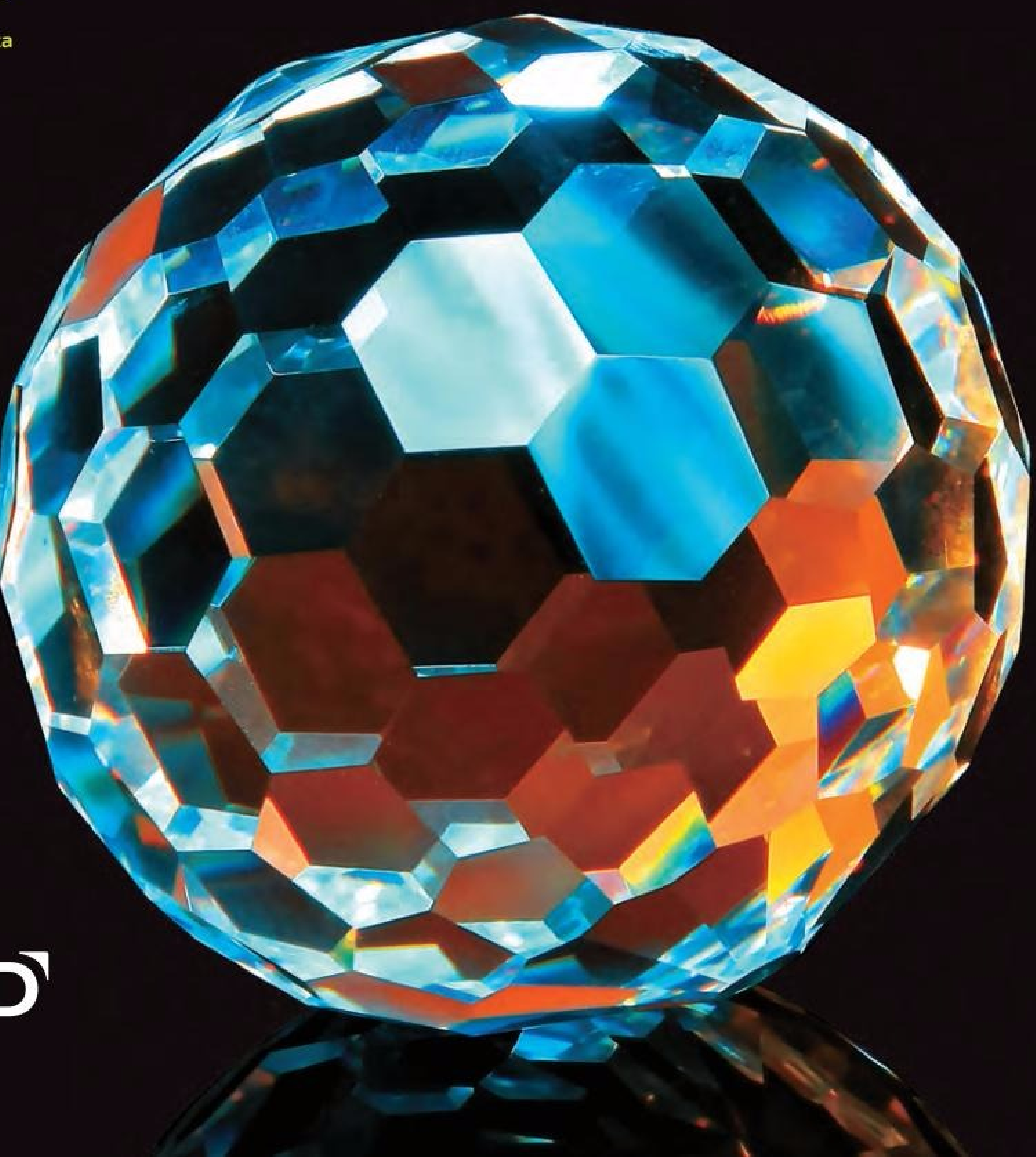
Joamir Souza
Jacqueline Garcia

2

#contato Matemática

Ensino Médio
Componente curricular
Matemática

Manual do Professor



FTD

#contato Matemática 2

Manual do Professor

Ensino Médio

Componente curricular
Matemática

Joamir Roberto de Souza

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino.

Autor de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Pós-graduada em Psicopedagogia pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atuou como professora na rede particular em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no estado do Paraná.

Realiza palestras e assessorias para professores em escolas particulares.

FTD

1ª edição \ São Paulo \ 2016

FTD

Copyright © Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia, 2016

Diretor editorial Lauri Cericato
Gerente editorial Flávia Renata P. A. Fugita
Editora Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editor assistente Marcos Antonio Silva
Gerente de produção editorial Mariana Milani
Coordenador de produção editorial Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte Daniela Máximo
Coordenadora de preparação e revisão Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão Izabel Rodrigues
Revisão Regina Barrozo
Coordenador de iconografia e licenciamento de textos Expedito Arantes
Supervisora de licenciamento de textos Elaine Bueno
Iconografia Marcia Trindade
Coordenadora de ilustrações e cartografia Marcia Berne
Diretor de operações e produção gráfica Reginaldo Soares Damasceno

Produção editorial Scriba Projetos Editoriais
Edição Denise Maria Capozzi
Assistência editorial Marcela M. Bagagini Cardoso, Sheila C. Molina, Karina T. de Melo
Assessoria Antonio Carlos Saraiva Branco
Projeto gráfico Laís Garbelini e Hatadani
Capa Marcela Pialarissi
Imagem de capa ALEXANDER V EVSTAFYEV/shutterstock.com
Edição de ilustrações Maryane Vioto e Camila Ferreira
Diagramação Carlos Cesar Ferreira
Tratamento de imagens José Vitor Elorza Costa
Ilustrações Camila Ferreira, Davi Augusto, Débora Ferreira, Desenhorama Estúdio, Guilherme Casagrandi, José Vitor E. C., Mario Henrique, Maryane Vioto Silva, N. Akira, Renan Fonseca, Ronaldo Lucena, Sergio Lima,Somma Studio
Cartografia E. Cavalcante
Revisão Ana Paula Felippe e Claudia Maietta
Assistência de produção Paulo Ricardo Mercadante, Daiana Melo e Tamires Azevedo
Autorização de recursos Erick L. Almeida
Pesquisa iconográfica Tulio Sanches
Editoração eletrônica Luiz Roberto L. Correa (Beto)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Souza, Joamir Roberto de
#Contato matemática, 2º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2016. – (Coleção #contato matemática)

"Componente curricular: matemática"
ISBN 978-85-96-00310-0 (aluno)
ISBN 978-85-96-00311-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Garcia, Jacqueline da Silva Ribeiro. II. Título. III. Série.

16-02547 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados à

EDITORA FTD S.A.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo a nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas.

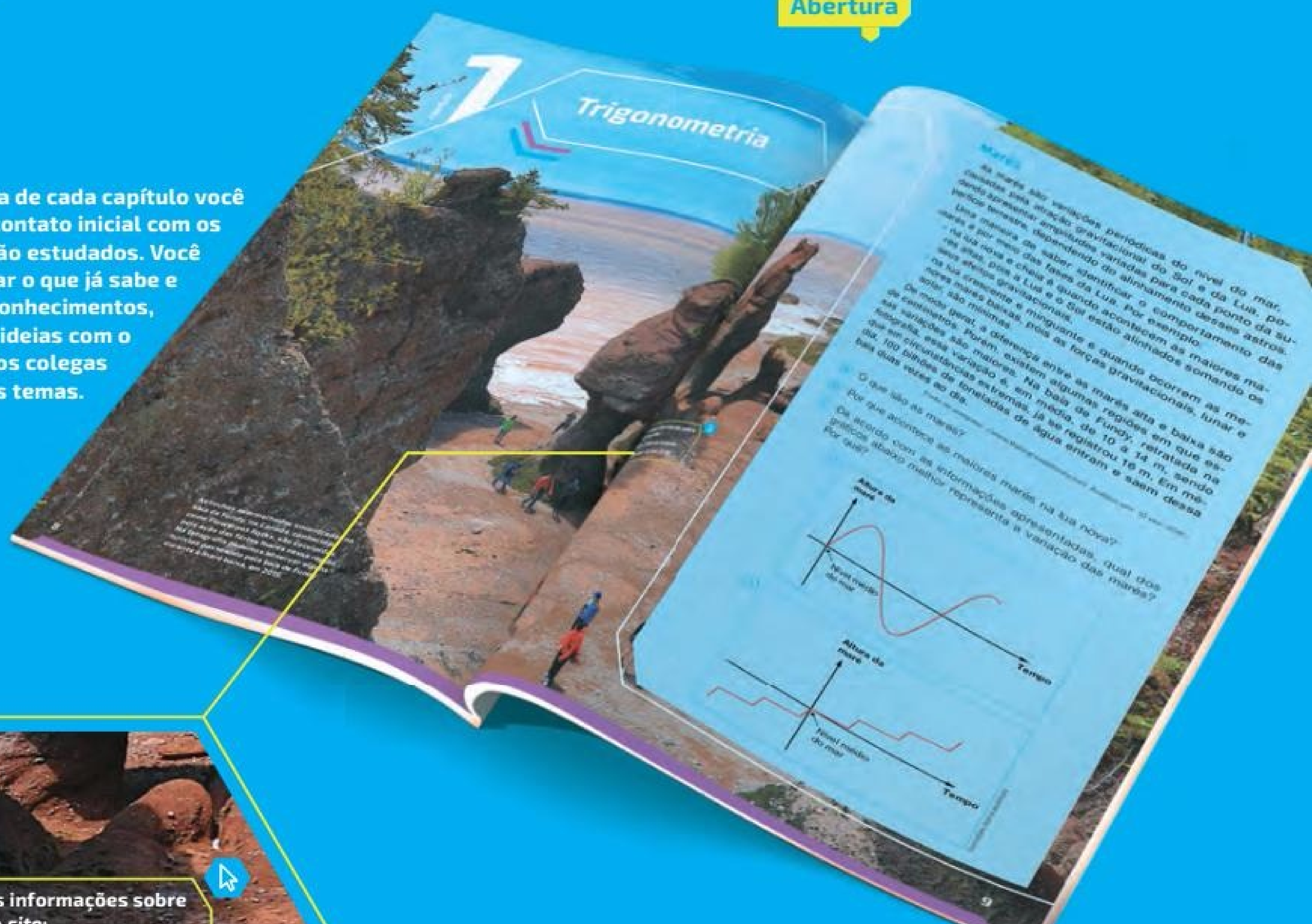
Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso do computador e da promoção da cidadania.

Por fim, desejamos que você, aluno ou aluna, desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso desse material com dedicação e entusiasmo.

Os autores.

Nas **Orientações para o professor**, há sugestões que complementam o livro do aluno e podem auxiliar na sua condução, além das resoluções das atividades propostas. Sugerimos que essas orientações sejam consultadas antes do trabalho com os conteúdos em sala de aula, para serem julgadas e utilizadas conforme a sua realidade e possam contribuir no processo ensino-aprendizagem.

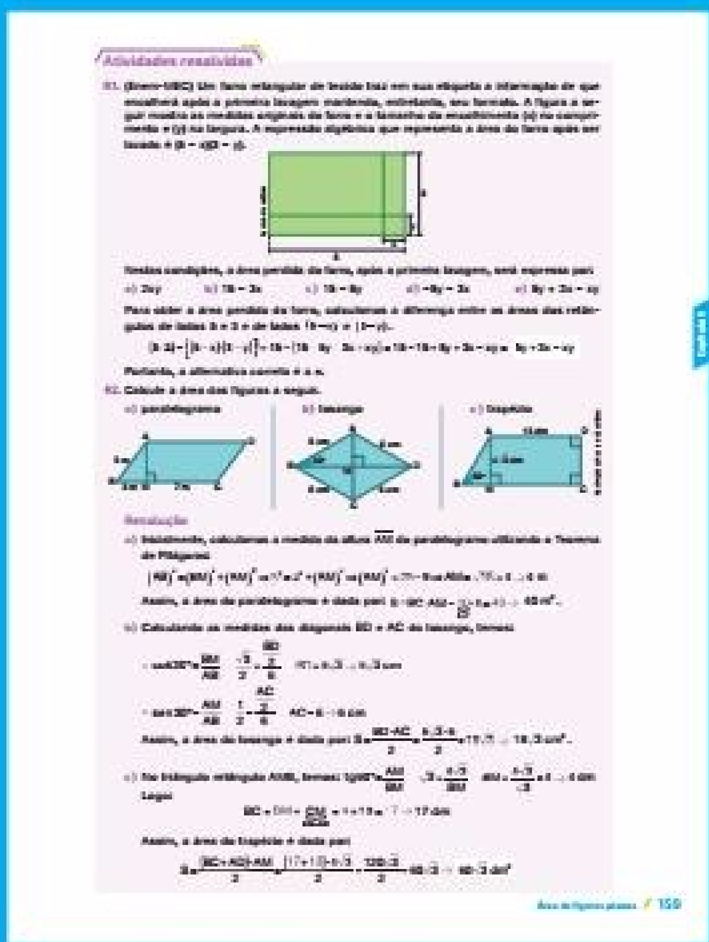
Abertura



Na abertura de cada capítulo você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversos temas.

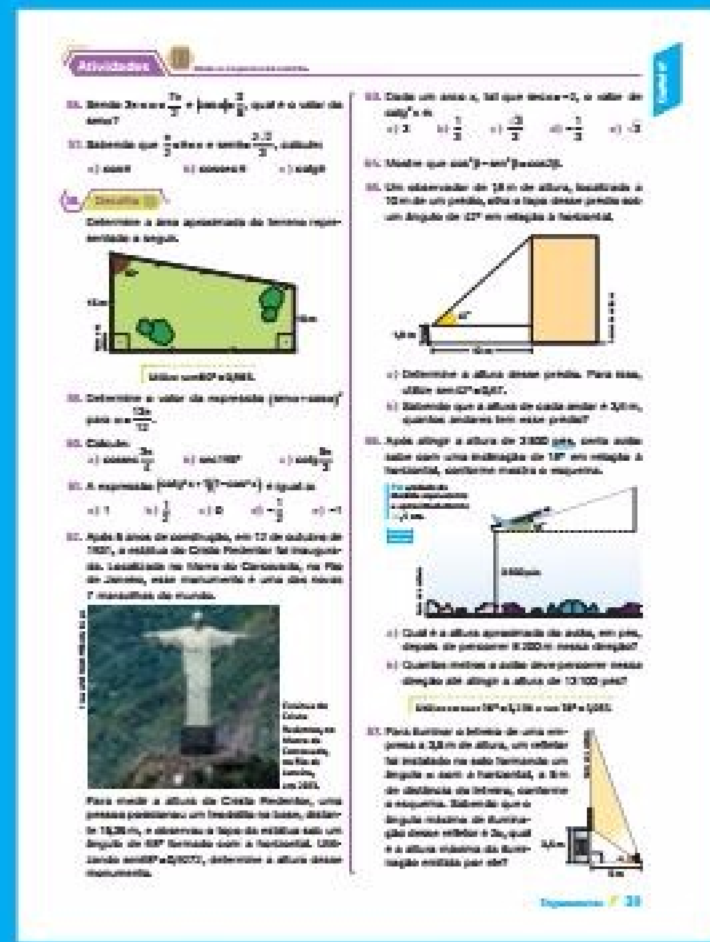
Este quadro traz sugestões de *sites* para você pesquisar e ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado.

Atividades resolvidas



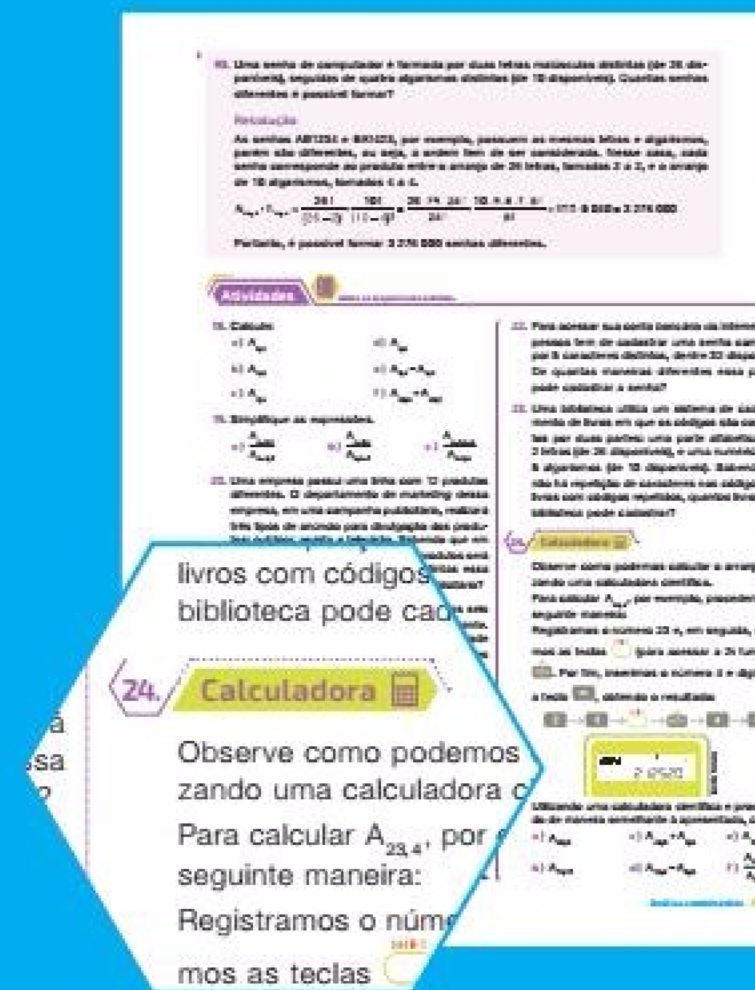
Estas atividades auxiliam a exercitar habilidades e estratégias para resolver todas as outras atividades propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Atividades



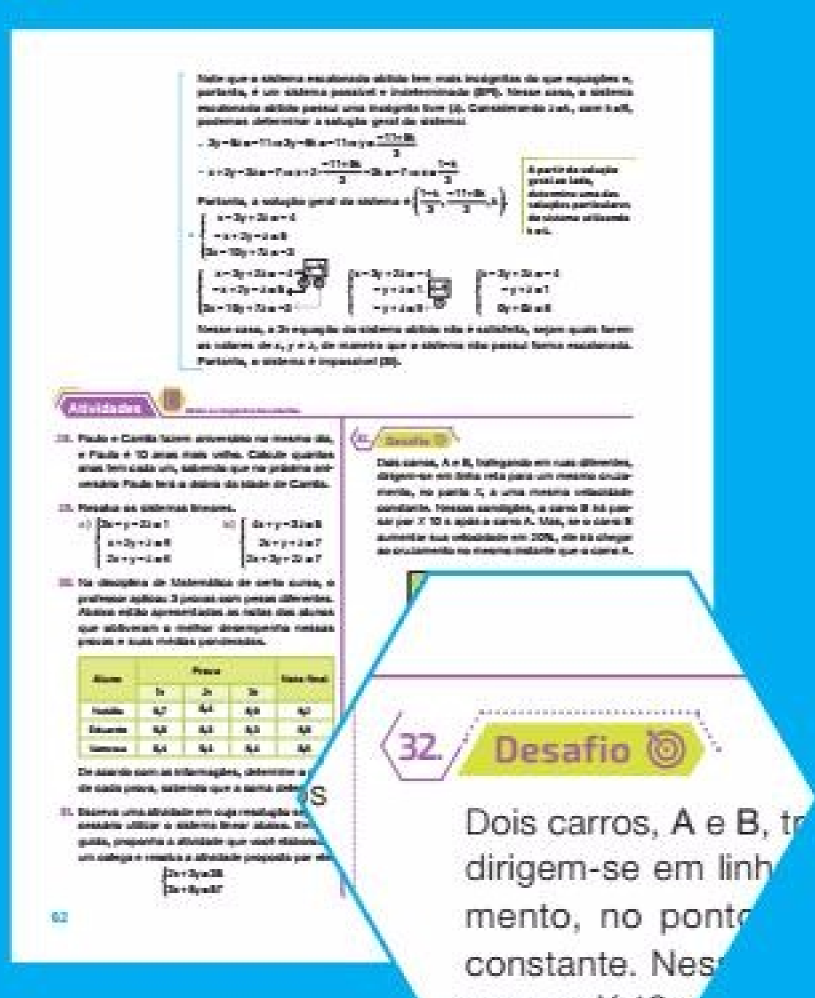
Esta seção apresenta atividades diversificadas para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Várias delas apresentam relações com outras disciplinas e áreas do conhecimento, além de questões aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Calculadora



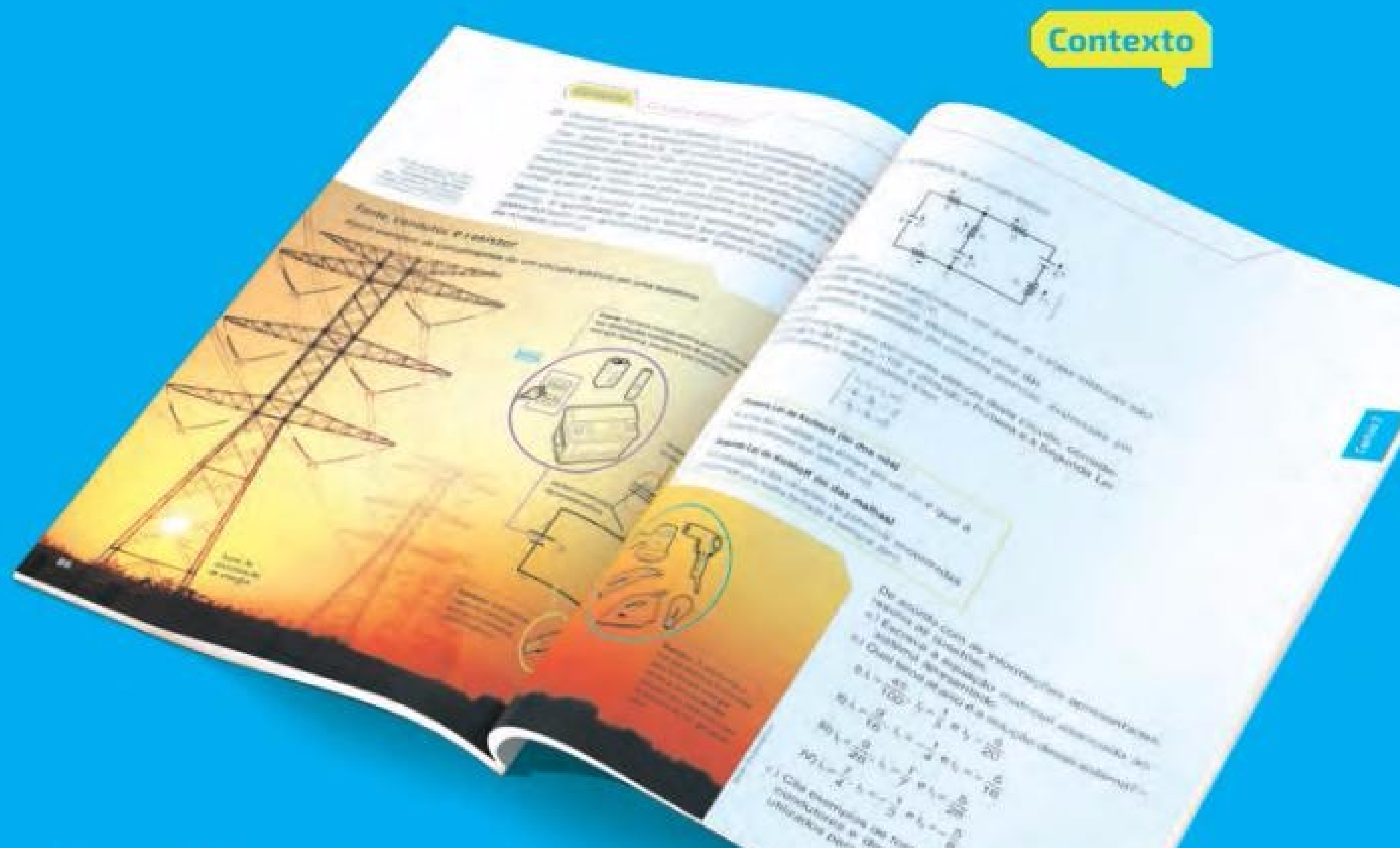
As atividades com a tarja calculadora exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio



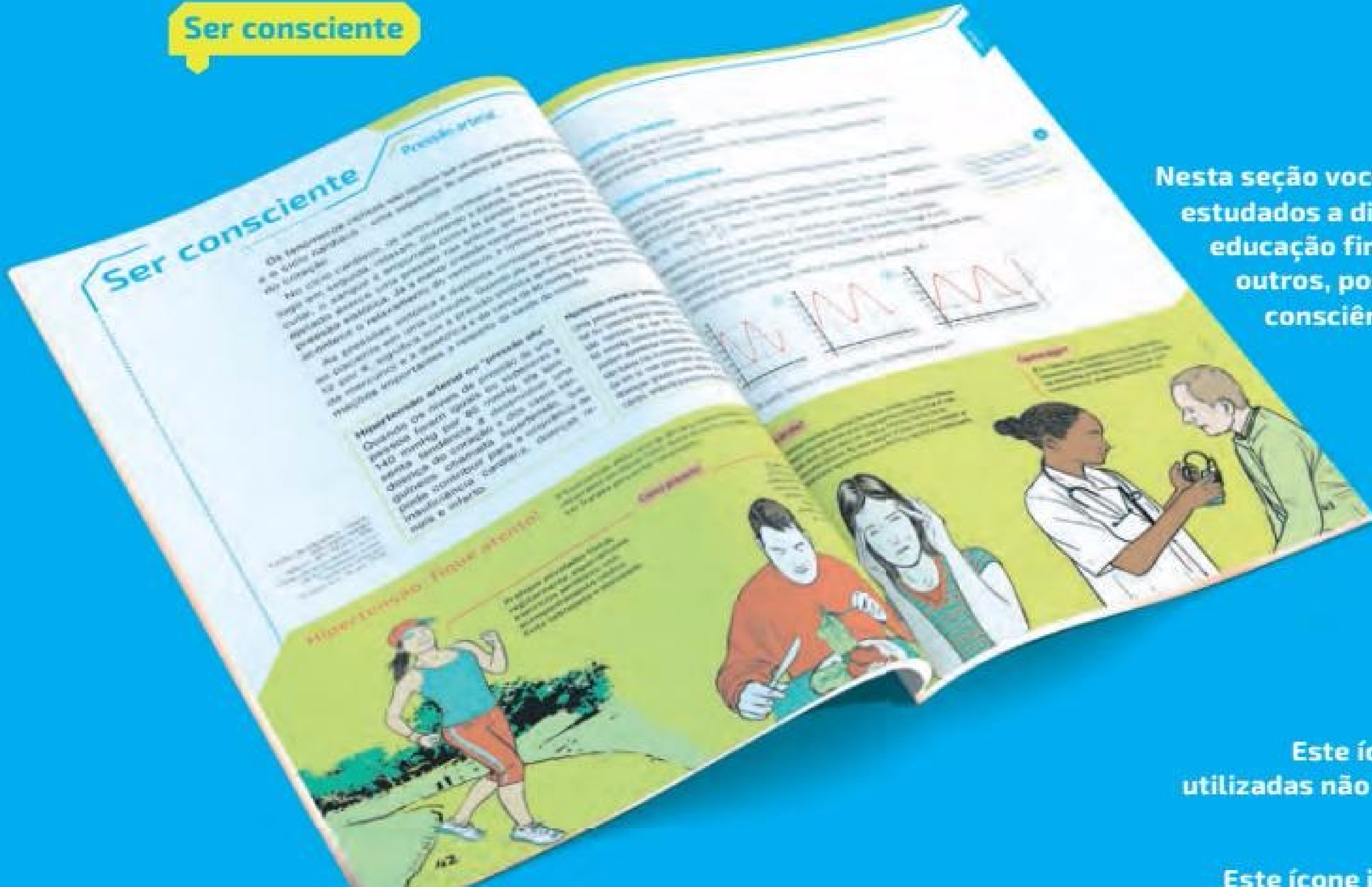
As atividades com a tarja desafio possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Contexto



Esta atividade permite que você relacione, de maneira mais expressiva, o conteúdo matemático em estudo com situações do cotidiano, de outras disciplinas ou áreas do conhecimento.

Ser consciente

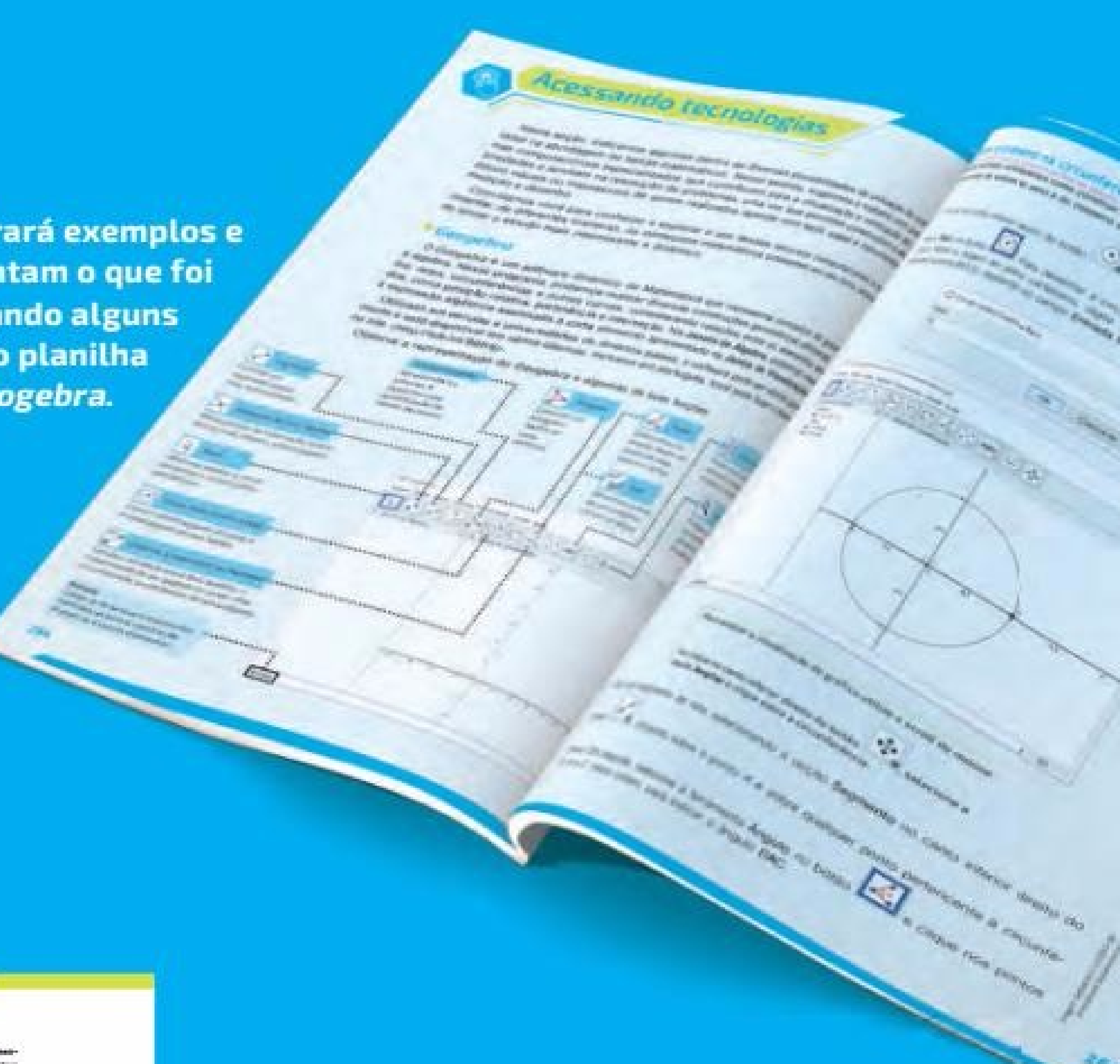


Nesta seção você aplicará os conceitos matemáticos estudados a diferentes assuntos, como ética, educação financeira, cidadania, saúde, entre outros, possibilitando uma reflexão e consciência sobre o tema abordado.

Este ícone indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

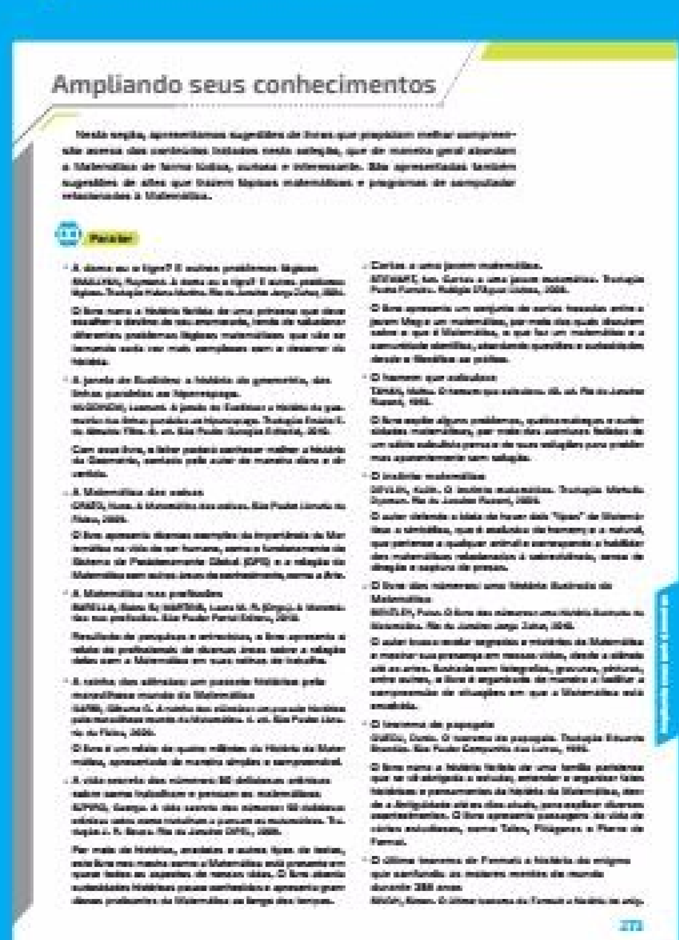
Este ícone indica que os elementos apresentados não estão proporcionais entre si.

Acessando tecnologias



Nesta seção você encontrará exemplos e atividades que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando alguns programas de computador, como planilha eletrônica e *Geogebra*.

Ampliando seus conhecimentos



Esta seção apresenta sugestões de livros e *sites* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos capítulos e ampliar seus conhecimentos.

Sumário

José Vitor Elorza/ASC Imagens

Andrey Yurlov/
Shutterstock.com

capítulo 1

Trigonometria

As rochas avermelhadas encontradas na baía de Fundy, no Canadá, conhecidas como Flowerpot Rocks, são esculpidas pela ação das fortes marés nessa região. Na fotografia podemos observar alguns turistas passeando pela baía de Fundy durante a maré baixa, em 2015.

Eric Carr/Alamy Stock Photo/Latinstock

Veja mais informações sobre marés no *site*:

• <http://tub.im/ubqv8n>

(acesso em: 22 fev. 2016)

Marés

As marés são variações periódicas do nível do mar, causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua, podendo apresentar amplitudes variadas para cada ponto da superfície terrestre, dependendo do alinhamento desses astros.

Uma maneira de saber identificar o comportamento das marés é por meio das fases da Lua. Por exemplo:

- nas luas nova e cheia é quando acontecem as maiores marés altas, pois a Lua e o Sol estão alinhados somando os seus efeitos gravitacionais.
- nas luas crescente e minguante é quando ocorrem as menores marés baixas, pois as forças gravitacionais, lunar e solar, são mínimas.

De modo geral, a diferença entre as marés alta e baixa é de centímetros. Porém, existem algumas regiões em que essas variações são maiores. Na baía de Fundy, retratada na fotografia, essa variação é, em média, de 10 a 14 m, sendo que em circunstâncias extremas, já se registrou 16 m. Em média, 100 bilhões de toneladas de água entram e saem dessa baía duas vezes ao dia.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

Fonte de pesquisa: <www.thehopewellrocks.ca>. Acesso em: 10 nov. 2015.

A O que são as marés? Resposta esperada: as marés são variações periódicas do nível do mar em razão da atração gravitacional do Sol e da Lua.

B Por que acontece as maiores marés na lua nova? Resposta esperada: porque a Lua e o Sol estão alinhados somando os seus efeitos.

C De acordo com as informações apresentadas, qual dos gráficos abaixo melhor representa a variação das marés? Por quê? gráfico I; Resposta esperada: como as marés são variações periódicas, o gráfico I é o que melhor representa essa variação, uma vez que seus valores se repetem periodicamente.

I

II

Ilustrações: Acervo da editora

Trigonometria na circunferência

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página **265** da seção **Acessando tecnologias**.

Last Refuge/robertharding/Corbis/Latinstock

Stonehenge, na Inglaterra, em 2010.

Tão antigo quanto as pirâmides, Stonehenge é um conjunto de circunferências concêntricas de enormes rochas, localizado no condado de Wiltshire, na Inglaterra. Nesse conjunto, o eixo nordeste se alinhava com a posição do Sol nascente no solstício de verão, sugerindo que foi desenvolvida alguma forma de calendário. Algumas rochas de apoio, com vergas por cima, demonstram um entendimento dos arcos de uma circunferência e habilidades para calcular e medir suas distâncias, assunto que estudaremos neste capítulo – quando tudo estava montado, as vergas de rocha teriam formado uma verdadeira circunferência, não uma série de rochas retas.

Fonte de pesquisa: ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

Verga: viga de madeira ou de pedra que se apoia transversalmente em duas peças dispostas verticalmente, em portas e janelas.

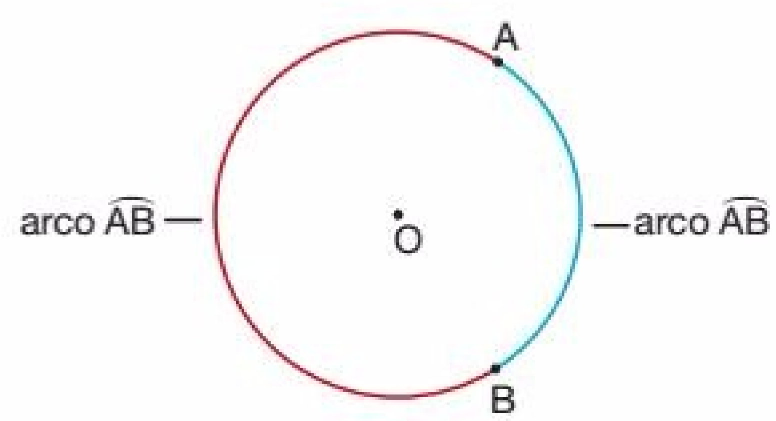
É possível que em anos anteriores você já tenha estudado as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente associadas a ângulos de triângulos. Em geral, nesse contexto, essas razões têm por objetivo determinar medidas de ângulos e lados dos triângulos.

Neste capítulo, iremos estender o estudo da Trigonometria, tratando as razões seno, cosseno e tangente em uma circunferência.

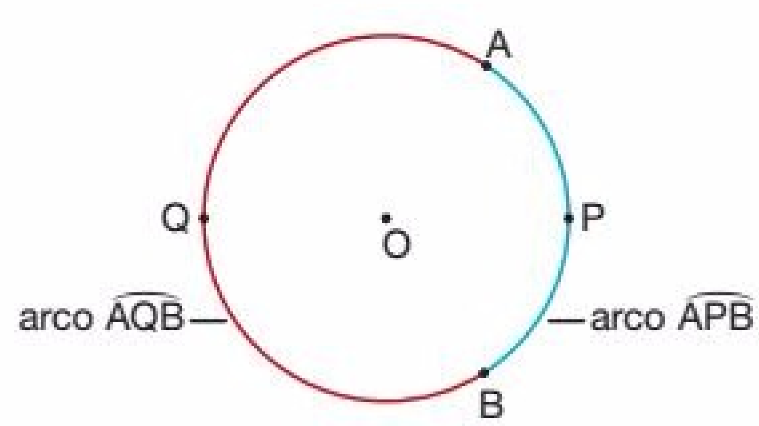
Arcos da circunferência

Observe a circunferência de centro *O*. Nela, destacamos os pontos *A* e *B*, que a dividem em duas partes denominadas **arcos de circunferência**.

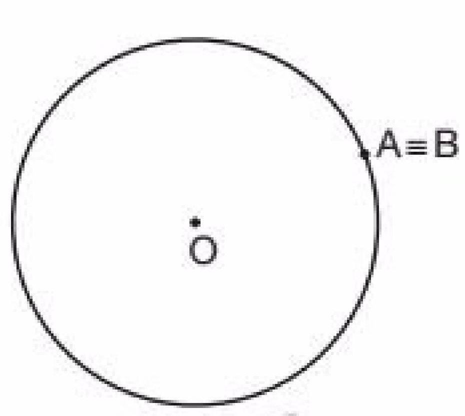
Usaremos $\widehat{AB}$ ora para indicar **o arco** de extremidades em *A* e *B*, ora para indicar a **medida** deste arco. Também faremos indicação ao raio como sendo o segmento de reta, outras vezes como sua medida.



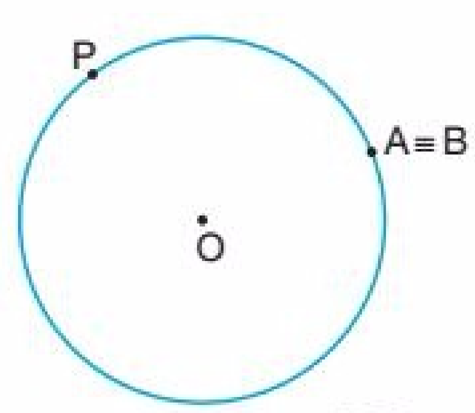
Note que *A* e *B* determinam dois arcos que podem ser indicados por $\widehat{AB}$. Nos casos em que não esteja evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos destacar um ponto entre as extremidades do arco e utilizar a seguinte notação:



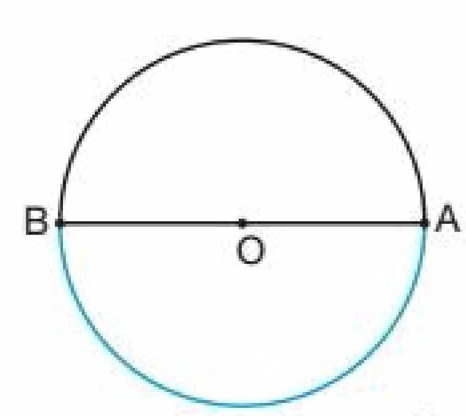
Quando as extremidades de um arco são coincidentes, este arco é nulo ou corresponde a uma volta completa. Já quando as extremidades de um arco correspondem às extremidades de um diâmetro, dizemos que esse arco é uma **semicircunferência**.



arco nulo $\widehat{AB}$



arco de uma volta $\widehat{APB}$



semicircunferência $\widehat{AB}$

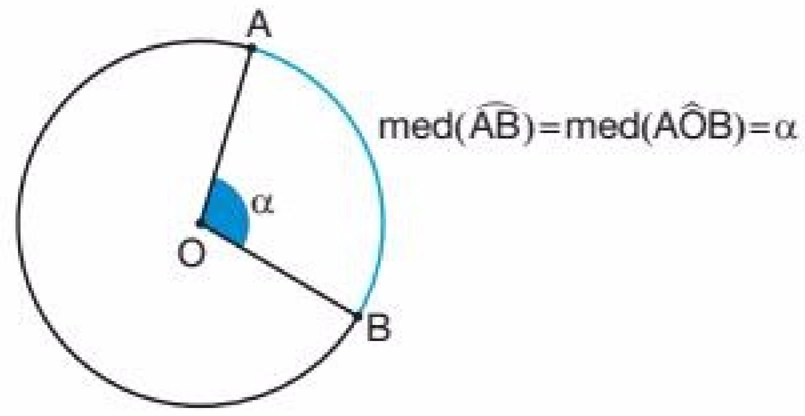
Ilustrações: Acervo da editora

Medida de um arco de circunferência

A **medida** (ou medida angular) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco.

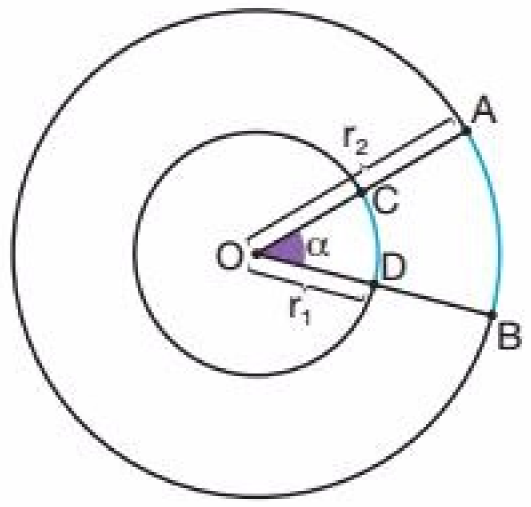
arco: $\overset{\frown}{AB}$

ângulo central: α



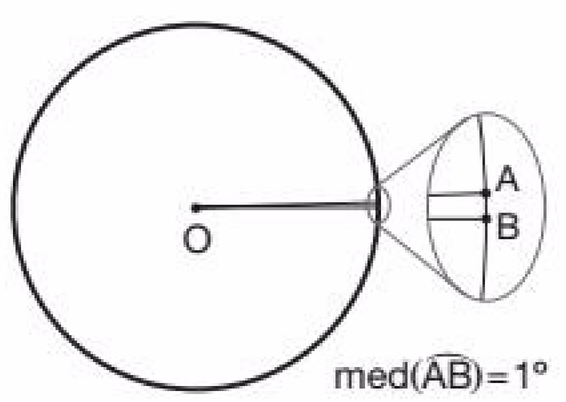
Em geral, podemos utilizar o **grau** e o **radiano** como unidades de medida de arco.

É importante compreender que a medida de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência. As circunferências abaixo são concêntricas, ou seja, possuem o mesmo centro. Nelas, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma medida, pois correspondem ao mesmo ângulo central α. Porém, esses arcos têm comprimentos diferentes, pois os comprimentos dos raios são diferentes $(r_1 \neq r_2)$.



- Grau $(°)$

  Ao dividirmos a circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes corresponderá a um arco de medida 1 grau $(1°)$. Uma volta completa equivale, portanto, a um arco de 360°.



Podemos destacar os submúltiplos do grau: minuto (') e segundo (").

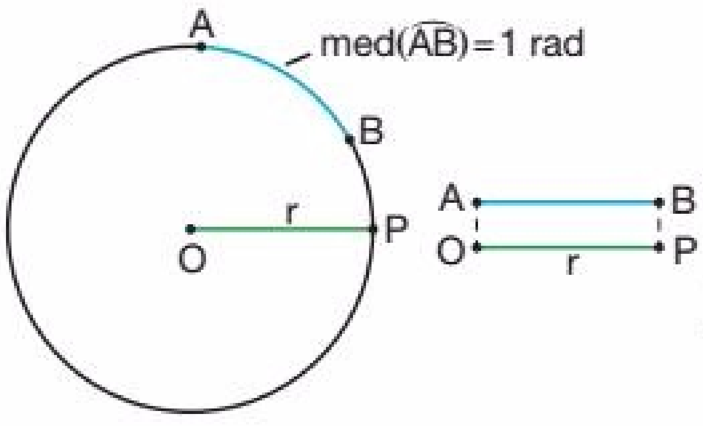
- $1° = 60'$
- $1' = 60''$

Podemos indicar, por exemplo, um arco de 15 graus, 42 minutos e 37 segundos por $15°\,42'\,37''$.

- Radiano (rad)

  Um arco que mede um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém, ou seja, ao considerarmos, em uma circunferência de raio *r*, um arco de comprimento *r*, temos que esse arco mede 1 rad.

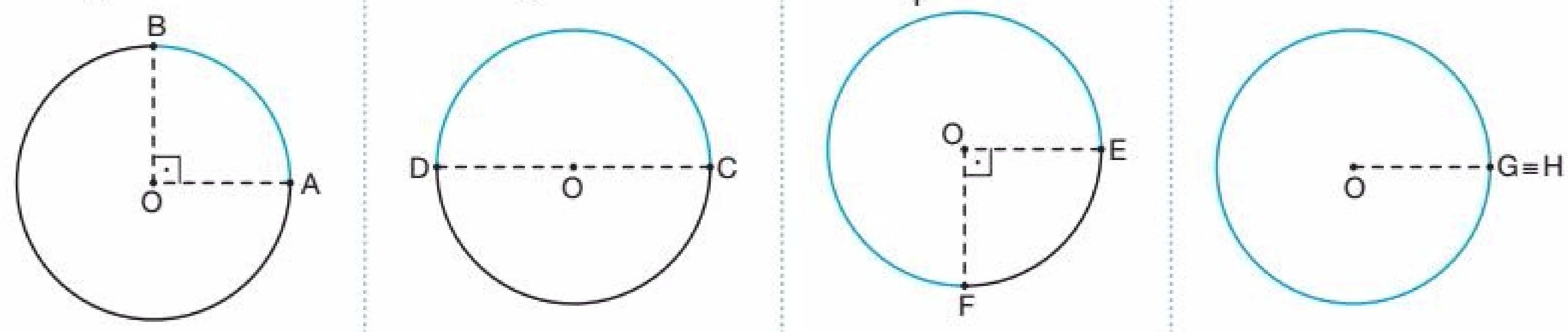
  Lembre-se de que o comprimento *C* de uma circunferência de raio *r* é dado por $C = 2\pi r$. Portanto, um arco de uma volta corresponde a 2π rad.



Ilustrações: Acervo da editora

Observe alguns arcos com medidas em graus e em radianos.

$\frac{1}{4}$ de volta | $\frac{1}{2}$ volta | $\frac{3}{4}$ de volta | uma volta



Ilustrações: Acervo da editora

$\text{med}\left(\widehat{AB}\right) = 90°$ ou $\text{med}\left(\widehat{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$ rad

$\text{med}\left(\widehat{CD}\right) = 180°$ ou $\text{med}\left(\widehat{CD}\right) = \pi$ rad

$\text{med}\left(\widehat{EF}\right) = 270°$ ou $\text{med}\left(\widehat{EF}\right) = \frac{3\pi}{2}$ rad

$\text{med}\left(\widehat{GH}\right) = 360°$ ou $\text{med}\left(\widehat{GH}\right) = 2\pi$ rad

Para transformar a medida de um arco, dada em graus, para radianos, ou vice-versa, podemos estabelecer uma relação entre essas unidades e utilizar a regra de três.

Lembre aos alunos o que é a regra de três. Explique que a regra de três é utilizada, por exemplo, para determinar, entre grandezas proporcionais, um valor a partir de outros três valores conhecidos.

Atividades resolvidas

R1. Escreva 36° 45' em radianos.

Resolução

Inicialmente, convertemos 36°45' e π rad em minutos. Como $1° = 60'$, temos:

- $36°45' = 36 \cdot 60' + 45' = 2\,160' + 45' = 2\,205'$
- $\pi \text{ rad} = 180° = 180 \cdot 60' = 10\,800'$

Em seguida, utilizamos a regra de três.

medida em minutos (')		medida em radianos (rad)
10 800	———	π
2 205	———	x

$$\frac{10\,800}{2\,205} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 10\,800x = 2\,205\pi \Rightarrow x = \frac{2\,205\pi}{10\,800} = \frac{49\pi}{240}$$

Portanto, 36° 45' correspondem a $\frac{49\pi}{240}$ rad.

R2. Expresse $\frac{151\pi}{360}$ rad em graus.

Resolução

medida em graus (°)		medida em radianos (rad)
180	———	π
x	———	$\frac{151\pi}{360}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{151\pi}{360}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{360}{151} \Rightarrow 360x = 27\,180 \Rightarrow x = \frac{27\,180}{360} = 75{,}5 \rightarrow 75{,}5°$$

Convertendo a parte decimal em minutos, temos:

$$0{,}5° = 0{,}5 \cdot 60' = 30'$$

Portanto, $\frac{151\pi}{360}$ rad correspondem a 75° 30'.

Outra maneira de resolver:

$$\frac{151\overset{180°}{\widehat{\pi}}}{360} = \frac{151 \cdot 180}{360} = \frac{27\,180}{360} = 75{,}5 \rightarrow 75{,}5°$$

R3. Qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio que marca 5h10min?

Resolução

A medida do ângulo entre horas consecutivas é $\frac{360°}{12} = 30°$. Às 5h10min, o ponteiro dos minutos está indicando o número 2, e o ponteiro das horas está entre os números 5 e 6, conforme a figura.

Como a cada 60 min o ponteiro das horas desloca-se 30°, calculamos a medida *x* por meio da seguinte regra de três:

tempo (min)	ângulo (°)
60	30
10	x

$$\Rightarrow 60x = 30 \cdot 10 \Rightarrow x = 5 \rightarrow 5°$$

Portanto, a medida do menor ângulo formado é $30° + 30° + 30° + 5° = 95°$.

Utilizando esse resultado, podemos calcular a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio às 6h10min? Justifique. Sim, basta adicionar 30° para o ponteiro das horas, ou seja, o ângulo é $95° + 30° = 125°$.

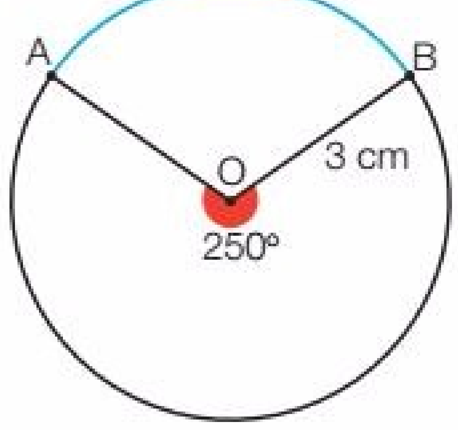
Atividades

Anote as respostas no caderno.

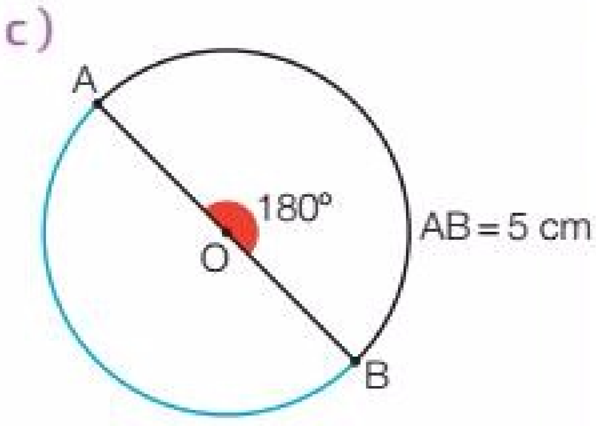
Quando necessário, na resolução das atividades deste capítulo, considere $\pi = 3{,}14$. Lembre-se também de que o comprimento *C* de uma circunferência de raio *r* é dado por $C = 2\pi r$.

1. Em cada circunferência, determine o comprimento e a medida, em graus, do arco $\widehat{AB}$ em azul.

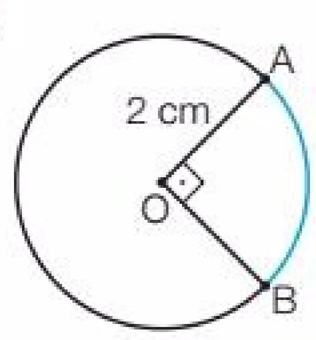
a)



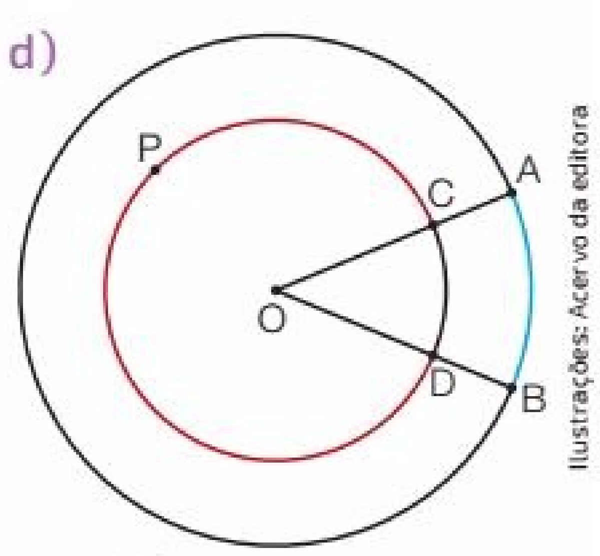
c)



b)



d)



$med(\widehat{CPD}) = 315°$ BO = 3,5 cm

Respostas no final do livro.

2. Expresse em radianos a medida de cada arco $\widehat{AB}$ em azul da atividade anterior. Respostas no final do livro.

3. Expresse, em graus, a medida de cada arco.

a) $med(\widehat{AB}) = \frac{5\pi}{18}$ rad

b) $med(\widehat{CD}) = \frac{7\pi}{9}$ rad

c) $med(\widehat{EF}) = \frac{13\pi}{9}$ rad

d) $med(\widehat{GH}) = \frac{16\pi}{9}$ rad

Respostas no final do livro.

4. Em uma competição de ciclismo, cada atleta deve percorrer, em no máximo 2h30min, 78,5 km em uma pista circular cujo raio mede 500 m.

a) Quantas voltas na pista serão necessárias para que um ciclista percorra os 78,5 km? 25 voltas

b) Qual é o tempo médio máximo em que um atleta deve realizar cada volta para cumprir a prova? 6 min

5. Localizada em Singapura, a Singapore Flyer, com 150 m de diâmetro, é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Cada uma das 28 cabines da Singapore Flyer comporta até 28 pessoas; assim, em apenas uma volta, ela pode levar até 784 pessoas.

Qual é a distância, aproximada, percorrida por uma das cabines após realizar uma volta completa? 471 m

Fonte de pesquisa: <www.singaporeflyer.com/about-us/about-singapore-flyer>. Acesso em: 10 nov. 2015.

Evgeny Glyanenko/Alamy Stock Photo/Latinstock

Roda-gigante Singapore Flyer, em Singapura, em 2011.

