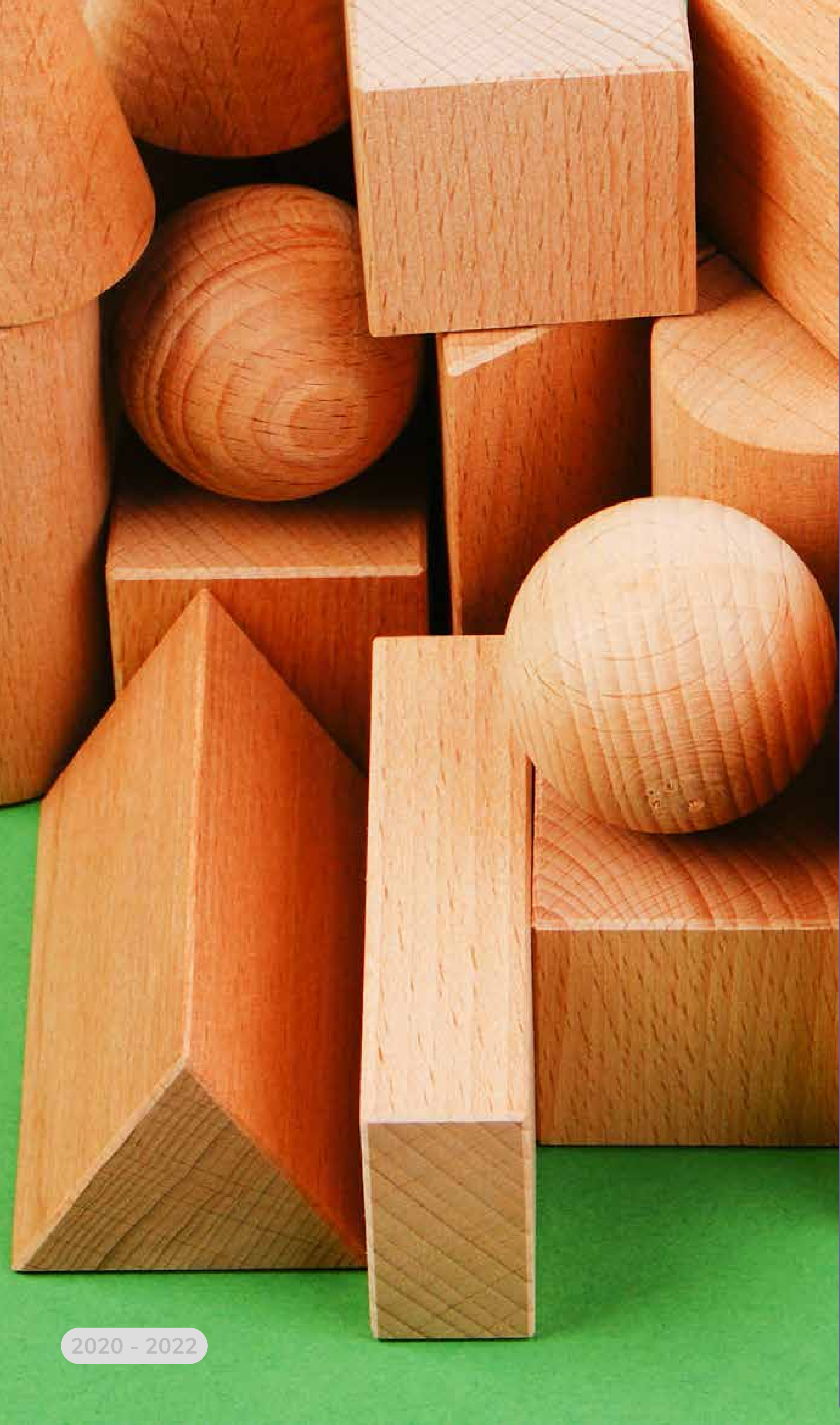
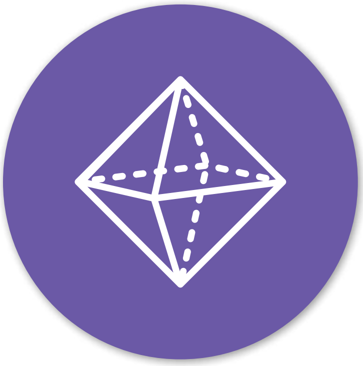


2020 - 2022

GEOMETRIA ESPACIAL



GEOMETRIA ESPACIAL

Vivemos em um mundo tridimensional, então que tal estudarmos as principais figuras tridimensionais e suas propriedades importantes?

