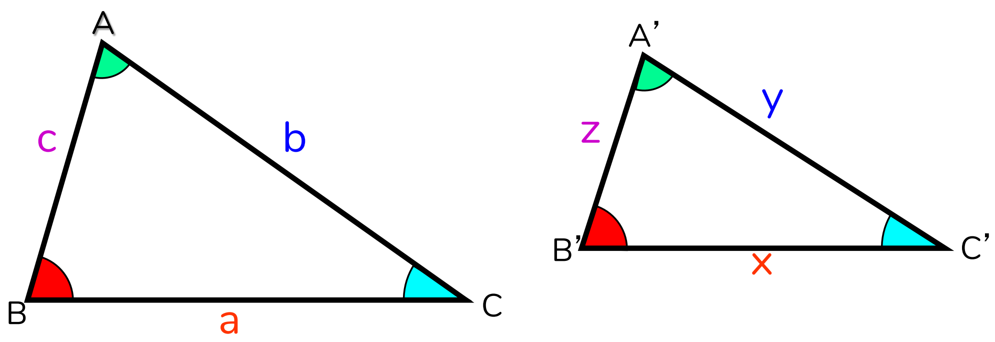
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta apostila vamos falar sobre a famosa **semelhança de triângulos**, mas o que isso quer dizer?

Basicamente, a semelhança de triângulos está relacionada com o fato de eles serem quase o mesmo triângulo, porém “de tamanhos diferentes”. É como se olhássemos dois triângulos, um menor que o outro e, através de um programa de edição de imagens, fosse possível aumentar o menor deles até o tamanho do outro, assim, notaríamos que são iguais. E como faremos para saber se dois triângulos são semelhantes?

Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** se e somente se os seus ângulos internos são **ordenadamente** congruentes e os lados de cada triângulo que estão na mesma posição são **proporcionais**.

Observe abaixo.



Acima, temos dois triângulos cujos ângulos ordenados são congruentes. Pela definição de semelhança, os lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais, ou seja, satisfazem o seguinte:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Vale ressaltar que a igualdade acima também pode ser igualada à uma constante k:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$$

k é chamada de constante de proporcionalidade, também conhecida como razão de semelhança.

Lembrando também de uma propriedade de grandezas proporcionais, podemos ter o seguinte:

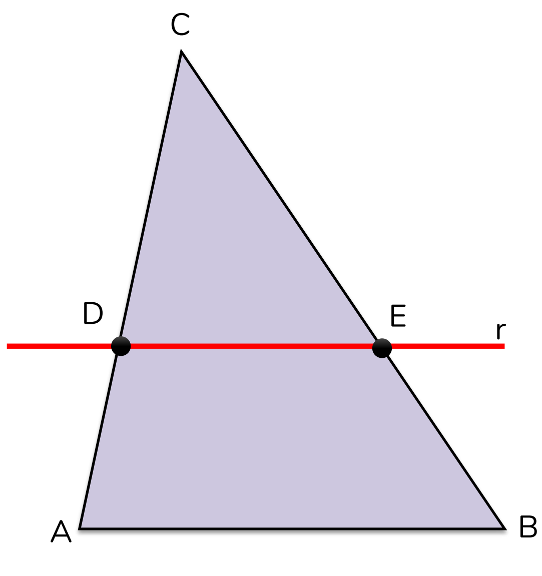
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z}$$

Observação: você também pode ouvir a expressão "lados homólogos" ao invés de lados correspondentes. Homólogo significa ocupar a mesma posição.

Aqui vale ressaltar dois pontos interessantes:

- Dois triângulos semelhantes **não necessariamente** têm lados congruentes, mas sim proporcionais;
- Triângulos que são congruentes também são semelhantes, mas não vale a volta.

Caso, em um triângulo qualquer, traçarmos uma reta sobre ele que seja paralela a um dos lados, o triângulo original e o triângulo interno delimitado por tal reta serão semelhantes. Observe na figura abaixo.



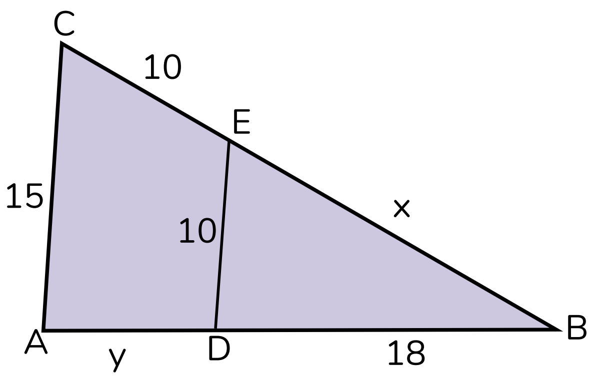
Como a reta traçada sobre o triângulo é paralela ao lado $\overline{AB}$ ($r // \overline{AB}$), então o triângulo maior é semelhante ao triângulo menor.

A notação de semelhança é: ~

Na figura acima temos que: $\Delta ABC \sim \Delta CDE$

Vamos a um exemplo para fixar melhor as ideias.

Exemplo: (UFSC) Na figura abaixo, $\overline{AC}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Nessas condições, determine o valor de x + y.



