RESPOSTAS ESPERADAS
MATEMÁTICA

QUESTÃO 7

a)
De acordo com o gráfico, a uma velocidade de 100 km/h, o veículo percorre 15 km por litro de combustível. Logo, para percorrer 60 km são necessários $\frac{60\ km}{15\ km/l} = 4$ litros de combustível.

b)
Analisando o gráfico, concluímos que a uma velocidade constante de 80 km/h temos a maior quilometragem por litro, 20 km/l. Assim, a maior distância que pode ser percorrida consumindo-se totalmente 50 l de combustível do tanque é igual a $50\ l\ \times 20km/l = 1.000\ km$.

QUESTÃO 8

a)
As possíveis somas obtidas em dois lançamentos de um dado tetraédrico são:

$$\begin{array}{cccc} 1+1=2, & 1+2=3, & 1+3=4, & 1+4=5, \\ 2+1=3, & 2+2=4, & 2+3=5, & 2+4=6, \\ 3+1=4, & 3+2=5, & 3+3=6, & 3+4=7, \\ 4+1=5, & 4+2=6, & 4+3=7, & 4+4=8. \end{array}$$

As somas que resultam em um número primo são: 2 (uma ocorrência), 3 (duas ocorrências), 5 (quatro ocorrências) e 7 (duas ocorrências). Logo, temos um total de $1+2+4+2=9$ maneiras de a soma resultar em um número primo.

b)
A soma de todas as probabilidades deve ser igual a um: $p_1+p_2+p_3+p_4=1$. Escrevendo as probabilidades em função de p_4, temos $p_1=4p_4$, $p_2=2p_4$ e $p_3=4/3\ p_4$. Logo, $4p_4+2p_4+\frac{4}{3}p_4+p_4=1$, o que implica que $p_4\left(4+2+\frac{4}{3}+1\right)=1$, ou seja, $p_4=\frac{3}{25}$. Com esse resultado, podemos calcular as outras probabilidades: $p_1=4\times\frac{3}{25}=\frac{12}{25}$, $p_2=2\times\frac{3}{25}=\frac{6}{25}$ e $p_3=\frac{4}{3}\times\frac{3}{25}=\frac{4}{25}$.

QUESTÃO 9

a)
Calculando $f(-1)=2+3+c=c+5$ e $f(1)=2-3+c=c-1$, temos $f(-1)f(1)=(c+5)(c-1)=c^2+4c-5$ e $f(-1)+f(1)=c+5+c-1=2c+4$. A igualdade $f(-1)f(1)=f(-1)+f(1)$ implica $c^2+4c-5=2c+4$, ou seja, $c^2+2c-9=0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $c=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{2}=-1\pm\sqrt{10}$. Portanto, $c=-1-\sqrt{10}$ ou $c=-1+\sqrt{10}$.

b)
Da igualdade $f(p)=f(q)$ obtemos $2p^2-3p+c=2q^2-3q+c$, ou seja, $2(p^2-q^2)=3(p-q)$. Fatorando essa expressão, temos $2(p-q)(p+q)=3(p-q)$. Como p e q são distintos, $p-q\neq 0$ e, portanto, podemos dividir ambos os lados da equação por $p-q$, obtendo $2(p+q)=3$, ou, ainda, $p+q=3/2$. Logo, como a soma de dois números inteiros é um número inteiro, p e q não podem ser ambos inteiros.

RESPOSTAS ESPERADAS
MATEMÁTICA

QUESTÃO 10

a)

A equação da reta que passa pelos pontos $A = (1,4)$ e $B = (3,2)$ é dada por $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-4}{2-4}$, ou seja, $x + y = 5$. A intersecção dessa reta com a reta r pode ser obtida pela resolução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações temos $(2x + y) - (x + y) = 1 - 5$, ou seja, $x = -4$ e, portanto, $y = 5 - x = 9$. Logo, o ponto de intersecção tem coordenadas $(-4,9)$.

b)

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, $(x_c, y_c) = \left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) = (2,3)$. O raio da circunferência é a metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{(1-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2}$. Logo, a equação da circunferência é dada por $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, ou seja, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$.

QUESTÃO 11

a)

Desenvolvendo a igualdade $A^T A = A A^T$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+a^2 & 1+ab \\ 1+ab & 1+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

Igualando elemento a elemento, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + a^2 = 2, \\ 1 + ab = a + b, \\ 1 + b^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Logo, $a^2 = 1$ e $1 + ab = a + b$. Para $a = -1$, temos $1 - b = -1 + b$, $b = 2$. Para $a = 1$, temos $1 + b = 1 + b$, ou seja, qualquer b real. Portanto, os valores possíveis para a e b são: (i) $a = -1$ e $b = 2$ ou (ii) $a = 1$ e b igual a qualquer número real.

b)

Temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = k\,\cos\theta, \\ 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta = k\,\operatorname{sen}\theta. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = k\,\cos\theta, \\ \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \dfrac{k}{2}\,\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Logo, $k\cos\theta = \frac{k}{2}\operatorname{sen}\theta$, ou seja, $k(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$. Assim, temos duas possibilidades: (i) $k = 0$, implicando $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$, ou seja, $\tan\theta = -1$, ou (ii) $2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$, implicando $\tan\theta = 2$. Portanto, os possíveis valores para $\tan\theta$ são -1 e 2.

RESPOSTAS ESPERADAS
MATEMÁTICA

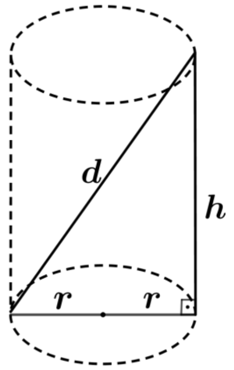
QUESTÃO 12

a)

O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h = 4\pi h = 1\ l = 1.000\ cm^3$. Logo, $h = \left(\frac{250}{\pi}\right) cm$. A área de superfície total do cilindro é dada por $S =\ \pi r^2 +\ \pi r^2\ + 2\pi rh = 4\pi + 4\pi\ + 4\pi \times \frac{250}{\pi} = (8\pi + 1.000)\ cm^2$.

b)

Considere o triângulo retângulo com catetos de comprimentos $2r$ e h e hipotenusa de comprimento d, como ilustra a figura abaixo.



Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = (2r)^2 + h^2 = 16 + h^2$. Como (r, h, d) é uma progressão geométrica, $h/r = d/h$, ou seja, $h^2 = 2d$. Assim, $d^2 = 16 + 2d$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos duas soluções, $d = 1 - \sqrt{17}$ e $d = 1 + \sqrt{17}$. Como d deve ser positivo, a solução é $d = \left(1 + \sqrt{17}\right) cm$.