6. Sobre duas circunferências concêntricas de raios r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$, e centro O, foram traçados $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, com C e D pertencentes à circunferência de raio r_1, de maneira que o ângulo formado entre $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ fosse igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad. Sobre $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ foram marcados os pontos A e B, respectivamente, de modo que A e B pertencessem à circunferência de raio r_2. Sabendo que a distância entre A e C é igual a 3 cm, resolva o que se pede.

a) Dado que o comprimento do menor arco $\widehat{AB}$ é igual a 25,12 cm, determine a medida de r_1 e r_2. $r_1 = 15$ cm; $r_2 = 12$ cm

b) Qual é o comprimento do menor arco $\widehat{CD}$? 31,4 cm

c) Podemos afirmar que $med(\widehat{AB}) = med(\widehat{CD})$? Justifique. Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

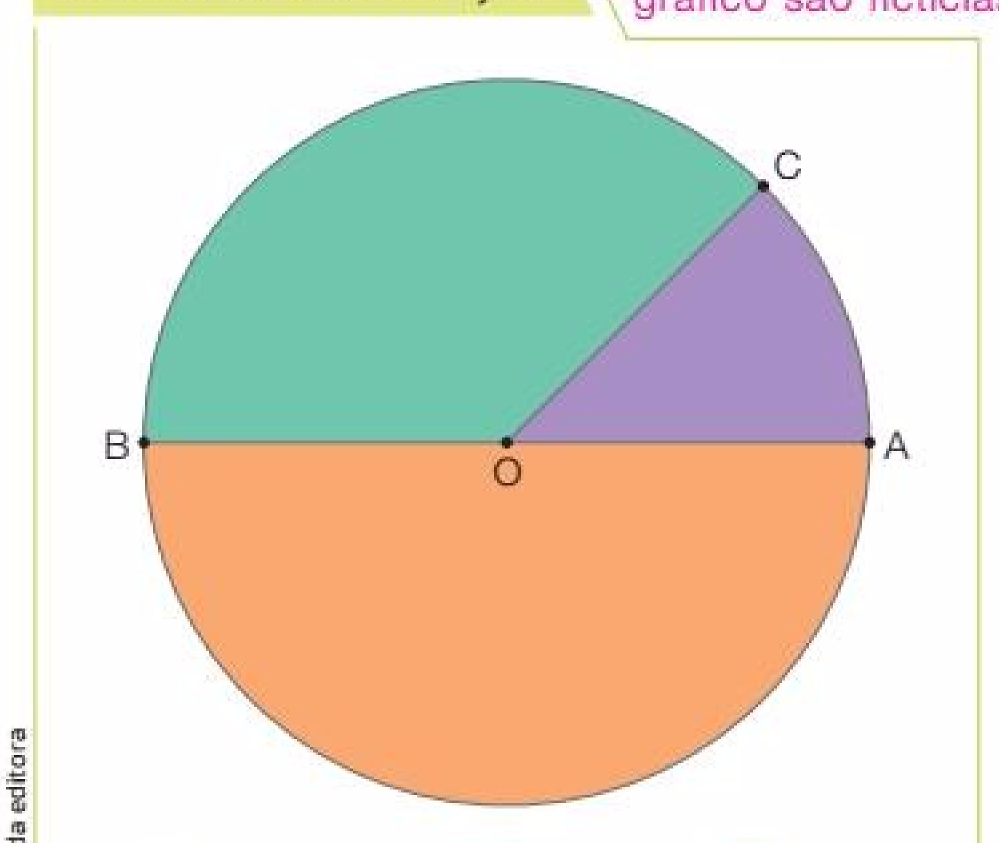
7. Passados 2h45min, quantos graus o ponteiro das horas de um relógio girou? 82,5° ou 82°30'

8. A extremidade de um pêndulo de 24 cm de comprimento descreve um arco de 18,84 cm. Qual é o ângulo formado pelas posições extremas alcançadas por esse pêndulo durante o movimento? 45°

9. O gráfico representa a votação dos alunos de uma turma na escolha do esporte que gostariam de praticar.

As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Resultado da votação



Fonte: Secretaria da escola.

O segmento AB, que representa o diâmetro do gráfico de setores, mede 12 cm, e o comprimento do menor arco $\widehat{AC}$ é $\frac{3\pi}{2}$ cm.

Sabendo que o esporte basquete recebeu 4 votos, responda:

a) Qual foi o esporte mais votado? Quantos alunos optaram por esse esporte? vôlei; 16 alunos

b) Quantos alunos participaram da votação? 32 alunos

c) Quantos alunos votaram em futebol? 12 alunos

10. O retângulo áureo recebe este nome porque a proporção de seus lados é uma aproximação do "número de ouro".

Os retângulos áureos circunscrevem uma espiral logarítmica, chamada de "espiral de ouro". A espiral logarítmica ocorre na natureza com frequência, aparecendo, por exemplo, em conchas, chifres ou girassóis, e até mesmo em galáxias espirais.

Ser vivo adulto

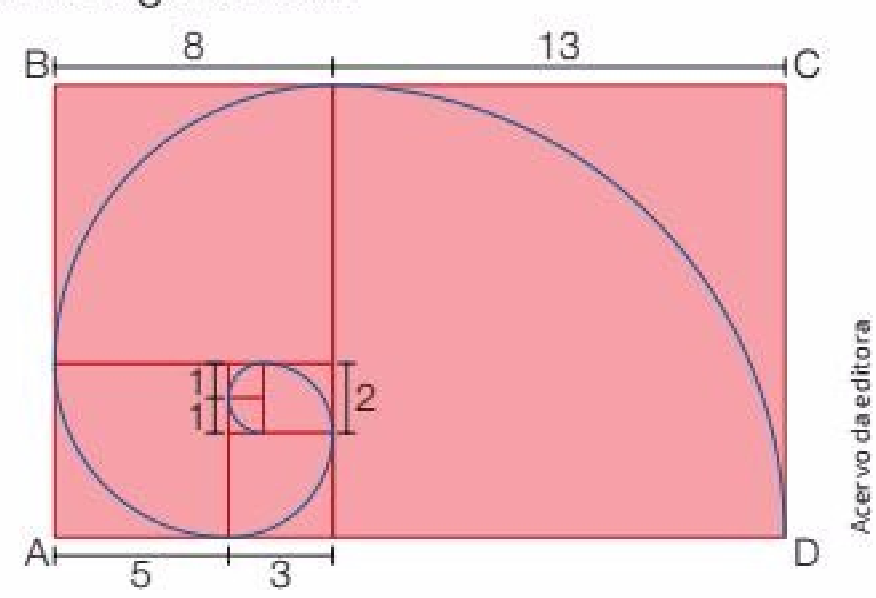
Caracol: até 30 cm de comprimento

Brand X Pictures/Getty Images

Molusco cuja concha apresenta a espiral de ouro.

O retângulo áureo pode ser formado considerando a união de quadrados cujas medidas dos lados seguem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Observe, na figura, retângulos áureos circunscritos por uma espiral formada por arcos de circunferência. Essa espiral se assemelha a uma espiral logarítmica.



Calcule o comprimento da espiral mostrada na figura. 51,81 unidades de comprimento

11. Um dos sistemas de irrigação por aspersão mais usados é o pivô central, que consiste em uma tubulação suspensa acima da área agrícola por algumas torres metálicas que possuem rodas. A base do sistema lembra uma pirâmide metálica e, em torno dela, a tubulação, sustentada pelas torres, realiza um movimento de rotação. A distância entre as torres varia entre 24 m e 76 m, e a medida do raio do pivô, entre 200 m e 800 m. Suponha um sistema de pivô central cujo raio mede 800 m, no qual a distância entre as torres que sustentam a tubulação é 40 m.

a) Quantas torres sustentam a tubulação desse pivô central? 20 torres

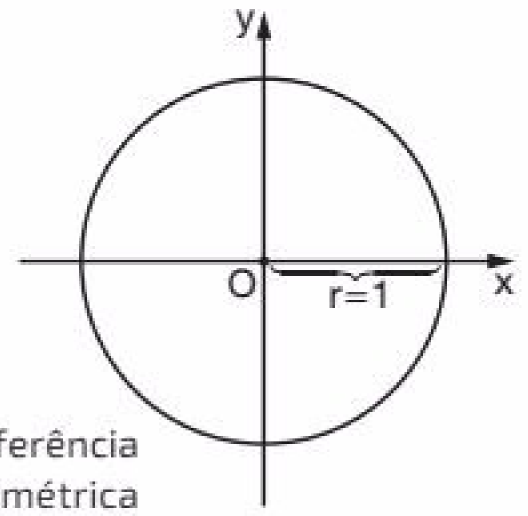
b) Qual é a distância percorrida pela torre que fica na extremidade da tubulação ao realizar uma volta completa? 5 024 m

c) Qual é a diferença entre a distância percorrida pela torre que fica na extremidade da tubulação e a distância percorrida pela torre imediatamente anterior a ela, ao realizarem uma volta completa? 251,2 m

Circunferência trigonométrica

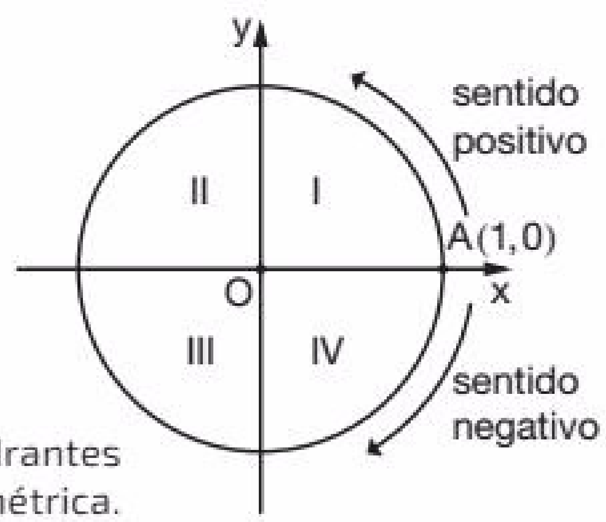
Agora, vamos ampliar o conceito de arcos de circunferência com o objetivo de estudar a **circunferência trigonométrica**, em que podemos considerar, por exemplo, arcos com medidas maiores do que 360° ou arcos com medidas negativas.

Para definir uma circunferência trigonométrica (ou ciclo trigonométrico), consideramos uma circunferência de centro *O* e raio unitário $(r=1)$, fixando nessa circunferência um sistema de eixos cartesianos, de maneira que *O* coincida com a origem desse sistema.



circunferência trigonométrica

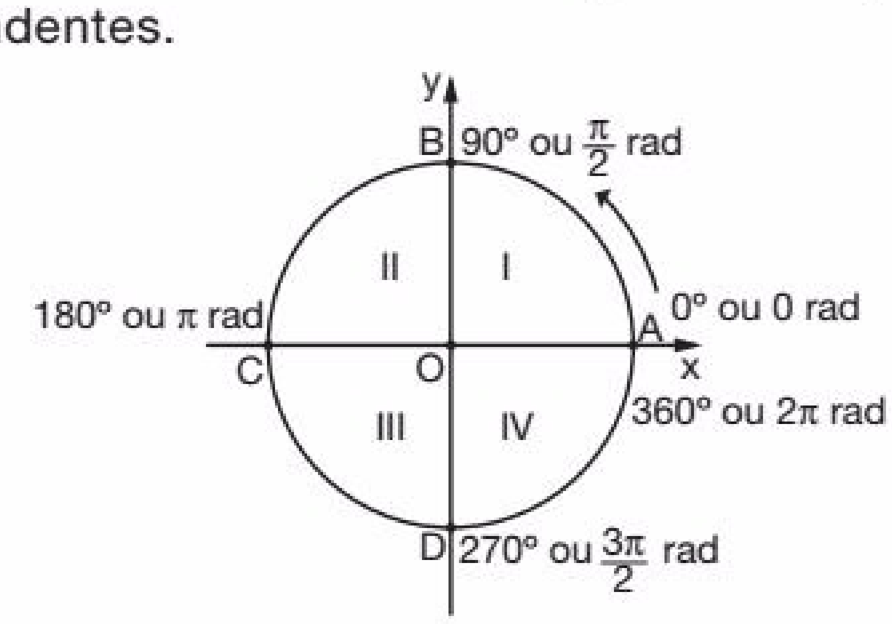
Na circunferência trigonométrica, os arcos têm origem no ponto $A(1, 0)$, tendo como sentido positivo o anti-horário, e negativo, o horário. O sistema de eixos cartesianos divide a circunferência trigonométrica em quatro partes, chamadas quadrantes.



I, II, III e IV indicam os quadrantes da circunferência trigonométrica.

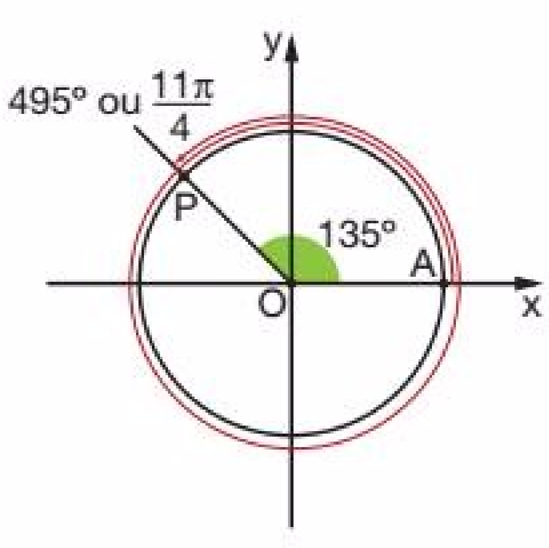
Explique aos alunos que, na circunferência trigonométrica, a adoção do raio unitário tem efeito simplificador ao estudarmos nela as razões trigonométricas, o que será realizado posteriormente neste capítulo.

Na circunferência trigonométrica, podemos associar a cada ponto *P* um arco correspondente $\overset{\frown}{AP}$, denominado **arco trigonométrico**. Observe na circunferência trigonométrica abaixo as extremidades dos quadrantes (*A*, *B*, *C* e *D*) e a medida dos arcos correspondentes.

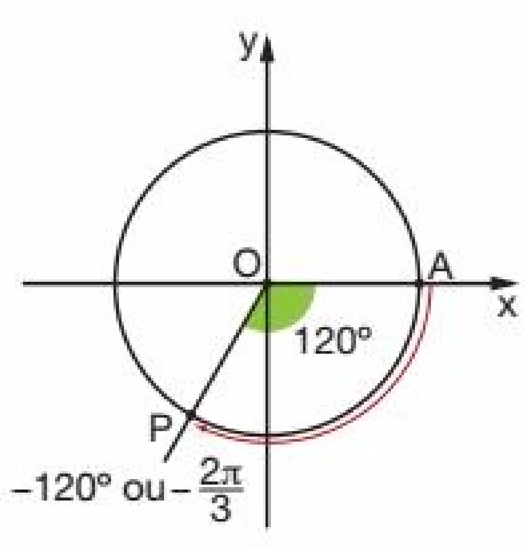


Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, o comprimento e a medida de um arco, dada em radianos, são numericamente iguais. Para simplificar a notação, denotaremos a partir daqui a medida do arco em radianos sem a indicação "rad". Um arco de medida $\frac{5\pi}{4}$ rad, por exemplo, será denotado por $\frac{5\pi}{4}$.

Em uma circunferência trigonométrica temos também arcos maiores que uma volta ou arcos com medidas negativas. Observe os exemplos.



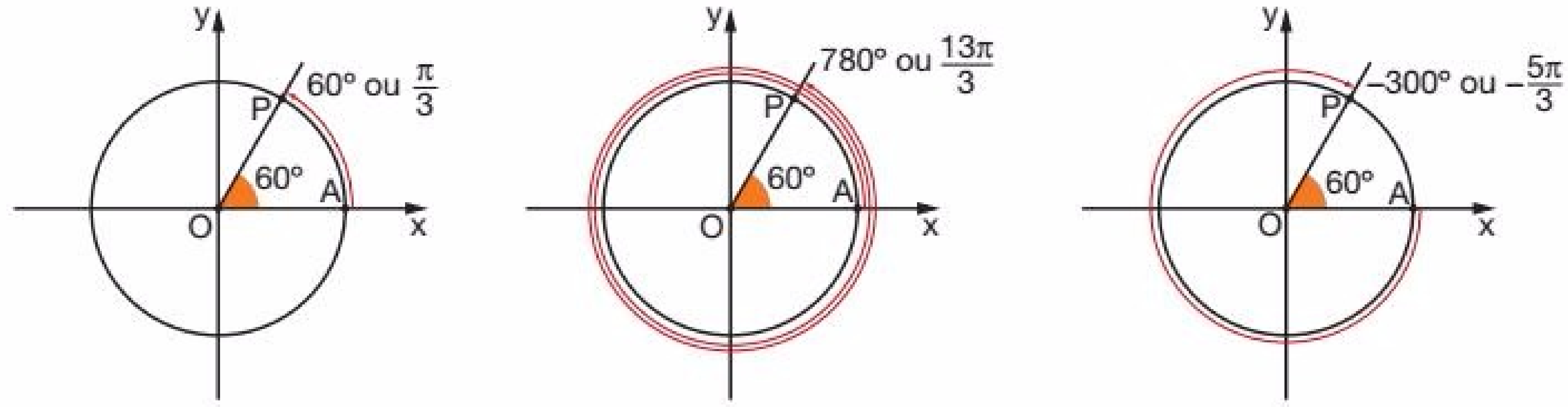
$$495° = 135° + 360° \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$



Ilustrações: Acervo da editora

Arcos côngruos

Em uma circunferência trigonométrica, um mesmo ponto P está associado a infinitos arcos. Observe.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que, nas circunferências trigonométricas acima, os arcos de 60° ou $\frac{\pi}{3}$, 780° ou $\frac{13\pi}{3}$ e $-300°$ ou $-\frac{5\pi}{3}$ têm a mesma extremidade P. Nesse caso, dizemos que esses são **arcos côngruos**.

> Em uma circunferência trigonométrica, quando dois ou mais arcos têm a mesma origem e a mesma extremidade, dizemos que esses arcos são côngruos entre si.
>
> De maneira geral, seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° \leq \alpha < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$, as medidas dos arcos côngruos a $\overset{\frown}{AP}$ podem ser escritas como:
>
> $$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$
>
> O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α é denominado 1ª **determinação positiva** dos côngruos a ele.

Nas circunferências trigonométricas apresentadas anteriormente, a 1ª determinação positiva $(\overset{\frown}{AP})$ tem 60° ou $\frac{\pi}{3}$. Os dois arcos côngruos a ele que foram apresentados podem ser escritos da seguinte maneira:

- $780° = 60° + 2 \cdot 360°$ ou $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$
- $-300° = 60° - 360°$ ou $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\pi$

Atividades resolvidas

R4. Obtenha a 1ª determinação positiva e o número de voltas completas na circunferência trigonométrica do arco que mede:

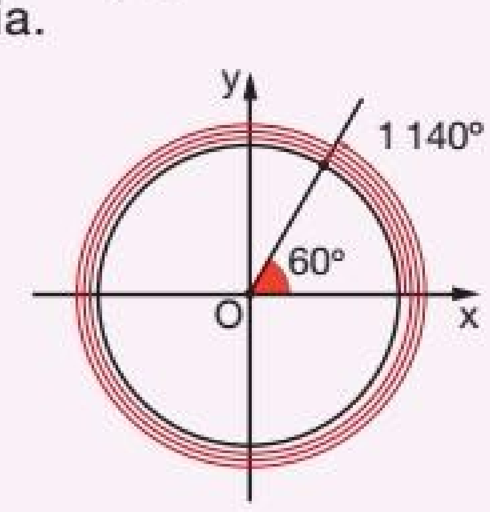
a) 1 140°

b) $-\frac{11\pi}{4}$

Resolução

a) O resto da divisão de 1140° por 360° é a 1ª determinação positiva (α) do arco, e o quociente é o número de voltas completas (k) na circunferência.

$$\begin{array}{r|l} 1\,140 & 360 \\ \hline \underbrace{60}_{\alpha} & \underbrace{3}_{k} \end{array}$$



Ou seja, $1140° = 60° + 3 \cdot 360°$.

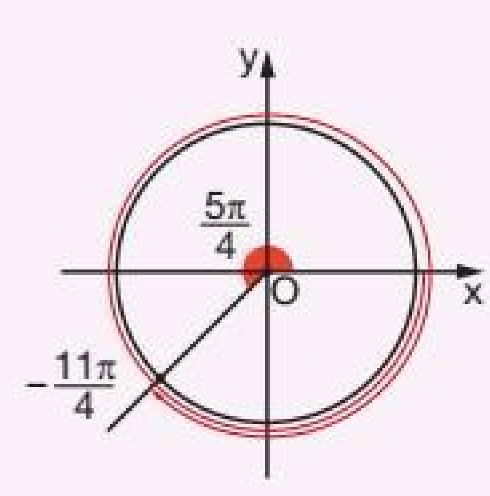
Portanto, a 1ª determinação positiva é 60°, e o número de voltas completas é 3, no sentido anti-horário (sentido positivo).

b) Temos que:

$$-\frac{11\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} - \underbrace{1}_{k} \cdot 2\pi$$

Segue que a 1ª determinação positiva é:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{4}}_{\alpha}$$



Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{5\pi}{4}$, e o número de voltas completas é 1, no sentido horário (sentido negativo).

R5. Escreva a expressão geral que determina os arcos côngruos ao arco de medida:

a) 120° b) 860° c) $\frac{31\pi}{7}$

Resolução

a) Nesse caso, como $\alpha = 120°$, a expressão geral é dada por $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de 860°.

$$\begin{array}{l|l} 860 & 360 \\ \hline \underbrace{140}_{\alpha} & \underbrace{2}_{k} \end{array}$$

Ou seja, $860° = 140° + 2 \cdot 360°$.

Portanto, a expressão geral é dada por $140° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) Inicialmente, obtemos a 1ª determinação positiva (α) do arco de $\frac{31\pi}{7}$.

$$\frac{31\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + \frac{28\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 4\pi = \underbrace{\frac{3\pi}{7}}_{\alpha} + \underbrace{2}_{k} \cdot 2\pi$$

Portanto, a expressão geral é dada por $\frac{3\pi}{7} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Atividades

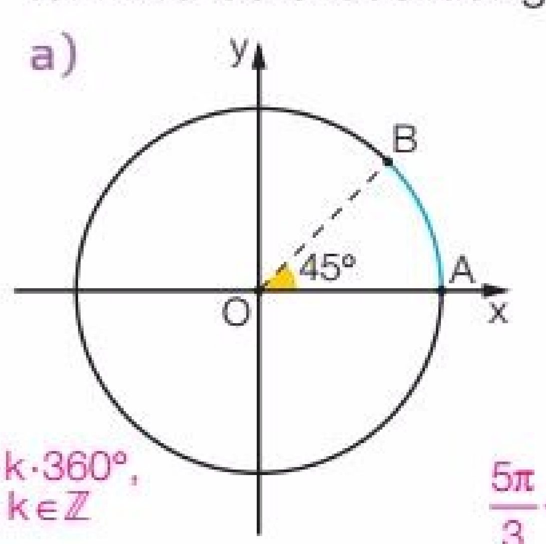
Anote as respostas no caderno.

12. Escreva a 1ª determinação positiva de um arco de:

a) 1 460° 20°
b) 2 370° 210°
c) −900° 180°
d) −2 070° 90°
e) $\frac{27\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$
f) $\frac{31\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$

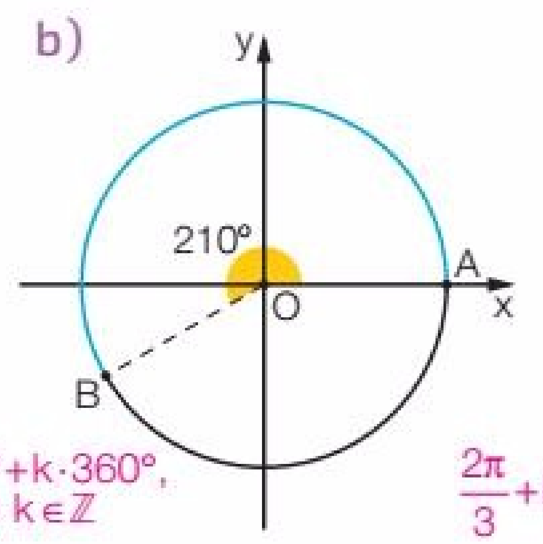
13. Para cada item, escreva uma expressão que determine os arcos côngruos a $\overset{\frown}{AB}$.

a)



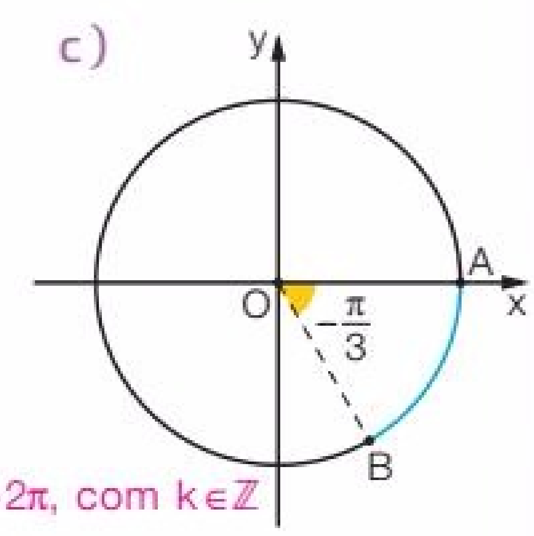
$45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b)



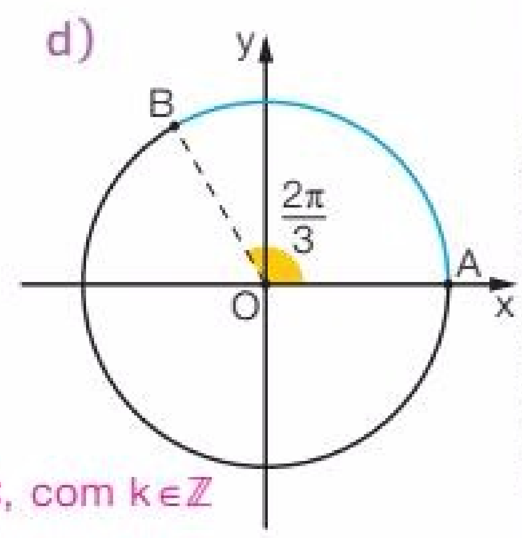
$210° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

c)



$\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d)

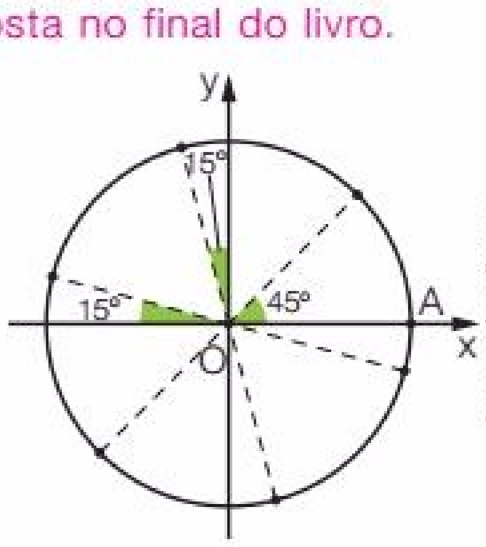


$\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Ilustrações: Acervo da editora

14. Em uma circunferência unitária, represente as extremidades dos arcos dados pela expressão $20° + k \cdot 90°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Resposta no final do livro.

15. Considerando a origem em *A*, escreva uma expressão com a qual seja possível obter os arcos cujas extremidades estão representadas na circunferência.
$45° + k \cdot 60°$, com $k \in \mathbb{Z}$



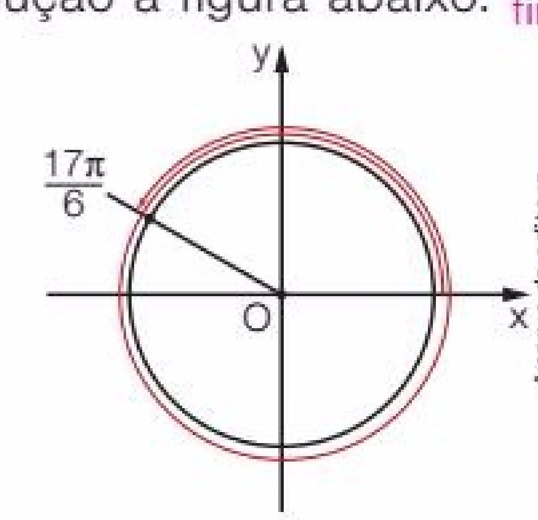
Acervo da editora

16. O eneágono regular (polígono de nove lados com medidas iguais) *ABCDEFGHI* está inscrito em uma circunferência trigonométrica, de modo que o vértice *A* está na origem dos arcos, e os outros vértices estão dispostos no sentido anti-horário.

a) Qual é a medida do arco de origem em *A* e extremidade no vértice *C*? 80° ou $\frac{4\pi}{9}$

b) Escreva a expressão geral dos arcos de origem em *A* e extremidades em cada vértice do eneágono. $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$, com $k \in \mathbb{Z}$

17. Em uma aula de Matemática, a professora de Rafael pediu a ele que desenhasse uma circunferência trigonométrica e nela representasse um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. Rafael apresentou como solução a figura abaixo. Respostas no final do livro.



Acervo da editora

a) A solução apresentada por Rafael está correta? Justifique.

b) Represente em uma circunferência trigonométrica um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$.

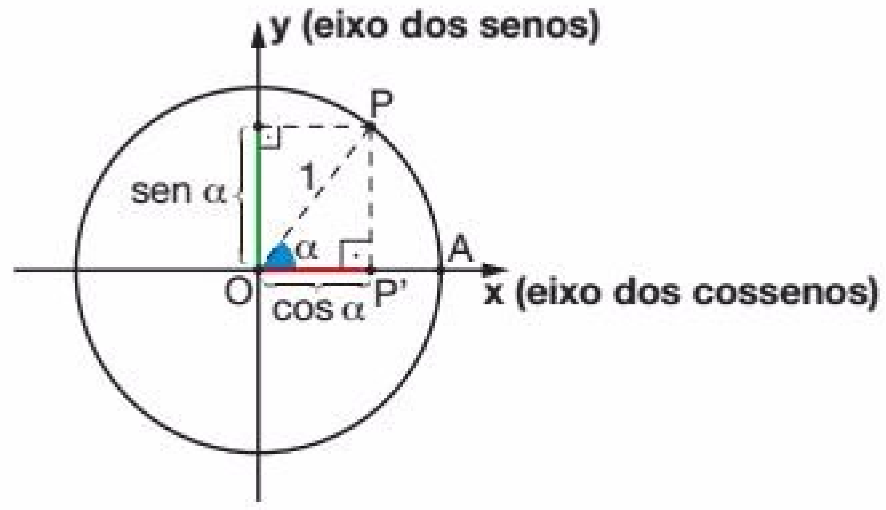
18. Escolha, em radianos, um arco positivo na primeira volta da circunferência trigonométrica. Depois, troque esse arco com um colega para que ele determine dois arcos côngruos ao seu, enquanto você faz o mesmo com o arco proposto por ele.
Resposta pessoal.

Seno, cosseno e tangente de um arco

Estudamos em anos anteriores as razões seno, cosseno e tangente em triângulos. Agora, vamos estender esses conceitos para a circunferência trigonométrica.

- Seno e cosseno de um arco

Dado um arco de medida α e extremidade *P* na circunferência trigonométrica, temos que o seno de α $(\text{sen}\,\alpha)$ corresponde à ordenada de *P*, e o cosseno de α $(\cos\alpha)$, à abscissa de *P*. Dizemos que o eixo *y* é o **eixo dos senos**, e o eixo *x* é o **eixo dos cossenos**.



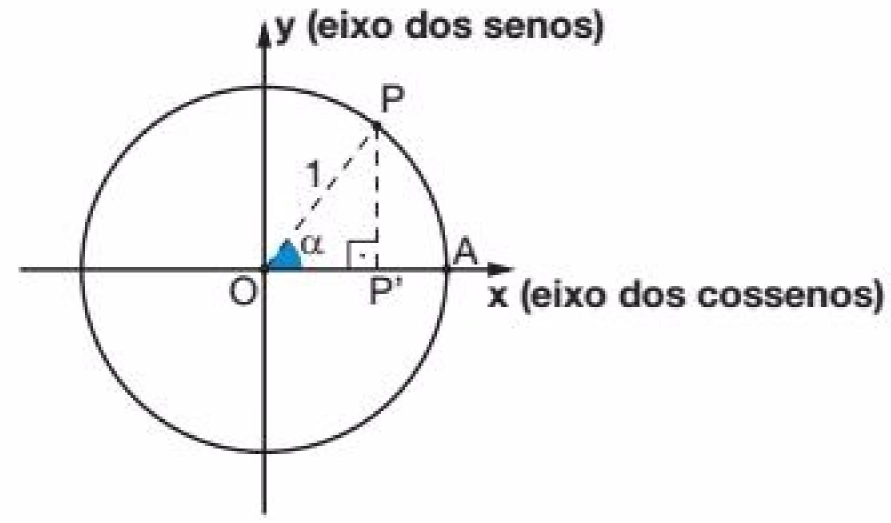
Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo corresponde à razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa. Já o cosseno, à razão entre as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa.

Lembre aos alunos que o raio da circunferência trigonométrica é igual a 1, o que simplifica o estudo das razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.

Em particular, com base no estudo das razões seno e cosseno no triângulo retângulo POP', temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{PP'}{PO} = \frac{PP'}{1} = PP'$$

$$\cos\alpha = \frac{OP'}{PO} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

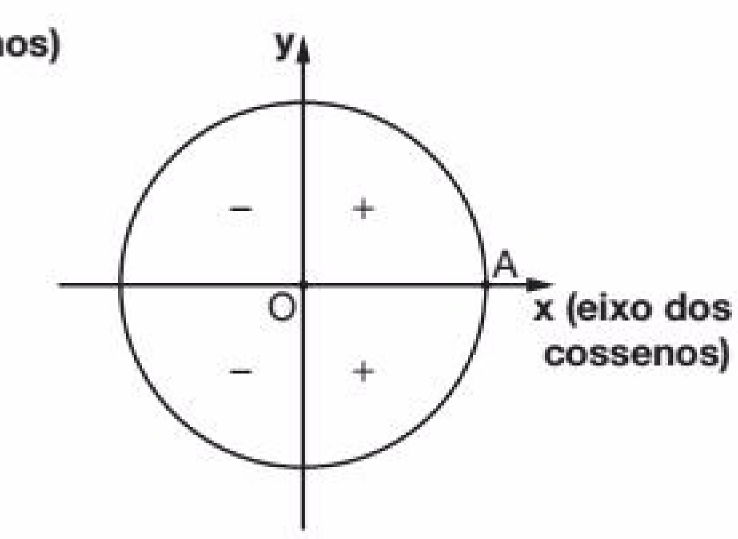


Note que, se um arco de medida α tem extremidade no:

- 1º quadrante, então $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha > 0$
- 2º quadrante, então $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\,\alpha > 0$
- 3º quadrante, então $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\,\alpha < 0$
- 4º quadrante, então $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha < 0$

Sinais do seno

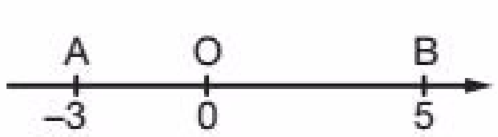
Sinais do cosseno



- Tangente de um arco

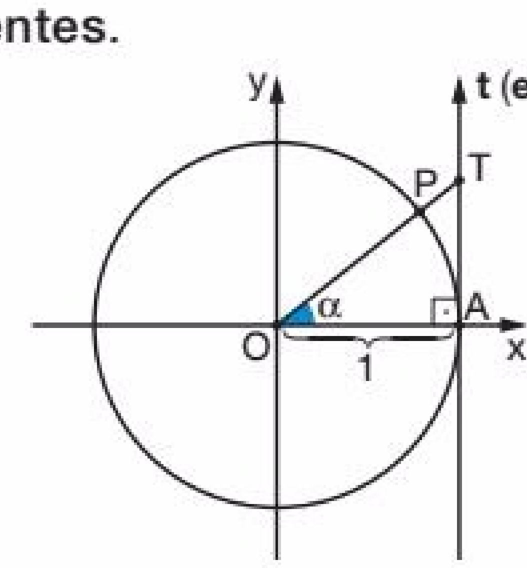
Considere uma circunferência trigonométrica, uma reta *t* tangente a ela no ponto *A* com a mesma orientação do eixo *y* e um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

A medida algébrica de um segmento de reta orientado pode ser positiva, negativa ou nula. Observe.



Na reta orientada acima, a medida algébrica de $\overline{OA}$ é -3, e a medida algébrica de $\overline{OB}$ é 5.

Temos que a tangente de α $(\text{tg}\,\alpha)$ corresponde à medida algébrica de $\overline{AT}$, sendo *T* o ponto obtido na interseção da reta tangente *t* e $\overleftrightarrow{OP}$. Dizemos que a reta *t* é o **eixo das tangentes**.



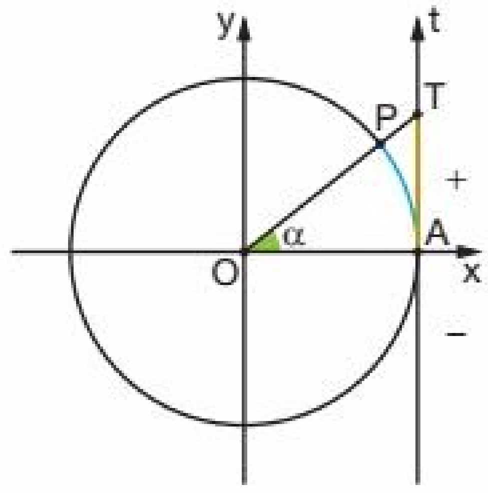
Ilustrações: Acervo da editora

Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo corresponde à razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente.

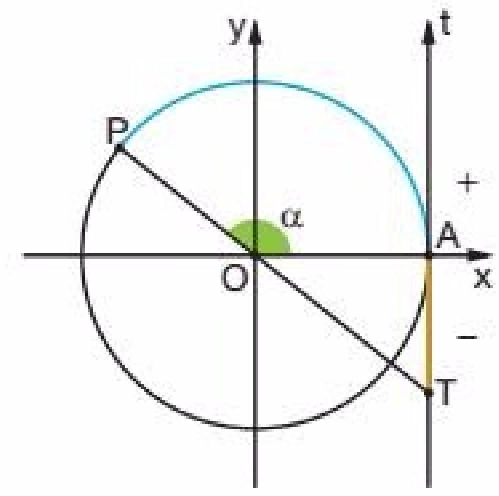
Em particular, no triângulo retângulo TOA, temos: $\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$

Observe os arcos de extremidade P em cada um dos quadrantes.

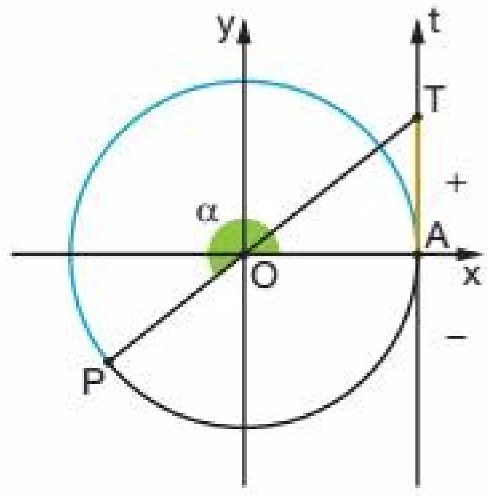
1º quadrante



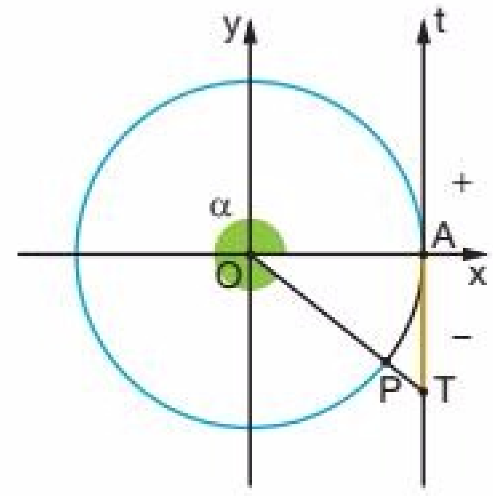
2º quadrante



3º quadrante



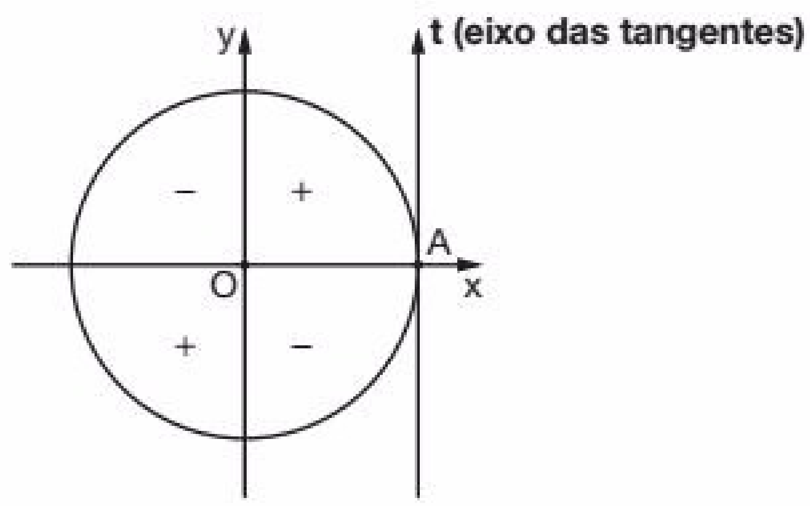
4º quadrante



Note que, se um arco de medida α tem extremidade no:

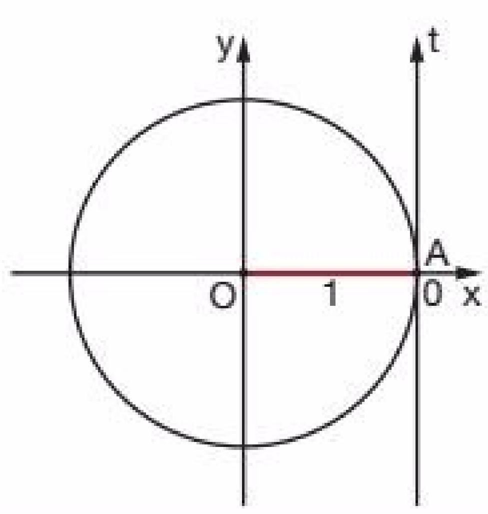
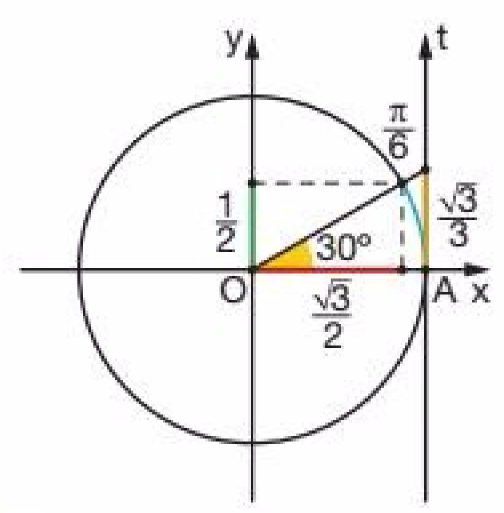
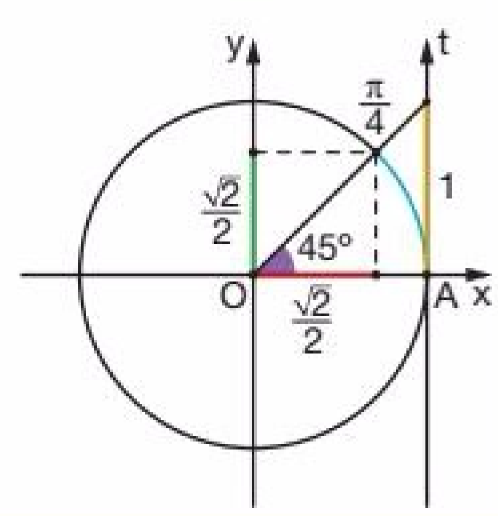
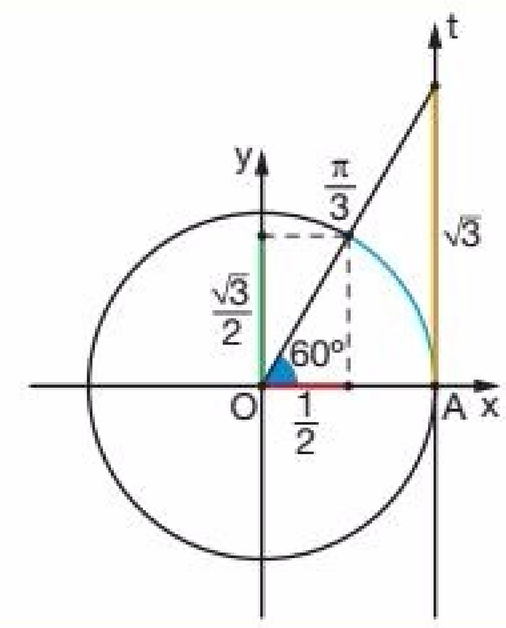
- 1º quadrante, então $\text{tg}\,\alpha > 0$
- 2º quadrante, então $\text{tg}\,\alpha < 0$
- 3º quadrante, então $\text{tg}\,\alpha > 0$
- 4º quadrante, então $\text{tg}\,\alpha < 0$

Sinais da tangente

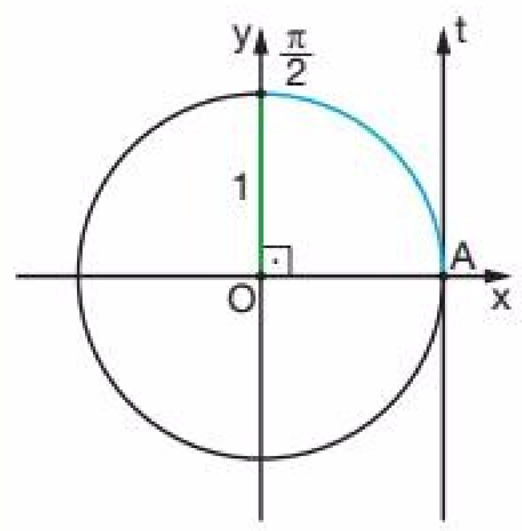
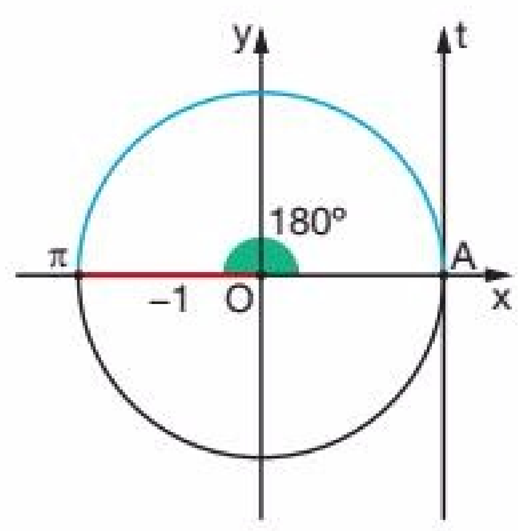
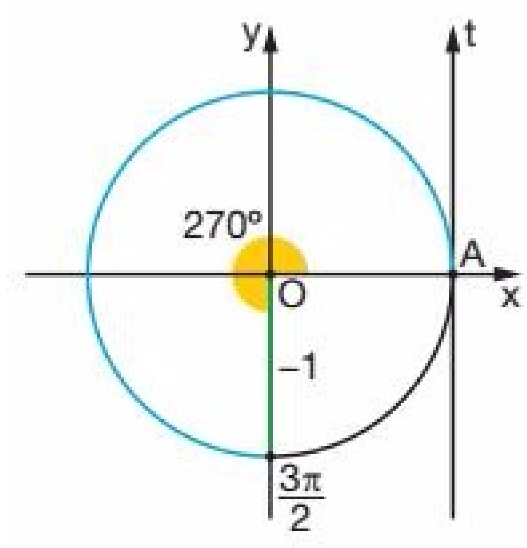
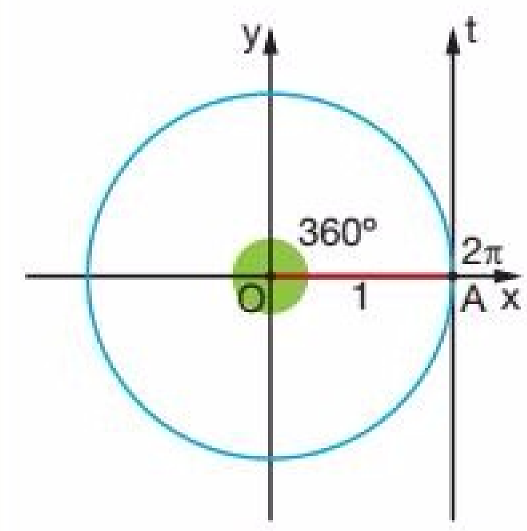


É importante observar que quando um arco $\widehat{AP}$ de medida α tem extremidade sobre o eixo y, $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Assim, para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, $\text{tg}\,\alpha$ não está definida.

Observe alguns valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°
			
$\text{sen}\,0 = 0$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 0 = 1$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$\text{tg}\,0 = 0$	$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$	$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Ilustrações: Acervo da editora

$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
			
$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ não está definida	$\text{sen}\,\pi = 0$ $\cos\pi = -1$ $\text{tg}\,\pi = 0$	$\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$ não está definida	$\text{sen}\,2\pi = 0$ $\cos 2\pi = 1$ $\text{tg}\,2\pi = 0$

Ilustrações: Acervo da editora

Organizando esses valores, temos:

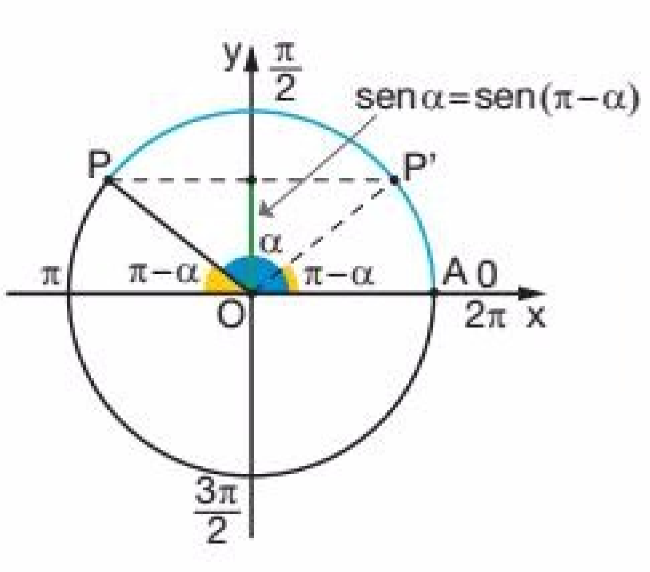
α	0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°	$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
$\text{sen}\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Redução ao 1º quadrante

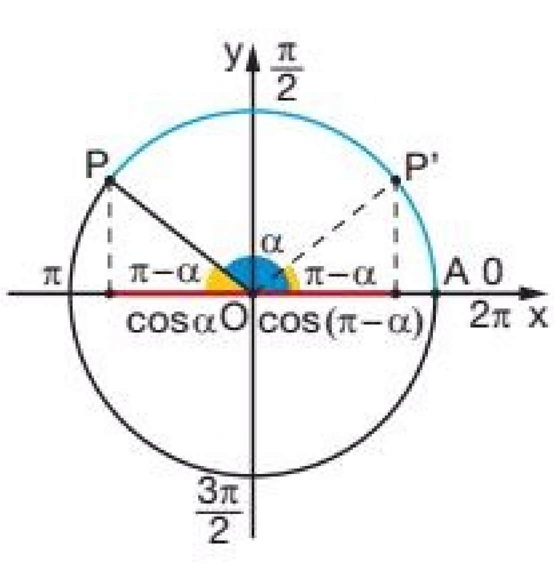
Neste tópico, iremos estudar como calcular o seno, o cosseno e a tangente em qualquer quadrante, relacionando-os a seus respectivos valores no 1º quadrante.

- Redução do 2º para o 1º quadrante

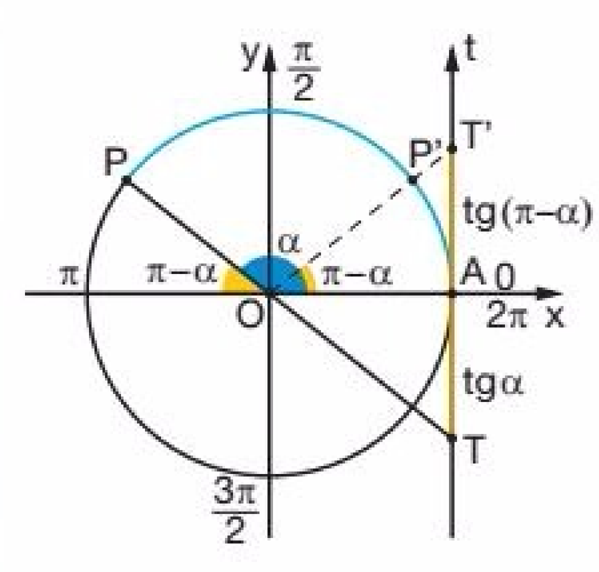
  Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos:



$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)$



$\cos\alpha = -\cos\,(\pi - \alpha)$



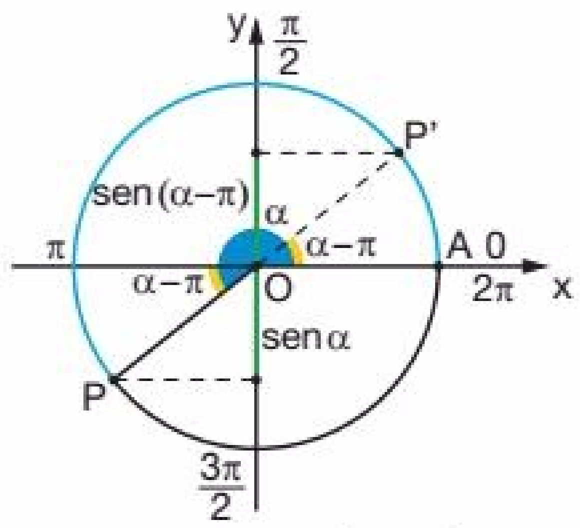
$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(\pi - \alpha)$

Ilustrações: Acervo da editora

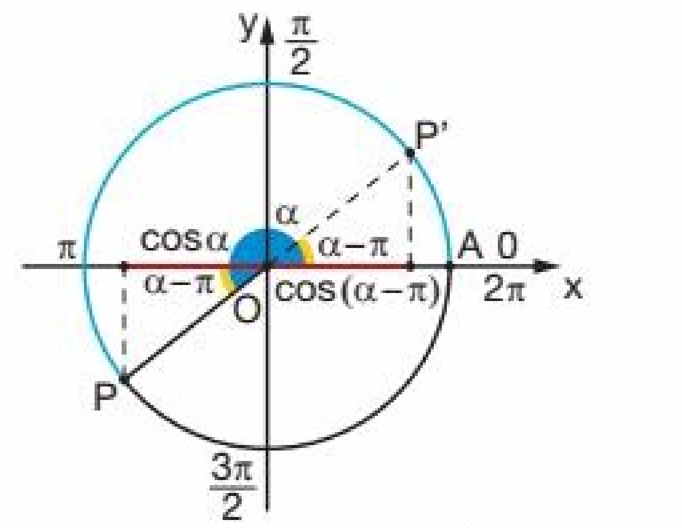
Note que P' é simétrico a *P* em relação ao eixo *y*.

- Redução do 3º para o 1º quadrante

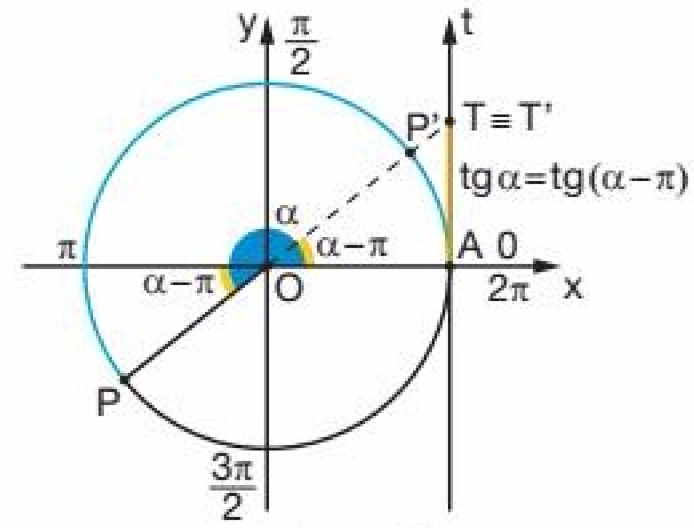
Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida α, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, temos:



$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha-\pi)$



$\cos\alpha = -\cos(\alpha-\pi)$

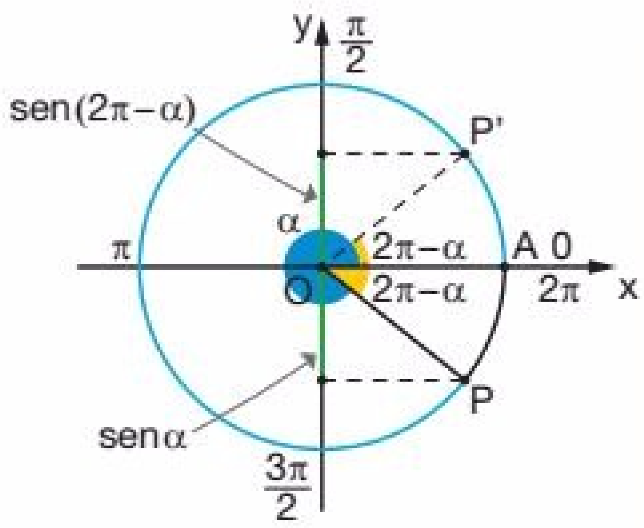


$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha-\pi)$

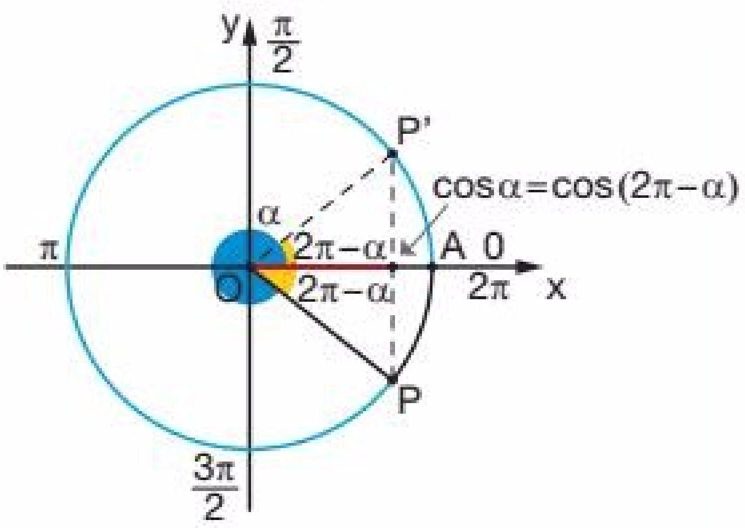
Note que P' é simétrico a *P* em relação ao ponto *O*.