Solução: Como observado antes, visto que $\overline{AC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, sabemos que os triângulos ΔABC e ΔBDE são semelhantes. Assim:

$$\frac{10+x}{x} = \frac{y+18}{18} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Podemos escrever separadamente as equações, a começar pela que contém a variável x:

$$\frac{10+x}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 20$$

E agora escrevemos a equação que contém a variável y:

$$\frac{y+18}{18} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 9$$

Logo, temos como solução a soma x + y = 20 + 9 = 29.

Observação: perceba que na solução acima, as ordens dos triângulos foram mantidas nas frações.

Vimos anteriormente que a definição de semelhança recai sobre os três ângulos serem ordenadamente congruentes e os lados homólogos serem proporcionais nos triângulos. Podemos nos perguntar, “mas temos algum critério que nos permita descobrir a semelhança de uma maneira diferente?”. A resposta é sim!

CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

Os critérios de semelhança são:

1° critério: dois ângulos ordenados congruentes

Se temos dois triângulos com dois ângulos ordenadamente congruentes, então os dois triângulos são semelhantes.

2° critério: lados proporcionais e ângulo entre eles congruente (LAL)

Se temos um triângulo com dois lados que são proporcionais aos de outro triângulo e o ângulo entre eles for congruente nos dois triângulos, então os dois triângulos são semelhantes.

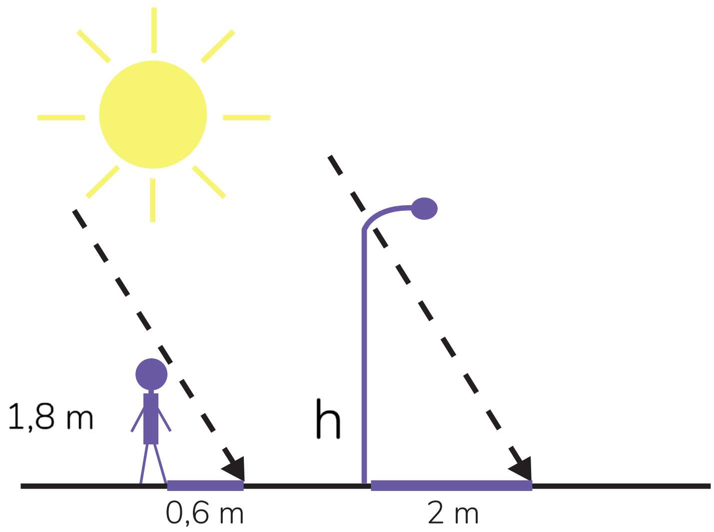
3º critério: lados homólogos proporcionais (LLL)

Se temos um triângulo com os três lados homólogos proporcionais aos de outro triângulo, então os dois triângulos são semelhantes.

Vamos aplicar estes conceitos no próximo exemplo.

Exemplo: (ENEM Adaptada) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminui 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir quanto?

Solução: Para ajudar na solução desse exercício, é muito interessante desenhar a situação para observarmos exatamente como proceder. Observe a figura abaixo.



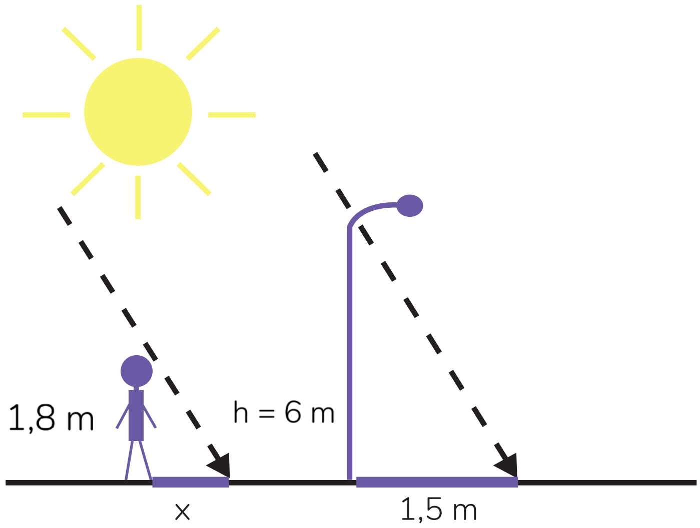
Podemos observar que tanto a pessoa quanto o poste formam um ângulo reto com o chão. Ainda, como o sol está na mesma altura tanto para o chão quanto para o poste, o ângulo formado a partir do sol, passando pela pessoa e o ângulo formado a partir do sol, passando pelo poste são congruentes. Pelo 1º critério visto acima, temos que os dois triângulos são semelhantes. Para encontrarmos a resposta do exercício, vamos achar primeiro a altura h do poste:

$$\frac{h}{1{,}8} = \frac{2}{0{,}6}$$

$$h = \frac{2.(1{,}8)}{0{,}6}$$

$$h = 2.3 = 6\ m$$

Mais tarde, conforme o exercício fala, a sombra projetada do poste diminui. Perceba que, apesar da sombra diminuir, nem a altura do poste nem a da pessoa vão se modificar, assim, podemos observar esta nova situação também:



Como desta vez já possuímos o valor da altura, basta fazermos a semelhança novamente para encontrar o valor da nova sombra projetada da pessoa:

$$\frac{6}{1{,}8} = \frac{1{,}5}{x}$$

$$6x = (1,5).(1,8)$$

$$x = \frac{2{,}7}{6}$$

$$x = 0,45\ m$$

Logo, a sombra projetada da pessoa será de 45 cm.

Finalizamos então o nosso estudo a respeito de semelhança de triângulos.

ANOTAÇÕES