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Definições e Retas
2. Paralelismo e Perpendicularismo
3. Projeção Ortogonal
4. Poliedros
5. Prismas
6. Paralelepípedo e Cubo
7. Pirâmide
8. Cilindro
9. Cone
10. Esfera
11. Inscrição e Circunscrição

DEFINIÇÕES E RETAS

DEFINIÇÕES

Em fundamentos de geometria plana, aprendemos algumas definições importantes dos ensinamentos de Euclides, que servirão de ponto de partida para o nosso estudo na geometria espacial: o **ponto**, a **reta** e o **plano**. Vamos recordar um pouco o que vimos.

Um ponto é uma abstração matemática; não há uma definição própria, mas podemos dizer que não há como dividir o ponto em pedacinhos menores do que ele já é. Dizemos ainda que ele é um objeto de dimensão zero. Ao falarmos sobre reta, dizemos que ela é uma "linha" infinita de pontos que "não fazem curva", sendo um objeto de dimensão um. Já o plano é um conjunto de infinitos pontos, porém em duas dimensões. Observe a figura abaixo:

Objetos primitivos de Euclides: ponto, reta e plano.

Vamos lembrar também de alguns axiomas:

1. Em uma reta, e fora dela, existem infinitos pontos.
2. A reta é infinita, ou seja, não possui extremidades.
3. Por um ponto passam infinitas retas.
4. Dados dois pontos quaisquer definimos uma única reta.
5. Três pontos não-colineares determinam um único plano.
6. Se uma reta possui dois pontos distintos que estão num plano, então a reta está contida no plano.
7. Por uma reta passam infinitos planos.

Como dissemos acima, estes axiomas são proposições aceitas sem objeções de forma que os teoremas e resultados da geometria são todos decorrentes destes e de mais alguns que não citamos acima.

Em geometria plana, trabalhamos apenas com duas dimensões. Agora, em geometria espacial, estamos interessados em estudar os objetos e as relações entre eles no espaço, ou seja, em **três** dimensões. Iniciaremos nosso estudo aprofundando um pouco o estudo sobre retas.

RETAS

Classificamos as posições da reta em absolutas (quando estamos falando da própria reta em relação ao espaço) e relativas (quando falamos de uma reta em relação à outra). Vejamos primeiro as posições absolutas:

Posições absolutas:

- **Horizontal**

Quando a reta está na posição horizontal (ou seja, “deitada”).

Uma reta horizontal.

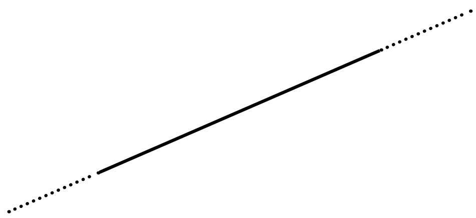
- **Vertical**

Quando a reta está na posição vertical (ou seja, “em pé”).

Uma reta vertical.

- **Oblíqua (ou inclinada)**

Quando a reta está na posição diagonal (ou seja, “inclinada”). Essa inclinação pode ser tanto de um lado como de outro.



Uma reta inclinada.

Posições relativas:

As posições relativas das retas (preste bastante atenção!) são as seguintes:

- **Paralelas coincidentes**

Se duas retas estão sob o mesmo plano e possuem todos os pontos em comum, então elas são paralelas coincidentes. Quando isso ocorre podemos dizer que as duas retas são, literalmente, a mesma reta.

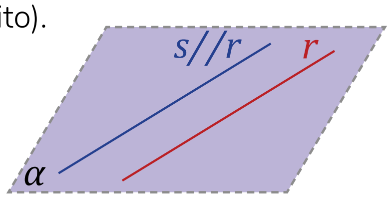
$r \equiv s$

$$r \cap s = r \equiv s$$

As retas r e s são retas paralelas coincidentes e a interseção entre ela é igual a r e também igual a s.

- **Paralelas distintas**

Se duas retas estão sob o mesmo plano e não possuem nenhum ponto de intersecção, então elas são retas paralelas distintas. Isto quer dizer que elas não se tocam (nem no espaço visível e nem no infinito).



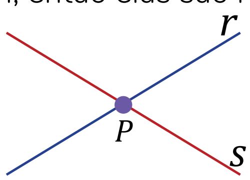
$$r \cap s = \varnothing$$

As retas r e s são retas paralelas distintas e a interseção das retas é um conjunto vazio.