- Redução do 4º para o 1º quadrante

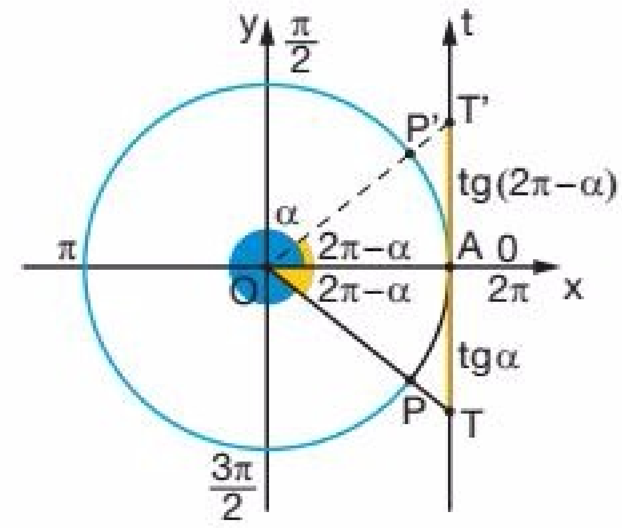
Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida α, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, temos:



$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)$



$\cos\alpha = \cos(2\pi-\alpha)$



$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$

Ilustrações: Acervo da editora

Note que P' é simétrico a *P* em relação ao eixo *x*.

Atividades resolvidas

R6. Calcule.

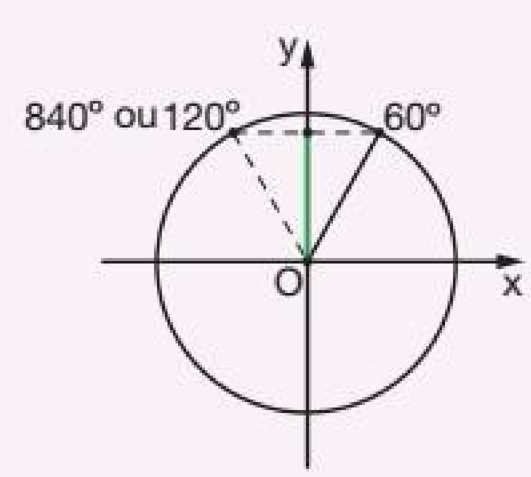
a) $\operatorname{sen} 840°$ b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ c) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$

Resolução

a) Nesse caso, devemos obter a 1ª determinação positiva do arco de 840°.

$$\begin{array}{l|l} 840 & 360 \\ \hline \underbrace{120}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{2}_{\text{número de voltas}} \end{array}$$

Como a extremidade do arco de 120° é no 2º quadrante $(90° < 120° < 180°)$, segue que:



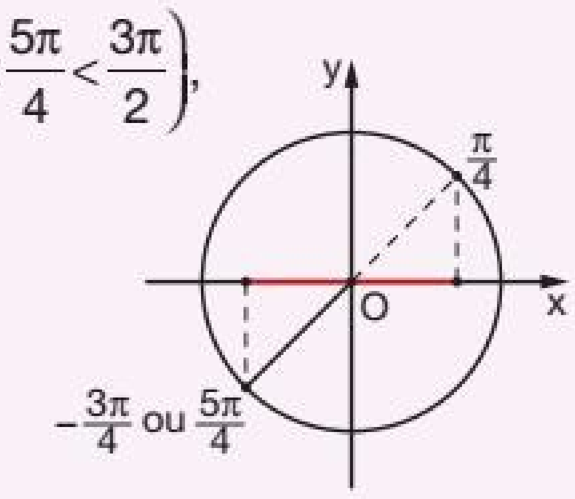
$$\operatorname{sen} 840° = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\operatorname{sen} 840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco $-\frac{3\pi}{4}$.

$$2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Como a extremidade do arco de $\frac{5\pi}{4}$ é no 3º quadrante $\left(\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}\right)$, segue que:



$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

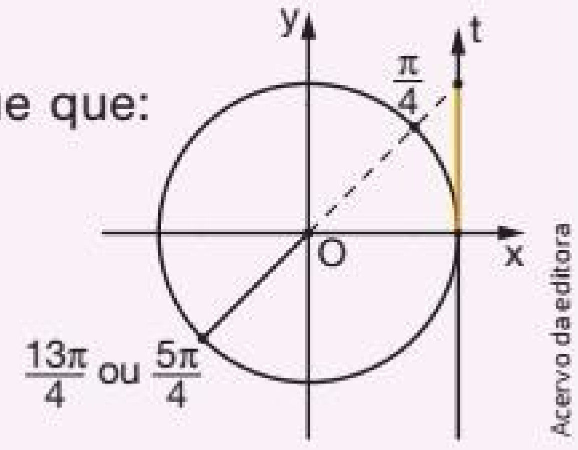
Ilustrações: Acervo da editora

c) Obtendo a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{13\pi}{4}$, temos:

$$\frac{13\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2\pi$$

Como a extremidade do arco de $\frac{5\pi}{4}$ é no 3º quadrante, segue que:

$$\text{tg}\,\frac{13\pi}{4}=\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}=\text{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$$



Portanto, $\text{tg}\,\frac{13\pi}{4}=1$.

R7. Calcule o valor da expressão $\dfrac{\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}+\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$.

Resolução

Inicialmente, reduzimos cada arco da expressão ao 1º quadrante e calculamos o valor da razão trigonométrica correspondente.

- $\frac{7\pi}{6}$ está no 3º quadrante, logo:

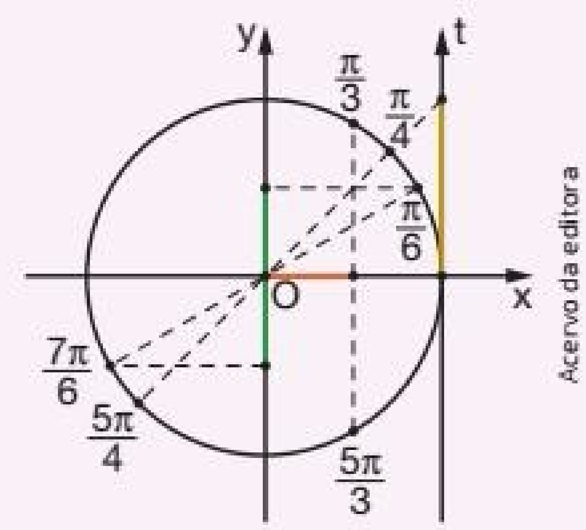
$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}=-\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}-\pi\right)=-\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

- $\frac{5\pi}{4}$ está no 3º quadrante, logo:

$$\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}=\text{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$$

- $\frac{5\pi}{3}$ está no 4º quadrante, logo:

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$



Em seguida, substituímos os valores na expressão:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}+\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}=1$$

Portanto, o valor da expressão é 1.

A relação fundamental $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ é válida para todo número real α e a relação $\text{tg}\alpha=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ é válida para qualquer número real $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$.

R8. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, determine $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$.

Resolução

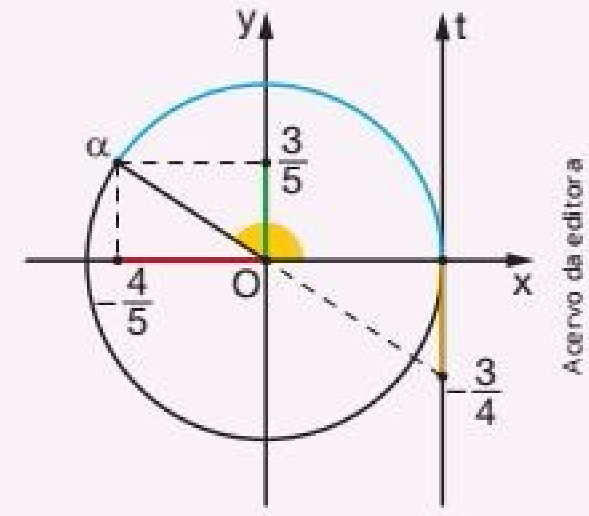
Da relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\,\alpha=1$, temos que:

$$\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\,\alpha=1\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\,\alpha=1\Rightarrow\cos^2\,\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, então $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Utilizando a relação $\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$, segue que:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}\Rightarrow\text{tg}\,\alpha=\frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{-\frac{4}{\cancel{5}}}=-\frac{3}{4}$$



Portanto, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ e $\text{tg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$.

19. Em cada item, determine a quais quadrantes a extremidade de α pode pertencer.

a) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ 2º ou 3º

b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ 1º ou 2º

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ 1º ou 3º

d) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{7}$ 3º ou 4º

e) $\operatorname{tg}\alpha = -5$ 2º ou 4º

f) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ 1º ou 4º

20. Determine se é positivo ou negativo o seno do arco de medida:

a) $2\,120°$ negativo

b) $-\frac{39\pi}{5}$ positivo

c) $-1\,605°$ negativo

d) $\frac{43\pi}{9}$ positivo

21. Em qual quadrante os valores de α satisfazem simultaneamente:

a) $\operatorname{tg}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$? 2º

b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? 2º

c) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$? 1º

d) $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$? 4º

e) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? 3º

22. Escreva as igualdades utilizando apenas arcos do 1º quadrante e determine o sinal de *A* em cada uma delas.

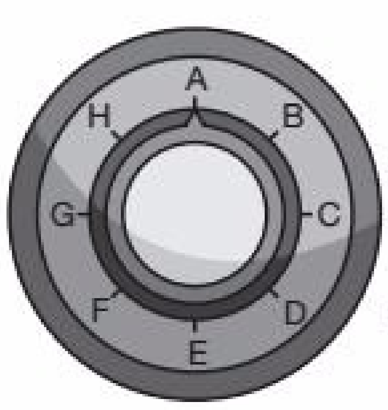
a) $A = \operatorname{sen}500° \cdot \cos 3\,200°$ $A = \operatorname{sen}40° \cdot \cos 40°$; $A > 0$

b) $A = \cos\frac{22\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $A = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; $A > 0$

c) $A = \operatorname{tg}1\,345° \cdot \operatorname{sen}(-1\,975°)$ $A = \operatorname{tg}85° \cdot (-\operatorname{sen}5°)$; $A < 0$

d) $A = \cos\frac{27\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}(-2\,780°)$ $A = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}80°$; $A < 0$

23. Para abrir certo cofre, além das chaves de segurança, é necessário saber um segredo, que consiste em uma combinação de movimentos do botão para as posições *A*, *B*, ..., *H*.



Acervo da editora

O segredo para abrir o cofre é a seguinte sequência de giros, partindo da posição *A*:

I) no sentido horário (negativo) até *F*

II) no sentido anti-horário (positivo) até *D*

III) no sentido anti-horário (positivo) até *H*

IV) no sentido horário (negativo) até *C*

a) Qual é o ângulo correspondente a cada um desses giros? I: $-225°$; II: $90°$; III: $180°$; IV: $-135°$

b) Qual é a diferença, em graus, medida no sentido anti-horário (positivo) entre a posição inicial e a posição final do botão de combinação, nessa ordem? $270°$

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. $\operatorname{sen}270° = -1$ e $\cos 270° = 0$

24. Em 40 minutos, um ciclista percorreu $\frac{25}{8}$ de volta em uma pista circular de raio *r* e, em seguida, parou para descansar.

a) Qual é o ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido pelo ciclista? $1\,125°$

b) Qual é o ângulo menor do arco de extremidades no ponto de partida e no ponto em que o ciclista parou? $45°$

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. $\operatorname{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Quantas voltas a mais ele deve percorrer nesta pista para que o arco descrito em todo o percurso seja igual a $2\,565°$? 4 voltas

25. Para rosquear totalmente certo parafuso, é necessário girá-lo em $5\,550°$.

a) Qual é, em graus, a medida do menor ângulo correspondente à diferença entre a posição inicial da chave e sua posição ao terminar de rosquear o parafuso? $150°$

b) Calcule o seno e o cosseno desse ângulo. $\operatorname{sen}150° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

26. Calcule.

a) $\operatorname{sen}1\,110°$ $\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}765°$ 1

c) $\cos\frac{25\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$

d) $\operatorname{sen}\frac{29\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos(-2\,310°)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos 1\,770°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27. Determine os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$, dado que:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$

b) $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

28. Para quais valores de *x* a equação $|\cos x| = \cos x$ é verdadeira? $2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$, ambos com $k \in \mathbb{Z}$

29. Escreva um valor para α de maneira que $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Compare sua resposta com a dos colegas. As possíveis respostas desta atividade correspondem aos arcos cuja primeira determinação positiva é do segundo quadrante.

30. **Desafio**

O professor de Lucas propôs o seguinte desafio à turma:

"Para quais valores de *k*, com $k \in \mathbb{Z}$, a igualdade $\frac{\operatorname{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\operatorname{tg}(225° + 2k\pi)} = 1$ é verdadeira?"

Após alguns cálculos e discussões em grupo, a turma apresentou a conclusão de que para todo valor de *k* a igualdade é verdadeira.

A conclusão apresentada pelos alunos está correta? Justifique. Resposta no final do livro.

Funções trigonométricas

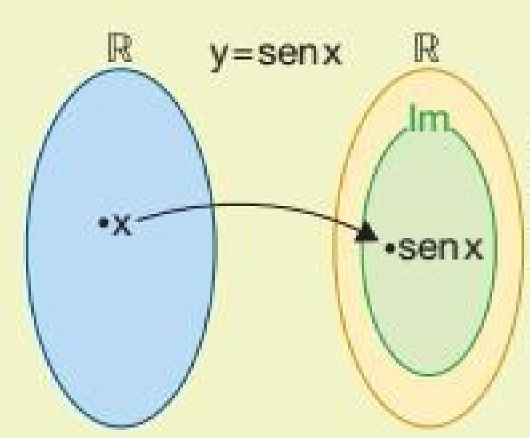
São diversas as aplicações da Trigonometria em diferentes campos do conhecimento, como na realização de cálculos de distâncias inacessíveis (Trigonometria nos triângulos) e o estudo de fenômenos periódicos. Esses fenômenos possuem oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observados na Música, por exemplo.

Estudaremos agora as funções trigonométricas e algumas de suas aplicações.

Função seno

Podemos associar um número real *x* qualquer ao seno de um arco que mede *x* radianos, ou seja, associar *x* a sen x. Para $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo, associamos o número 1, pois $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

Definimos como **função seno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real *x* associa o seno de um arco de *x* radianos, ou seja, a cada *x* associa sen x.

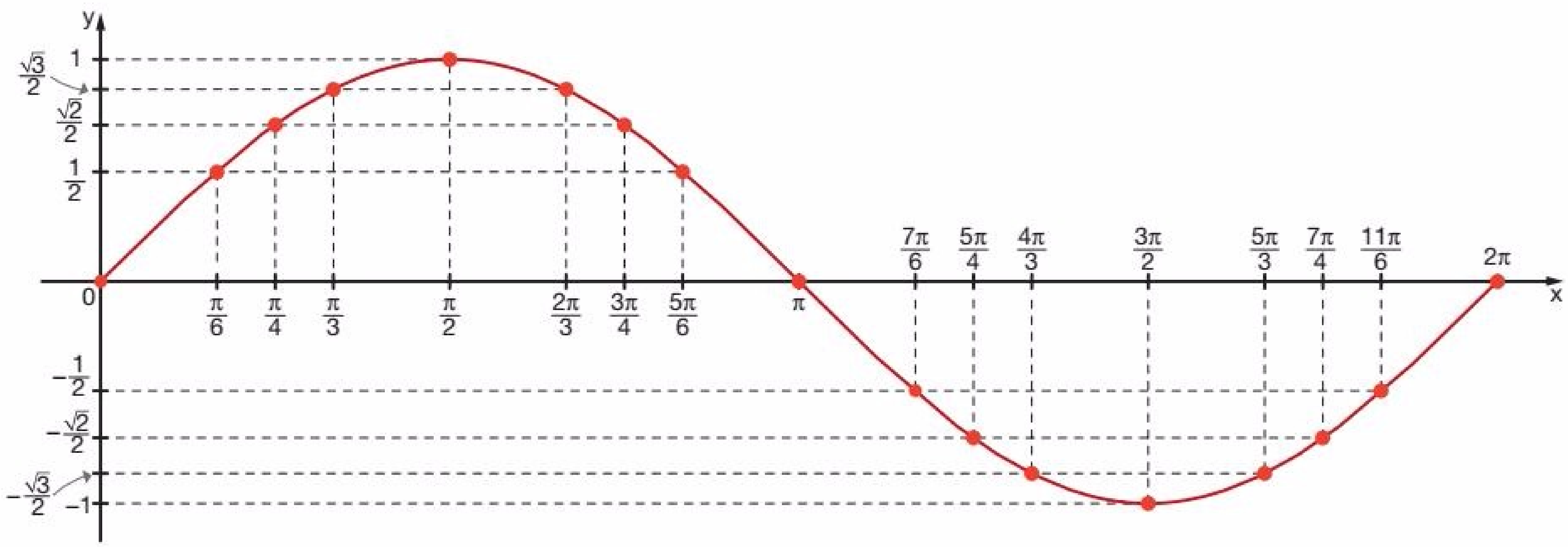


Para esboçar o gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, atribuímos valores a *x* e calculamos os valores correspondentes de $f(x) = y$.

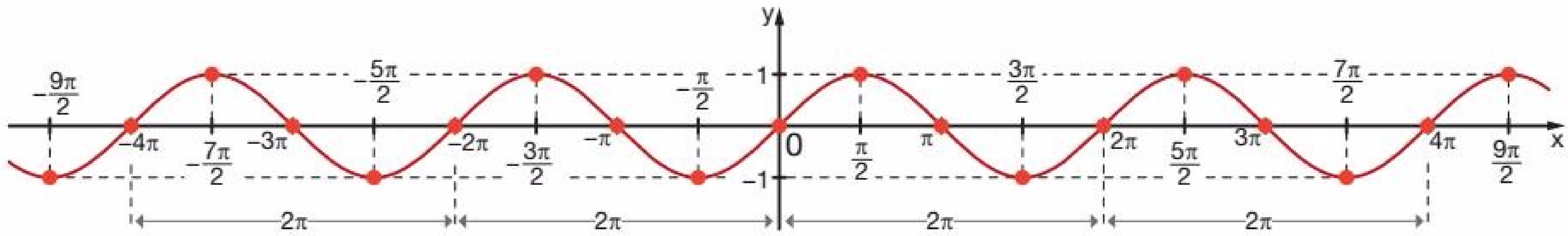
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$(\pi, 0)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$(2\pi, 0)$

Como há infinitos valores para x entre aqueles indicados, há infinitos pontos no gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre aqueles cujas coordenadas foram obtidas. Esboçando o gráfico de f inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$, temos:



Como $D(f) = \mathbb{R}$, há valores de x menores que zero e maiores que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, é dado por:



Ilustrações: Acervo da editora

Algumas características da função $f(x) = \operatorname{sen} x$:

- O domínio de f é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem de f corresponde ao intervalo $[-1, 1]$: $\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$.
- A função f é **periódica** e tem período 2π, pois seus valores se repetem de 2π em 2π.
- O gráfico da função f é uma curva denominada **senoide**.
- A função f é **ímpar**, pois para todo $x \in D(f)$, $f(x) = -f(-x)$.

Verifique se os alunos vão perceber que o primeiro gráfico apresentado nesta página é uma parte ampliada do gráfico que será apresentado depois.

> Exemplo

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Dado $k \in \mathbb{Z}$, a função f é **crescente** para $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e **decrescente** para $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

> Exemplo

Para $k = 1$, temos que f é crescente para $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ e decrescente para $x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.

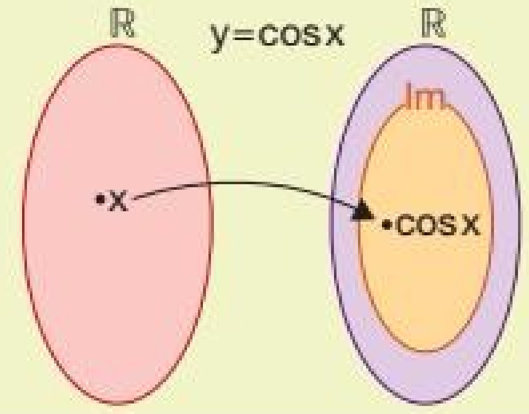
- Dado $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) > 0$ para $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ e $f(x) < 0$ para $x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$.

> Exemplo

Para $k = 2$, temos $f(x) > 0$ para $x \in]4\pi, 5\pi[$ e $f(x) < 0$ para $x \in]3\pi, 4\pi[$.

Função cosseno

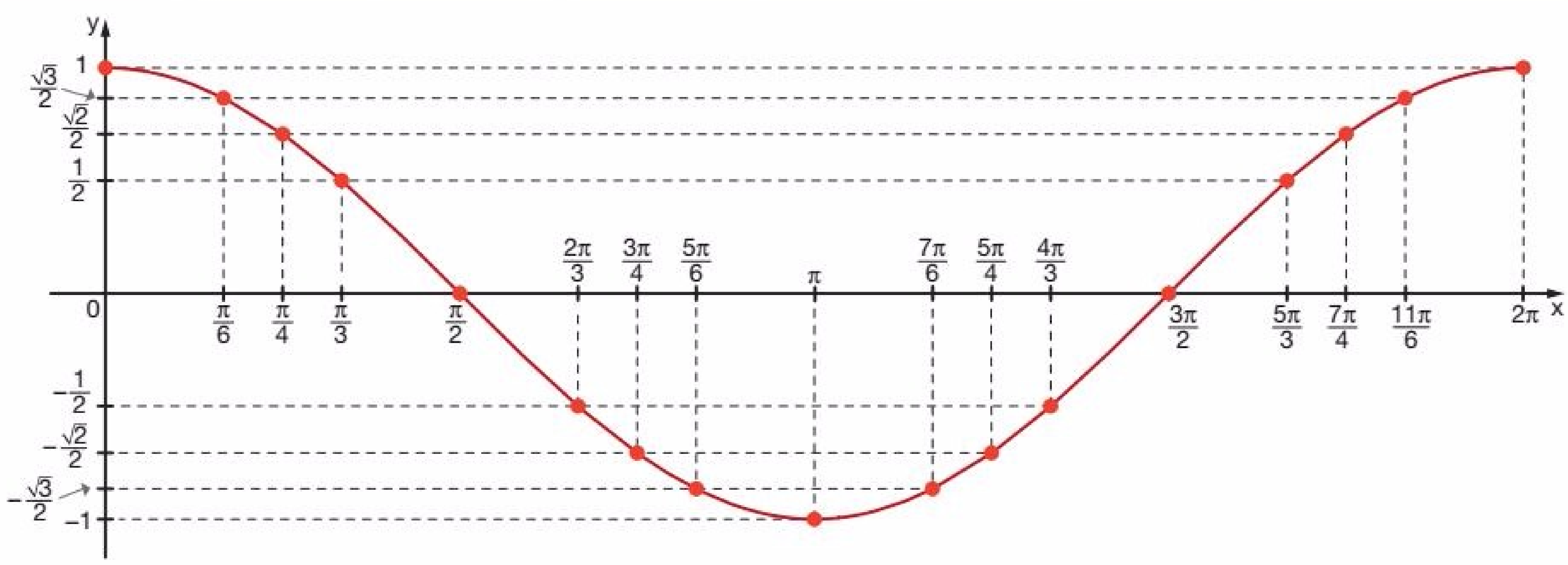
Definimos como **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, a cada x associa $\cos x$.



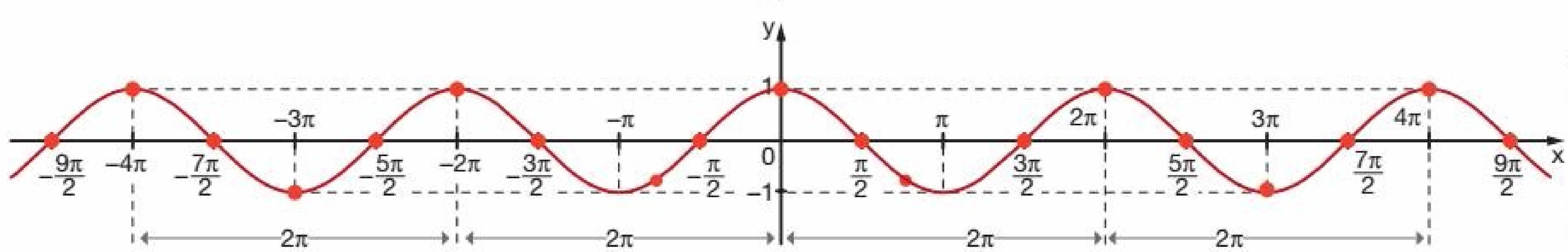
Inicialmente, vamos esboçar o gráfico $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$



Esboçando o gráfico de $f(x) = \cos x$ para todo domínio, temos:

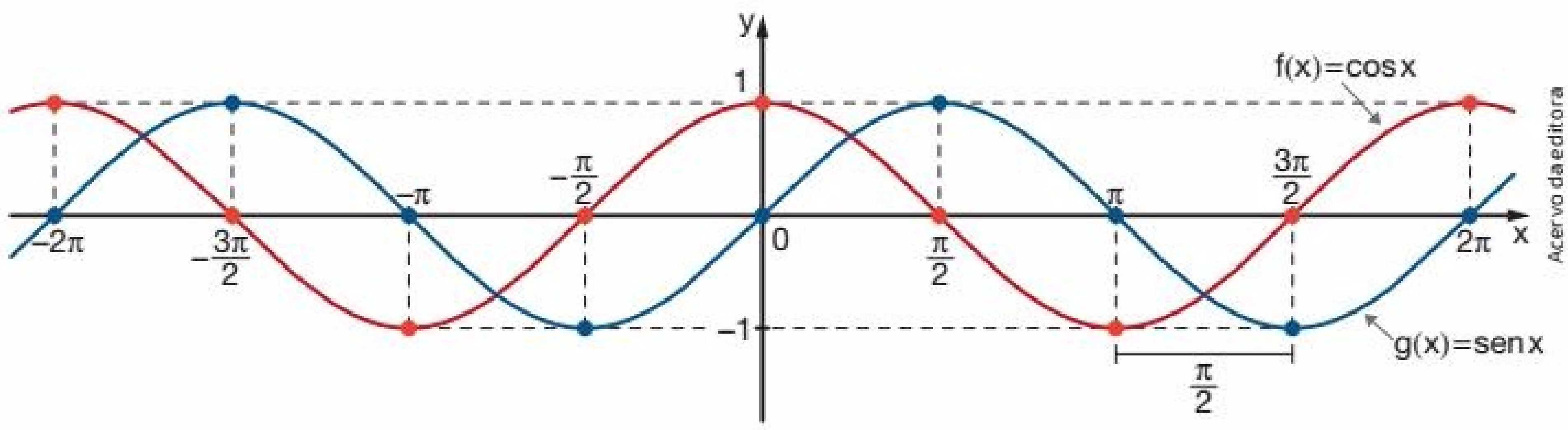


Ilustrações: Acervo da editora

Algumas características da função $f(x) = \cos x$:

- O domínio de f é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem de f corresponde ao intervalo $[-1, 1]$: $Im(f) = [-1, 1]$.
- A função f é **periódica** e tem período 2π, pois seus valores se repetem de 2π em 2π.

- O gráfico da função cosseno $(f(x)=\cos x)$ é congruente ao da função seno $(g(x)=\text{sen }x)$ transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



- A função *f* é **par**, pois para todo $x \in D(f)$, $f(x)=f(-x)$, ou seja, $\cos x=\cos(-x)$.

› Exemplo

$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Dado $k \in \mathbb{Z}$, a função *f* é **crescente** para $x \in [-\pi+2k\pi, 2k\pi]$ e **decrescente** para $x \in [2k\pi, \pi+2k\pi]$.

› Exemplo

Para $k=-1$, temos que *f* é crescente para $x \in [-3\pi, -2\pi]$ e decrescente para $x \in [-2\pi, -\pi]$.

- Dado $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)>0$ para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ e $f(x)<0$ para $x \in \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$.

› Exemplo

Para $k=0$, temos $f(x)>0$ para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $f(x)<0$ para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Atividades resolvidas

R9. Para quais valores reais de *m* a equação $\text{sen}x = 2m+5$ tem solução?

Resolução

Considerando a função $f(x)=\text{sen}x$, temos que $\text{Im}(f)=[-1, 1]$, ou seja, $-1 \le \text{sen}x \le 1$.

Assim, segue que:

$$-1 \le \text{sen}x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2m+5 \le 1 \Rightarrow -6 \le 2m \le -4 \Rightarrow -3 \le m \le -2$$

Portanto, a equação tem solução para $m \in \mathbb{R}$ tal que $-3 \le m \le -2$.

R10. Resolva graficamente a inequação $\text{sen }x-\cos x \ge 0$, para $0 \le x \le 2\pi$.

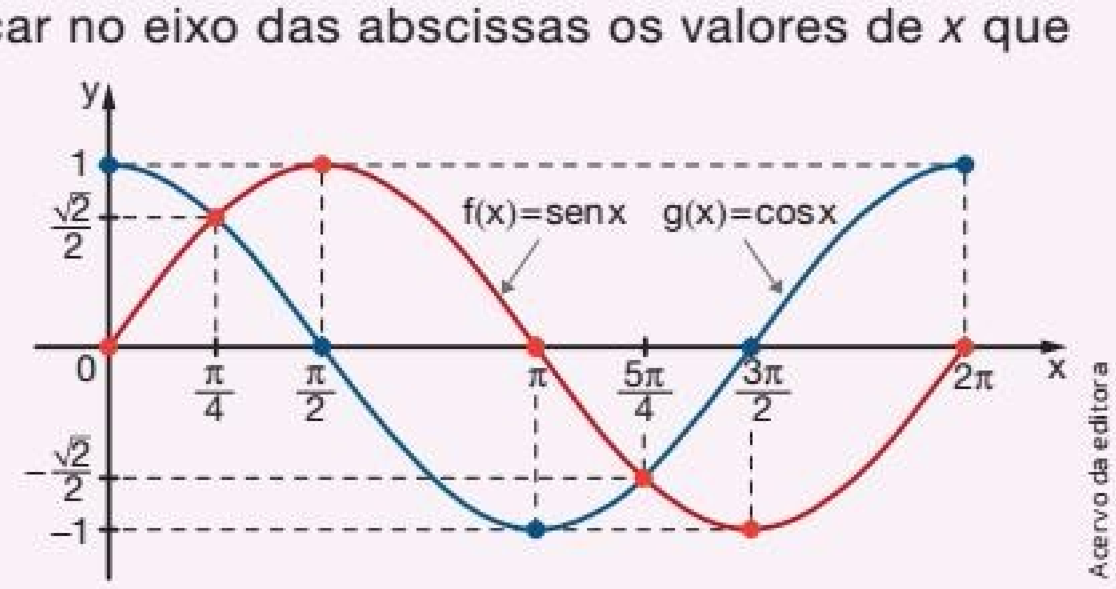
Resolução

- $\text{sen }x-\cos x \ge 0 \Rightarrow \text{sen }x \ge \cos x$

Vamos esboçar num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x)=\text{sen }x$ e $g(x)=\cos x$ no intervalo $0 \le x \le 2\pi$ e verificar no eixo das abscissas os valores de *x* que satisfazem a inequação $\text{sen }x \ge \cos x$.

Note que a curva da função seno está acima da curva da função cosseno ou a intersecta no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Portanto, $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}\right\}$.



Atividades

Anote as respostas no caderno.

31. Em cada item, determine os valores de *x*, sabendo que:

a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$ $x=\frac{7\pi}{4}$ ou $x=\frac{9\pi}{4}$

b) $\text{sen}\, x=-\frac{1}{2}$, com $2\pi<x<\frac{7\pi}{2}$ $x=\frac{19\pi}{6}$

c) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $90°<x<540°$ $x=150°$ ou $x=210°$ ou $x=510°$

d) $\text{sen}\, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{11\pi}{4}<x<\frac{9\pi}{2}$ $x=\frac{17\pi}{4}$

e) $\text{sen}\, x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $360°<x<720°$ $x=600°$ ou $x=660°$

f) $\cos x=\frac{1}{2}$, com $390°<x<630°$ $x=420°$

32. Para cada item, calcule os valores de *m* para os quais a igualdade seja possível.

a) $\cos x=3-m$, com $0<x<\frac{\pi}{2}$ $2<m<3$

b) $\text{sen}\, x=2m+1$, com $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ $-1<m<-\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\, x=\frac{3m-2}{4}$, com $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$

d) $\cos x=-2m+7$, com $180°<x<360°$ $3<m<4$

33. Desafio

Sejam *f* e *g* funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=\text{sen}\, x$ e $g(x)=\cos x$. Considerando a função *h*, definida por $h(x)=[g(x)]^2+f(x)-1$, responda:

a) Para quais valores de *x* a função *h* atinge seu valor máximo? $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, ambos com $k\in\mathbb{Z}$

b) Qual é o valor máximo da função *h*? $\frac{1}{4}$

34. O gráfico da função seno é congruente ao gráfico da função cosseno, porém transladado em *a* unidades para a direita.

a) Qual é o valor de *a*? $\frac{\pi}{2}$

b) Quais as coordenadas dos pontos em que o gráfico do seno cruza o do cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$? $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Esboce os gráficos do seno e do cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$. Resposta no final do livro.

Funções do tipo trigonométricas: $f(x)=a+b\cdot \text{sen}(cx+d)$ e $g(x)=a+b\cdot\cos(cx+d)$

As funções definidas por $f(x)=a+b\cdot\text{sen}(cx+d)$ e $g(x)=a+b\cdot\cos(cx+d)$, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números reais com $b\neq0$ e $c\neq0$, são chamadas **funções do tipo trigonométricas**, e muitas delas estão relacionadas a fenômenos periódicos, como a variação das marés.

Note que as funções $f(x)=\text{sen}\, x$ e $g(x)=\cos x$ são casos particulares das funções do tipo trigonométricas, ou seja, quando $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$.

Rubens Chaves/Pulsar

A variação das marés pode ser modelada de acordo com uma função do tipo $h(t)=a\cdot\text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, em que $h(t)$ é a altura da maré em relação ao nível médio do mar, *a* é um coeficiente que determina a altura máxima da maré e *t* é o tempo, medido em horas. Em um período de 24h48min, um dia lunar, as marés altas ocorrem duas vezes. Na fotografia podemos observar a maré baixa na praia Barreiras do Boqueirão, em Japaratinga (AL), em 2015.

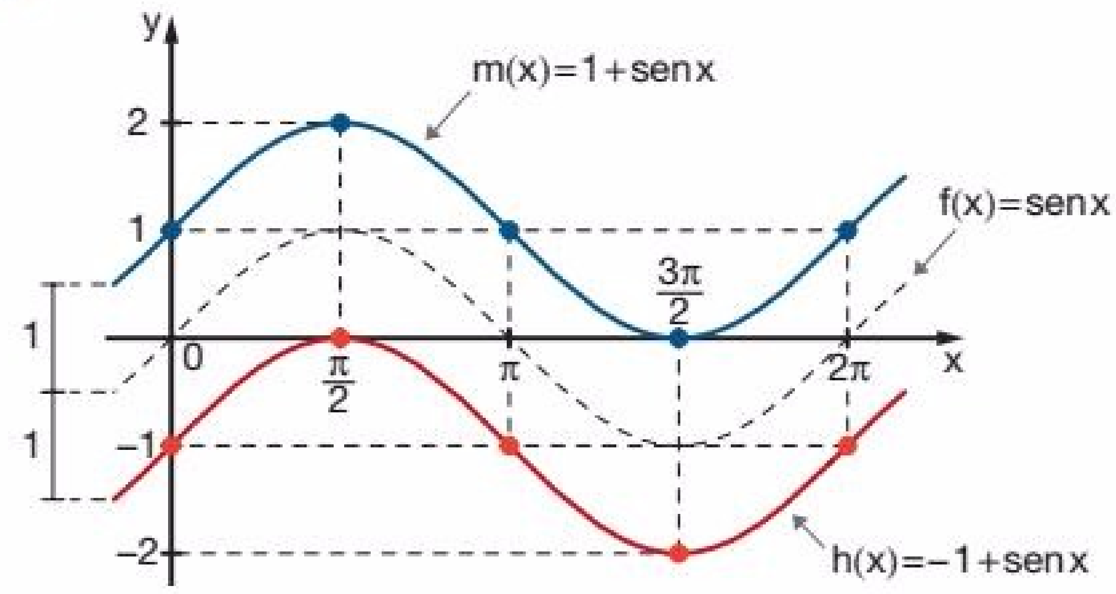
São exemplos de funções do tipo trigonométricas:

- $f(x)=5-3\cdot\text{sen}(2x+1)$
  Nesse caso, $a=5$, $b=-3$, $c=2$ e $d=1$.
- $g(x)=-1+\cos 3x$
  Nesse caso, $a=-1$, $b=1$, $c=3$ e $d=0$.

As funções do tipo trigonométricas $f(x)=a+b\cdot\text{sen}(cx+d)$ e $g(x)=a+b\cdot\cos(cx+d)$ têm características semelhantes a $f(x)=\text{sen}\,x$ e $g(x)=\cos x$, respectivamente. As constantes *a*, *b*, *c* e *d* estão relacionadas a essas características da seguinte maneira:

- A constante *a* **translada** o gráfico da função em $|a|$ unidades para cima se $a>0$, ou para baixo se $a<0$. A constante *a* altera a imagem da função.

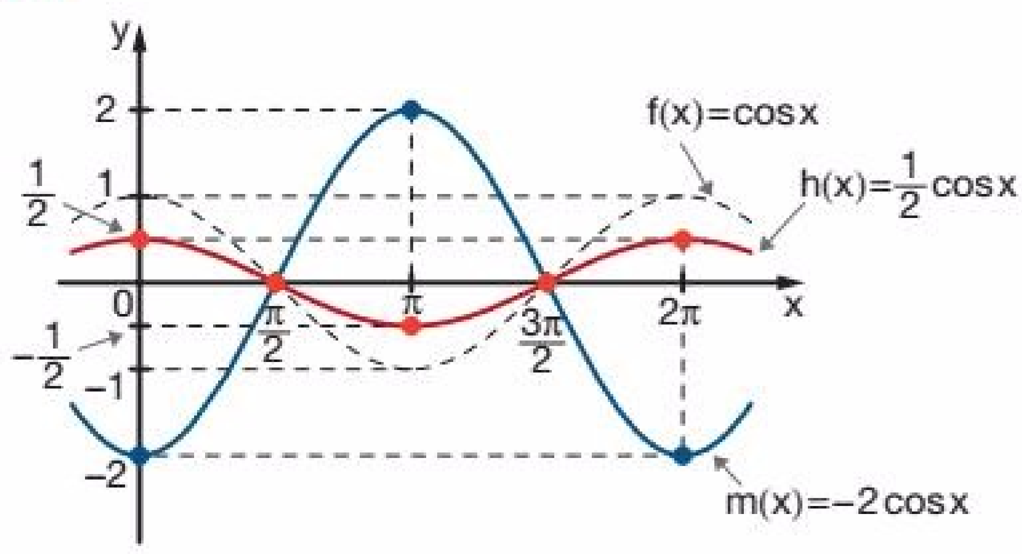
› Exemplo



- $Im(f)=[-1,1]$
- $Im(m)=[0,2]$
- $Im(h)=[-2,0]$

- A constante *b* **amplia verticalmente** o gráfico da função se $|b|>1$ e **comprime verticalmente** se $|b|<1$. A constante *b* altera a imagem da função.

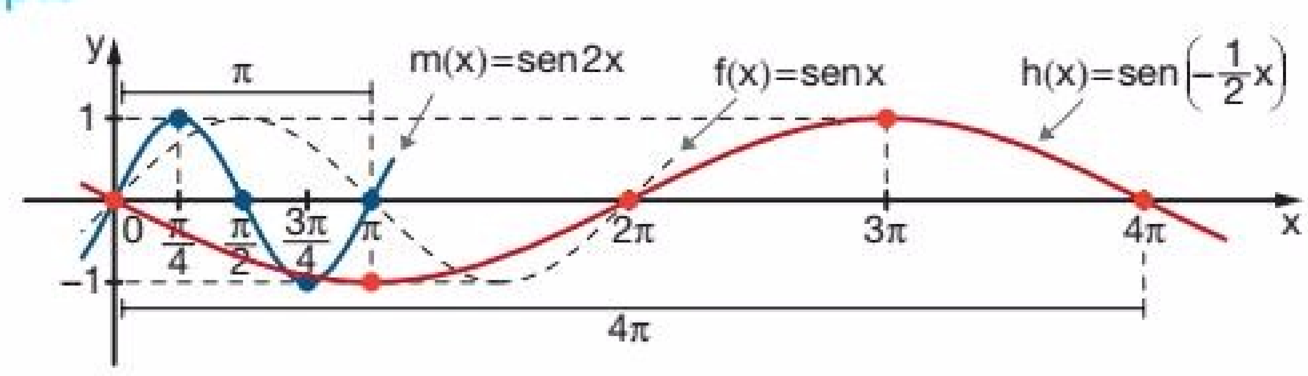
› Exemplo



- $Im(f)=[-1,1]$
- $Im(m)=[-2,2]$
- $Im(h)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

- A constante *c* **amplia** o período da função se $|c|<1$ e **comprime** se $|c|>1$, com o novo período $p=\frac{p_t}{|c|}$, sendo p_t o período da função trigonométrica correspondente.

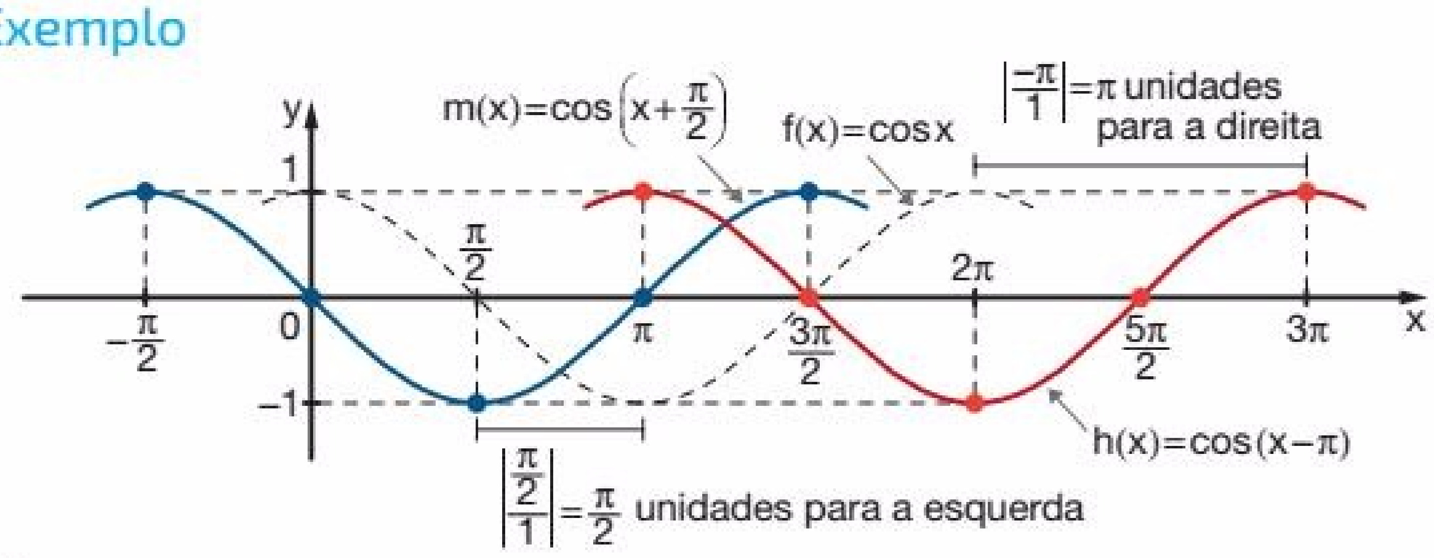
› Exemplo



- período de *f*: $p_f=2\pi$
- período de *m*: $p_m=\frac{p_f}{|c|}=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$
- período de *h*: $p_h=\frac{p_f}{|c|}=\frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

- A constante *d* **translada** o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $\frac{d}{c}>0$, ou para a direita se $\frac{d}{c}<0$.

› Exemplo



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R11. Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das seguintes funções.

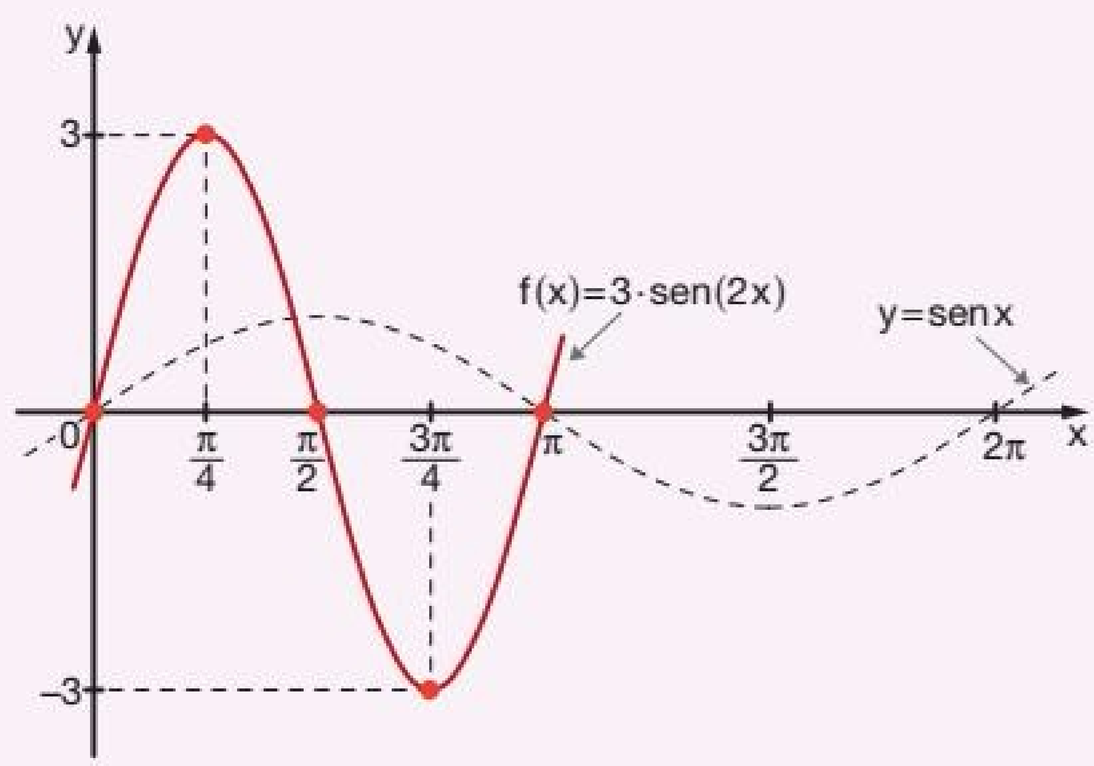
a) $f(x)=3\cdot\text{sen}(2x)$

b) $g(x)=1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Resolução

a) Para esboçar o gráfico de $f(x)=3\cdot\text{sen}(2x)$, é conveniente atribuirmos ao argumento $(2x)$ os arcos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Para isso, atribuímos a *x* metade dos valores desses arcos.

x	$y=f(x)=3\cdot\text{sen}(2x)$	(x, y)
0	$y=3\cdot\text{sen}(\underbrace{2\cdot 0}_{0})=3\cdot 0=0$	$(0,0)$
$\frac{\pi}{4}$	$y=3\cdot\text{sen}\left(\underbrace{2\cdot\frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}}\right)=3\cdot 1=3$	$\left(\frac{\pi}{4},3\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$y=3\cdot\text{sen}\left(\underbrace{2\cdot\frac{\pi}{2}}_{\pi}\right)=3\cdot 0=0$	$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y=3\cdot\text{sen}\left(\underbrace{2\cdot\frac{3\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{2}}\right)=3\cdot(-1)=-3$	$\left(\frac{3\pi}{4},-3\right)$
π	$y=3\cdot\text{sen}(\underbrace{2\cdot\pi}_{2\pi})=3\cdot 0=0$	$(\pi,0)$

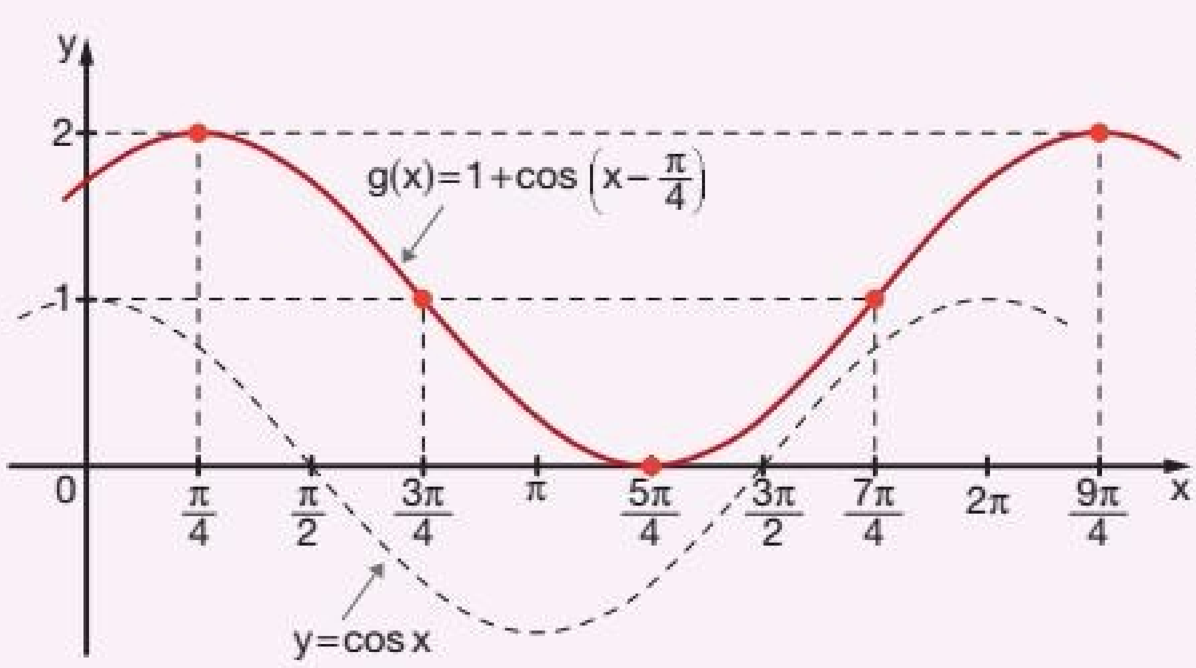


$D(f)=\mathbb{R}$, $Im(f)=[-3,3]$ e $p=\pi$.

Comparando o gráfico da função *f* com o gráfico da função correspondente a y = sen x, observamos que ele foi ampliado verticalmente e o período foi comprimido pela metade.

b) Para esboçar o gráfico de $g(x)=1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, atribuímos para *x* a soma de $\frac{\pi}{4}$ aos valores dos arcos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

x	$y=g(x)=1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	(x, y)
$\frac{\pi}{4}$	$y=1+\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}_{0}\right)=1+1=2$	$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y=1+\cos\left(\underbrace{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}}\right)=1+0=1$	$\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$y=1+\cos\left(\underbrace{\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}_{\pi}\right)=1-1=0$	$\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$y=1+\cos\left(\underbrace{\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{2}}\right)=1+0=1$	$\left(\frac{7\pi}{4},1\right)$
$\frac{9\pi}{4}$	$y=1+\cos\left(\underbrace{\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}_{2\pi}\right)=1+1=2$	$\left(\frac{9\pi}{4},2\right)$



Ilustrações: Acervo da editora

$D(g)=\mathbb{R}$, $Im(g)=[0,2]$ e $p=2\pi$.

Comparando o gráfico da função *g* com o gráfico da função correspondente a y = cos x, observamos que ele foi transladado em 1 unidade para cima e $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita.

R12. Determine o período de cada função.

a) $f(x) = \text{sen}\,(2x + \pi)$

b) $g(x) = 1 + \cos\left(2\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

Resolução

a) O período da função trigonométrica correspondente a $y = \text{sen}\, x$ é $p_t = 2\pi$, logo:

$$p = \frac{p_t}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} \Rightarrow \boxed{p = \pi}$$

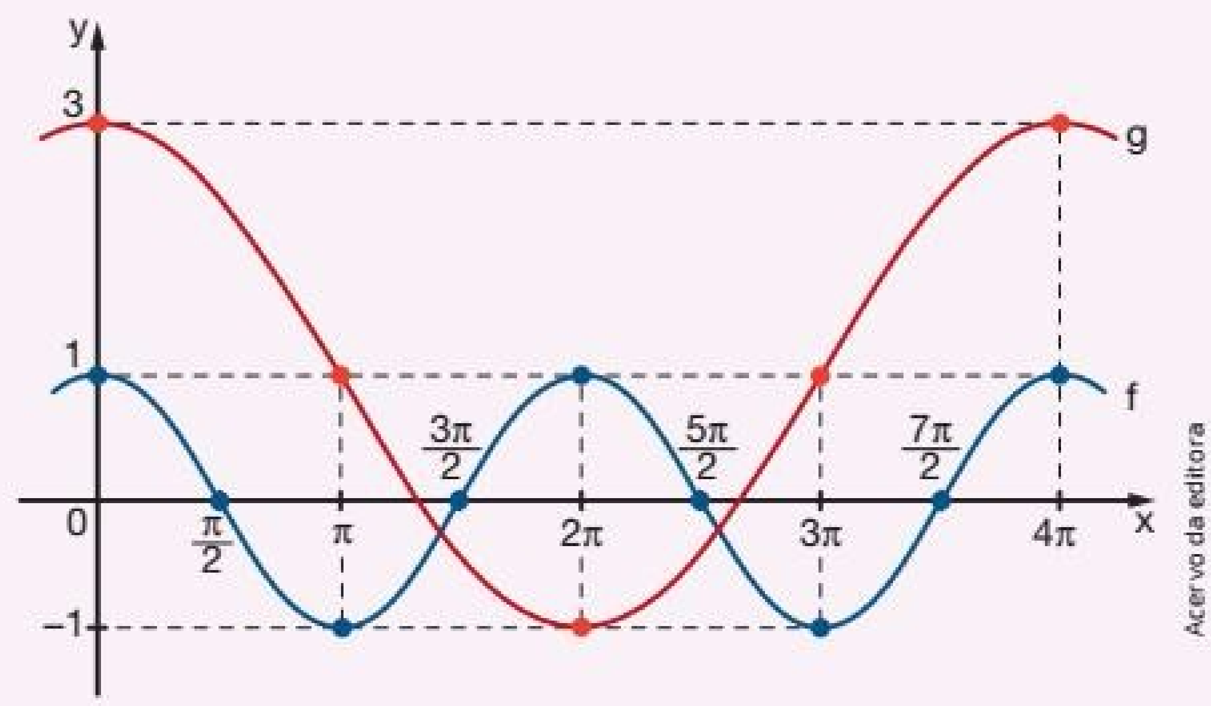
Note que o período da função *f* é a **metade** do período da função correspondente a $y = \text{sen}\, x$, pois $|c| = 2$.

b) Temos que $p_t = 2\pi$. Logo:

$$p = \frac{p_t}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} \Rightarrow \boxed{p = 4\pi}$$

Note que o período da função *g* é o **dobro** do período da função correspondente a $y = \cos x$, pois $|c| = \dfrac{1}{2}$.

R13. No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Determine o valor das constantes *a*, *b*, *c* e *d*, e escreva a função *g*.



Acervo da editora

Resolução

Nota-se que o gráfico da função *g*:

- possui período igual a 4π; então:

$$4\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{2}$$

Para $c = -\dfrac{1}{2}$, temos $\cos\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \cos\dfrac{x}{2}$, pois a função cosseno é par.

- tem imagem no intervalo $[-1, 3]$; logo $a = 1$ e $b = 2$;
- em relação ao gráfico de *f*, não foi transladado horizontalmente; logo $d = 0$;

Portanto, $g(x) = 1 + 2 \cdot \cos\dfrac{x}{2}$.

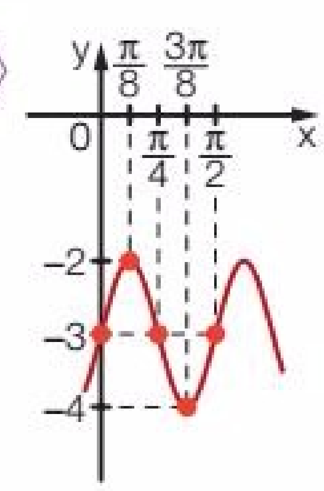
Atividades

Anote as respostas no caderno.

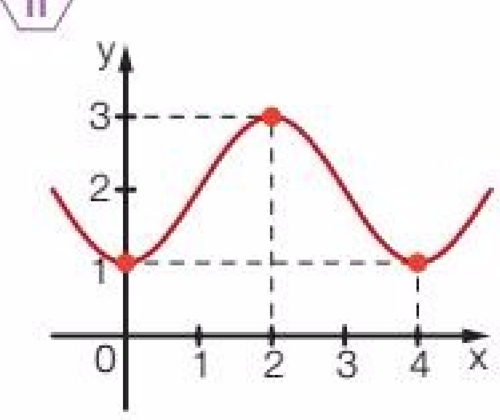
35. Dentre os gráficos a seguir, determine aquele que melhor representa cada uma das funções.

- $f(x) = -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ III
- $g(x) = -3 + \text{sen}\,(4x)$ I
- $h(x) = 2 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ II

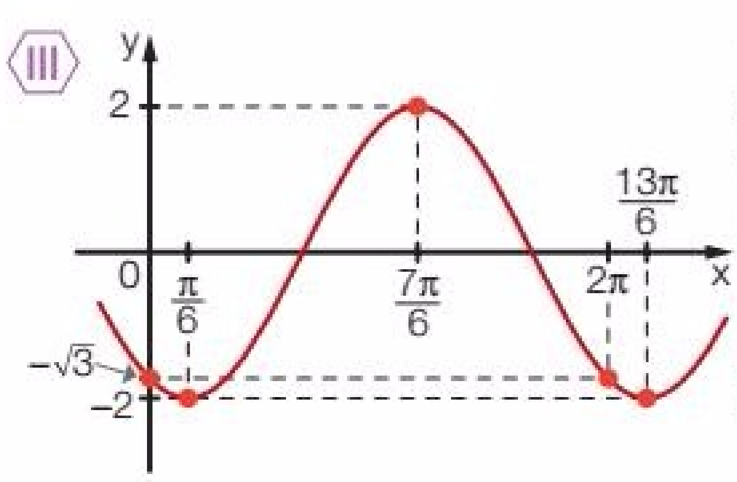
I



II



III



Ilustrações: Acervo da editora

36. Determine o período, a imagem e esboce o gráfico de cada função. Respostas no final do livro.

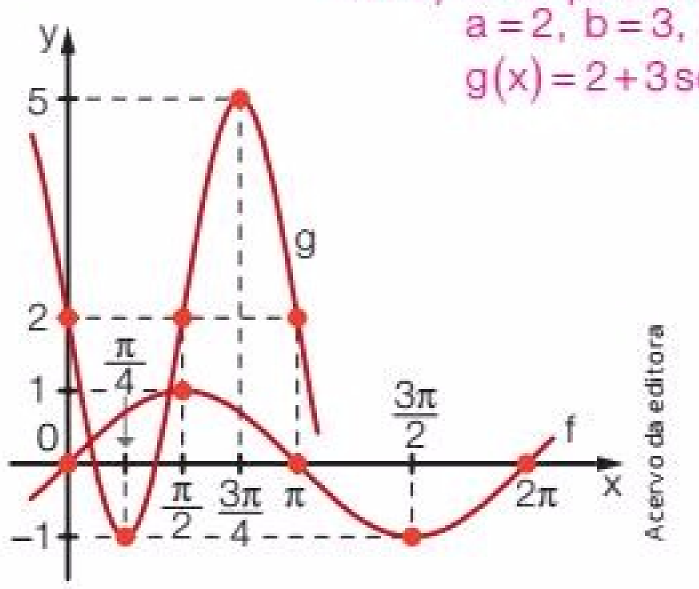
a) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x + \pi\right)$

b) $g(x) = -2 + \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $h(x) = 2 + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}x + \dfrac{2\pi}{5}\right)$

37. Observe os gráficos que representam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$.

37. a) Uma possível resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = \pi$, $g(x) = 2 + 3\,\text{sen}(2x + \pi)$.



a) Determine o valor das constantes a, b, c e d e escreva a função g.

b) Relacione o período da função f com o período da função g e com a constante c. Determine o período de cada uma das funções. Resposta no final do livro.

c) Determine a imagem de cada uma das funções. Quais são as constantes que determinam a variação na imagem da função g em relação a f? Resposta no final do livro.

