são verdadeiras.
b) I e III são verdadeiras.
c) II e III são verdadeiras.
d) I é verdadeira.
e) III é verdadeira.

6. (Unifor-CE) Considere num plano α os pontos A, B, C e D, dois a dois distintos. Se uma reta $\overleftrightarrow{MN}$ é perpendicular a α em D, qual dos ângulos seguintes é reto?

a) $A\hat{D}B$
b) $A\hat{D}N$
c) $A\hat{B}C$
d) $M\hat{N}B$
e) $B\hat{D}C$

7. (UFF-RJ) Considere um plano α, uma reta r concorrente com α, um ponto P que não pertença a r nem a α, e as seguintes afirmações:

I. A reta s, que passa por P, intercepta r e é paralela a α é única.
II. O plano β que contém P e r intercepta α.
III. Qualquer reta que passe por P e seja paralela a α intercepta r.

É correto concluir que:

a) as afirmações I e III são verdadeiras.
b) as afirmações I e II são verdadeiras.
c) as afirmações II e III são verdadeiras.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) todas as afirmações são falsas.

8. (UF-BA) É correto afirmar que:

a) se uma reta r é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α.
b) duas retas distintas, paralelas a um mesmo plano, são paralelas entre si.
c) uma reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta que pertença a esse plano.
d) se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles forma ângulo reto com qualquer reta do outro plano.
e) dois planos paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si.

9. (U. F. São Carlos-SP) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a interseção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

10. (Fuvest-SP) É correta a afirmação:

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda ortogonal a uma delas será paralela à outra.
e) Se duas retas forem ortogonais, toda paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.

11. (Vunesp-SP) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, *r* e *s*, reversas. Seja *t* a perpendicular comum a *r* e a *s*. Então:

a) *t* é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
b) *t* é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
c) *t* é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) *t* é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em *r* e *s*.
e) *t* é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

desafios

1. Dadas duas retas não coplanares, *r* e *s*, descreva, por meio das características dos seus elementos, o conjunto *A* dos planos que contêm *r* e são paralelos a *s*. Quantos elementos *A* possui? Represente a situação por meio de uma figura.

2. A reta *r* contém o ponto *P*, e *Q* é ponto de *s*; se *r* e *s* não se encontram, qual é a interseção dos planos α e β, sendo α = (P, s) e β = (Q, r)?

3. Complete corretamente a sentença e, a seguir, esboce uma figura representativa da situação descrita: Dados três pontos não colineares, o conjunto dos pontos eqüidistantes deles é ▲▲ ao plano que os contém.