Observação: duas retas paralelas estão sempre à mesma distância uma da outra, não importando qual ponto delas se escolha como referência.

- **Concorrentes**

Se duas retas estão sob o mesmo plano e possuem apenas um ponto de intersecção, ou seja, cruzam em um ponto comum, então elas são retas concorrentes.

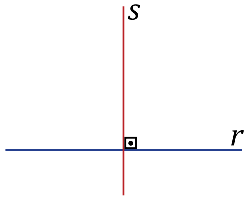


$$r \cap s = \{P\}$$

As retas r e s são retas concorrentes que se interceptam no ponto P.

Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares se elas estão sob o mesmo plano, possuem um único ponto de intersecção e o **ângulo entre elas vale 90°.**



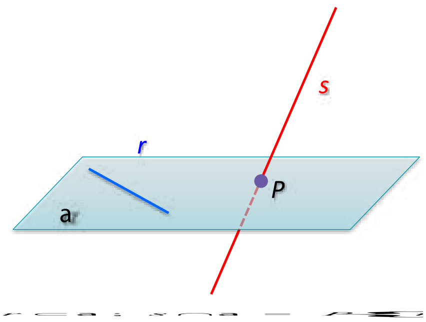
Duas retas perpendiculares.

Observação: Note que retas perpendiculares também são retas concorrentes, por possuírem apenas um ponto de interseção.

Reversas

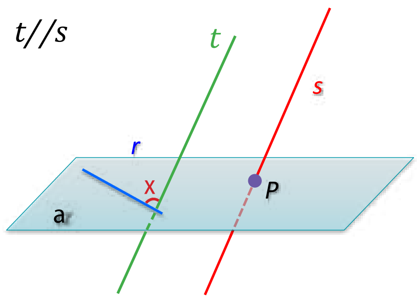
Quando duas retas não são **coplanares**, ou seja, quando não existe um plano que as contém, elas são chamadas de **reversas.**

Observação: duas retas são coplanares quando ambas estão contidas em um plano.



As retas r e s são retas reversas, porque somente a reta r pertence ao plano α.

No caso das retas reversas, se quisermos medir o ângulo entre elas, é necessário considerar uma reta paralela a uma delas que intercepte a outra, e medir o ângulo entre essa nova paralela e a reta interceptada. A figura abaixo denota essa operação, quando consideramos uma reta t, paralela à s, para medir o ângulo entre r e s.

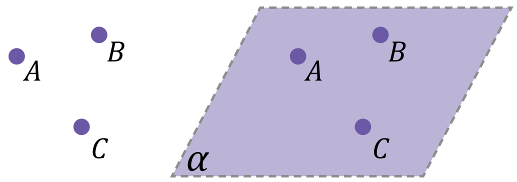


Observação: quando duas retas reversas determinam um **ângulo reto** entre elas, dizemos que elas são **ortogonais.**

DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

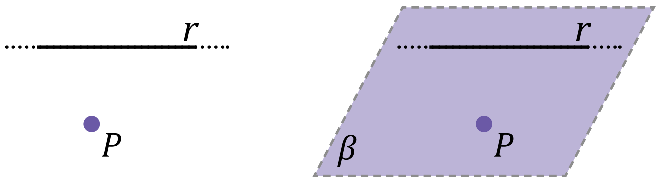
Existem algumas condições que precisam ser atendidas para que possamos definir um plano no espaço. Estudaremos agora quatro destas maneiras de determinar um plano.

1. Três pontos não-colineares (ou seja, que não pertencem à uma mesma reta) determinam um único plano.



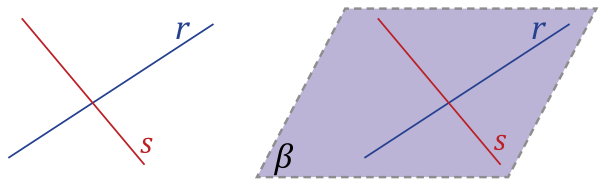
Plano determinado por três pontos não-colineares.

2. Uma reta e um ponto que não pertence à reta determinam um único plano.



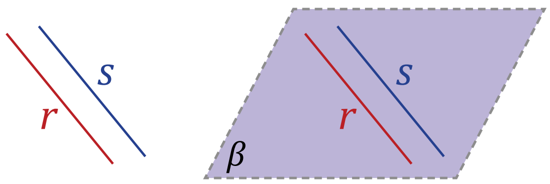
Plano determinado por uma reta e um ponto fora dela.