38. Calcule a diferença entre os valores máximo e mínimo de cada função.

a) $f(x) = 3 - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 4

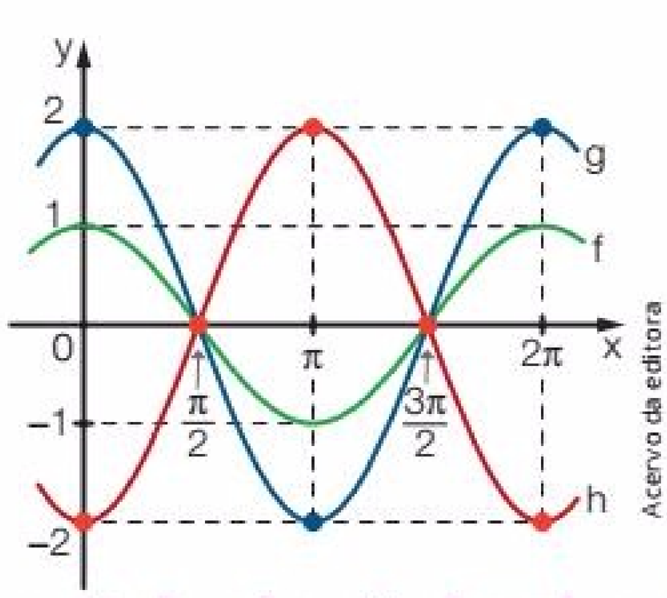
b) $g(x) = -1 + \frac{1}{4}\cos(3x)$ $\frac{1}{2}$

c) $h(x) = 3 - \text{sen}^2(2x + \pi)$ 1

d) $m(x) = -2 + \frac{3}{2}\left|-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ $\frac{3}{2}$

e) $n(x) = -1 + \sqrt{4\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$ 2

39. Observe os gráficos das funções f, g e h, dadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2\cos x$ e $h(x) = -2\cos x$.



39. b) $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, $\text{Im}(g) = [-2, 2]$ e $\text{Im}(h) = [-2, 2]$

a) Quais dessas funções têm os gráficos simétricos em relação ao eixo x? Por que isso ocorre? Resposta no final do livro.

b) Qual é a imagem de cada uma dessas funções?

c) Determine para quais valores de x temos $f(x) = g(x) = h(x)$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

40. Nas páginas 8 e 9, estudamos que na baía de Fundy a diferença entre a maré alta e a maré baixa, em casos extremos, chega a 16 m. Esse fenômeno pode ser modelado por meio da função $h(t) = m \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, em que $h(t)$ é a altura da maré em metros em relação ao nível médio do mar, t é o tempo em horas e m é um coeficiente determinado pela variação máxima da maré em relação ao nível médio do mar.

Baía de Fundy, no Canadá, em 2015.

Considerando a baía de Fundy e o modelo apresentado, no caso de extrema variação das marés, determine:

a) o coeficiente m. $m = 8$

b) a função h. $h(t) = 8 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

c) o período da função h. 40. c) $\frac{62}{5}$

d) os intervalos de tempo, em horas, em que a maré está subindo e em que a maré está baixando, para $0 \leq t \leq 12{,}4$. maré subindo: $0 < t < 3{,}1$ ou $9{,}3 < t < 12{,}4$; maré baixando: $3{,}1 < t < 9{,}3$

41. Para vencer certo torneio de golfe, um jogador precisa acertar em uma tacada um buraco que se encontra a 43 m da bola. Ao realizar a tacada, ele impulsiona a bola com uma velocidade de 20 m/s. De acordo com leis da mecânica, a distância R percorrida pela bola após ser lançada pelo jogador é dada por $R = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}\,2\phi_0$, em que V_0 é a velocidade, ϕ_0 é o ângulo em que a bola é impulsionada e g é a aceleração da gravidade. Sabendo que a bola tocou o chão 3 m antes do buraco, responda:

Considere a aceleração da gravidade igual a $10\ \text{m/s}^2$.

a) Qual foi a distância percorrida pela bola, após a tacada, antes de tocar o chão? 40 m

b) Qual foi o ângulo da tacada realizada pelo jogador? 45°

c) Para a velocidade com que o jogador impulsionou a bola, seria possível variar o ângulo de modo a atingir uma distância maior com a tacada? Justifique. Resposta no final do livro.

42. Em uma farmácia que fica aberta 24 horas, o número médio de clientes varia de acordo com a função $C(h)=20-15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right)$, em que h é a hora do dia, com $0<h\leq 24$, e C é a quantidade aproximada de clientes na farmácia na hora h.

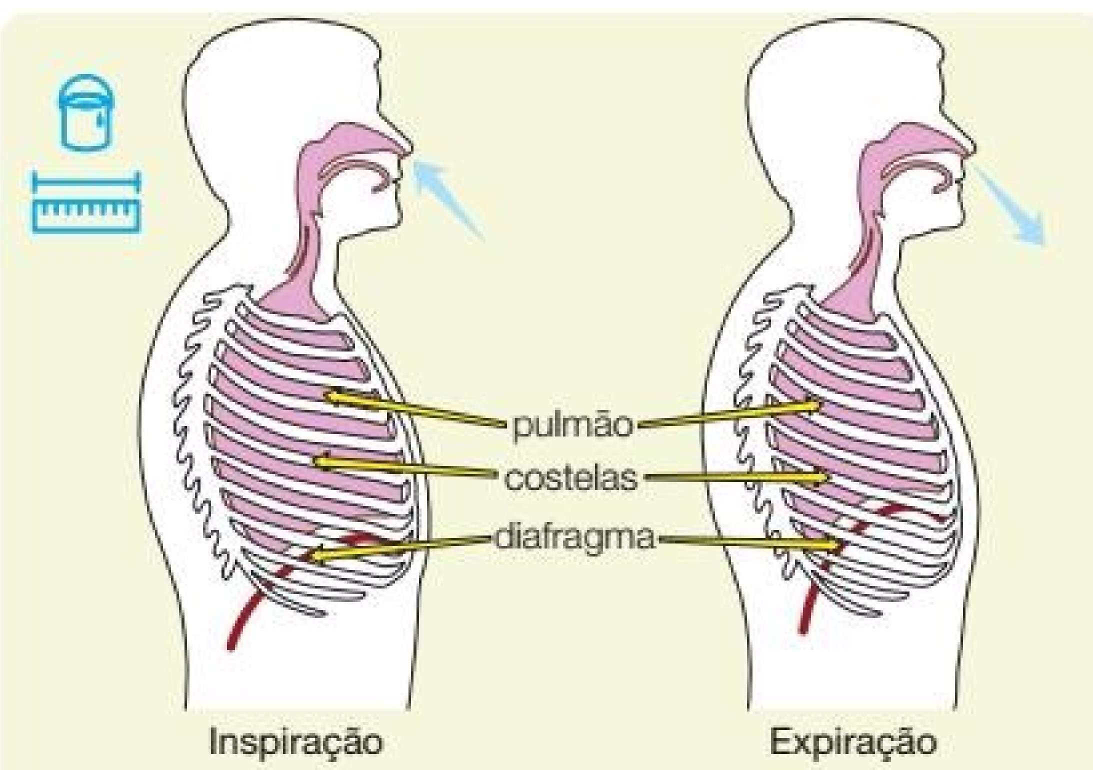
a) Qual é a quantidade de clientes nesta farmácia às 18 horas? 20 clientes

b) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes na farmácia é maior? Qual é a quantidade de clientes nessa hora? 12 horas; 35 clientes

c) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes é menor? Qual é essa quantidade? 24 horas; 5 clientes

43. Em nosso organismo ocorrem diversos fenômenos que se repetem periodicamente, chamados fenômenos cíclicos. Um exemplo é a respiração.

Ilustrações: N.Akira



Ilustrações elaboradas com base em: HERLIHY, Barbara; MAEBIUS, Nancy K. **Anatomia e fisiologia do corpo humano saudável e enfermo.** Tradução Edson Aparecido Liberti. Barueri: Manole, 2002. p. 374.

Durante a inspiração, ocorre a contração do diafragma e dos músculos intercostais externos, o que acarreta um aumento no volume pulmonar e no tamanho da caixa torácica. Na expiração, o diafragma e os músculos intercostais externos relaxam; consequentemente há a diminuição do tamanho da caixa torácica, e o volume pulmonar também diminui.

Suponha que o volume de ar nos pulmões de um indivíduo adulto saudável, do sexo masculino, em repouso, a partir de um instante inicial $t=0$, possa ser representado aproximadamente pela função $f(t)=2{,}65-0{,}25\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$, sendo t o tempo em segundos e $f(t)$ o volume de ar nos pulmões, em litros, após t segundos do instante inicial.

a) Determine o volume de ar nos pulmões deste indivíduo no instante:

- inicial $t=0$ 2,4 L
- $t=1{,}25$ 2,65 L
- $t=2{,}5$ 2,9 L
- $t=3{,}75$ 2,65 L
- $t=5$ 2,4 L

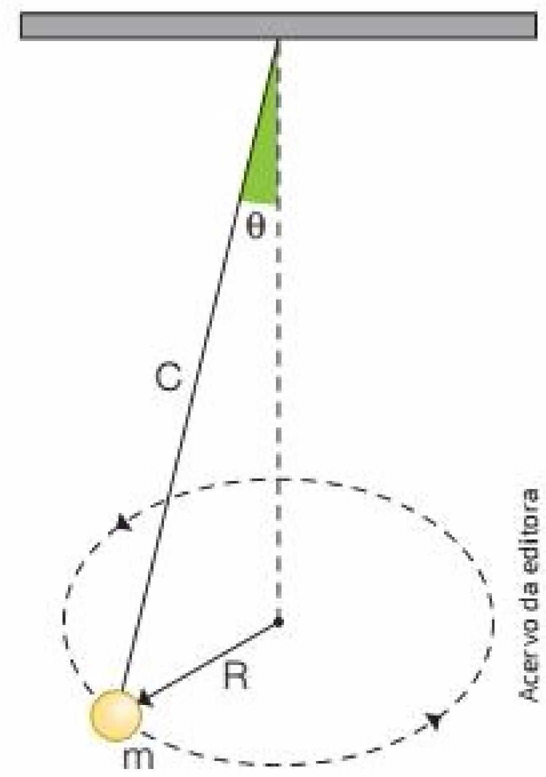
b) Após a expiração, existe um volume de ar que permanece nos pulmões. No caso do indivíduo em questão, qual é esse volume? 2,4 L

c) No processo de respiração, qual o volume máximo de ar nos pulmões desse indivíduo? 2,9 L

44. O pêndulo cônico consiste em um corpo de massa m que gira em um círculo horizontal com velocidade v constante na ponta de uma corda de comprimento C, em metros. À medida que o corpo gira, o movimento da corda descreve a superfície de um cone imaginário, daí o nome "pêndulo cônico". O tempo T que o corpo demora para dar uma revolução completa, chamado de período, é dado por $T=2\pi\sqrt{\frac{C\cdot\cos\theta}{g}}$, em que θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, e g é a aceleração da gravidade.

(Dado: $\sqrt{2}=1{,}4$.)

Suponha o movimento de um pêndulo cônico de 2,5 m de comprimento, e considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2.



Acervo da editora

Pêndulo cônico

a) Escreva a função que expressa o período T do movimento em função do ângulo θ em que o movimento é realizado. $T(\theta)=\pi\sqrt{\cos\theta}$

b) Qual é o domínio da função que você escreveu no item **a**? $D(T)=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

c) Qual é, aproximadamente, em segundos, o período do movimento do pêndulo cônico cujo ângulo da corda com a vertical é de 60°? 2,22 s

45. Movimento Harmônico Simples (MHS) é o movimento periódico oscilatório em que um sistema vibra com uma certa amplitude em torno de um ponto de equilíbrio. Um determinado MHS é definido por $m(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo, em segundos, e m é o deslocamento em relação à posição de equilíbrio no tempo t. Respostas no final do livro.

a) Qual é o deslocamento máximo desse MHS? Para quais tempos isso acontece?

b) Para quais valores de t esse MHS está em posição de equilíbrio, ou seja, o deslocamento é nulo?

c) Esboce o gráfico da função m.

46. Para cada uma das funções, esboce o gráfico e determine o domínio e a imagem. Respostas no final do livro.

a) $f(x)=|-\text{sen}\,x|$

b) $g(x)=2+|\cos 2x|$

c) $h(x)=-2-\left|2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|$

47. O movimento de rotação da Terra dá origem aos períodos de insolação (dia) e sem iluminação solar direta (noite). A duração do dia é alterada durante as várias estações do ano em razão da inclinação do eixo da Terra e seu movimento de translação.

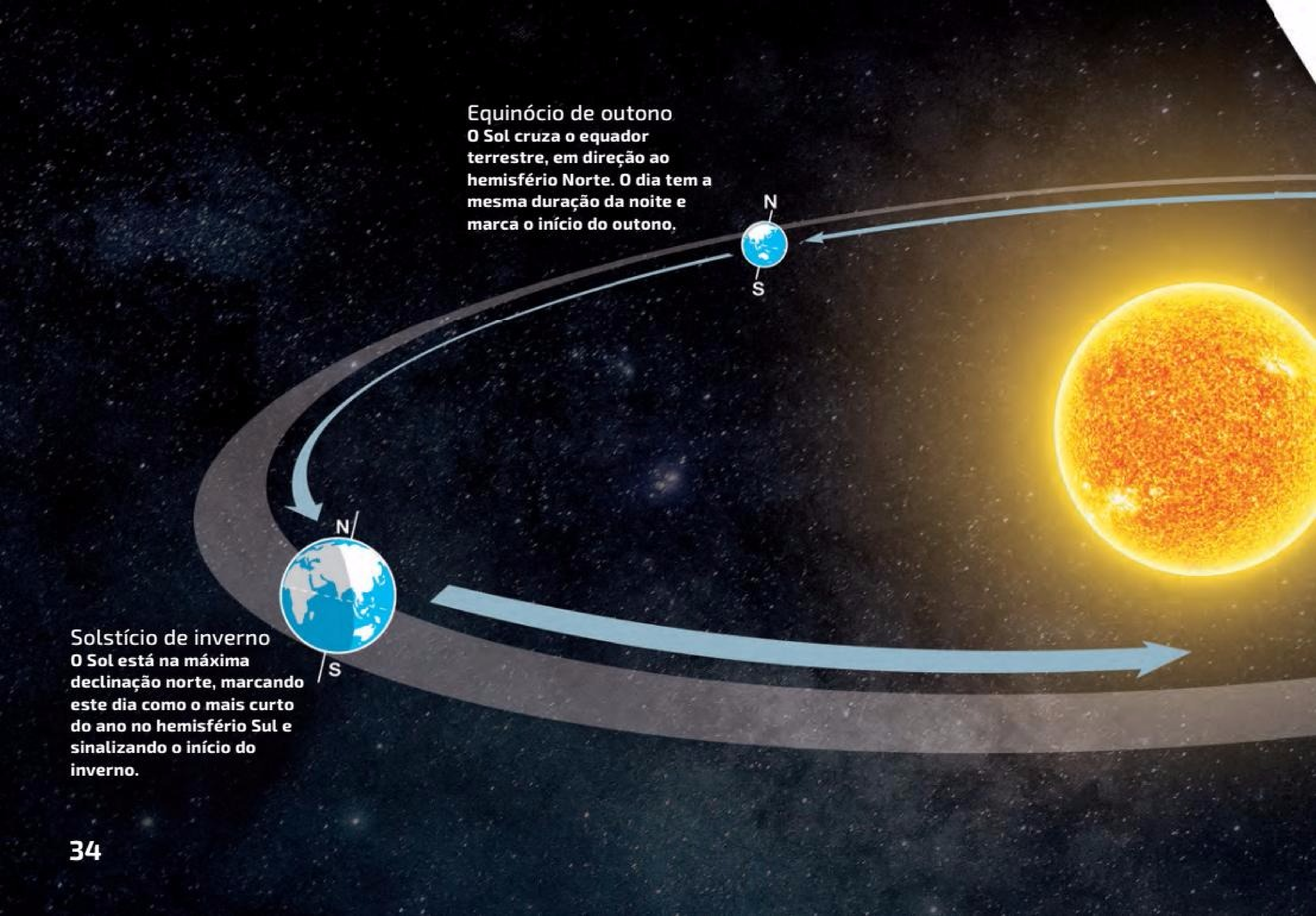
As estações do ano estão relacionadas à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação a sua órbita, cujo ângulo, chamado obliquidade da eclíptica, mede 23°27'. Essa inclinação interfere na quantidade de radiação solar incidente sobre os hemisférios, que varia conforme a Terra orbita o Sol. No período em que um hemisfério recebe mais radiação que o outro, os dias dele serão mais longos e aquecidos, enquanto o outro terá dias mais curtos e frios.

Em duas ocasiões do ano o dia e a noite possuem a mesma duração. Essas ocasiões ocorrem na transição do inverno para a primavera e na transição do verão para o outono e denominam-se, respectivamente, equinócio da primavera e equinócio do outono. Ao longo do ano, dias e noites podem ter duração maior ou menor do que 12 horas. Chama-se solstício de verão o dia que possui a maior duração do ano e solstício de inverno, o dia que possui a menor duração do ano.

Fontes de pesquisa: OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica**. 3. ed. Porto Alegre: Livraria da Física, 2014. <http://astro.if.ufrgs.br/estacoes.html>. Acesso em: 15 fev. 2016.

As estações do ano

Veja no esquema como são definidas as estações do ano para o hemisfério Sul. Note que, no caso do hemisfério Norte, basta inverter as estações.



A duração do dia em Porto Alegre (RS), por exemplo, pode ser descrita por uma função do tipo trigonométrica $h(x) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$, em que *h* expressa a quantidade de horas de duração do dia, em função do número *x* de dias passados desde 21 de dezembro de 2016. As constantes *A* e *B* dependem da duração do dia nos solstícios de verão e de inverno, que naquela localidade correspondem a 14,08 horas e 10,22 horas, respectivamente.

Como *x* representa a quantidade de dias passados de 21/12/2016, o domínio da função representada no gráfico é um conjunto discreto. Contudo, para uma melhor visualização, este foi representado contínuo.

Acervo da editora

Veja como podemos obter as constantes *A* e *B*:

No solstício de verão em Porto Alegre, são passados 0 dias de 21 de dezembro de 2016. Desse modo:

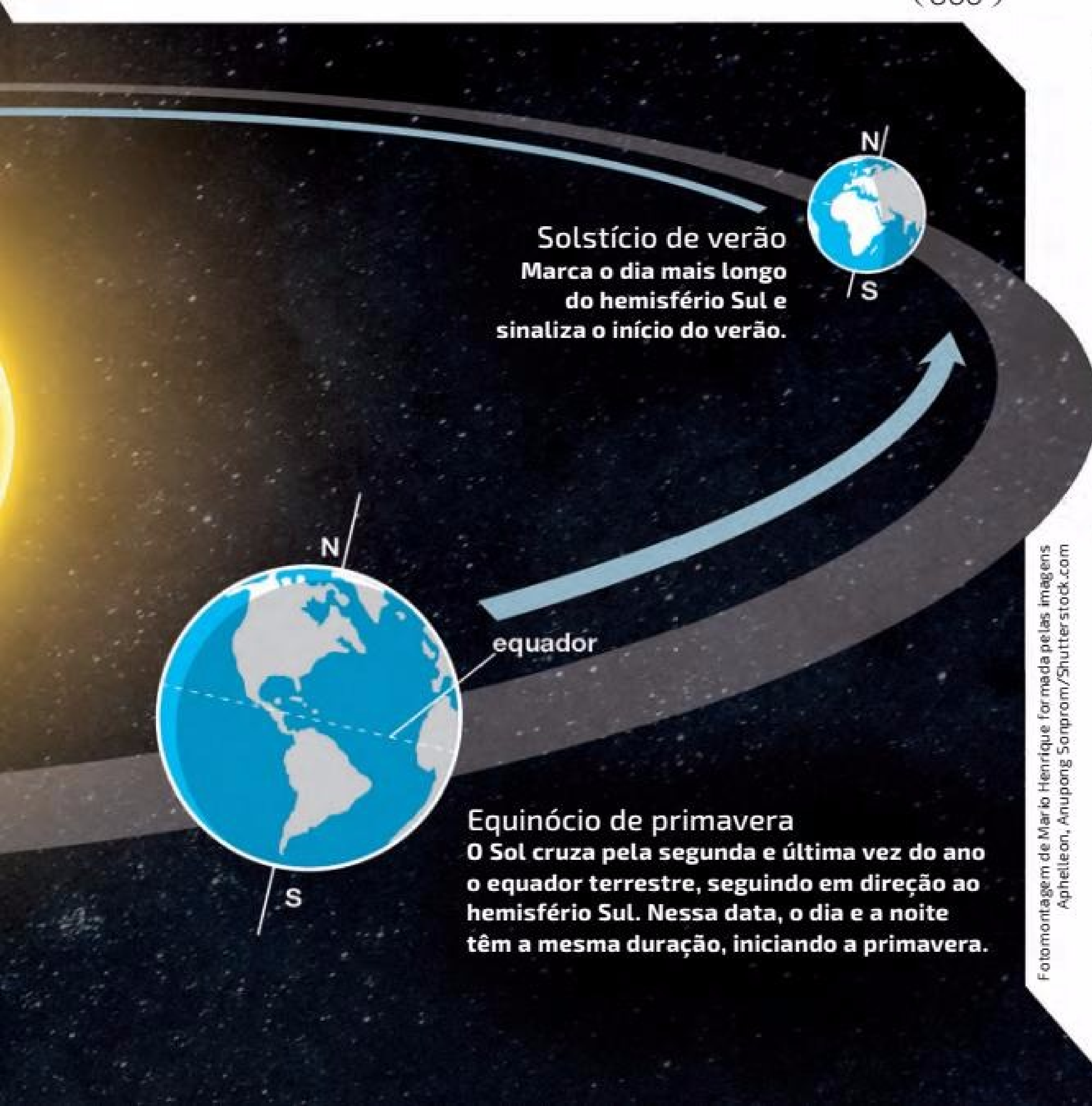
$$h(0) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right) \Rightarrow 14{,}08 = A + B \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right)}_{1} \Rightarrow 14{,}08 = A + B$$

Já no solstício de inverno, são passados 182 dias de 21 de dezembro de 2016. Desse modo:

$$h(182) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right) \Rightarrow 10{,}22 = A + B \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right)}_{\cong -1} \Rightarrow 10{,}22 = A - B$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 14{,}08 = A + B \\ 10{,}22 = A - B \end{cases}$, obtemos A=12,15 e B=1,93.

Portanto, a função que descreve a quantidade de horas de duração do dia de Porto Alegre é dada por $h(x) = 12{,}15 + 1{,}93 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$.



Fotomontagem de Mario Henrique formada pelas imagens Aphelleon, Anupong Sonprom/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Existe horário de verão na região em que você mora? Cite alguns benefícios do horário de verão.

b) De acordo com o gráfico, em qual data ocorreu a menor duração do dia, no município de Porto Alegre, em 2017? 21/6/2017

c) Em que período do ano de 2017 a função que descreve a quantidade de horas de duração do dia em Porto Alegre é decrescente? E crescente?

d) De acordo com o Decreto nº 6 558, de 8/9/2008, o horário de verão 2016/2017 teve início à zero hora de 16/10/2016, com término à zero hora de 19/2/2017. Determine a duração do dia nessas datas em Porto Alegre. Justifique a escolha dessas datas para o início e o término do horário de verão.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Dados: } \cos\left(\frac{-132\pi}{365}\right) = 0{,}421 \\ \text{e } \cos\left(\frac{120\pi}{365}\right) = 0{,}512\end{array}\right)$$

a) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: economia de energia, redução de acidentes nos horários de pico de trânsito (porque durante esse período há mais iluminação natural), redução de assaltos e crimes. No caso do Brasil, possibilidade de armazenar mais água nos reservatórios das hidrelétricas durante o verão, pois menos energia terá de ser gerada, aumentando as reservas que serão utilizadas durante os meses mais secos do inverno.

c) Decrescente nos períodos de 1/1/2017 a 21/6/2017 e de 21/12/2017 a 31/12/2017. Crescente no período de 21/6/2017 a 21/12/2017.

d) Duração do dia em 16/10/2016: 12,96 h; duração do dia em 19/2/2017: 13,14 h. O período compreendido entre essas datas corresponde àquele em que há maior incidência de luz natural, além de o pôr do sol ser mais tardio, por causa do adiantamento do horário em uma hora.

Caso julgue necessário, peça aos alunos que façam uma pesquisa sobre o Decreto nº 6 558, que se refere à instituição do horário de verão em parte do território nacional.

Fórmulas de transformação

Podemos obter os valores de $\text{sen}(a+b)$ e $\text{sen}(a-b)$ com base nos valores de $\text{sen}\,a$ e $\text{sen}\,b$, sendo *a* e *b* arcos da circunferência trigonométrica.

Conhecendo os valores de $\text{sen}\,30°$, $\cos 30°$, $\text{sen}\,45°$ e $\cos 45°$, por exemplo, podemos obter, em função deles, os valores de $\text{sen}\,75°$ e $\text{sen}\,15°$, isto é:

- $\text{sen}\,\underbrace{75°}_{45°+30°}=\text{sen}(45°+30°)$
- $\text{sen}\,\underbrace{15°}_{45°-30°}=\text{sen}(45°-30°)$

Para realizar esses cálculos, podemos utilizar fórmulas que possibilitam calcular, além destas, as funções trigonométricas $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\text{tg}(a+b)$ e $\text{tg}(a-b)$. Essas fórmulas podem ser demonstradas e são dadas por:

- Seno da soma e da diferença

$$\text{sen}(a+b)=\text{sen}\,a\cdot\cos b+\text{sen}\,b\cdot\cos a$$

$$\text{sen}(a-b)=\text{sen}\,a\cdot\cos b-\text{sen}\,b\cdot\cos a$$

- Cosseno da soma e da diferença

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b$$

- Tangente da soma e da diferença

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b}$$

válida para $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $(a+b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\text{tg}(a-b)=\frac{\text{tg}\,a-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b}$$

válida para $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $(a-b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

> Ao compararmos as relações $\cos(60°+30°)$ e $\cos 60°+\cos 30°$, temos que:
>
> $$\cos(60°+30°)=\cos 90°=0$$
>
> $$\cos 60°+\cos 30°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
>
> Note que $\cos(60°+30°)\neq\cos 60°+\cos 30°$. Na maioria dos casos, temos:
>
> | | |
> |---|---|
> | $\cos(a+b)\neq\cos a+\cos b$ | $\cos(a-b)\neq\cos a-\cos b$ |
> | $\text{sen}(a+b)\neq\text{sen}\,a+\text{sen}\,b$ | $\text{sen}(a-b)\neq\text{sen}\,a-\text{sen}\,b$ |
> | $\text{tg}(a+b)\neq\text{tg}\,a+\text{tg}\,b$ | $\text{tg}(a-b)\neq\text{tg}\,a-\text{tg}\,b$ |

Atividades resolvidas

R14. Calcule:

a) $\text{sen}\,75°$ b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ c) $\text{tg}\frac{7\pi}{12}$

Resolução

a) $\text{sen}\,75°=\text{sen}(45°+30°)=\text{sen}\,45°\cdot\cos 30°+\text{sen}\,30°\cdot\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos x+\text{sen}\frac{3\pi}{2}\cdot\text{sen}\,x=0\cdot\cos x+(-1)\cdot\text{sen}\,x=-\text{sen}\,x$

c) $\text{tg}\frac{7\pi}{12}=\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\text{tg}\frac{\pi}{3}+\text{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\text{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}=\frac{2\sqrt{3}+4}{-2}=-\sqrt{3}-2$

R15. Mostre que:

a) $\operatorname{sen}2\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Resolução

a) $\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

Portanto, $\operatorname{sen}2\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$.

b) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Portanto, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.

c) $\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Portanto, $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Essas igualdades são conhecidas por **fórmulas do arco duplo**. Também as utilizamos para calcular senos, cossenos e tangentes do arco metade, lembrando que, se 2α é o arco duplo de α, então α é o arco metade de 2α.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

48. A partir dos ângulos notáveis, calcule:

a) $\operatorname{sen}15°$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 15°$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{sen}255°$ $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d) $\operatorname{tg}75°$ $2+\sqrt{3}$

49. Para instalar um vidro em uma janela a 7 m de altura, um vidraceiro apoiou uma escada com 8 m de comprimento de maneira que esta formou um ângulo de 50° com a parede. O topo dessa escada chegou à altura da janela? Justifique. (Dados $\operatorname{sen}20° = 0{,}342$, $\cos 20° = 0{,}9397$, $\operatorname{sen}30° = 0{,}5$ e $\cos 30° = 0{,}866$.) não; Uma possível resposta: nessas condições, a escada chega aproximadamente à altura de 5,14 m.

50. A expressão $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ é equivalente a: b

a) $\operatorname{sen}x$

b) $\cos x$

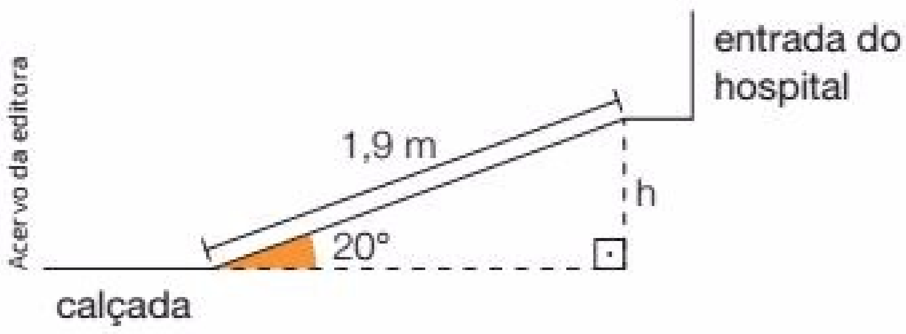
c) $\operatorname{tg}x$

d) $\operatorname{sen}2x$

e) $\cos 2x$

51. Uma rampa que dá acesso à entrada de um hospital tem 1,9 m de comprimento e uma inclinação de 20° em relação à horizontal. Qual a altura da entrada em relação ao nível da calçada? aproximadamente 0,65 m

Considere $\operatorname{sen}10°\cdot\cos 10° = 0{,}171$.

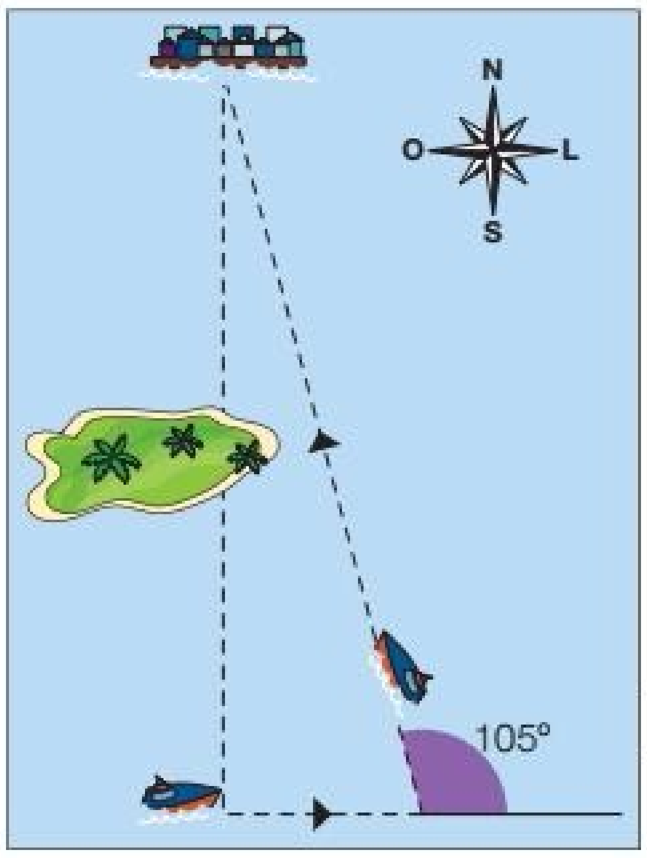


Acervo da editora

52. Calcule o valor da expressão $\cos\dfrac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

53. Para desviar de uma ilha, certo navio mudou a sua rota, deslocando-se 12,2 km para leste e, após um giro de 105°, seguiu na direção noroeste até um porto. Quantos quilômetros o navio percorreu nesse desvio? aproximadamente 62 km

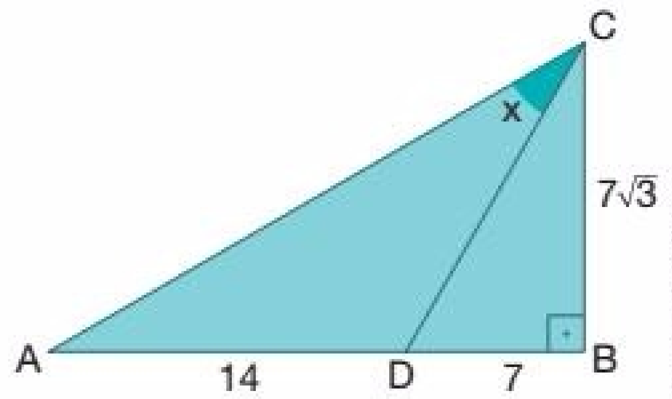
Utilize $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.



Acervo da editora

54. Dados $\operatorname{sen}y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e $\cos y = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$, calcule o valor de $\operatorname{sen}2y$. $\dfrac{\sqrt{39}}{8}$

55. Qual é a medida do ângulo *x* no triângulo retângulo a seguir? $x = 30°$



Acervo da editora

Relações trigonométricas

As cinco relações trigonométricas apresentadas são denominadas fundamentais por serem independentes umas das outras. A partir dessas, outras relações podem ser obtidas.

Até o momento, vimos duas **relações trigonométricas fundamentais** envolvendo o seno, o cosseno e a tangente:

- $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, para $a \in \mathbb{R}$
- $\text{tg}\, a = \dfrac{\text{sen}\, a}{\cos a}$, para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Além dessas, existem outras relações que são obtidas a partir de três outras funções trigonométricas, chamadas **cossecante (cossec)**, **secante (sec)** e **cotangente (cotg)**. Essas relações fundamentais são:

- $\text{cotg}\, a = \dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a}$, para $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$, para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{cossec}\, a = \dfrac{1}{\text{sen}\, a}$, para $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Da relação $\text{cotg}\, a = \dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a}$, temos que: $\text{cotg}\, a = \dfrac{1}{\text{tg}\, a}$, para $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Além dessas relações, podemos obter outras.

Dividindo os dois membros da igualdade $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ por $\cos^2 a$:

$$\frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \boxed{\text{tg}^2 a + 1 = \sec^2 a}\text{, com } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dividindo os dois membros da igualdade $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ por $\text{sen}^2 a$:

$$\frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2 a} = \frac{1}{\text{sen}^2 a} \Rightarrow \boxed{1 + \text{cotg}^2 a = \text{cossec}^2 a}\text{, com } a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Veja a seguir, por meio de atividades resolvidas, como essas relações podem ser aplicadas.

Atividades resolvidas

R16. Sendo $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, com $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, determine $\sec\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$.

Resolução

Temos que:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Da relação $\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$, segue:

$\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = 4^2 \Rightarrow \text{tg}^2\alpha = 15 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{15}$

Como α está no 1º quadrante, $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{15}$.

Portanto $\sec\alpha = 4$ e $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{15}$.

R17. Sabendo que $\dfrac{\text{cossec}^2\alpha \cdot \sec\alpha}{\text{cotg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha} = 2$, determine o valor de α, com $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Resolução

$$\frac{\text{cossec}^2\alpha \cdot \sec\alpha}{\text{cotg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cancel{\cos\alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\text{sen}\,\alpha} \cdot \cancel{\cos\alpha}}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, temos que $\alpha = 150°$ ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

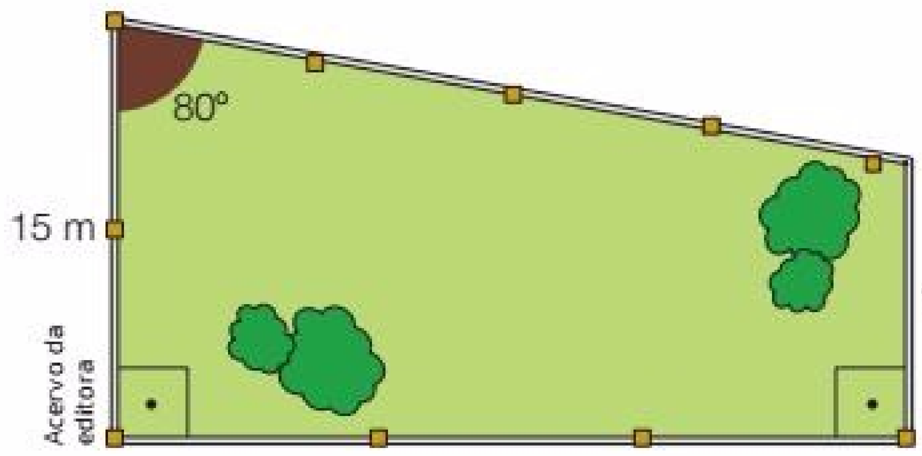
56. Sendo $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$ e $|\cos\alpha| = \frac{3}{5}$, qual é o valor do $\operatorname{sen}\alpha$? $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$

57. Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calcule:

a) $\cos\theta$ $-\frac{1}{3}$ b) $\operatorname{cossec}\theta$ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $\operatorname{cotg}\theta$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

58. **Desafio**

Determine a área aproximada do terreno representado a seguir. 357 m²



Utilize $\operatorname{sen}80° = 0{,}985$.

59. Determine o valor da expressão $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2$ para $\alpha = \frac{13\pi}{12}$. $\frac{3}{2}$

60. Calcule:

a) $\operatorname{cossec}\frac{3\pi}{4}$ $\sqrt{2}$ b) $\sec 195°$ $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ c) $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

61. A expressão $(\operatorname{cotg}^2 x + 1)(1 - \cos^2 x)$ é igual a: a

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$ e) −1

62. Após 5 anos de construção, em 12 de outubro de 1931, a estátua do Cristo Redentor foi inaugurada. Localizada no Morro do Corcovado, no Rio de Janeiro, esse monumento é uma das novas 7 maravilhas do mundo.

Yasuyoshi Chiba/AFP/Getty Images

Estátua do Cristo Redentor, no Morro do Corcovado, no Rio de Janeiro, em 2013.

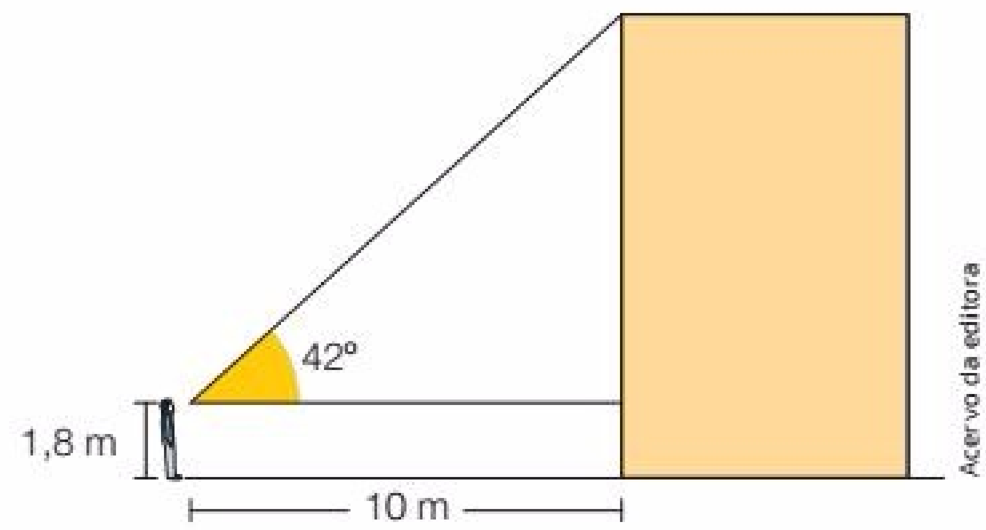
Para medir a altura do Cristo Redentor, uma pessoa posicionou um teodolito na base, distante 15,35 m, e observou o topo da estátua sob um ângulo de 68° formado com a horizontal. Utilizando $\operatorname{sen}68° = 0{,}9272$, determine a altura desse monumento. aproximadamente 38 m

63. Dado um arco x, tal que $\sec x = -2$, o valor de $\operatorname{cotg}^2 x$ é: b

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{3}$

64. Mostre que $\cos^4\beta - \operatorname{sen}^4\beta = \cos 2\beta$.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

65. Um observador de 1,8 m de altura, localizado a 10 m de um prédio, olha o topo desse prédio sob um ângulo de 42° em relação à horizontal.

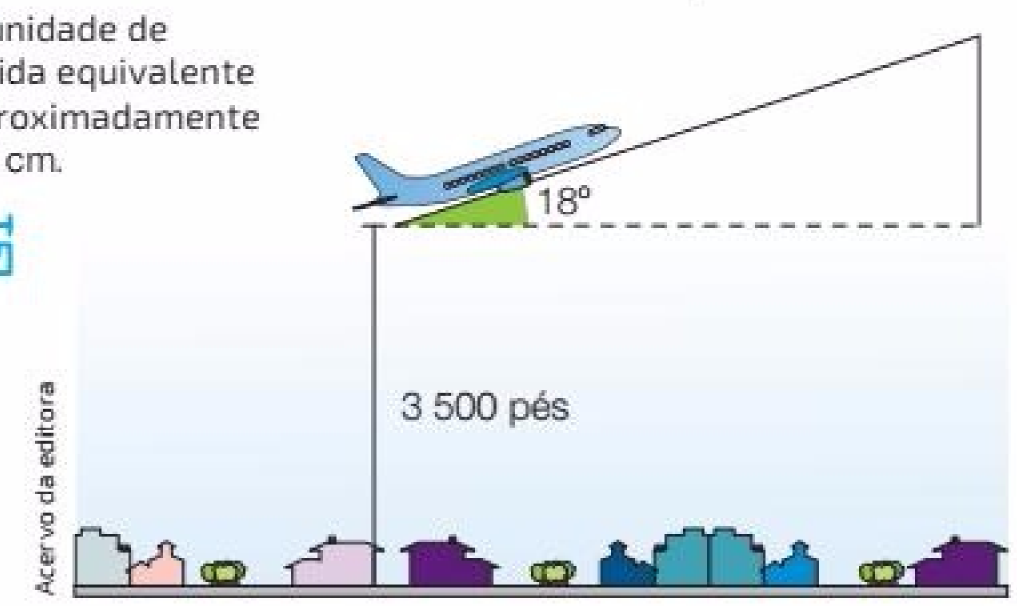


a) Determine a altura desse prédio. Para isso, utilize $\operatorname{sen}42° = 0{,}67$. 10,8 m

b) Sabendo que a altura de cada andar é 3,6 m, quantos andares tem esse prédio? 3 andares

66. Após atingir a altura de 3 500 pés, certo avião sobe com uma inclinação de 18° em relação à horizontal, conforme mostra o esquema.

Pé: unidade de medida equivalente a aproximadamente 30,5 cm.

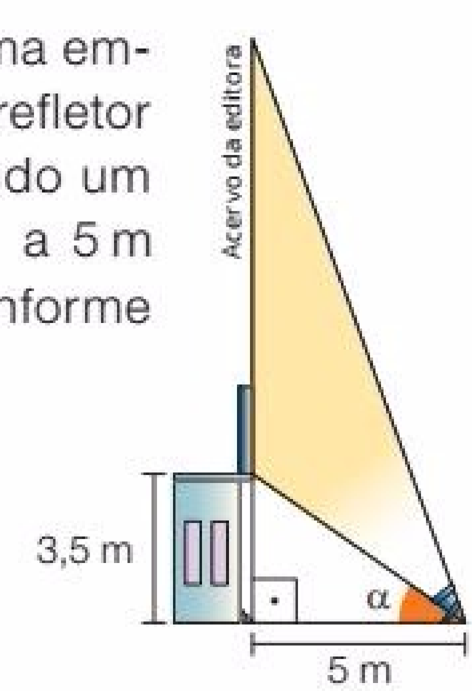


a) Qual é a altura aproximada do avião, em pés, depois de percorrer 8 200 m nessa direção? 11 800 pés

b) Quantos metros o avião deve percorrer nessa direção até atingir a altura de 13 100 pés? aproximadamente 9 476 m

Utilize $\operatorname{cossec}18° = 3{,}236$ e $\sec 18° = 1{,}051$.

67. Para iluminar o letreiro de uma empresa a 3,5 m de altura, um refletor foi instalado no solo formando um ângulo α com a horizontal, a 5 m de distância do letreiro, conforme o esquema. Sabendo que o ângulo máximo de iluminação desse refletor é 2α, qual é a altura máxima da iluminação emitida por ele? aproximadamente 13,7 m



Equações trigonométricas

Ao estudarmos as funções trigonométricas, resolvemos algumas equações do tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = a$ e $\operatorname{tg} x = a$. Por exemplo:

- $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Agora, vamos estudar, por meio de atividades resolvidas, outros tipos de equações trigonométricas.

Atividades resolvidas

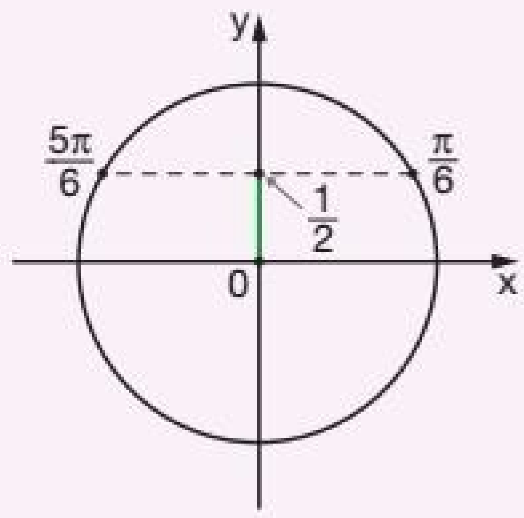
R18. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ d) $2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 0$

Resolução

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Assim, a solução da equação é:

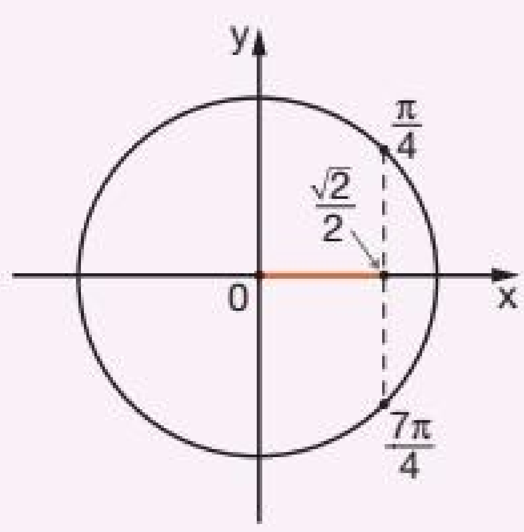


- $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$
- $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, a solução da equação é:



- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{\pi}{20} + 2k\pi$
- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{20} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

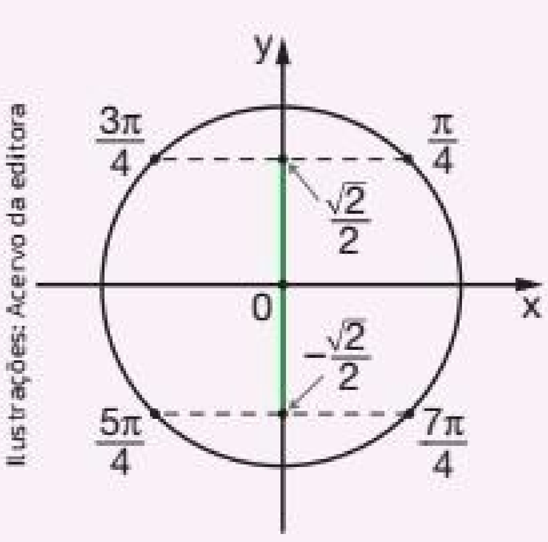
c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Note que $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Assim, a solução da equação é:



Ilustrações: Acervo da editora

- $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $2\cdot\cos^2 x-3\cdot\cos x-2=0$

Fazendo $y=\cos x$, temos $2y^2-3y-2=0$.

$\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=25$

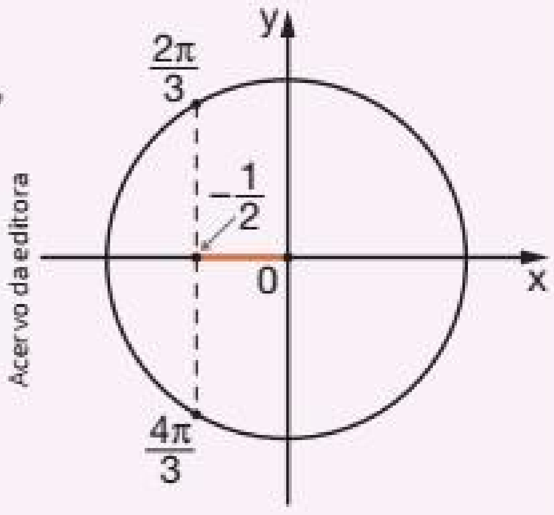
$$y=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{3\pm5}{4}\left\langle\begin{array}{l}y_1=-\dfrac{1}{2}\\ y_2=2\end{array}\right.$$

Como $y=\cos x$ e $-1\leq\cos x\leq1$, então $y=-\dfrac{1}{2}$, isto é, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ e $\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$. Assim, a solução da equação é:

- $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$
- $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$

Portanto, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$.



Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

68. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{6}\right)=0$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\dfrac{5\pi}{3}+k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$

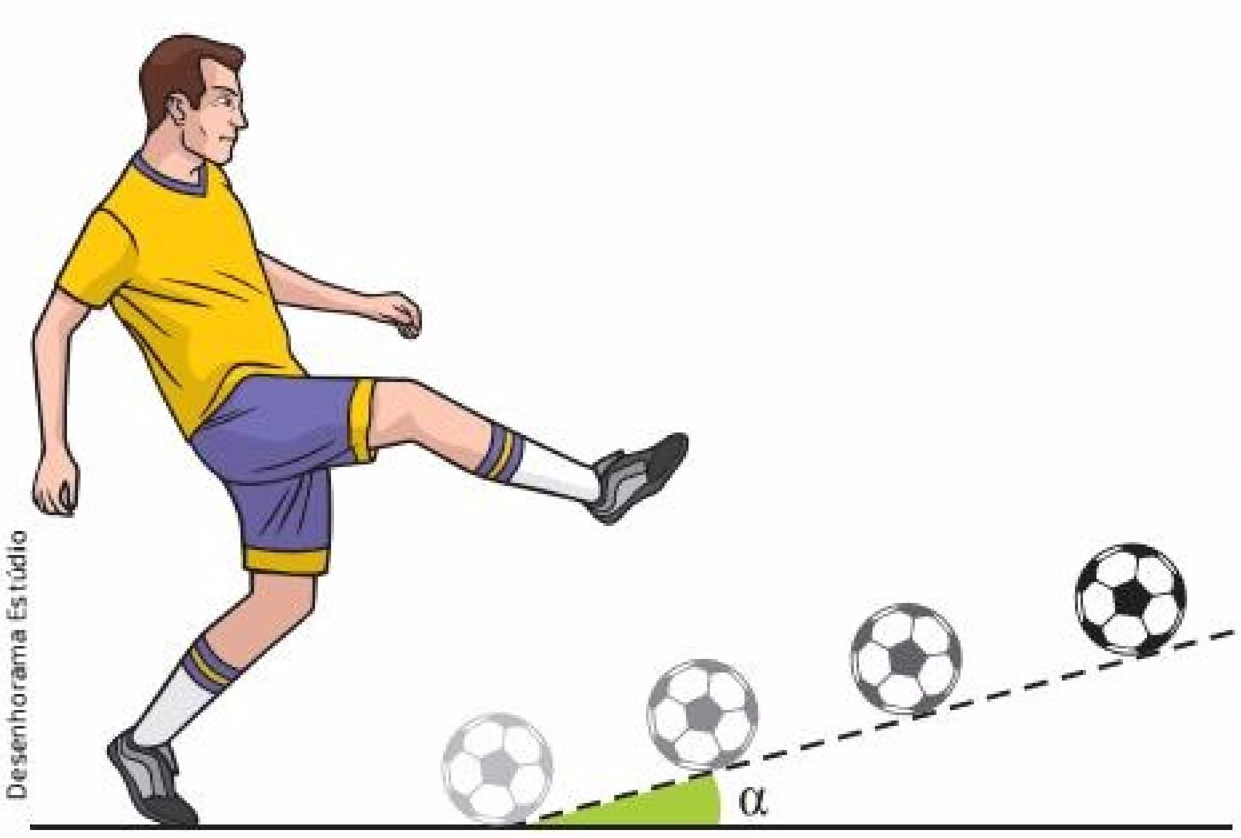
b) $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } x=\dfrac{17\pi}{12}+2k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\operatorname{sen}^2 2x=\dfrac{1}{4}$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x=\dfrac{5\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2},\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $\cos x-\operatorname{sen}^2 x=1$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=2k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$

69. A distância horizontal percorrida por uma bola de futebol depende, entre outros fatores, da velocidade inicial e do ângulo formado pela trajetória da bola com a horizontal. Representando a velocidade inicial por *v* e o ângulo por α, podemos determinar essa distância *d* pela equação $d=\dfrac{v^2}{10}\cdot\operatorname{sen}2\alpha$.

Sabendo que em certo chute a bola percorreu 16,2 m com velocidade de 18 m/s, qual é a medida do ângulo α? $\alpha=15°$



Desenhorama Estúdio

70. Sendo $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$:

a) Para quais valores de *x* o gráfico de *f* intersecta o eixo das abscissas? $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

b) Esboce o gráfico de *f* para o intervalo $\left[0,\dfrac{13\pi}{6}\right]$. Resposta no final do livro.

71. Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x)=\operatorname{sen}2x$ e $g(x)=\operatorname{sen}x$, com $x\in[0,2\pi]$, e determine as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos nesse intervalo. Resposta no final do livro.

72. Sendo $0<\alpha<\pi$, determine para quais valores de α a igualdade $\dfrac{2}{\operatorname{cossec}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{3}$ é verdadeira. $\alpha=\dfrac{2\pi}{15}$ ou $\alpha=\dfrac{7\pi}{15}$

73. A equação $h(t)=3\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{31}t\right)$ permite calcular uma aproximação da altura *h* (em metros) da maré de determinada laguna em função do tempo *t*, em horas.

Laguna: lagoa de água salgada ligada ao mar por um canal.

a) Qual é a altura da maré às 2 h? E às 16 h? 2,55 m; 2,90 m

b) Qual é o menor valor de *t*, em horas e minutos, em que a maré está com 1,5 m de altura? 1h2min

74. Resolva as equações em $\mathbb{R}$. Respostas no final do livro.

a) $\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$

b) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

c) $|\operatorname{cossec}x|=2$

d) $|\sec x\cdot\operatorname{sen}x|=\sqrt{3}$

75. Represente na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico as soluções da equação $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Resposta no final do livro.

Ser consciente

Pressão arterial

Os fenômenos cíclicos são aqueles que se repetem periodicamente. Um exemplo é o ciclo cardíaco – uma sequência de eventos que ocorre durante um batimento do coração.

No ciclo cardíaco, os ventrículos contraem-se, ocorrendo a sístole ventricular e, logo em seguida, relaxam, ocorrendo a diástole. No momento da contração ventricular, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais e a força com que ele é ejetado exerce uma pressão nas artérias, que, no pico da contração, é chamada pressão sistólica. Já a menor pressão sanguínea nas artérias, que ocorre enquanto acontece o relaxamento do ventrículo, é conhecida como pressão diastólica.

As pressões sistólica e diastólica correspondem àquelas que o médico informa ao paciente em uma consulta. Quando ele diz, por exemplo, que sua pressão está 12 por 8, significa que a pressão sistólica aproximada é de 120 mmHg (milímetros de mercúrio) e a diastólica é de cerca de 80 mmHg. Essas medidas fornecem informações importantes a respeito da saúde do indivíduo.

Hipertensão arterial ou "pressão alta"

Quando os níveis de pressão de uma pessoa forem iguais ou superiores a 140 mmHg por 80 mmHg, ela apresenta tendência a desenvolver uma doença do coração e dos vasos sanguíneos chamada hipertensão, que pode contribuir para a ocorrência de insuficiência cardíaca, doenças renais e infarto.

Hipotensão arterial ou "pressão baixa"

Uma pessoa está com hipotensão arterial ou "pressão baixa" quando os níveis são menores do que 90 mmHg por 60 mmHg (pessoas saudáveis também podem apresentar esses níveis). A pressão baixa não é considerada uma doença em si, mas pode estar relacionada a doenças graves como infarto do miocárdio, embolia pulmonar e diabetes.

Fontes de pesquisa: <www.sbh.org.br/geral>. Acesso em: 18 jan. 2016. <http://drauziovarella.com.br/letras/h/pressao-baixa-hipotonia-arterial>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Hipertensão: fique atento!

A hipertensão afeta cerca de 30% da população brasileira, sendo mais recorrente em idosos (50%). Apesar de não ter cura, a doença precisa ser tratada para evitar complicações.

Como prevenir?

Pratique atividades físicas regularmente, especialmente exercícios aeróbicos, com acompanhamento médico. Evite sobrepeso e obesidade.

Alimente-se de forma saudável, dando preferência a frutas, legumes, verduras, carnes magras e alimentos com pouco sal.

Analisando com cidadania

a) Você conhece alguma pessoa que tenha “pressão alta”? Que cuidados esta pessoa tem em relação à doença? Resposta pessoal.

b) Você se alimenta de forma saudável e faz atividades físicas regularmente? Resposta pessoal.

Nos itens **a** e **b**, promova um debate a fim de que os alunos exemplifiquem casos que conheçam de pessoas que sofram com “pressão alta” e como elas lidam com a doença. Também estimule-os a analisar se os hábitos que possuem são adequados para reduzir o risco de desenvolverem “pressão alta”.

Analisando com Matemática

c) Uma pressão sanguínea de 80 mmHg por 50 mmHg pode ser considerada alta, baixa ou adequada? baixa

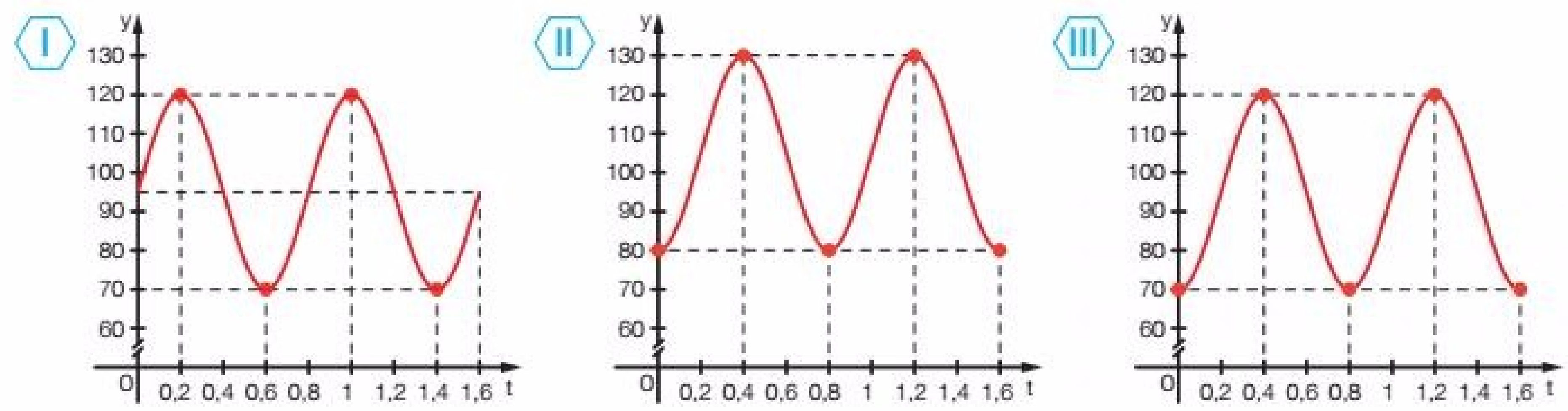
d) Suponha que a pressão sanguínea de um indivíduo, a partir de um instante inicial $t=0$, possa ser representada, aproximadamente, pela função $f(t)=95-25\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$, sendo *t* o tempo dado em segundos e f(t) a pressão sanguínea em milímetros de mercúrio *t* segundos após o instante inicial.

- Determine a pressão sanguínea desse indivíduo no instante inicial $t=0$. 70 mmHg
- Após quantos segundos, a partir do instante inicial, a pressão sanguínea desse indivíduo será de 120 mmHg? 0,4 s
- Dentre os gráficos abaixo, qual melhor representa a função *f*? gráfico III

Diga aos alunos que nos gráficos apresentados as escalas dos eixos são diferentes entre si.

Veja mais informações sobre pressão arterial no *site*:

- <http://tub.im/eqjuyf> (acesso em: 22 fev. 2016)



Ilustrações: Acervo da editora

Se necessário, lembre aos alunos que na função definida por $f(x)=a+b\cdot\text{sen}(cx+d)$, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números reais com $b\neq0$ e $c\neq0$, a constante *c* está relacionada ao período *p* desta função, de acordo com a expressão $p=\dfrac{2\pi}{|c|}$.

- De quanto tempo é o ciclo cardíaco desse indivíduo? 0,8 s

Como perceber?

Os sintomas costumam aparecer somente quando um indivíduo apresenta uma hipertensão arterial grave ou prolongada e não tratada, sendo comuns dores de cabeça, vômito, falta de ar, dentre outros sintomas. Na idade adulta, é importante medir a pressão arterial regularmente para verificar se está adequada.

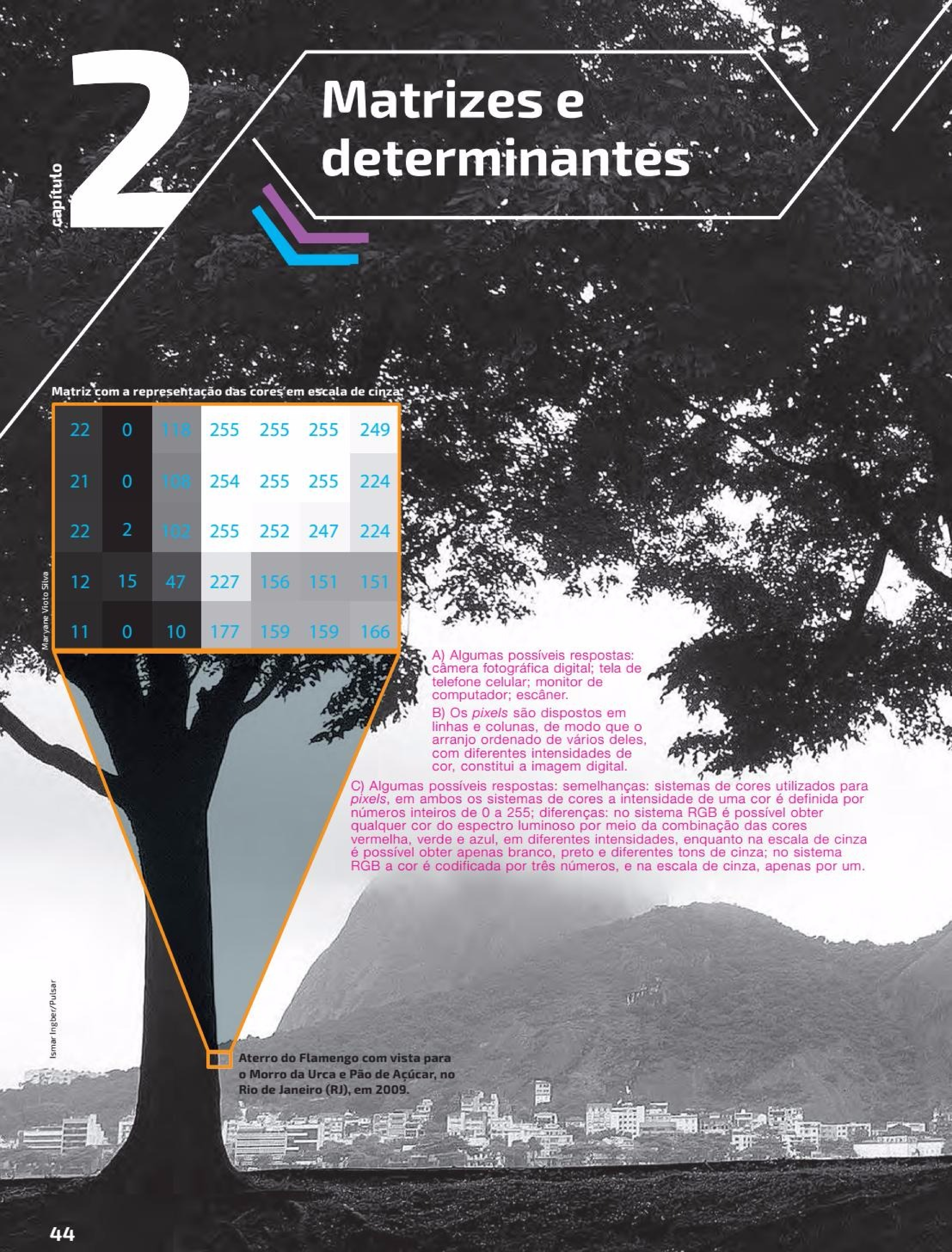
Como agir?

Em caso de suspeita de hipertensão, consulte um médico para poder tomar as devidas precauções e iniciar um tratamento, quando necessário.

Davi Augusto

capítulo 2

Matrizes e determinantes



Matriz com a representação das cores em escala de cinza

22	0	118	255	255	255	249
21	0	108	254	255	255	224
22	2	102	255	252	247	224
12	15	47	227	156	151	151
11	0	10	177	159	159	166

Maryane Vioto Silva

A) Algumas possíveis respostas: câmera fotográfica digital; tela de telefone celular; monitor de computador; escâner.

B) Os *pixels* são dispostos em linhas e colunas, de modo que o arranjo ordenado de vários deles, com diferentes intensidades de cor, constitui a imagem digital.

C) Algumas possíveis respostas: semelhanças: sistemas de cores utilizados para *pixels*, em ambos os sistemas de cores a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255; diferenças: no sistema RGB é possível obter qualquer cor do espectro luminoso por meio da combinação das cores vermelha, verde e azul, em diferentes intensidades, enquanto na escala de cinza é possível obter apenas branco, preto e diferentes tons de cinza; no sistema RGB a cor é codificada por três números, e na escala de cinza, apenas por um.

Aterro do Flamengo com vista para o Morro da Urca e Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro (RJ), em 2009.

Ismar Ingber/Pulsar

Pixel

O menor elemento que constitui uma imagem digital é denominado *pixel* – abreviatura de *picture element* (do inglês elemento de imagem). Os *pixels* são dispostos em linhas e colunas na composição da imagem, de modo que o arranjo ordenado de vários deles, com diferentes intensidades de cor, constitui a imagem digital. A posição de um *pixel* na imagem permite que ele seja codificado por uma descrição exata e minuciosa de sua localização e uma intensidade de cor, possibilitando que sejam realizadas, por exemplo, alterações e reconhecimento de padrões nesse tipo de imagem.

Com relação às cores, duas representações são frequentemente utilizadas para um *pixel*. Uma delas é o sistema RGB (do inglês *Red*, *Green*, *Blue* – vermelho, verde, azul), cuja combinação em diferentes intensidades resulta em outra cor do espectro luminoso, com variações entre o preto (ausência de cor) e o branco (intensidade máxima). A outra corresponde à escala de cinza. Em ambos os casos, a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255.

Por exemplo, no sistema RGB, a cor verde é codificada por três números "(0, 255, 0)", indicando não haver contribuição alguma das cores vermelha e azul, e intensidade máxima da cor verde. A cor branca é representada pelos números "(255, 255, 255)", e a preta, "(0, 0, 0)". Já na escala de cinza, o código 0 é utilizado para a cor preta, e o 255, para a cor branca, sendo que qualquer número inteiro nesse intervalo corresponde a determinado tom de cinza.

Fonte de pesquisa: MARQUES FILHO, Ogê; VIEIRA NETO, Hugo. Processamento Digital de Imagens. Rio de Janeiro: Brasport, 1999.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Cite alguns aparelhos que geram imagens digitais.

B) Como os *pixels* são dispostos na composição de uma imagem digital? E de que modo participam da constituição da imagem?

C) Escreva semelhanças e diferenças entre o sistema RGB e a escala de cinza.

Veja mais informações sobre *pixels* no *site*:
<http://tub.im/pg436n>
(acesso em: 22 fev. 2016)

Estudando matrizes

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e as atividades das páginas 270 e 271 da seção Acessando tecnologias.

Para auxiliar na representação de informações ou facilitar cálculos complexos, é comum a utilização de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas de certa quantidade de **linhas** (fileiras horizontais) e de **colunas** (fileiras verticais), são chamadas na Matemática de **matrizes**.

As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como na computação gráfica, em Engenharia, Física e Administração.

Observe a tabela.

População rural e urbana no Brasil, em milhões de habitantes

	1970	1980	1991	2000	2010
Rural	41,6	39,1	36	31,8	29,8
Urbana	52,9	82	110,9	138	160,9
Total	94,5	121,1	146,9	169,8	190,7

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Podemos representar essa tabela pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$$

Convencionou-se que a ordenação das linhas de uma matriz seja dada de cima para baixo, e a ordenação das colunas, da esquerda para a direita.

Como essa matriz possui 3 linhas e 5 colunas, dizemos que é de ordem (ou tipo) 3×5 (lê-se "três por cinco"). Nela, as linhas correspondem à população brasileira em cada categoria: rural, urbana e total. Já as colunas indicam o ano da pesquisa. A 1ª linha, por exemplo, indica a população rural em cada ano pesquisado e a 3ª coluna, a população rural, urbana e total em 1991.

$$\begin{array}{r} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{41{,}6 \quad 39{,}1 \quad 36 \quad 31{,}8 \quad 29{,}8} \\ 52{,}9 \quad 82 \quad 110{,}9 \quad 138 \quad 160{,}9 \\ 94{,}5 \quad 121{,}1 \quad 146{,}9 \quad 169{,}8 \quad 190{,}7 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{3ª coluna} \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & \boxed{\begin{matrix} 36 \\ 110{,}9 \\ 146{,}9 \end{matrix}} & \begin{matrix} 31{,}8 \\ 138 \\ 169{,}8 \end{matrix} & \begin{matrix} 29{,}8 \\ 160{,}9 \\ 190{,}7 \end{matrix} \end{bmatrix} \end{array}$$

O elemento da matriz localizado na 1ª linha e na 3ª coluna corresponde à população rural brasileira em 1991.

$$\begin{array}{c|c} & \text{3ª coluna} \downarrow \\ \text{1ª linha} \rightarrow & \begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & \boxed{36} & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Uma matriz de ordem $m \times n$, com m e n números naturais não nulos, é toda tabela composta por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplos

- Matriz de ordem 2×3: duas linhas e três colunas.

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 3×2: três linhas e duas colunas.

$$\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 12 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 1×4: uma linha e quatro colunas.

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 2×1: duas linhas e uma coluna.

$$\begin{bmatrix} -21 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Indicaremos matrizes com uma letra maiúscula e cada um dos seus elementos pela mesma letra, porém minúscula, acompanhada de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado.

Considerando, por exemplo, a matriz $A=\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$, temos:

- elemento da 1ª linha e 1ª coluna: $a_{11}=7$ (lê-se “a um um igual a sete”)
- elemento da 1ª linha e 2ª coluna: $a_{12}=-5$ (lê-se “a um dois igual a menos cinco”)
- elemento da 2ª linha e 1ª coluna: $a_{21}=13$ (lê-se “a dois um igual a treze”)
- elemento da 2ª linha e 2ª coluna: $a_{22}=9$ (lê-se “a dois dois igual a nove”)

Vamos representar genericamente uma matriz *A* de ordem $m\times n$, ou seja, com *m* linhas e *n* colunas, da seguinte maneira:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

No elemento a_{ij}, o índice *i* indica a linha, e o *j*, a coluna em que o elemento está localizado. O elemento a_{32}, por exemplo, tem $i=3$ e $j=2$, ou seja, está localizado na 3ª linha e na 2ª coluna.

Essa matriz também pode ser indicada por $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Atividades resolvidas

R1. Uma matriz possui 32 elementos, e a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas. Qual é a ordem dessa matriz?

Resolução

A ordem da matriz é dada por $m\times n$, tal que $m\cdot n=32$.

Como a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas, temos $n=2m$, ou seja:

$$m\cdot n=32 \quad m\cdot 2m=32 \quad m^2=16 \begin{cases} m=4 \\ m=-4 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Substituindo $m=4$ na igualdade $m\cdot n=32$:

$$m\cdot n=32 \quad 4\cdot n=32 \quad n=8$$

Portanto, a ordem da matriz é 4×8.

R2. Escreva a matriz $A=(a_{ij})_{1\times3}$, tal que $a_{ij}=3i-2j$.

Resolução

A ordem da matriz *A* é 1×3.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de *i* e *j* na lei de formação, temos:

$a_{11}=3\cdot1-2\cdot1=3-2=1$ $\quad a_{12}=3\cdot1-2\cdot2=3-4=-1$ $\quad a_{13}=3\cdot1-2\cdot3=3-6=-3$

Portanto, a matriz é $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

R3. Escreva a matriz $B=(b_{ij})_{3\times2}$, tal que $b_{ij}=\begin{cases}(-1)^j, \text{ se } i\leq j\\ 2i+j, \text{ se } i>j\end{cases}$.

Resolução

A ordem da matriz *B* é 3×2.

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Temos duas sentenças que definem a matriz *B*:

- se $i\leq j$: $b_{11}=(-1)^1=-1$ $\quad b_{12}=(-1)^2=1$ $\quad b_{22}=(-1)^2=1$
- se $i>j$: $b_{21}=2\cdot2+1=5$ $\quad b_{31}=2\cdot3+1=7$ $\quad b_{32}=2\cdot3+2=8$

Portanto, a matriz é $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva a ordem de cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ 2×2

b) $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ \sqrt{2} & 15 & -4{,}3 \\ 1 & 7 & 10 \\ -9 & \pi & 0{,}5 \end{bmatrix}$ 5×3

c) $C=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ 1×4

d) $D=\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{5} & x^3 & -3 \\ 1 & \sqrt[3]{-8} & 4 & x+1 \end{bmatrix}$ 2×4

2. Na matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5{,}7 & -3 & 2 \\ 4 & 15 & 3 & \sqrt{7} & 6 \\ \pi & -9 & 10 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, qual o valor do elemento:

a) a_{11}? 0

b) a_{13}? 5,7

c) a_{31}? π

d) a_{24}? $\sqrt{7}$

3. Observe a tabela e resolva as questões.

Quantidade de títulos do cinema lançados por gênero em 2014

	Lançamentos brasileiros	Lançamentos estrangeiros
Animação	4	18
Documentário	36	5
Ficção	74	250
Total	114	273

Fonte: <http://oca.ancine.gov.br/media/SAM/DadosMercado/Anuario_Estatistico_do_Cinema_Brasileiro_2014.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2015.

a) Represente a tabela por uma matriz 4×2.

b) Nessa matriz, o que representa:

- a 4ª linha? O total de títulos do cinema brasileiro ou estrangeiro lançados em 2014.
- a 1ª coluna? Os títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2014 e o seu total.
- o elemento da 3ª linha com a 1ª coluna? A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2014.

3. a) $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 36 & 5 \\ 74 & 250 \\ 114 & 273 \end{bmatrix}$

4. A tabela periódica apresenta a distribuição dos elementos químicos de acordo com suas características e propriedades. As linhas da tabela periódica, numeradas de cima para baixo, são denominadas períodos, e as colunas, numeradas da esquerda para a direita, são denominadas grupos.

A distribuição dos elementos é feita da seguinte maneira: elementos que possuem o mesmo número de camadas de elétrons estão em um mesmo período, e elementos que possuem características físicas e químicas semelhantes estão no mesmo grupo. Verifique se os alunos perceberam que os períodos não possuem a mesma quantidade de elementos e que o mesmo ocorre com os grupos.

TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

Com massas atômicas referidas ao isótopo 12 do carbono

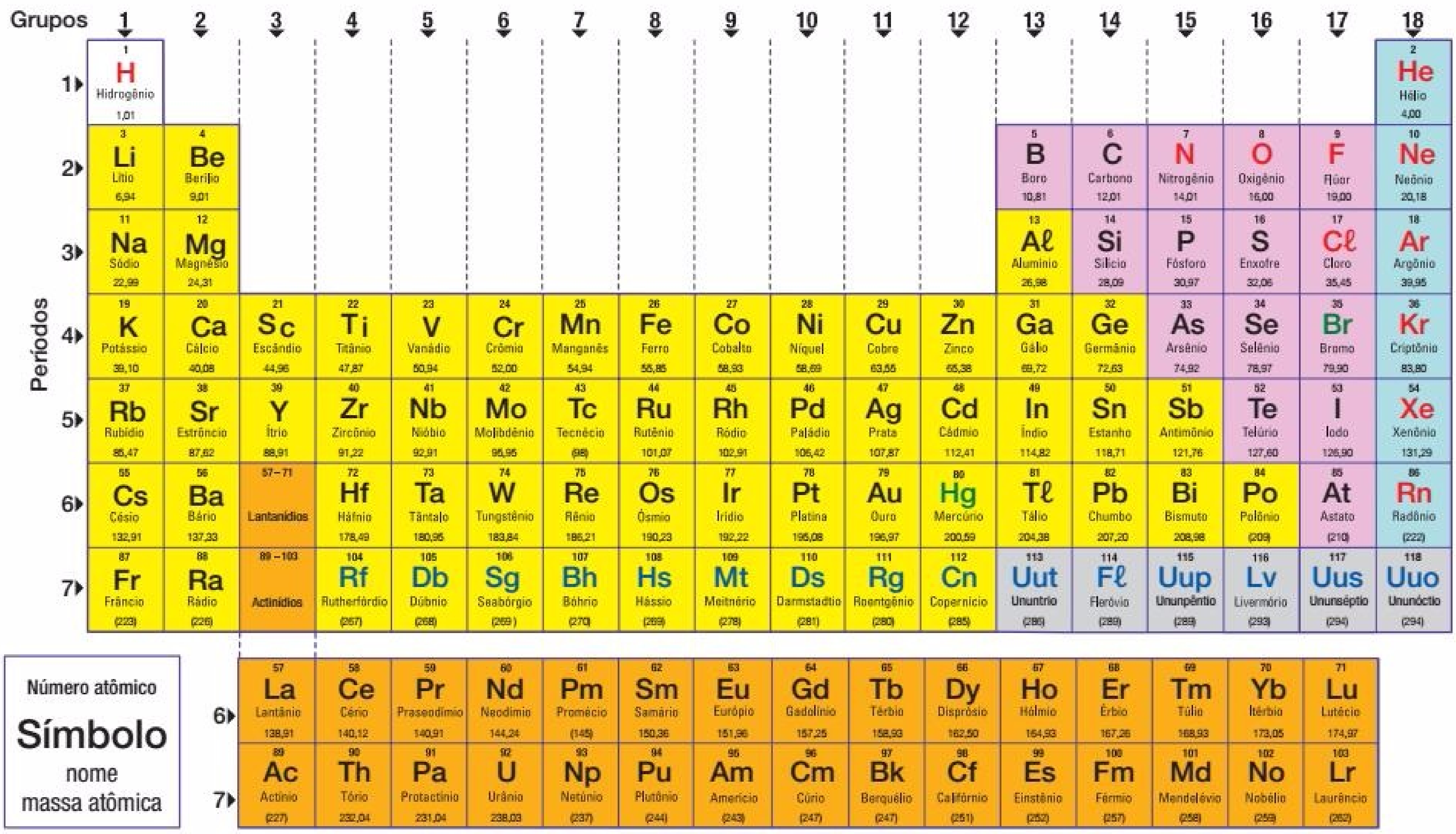


Ilustração elaborada de acordo com as recomendações, de 8 de janeiro de 2016, da Iupac e da RSC (International Union of Pure and Applied Chemistry/Royal Society of Chemistry, traduzido do inglês, União Internacional de Química Pura e Aplicada/Sociedade Real de Química, respectivamente).

a) Qual é o número de períodos da tabela periódica? E de grupos? 7 períodos; 18 grupos

b) Quantos elementos pertencem ao período 3? E ao período 5? 8 elementos; 18 elementos

c) Qual é o símbolo do elemento do:

- período 2 e grupo 14? C
- período 6 e grupo 11? Au
- período 5 e grupo 17? I

d) Indique a que período e grupo pertence o elemento de símbolo:

- Zn período 4, grupo 12
- Cℓ período 3, grupo 17
- Db período 7, grupo 5

5. Escreva as matrizes.

a) $A=(a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij}=i-j$ $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B=(b_{ij})_{2\times 3}$, tal que $b_{ij}=(i+j)^2$ $B=\begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

c) $C=(c_{ij})_{1\times 4}$, tal que $c_{ij}=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi j}{3}, \text{ se } j \text{ for par} \\ \text{sen}\,\dfrac{\pi j}{2}, \text{ se } j \text{ for ímpar} \end{cases}$ $C=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $D=(d_{ij})_{3\times 2}$, tal que $d_{ij}=\begin{cases} i, \text{ se } i=j \\ i+j, \text{ se } i\neq j \end{cases}$ $D=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6. Resolva as questões.

a) Qual a ordem de uma matriz formada por 7 elementos? Possíveis respostas: 1×7 ou 7×1.

b) Qual a ordem de uma matriz formada por 20 elementos? Possíveis respostas: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

- Compare as suas respostas com as de um colega. Resposta pessoal.

Alguns tipos de matrizes

Estudaremos agora algumas matrizes que, por apresentarem certas características, recebem uma nomenclatura diferenciada.

Matriz quadrada

Denominamos **matriz quadrada** toda matriz A de ordem $m \times n$, em que $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas. Nesse caso, dizemos simplesmente que a matriz A é de **ordem *n***, indicada por A_n.

Em uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, formam a **diagonal principal**. Já os elementos em que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Exemplos

- $A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 18 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada de ordem 2

  diagonal secundária — diagonal principal

- $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada de ordem 3

  diagonal secundária — diagonal principal

- $C_4 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -4 \\ 9 & 8 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada de ordem 4

  diagonal secundária — diagonal principal

Nos exemplos apresentados, os elementos da diagonal secundária:

- em A_2 têm $i + j = \underbrace{3}_{n+1}$ $(a_{12}$ e $a_{21})$
- em B_3 têm $i + j = \underbrace{4}_{n+1}$ $(b_{13}, b_{22}$ e $b_{31})$
- em C_4 têm $i + j = \underbrace{5}_{n+1}$ $(c_{14}, c_{23}, c_{32}$ e $c_{41})$

Matriz triangular

Uma matriz quadrada de ordem n é denominada **matriz triangular** quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos

- $A_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ -32 & 14 \end{bmatrix}$ Matriz triangular de ordem 2

  diagonal principal

- $B_3 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz triangular de ordem 3

  diagonal principal

- $C_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz triangular de ordem 3

  diagonal principal

Denomina-se **matriz triangular superior** toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal. De maneira semelhante, a **matriz triangular inferior** é toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal.

Nos exemplos ao lado, A_2 e C_3 são matrizes triangulares inferiores, e B_3, matriz triangular superior.

Matriz diagonal

Denominamos **matriz diagonal** toda matriz quadrada em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Discuta com os alunos as diferenças nas definições de matrizes triangulares e matrizes diagonais. Verifique se eles perceberam que a matriz diagonal é um caso particular de matriz triangular.

› Exemplos

- $A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz diagonal de ordem 3

  diagonal principal

- $B_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz diagonal de ordem 4

  diagonal principal

Matriz identidade

A matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos é denominada **matriz identidade**. Indicamos uma matriz identidade de ordem *n* por I_n.

› Exemplos

- $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidade de ordem 1

  diagonal principal

- $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidade de ordem 2

  diagonal principal

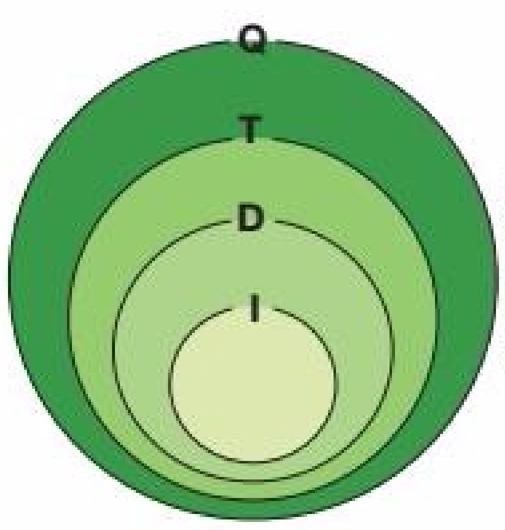
- $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidade de ordem 3

  diagonal principal

Note que em uma matriz identidade I_n temos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Podemos representar a relação entre os conjuntos das matrizes quadradas (Q), das matrizes triangulares (T), das matrizes diagonais (D) e das matrizes identidades (I) pelo diagrama ao lado.



Acervo da editora

Matriz nula

Denominamos **matriz nula** aquela que possui todos os elementos iguais a zero. Indicamos uma matriz nula de ordem m×n por $0_{m \times n}$ ou, se a matriz nula for quadrada, por 0_n.

› Exemplos

- $0_{2\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula de ordem 2×4

- $0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula de ordem 3

Matriz linha

Toda matriz que possui apenas uma linha é denominada **matriz linha**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz linha se $m = 1$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×5
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×2
- $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×3

Matriz coluna

Toda matriz que possui apenas uma coluna é denominada **matriz coluna**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz coluna se $n = 1$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ \pi \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 3×1
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 2×1
- $\begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ 34 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 5×1
- $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 4×1

Igualdade de matrizes

Em notação matemática, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos: $a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A_{m \times n} = B_{m \times n}$.

Quando duas matrizes *A* e *B* de mesma ordem têm os elementos correspondentes (de mesma posição) iguais, então dizemos que essas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$. De maneira semelhante, se duas matrizes *A* e *B* têm ordens diferentes ou os elementos correspondentes não são todos iguais, então $A \neq B$.

Exemplos

- Considere as matrizes de mesma ordem $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{2 \times 3}$, tal que $b_{ij} = 2i - j^2$.

  Obtendo os elementos de *B*, temos:
  - $b_{11} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$
  - $b_{12} = 2 \cdot 1 - 2^2 = -2$
  - $b_{13} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7$
  - $b_{21} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$
  - $b_{22} = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$
  - $b_{23} = 2 \cdot 2 - 3^2 = -5$

  Assim, segue que:
  - $a_{11} = b_{11}$
  - $a_{12} = b_{12}$
  - $a_{13} = b_{13}$
  - $a_{21} = b_{21}$
  - $a_{22} = b_{22}$
  - $a_{23} = b_{23}$

  Portanto, $A = B$.

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, temos que *C* e *D* têm a mesma ordem, mas $c_{12} \neq d_{12}$. Assim, $C \neq D$.

- Dadas as matrizes $E = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 13 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, temos que *E* e *F* não têm a mesma ordem. Assim, $E \neq F$.

Matriz transposta

Dada uma matriz *A* de ordem $m \times n$, denomina-se matriz transposta de *A*, indicada por A^t, a matriz de ordem $n \times m$, cujas linhas são ordenadamente iguais às colunas de *A*.

› Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

Observe que, para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $A^t = (b_{ij})_{n \times m}$, tal que $a_{ij} = b_{ji}$.

Matriz simétrica

Quando uma matriz quadrada *A* é igual à sua transposta A^t $(A = A^t)$, dizemos que *A* é uma **matriz simétrica**.

› Exemplo

Veja as matrizes *A* e sua transposta A^t.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A = A^t$, temos que *A* é uma matriz simétrica.

Em uma matriz simétrica os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais, ou seja, se uma matriz $A = (a_{ij})_n$ é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Atividades resolvidas

R4. Determine os valores de *x* e *y*, para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 3x+10 & 0 \\ 0 & 4y-9 \end{bmatrix}$ seja igual à matriz I_2.

Resolução

De acordo com o enunciado, devemos ter a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 3x+10 & 0 \\ 0 & 4y-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes possuem a mesma ordem, então basta calcular *x* e *y* de maneira que os elementos correspondentes sejam iguais.

- $3x + 10 = 1 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$
- $4y - 9 = 1 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

7. Escreva a matriz quadrada *A* de ordem 2, tal que $a_{ij} = i^2 - 3j + i \cdot j$. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, calcule a diferença entre a soma dos elementos da diagonal principal e a dos elementos da diagonal secundária. 0

9. Classifique cada matriz em quadrada, triangular, diagonal, identidade, nula, linha ou coluna.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ linha

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nula

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & \pi & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ quadrada

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ quadrada e triangular

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ quadrada, triangular, diagonal e identidade

f) $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ coluna

10. O **traço** de uma matriz quadrada é igual à soma dos elementos da diagonal principal. Calcule o traço da matriz:

- $A=\begin{bmatrix}5 & 12\\ 8 & -9\end{bmatrix}$ −4
- $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & -2\\ 8 & 9 & 3\end{bmatrix}$ 7

11. Escreva uma matriz diagonal de ordem 4, cujo traço seja 25. Resposta no final do livro.

12. Classifique cada afirmação em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Toda matriz quadrada nula é triangular. V

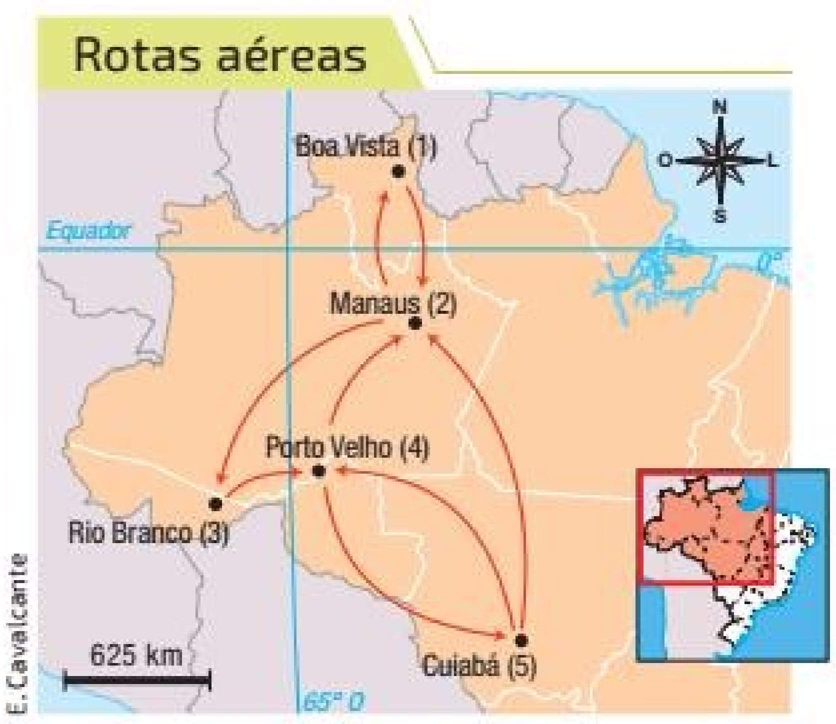
b) A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal. V

c) Toda matriz quadrada é triangular superior. F

d) Quando pelo menos um elemento da matriz é igual a 0, então a matriz é denominada nula. F

e) O traço da matriz identidade é numericamente igual a sua ordem. V

13. O mapa apresenta as rotas oferecidas por uma companhia aérea que atua em parte do Brasil.



Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Considere que não existe percurso de uma cidade para ela mesma.

a) Escreva a matriz $C=(c_{ij})_{5\times5}$, tal que:

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{ se existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j\\ 0, \text{ se não existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j\end{cases}$$

Resposta no final do livro.

b) Sabendo que a passagem para cada percurso custa R$ 210,00, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa Vista? R$ 1 050,00

c) A matriz *C* é uma matriz triangular? É uma matriz diagonal? não; não

14. Determine os valores de *x* e *y* em cada item.

a) $\begin{bmatrix}2 & x\\ 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ y & 0\end{bmatrix}$ $x=-3$; $y=7$

b) $\begin{bmatrix}2x-1 & 0 & -5\\ 0 & 4 & 6\\ 5y+3 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3y & 0 & -5\\ 0 & 2x & 6\\ 4x & -1 & 0\end{bmatrix}$ $x=2$; $y=1$

15. As matrizes *A*, *B*, *C* e *D* têm, respectivamente, 18, 30, 36 e 45 elementos. Sabe-se que apenas uma delas é uma matriz quadrada. Qual é essa matriz? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

16. Escreva a transposta de cada matriz.
Respostas no final do livro.

a) $A=\begin{bmatrix}0 & \pi\\ \pi & 2\pi\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & 6 & -16\\ 5 & 1 & 12\\ 15 & -8 & -1\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & \frac{5}{2}\\ -2 & 0 & 6\\ \frac{5}{2} & 6 & 13\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 3 & 5\\ -2 & 3 & 1 & -6\\ 1 & 5 & -6 & 7\end{bmatrix}$

17. Quais das matrizes apresentadas na atividade anterior são simétricas? *A* e *C*

18. A secretária de uma escola de idiomas organizou o número de alunos matriculados em cada curso em uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D
1	Número de matrículas			
2		Idioma		
3	Turno	Inglês	Francês	Espanhol
4	Matutino	13	7	15
5	Vespertino	6	4	5
6	Noturno	24	12	20

Acervo da editora

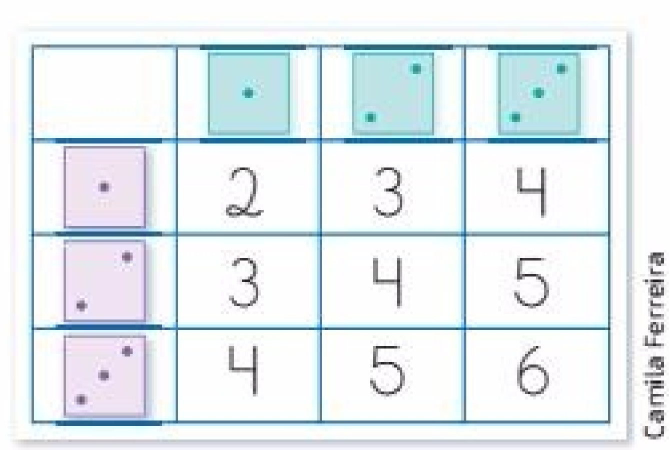
Respostas no final do livro.

a) Escreva a matriz *A* que representa os dados da planilha.

b) Determine a matriz A^t.

c) O que representam as linhas da matriz A^t? E as colunas?

19. Em certo jogo, cada participante lança dois dados e adiciona os números obtidos, tornando-se ganhador aquele que obtiver o maior resultado. A figura mostra alguns dos possíveis resultados em uma jogada.



a) Escreva, como sugere a figura acima, uma matriz *R* que represente todos os possíveis resultados desse jogo. Resposta no final do livro.

b) Determine a matriz R^t. Resposta no final do livro.

c) A matriz *R* é simétrica? sim

d) Em um jogo com 2 participantes, se o 1º obtém 8 como resultado, quantas possibilidades tem o 2º participante de ganhar o jogo?
10 possibilidades em 36

Adição e subtração de matrizes

Adição de matrizes

O direito igualitário ao voto entre homens e mulheres no Brasil é uma conquista que as mulheres obtiveram, por meio de muita luta, ao longo de nossa história. Para elas, tanto o direito de votar como o de receber votos ocorreram apenas a partir de 1932.

Contudo, percebe-se ainda a necessidade de um significativo avanço na participação da mulher na composição entre os políticos eleitos no Brasil.

Observe a quantidade de homens e mulheres eleitos deputados federais e senadores da república no Brasil em duas eleições.

Arquivo/Estadão Conteúdo

A paulistana Carlota Pereira de Queirós (1892-1982) foi a primeira mulher eleita deputada federal no Brasil, em 1934.

Número de candidatos eleitos para a Câmara Federal do Brasil

Eleição	Mulher	Homem
2010	45	468
2014	51	462

Número de candidatos eleitos para o Senado Federal do Brasil

Eleição	Mulher	Homem
2010	7	47
2014	5	22

Fonte: <www.tse.jus.br/eleicoes/estatisticas/estatisticas-candidaturas-2014/estatisticas-eleitorais-2014>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Fonte: <www.tse.jus.br/eleicoes/eleicoes-anteriores/eleicoes-2010/estatisticas>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Com base nas tabelas, podemos construir as matrizes $A=\begin{bmatrix}45 & 468\\ 51 & 462\end{bmatrix}$ para a Câmara Federal e $B=\begin{bmatrix}7 & 47\\ 5 & 22\end{bmatrix}$ para o Senado Federal. Ao adicionarmos os elementos de mesma posição nas matrizes *A* e *B*, obtemos uma matriz que representa o total de candidatos eleitos por sexo no Brasil para a Câmara Federal e para o Senado Federal nos anos de 2010 e 2014.

$$\begin{bmatrix}45+7 & 468+47\\ 51+5 & 462+22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52 & 515\\ 56 & 484\end{bmatrix}$$

Ao adicionarmos os elementos correspondentes das matrizes *A* e *B*, estamos adicionando essas matrizes, ou seja, calculando $A+B$.

> Dadas as matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, de mesma ordem $m\times n$, temos que a soma $A+B$ é igual à matriz $C=(c_{ij})$ de ordem $m\times n$, tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para todo $1\leq i\leq m$ e $1\leq j\leq n$.

Matriz oposta

Observe a adição das matrizes $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & -6\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-5 & -4 & 6\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$:

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 4 & -6\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -4 & 6\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+(-5) & 4+(-4) & -6+6\\ -3+3 & 1+(-1) & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nesse caso, como $A+B$ resulta em uma matriz nula, dizemos que *B* é matriz oposta de *A* e vice-versa.

> Dada uma matriz *A*, denominamos **matriz oposta** de *A*, indicada por $-A$, a matriz cuja adição com *A* resulta em uma matriz nula de mesma ordem, ou seja, $A_{m\times n}+(-A_{m\times n})=0_{m\times n}$. Nas matrizes *A* e $-A$, os elementos correspondentes são opostos.

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes tem as mesmas propriedades básicas da adição de números reais, uma vez que foi definida por meio da adição de seus elementos correspondentes. Assim, considerando *A*, *B* e *C* matrizes de mesma ordem m×n, temos:

- Propriedade comutativa: $A+B=B+A$
- Propriedade associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
- Elemento neutro: $A_{m\times n}+0_{m\times n}=A_{m\times n}$
- Elemento oposto: $A_{m\times n}+(-A_{m\times n})=0_{m\times n}$

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes *A* e *B* de mesma ordem m×n, denominamos diferença entre *A* e *B*, indicada por $A-B$, a matriz *C* obtida ao calcularmos a adição de *A* com o oposto de *B*, ou seja, $A-B=A+(-B)=C$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}8 & 4\\3 & -5\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\-7 & 1\end{bmatrix}$, temos que:

$$A-B=A+(-B)=\underbrace{\begin{bmatrix}8 & 4\\3 & -5\end{bmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{bmatrix}-5 & -4\\7 & -1\end{bmatrix}}_{-B}=\begin{bmatrix}8+(-5) & 4+(-4)\\3+7 & -5+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\10 & -6\end{bmatrix}$$

Sendo $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ e $C=(c_{ij})_{m\times n}$, com $A-B=C$, temos que $a_{ij}-b_{ij}=c_{ij}$. Assim, também podemos calcular $A-B$ subtraindo de cada elemento de *A* o elemento correspondente de *B*.

Para quaisquer matrizes *A* e *B* de mesma ordem, $A-B=B-A$? Justifique.

Não, pois se $A-B=C$, então $B-A=-C$.

Exemplo

Considerando as matrizes $A=\begin{bmatrix}12 & 7 & -1\\9 & -4 & 5\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\-6 & 2 & -8\end{bmatrix}$, temos:

$$A-B=\begin{bmatrix}12 & 7 & -1\\9 & -4 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\-6 & 2 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12-4 & 7-0 & -1-5\\9-(-6) & -4-2 & 5-(-8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 7 & -6\\15 & -6 & 13\end{bmatrix}$$

Atividades resolvidas

R5. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}$, calcule $[A+(-B)]+(-A)+C$.

Resolução

Utilizando as propriedades da adição de matrizes, temos:

$$[A+(-B)]+(-A)+C\overset{\text{propriedades comutativa e associativa}}{=}[A+(-A)]+(-B)+C\overset{\text{elemento oposto}}{=}0_2+(-B)+C\overset{\text{elemento neutro}}{=}-B+C$$

Note que $A+(-A)=0_2$, que corresponde à matriz nula de ordem 2 (elemento neutro da adição).

Segue que:

$$[A+(-B)]+(-A)+C=-B+C=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$$

Note que, da propriedade comutativa e do elemento neutro, temos $0_n+(-B_n)=(-B_n)+0_n=-B_n$.

20. Calcule.

a) $A=\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 6\\1 & -8\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3 & 7\\4 & -8\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}10 & 18\\-9 & 15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7 & 0\\12 & -4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}17 & 18\\-21 & 19\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}3 & 5 & -8\\0 & -6 & 1\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -5 & -1\\-6 & 0 & 10\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4 & 0 & -9\\-6 & -6 & 11\\4 & 2 & -1\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}5 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\9 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & 10\\-1 & 7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}9 & -14\\7 & -3\end{bmatrix}$

21. Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes *J*, *F* e *M* indicam as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende 4 bairros, respectivamente, nos meses de janeiro, fevereiro e março. Nelas, as linhas indicam respectivamente os tipos de plano I e II, e as colunas, os bairros **A**, **B**, **C** e **D**.

$J=\begin{bmatrix}15 & 25 & 22 & 19\\23 & 16 & 18 & 21\end{bmatrix}$ $M=\begin{bmatrix}22 & 25 & 20 & 23\\22 & 20 & 26 & 19\end{bmatrix}$

$F=\begin{bmatrix}18 & 24 & 22 & 25\\20 & 21 & 19 & 23\end{bmatrix}$

a) Escreva a matriz $T_{2\times4}$ que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado. Resposta no final do livro.

b) Em qual bairro foi vendido o maior número de unidades do plano I? E do plano II? bairro B; bairro A

22. Escreva a oposta de cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 0\end{bmatrix}$ $-A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\-5 & 0\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & -\pi\\3 & -4\end{bmatrix}$ $-B=\begin{bmatrix}-1 & \pi\\-3 & 4\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -1\\\sqrt[3]{-6} & 2 & 10\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $-C=\begin{bmatrix}-1 & 0{,}5 & 1\\-\sqrt[3]{-6} & -2 & -10\\3 & 0 & -1\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $-D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & -1 & 0\\1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

23. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}8 & -2\\-5 & 1\end{bmatrix}$, calcule: Respostas no final do livro.

a) B+B b) B+A c) $A+A^t$ d) A−B

24. Observe a previsão de temperatura para algumas cidades brasileiras.

Previsão de temperatura mínima em novembro de 2015

Cidade \ Dia	26	27	28	29	30
Brasília-DF	20 °C	20 °C	20 °C	21 °C	22 °C
Campo Grande-MS	22 °C	22 °C	23 °C	22 °C	21 °C
Cuiabá-MT	24 °C	23 °C	23 °C	24 °C	23 °C
Goiânia-GO	22 °C	21 °C	22 °C	22 °C	23 °C

Fonte: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Previsão de temperatura máxima em novembro de 2015

Cidade \ Dia	26	27	28	29	30
Brasília-DF	33 °C	29 °C	28 °C	31 °C	30 °C
Campo Grande-MS	32 °C	23 °C	29 °C	28 °C	26 °C
Cuiabá-MT	35 °C	34 °C	30 °C	32 °C	35 °C
Goiânia-GO	32 °C	34 °C	33 °C	35 °C	36 °C

Fonte: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 25 nov. 2015.

a) Escreva as matrizes *M* e *N* que apresentam, respectivamente, as temperaturas mínimas e máximas segundo o dia e a cidade. Resposta no final do livro.

b) A variação de temperatura de cada dia é dada pela matriz: *B*

- A=M+N
- C=M−N
- B=N−M
- D=N·M

c) Escreva a matriz que você escolheu no item **b**. Resposta no final do livro.

d) Para qual cidade estava prevista a maior variação de temperatura em 29/11/2015? E a menor? Goiânia; Campo Grande

e) Em qual dia Brasília apresentou a maior previsão de variação de temperatura? dia 26

25. Sabendo que $A+I_3=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\0 & -7 & 8\\-1 & 3 & 0\end{bmatrix}$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3, determine a matriz *A*. Resposta no final do livro.

26. Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, *A*, *B*, *C* e 0, de mesma ordem, e verifiquem numericamente a validade das propriedades: Resposta pessoal.

a) A+B=B+A

b) (A+B)+C=A+(B+C)

c) A+0=A

d) A+(−A)=0

Explique aos alunos que os itens desta atividade não correspondem a demonstrações, apenas a verificações numéricas.

A matriz nula $0_{m\times n}$ está representada por 0.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dada uma matriz $A=(a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e um número real k, temos que $k \cdot A$ é uma matriz $B=(b_{ij})$ também de ordem $m \times n$, tal que $b_{ij}=k \cdot a_{ij}$ para todo $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Exemplo

Sendo $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

- $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 & -3 \\ -9 & 12 & 33 \end{bmatrix}$
- $-\frac{1}{4} \cdot B = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot (-16) & -\frac{1}{4} \cdot 13 \\ -\frac{1}{4} \cdot 10 & -\frac{1}{4} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{4} \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Atividades resolvidas

R6. Seja $A_{2 \times 2}$ uma matriz qualquer. Mostre que $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, sendo α e β números reais.

Resolução

$$(\alpha+\beta) \cdot A = (\alpha+\beta) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta) \cdot a_{11} & (\alpha+\beta) \cdot a_{12} \\ (\alpha+\beta) \cdot a_{21} & (\alpha+\beta) \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11}+\beta \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12}+\beta \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21}+\beta \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22}+\beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} \\ \beta \cdot a_{21} & \beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Portanto, $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

Dadas as matrizes *A* e *B*, de mesma ordem, e α e β, números reais, são válidas as propriedades:

- $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

27. Calcule. Respostas no final do livro.

a) $-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & \pi & \frac{1}{6} \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3x \\ 0 & 1 \\ 9x^2 & -2 \end{bmatrix}$

28. Considerando duas matrizes quaisquer $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ e um número real α, mostre que: Respostas nas Orientações para o professor.

a) $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

b) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Antes de resolver a atividade, estabeleça duas matrizes *A* e *B* de mesma ordem e um número real α, e verifique numericamente a validade dessas propriedades.

29. Determine os valores de *x*, *y* e *z* de modo que

$$4 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ -z & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 6 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}.$$ $x=\frac{7}{4}$; $y=4$; $z=-3$

30. Na matriz *C*, a 1ª linha indica a quantidade de tecido (em metros quadrados), e a 2ª, a de botões utilizados na confecção de 3 modelos diferentes de camisa, correspondentes a cada uma das colunas.

$$C=\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 1{,}1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Escreva a matriz que indica a quantidade necessária desses materiais para a confecção de 18 camisas de cada modelo. Resposta no final do livro.

Multiplicação de matrizes

Em certa fábrica, duas máquinas **X** e **Y** produzem cada uma dois tipos de peças: **I** e **II**. Observe a proporção de cada tipo de peça produzida pelas máquinas e as quantidades de peças produzidas em certo mês.

As informações apresentadas nas tabelas são fictícias.

Proporção na produção total das peças

Máquina \ Peça	I	II
X	0,25	0,60
Y	0,75	0,40

Fonte: Administração da fábrica.

Produção total por tipo de peça

Peça	Quantidade
I	680
II	590

Fonte: Administração da fábrica.

Podemos calcular o total de peças produzidas pelas máquinas **X** e **Y** naquele mês a partir dos seguintes cálculos:

- máquina **X**: $0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 = 524 \rightarrow 524$ peças
- máquina **Y**: $0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 = 746 \rightarrow 746$ peças

Assim, podemos expressar a produção de cada máquina conforme indicado ao lado:

Produção por máquina

Máquina	Quantidade
X	524
Y	746

Fonte: Administração da fábrica.

Se considerarmos as matrizes *A*, *B* e *C* correspondentes, respectivamente, à proporção na produção total das peças, à produção total por tipo de peça e à produção por máquina, temos que os cálculos realizados correspondem ao que se define como sendo a **multiplicação de matrizes**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}60 \\ 0{,}75 & 0{,}40 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 680 \\ 590 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 \\ 0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 524 \\ 746 \end{bmatrix}}_{C = A \cdot B}$$

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times p$, temos que o produto AB é a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times p$, em que cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha *i* de *A* e da coluna *j* de *B*, e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos das multiplicações.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Note que, pela definição apresentada, o produto de duas matrizes *A* e *B* existe somente se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas de *B*, sendo que a matriz AB obtida tem o mesmo número de linhas de *A* e o de colunas de *B*.

Na multiplicação de matrizes podemos destacar as seguintes propriedades:

- Propriedade I (associativa): $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times r} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times r})$
- Propriedade II (distributiva): $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times p} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$ e $A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} + C_{n \times p}) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$
- Propriedade III (elemento neutro): $A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$ e $I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$, sendo *I* a matriz identidade
- Propriedade IV: $(k \cdot A_{m \times n}) \cdot B_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot (k \cdot B_{n \times p}) = k \cdot (A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})$, com $k \in \mathbb{R}$
- Propriedade V: $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})^t = B^t_{p \times n} \cdot A^t_{n \times m}$

As propriedades apresentadas podem ser demonstradas, o que optou-se por não realizar neste livro.

A propriedade comutativa não é válida para a multiplicação de matrizes. Existindo a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- não existe a multiplicação $B \cdot A$

Atividades resolvidas

R7. Estudamos nas páginas **44** e **45** que os *pixels* de uma imagem são dispostos em linhas e colunas na tela de um computador, cada *pixel* corresponde a um elemento de uma matriz. Uma imagem de 800×600 *pixels*, por exemplo, está disposta em uma matriz de 800 colunas e 600 linhas que não podem ser percebidas a olho nu. Para aumentar, diminuir, rotacionar ou transladar essa imagem, a computação gráfica utiliza operações de matrizes em cada um dos $800 \cdot 600 = 480\,000$ *pixels*.

A rotação de um *pixel* de coordenadas (x, y) em α graus, no sentido horário, em torno da origem, por exemplo, é feita pela multiplicação da matriz $P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ com a matriz $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gerando uma nova matriz $P' = P \cdot R$, com as novas coordenadas (x', y') do *pixel*.

Considere um triângulo ABC de vértices em $A(3, 2)$, $B(5, 5)$ e $C(7, 0)$. Construa em um mesmo plano cartesiano os triângulos A'B'C' e A"B"C", obtidos pela rotação do ΔABC em 90° e em 180°, respectivamente, em torno da origem, no sentido horário.

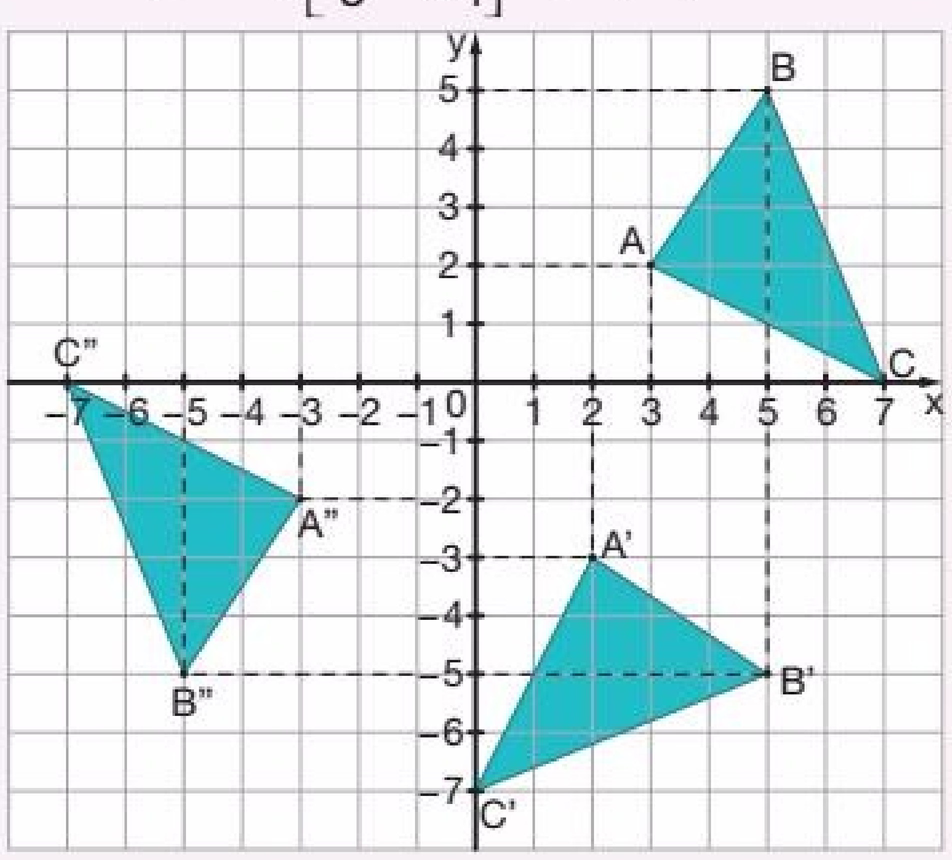
Resolução

Inicialmente, substituímos $\alpha_1 = 90°$ e $\alpha_2 = 180°$ na matriz *R*, obtendo:

- $R' = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $R'' = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\,180° \\ \text{sen}\,180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Em seguida, tomamos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}$, correspondentes aos vértices do triângulo ABC, e multiplicamos pela matriz:

- R', obtendo os vértices do triângulo A'B'C'
  - $A' = A \cdot R' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A'(2, -3)$
  - $B' = B \cdot R' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow B'(5, -5)$
  - $C' = C \cdot R' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow C'(0, -7)$
- R", obtendo os vértices do triângulo A"B"C"
  - $A'' = A \cdot R'' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A''(-3, -2)$
  - $B'' = B \cdot R'' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow B''(-5, -5)$
  - $C'' = C \cdot R'' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 7 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C''(-7, 0)$



Acervo da editora

Note que um ponto $P(x, y)$ é rotacionado para um ponto:
- $P'(y, -x)$ pela matriz R'
- $P''(-x, -y)$ pela matriz R"

31. Calcule.

a) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -6 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & -2\\ 0 & 6 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1 & 8 & -3\\ 0 & 12 & 4\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 9\\ 0 & 9 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -9\\ 0 & -9 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-5 & 8 & 18\\ 8 & -94 & -36\\ 18 & -36 & -82\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}6 & 8 & \sqrt{3} & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\ 2\\ \sqrt{3}\\ 7\end{bmatrix}$ $[9]$

e) $E=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -5\end{bmatrix}$

32. Sejam as matrizes $A=(a_{ij})_{3\times2}$ e $B=(b_{ij})_{m\times4}$.

a) Determine o valor de *m* para que exista o produto $A\cdot B$. $m=2$

b) Considerando o valor de *m* obtido no item **a**, qual é a ordem da matriz $C=A\cdot B$? 3×4

33. Vimos que um ponto $P(x, y)$ é rotacionado em α graus no sentido horário em torno da origem, pela multiplicação da matriz $P=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}$ com a matriz $R=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$.

Dado o quadrilátero ABCD, de vértices em $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 4)$ e $D(5, 2)$, obtenha as coordenadas dos vértices do quadrilátero A'B'C'D', obtido pela rotação em 270° do quadrilátero ABCD em torno da origem, no sentido horário. Em seguida, construa os dois quadriláteros em um mesmo plano cartesiano. Resposta no final do livro.

34. Sendo as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 4 & -5\end{bmatrix}$, calcule $A\cdot B$ e $B\cdot A$.
Resposta no final do livro.

35. Junte-se a um colega e estabeleçam três matrizes quadradas, *A*, *B* e *C*, de ordem 2, e verifiquem numericamente a validade das propriedades: Resposta pessoal.

a) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

b) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

c) $A\cdot I_2=I_2\cdot A=A$

d) $(k\cdot A)\cdot B=k\cdot(A\cdot B)$, com $k\in\mathbb{R}$

e) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

36. Veja parte da tabela de classificação da série **A** do campeonato brasileiro de futebol em certo ano, em determinada rodada.