3. Duas retas concorrentes determinam um único plano.



Plano determinado por duas retas concorrentes.

Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.



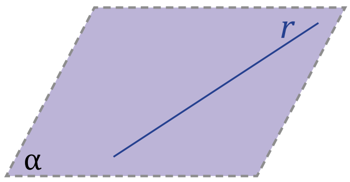
Plano determinado por retas paralelas distintas.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Na geometria espacial, podemos definir algumas posições relativas que existem entre uma reta e um plano. Vamos começar falando da relação de inclusão da reta em um plano.

Definição 1. Para que a reta r esteja contida no plano α, é suficiente que dois pontos distintos de r estejam em α.

A figura abaixo exemplifica a definição de pertencimento.



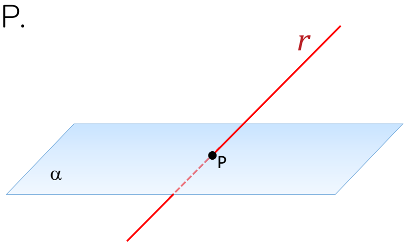
A reta r pertence ao plano α.

Curiosidade: Sabe porque dizemos que uma reta está ou não contida em um plano? Vem lá da teoria de conjuntos, pois como a reta é um conjunto infinito de pontos e o plano também, estamos tratando de dois conjuntos. E a relação entre dois conjuntos se é a relação de inclusão. Se você não lembra desse conceito, vale a pena dar uma lida nas apostilas de conjuntos.

Em seguida, podemos falar de retas incidentes ao plano.

Definição 2. Dizemos que uma reta incide em um plano se ela possuir apenas um ponto que pertence ao plano.

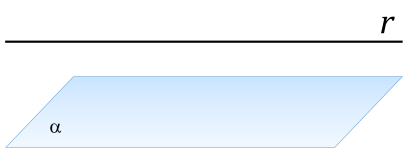
Observe na imagem abaixo que a reta r é incidente ao plano α, pois a interseção entre ambas é o apenas o ponto P.



A reta r incide no plano α.

Por fim, falaremos do conceito de reta paralela ao plano. Em geometria plana é aprendido sobre uma reta ser paralela à outra, e a ideia não muda muito quando estamos comparando um plano e uma reta.

Definição 3. Dizemos que a reta r é paralela ao plano α se ela não possuir nenhum ponto em comum com o plano. Conforme mostra a seguinte ilustração:



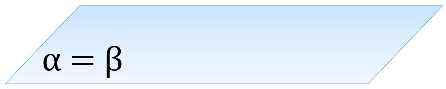
A reta r é paralela ao plano α.

Observação: Você poderia pensar que, se a reta exemplificada acima estivesse um "pouquinho inclinada", ela não tocaria o plano abaixo, logo, não teria um ponto em comum com ele e seria paralela. Mas lembre-se que a reta e o plano **são infinitos**. Assim, ela não tocaria o plano neste espaço da folha visível, mas em algum lugar mais próximo do infinito (fora da nossa visão) ela faria uma intersecção com o plano e, portanto, não podemos considerá-la paralela.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Além de podermos comparar uma reta e um plano, podemos ir além: comparar um plano com outro! Vamos começar com a comparação mais simples, de dois planos coincidentes.

Definição 4. Dizemos que o plano α é coincidente ao plano β se a intersecção entre os dois for igual à α e igual à β. Conforme a seguinte ilustração:



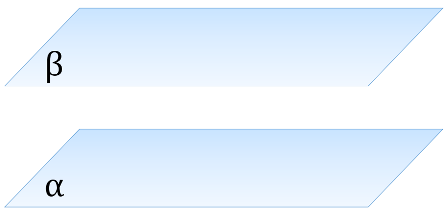
Planos coincidentes então $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Dois planos coincidentes.

Falaremos em seguida da mesma noção de paralelismo aplicada a dois planos distintos.

Definição 5. Dizemos que o plano α é paralelo ao plano β se eles não possuem nenhum ponto em comum.

Observe abaixo a representação de dois planos paralelos.

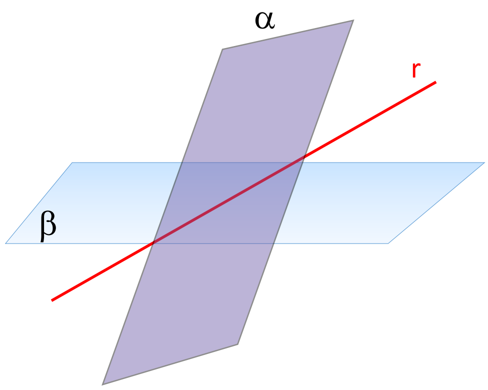


Planos paralelos então $\alpha \cap \beta = \varnothing$

Dois planos paralelos.