Classificação do campeonato brasileiro 2015 na 36ª rodada

Time \ Resultado	Vitórias	Empates	Derrotas
Corinthians (SP)	24	8	4
Atlético (MG)	20	6	10
Grêmio (RS)	18	8	10
São Paulo (SP)	16	8	12
Internacional (RS)	16	8	12

Fonte: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#.VlXr3tKrQdW>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Note que o número de vitórias, empates e derrotas de cada time pode ser representado pela matriz:

$$A=\begin{bmatrix}24 & 8 & 4\\ 20 & 6 & 10\\ 18 & 8 & 10\\ 16 & 8 & 12\\ 16 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos 3 pontos para vitória, 1 para empate e 0 para derrota, formando a matriz $B=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$.

a) Determine a matriz *C*, que fornece o total de pontos de cada time até essa rodada.
Resposta no final do livro.

b) Qual foi a pontuação obtida pelo Atlético Mineiro? E pelo Corinthians? 66 pontos; 80 pontos

37. Dadas as matrizes $P=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}1 & -6 & 0\\ 5 & -3 & 2\end{bmatrix}$ e $R=(r_{ij})$, com $R=P\cdot Q$, escreva o elemento:

a) r_{12} -12 b) r_{21} 19 c) r_{23} 8

38. Sendo $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 9\\ 10 & -7 & 0\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, calcule: Respostas no final do livro.

a) $A\cdot B$ b) $A^t\cdot C$ c) $C\cdot B$ d) $(A+C)\cdot B$

39. Calcule os valores de *x* e *y* de modo que a igualdade $\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & 3\\ 1 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2\end{bmatrix}$ seja verdadeira.
$x=-3$; $y=\frac{1}{2}$

40. Dadas as matrizes $A_{p\times q}$, $B_{3\times r}$ e $C_{4\times s}$, determine os valores de *p*, *q*, *r* e *s* sabendo que o produto $A\cdot B\cdot C$ é da ordem 5×3. $p=5$; $q=3$; $r=4$; $s=3$

Matriz inversa

De maneira geral, quanto maior a ordem de uma matriz quadrada mais cálculos são necessários para obter a sua inversa. Nesse sentido, programas específicos de computador costumam ser empregados nessa tarefa, como a planilha eletrônica *Calc*.

Sendo *A* uma matriz quadrada de ordem *n*, denominamos a matriz quadrada *B*, também de ordem *n*, de **matriz inversa** de *A*, se $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem *n*. De maneira geral, indicamos a inversa de *A* por A^{-1}. Quando uma matriz quadrada possui inversa, dizemos que essa matriz é **invertível** (ou inversível). Já quando a matriz não possui inversa, dizemos que ela é **não invertível** (ou não inversível).

Exemplo

Temos que a matriz $A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ é invertível, e sua inversa é $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, pois:

- $A \cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$
- $A^{-1} \cdot A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

Atividades resolvidas

R8. Caso exista, determine a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$.

Resolução

Se existir, a inversa da matriz *A* é do tipo $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = I_2$, ou seja:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3a+c & 3b+d\\ 5a+2c & 5b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos os sistemas:

Caso um dos sistemas fosse impossível, a matriz *A* não seria invertível.

$$\begin{cases}3a+c=1 & \cdot(-2)\\ 5a+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6a-2c=-2\\ 5a+2c=0\end{cases}$$

$$-a=-2 \Rightarrow a=2$$

$$3a+c=1 \Rightarrow 3\cdot 2+c=1 \Rightarrow c=-5$$

$$\begin{cases}3b+d=0 & \cdot(-2)\\ 5b+2d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6b-2d=0\\ 5b+2d=1\end{cases}$$

$$-b=1 \Rightarrow b=-1$$

$$3b+d=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)+d=0 \Rightarrow d=3$$

Em seguida, verificamos se $X \cdot A = I_2$.

$$X \cdot A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3+(-1)\cdot 5 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\\ (-5)\cdot 3+3\cdot 5 & (-5)\cdot 1+3\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

Como $A \cdot X = X \cdot A = I_2$, segue que a matriz *A* é invertível, e sua inversa é $A^{-1}=X=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

41. Obtenha, caso exista, a inversa de cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}-12 & 6\\ 18 & -9\end{bmatrix}$ não existe C^{-1}

d) $D=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 8 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}$

42. Sendo $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & n\\ -\frac{1}{2} & 3\end{bmatrix}$ a matriz inversa de $A=\begin{bmatrix}m & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, calcule o valor de $m+n$. 7

43. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 6 & -3\end{bmatrix}$, determine: Respostas no final do livro.

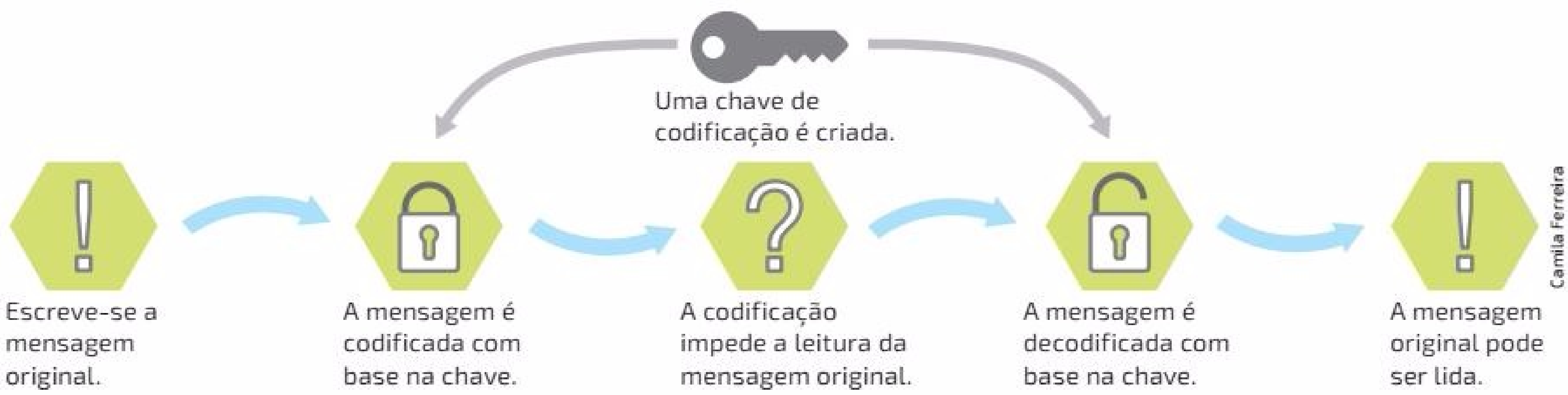
a) A^{-1}

b) $A^{-1}\cdot B^{-1}$

c) $B^{-1}\cdot A^{-1}$

d) $(A\cdot B)^{-1}$

44. A palavra criptografia é derivada de *kriptos*, que em grego significa oculto, escondido. Contudo, a criptografia não tem como objetivo ocultar a existência de uma mensagem, mas esconder o seu significado. De acordo com uma chave, estabelecida previamente pelo receptor e pelo transmissor, o texto é codificado para tornar a mensagem incompreensível a terceiros. O receptor torna a mensagem compreensível ao decodificá-la por meio da chave.



Um dos métodos utilizados para criptografar mensagens é por meio de matrizes. Para isso, podemos, por exemplo, relacionar as letras do alfabeto e o símbolo #, que representa um espaço em branco, a números primos da seguinte maneira:

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica mostrada acima, obtemos:

C	O	D	I	G	O	#	S	E	C	R	E	T	O
7	53	11	29	19	53	2	71	13	7	67	13	73	53

Suponha que a chave utilizada seja uma matriz quadrada invertível $A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organizamos a sequência de números como elementos de uma matriz *B* com duas linhas, ou seja:

$$B=\begin{bmatrix}7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2\\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53\end{bmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação $A\cdot B$, obtemos a matriz *C*, que será enviada ao receptor. Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave por *C*, ou seja, $A^{-1}\cdot C=B$. Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, poderá obter a mensagem original.

a) Determine a matriz *C* enviada ao receptor no exemplo apresentado.
Resposta no final do livro.

b) Mostre que a mensagem codificada no item **a**, ao ser decodificada, gera a mensagem original.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

c) Acima, foram relacionados números primos às letras do alfabeto. Explique o que são números primos.
Resposta no final do livro.

d) Suponha que chegou até um receptor a seguinte matriz:

$$M=\begin{bmatrix}187 & 151 & 299 & 639 & 367 & 227 & 63 & 83 & 278\\ 141 & 115 & 225 & 497 & 293 & 171 & 50 & 63 & 209\end{bmatrix}$$

Sabendo que essa mensagem foi criptografada usando a mesma relação de letras e símbolos apresentada acima, cuja chave é a matriz $A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, qual a mensagem que está codificada?
missão fracassada

e) Escolha outra maneira para relacionar letras a números, defina uma matriz-chave e escreva uma mensagem a ser codificada por meio de uma matriz. Envie essa matriz a um colega, disponibilizando a ele a matriz-chave e a relação letra/número. Peça a ele que decodifique a mensagem. Por fim, verifiquem se a mensagem secreta foi obtida. Resposta pessoal.

Equações envolvendo matrizes

Existem equações cuja incógnita é uma matriz. Em geral, para resolver equações com essa característica utilizamos as operações de adição, subtração e multiplicação, além do conceito de matriz inversa, estudados anteriormente.

Atividades resolvidas

R9. Sendo $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}$, resolva a equação matricial $X_{3\times 2}+A=B$.

Resolução

Utilizando as propriedades operatórias da adição, temos:

$$X+A=B\Rightarrow X+A+(-A)=B+(-A)\Rightarrow X+0_{3\times 2}=B-A\Rightarrow X=B-A$$

Segue que: $X=B-A\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$

Portanto, a solução da equação é $X=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$.

R10. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}$, determine a matriz *X* tal que $A\cdot X=B$.

Resolução

Podemos resolver a equação de duas maneiras.

1ª maneira

A ordem da matriz *X* é 2×1, pois $A_{2\times 2}\cdot X_{2\times 1}=B_{2\times 1}$. A matriz *X* é do tipo $X=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, tal que $A\cdot X=B$, ou seja:

$$A\cdot X=B\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3a+b\\5a+2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos o sistema:

$$\begin{cases}3a+b=19 & \cdot(-2)\\5a+2b=31\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6a-2b=-38\\\underline{5a+2b=31}\end{cases}$$

$$-a=-7\Rightarrow a=7$$

$$3a+b=19\Rightarrow 3\cdot 7+b=19\Rightarrow b=-2$$

Portanto, $X=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}$.

2ª maneira

Multiplicamos por A^{-1} pela esquerda os membros da equação $A\cdot X=B$.

$$A\cdot X=B\Rightarrow A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$$

Utilizando as propriedades operatórias das matrizes, segue que:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B\Rightarrow\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{I_2}\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow\underbrace{I_2\cdot X}_{X}=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

Devemos calcular o produto da inversa da matriz *A* por *B*. Calculando inicialmente A^{-1}, obtemos $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix}$. Logo: $X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 19+(-1)\cdot 31\\(-5)\cdot 19+3\cdot 31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}$

Portanto, $X=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}$.

Note que foi possível utilizar a 2ª maneira porque a matriz *A* é invertível.

R11. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, resolva o sistema $\begin{cases}-X+2Y=A\\ X-Y=B\end{cases}$.

Resolução

Temos que:

$$\begin{cases}-X+2Y=A\\ X-Y=B\end{cases}$$

Logo:

$$Y=A+B$$

$$Y=A+B\Rightarrow Y=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

Isolando X e substituindo Y na igualdade $X-Y=B$, segue que:

$$X-Y=B\Rightarrow X-Y+Y=B+Y\Rightarrow X=B+Y\Rightarrow X=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $X=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ e $Y=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

Substitua as matrizes X e Y no sistema e verifique a igualdade.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

45. Determine a matriz X em cada item.

a) $X-\begin{bmatrix}7 & -3\\ 4 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 9\\ 23 & -8\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}18 & 6\\ 27 & -3\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}5 & 3 & 4\\ -4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -8\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -5\\ -6 & 0 & 9\end{bmatrix}$

46. Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 7 & -1\end{bmatrix}$, determine X tal que a igualdade $A\cdot X+B=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 12 & 5\end{bmatrix}$ seja verdadeira. Resposta no final do livro.

47. Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases}X+Y=\begin{bmatrix}2 & 12\\ 8 & -6\end{bmatrix}\\ Y-X=\begin{bmatrix}5 & -7\\ 4 & 3\end{bmatrix}\end{cases}$ $X=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{19}{2}\\ 2 & -\frac{9}{2}\end{bmatrix}$; $Y=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\ 6 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

b) $\begin{cases}X+Y=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\end{bmatrix}\\ X-2Y=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 8\end{bmatrix}\end{cases}$ $X=\begin{bmatrix}1 & \frac{10}{3} & 4\end{bmatrix}$; $Y=\begin{bmatrix}2 & \frac{5}{3} & -2\end{bmatrix}$

48. Sendo $M=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ e $N=\begin{bmatrix}6\\ 9\end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $M\cdot X=N$. Resposta no final do livro.

49. Em certa escola, a nota final dos alunos é obtida por meio de dois trabalhos e uma prova, sendo que cada avaliação tem um peso diferente. Observe ao lado as notas de alguns alunos.
As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Notas de Língua Portuguesa – 1º bimestre

Aluno \ Avaliação	Trabalho 1	Trabalho 2	Prova	Nota final
André	8,0	9,0	9,0	8,8
Bianca	8,0	8,5	9,5	8,9
Carolina	9,5	10,0	9,0	9,4

Fonte: Secretaria da escola.

a) Determine, em porcentagem, o peso de cada avaliação. trabalho 1: peso 20%; trabalho 2: peso 30%; prova: peso 50%

b) Qual a nota final de um aluno que obteve as notas 7, 9 e 8 no trabalho 1, no trabalho 2 e na prova, respectivamente? 8,1

c) Sabe-se que a nota final de um aluno foi 9. Quais são as possíveis notas obtidas por ele em cada avaliação? Algumas possíveis respostas: no trabalho 1: 8, no trabalho 2: 8 e na prova: 10; no trabalho 1: 9, no trabalho 2: 9 e na prova: 9.
Nomeie os pesos dos trabalhos 1 e 2 e da prova de x, y e z, respectivamente.

50. O cloreto de sódio, popularmente conhecido como sal de cozinha, realça os sabores das preparações como poucos ingredientes e é um excelente conservante de alimentos. No entanto, porções exageradas provocam a retenção de líquidos pelas células, exigindo do coração mais esforço em bombear o sangue para o corpo. Também podem estar relacionadas ao aumento da pressão arterial.

A Organização Mundial de Saúde (OMS) colocou o sal entre as substâncias que precisam ser reduzidas na alimentação e limitou o consumo a menos de 5 g diárias. Tais valores são preocupantes, pois estudos mostraram que a ingestão média do brasileiro é de 12 g de sal por dia, e o hipertenso chega a consumir diariamente 17,4 g. Para se ter ideia, 1 g de sal contém 400 mg de sódio.

O recomendado é que a ingestão de alimentos ricos em sódio, como enlatados, conservas, frios, temperos e salgadinhos, seja evitada, assim como colocar o saleiro na mesa, ao passo que a ingestão de alimentos ricos em potássio é permitida.

O potássio exerce efeito anti-hipertensivo e protege contra danos cardiovasculares. É recomendável que a ingestão de potássio seja de no mínimo 3 510 mg, que podem ser obtidos por meio de uma alimentação rica em vegetais frescos e frutas.

Procure substituir o sal por ervas e hortaliças, pois elas ajudam o paladar a adaptar-se à comida menos salgada. O alho e a cebola contêm substâncias protetoras das artérias; o limão acrescenta vitamina C na refeição e atenua a vontade de comer sal; as ervas (alecrim, cebolinha, coentro, manjericão, pimenta etc.) contribuem para o funcionamento de todo o organismo.

Fontes de pesquisa: <www.who.int/elena/titles/sodium_cvd_adults/es/#>. Acesso em: 20 nov. 2015. <www.brasil.gov.br/saude/2015/01/aprenda-a-substituir-o-sal-por-temperos-frescos-e-saudaveis>. Acesso em: 20 nov. 2015. <www.unicamp.br/nepa/taco/contar/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada>. Acesso em: 20 nov. 2015.

Veja a quantidade aproximada de sódio em alguns alimentos (porção de 100 g)

Evite consumir

hambúrguer: 1 252 mg
batata frita: 607 mg
macarrão instantâneo: 1 516 mg
maionese industrializada: 787 mg
azeitona verde: 1 347 mg
tablete de caldo de carne: 22 180 mg
presunto: 1 021 mg
salame: 1 574 mg
requeijão: 558 mg

porções de sal

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Observe as quantidades de sódio e potássio contidas em 1 g de pão francês e em 1 g de leite.

	Pão francês	Leite
Sódio	6,48 mg	0,51 mg
Potássio	1,42 mg	1,40 mg

Por meio de uma equação matricial, determine a quantidade aproximada de pão francês e de leite que uma pessoa deve ingerir para obter 780 mg de sódio e 500 mg de potássio. pão francês: 100 g, leite: 255 g

b) Considerando a quantidade recomendada de sódio que uma pessoa pode ingerir diariamente, calcule a quantidade dessa substância que ainda pode ser consumida por uma pessoa que ingeriu 780 mg de sódio. 1 220 mg

c) Dentre as opções de refeições apresentadas no esquema, escolha uma combinação de café da manhã, almoço, lanche e jantar de sua preferência. Depois, adicione as quantidades de sódio correspondentes e compare ao recomendado pela OMS. Resposta pessoal.

Fotomontagem de Maryane Vioto formada pelas imagens Kritchanut, Viktor1/Shutterstock.com

Determinante de uma matriz

Para toda matriz quadrada de números reais é possível associar um número real denominado **determinante**. O estudo dos determinantes está associado, entre outros, ao estudo de sistemas lineares, assunto de nosso próximo capítulo. Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$.

> É importante observar que não existe determinante de matrizes que não sejam quadradas.

Determinante de uma matriz de ordem 1

Em uma matriz quadrada de ordem 1, ou seja, que possui um único elemento, o determinante é, por definição, o próprio elemento. Se $A=[a_{11}]$, então $\det A=a_{11}$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A=[7]$ e $B=[-13]$, temos:

- $\det A=7$
- $\det B=-13$

Determinante de uma matriz de ordem 2

> Note que podemos indicar o determinante de uma matriz *A* com os elementos dessa matriz limitados por duas barras.

Em uma matriz quadrada de ordem 2, o determinante é dado pela diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Exemplo

Sendo a matriz $A=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A=\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}=-4\cdot 8-7\cdot(-6)=-32+42=10$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

Em uma matriz quadrada de ordem 3 dada por $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante é obtido por meio dos seguintes cálculos:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Podemos obter os seis produtos acima por meio de um dispositivo denominado **regra de Sarrus**.

Nessa regra, à direita da matriz, repetimos suas duas primeiras colunas. Em seguida, realizamos as multiplicações conforme indicado, conservando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal principal e mudando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal secundária.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\underbrace{(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})\ (a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})\ (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})}_{\text{muda o sinal}}\ \underbrace{(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33})\ (a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})\ (a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})}_{\text{conserva o sinal}}$$

Ao adicionarmos esses resultados, obtemos o determinante da matriz:

$$\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

› Exemplo

O determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & -2 & 5 & 7 \\ -4 & 0 & 9 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$-2\cdot 0\cdot 3 \qquad 5\cdot 9\cdot 1 \qquad 7\cdot(-4)\cdot(-1) \qquad 5\cdot 0\cdot(-1) \qquad 7\cdot 9\cdot 3 \qquad (-2)\cdot(-4)\cdot 1$$

$\det A = 5\cdot 0\cdot(-1)+7\cdot 9\cdot 3+(-2)\cdot(-4)\cdot 1-(-2)\cdot 0\cdot 3-5\cdot 9\cdot 1-7\cdot(-4)\cdot(-1)=0+189+8+0-45-28=124$

Atividades resolvidas

R12. Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine o valor de *x*, de modo que $\det A = \det B$.

Resolução

Calculando os determinantes das matrizes *A* e *B*, temos:

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot x = 3-2x$
- $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+0-2-3+x-0 = x-3$

Segue que:

$$\det A = \det B \Rightarrow 3-2x = x-3 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Note que $A \neq B$, porém, para $x=2$, $\det A = \det B$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

53. b) $k\cdot A=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow \det(k\cdot A)=\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = ka\cdot kd - kb\cdot kc = k^2\cdot a\cdot d - k^2\cdot b\cdot c = k^2\cdot \underbrace{(ad-bc)}_{\det A}$

51. Calcule o determinante das matrizes a seguir.

a) $A=[-12]$ -12

b) $B=\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 36

c) $C=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ -30

d) $D=\begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 144

52. Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & y & x \end{bmatrix}$, calcule os valores de *x* e *y* para que o traço de *A* seja 6 e $\det A=-61$. $x=2$; $y=9$

Lembre aos alunos que o traço de uma matriz quadrada corresponde à soma dos elementos da diagonal principal.

53. Mostre que são válidas as seguintes propriedades para uma matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

a) $\det A = \det A^t$

b) $\det(k\cdot A)=k^2\cdot \det A$, com $k\in\mathbb{R}$

De modo geral, as propriedades $\det A = \det A^t$ e $\det(k\cdot A)=k^n\cdot \det A$ são válidas para uma matriz quadrada qualquer de ordem *n*.

53. a) $A^t=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad-bc}_{\det A}$

54. Sendo $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A$ 125

b) $2\cdot\det A$ 250

c) $\det(2A)$ 1 000

d) $\det(2A^t)$ 1 000

55. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 3 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 6x & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$, com $x\in\mathbb{R}$, quais valores de *x* tornam verdadeira a igualdade $\det A = 3\cdot\det B$? $x=0$ ou $x=\frac{9}{4}$

56. Sabendo que $M=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det(M\cdot N)=-360$, determine o valor de *a*. 5

57. Determine os valores de *x* na seguinte igualdade:

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teorema de Jacobi e teorema de Binet

No estudo dos determinantes podemos destacar duas propriedades importantes: teorema de Jacobi e teorema de Binet.

- Teorema de Jacobi

> Ao adicionarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada *A*, outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz *B* tal que $\det A = \det B$.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48+28+0+6+0+28=14$$

Se, por exemplo, adicionarmos à 2ª linha da matriz *A* a 3ª linha multiplicada por 2, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculando o determinante de *B*, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48+56+0+6+0+0=14$$

Note que a matriz *B* foi obtida a partir da matriz *A* de acordo com o teorema de Jacobi e, portanto, $\det A = \det B = 14$.

> Note que na matriz *B*:
> - $b_{21} = a_{21} + 2 \cdot a_{31} = 2 + 2 \cdot (-1) = 0$
> - $b_{22} = a_{22} + 2 \cdot a_{32} = 6 + 2 \cdot 0 = 6$
> - $b_{23} = a_{23} + 2 \cdot a_{33} = -4 + 2 \cdot (-2) = -8$

- Teorema de Binet

> Dadas as matrizes quadradas *A* e *B* de mesma ordem, temos $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 16 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 16 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 16+108-256-24-96+192=-60$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0-4+4+0-8-2=-10$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 8+12-5-16-3+10=6$$

$$\det A \cdot \det B = -10 \cdot 6 = -60$$

Portanto, de acordo com o teorema de Binet, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = -60$.

Regra de Chió

A **regra de Chió** é um artifício utilizado para reduzir a ordem de uma matriz sem alterar o valor do determinante. Essa regra pode ser utilizada em uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ de ordem $n\geq 2$, em que $a_{11}=1$, por meio dos seguintes procedimentos:

- suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de *A*;
- de cada elemento a_{ij} restante subtraímos o produto dos elementos suprimidos da mesma coluna e linha de a_{ij}, ou seja, $a_{1j}\cdot a_{i1}$.
- a matriz *B* obtida, de ordem $n-1$, tem determinante igual ao de *A*, ou seja, $\det A=\det B$.

A regra de Chió somente pode ser aplicada à matriz quadrada *A*, em que $a_{11}=1$. Contudo, nos casos em que $a_{11}\neq 1$, pode ser utilizado inicialmente o teorema de Jacobi para se obter uma matriz *B*, de mesma ordem de *A*, com $b_{11}=1$ e, na sequência, aplicar a regra de Chió.

Exemplo

Para calcular o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\-2&5&4&5\\0&7&1&3\\4&-3&2&0\end{bmatrix}$, podemos utilizar a regra de Chió. Nesse caso, obtemos uma matriz *B* de ordem 3, tal que $\det A=\det B$.

- Inicialmente suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de *A*: $\left[\begin{array}{c|ccc}1&0&3&2\\\hline -2&5&4&5\\0&7&1&3\\4&-3&2&0\end{array}\right]$

- Subtraímos de cada elemento restante a_{ij} o produto dos elementos suprimidos a_{1j} e a_{i1}:

$$\left[\begin{array}{c|ccc}1&0&3&2\\\hline -2&5&4&5\\0&7&1&3\\4&-3&2&0\end{array}\right]\rightarrow\begin{bmatrix}5-[0\cdot(-2)]&4-[3\cdot(-2)]&5-[2\cdot(-2)]\\7-0\cdot 0&1-3\cdot 0&3-2\cdot 0\\-3-0\cdot 4&2-3\cdot 4&0-2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10&9\\7&1&3\\-3&-10&-8\end{bmatrix}$$

De acordo com a regra de Chió, para uma matriz de ordem 4, temos:

$$\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{regra de Chió}}\begin{bmatrix}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}&a_{23}-a_{13}\cdot a_{21}&a_{24}-a_{14}\cdot a_{21}\\a_{32}-a_{12}\cdot a_{31}&a_{33}-a_{13}\cdot a_{31}&a_{34}-a_{14}\cdot a_{31}\\a_{42}-a_{12}\cdot a_{41}&a_{43}-a_{13}\cdot a_{41}&a_{44}-a_{14}\cdot a_{41}\end{bmatrix}$$

- Como pela regra de Chió os determinantes das matrizes *A* e $\begin{bmatrix}5&10&9\\7&1&3\\-3&-10&-8\end{bmatrix}$ são iguais, podemos utilizar a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix}5&10&9\\7&1&3\\-3&-10&-8\end{vmatrix}=-40-630-90+27+150+560=-23$$

Portanto, $\det A=-23$.

Atividades resolvidas

R13. Mostre que, se A é uma matriz invertível de ordem 3, então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Resolução

Da definição de matriz inversa, $A \cdot A^{-1} = I$. Logo, $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_3$.

Como $\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0+0+0+0 = 1$, temos:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = 1 \Rightarrow \overbrace{\det A \cdot \det A^{-1}}^{\text{teorema de Binet}} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Portanto, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

> Podemos mostrar que essa igualdade é válida para qualquer matriz invertível A de ordem $n \geq 1$, ou seja, que uma matriz A de ordem $n \geq 1$ é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

R14. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $\det A^{-1}$.

Resolução

Para calcular $\det A^{-1}$, inicialmente calculamos $\det A$, pois $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Como $a_{11} \neq 1$, utilizamos o teorema de Jacobi para que tenhamos $a_{11} = 1$, possibilitando o uso da regra de Chió. Uma das maneiras de obtermos $a_{11} = 1$ é adicionando à 1ª linha a 3ª linha.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{de Jacobi}}{\overset{\text{teorema}}{=}} \begin{vmatrix} 2-1 & 1+1 & 0+0 & 3-3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{de Chió}}{\overset{\text{regra}}{=}} \begin{vmatrix} 1-0\cdot 2 & 3-0\cdot 0 & 5-0\cdot 0 \\ 1-(-1)\cdot 2 & 0-(-1)\cdot 0 & -3-(-1)\cdot 0 \\ 4-1\cdot 2 & -1-1\cdot 0 & 3-1\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 18 - 15 - 0 - 27 - 3 = -63$$

Portanto, temos $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{63}$.

R15. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Aplicando a regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{de Chió}}{\overset{\text{regra}}{=}} \begin{vmatrix} -3-3\cdot 0 & 0-3\cdot 0 & 0-3\cdot 0 \\ 5-(-1)\cdot 0 & 2-(-1)\cdot 0 & 0-(-1)\cdot 0 \\ 1-4\cdot 0 & 0-4\cdot 0 & 1-4\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6+0+0+0-0-0 = -6$$

Portanto, $\det A = -6$.

> De modo geral, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

58. Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 8\end{bmatrix}$, escreva uma matriz B diferente de A, tal que $\det A=\det B$.
Resposta no final do livro.

59. Sendo $A=\begin{bmatrix}7 & 1 & 3\\ 6 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, resolva. Solicite aos alunos que comparem os procedimentos utilizados na resolução do item **b** desta atividade com aqueles utilizados por um colega.

a) Calcule $\det A$. 1

b) Obtenha a matriz I_3 a partir da matriz A.
Resposta nas **Orientações para o professor.**

60. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det B$ -4

b) $\det A^t$ 51

c) $\det(A\cdot C)$ 918

d) $\det(C\cdot B)$ -72

61. Calcule o determinante da matriz:

a) A, sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -5 & -6 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$ -90

b) B, sendo $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 3 & 2\\ 5 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ 18

c) C, sendo $C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}$

d) D, sendo $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 1 & -5 & 2\\ 3 & -1 & 6 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 8 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 90

62. Calcule o valor de x na matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 9\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 0 & x & 3 & 4\end{bmatrix}$, sabendo que $\det A=100$. $x=-2$

63. Quais das matrizes são invertíveis? *A; D; E*

- $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
- $D=\begin{bmatrix}-7 & -3 & 6\\ 8 & 4 & -4\\ 2 & 9 & 1\end{bmatrix}$
- $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$
- $E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- $C=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & 10 & -2\\ 0 & 3 & 6\end{bmatrix}$
- $F=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 11 & 0 & 0\\ 12 & 1 & 7 & 0\\ -4 & 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$

64. Observe como podemos reduzir a ordem de uma matriz identidade de ordem n aplicando a regra de Chió.

$$I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_n \xrightarrow{\text{regra de Chió}}$$

Lembre aos alunos que a matriz identidade é um caso particular de matriz triangular.

$$\xrightarrow{\text{regra de Chió}}\begin{bmatrix}1-0\cdot 0 & 0-0\cdot 0 & \cdots & 0-0\cdot 0\\ 0-0\cdot 0 & 1-0\cdot 0 & \cdots & 0-0\cdot 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0-0\cdot 0 & 0-0\cdot 0 & \cdots & 1-0\cdot 0\end{bmatrix}_{n-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n-1}=I_{n-1}$$

a) Podemos afirmar que $\det I_n=\det I_{n-1}$? Justifique.
Resposta no final do livro.

b) Qual é o valor do determinante da matriz I_2? 1

c) Qual é o valor de $\det I_n$? Justifique.
Resposta no final do livro.

65. **Desafio**

Determine para quais valores de x a matriz $A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4 & -8\\ 0 & x & -5 & 7\\ 0 & 0 & x^3+8 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ não é invertível.
$x=0$ ou $x=-2$

66. Calcule $\begin{vmatrix}4 & -4 & -9 & -14 & 12\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -4 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12\\ -1 & 2 & 3 & 5 & -4\end{vmatrix}$. -912

capítulo 3

Sistemas lineares

A evolução da tecnologia permite maior interatividade entre as pessoas e o mundo digital.

ra2studio/Shutterstock.com

O mundo conectado

Até algumas décadas passadas, uma das principais formas de se comunicar à distância era por meio de cartas. Escritas à mão, essas correspondências podiam demorar meses para chegar ao seu destinatário. No Brasil, o hábito de se comunicar por cartas começou junto com a chegada das primeiras caravelas portuguesas, quando Pero Vaz de Caminha enviou ao rei de Portugal informações sobre o descobrimento das novas terras.

Atualmente, com os avanços tecnológicos, podemos nos comunicar de maneiras mais eficientes: por ligações telefônicas, *e-mail*, mensagem instantânea de texto, voz ou vídeo, entre outros.

Mais recentemente, a acessibilidade à internet móvel nos *smartphones*, seja em um plano pré-pago ou pós-pago, tornou a comunicação entre as pessoas ainda mais ágil. Contudo, temos de ficar atentos, pois, de maneira geral, a cobrança da internet móvel é feita de acordo com a quantidade de dados consumidos no período.

Veja o que é possível fazer com aproximadamente 100 MB (*megabytes*) de dados.

Navegar por 1h20min em uma rede social.

Assistir a um vídeo por 43 min.

Ouvir rádio pela internet por 5h55min.

Enviar 4 000 mensagens de texto em um aplicativo.

Ilustrações: Maryane Vioto Silva

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Cite recursos e aplicativos que você conhece que servem para a comunicação entre as pessoas. Resposta pessoal.

B Quais benefícios os meios de comunicação mais recentes proporcionam? Algumas possíveis respostas: acesso mais rápido às informações; maior diversidade no tipo de informação comunicada (vídeo, texto, áudio etc.), maior mobilidade na comunicação.

C Certa operadora de telefonia cobra R$ 0,12 por *megabyte* de dados consumidos. Se uma pessoa enviar 1 500 mensagens de texto utilizando um aplicativo, qual valor será cobrado pelos dados consumidos? R$ 4,50

Veja mais informações sobre história postal no *site*:

- <http://tub.im/edcke2>

(acesso em: 22 fev. 2016)

Estudando sistemas lineares

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página **267** da seção **Acessando tecnologias**.

Nas páginas **74** e **75**, foram apresentadas algumas informações sobre o consumo de dados quando utilizamos internet móvel. Com base nessas informações, considere o seguinte problema:

> Ao realizar uma pesquisa, Paulo constatou que, utilizando certo aplicativo **A** por 10 min e um aplicativo **B** por 2 min, consome 3 MB de seu plano de dados. Porém, quando utiliza **A** por 5 min e **B** por 6 min, consome 4 MB. Quantos *megabytes* por minuto consome cada um desses aplicativos?

Para resolver esse problema, podemos escrever um sistema de equações do 1º grau ou **sistema linear**, assunto já estudado em anos anteriores. Se chamarmos de *x* o consumo de dados por minuto do aplicativo **A** e de *y* o do aplicativo **B**, temos as seguintes equações:

tempo, em minutos, de uso de **A**

tempo, em minutos, de uso de **B**

$$10x + 2y = 3$$

consumo em MB

tempo, em minutos, de uso de **A**

tempo, em minutos, de uso de **B**

$$5x + 6y = 4$$

consumo em MB

Utilizando essas equações, podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Neste capítulo, estudaremos sistemas lineares, assim como métodos para resolvê-los.

O sistema linear apresentado, por exemplo, tem como solução $x = 0,2$ e $y = 0,5$, ou seja, os aplicativos **A** e **B** consomem, por minuto, 0,2 MB e 0,5 MB respectivamente.

No decorrer do estudo deste capítulo, retome o problema apresentado para que os alunos possam resolvê-lo.

Equação linear

Toda equação do 1º grau com uma ou mais incógnitas é denominada **equação linear**.

De maneira geral:

> Chamamos equação linear aquelas que podem ser escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, em que:
> - $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados **coeficientes**;
> - $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
> - *b* é uma constante real denominada **termo independente**.

Para uma equação ser linear, cada termo, com exceção do independente (que não possui incógnita), deve ser composto por apenas uma incógnita, cujo expoente é 1. Alguns exemplos de equações **não lineares**:
- $8x + 3xy = -1$
- $5x^2 - 2y + z = 6$
- $3\sqrt{x} = 12$
- $7|x| = 4$

Alguns exemplos de equações lineares são:

- $3x - 2y = 8$

Nesse caso, 3 e −2 são os coeficientes; *x* e *y* são as incógnitas; e 8 é o termo independente.

- $-x + \frac{2}{5}y + 4z - 13w = -7$

Nesse caso, −1, $\frac{2}{5}$, 4 e −13 são os coeficientes; *x*, *y*, *z* e *w* são as incógnitas; e −7 é o termo independente.

As equações lineares em que o termo independente é igual a zero são denominadas **equações lineares homogêneas**. A equação linear $-7x + 4y = 0$, por exemplo, é homogênea.

A **solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, que, ao substituir ordenadamente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ na equação, torna a igualdade verdadeira.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

Exemplos

- $-2x + 5y = -1$

  Nessa equação, o par $(3, 1)$ é solução, pois $-2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -1$. O par $(8, 3)$ também é solução, pois $-2 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = -1$. Porém, o par $(1, 3)$ não é solução, pois $\underbrace{-2 \cdot 1 + 5 \cdot 3}_{13} \neq -1$.
- $3x - 2y + 5z = 4$

  Nessa equação, a terna $(-1, 4, 3)$ é solução, pois $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 4$. Porém, a terna $(2, -4, 1)$ não é solução, pois $\underbrace{3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 1}_{19} \neq 4$.

Atividades resolvidas

R1. Determine o valor de α, de modo que a terna $(\alpha, -2\alpha, 1 - \alpha)$ seja solução da equação linear $5x + y - 2z = 13$.

Resolução

Substituindo ordenadamente os valores de *x*, *y* e *z* na equação, temos:

$$5\alpha + (-2\alpha) - 2 \cdot (1 - \alpha) = 13 \Rightarrow 5\alpha - 2\alpha - 2 + 2\alpha = 13 \Rightarrow 5\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 3$$

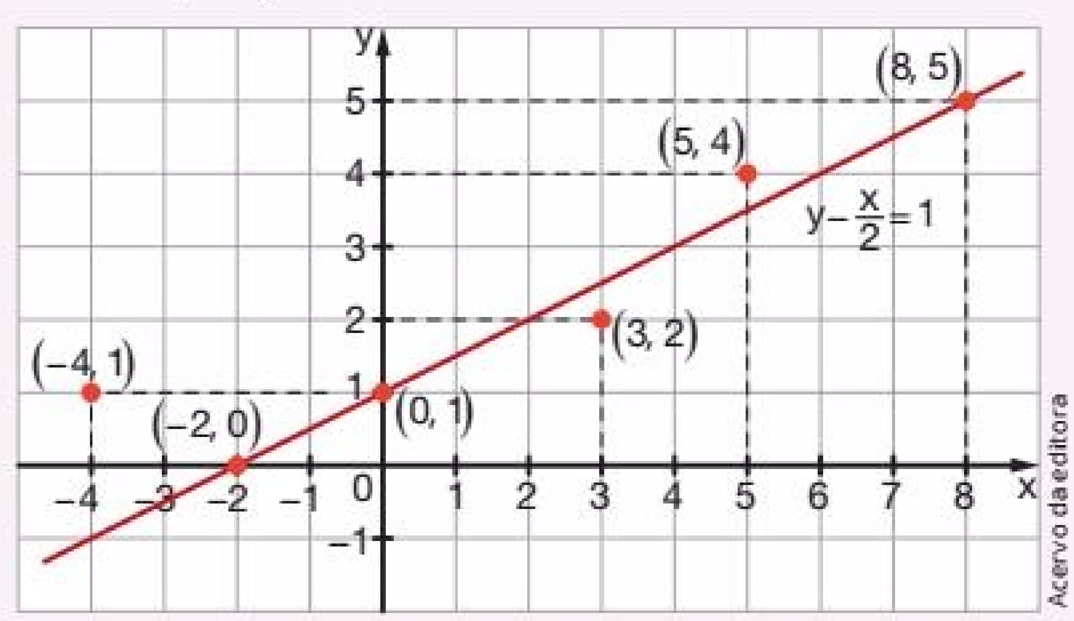
Substitua $\alpha = 3$ na terna dada e verifique que ela é solução da equação linear.

R2. Represente geometricamente a equação $y - \frac{x}{2} = 1$ e verifique se os pontos de coordenadas $(-4, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 4)$ e $(8, 5)$ correspondem a soluções da equação.

Resolução

Atribuindo valores a *x* em $y - \frac{x}{2} = 1$ e obtendo os correspondentes valores de *y*, podemos representar a equação no plano cartesiano. Os pontos de coordenadas (x, y) pertencentes à reta correspondem às soluções da equação linear.

Portanto, os pares $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(8, 5)$ são soluções da equação $y - \frac{x}{2} = 1$.



No caso de uma equação linear de três incógnitas, cada terna (x, y, z) representa um ponto no espaço.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva os coeficientes e o termo independente de cada equação linear. Respostas no final do livro.

a) $4x - 12y = 17$ b) $x - \sqrt{3}y = 0$ c) $-r - 5t = 2$

2. Classifique cada equação em **linear** ou **não linear**.

a) $x + 3y = 15$ linear
b) $r^3 - s^2 = 0$ não linear
c) $15r - 2^2t = 0$ linear
d) $xy = 1$ não linear

3. Qual equação tem como solução a terna $(1, 2, -5)$? b

a) $4x - y + z = 0$ b) $2x - 3y - z = 1$

4. Para cada equação, escreva duas soluções reais.

a) $7x - 12y = 4$ Uma possível resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.
b) $3x + y - z = 0$

5. Para qual valor de α a terna $(4\alpha, \alpha, -3\alpha)$ é solução da equação linear $5x - 15y + z = -4$? $\alpha = -2$

6. Represente geometricamente cada equação linear e escreva, para cada uma delas, duas soluções reais. Respostas no final do livro.

a) $3x + y = 6$ b) $x + 5y = 0$ c) $-2x + y = 4$

4. b) Uma possível resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

Sistema linear

Denomina-se **sistema linear** m×n o conjunto *S* formado por *m* equações e *n* incógnitas, que pode ser indicado da seguinte maneira:

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

No sistema linear *S*, por exemplo, temos que:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1ª equação
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na *m*-ésima equação

Exemplos

- $\begin{cases}-x-y=-5\\3x+7y=16\end{cases}$

  Sistema linear 2×2 nas incógnitas *x* e *y*.

- $\begin{cases}3x+2y=1\\4x+y=3\\-x+y=-2\end{cases}$

  Sistema linear 3×2 nas incógnitas *x* e *y*.

- $\begin{cases}2x-4y-5z=0\\x+2y-3z=7\end{cases}$

  Sistema linear 2×3 nas incógnitas *x*, *y* e *z*.

Solução de um sistema linear

A **solução** de um sistema linear m×n é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que é solução de cada uma das *m* equações desse sistema.

Exemplos

- $\begin{cases}4x-5y=1\\-2x+y=-11\end{cases}$ (I)

  O par $(9, 7)$ é solução do sistema, pois $\begin{cases}4\cdot9-5\cdot7=1\\-2\cdot9+7=-11\end{cases}$.

  O par $(4, 3)$ não é solução do sistema, pois $\begin{cases}4\cdot4-5\cdot3=1\\-2\cdot4+3\neq-11\end{cases}$.

- $\begin{cases}2x+3y+6z=15\\-x+4y+z=24\\3x-y+7z=-7\end{cases}$ (II)

  A terna $(-3, 5, 1)$ é solução do sistema, pois $\begin{cases}2\cdot(-3)+3\cdot5+6\cdot1=15\\-(-3)+4\cdot5+1=24\\3\cdot(-3)-5+7\cdot1=-7\end{cases}$.

Em relação ao sistema linear **I**, note que $(4, 3)$ não é solução, pois satisfaz apenas uma das equações. Já o par $(9, 7)$ é solução, pois satisfaz as duas equações simultaneamente.

Sistema linear homogêneo

Denomina-se **sistema linear homogêneo** aquele em que todas as equações lineares são homogêneas.

Em um sistema linear homogêneo, a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ é uma das soluções, denominada solução **trivial** ou **nula**. Além da trivial, esse tipo de sistema pode ter outras soluções, chamadas não triviais.

Um exemplo de sistema linear homogêneo é $\begin{cases}2x+3y+z=0\\3x+2y-6z=0\\-x-y+z=0\end{cases}$. Além da solução trivial $(0, 0, 0)$, esse sistema admite soluções não triviais como, por exemplo, $(-4, 3, -1)$.

Realize os cálculos necessários e verifique que $(-4, 3, -1)$ é solução do sistema ao lado.

Atividades resolvidas

R3. Represente geometricamente a solução do sistema linear $\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$.

Resolução

Vamos resolver o sistema linear utilizando o método da adição.

Provavelmente você estudou em anos anteriores a resolução de sistemas lineares 2×2 por meio dos métodos da **adição** e da **substituição**.

$$\begin{cases} 3x+y=1 \cdot (3) \\ 2x-3y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+3y=3 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$$
$$11x=11 \Rightarrow x=1$$

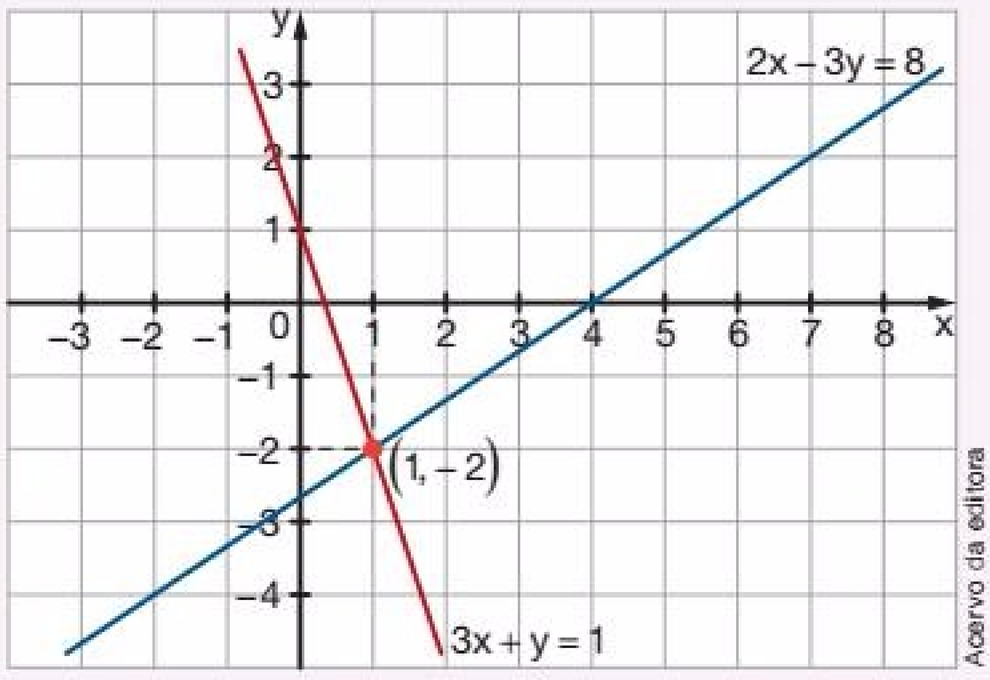
Substituindo $x=1$ na equação $3x+y=1$, temos:

$$3x+y=1 \Rightarrow 3\cdot1+y=1 \Rightarrow y=-2$$

Portanto, a solução do sistema é $(1,-2)$.

Vimos anteriormente que uma equação linear com duas incógnitas pode ser representada por uma reta no plano cartesiano. Desse modo, a interseção das duas retas que representam as equações do sistema 2×2 determina sua solução, caso exista.

Retas concorrentes indicam que existe um único ponto que corresponde à solução do sistema.



Atividades

Anote as respostas no caderno.

9. $\begin{cases} 20x+50y=240 \\ x+y=9 \end{cases}$; 7 cédulas de 20 reais e 2 cédulas de 50 reais.

7. Em cada item, verifique quais das ternas são soluções do sistema e classifique-o em homogêneo ou não homogêneo.

a) $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ x-4y+3z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases}$ I) $(-1,5,0)$ II) $(0,0,0)$ III) $(1,-2,-3)$

II e III; homogêneo

b) $\begin{cases} x+y+6z=0 \\ x-y-z=5 \\ 2x-6y-z=5 \end{cases}$ I) $(0,0,0)$ II) $(5,1,-1)$ III) $(2,2,-1)$

II; não homogêneo

8. Resolva cada sistema linear e represente geometricamente sua solução. Respostas no final do livro.

a) $\begin{cases} 2x+5y=9 \\ -x+7y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+y=5 \\ -3x-y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ -x+y=-4 \end{cases}$

9. Paulo sacou R$ 240,00 em um caixa eletrônico em cédulas de 20 e 50 reais. Ao todo foram sacadas 9 cédulas. Chamando de *x* e *y* as quantidades de cédulas de 20 e 50 reais, respectivamente, escreva um sistema linear e determine quantas cédulas de cada tipo foram sacadas.

10. (Enem-MEC) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas? d

a) R$ 14,00 b) R$ 17,00 c) R$ 22,00 d) R$ 32,00 e) R$ 57,00

11. Um método que tem sido utilizado por diversas áreas do conhecimento na resolução de problemas que envolvem a otimização de custos, atendendo a alguns requisitos, é denominado programação linear. Em nutrição, por exemplo, esse método tem sido empregado na elaboração de dietas que possuam custo mínimo, seguindo determinadas restrições.

Para exemplificar, considere que um indivíduo deva seguir uma dieta alimentar na qual seu lanche da tarde esteja restrito a leite de soja e uma salada de frutas com cereais. Abaixo estão representadas as quantidades desses nutrientes nos referidos alimentos e sua necessidade para a refeição em questão.

	Leite de soja (copo de 200 mL)	Salada de frutas (porção de 400 g)	Requisito nutricional mínimo
Cálcio	240 mg	180 mg	270 mg
Vitamina B2	0,3 mg	1,1 mg	0,775 mg

Sabendo que o custo de um copo de leite de soja (200 mL) é R$ 2,30, e o da porção de salada de frutas (400 g) é R$ 3,80, denotando por *x* a quantidade de leite de soja (em copos) e por *y* a quantidade de salada (em porções), a função que representa o custo total dessa refeição é dada por $C = 2,3x + 3,8y$, denominada função objetivo no método de programação linear. A finalidade desse método consiste em, a partir das restrições apresentadas, obter valores para *x* e *y* que tornem mínimo o valor da função objetivo.

As restrições impostas para o lanche da tarde são:

$240x + 180y \geq 270$ (restrição de cálcio), $0,3x + 1,1y \geq 0,775$ (restrição de vitamina B2), $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (visto que as quantidades de leite e salada de frutas não podem ser negativas).

Algumas combinações de leite de soja e salada de frutas

Atende ao requisito nutricional mínimo. | Atende ao requisito nutricional mínimo. | Não atende ao requisito nutricional mínimo.

Não foi levado em consideração o custo. Existem outras combinações para quantidade de leite de soja e salada de frutas que atendem ao requisito nutricional mínimo.

De acordo com o método de programação linear, o custo mínimo dessa refeição será dado pela resolução de um dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ 0,3x + 1,1y = 0,775 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 0,3x + 1,1y = 0,775 \end{cases}$$

A solução do sistema que resultar no menor valor, quando substituída na função objetivo, representará as quantidades dos alimentos que fornecem o custo mínimo da refeição, seguindo as restrições impostas pela dieta.

a) O item que possui os pares ordenados que correspondem às soluções dos sistemas lineares na ordem em que foram apresentados é: II

I) $\left(0, \frac{17}{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ II) $\left(0, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$ III) $\left(0, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

b) Qual é a quantidade de cada alimento que resultará em um custo mínimo para a refeição?
150 mL de leite de soja e 200 g de salada de frutas.

c) Interprete geometricamente a solução dos sistemas. A solução de cada sistema é representada, no plano cartesiano, pelo ponto de interseção das retas que representam as equações que o compõem.

d) Pesquise acerca da utilização do método de programação linear em outras áreas do conhecimento.
Resposta pessoal.

Matrizes associadas a um sistema linear

Utilizando conhecimentos acerca de matrizes, vamos associar, por exemplo, o sistema $\begin{cases} -3x+2y=16 \\ x+3y=13 \end{cases}$ à equação matricial $A \cdot X = B$, sendo:

- $A=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a **matriz dos coeficientes**;
- $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a **matriz das incógnitas**;
- $B=\begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$ a **matriz dos termos independentes**.

Escrevendo a equação matricial $A \cdot X = B$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dado um sistema linear $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

associamos a ele a seguinte equação matricial:

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Essa maneira de representar um sistema linear é denominada **forma matricial do sistema**.

Classificação de um sistema linear

De acordo com o número de soluções que um sistema linear possui, ele pode ser classificado em: **possível e determinado**, quando possui uma única solução; **possível e indeterminado**, quando possui infinitas soluções; ou **impossível**, quando não possui solução.

Representando essa classificação em um esquema, temos:

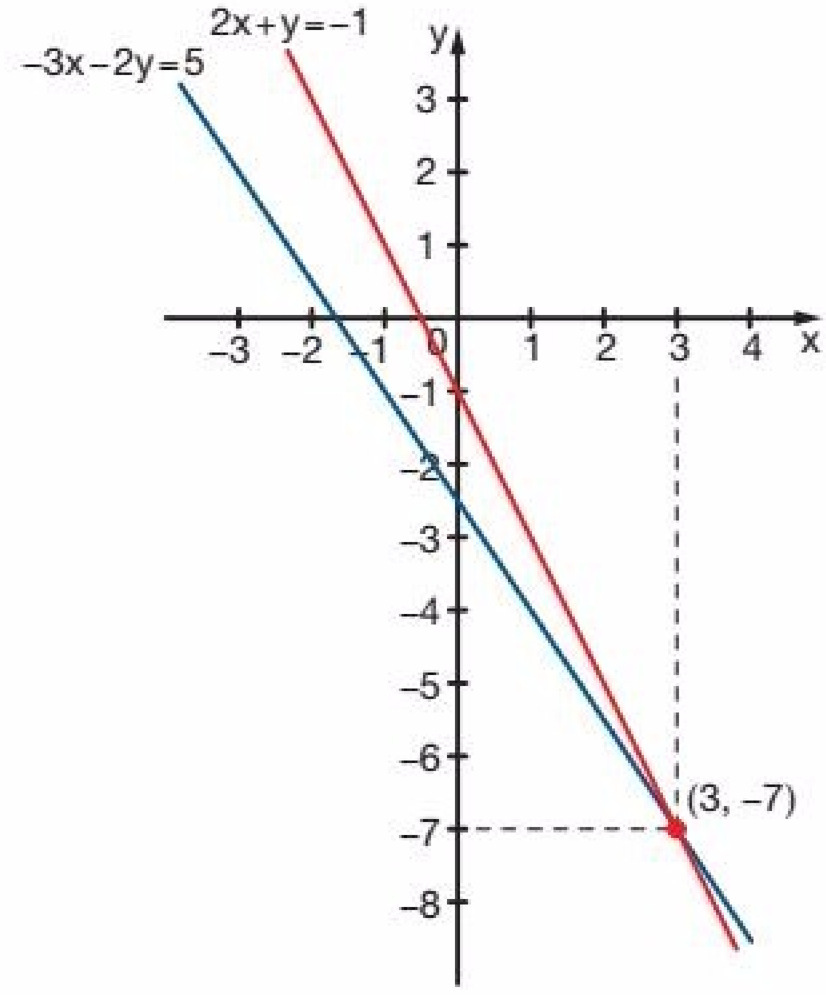
- Sistema linear
  - Sistema linear possível
    - Sistema linear possível e determinado (SPD)
    - Sistema linear possível e indeterminado (SPI)
  - Sistema linear impossível (SI)

Exemplos

- $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ -3x-2y=5 \end{cases}$

Sistema possível e determinado (SPD), pois possui apenas a solução $(3, -7)$.

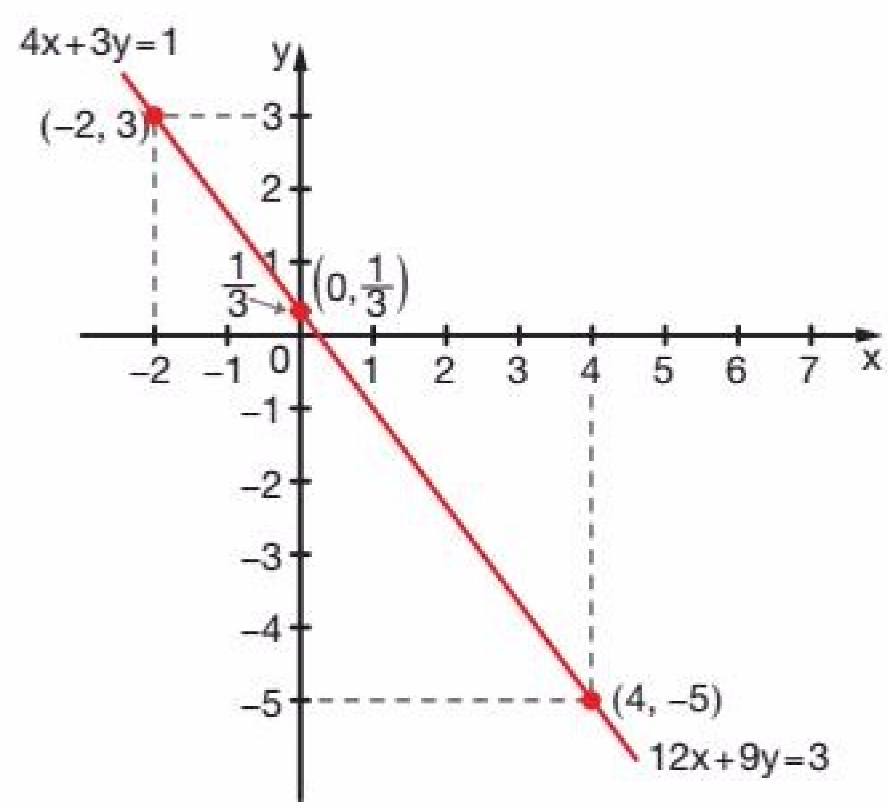
Na representação geométrica do sistema possível e determinado, as retas que representam as equações se cruzam em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à única solução.



- $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 12x+9y=3 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado (SPI), pois possui infinitas soluções, tais como $(-2, 3)$, $(4, -5)$ e $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

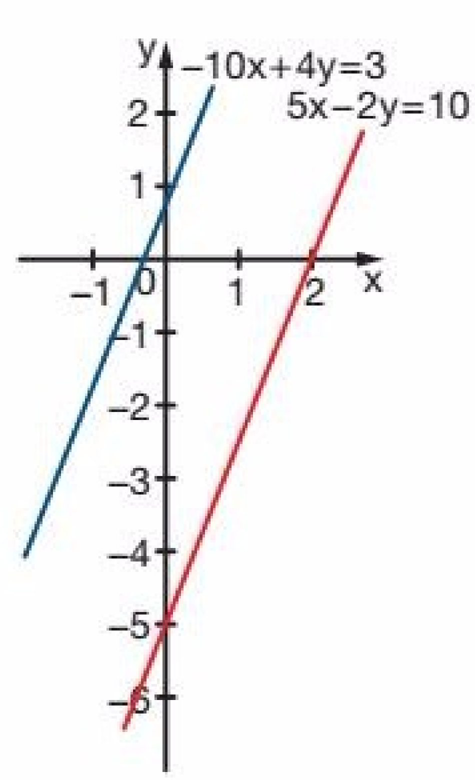
Na representação geométrica do sistema possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, existem infinitos pontos comuns.



No exemplo acima, note que cada termo na 2ª equação corresponde ao triplo do termo correspondente na 1ª, ou seja, $3 \cdot 4x = 12x$; $3 \cdot 3y = 9y$; $3 \cdot 1 = 3$.

- $\begin{cases} 5x-2y=10 \\ -10x+4y=3 \end{cases}$

Sistema impossível (SI), pois não possui solução.



Ilustrações: Acervo da editora

Na representação geométrica do sistema impossível, as retas que representam as equações são paralelas; consequentemente, não se cruzam.

Atividades resolvidas

R4. Classifique cada sistema de equações lineares em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$

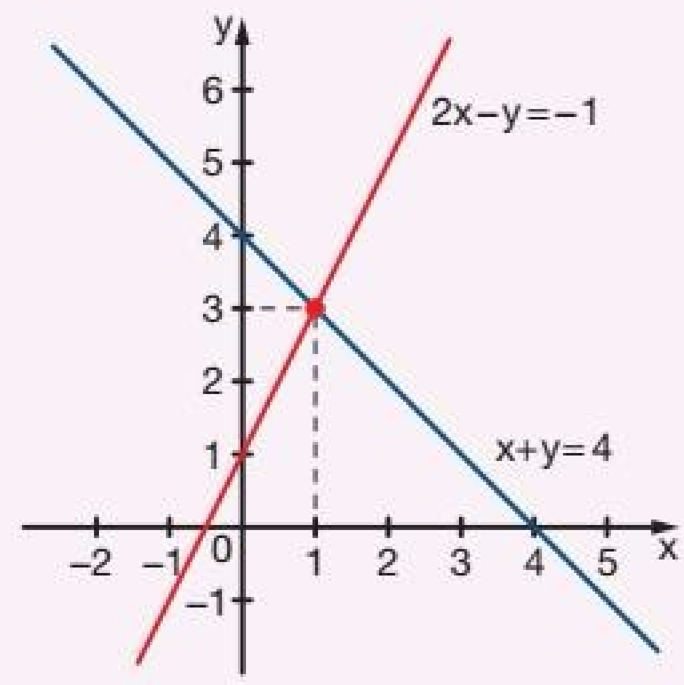
Resolução

a) Utilizando o método da substituição, isolamos *y* na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $2x - y = -1 \Rightarrow -y = -2x - 1 \Rightarrow y = 2x + 1$
- $x + y = 4 \Rightarrow x + (2x + 1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$

Obtemos *y* substituindo $x = 1$ em $x + y = 4$.

$$x + y = 4 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

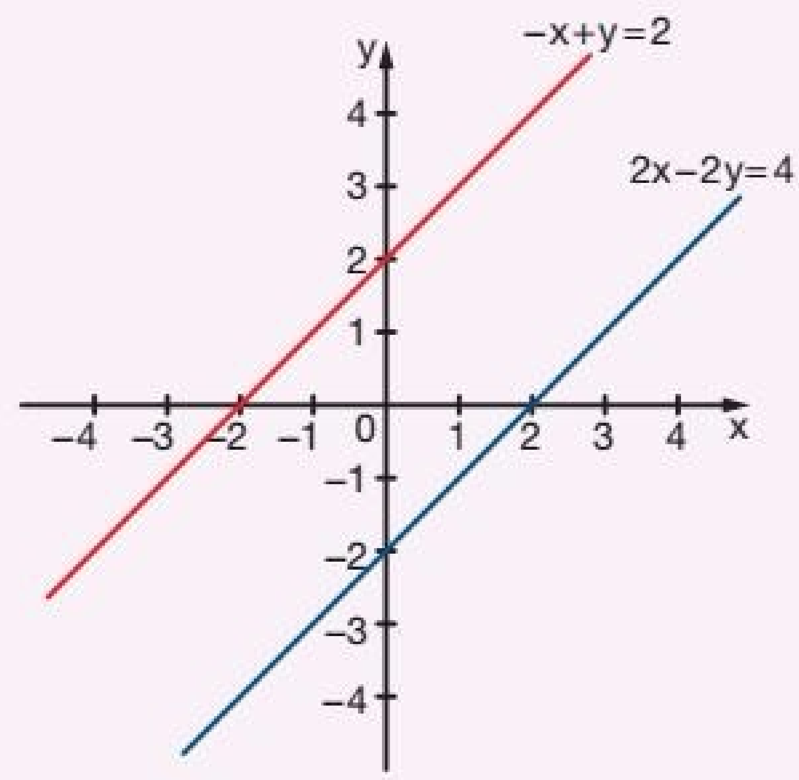


As retas que representam as equações se cruzam no ponto de coordenadas $(1, 3)$, ou seja, possuem um único ponto em comum, que corresponde à solução do sistema.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) Utilizando o método da adição, temos que:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \quad \cdot(2) \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$
$$\overline{0x + 0y = 8}$$



Note que não existem números reais *x* e *y* que satisfaçam a equação $0x + 0y = 8$. Nesse caso, o sistema não admite solução.

As retas que representam as equações são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum.

Portanto, o sistema é impossível (SI).

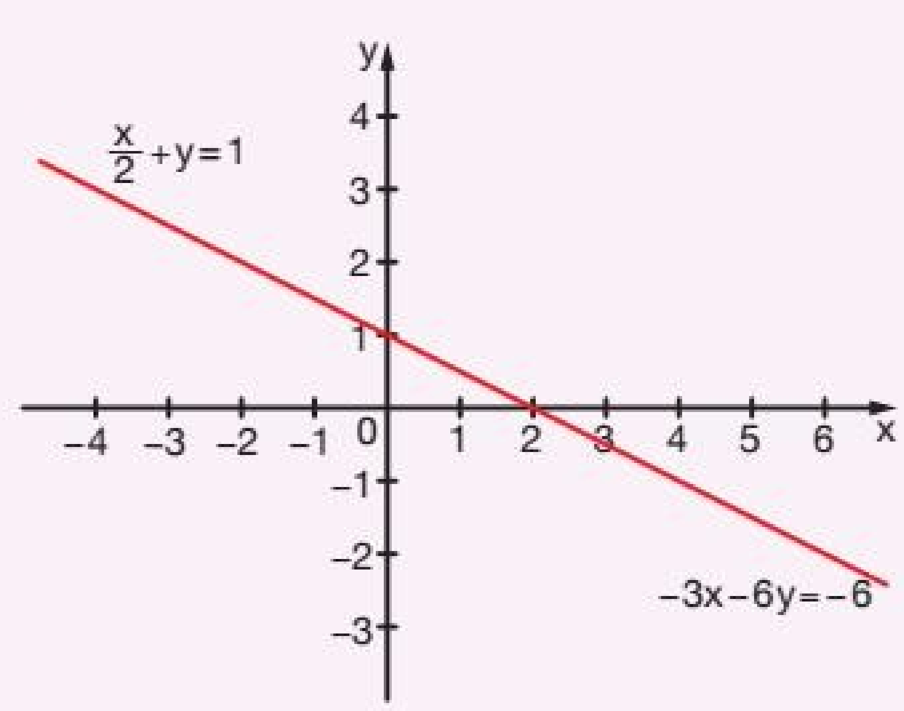
c) Utilizando o método da substituição, isolamos *y* na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $\dfrac{x}{2} + y = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 1$
- $-3x - 6y = -6 \Rightarrow -3x - 6 \cdot \left(-\dfrac{x}{2} + 1\right) = -6 \Rightarrow -3x + 3x - 6 = -6 \Rightarrow 0x = 0$

Note que, para qualquer número real *x*, a sentença $0x = 0$ é verdadeira. De modo geral, tomando $x = \alpha$, todos os pares da forma $\left(\alpha, -\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)$, com α real, são soluções do sistema.

As retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos em comum.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).



Ilustrações: Acervo da editora

R5. Determine a matriz X da equação $A \cdot X = 2B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como A tem ordem 2×2 e B ordem 2×1, temos que X é de ordem 2×1, ou seja, da forma $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Da equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a-b \\ a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a-b=4 \\ a+2b=10 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 4a-b=4 & \cdot(2) \\ a+2b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a-2b=8 \\ a+2b=10 \end{cases}$$
$$9a = 18 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a=2$ em $a+2b=10$, temos:

$$a+2b=10 \Rightarrow 2+2b=10 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

12. Escreva a equação matricial associada a cada sistema.

a) $\begin{cases} -x+5y=7 \\ x-4y=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, represente-o geometricamente.

a) $\begin{cases} -6x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y=-2 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+3y=-5 \\ 10x+6y=15 \end{cases}$

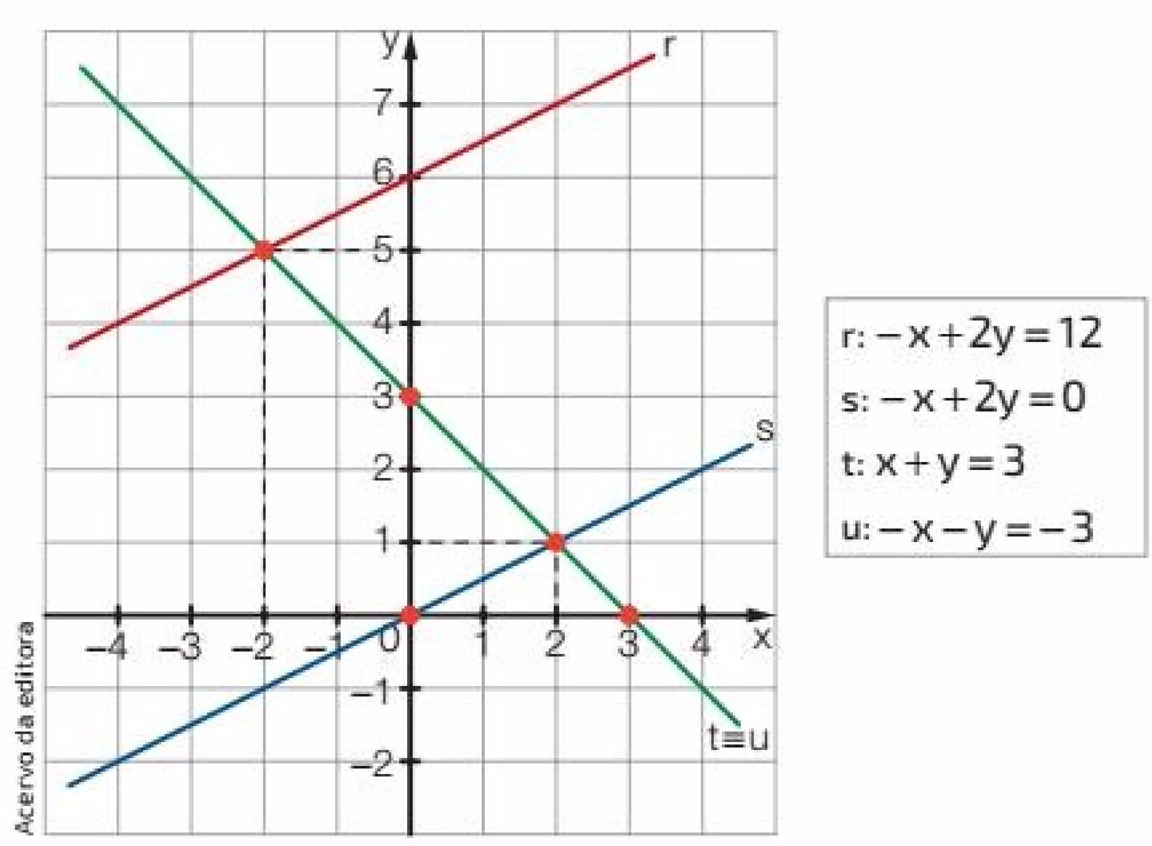
d) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x-2y=-22 \end{cases}$

Respostas no final do livro.

14. Em um campeonato de futebol, os times pontuam apenas quando vencem ou empatam uma partida, sendo computados 3 pontos em caso de vitória e 1 ponto em caso de empate. Certo time disputou 15 partidas, das quais saiu vitorioso em dois terços das partidas em que não houve empate, e obteve 27 pontos. Determine o número de vitórias, empates e derrotas desse time.
8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas.

15. Determine o valor de α para o qual o sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x+\alpha y=0 \end{cases}$ seja impossível. $\alpha = -2$

16. Observe a representação das retas r, s, t e u em um mesmo plano cartesiano.



Sem realizar cálculos, determine quantas soluções possui cada sistema e, em seguida, escreva-as. Caso o sistema possua infinitas soluções, escreva apenas algumas delas.

a) $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+y=3 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

b) $\begin{cases} -x+2y=12 \\ -x+2y=0 \end{cases}$ não possui solução

c) $\begin{cases} -x+2y=0 \\ -x-y=-3 \end{cases}$ uma solução; $(2, 1)$

d) $\begin{cases} x+y=3 \\ -x-y=-3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x-y=-3 \\ -x+2y=12 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

d) infinitas soluções; Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$

17. Certo motorista abasteceu seu carro com uma mistura de etanol e gasolina, totalizando 40 L. Sabendo que a quantidade de etanol colocada foi 3 vezes a de gasolina, calcule a quantidade de cada combustível com que o carro foi abastecido.
etanol: 30 L; gasolina: 10 L

18. Em cada item, o sistema foi classificado em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (SPD)

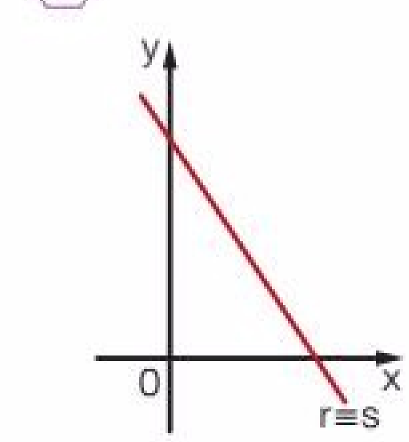
b) $\begin{cases} a_3x+b_3y=c_3 \\ a_4x+b_4y=c_4 \end{cases}$ (SPI)

c) $\begin{cases} a_5x+b_5y=c_5 \\ a_6x+b_6y=c_6 \end{cases}$ (SI)

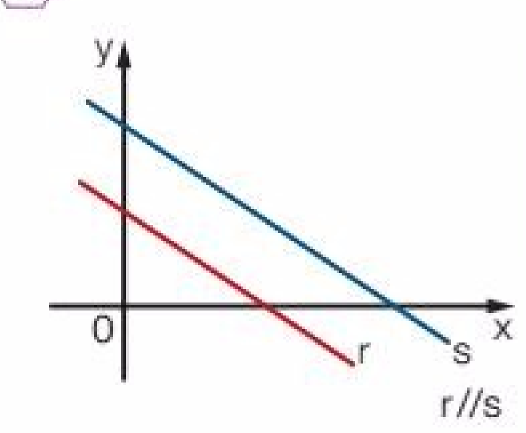
d) $\begin{cases} a_7x+b_7y=0 \\ a_8x+b_8y=0 \end{cases}$ (SPD)

Associe cada sistema a um dos gráficos abaixo, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–IV; b–I; c–III; d–II

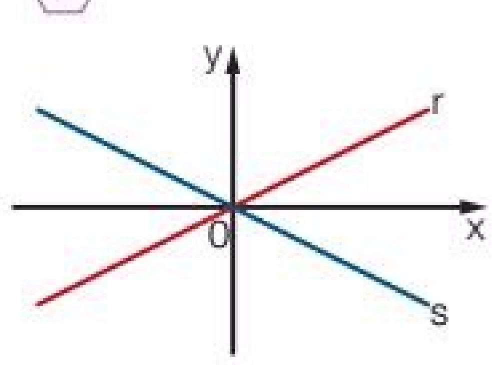
I



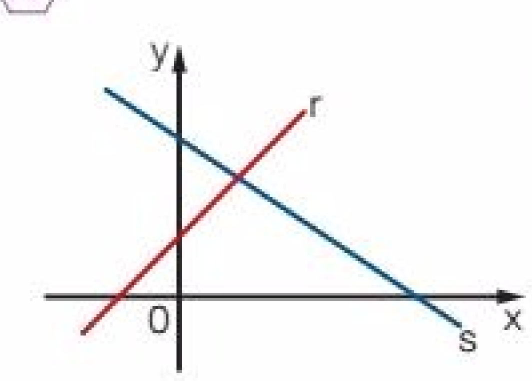
III



II



IV



Ilustrações: Acervo da editora

19. Em um depósito, foram armazenadas sacas de adubo e sacas de sementes, totalizando 30 toneladas. Sabe-se que cada saca de adubo tem massa igual a 50 kg, cada saca de sementes, 60 kg, e que o triplo da massa de adubo armazenado é igual ao dobro da massa de sementes. Com base nessas informações, calcule o total de sacas de adubo e de sementes que foram armazenadas no depósito.
adubo: 240 sacas;
sementes: 300 sacas

20. Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$x=3$; $y=-2$; $z=-1$

21. Em certa banca de feira, 2,5 kg de laranjas (L) mais 1,6 kg de peras (P) custam R$ 26,70. Nessa mesma banca, 4 kg de laranjas mais 3,5 kg de peras custam R$ 54,00. Com base nessas informações, escreva e resolva um sistema linear cuja solução forneça o preço de 1 kg de laranjas e 1 kg de peras.
$\begin{cases} 2,5L+1,6P=26,70 \\ 4L+3,5P=54,00 \end{cases}$; L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

22. O átomo é considerado a unidade fundamental de um elemento químico. O conceito de átomo é um dos mais importantes da Química e por meio dele é possível explicar diversos fenômenos da natureza.

A massa do átomo é expressa em unidades de massa atômica, sendo representada pela letra **u** e tendo como referência a massa do isótopo mais abundante do carbono, denominado carbono-12 (^{12}C). Uma unidade de massa atômica corresponde a $\frac{1}{12}$ da massa desse isótopo do carbono. A massa atômica é de importância fundamental, pois é por meio dela que é possível obter as massas moleculares e as fórmulas químicas. Além disso, é utilizada na construção constante da tabela periódica, com o objetivo de organizar e direcionar as informações científicas sobre os elementos químicos.

A massa de uma molécula pode ser determinada adicionando-se as massas de seus átomos componentes. Para determinar, por exemplo, a massa de uma molécula de SO_2 (dióxido de enxofre), que é composta por 1 átomo de enxofre (S) e 2 de oxigênio (O), deve-se adicionar a massa atômica do enxofre a duas vezes a massa atômica do oxigênio.

Fonte de pesquisa: RUSSEL, John B. **Química geral**. Tradução e revisão técnica Márcia Guekezian et al. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.

Isótopo: o isótopo de um elemento químico possui átomos com o mesmo número de prótons, porém com diferente número de nêutrons.

A massa atômica de cada elemento é encontrada na tabela periódica. Veja como calcular a massa da molécula de SO_2.

Massa atômica de uma molécula de SO_2:
$1 \cdot 32,06\,u + 2 \cdot 16,00\,u = 64,06\,u$

Camila Ferreira

a) Sabendo que a massa de uma molécula de C_2H_4 (etileno) corresponde a 28 u, e a massa de uma molécula de C_4H_{10} (butano) corresponde a 58 u, determine a massa atômica do carbono (C) e do hidrogênio (H). carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u

b) Conhecendo apenas a massa de uma molécula de $C_4H_8O_2$ (ácido butírico), que corresponde a 88 u, produzido quando a manteiga se deteriora, e de uma molécula de $C_8H_{10}O_2N_4$ (cafeína), que corresponde a 194 u, é possível determinar a massa atômica do C, H, O e N (nitrogênio)? Justifique.
não; Resposta esperada: pois se obtivermos um sistema de equações a partir dessas informações, ele será possível e indeterminado.

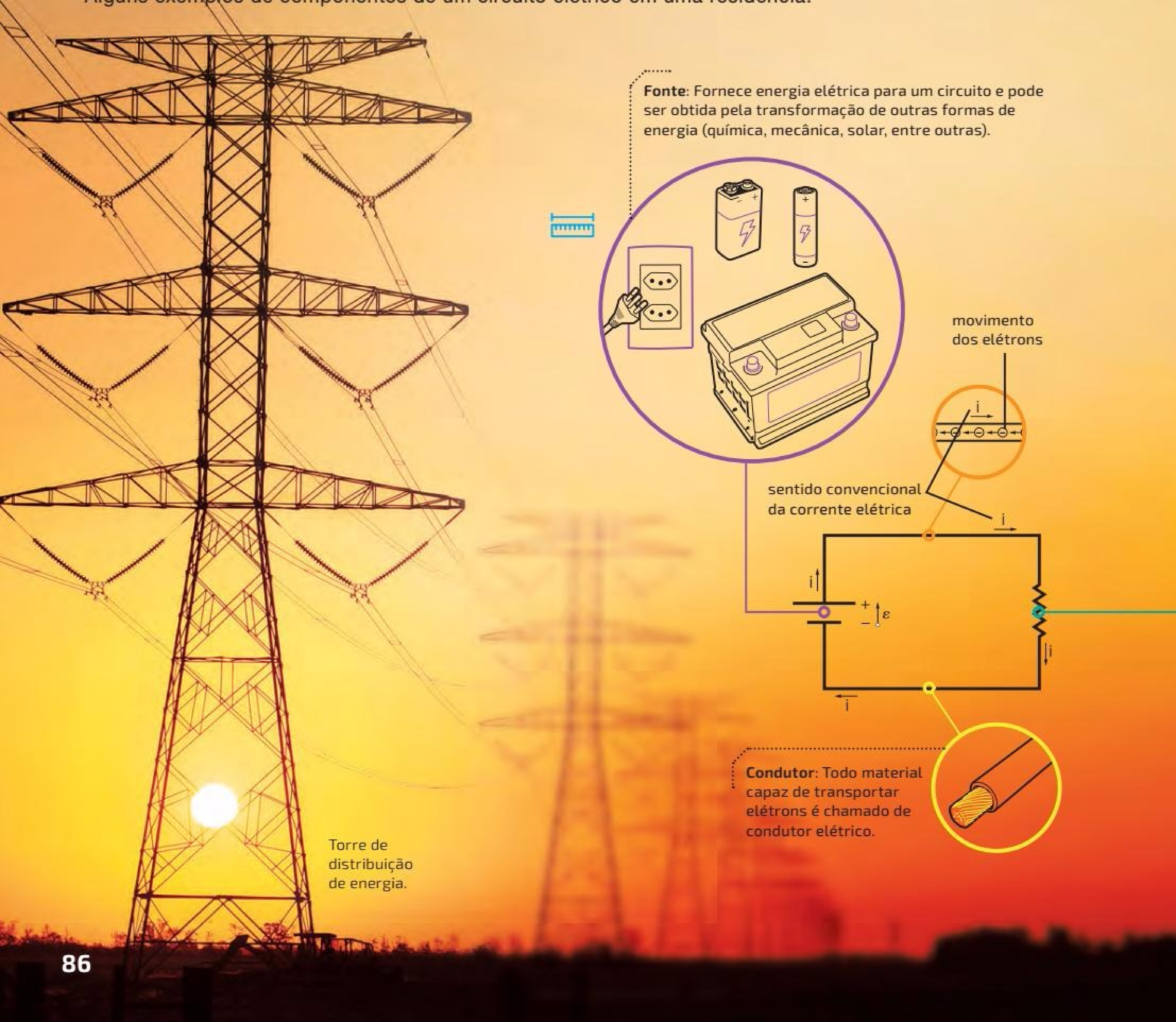
23. Diversas experiências cotidianas, como o funcionamento de eletrodomésticos, envolvem o uso de energia elétrica. Isso é possível graças aos circuitos elétricos que, quando fechados, são percorridos por cargas elétricas. Esses circuitos normalmente possuem três componentes básicos: um dispositivo que funciona com energia elétrica, como um motor, um eletrodoméstico ou uma lâmpada, por exemplo; fios metálicos condutores, como os fios de cobre; e uma fonte de energia elétrica, como uma pilha, uma bateria ou as tomadas elétricas, que permitem acesso à energia elétrica produzida em uma usina.

Nesses tipos de circuito, o condutor é responsável pelo transporte da carga elétrica. A quantidade de carga elétrica que atravessa uma seção transversal desse condutor em determinado intervalo de tempo é chamada de intensidade de corrente elétrica.

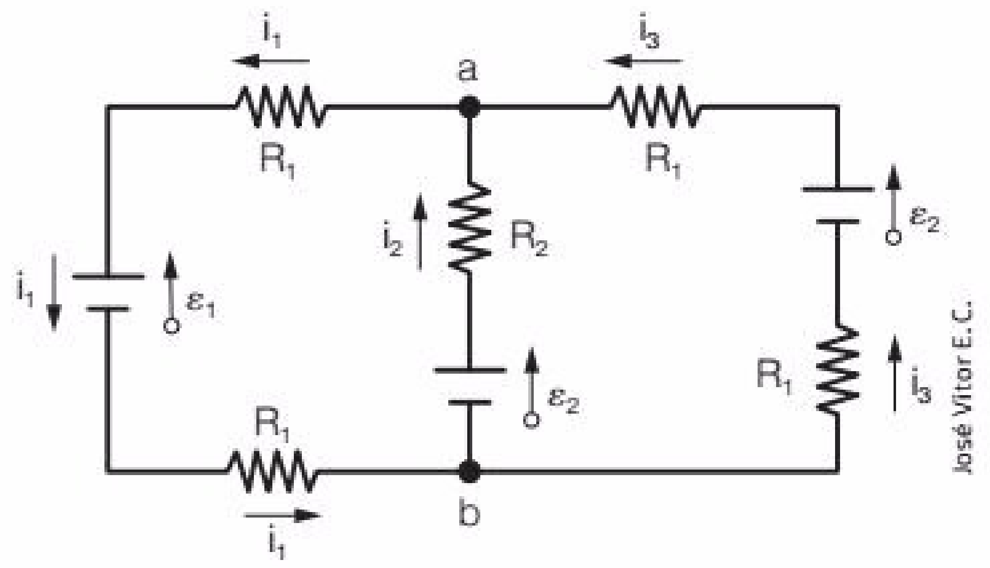
Fonte de pesquisa: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos da física**: eletromagnetismo. Tradução e revisão técnica Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3.

Fonte, condutor e resistor

Alguns exemplos de componentes de um circuito elétrico em uma residência.



Observe a representação de um circuito elétrico.



José Vitor E. C.

Neste circuito:

- ε_1 e ε_2 representam as forças eletromotrizes nas quais as cargas elétricas são transportadas, expressas em volts (V).
- R_1 e R_2 representam as resistências, expressas em ohms (Ω).
- i_1, i_2 e i_3 representam as intensidades das correntes elétricas, expressas em ampère (A).

Para determinar as intensidades das correntes elétricas deste circuito, considerando $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $\varepsilon_1 = 8V$ e $\varepsilon_2 = 10V$, e utilizando a Primeira e a Segunda Lei de Kirchhoff, obtém-se o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ -4i_1 - 5i_2 = -2 \\ -5i_2 + 4i_3 = 0 \end{cases}$$

Primeira Lei de Kirchhoff (lei dos nós)

A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

Segunda Lei de Kirchhoff (lei das malhas)

A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Algumas possíveis respostas: fontes de energia elétrica: pilhas, baterias, usinas; condutores: cobre, ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas, motores.

Ilustrações: Mario Henrique

Resistor: Transforma a energia elétrica fornecida pela fonte em energia térmica, em razão das colisões dos elétrons com os átomos do fio, gerando calor.

VanHart/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Escreva a equação matricial associada ao sistema apresentado.

b) Qual terna abaixo é a solução desse sistema? III

I) $i_1 = \frac{45}{100}$, $i_2 = \frac{1}{5}$ e $i_3 = \frac{5}{20}$

II) $i_1 = \frac{9}{16}$, $i_2 = -\frac{1}{4}$ e $i_3 = -\frac{5}{16}$

III) $i_1 = \frac{9}{28}$, $i_2 = \frac{1}{7}$ e $i_3 = \frac{5}{28}$

IV) $i_1 = \frac{7}{4}$, $i_2 = -\frac{1}{2}$ e $i_3 = -\frac{5}{8}$

c) Cite exemplos de fontes de energia elétrica, condutores e dispositivos que podem ser utilizados para compor um circuito elétrico.

Escalonamento de um sistema linear

Um método muito utilizado para resolver e classificar um sistema linear é o chamado **escalonamento**. Neste tópico, estudaremos o que é um sistema escalonado e como escalonar um sistema linear.

Sistemas lineares equivalentes

Quando dois sistemas lineares apresentam as mesmas soluções, dizemos que eles são **equivalentes**.

Após trabalhar os procedimentos para escalonar um sistema linear, peça aos alunos que resolvam os sistemas apresentados nesta página.

Os sistemas $\begin{cases} 2x-y+4z=3 \\ -x+3y-2z=6 \\ 3x-y+5z=4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x+2y-2z=-1 \\ x+2y-z=3 \\ -3y+5z=1 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem como única solução a terna $(-1, 3, 2)$. Já os sistemas $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ 5x+2y-z=3 \\ x-y+4z=-5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+2z=6 \\ y-z=-1 \end{cases}$ não são equivalentes, pois admitem soluções únicas e distintas, sendo estas, respectivamente, $(0, 1, -1)$ e $(2, 2, -3)$.

Em relação a sistemas lineares equivalentes, podemos destacar as seguintes propriedades:

- Ao multiplicar uma equação de um sistema linear S_1 por uma constante real não nula $k \neq 0$, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

> Exemplo

Multiplicando por 3 a 1ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 2x+3y-4z=-6 \\ -3x+y+z=-7 \\ 5x-2y+9z=23 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 6x+9y-12z=-18 \\ -3x+y+z=-7 \\ 5x-2y+9z=23 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(2, -2, 1)$.

- Ao permutarmos duas equações de um sistema linear S_1, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

> Exemplo

Permutando a 1ª com a 3ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ -6x-2y+2z=4 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} x+y+2z=-2 \\ -6x-2y+2z=4 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(-3, 5, -2)$.

- Ao substituirmos uma equação de um sistema linear S_1 pela soma dela com qualquer outra equação desse sistema multiplicada por uma constante diferente de zero, obtemos um sistema linear S_2 equivalente a S_1.

> Exemplo

Substituindo a 2ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 5x-3y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ pela soma dela com a 1ª equação, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 5x-3y=11 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução o par $(4, 3)$.

Sistema linear escalonado

Dizemos que um sistema linear, com incógnitas escritas na mesma ordem em todas as equações, está na forma escalonada se ele possui as seguintes características:

- o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de uma equação para a outra na ordem em que elas estão escritas;
- se os coeficientes de uma equação são todos nulos, a escrevemos abaixo das demais, ou omitimos esta última equação.

São exemplos de sistemas escalonados:

- $\begin{cases} -3x+y-2z=0 \\ 0x-3y+z=-1 \\ 0x+0y-z=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3x+y-2z=0 \\ \quad -3y+z=-1 \\ \qquad -z=5 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x-4y+5z-3w=11 \\ 0x+3y-4z+w=7 \\ 0x+0y+3z-2w=-8 \\ 0x+0y+0z-0w=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-4y+5z-3w=11 \\ \quad 3y-4z+w=7 \\ \qquad 3z-2w=-8 \end{cases}$

Note que o sistema linear a seguir não está na forma escalonada, pois a 2ª e a 3ª equação possuem a mesma quantidade de coeficientes não nulos.

$$\begin{cases} -x+3y+7z=-3 \\ \quad -y-4z=2 \\ \quad 5y-z=9 \end{cases}$$

Um sistema escalonado pode ter o mesmo número de equações e incógnitas ou mais incógnitas do que equações.

Veja um exemplo de como resolver um sistema escalonado em que o número de equações e de incógnitas é igual.

- $\begin{cases} -x+2y+4z=3 \\ \quad -2y+z=5 \\ \qquad -3z=-9 \end{cases}$

  Inicialmente, resolvemos a 3ª equação e obtemos o valor de *z*.

$$-3z=-9 \Rightarrow \boxed{z=3}$$

  Substituímos $z=3$ na 2ª equação e obtemos o valor de *y*.

$$-2y+z=5 \Rightarrow -2y+3=5 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

  Substituímos $z=3$ e $y=-1$ na 1ª equação e obtemos o valor de *x*.

$$-x+2y+4z=3 \Rightarrow -x+2\cdot(-1)+4\cdot 3=3 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

  Portanto, o sistema tem como única solução a terna $(7, -1, 3)$.

> Se um sistema linear escalonado tem o número de equações igual ao de incógnitas, então ele é possível e determinado (SPD).

Agora, veja como podemos resolver um sistema escalonado que possui mais incógnitas do que equações.

- $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ \quad 2y-8z=0 \end{cases}$

  Nos sistemas com essa característica, as incógnitas que não aparecem no início de nenhuma equação são denominadas incógnitas livres. No exemplo apresentado, a incógnita livre é *z*.

  Para determinarmos a **solução geral** desse sistema, consideramos $z=k$, sendo $k \in \mathbb{R}$.

  Substituindo $z=k$ na 2ª equação, temos:

$$2y-8z=0 \Rightarrow 2y-8k=0 \Rightarrow \boxed{y=4k}$$

  Substituindo $z=k$ e $y=4k$ na 1ª equação, temos:

$$x+y-2z=0 \Rightarrow x+4k-2k=0 \Rightarrow \boxed{x=-2k}$$

  Portanto, a solução geral do sistema é $(-2k, 4k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Se em um sistema linear escalonado o número de incógnitas é maior do que o de equações, então esse sistema é possível e indeterminado (SPI). O **grau de indeterminação** de um sistema depende da quantidade de incógnitas livres, ou seja, se o sistema tem uma incógnita livre, dizemos que ele tem grau de indeterminação 1.

O número de incógnitas livres de um sistema escalonado com *m* equações e *n* incógnitas é dado por $n-m$.

Na solução geral do sistema apresentado, atribua outro valor para *k* e obtenha outra solução particular.

Para obtermos soluções particulares do sistema escalonado, atribuímos valores a *k* e efetuamos os cálculos. Para $k=1$, por exemplo, temos:

$$(-2k, 4k, k) \to (-2\cdot 1, 4\cdot 1, 1) \Rightarrow (-2, 4, 1)$$

Atividades resolvidas

R6. Resolva e classifique o sistema $\begin{cases} x+2y-z+w=3 \\ y+z-w=-1 \end{cases}$.

Resolução

O sistema está na forma escalonada e possui duas equações e quatro incógnitas. Logo, são duas incógnitas livres e o grau de indeterminação é dois.

Fazendo $z=\alpha$ e $w=\beta$, com $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\beta\in\mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} x+2y-z+w=3 \\ y+z-w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-\alpha+\beta=3 \\ y+\alpha-\beta=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3+\alpha-\beta & \text{(I)} \\ y=-1-\alpha+\beta & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo **II** em **I**, segue que:

$$x+2\cdot(-1-\alpha+\beta)=3+\alpha-\beta \Rightarrow x-2-2\alpha+2\beta=3+\alpha-\beta \Rightarrow x=5+3\alpha-3\beta$$

Logo, a solução geral do sistema é $(5+3\alpha-3\beta, -1-\alpha+\beta, \alpha, \beta)$, com $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\beta\in\mathbb{R}$.

Portanto, o sistema é SPI.

Atribuindo, por exemplo, $\alpha=\beta=1$, obtemos uma das soluções do sistema:

$$(5+3\alpha-3\beta, -1-\alpha+\beta, \alpha, \beta) \to (5+3\cdot 1-3\cdot 1, -1-1+1, 1, 1) \Rightarrow (5, -1, 1, 1)$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

24. Escreva os pares de sistemas equivalentes. a–d; b–f; c–e

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=2 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-y=4 \\ -x+\frac{1}{5}y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x+y=1 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+2y=6 \\ x-4y=-12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 4x-y=4 \end{cases}$

25. Determine quais sistemas estão na forma escalonada. b; d

a) $\begin{cases} x-y+6z=0 \\ x-z=1 \\ 3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-6y=0 \\ 5x-4y-z=5 \\ 3y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z+w=7 \\ -y-z+3w=6 \\ z+5w=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y-x=6 \\ 2x=8 \end{cases}$

26. Em cada item, calcule o valor das constantes *A*, *B*, *C*, *D* e *E* para que o sistema fique na forma escalonada.

a) $\begin{cases} 5x+(1-A)y+z=0 \\ Bx+4y+Cz=4 \\ Dx+(E+1)y+z=3 \end{cases}$ $A\neq 1$; $B=0$; $C\neq 0$; $D=0$; $E=-1$

b) $\begin{cases} (A-B)x+6y+z=8 \\ (1-B)x+Cy-z=5 \\ Dx+Ey-(2-C)z=0 \end{cases}$ $A\neq 1$; $B=1$; $C\neq 0$; $D=0$; $E=0$

27. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, resolva-os.

a) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ y+z=3 \end{cases}$ SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2}-k, 3-k, k\right)$, $k\in\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} -x+2y-z=-9 \\ 2y+z=0 \\ 3z=12 \end{cases}$ SPD; $(1, -2, 4)$

c) $\begin{cases} x+y+z-w=4 \\ -y-z+w=0 \\ z+w=-5 \end{cases}$ SPI; solução geral: $(4, 5+2k, -5-k, k)$, $k\in\mathbb{R}$

Procedimentos para escalonar um sistema linear

Por meio de operações elementares e de algumas propriedades, podemos, a partir de um sistema linear dado, obter um sistema equivalente na forma escalonada, o que auxilia na resolução e na classificação desse sistema.

Lembre-se de que sistemas equivalentes possuem as mesmas soluções. Portanto, ao resolver um sistema escalonado equivalente a um sistema linear *S* dado, estamos resolvendo também *S*.

Exemplos

- $\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ -2x+y+2z=-9 \\ 4x+2y+z=1 \end{cases}$

Inicialmente, a partir das propriedades de sistemas lineares equivalentes, transformamos a 2ª e a 3ª equação, de maneira a obter equações com o coeficiente de *x* igual a zero. Para isso, podemos:

- substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação;
- substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por −2.

$$\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ -2x+y+2z=-9 \\ 4x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ -2y+z=-9 \\ 8y+3z=1 \end{cases}$$

Por fim, no novo sistema, podemos substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ -2y+z=-9 \\ 8y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ -2y+z=-9 \\ 7z=-35 \end{cases}$$

Note que o sistema obtido está na forma escalonada e é equivalente ao sistema linear dado inicialmente. Resolvendo esse sistema escalonado, estamos também resolvendo o sistema dado.

- $7z=-35 \Rightarrow z=-5$
- $-2y+z=-9 \Rightarrow -2y+(-5)=-9 \Rightarrow y=2$
- $2x-3y-z=0 \Rightarrow 2x-3\cdot 2-(-5)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD) e possui como solução a terna $\left(\frac{1}{2}, 2, -5\right)$.

- $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -2x-y+z=3 \\ -x+y-2z=-4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -2x-y+z=3 \\ -x+y-2z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 3y-5z=-11 \\ 3y-5z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 3y-5z=-11 \\ 0y+0z=0 \end{cases}$$

Como na 3ª equação o coeficiente de cada incógnita é igual a zero, e o termo independente também é igual a zero, essa equação é válida para quaisquer valores de *x*, *y* e *z*. Dessa maneira, ela não contribui para a resolução do sistema, podendo ser desconsiderada e fazendo com que o sistema obtido fique na forma escalonada.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 3y-5z=-11 \\ 0y+0z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 3y-5z=-11 \end{cases}$$

Note que o sistema escalonado obtido tem mais incógnitas do que equações e, portanto, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Nesse caso, o sistema escalonado obtido possui uma incógnita livre (z). Considerando $z=k$, com $k \in \mathbb{R}$, podemos determinar a solução geral do sistema:

- $3y-5z=-11 \Rightarrow 3y-5k=-11 \Rightarrow y=\dfrac{-11+5k}{3}$
- $x+2y-3z=-7 \Rightarrow x+2\cdot\dfrac{-11+5k}{3}-3k=-7 \Rightarrow x=\dfrac{1-k}{3}$

Portanto, a solução geral do sistema é $\left(\dfrac{1-k}{3}, \dfrac{-11+5k}{3}, k\right)$.

A partir da solução geral ao lado, determine uma das soluções particulares do sistema utilizando $k=4$. $(-1, 3, 4)$

- $\begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ -x+2y-z=5 \\ 3x-10y+7z=-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-3y+2z=-4 & \boxed{\cdot(-3)} \\ -x+2y-z=5 & \oplus \\ 3x-10y+7z=-3 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ -y+z=1 & \boxed{\cdot(-1)} \\ -y+z=9 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ -y+z=1 \\ 0y+0z=8 \end{cases}$$

Nesse caso, a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita, sejam quais forem os valores de *x*, *y* e *z*, de maneira que o sistema não possui forma escalonada. Portanto, o sistema é impossível (SI).

Atividades

Anote as respostas no caderno.

28. Paulo e Camila fazem aniversário no mesmo dia, e Paulo é 10 anos mais velho. Calcule quantos anos tem cada um, sabendo que no próximo aniversário Paulo terá o dobro da idade de Camila.
Paulo: 19 anos; Camila: 9 anos

29. Resolva os sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 3x-y-2z=1 \\ x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=6 \end{cases}$
$x=2;\ y=3;\ z=1$

b) $\begin{cases} 4x+y-3z=5 \\ 2x+y+z=7 \\ 2x+3y+2z=7 \end{cases}$
$x=3;\ y=-1;\ z=2$

30. Na disciplina de Matemática de certo curso, o professor aplicou 3 provas com pesos diferentes. Abaixo estão apresentadas as notas dos alunos que obtiveram o melhor desempenho nessas provas e suas médias ponderadas.

Aluno	Prova			Nota final
	1ª	2ª	3ª	
Natália	9,7	8,4	8,9	9,2
Eduardo	9,5	8,3	8,3	8,9
Vanessa	8,4	9,4	8,4	8,6

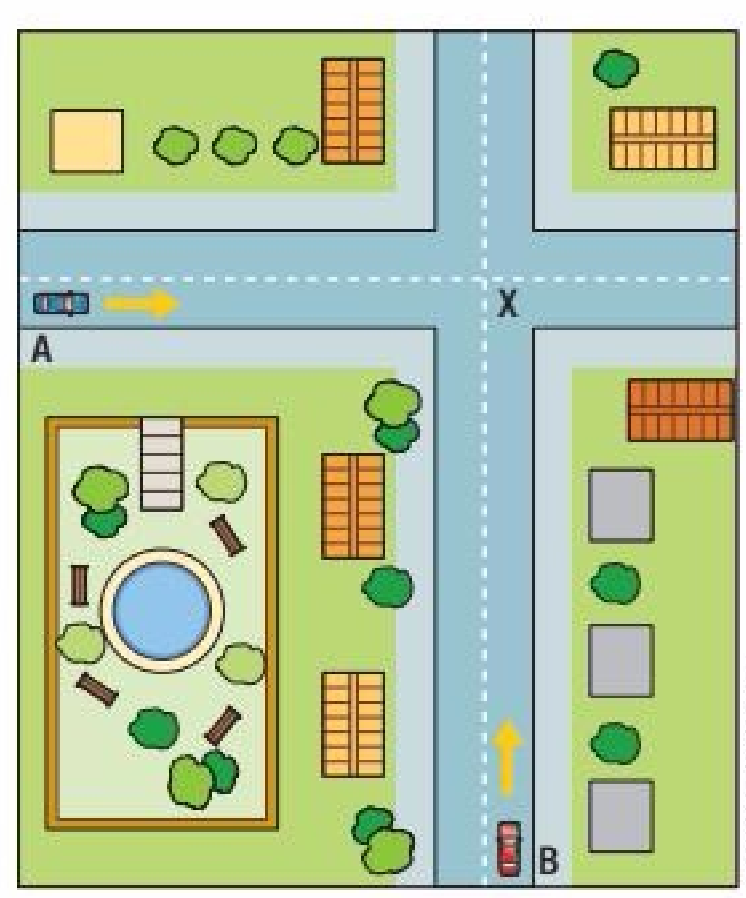
De acordo com as informações, determine o peso de cada prova, sabendo que a soma deles é 10.
1ª prova: 5; 2ª prova: 2; 3ª prova: 3

31. Escreva uma atividade em cuja resolução seja necessário utilizar o sistema linear abaixo. Em seguida, proponha a atividade que você elaborou a um colega e resolva a atividade proposta por ele.
Resposta pessoal.

$$\begin{cases} 2x+3y=35 \\ 3x+5y=57 \end{cases}$$

32. **Desafio**

Dois carros, A e B, trafegando em ruas diferentes, dirigem-se em linha reta para um mesmo cruzamento, no ponto *X*, a uma mesma velocidade constante. Nessas condições, o carro B irá passar por *X* 10 s após o carro A. Mas, se o carro B aumentar sua velocidade em 20%, ele irá chegar ao cruzamento no mesmo instante que o carro A.



Acervo da editora

De acordo com as informações apresentadas, e supondo que os carros mantenham velocidade constante, determine em quantos segundos o carro A chegará ao ponto *X*. 50 s

Lembre-se de que, nesse caso, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Discussão de um sistema linear

Dado um sistema linear em que um ou mais coeficientes são dados por um parâmetro real, podemos classificar esse sistema em SI, SPD ou SPI em função desses parâmetros.

Uma das maneiras de discutir um sistema linear é utilizando o método do escalonamento.

› Exemplo

Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x+3y+5z=12 \\ -2x+2y+3z=3 \\ x-y+az=1 \end{cases}$ em função de *a*. Para isso, inicialmente escalonamos o sistema.

$$\begin{cases} x+3y+5z=12 \\ -2x+2y+3z=3 \\ x-y+az=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+5z=12 \\ 8y+13z=27 \\ -4y+(a-5)z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+5z=12 \\ 8y+13z=27 \\ (2a+3)z=5 \end{cases}$$

De acordo com o sistema escalonado obtido, temos que ele pode ser SPD, se $2a+3\neq 0$, ou SI, se $2a+3=0$. Segue que:

- $2a+3\neq 0 \Rightarrow a\neq -\dfrac{3}{2}$

  Para qualquer $a\in \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, o sistema é SPD.
- $2a+3=0 \Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$

  Para $a=-\dfrac{3}{2}$, o sistema é SI, pois nesse caso o coeficiente de *z* na 3ª equação será zero; consequentemente, essa equação não será satisfeita, seja qual for $z\in \mathbb{R}$.

Neste exemplo, tome $a=-4$ e obtenha a solução do sistema. $(2, 5, -1)$

Para discutir um sistema linear que tem o mesmo número de incógnitas e de equações, podemos utilizar determinantes. Para isso, calculamos o determinante *D* da matriz dos coeficientes:

- se $D\neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- se $D=0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Nesse caso, temos de fazer uma análise mais detalhada.

› Exemplos

- $\begin{cases} 6x-2ay+3z=1 \\ 3x+y+z=4 \\ -x+ay-z=1 \end{cases}$

  Calculamos inicialmente o determinante *D* da matriz dos coeficientes.

$$D=\begin{vmatrix} 6 & -2a & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix}=-6+2a+9a+3-6a-6a=-a-3$$

  Para que o sistema seja SPD, temos $-a-3\neq 0$, ou seja, $a\neq -3$.

  Para verificar a classificação do sistema quando $a=-3$, substituímos esse valor no sistema e resolvemos.

$$\begin{cases} 6x+6y+3z=1 \\ 3x+y+z=4 \\ -x-3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+6y+3z=1 \\ 4y+z=-7 \\ -8y-2z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+6y+3z=1 \\ 4y+z=-7 \\ 0y+0z=-7 \end{cases}$$

  Como a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita para quaisquer *y* e *z* reais, o sistema é SI se $a=-3$.

  Em resumo, o sistema é SPD se $a\neq -3$ e SI se $a=-3$.

- $\begin{cases} 2ax-8y=12 \\ -3x+3ay=-9 \end{cases}$ $\quad D=\begin{vmatrix} 2a & -8 \\ -3 & 3a \end{vmatrix}=6a^2-24$

Para que o sistema seja SPD, temos $6a^2-24\neq 0$, ou seja, $a\neq 2$ e $a\neq -2$.

Considerando $a=2$, temos:

$$\begin{cases} 4x-8y=12 & \cdot 3 \\ -3x+6y=-9 & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x-24y=36 \\ -12x+24y=-36 \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} 12x-24y=36 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

Portanto, para $a=2$, o sistema é SPI.

Agora, considerando $a=-2$, temos:

$$\begin{cases} -4x-8y=12 & \cdot(-3) \\ -3x-6y=-9 & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+24y=-36 \\ -12x-24y=-36 \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} 12x+24y=-36 \\ 0x+0y=-72 \end{cases}$$

Portanto, para $a=-2$, o sistema é SI.

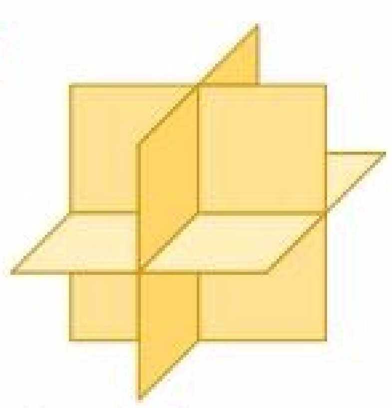
Em resumo, o sistema é SPD para $a\neq 2$ e $a\neq -2$, SPI para $a=2$ e SI para $a=-2$.

Sistemas lineares 3×3: uma interpretação geométrica

Neste capítulo, estudamos que uma equação linear com duas incógnitas pode ser representada no plano cartesiano por uma reta e, consequentemente, um sistema linear 2×2 pode ser representado por um par de retas. No caso desses sistemas, são três possibilidades: SPD quando as retas se cruzam em um único ponto; SPI quando as retas são coincidentes; SI quando as retas são paralelas.

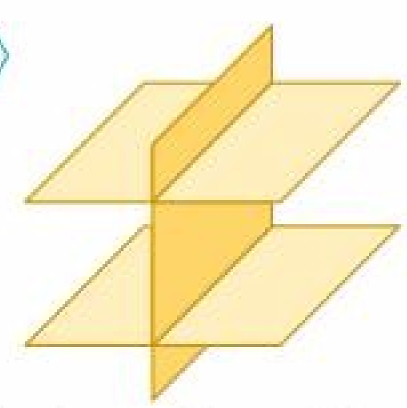
Também podemos realizar uma interpretação geométrica de sistemas lineares 3×3. Contudo, nesse caso, cada equação é representada por um plano no sistema ortogonal OXYZ no espaço, sendo oito possibilidades.

A



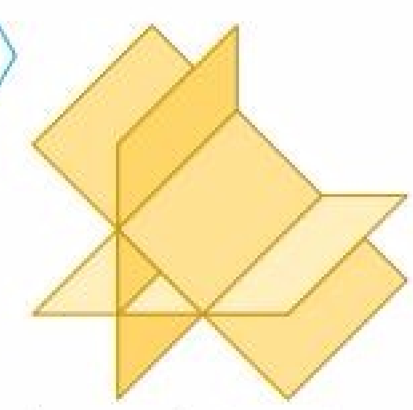
Os três planos têm um único ponto em comum.

B



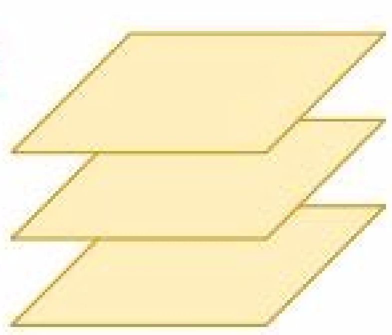
Dois planos são paralelos e cada um deles possui uma reta distinta comum ao outro plano.

C



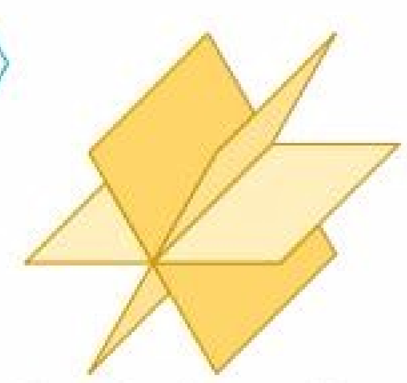
Os planos se intersectam dois a dois e não há um único ponto em comum aos três planos.

D



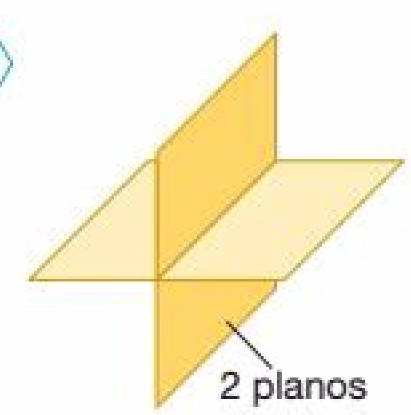
Os três planos são paralelos.

E



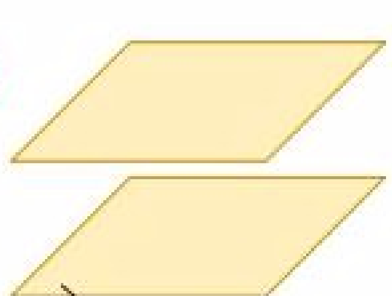
Os três planos são distintos e possuem uma reta comum a eles.

F



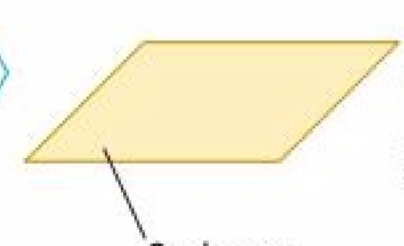
Dois planos são coincidentes e estes possuem uma reta em comum com o outro plano.

G



Dois planos são coincidentes e estes são paralelos ao outro plano.

H



Os três planos são coincidentes.

Ilustrações: Acervo da editora

Quando há um único ponto em comum aos três planos, as coordenadas desse ponto correspondem à única solução do sistema. Nos casos em que há uma reta em comum aos três planos ou quando eles são coincidentes, há infinitos pontos cujas coordenadas são soluções do sistema. Por fim, quando não há ponto comum aos três planos, não há solução para o sistema.

Assim, em relação às figuras apresentadas anteriormente, podemos classificar os sistemas representados por elas da seguinte maneira:

- SPD: **A**
- SPI: **E**, **F** e **H**
- SI: **B**, **C**, **D** e **G**

Atividades resolvidas

R7. Classifique o sistema homogêneo $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$.

Resolução

Calculando o determinante *D* da matriz dos coeficientes, temos:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+2-4-1+4-2=0$$

Explique aos alunos que, como todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial (0,0,...,0), então um sistema linear homogêneo é SPD se $D \neq 0$ e SPI se $D=0$.

Como $D=0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Por outro lado, o sistema admite a solução trivial $(0,0,0)$, pois é homogêneo. Portanto, o sistema é SPI.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

33. Discuta os sistemas lineares em função do parâmetro *a*.

a) $\begin{cases} -x+y=4 \\ 2x-ay=-8 \end{cases}$ SPD: $a \neq 2$; SPI: $a=2$

b) $\begin{cases} ax-y=-2 \\ 3x+ay=6 \end{cases}$ SPD: $\forall a \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} ax+ay=18 \\ x-y=4 \end{cases}$ SPD: $a \neq 0$; SI: $a=0$

d) $\begin{cases} (a+1)x=3 \\ 4x+ay=4 \end{cases}$ SPD: $a \neq 0$ e $a \neq -1$; SI: $a=0$ ou $a=-1$

34. Qual deve ser a relação entre as constantes k_1 e k_2 para que o sistema $\begin{cases} 5x-6y=k_1 \\ -10x+12y=k_2 \end{cases}$ seja SI? $k_2 \neq -2k_1$

35. Determine o valor da constante *a* de modo que o sistema seja possível e determinado. Em seguida, a partir dessa restrição, atribua um valor para *a* e resolva o sistema. $a \neq 0$; Uma possível resposta: $a=1$ e $(21, 4, 16)$.

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ (a-1)x-y+z=12 \\ x+y-z=9 \end{cases}$$

36. Discuta o sistema linear indicado abaixo, sabendo que *a* e *b* são constantes reais.
SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a=-\frac{1}{2}$ e $b=4$; SI: $a=-\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$

$$\begin{cases} 3x-ay=2 \\ 6x+y=b \end{cases}$$

37. Determine o valor de *a* para que a equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ admita somente a solução trivial. $a \neq \frac{10}{3}$

38. O sistema linear $\begin{cases} x+y=z \\ 3x-y=-z \\ -x+5y=10z \end{cases}$ é SPD, SPI ou SI? SPD

39. Determine o valor real de *p* para que o sistema homogêneo não admita apenas a solução final. $p=-1$

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-y-z=0 \\ 2x+py-z=0 \end{cases}$$

capítulo 4

Análise combinatória

Volantes da Mega-Sena.

Jogos de sorte

Você já sonhou em se tornar um milionário? Muitos brasileiros ficam empolgados com essa ideia e arriscam a sorte nas loterias organizadas pela Caixa Econômica Federal. A Mega-Sena, por exemplo, é uma das modalidades de loteria, cujo prêmio varia conforme o sorteio. Para apostar é preciso escolher no mínimo 6 e no máximo 15 números, dentre 60 disponíveis. Para ganhar o prêmio máximo (sena), o jogador precisa acertar os 6 números sorteados. Se acertar 5 (quina) ou 4 números (quadra), o apostador também recebe prêmios, porém menores.

Para ganhar na loteria e tornar o sonho de ser milionário uma realidade, é preciso muita sorte. Muita sorte mesmo! Veja a seguir as chances de se ganhar em algumas loterias.

Chances de ganhar o prêmio máximo com uma aposta mínima

Mega-Sena

Captura via escâner

Uma em 50 063 860.

Quina

Captura via escâner

Uma em 24 040 016.

Lotofácil

Captura via escâner

Uma em 3 268 760.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Você conhece alguém que já ganhou nas loterias? Em qual modalidade? Resposta pessoal.

B) Em qual das modalidades apresentadas acima uma pessoa tem maior chance de ganhar o prêmio máximo, realizando uma aposta mínima? Lotofácil

C) Na Mega-Sena, realizando uma aposta com 15 números, as chances de ganhar o prêmio máximo são maiores ou menores, quando comparadas à aposta mínima? maiores

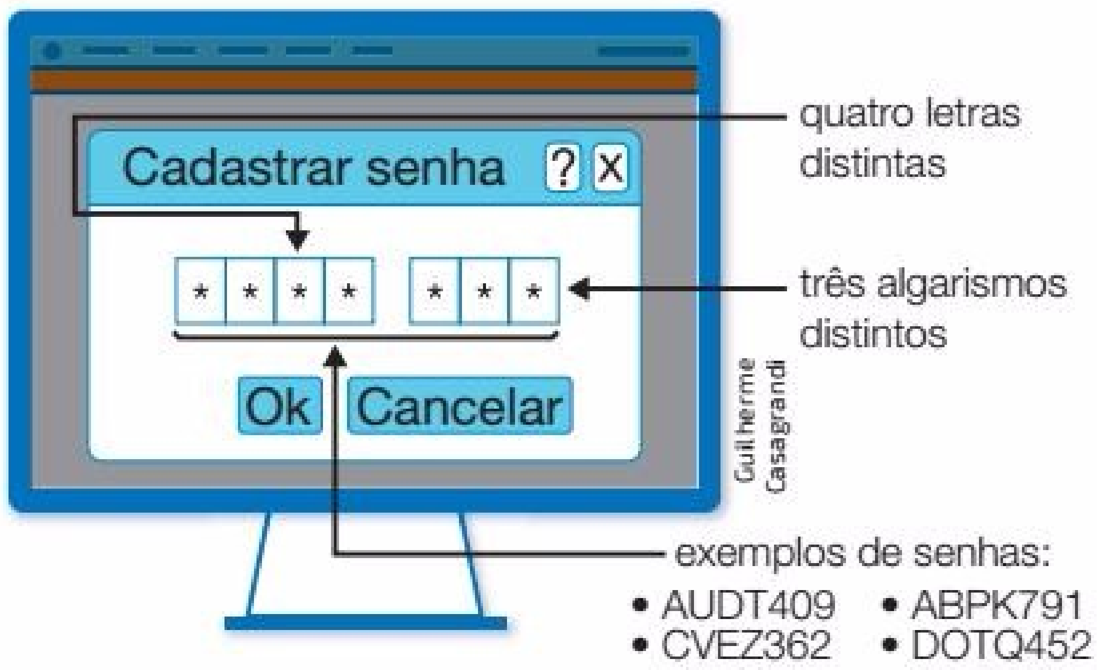
Veja mais informações sobre as loterias no *site*:
- <http://tub.im/3ufeza> (acesso em: 22 fev. 2016)

Fernando Neves/Futura Press

Estudando análise combinatória

Para acessar determinado *site*, é necessário cadastrar uma senha formada por quatro letras maiúsculas e 3 algarismos, nessa ordem. Na senha, os caracteres devem ser distintos, ou seja, não podem se repetir.