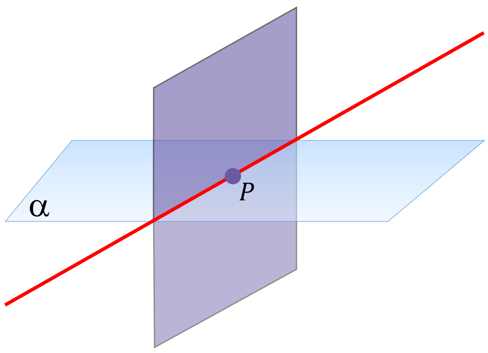
Para a próxima definição, falaremos de planos secantes.

Definição 6. Dizemos que o plano α é secante ao plano β se a interseção entre eles forma uma única reta. Conforme mostrado na figura a seguir.



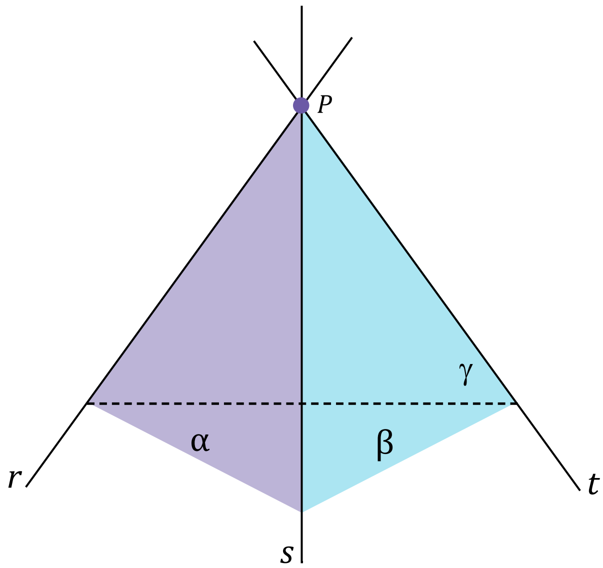
Dois planos secantes.

Vamos aprofundar a noção de intersecção entre planos. Quando analisamos dois planos distintos, se eles possuem um ponto em comum, então eles se interceptam em uma reta, conforme figura abaixo.



Dois planos que se intersectam em uma reta.

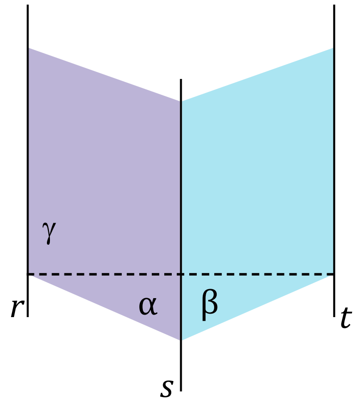
Ao estendermos agora a análise para três planos, podemos ver um resultado interessante: se três planos distintos se interceptam dois a dois em três retas, então, ou elas são concorrentes num mesmo ponto ou são paralelas. Observe a figura abaixo, a qual retratamos o primeiro caso.



r, s e t são concorrentes no ponto P

Três planos que se interceptam dois a dois em três retas concorrentes.

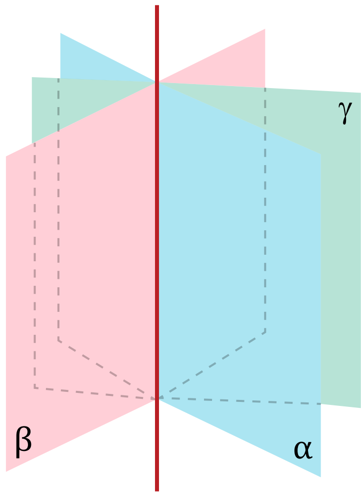
Quando as retas são paralelas distintas, elas podem adquirir o formato da figura mostrada abaixo.



r, s e t são paralelas distintas

Três planos que se interceptam dois a dois em três retas paralelas.

Por último, ainda existe o caso da intersecção entre três planos, em que as três retas são coincidentes (ou seja, a mesma reta), como representado abaixo.



r, s e t são paralelas coincidentes

Três planos que se interceptam dois a dois em três retas coincidentes.

ANOTAÇÕES