Sabendo que estão disponíveis 26 letras e 10 algarismos, quantas senhas diferentes podem ser cadastradas nesse *site*?



Guilherme Casagrandi

Situações como esta, que envolvem a contagem dos possíveis agrupamentos dos elementos de um ou mais conjuntos, podem ser resolvidas com o auxílio de uma parte da Matemática conhecida como **análise combinatória**, que estudaremos neste capítulo.

Princípio fundamental da contagem

Podemos responder à questão proposta anteriormente escrevendo todas as possibilidades e realizando a contagem das senhas. No entanto, escrever todas essas senhas pode ser trabalhoso. Uma maneira de resolver esse tipo de questão é por meio do chamado **princípio fundamental da contagem** ou **princípio multiplicativo**.

Veja uma situação que pode ser resolvida por esse princípio.

Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

Podemos representar todas as possibilidades por meio de um **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.

O diagrama ao lado é chamado de **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.


Photodisc/Getty Images

sanduíche

- Centeio (C)
  - Frango (F) ⟶ (C, F)
  - Presunto (P) ⟶ (C, P)
  - Queijo (Q) ⟶ (C, Q)
  - Vegetariano (V) ⟶ (C, V)
- Integral (I)
  - Frango (F) ⟶ (I, F)
  - Presunto (P) ⟶ (I, P)
  - Queijo (Q) ⟶ (I, Q)
  - Vegetariano (V) ⟶ (I, V)

pão (2 possibilidades) | recheio (4 possibilidades) | opções de sanduíche (8 possibilidades)

Essas possibilidades também podem ser representadas por uma **tabela de dupla entrada**.

Opção de recheio \ Opção de pão	Centeio (C)	Integral (I)
Frango (F)	(C,F)	(I,F)
Presunto (P)	(C,P)	(I,P)
Queijo (Q)	(C,Q)	(I,Q)
Vegetariano (V)	(C,V)	(I,V)

Observe que a escolha do sanduíche pode ser realizada em duas etapas: a escolha do tipo de pão, com 2 possibilidades, e a escolha do recheio, com 4 possibilidades.

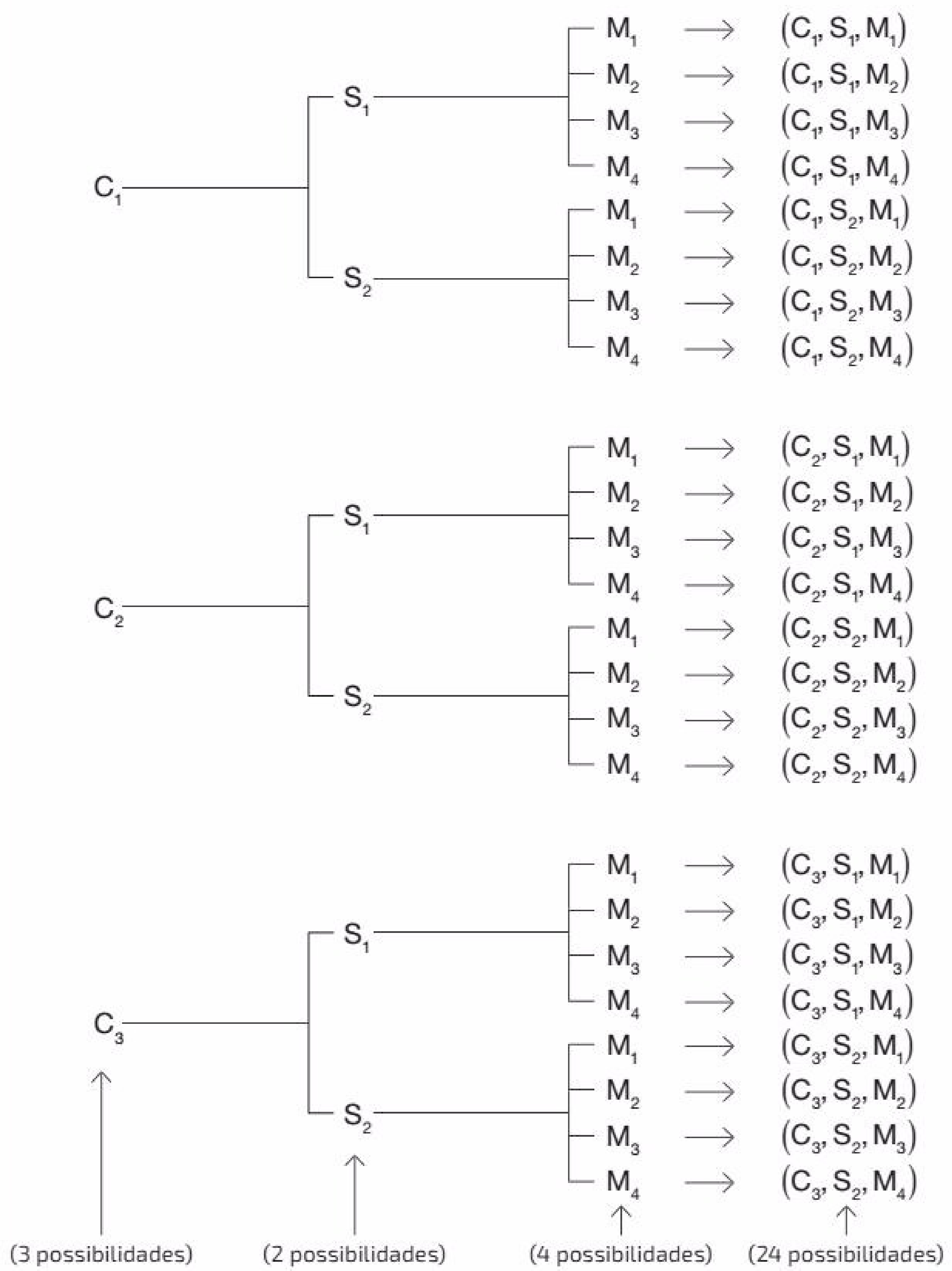
Tanto na árvore de possibilidades quanto na tabela de dupla entrada o total de possibilidades para a montagem de um sanduíche é igual a 8, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$.

> Se um acontecimento *A* pode ocorrer de *n* maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento *B* pode ocorrer de *m* maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos *A* e *B* é dada pelo produto $n \cdot m$. Este é o **princípio fundamental da contagem**.

Exemplo 1

Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapatos e 4 camisas, todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir, utilizando uma calça, um par de sapatos e uma camisa?

Podemos responder a essa pergunta construindo uma árvore de possibilidades.



Legenda:
- Modelos de calça: C_1, C_2 e C_3.
- Modelos de sapato: S_1 e S_2.
- Modelos de camisa: M_1, M_2, M_3 e M_4.

Portanto, para vestir uma calça, um par de sapatos e uma camisa, o número total de possibilidades é $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Capítulo 4

Exemplo 2

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

O número formado terá três ordens, ou seja, centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das centenas, temos 5 possibilidades. Como os algarismos devem ser distintos, na ordem das dezenas temos 4 possibilidades e na ordem das unidades, 3 possibilidades.

$$\text{número de possibilidades} \longrightarrow \frac{5}{C}\ \frac{4}{D}\ \frac{3}{U}$$

Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Exemplo 3

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podemos formar quantos números de quatro algarismos?

O número formado terá quatro ordens, ou seja, unidade de milhar (UM), centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das unidades de milhar, temos 6 possibilidades, ou seja, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, pois o 0 não pode ocupar essa ordem. Como os algarismos podem se repetir, na ordem das centenas, das dezenas e das unidades, temos 7 possibilidades.

$$\text{número de possibilidades} \longrightarrow \frac{6}{UM}\ \frac{7}{C}\ \frac{7}{D}\ \frac{7}{U}$$

Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,058$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Antes do início de uma partida de futebol, é verificado se as equipes utilizarão uniformes cujas cores os distingam claramente.

Para certa partida de futebol, uma das equipes dispunha de quatro modelos de camisa, dois de calção e três de meião. De quantas maneiras distintas essa equipe pode compor seu uniforme?
24 maneiras

Themba Hadebe/AP Photo/Glow Images

Seleção brasileira masculina de futebol na Copa do Mundo de 2014, realizada no Brasil, antes da partida entre Brasil e México, no estádio Arena Castelão, em Fortaleza (CE).

2. Em certo *shopping* há sete portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair desse *shopping*? E entrar e sair por um portão não utilizado na entrada?
49 maneiras; 42 maneiras

3. A partir das informações apresentadas no início da página **98**, calcule quantas senhas distintas podem ser cadastradas naquele *site*.
258 336 000 senhas

4. Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A a B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?
5 trajetos

5. Na 1ª fase de um campeonato de xadrez organizado em uma escola, cada participante joga uma única vez contra cada um dos outros. Sabendo que foram realizadas 66 partidas nessa fase, quantas pessoas participaram do campeonato?
12 pessoas

Note que um participante não joga contra si mesmo. Além disso, a partida entre os participantes **A** e **B** e a partida entre **B** e **A** é a mesma.

6. Uma fantasia é composta de vestido, máscara e sapatos, disponíveis nas cores vermelha, amarela e preta. Sabendo que os sapatos e o vestido devem ter cores diferentes e a máscara é opcional, de quantas maneiras distintas pode-se compor a fantasia? 24 maneiras

7. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), realizado em 2015, era composto por uma redação e 4 provas com 45 questões cada – Linguagens, códigos e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias; Ciências da natureza e suas tecnologias; Ciências humanas e suas tecnologias. As questões das provas eram de múltipla escolha com 5 alternativas cada.

O item que apresenta o número de possibilidades para responder às questões das provas do Enem nesse ano é: d

a) $180 \cdot 5$ b) $4 \cdot 5^{45}$ c) 180^5 d) 5^{180} e) $\dfrac{4^5 \cdot 45}{180}$

8. A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico? 36 maneiras

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico? 12 maneiras

9. Com os algarismos de 0 a 9, quantos números:

a) de quatro algarismos podem ser formados? 9 000 números

b) de cinco algarismos distintos podem ser formados? 27 216 números

c) ímpares de três algarismos podem ser formados? 450 números

d) múltiplos de 5 com seis algarismos podem ser formados? 180 000 números Lembre aos alunos que um número natural é múltiplo de 5 quando o algarismo da unidade é 0 ou 5.

10. Para representar as informações da tabela a seguir em um gráfico de setores, dispõe-se de 9 cores. Sabendo que não deve haver setores com cores iguais, de quantas maneiras distintas o gráfico pode ser colorido? 15 120 maneiras

Produção de cana-de-açúcar em 2014

Região	Produção (milhões de toneladas)
Sudeste	481,3
Nordeste	69,3
Centro-Oeste	132,5
Sul	49,5
Norte	4,6

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1612>. Acesso em: 16 abr. 2016.

11. Saulo esqueceu a senha de sua conta de *e-mail*, mas lembra-se de que ela é formada por cinco algarismos pares. Um dispositivo de segurança do servidor de *e-mail* impede que sejam feitas várias tentativas de acesso a partir de um mesmo local, e bloqueia a conta por 5 minutos após 3 tentativas de acesso malsucedidas. Se Saulo for tentando todas as possíveis senhas de acordo com o que ele se lembra, sem repeti-las, em quanto tempo, no máximo, ele poderá conseguir acessar sua conta de *e-mail*? Considere que seja necessário 1 minuto para realizar 3 tentativas. 235 min ou 3h55min

12. Em certo município, para compor o número dos telefones de 8 dígitos, certa companhia telefônica tem o 1º, o 2º e o 3º dígitos iniciais fixos, o 4º dígito podendo ser 5 ou 7, e os demais dígitos podendo ser qualquer algarismo.

a) O número de telefone 1234-5678 pode pertencer a essa companhia? Justifique. Não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.

b) Quantos números distintos de telefone essa companhia pode compor? 20 000 números

c) Se for acrescida ao 4º dígito a possibilidade de ser 3 ou 9, quantos números distintos a mais essa companhia poderá compor? 20 000 números

13. O sistema de numeração binário é um sistema posicional no qual as quantidades são indicadas a partir de dois números, em geral 0 e 1. Nesse sistema, o número 177, na base decimal, é representado por 10110001. Os computadores digitais utilizam em seus processos internos o sistema binário, sendo denominado cada dígito binário de bite e cada conjunto de 8 dígitos, que forma um caractere, de baite.

A partir dessas informações, de quantas maneiras distintas pode ser composto um baite? 256 maneiras

14. Atualmente, nas embalagens dos mais variados tipos de produtos constam códigos de barras. Em muitos supermercados, por exemplo, esses códigos são utilizados para identificar os produtos adquiridos pelos clientes, não havendo a necessidade de o atendente registrar manualmente seu valor, uma vez que tais códigos podem ser identificados por uma máquina leitora. Cada código de barras é formado por linhas verticais pretas e brancas, com uma sequência de dígitos impressa imediatamente abaixo, identificando os produtos de forma rápida e precisa.

O *European Article Numbering system* – EAN – é um sistema de barras de uso mundial. Adotado na Europa em 1973, ele consiste em uma sequência numérica de 13 (EAN13) dígitos para cada produto. Em algumas situações, a máquina leitora não é capaz de "ler" o código e emite uma mensagem de erro. Nesse caso, para que o produto seja identificado, o atendente deve digitar a sequência numérica do código de barras. Para garantir que ele não cometerá erros de digitação, acarretando a identificação de produtos errados, existe um cálculo que confirma se o código de barras digitado é válido.

Fontes de pesquisa: Milies, C. Polcino. A Matemática dos códigos de barras: detectando erros. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: SBM, n. 68, p. 38-42, 1º quadrimestre de 2009. <https://nacoesunidas.org/conheca/paises-membros>. Acesso em: 4 fev. 2016.

Conhecendo o código de barras

Fotomontagem de Maryane Vioto formada pelas imagens kadmy, MaLija/ Shutterstock.com

I Aviso inicial
As três primeiras barras à esquerda (duas pretas e uma branca) indicam o início da leitura do código do produto.

II Registro nacional
A primeira sequência de dígitos indica o país de origem do produto.

III Fabricante
A segunda sequência de dígitos identifica a empresa fabricante. Esse número é fornecido pelo EAN para que não sejam distribuídos os mesmos números.

IV Divisão
Três barras brancas e duas pretas dividem o código em duas partes.

V RG do produto
A terceira sequência de dígitos identifica o produto quanto ao tipo, tamanho, peso e embalagem.

VI Checagem final
Este último dígito é denominado verificador. Ao ler o código, o computador realiza um cálculo e verifica se o resultado é igual a esse dígito.

Pessoa utilizando a máquina leitora de código de barras.

Observe as sequências que identificam alguns países.

Alemanha	Brasil	China	Itália
400 a 440	789 a 790	690 a 695	800 a 839
Japão	**México**	**Portugal**	**Suíça**
450 a 459 / 490 a 499	750	560	760 a 769

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Para que serve o código de barras?

b) Qual o país de origem e o dígito verificador do código de barras a seguir? Suíça; dígito verificador igual a 1

7 610034 89322X

Ilustrações: Mario Henrique

c) É possível que um erro não seja identificado ao ser registrado dois ou mais dígitos incorretos de um código de barras? Dê um exemplo.

d) Em 2016, eram reconhecidos pela Organização das Nações Unidas (ONU) 193 países. Caso a primeira sequência fosse formada por dois dígitos, ela conseguiria abranger todos esses países? Justifique.

e) O sistema EAN-13 permite que um mesmo fabricante registre quantos produtos diferentes? 100 000 produtos

f) Traga para a sala de aula embalagens de produtos que tenham código de barras e calcule o dígito verificador. Resposta pessoal.

a) Uma possível resposta: ele melhora a precisão de classificação dos produtos, identificando-os de forma rápida.

c) sim; Uma possível resposta: suponha que o código 7 891221 021133 seja digitado erroneamente como 7 892121 021133. O erro seria detectado, pois o número verificador seria 1 em vez de 3. Mas, se digitado como 7 891221 021331, o erro não seria verificado.

d) Não, pois, caso a sequência fosse formada por dois dígitos, ela abrangeria apenas 100 países e não os 193 países reconhecidos pela ONU.

Capítulo 4

A verificação do código de barras

1º Inicialmente, denominamos os 13 dígitos do código de barras por $a_1, a_2, a_3, ..., a_{13}$.

2º Efetuamos o seguinte cálculo:

$$S = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + 3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$$

Utilizando o código de barras apresentado no esquema ao lado como exemplo, temos:

$$S = (7 + 9 + 3 + 6 + 9 + 3) + 3 \cdot (8 + 0 + 9 + 7 + 1 + 0) = 112$$

3º Arredondamos o valor obtido ao múltiplo de 10 imediatamente maior. No exemplo, esse múltiplo é o 120.

4º Subtraímos do número múltiplo de 10 o valor obtido de S. O resultado dessa subtração tem de ser igual ao termo a_{13}, ou seja, ao dígito verificador.

No exemplo, $120 - 112 = 8$.

Note que 8 é o valor de a_{13}, validando, assim, a leitura do código de barras.

Se ao final do cálculo o valor encontrado for diferente de a_{13}, significa que há erro na leitura de pelo menos um dígito do código de barras. Se o valor de S for múltiplo de 10, o dígito verificador será zero.

Fatorial

Em algumas situações da análise combinatória, é necessário calcular o produto entre números naturais consecutivos. Para representar esses cálculos, utilizamos a notação n! (lê-se: "fatorial de n").

Informe aos alunos que a notação *n* fatorial (n!) foi introduzida por Christian Kramp (1760-1820), de Strasburgo, em 1808, para sanar dificuldades gráficas apresentadas pelo símbolo previamente utilizado.

Considere $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Definimos como fatorial de *n*, indicado por n!, o produto de *n* por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

Também definimos que:

- $1! = 1$
- $0! = 1$

Exemplos

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

A partir dos exemplos, podemos notar que: $3! = 3 \cdot 2!$, $4! = 4 \cdot 3!$, $5! = 5 \cdot 4!$ e $6! = 6 \cdot 5!$

De maneira geral: $n! = n \cdot (n-1)!$

Atividades resolvidas

R1. Calcule.

a) $\dfrac{10!}{8!}$

b) $\dfrac{5!}{2! + 3!}$

Resolução

a) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = \boxed{90}$

b) $\dfrac{5!}{2! + 3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! + 3 \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}(1+3)} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}} = \boxed{15}$

R2. Simplifique a expressão $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = (n^2 + n) \cdot (n-1) = n^3 - n^2 + n^2 - n = \boxed{n^3 - n}$$

R3. Resolva a equação $\dfrac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4$.

Resolução

$$\frac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{5 \cdot \cancel{n!}} = 4 \Rightarrow n^2 + 3n - 18 = 0 \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = -6 \text{ (não convém, pois } n \geq 0) \end{cases}$$

Portanto, $n = 3$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

15. Calcule:

a) $6!$ 720

b) $4 \cdot 2!$ 8

c) $0! + 4!$ 25

d) $5! - 4!$ 96

e) $\dfrac{10!}{3!\,7!}$ 120

f) $\dfrac{15!\,13!}{14!\,12!}$ 195

g) $\dfrac{12!\,3!}{15!}$ $\dfrac{1}{455}$

h) $\dfrac{(3! - 0!)!}{3!\,2!}$ 10

16. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ n

b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)! + (n+3)!}$ n+3

c) $\dfrac{(n-1)! + n!}{(n+1)!}$ $\dfrac{1}{n}$

17. Resolva as equações.

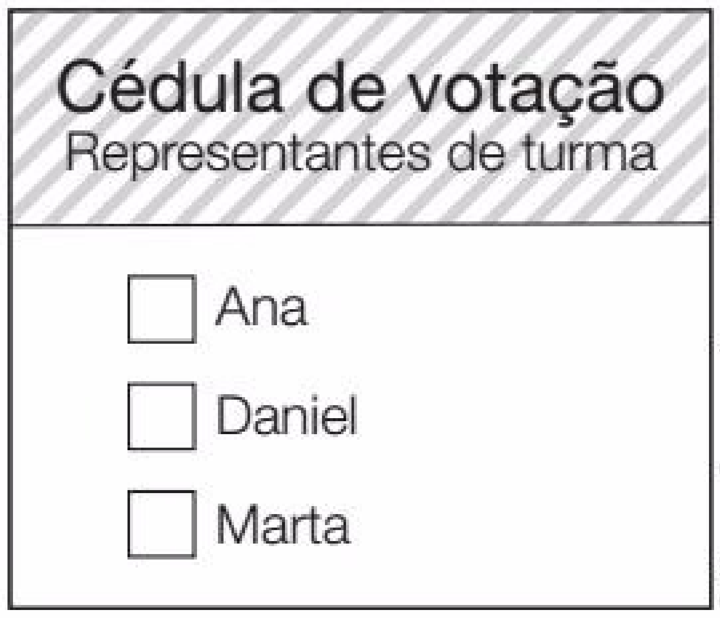
a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$ n=3

b) $\dfrac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30$ n=−4

c) $n! = 1$ n=1 ou n=0

Arranjo simples

Para a escolha do presidente e do vice-presidente de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, candidataram-se três alunos, conforme a cédula de votação abaixo.



Guilherme Casagrande

Os dois candidatos mais votados serão eleitos, respectivamente, presidente e vice-presidente. Quantas são as possibilidades de resultado dessa eleição?

Obtemos todas as possibilidades de resultado construindo um diagrama de árvore.

Presidente (3 possibilidades)	Vice-presidente (2 possibilidades)	(Presidente; vice-presidente) (6 possibilidades)
Ana	Daniel	(Ana; Daniel)
	Marta	(Ana; Marta)
Daniel	Ana	(Daniel; Ana)
	Marta	(Daniel; Marta)
Marta	Ana	(Marta; Ana)
	Daniel	(Marta; Daniel)

Também podemos calcular a quantidade de resultados dessa eleição por meio do princípio fundamental da contagem: $3 \cdot 2 = 6$.

De acordo com o diagrama, são seis as possibilidades de resultado dessa eleição.

Note que, nessa situação, a ordem das colocações interfere no número de possibilidades. Por exemplo, (Ana; Daniel) é diferente de (Daniel; Ana), pois em um dos casos Daniel é presidente e Ana é vice-presidente, e no outro os cargos são invertidos.

Esse tipo de agrupamento é denominado **arranjo simples**. Nesse caso, temos um arranjo de 3 elementos tomados 2 a 2 (três candidatos para dois cargos distintos), e o número total de arranjos é indicado por $A_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$.

Um arranjo é chamado simples quando não ocorre repetição de elementos em um agrupamento. Em arranjos simples, os agrupamentos podem diferir entre si tanto pela natureza como pela ordem dos elementos.

Vamos obter agora uma fórmula para calcular o número total de agrupamentos no caso de *n* elementos tomados *p* a *p*, com $n \geq p$, ou seja, uma fórmula para determinar $A_{n,p}$. Calculando a quantidade de agrupamentos, temos:

- 1ª posição: *n* possibilidades
- 2ª posição: $(n-1)$ possibilidades
- 3ª posição: $(n-2)$ possibilidades
- 4ª posição: $(n-3)$ possibilidades

  ...

- *p*-ésima posição: $[n-(p-1)]$ possibilidades

De acordo com o princípio fundamental da contagem:

$A_{n,1} = n$

$A_{n,2} = n \cdot (n-1)$

$A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

$A_{n,4} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$

...

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}$$

Para escrever $A_{n,p}$ por meio de fatoriais, multiplicamos por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$.

Note que: multiplicar por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ não altera o resultado da expressão, pois: $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot (n-p)!}^{n!}}{(n-p)!} \Rightarrow A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Verifique que:
- $A_{n,0} = 1$
- $A_{0,0} = 1$

Arranjo simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*, com *n*, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$, é todo agrupamento ordenado formado por *p* elementos distintos escolhidos entre os *n* elementos dados.

A quantidade total de agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ ou A_n^p, e calculada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos

- $A_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$
- $A_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ ou $A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$

Atividades resolvidas

R4. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Os números 123 e 213, por exemplo, possuem os mesmos algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada número corresponde a um arranjo dos 6 algarismos, tomados 3 a 3.

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Também podemos resolver essa atividade por meio do princípio fundamental da contagem.

$$\frac{6}{C}\ \frac{5}{D}\ \frac{4}{U}$$

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

As situações que envolvem arranjo simples também podem ser resolvidas utilizando o princípio fundamental da contagem.

Nesses casos, resolva da maneira que preferir.

Portanto, podemos formar 120 números.

R5. Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis). Quantas senhas diferentes é possível formar?

Resolução

As senhas AB1234 e BA1423, por exemplo, possuem as mesmas letras e algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada senha corresponde ao produto entre o arranjo de 26 letras, tomadas 2 a 2, e o arranjo de 10 algarismos, tomados 4 a 4.

$$A_{26,\,2}\cdot A_{10,\,4}=\frac{26!}{(26-2)!}\cdot\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{26\cdot 25\cdot \cancel{24!}}{\cancel{24!}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}}=650\cdot 5\,040=3\,276\,000$$

Portanto, é possível formar 3 276 000 senhas diferentes.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

18. Calcule:

a) $A_{6,2}$ 30

b) $A_{9,3}$ 504

c) $A_{7,4}$ 840

d) $A_{8,6}$ 20160

e) $A_{5,4}-A_{9,2}$ 48

f) $A_{20,3}+A_{40,1}$ 6880

19. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{A_{n-1,2}}{A_{n-3,1}}$ $\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$

b) $\dfrac{A_{n+1,n}}{A_{n,n-1}}$ $n+1$

c) $\dfrac{A_{n-1,n-3}}{A_{n+1,n}}$ $\dfrac{1}{2n^2+2n}$

20. Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. O departamento de *marketing* dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três tipos de anúncio para divulgação dos produtos: *outdoor*, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária? 1320 maneiras

21. Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado com uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas? 665280 maneiras

Os continentes

E. Cavalcante

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

22. Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa tem de cadastrar uma senha composta por 5 caracteres distintos, dentre 32 disponíveis. De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode cadastrar a senha? 24165120 maneiras

23. Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis), e uma numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar? 19656000 livros

24. **Calculadora**

Observe como podemos calcular o arranjo utilizando uma calculadora científica.

Para calcular $A_{23,4}$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira:

Registramos o número 23 e, em seguida, digitamos as teclas SHIFT (para acessar a 2ª função) e * nPr nCr. Por fim, inserimos o número 4 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado:

2 → 3 → SHIFT → nPr nCr → 4 → =

*Explique aos alunos que nPr corresponde ao arranjo de *n* elementos tomados *r* a *r*.

Camila Ferreira

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule:

a) $A_{20,6}$ 27907200

b) $A_{13,11}$ 3113510400

c) $A_{40,5}+A_{0,0}$ 78960961

d) $A_{12,8}-A_{0,0}$ 19958399

e) $A_{11,8}\cdot A_{0,0}$ 6652800

f) $\dfrac{A_{22,5}}{A_{0,0}}$ 3160080

25. A partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 8, calcule a quantidade de números:

a) com 4 algarismos que podem ser formados 625 números

b) com 4 algarismos distintos que podem ser formados 120 números

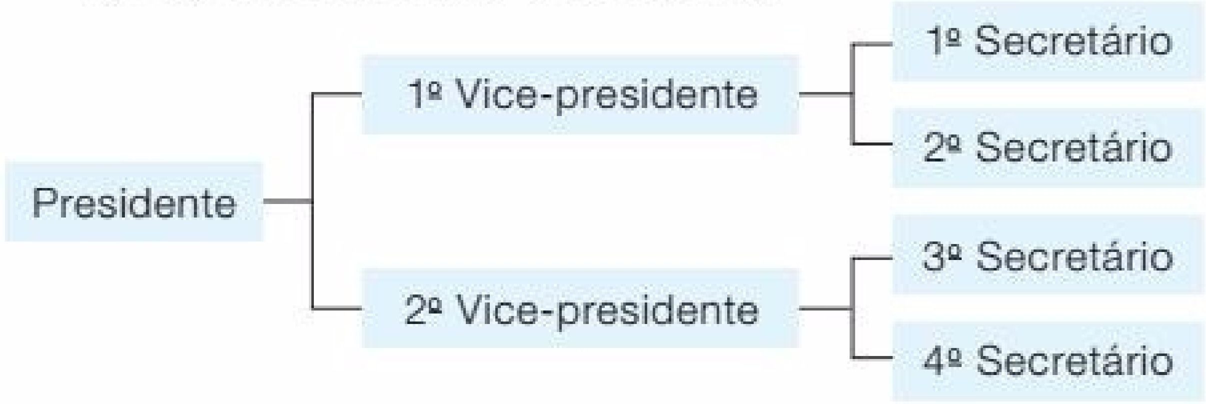
c) múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos que podem ser formados 36 números

> Para resolver o item **c** dessa atividade, lembre-se de que um número inteiro é múltiplo de 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

d) ímpares de 4 algarismos distintos que podem ser formados 48 números

26. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números de cinco algarismos distintos menores que 70 000 podem ser formados? 1440 números

27. O Senado Federal do Brasil é composto por 81 senadores, que representam todas as 27 unidades da federação. A mesa diretora do Senado é eleita internamente e tem a seguinte composição (com exceção dos suplentes):



a) Sabendo que cada unidade da federação é representada igualmente no Senado Federal, quantos senadores representam cada uma delas? 3 senadores

b) Escreva uma expressão para representar de quantas maneiras distintas pode ser composta a mesa diretora do Senado Federal em uma eleição interna. $\frac{81!}{74!}$

c) Junte-se a um colega e pesquisem quais são as atribuições do senador e quais são aqueles que representam a unidade da federação onde moram. Depois, apresentem os resultados da pesquisa à turma. Resposta pessoal.

Fonte de pesquisa: <www12.senado.gov.br/institucional/perguntas-frequentes?tagpesquisa=Senado%20Federal>. Acesso em: 14 dez. 2015.

28. Resolva a equação $A_{3n+3,\,n+2} = 15 \cdot A_{3n+2,\,n+1}$. $n = 4$

29. Um concurso promovido por uma emissora de televisão vai formar uma nova banda de *rock*. Classificaram-se para a etapa final três bateristas, quatro baixistas, cinco guitarristas e dois vocalistas. A banda vencedora do concurso será formada por um baterista, um baixista, dois guitarristas e um vocalista.

De quantas maneiras pode-se formar a banda, a partir dos candidatos finalistas, sabendo que os guitarristas possuem funções diferentes nessa banda? 480 maneiras

30. Em certa categoria de corrida automobilística, participam 10 equipes com 2 pilotos cada, e ao final de cada prova os 6 melhores classificados recebem as respectivas pontuações: 10, 8, 6, 4, 2 e 1.

a) De quantas maneiras distintas pode ser distribuída a pontuação aos pilotos em uma dessas provas? 27 907 200 maneiras

b) Sabendo que em certa prova os pilotos da equipe **A** pontuaram, de quantas maneiras distintas pode ter ocorrido a pontuação dessa prova? 2 203 200 maneiras

31. Na temporada 2014/2015 da Liga do Novo Basquete Brasil (NBB), cuja equipe campeã foi a do Flamengo, os jogos da fase classificatória foram disputados em turno e returno, de maneira que cada equipe realizasse dois jogos contra cada uma das outras equipes, uma em "casa" e outra na "casa" do adversário. Sabendo que ao todo foram realizados 240 jogos, resolva.

João Moura/Fotoarena

Equipe masculina do Flamengo, campeã do NBB em 2015.

a) Quantas equipes disputaram esse campeonato de basquete? 16 equipes

b) Cada equipe disputou quantas partidas na fase classificatória? 30 partidas

32. Para desativar certo artefato explosivo, um policial treinado deve digitar uma senha composta de 4 algarismos distintos, dentre os 10 disponíveis. Considerando que, ao digitar incorretamente uma possível senha, o artefato não exploda e que, em média, cada tentativa de acertar a senha dure cerca de 5 s, responda.

a) Se não forem digitadas senhas repetidas, em quantos minutos, no máximo, o policial desativará o artefato explosivo? 420 min

b) Caso o policial saiba que os algarismos 0 e 7 fazem parte da senha correta, na pior das hipóteses ele conseguirá desativar o artefato explosivo em 30 min? Justifique.

Não, pois, nessas condições, o número máximo de senhas a serem digitadas é 672, o que equivale a 56 min.

Permutação simples

Nos casos de arranjos simples, em que n=p, temos uma **permutação simples**, ou seja, um arranjo de *n* elementos, tomados *n* a *n*. Indicamos a quantidade total de permutações simples de *n* elementos por P_n, e obtemos esse valor da seguinte maneira:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

> Permutação simples é todo arranjo de *n* elementos distintos tomados *n* a *n*.
> A quantidade total de permutações simples é indicada por P_n e calculada por:
> $$P_n = n!$$

Atividades resolvidas

R6. Considerando os anagramas da palavra **BRASIL**, determine:

a) o número total de anagramas

b) quantos começam com **B**

c) quantos terminam com **L**

d) quantos começam com **B** e terminam com **L**

e) um diagrama de Venn representando os itens **a**, **b**, **c** e **d**

f) quantos começam com **B** ou terminam com **L**

Anagrama: palavra formada pela troca da ordem das letras de outra palavra. A palavra RSIBAL é um anagrama da palavra BRASIL.

Resolução

a) Cada anagrama é uma permutação das 6 letras. Assim, o número total de anagramas é dado por:

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \longrightarrow$ 720 anagramas

b) Fixando a primeira letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$\underline{B}\,\underbrace{\_\;\_\;\_\;\_\;\_}_{\text{5 letras}}$

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \longrightarrow$ 120 anagramas

c) Fixando a última letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$\underbrace{\_\;\_\;\_\;\_\;\_}_{\text{5 letras}}\,\underline{L}$

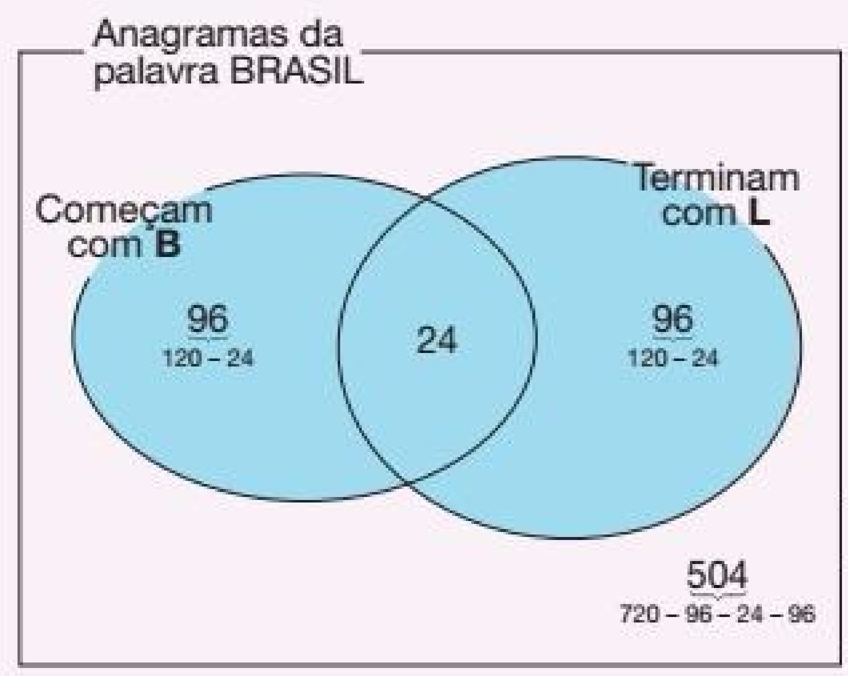
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \longrightarrow$ 120 anagramas

d) Fixando a primeira e a última letra, devemos permutar as outras 4 letras.

$\underline{B}\,\underbrace{\_\;\_\;\_\;\_}_{\text{4 letras}}\,\underline{L}$

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \longrightarrow$ 24 anagramas

e)



Acervo da editora

f) Conforme o diagrama do item **e**, o total de anagramas que começam com **B** ou terminam com **L** é:

$96 + 24 + 96 = 216 \longrightarrow$ 216 anagramas

Note que, se chamamos de *X* o conjunto dos anagramas começados por **B**, e de *Y* o conjunto dos anagramas terminados por **L**, temos que:

- $n(X \cup Y)$ é o número de anagramas começados por **B** ou terminados por **L**
- $n(X \cap Y)$ é o número de anagramas começados por **B** e terminados por **L**

Logo:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) =$$
$$= 120 + 120 - 24 = 216$$

R7. (Enem-MEC) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:

a) 24 b) 31 c) 32 d) 88 e) 89

Resolução

Como os números gerados têm cinco algarismos, todos ímpares e distintos, esses números correspondem às permutações de 75 913, entre as quais, aquelas que representam números menores do que 75 913 são as que têm as seguintes possíveis composições:

$$1\underbrace{****}_{P_4} \quad 3\underbrace{****}_{P_4} \quad 5\underbrace{****}_{P_4} \quad 71\underbrace{***}_{P_3} \quad 73\underbrace{***}_{P_3} \quad 751\underbrace{**}_{P_2} \quad 753\underbrace{**}_{P_2}$$

Segue que: $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! = 88 \rightarrow 88$ números.

Portanto, 88 números eram menores que 75 913.

Logo, esse número ocupa a posição 89 entre aqueles gerados pelo computador e a alternativa correta é a **e**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

33. Calcule:

a) P_7 5 040
b) $P_7 - P_5$ 4 920
c) $P_3 \cdot P_6$ 4 320
d) $\frac{P_{12}}{P_{10}}$ 132
e) $\frac{A_{8,5}}{P_3}$ 1 120
f) $\frac{P_7}{A_{7,3}}$ 24

34. Quantos anagramas tem a palavra:

a) AMOR 24 anagramas
b) LUCRO 120 anagramas
c) TECLADO 5 040 anagramas
d) TRIÂNGULO 362 880 anagramas

35. Seis amigos irão a um cibercafé, onde pretendem realizar uma pesquisa escolar, cada um deles em um computador. Sabendo que estão disponíveis no cibercafé 6 computadores, localizados lado a lado, de quantas maneiras distintas os amigos poderão ocupá-los? 720 maneiras

36. Certo restaurante é aberto de segunda-feira a sábado e, para cada dia da semana, tem um cardápio diferente. O dono do restaurante deseja alterar o cardápio da semana apenas permutando os cardápios já existentes. De quantas maneiras ele pode fazer isso? 719 maneiras

37. Considere todas as palavras de 5 letras, com ou sem significado, que podem ser escritas com A, B, R, O e D, sem que haja repetição de letra.

a) Quantas são essas palavras? 120 palavras
b) Determine quantas dessas palavras começam com a letra R. 24 palavras
c) Quantas dessas palavras terminam em vogal? 48 palavras

38. Em um município, a fiscalização sanitária inspeciona mensalmente uma única vez cada um dos 4 frigoríficos locais. A fim de surpreender os frigoríficos, mensalmente os fiscais sanitários alteram a ordem em que as inspeções são realizadas. Durante quantos meses os fiscais podem realizar esse procedimento sem que haja repetição na ordem dos frigoríficos inspecionados? 24 meses

39. Utilizando uma calculadora científica, calcule.

a) P_{12} 479 001 600
b) $P_{13} - P_9$ 6 226 657 920
c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5$ 72 576 000

40. Considerando todas as permutações dos algarismos do número 714 853, responda.

a) Qual é o maior número obtido? E o menor? 875 431; 134 578
b) Quantos desses números são maiores que 478 135? E menores que 458 713? 389 números; 310 números

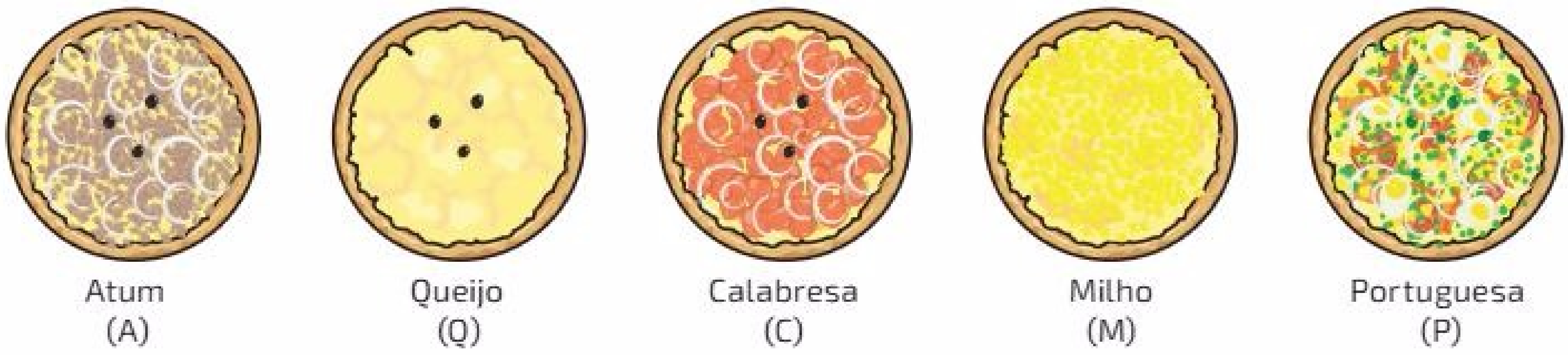
41. **Desafio**

Ao ordenar alfabeticamente em uma lista todos os anagramas da palavra PERMUTA, qual a posição dessa palavra na lista? 2 340ª

42. Quatro casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 8 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema? 384 maneiras

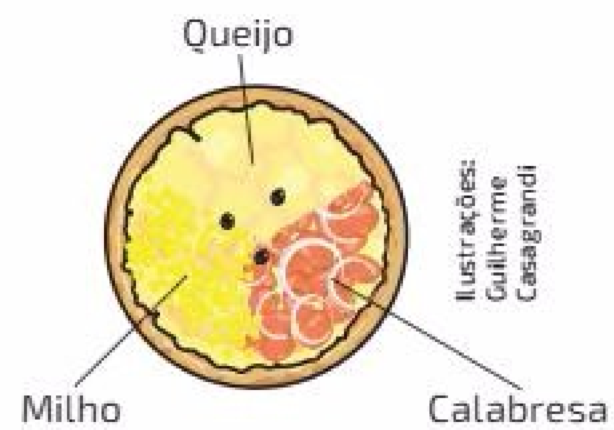
Combinação simples

Um *pizzaiolo* tem à sua disposição ingredientes para fazer *pizzas* nos seguintes sabores:



Quantas são as possibilidades de *pizzas* que podem ser feitas com três sabores diferentes?

Nesse caso, observe que escolher os sabores queijo, calabresa e milho $\{Q, C, M\}$ é o mesmo que escolher calabresa, queijo e milho $\{C, Q, M\}$, ou seja, a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.



Ilustrações: Guilherme Casagrandi

Assim, podemos obter as possibilidades de *pizzas* que podem ser montadas construindo os **subconjuntos** ou **agrupamentos não ordenados** de três elementos do conjunto de sabores disponíveis, ou seja, $\{A, Q, C, M, P\}$. Construindo os agrupamentos, temos:

$$\{A, Q, C\} \quad \{A, Q, M\} \quad \{A, Q, P\} \quad \{A, C, M\} \quad \{A, C, P\}$$

$$\{A, M, P\} \quad \{Q, C, M\} \quad \{Q, C, P\} \quad \{Q, M, P\} \quad \{C, M, P\}$$

Note que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza de seus elementos, e não pela ordem dos mesmos. Cada uma dessas possibilidades corresponde ao que chamamos de uma **combinação** de 5 sabores tomados 3 a 3, que indicamos por $C_{5,3}$. Como são 10 combinações ao todo, temos que $C_{5,3} = 10$.

Permutando de todas as maneiras possíveis os 3 elementos de cada uma dessas combinações, obtemos 6 arranjos, ou seja, 3! arranjos. No caso da combinação $\{A, Q, C\}$, temos os seguintes arranjos: (A, Q, C), (A, C, Q), (Q, A, C), (Q, C, A), (C, A, Q) e (C, Q, A).

Construa um diagrama de árvore para representar os arranjos da combinação $\{A, Q, C\}$.

Podemos afirmar, então, que multiplicando por 3! o número de combinações de 5 elementos, tomados 3 a 3, obtemos o número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3, ou seja:

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3}$$

Para $n \geq p$, a fórmula para o cálculo de combinações é dada por:

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow \boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Combinação simples de *n* elementos distintos, tomados *p* a *p*, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$, é todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por *p* elementos distintos escolhidos entre os *n* elementos dados.

A quantidade total de combinações é indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, e calculada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Atividades resolvidas

R8. Utilizando combinação simples, mostre que a fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono convexo de *n* lados é $D=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Resolução

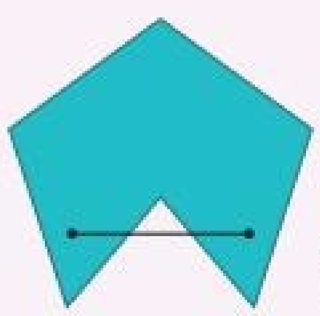
As combinações dos *n* vértices desse polígono, tomados 2 a 2, representam todos os lados e diagonais do polígono. Como queremos apenas as diagonais, subtraímos do total dessas combinações o número de segmentos que formam os lados do polígono, ou seja:

$$D=C_{n,2}-n=\frac{n!}{2!(n-2)!}-n=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{(n-2)!}}-n=\frac{n^2-n}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

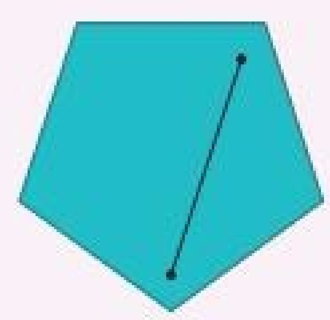
Portanto, o número de diagonais de um polígono convexo de *n* lados é dado por $D=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Lembre-se de que um polígono é convexo quando todo segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dele está inteiramente contido nele.

Ilustrações: Acervo da editora



polígono não convexo



polígono convexo

R9. Uma sala de aula tem 18 meninas e 14 meninos. De quantas maneiras o professor pode formar grupos de 5 alunos, sendo 3 meninas e 2 meninos?

Resolução

Os grupos diferenciam-se pelos alunos, e não pela ordem em que são agrupados, logo cada grupo é uma combinação de 5 alunos, em que a escolha das meninas é dada por $C_{18,3}$, e a dos meninos, por $C_{14,2}$. Então, o número de grupos é dado por:

$$C_{18,3}\cdot C_{14,2}=\frac{18!}{3!(18-3)!}\cdot\frac{14!}{2!(14-2)!}=\frac{18!}{3!\,15!}\cdot\frac{14!}{2!\,12!}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot\cancel{15!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{15!}}\cdot\frac{14\cdot 13\cdot\cancel{12!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{12!}}=\frac{891\,072}{12}=74\,256$$

Portanto, o professor pode formar os grupos de 74 256 maneiras.

R10. Mostre que $C_{n,p}=C_{n,n-p}$.

Resolução

$$C_{n,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}=\frac{n!}{(n-p)!\,\underbrace{[n-(n-p)]}_{p}!}=C_{n,n-p}$$

Essa propriedade é conhecida por igualdade das combinações complementares e pode ser utilizada para simplificar alguns cálculos de combinações.

R11. Em uma confraternização de ano novo, logo após à meia noite, cada pessoa abraçou todas as outras uma única vez. Sabendo que ocorreram 153 abraços no total, determine o número de pessoas presentes.

Resolução

Note que, se a pessoa A abraçar a B, é o mesmo que a pessoa B abraçar a A. Assim, sendo *n* o número de pessoas presentes, temos:

$$C_{n,2}=153\Rightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=153\Rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{(n-2)!}}=153\Rightarrow n^2-n-306=0\left\langle\begin{array}{l}n_1=-17\text{ (não convém)}\\ n_2=18\end{array}\right.$$

Portanto, 18 pessoas estavam presentes na confraternização.

43. Calcule:

a) $C_{6,2}$ 15

b) $C_{9,5}$ 126

c) $C_{15,10}$ 3 003

d) $C_{12,6}+C_{8,2}$ 952

e) $C_{8,4}-C_{8,3}$ 14

f) $\dfrac{C_{19,11}}{C_{19,8}}$ 1

44. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{A_{n,p}}{C_{n,p}}$ p!

b) $C_{n,n-1}\cdot C_{n-2,n-3}$ $n(n-2)$

c) $C_{n-1,p-1}\cdot\dfrac{(n-p)!(p+1)!}{n!}$ $\dfrac{p(p+1)}{n}$

d) $\dfrac{C_{n-1,p-1}}{C_{n-2,p-2}}$ $\dfrac{n-1}{p-1}$

45. **Calculadora**

Observe como podemos calcular o número de combinações utilizando uma calculadora científica. Para calcular $C_{32,7}$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira:

Registramos o número 32 e, em seguida, digitamos a tecla nCr*. Por fim, inserimos o número 7 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado:

3 → 2 → nCr → 7 → =

Diga aos alunos que este procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora.

Camila Ferreira

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule:

a) $C_{25,4}$ 12 650

b) $C_{25,9}$ 2 042 975

c) $C_{32,7}$ 3 365 856

d) $C_{29,20}$ 10 015 005

e) $C_{80,75}$ 24 040 016

f) $C_{100,96}$ 3 921 225

46. Utilizando o método de tentativas, determine o valor de *n*, tal que $C_{n,3}=455$. 15

47. De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para a disputa de uma partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser realizada? 18 564 maneiras

48. De quantas maneiras distintas pode-se formar uma comissão com 10 integrantes, a partir de um grupo de 25 pessoas? 3 268 760 maneiras

49. Uma escola enviará a um congresso 4 de seus 22 professores. De quantas maneiras distintas pode ser formado o grupo de professores que participará do congresso? 7 315 maneiras

*Explique aos alunos que nCr corresponde à combinação de *n* elementos tomados *r* a *r*.

50. A Nova Zelândia é um país localizado na Oceania e uma antiga colônia britânica. Em 2014, a fim de trocar a bandeira utilizada até então, que remetia ao seu passado colonial, o governo neozelandês lançou um concurso para eleger uma nova bandeira para o país. Ao final da primeira fase desse concurso, foram selecionadas 40 bandeiras, sendo que dessas, quatro seriam escolhidas finalistas por um comitê.

De quantas maneiras diferentes o comitê pode escolher as bandeiras finalistas desse concurso? 91 390 maneiras

Fonte de pesquisa: <www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/08/150810_bandeira_nova_zelandia_pai>. Acesso em: 16 dez. 2015.

51. Para a composição de um simulado do Enem, certo professor escolherá 25 questões de um banco de dados contendo 60 questões. O número de maneiras distintas de compor esse simulado, não se diferenciando a ordem das questões, é dado por: a

a) $\dfrac{A_{60,25}}{25!}$

b) $\dfrac{C_{60,25}}{25!}$

c) $\dfrac{A_{60,25}}{C_{60,25}}$

d) $\dfrac{A_{60,25}}{35!}$

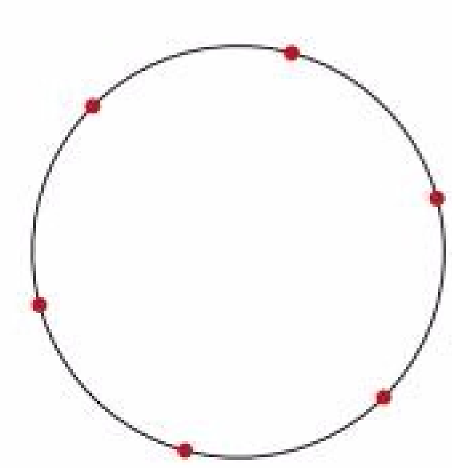
e) $\dfrac{C_{60,25}}{35!}$

52. Em certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas? 2 042 975 maneiras

53. Em relação ao conjunto $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, quantos subconjuntos de 3 elementos podem ser formados? E de 5 elementos? 56 subconjuntos; 56 subconjuntos

54. Considere os fatores primos do número 210. Com o produto de exatamente três desses fatores primos distintos, quantos números diferentes podem ser compostos? 4 números

55. Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos, conforme a figura.



Acervo da editora

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados? 15 segmentos

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados? 20 triângulos

56. Duas pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa escolha pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo? 36 pessoas

57. Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica a partir dos médicos que lá trabalham. Se essa junta for composta por 5 médicos, o hospital terá 15 504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada se ela for composta por 6 médicos? 38 760 maneiras

58. Observe. Diga aos alunos que utilizem o método de tentativas para resolver esta atividade.

Quantidade de países que compõem o continente americano em 2014	
América	Quantidade de países
América do Norte	3
América Central	20
América do Sul	12

Fonte: ALMANAQUE Abril. São Paulo: Abril, 2015.

Certa organização não governamental escolherá 3 países de cada uma das Américas para criar uma comissão representativa para tratar de um assunto de interesse do continente. De quantas maneiras distintas essa comissão pode ser criada? 250 800 maneiras

59. Nas páginas **96** e **97** foram apresentadas algumas informações sobre as loterias organizadas pela Caixa Econômica Federal. Com base nessas informações, resolva as questões.

a) Considerando que uma pessoa realize todas as apostas mínimas diferentes possíveis na Mega-Sena, cada uma delas custando R$ 3,50, qual quantia ela gastaria fazendo todas essas apostas? Em sua opinião, seria vantajoso financeiramente a alguém realizar este procedimento? Justifique.

b) Na Quina, é possível apostar em 5, 6 ou 7 números dentre 80 disponíveis. O prêmio é distribuído para aqueles que acertam 3, 4 ou 5 números. Quantas apostas distintas com 7 números podem ser realizadas ao todo nesta loteria? 3 176 716 400 possibilidades

60. Em uma sala de aula do 2º ano do Ensino Médio, há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30 030 comissões distintas, de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula? 27 alunos

61. Observe abaixo como estão agrupados os amigos cadastrados de certa pessoa em uma rede social.

Grupo	Número de amigos
Trabalho	12
Escola	10
Família	9
Outros	15

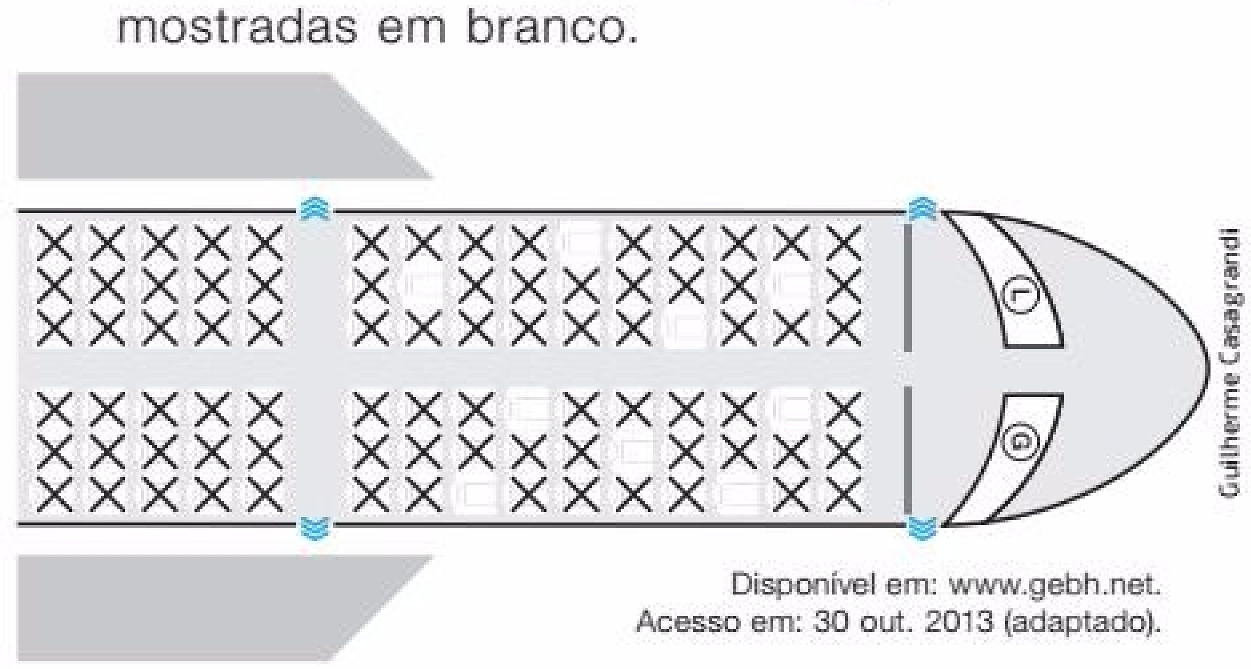
Sabendo que essa pessoa deseja enviar uma mensagem para 10 amigos, sendo 3 do grupo Trabalho, 3 do grupo Escola, 3 do grupo Família e 1 do grupo Outros, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode enviar a mensagem? 33 264 000 maneiras

62. Ao ser infectada por certo vírus, uma pessoa pode desencadear 7 tipos de sintomas diferentes. Os órgãos de saúde pública definiram que, se um indivíduo apresentasse 4 desses sintomas, seria submetido a tratamento médico preliminar enquanto os resultados dos exames não estivessem prontos.

De quantas maneiras diferentes um indivíduo pode manifestar sintomas suficientes para que seja encaminhado a tratamento médico preliminar? 35 maneiras

63. Uma fábrica produz 10 tipos diferentes de peças que, para serem transportadas, são acondicionadas em caixas com 6 peças. Sabendo que, por motivos técnicos, entre os 10 tipos de peças, apenas dois não podem ser acondicionados em uma mesma caixa, de quantas maneiras diferentes pode-se fazer o acondicionamento delas nas caixas? 140 maneiras

64. (Enem-MEC) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por: a

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$ c) $7!$ d) $\frac{5!}{2!}\cdot 4!$ e) $\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}$

59. a) R$ 175 223 510,00; Uma possível resposta: o procedimento seria vantajoso apenas se o prêmio oferecido fosse maior que esse valor e não existissem outros ganhadores.

Permutação com repetição

Estudamos que o número de permutações simples de *n* elementos distintos é dado por $P_n = n!$. Com esse resultado podemos calcular, por exemplo, a quantidade de anagramas de palavras que não possuem letras repetidas. No caso da palavra HOSPITAL, temos $P_8 = 8! = 40\,320$ anagramas.

Como podemos calcular a quantidade de permutações de *n* elementos quando alguns deles se repetem?

Para responder a essa pergunta, vamos calcular a quantidade de anagramas da palavra PESSOAS. Caso essa palavra não tivesse letras repetidas, teríamos 7! anagramas. Porém, ela possui três letras **S** repetidas, que, ao serem permutadas entre si, dão origem a anagramas iguais. Logo, a palavra PESSOAS possui menos de 7! anagramas.

No esquema abaixo, note que ao permutar as letras **S** obtém-se um mesmo anagrama.

SOSPESA ← PESSOAS → SOSPESA

SOSPESA ← PESSOAS → SOSPESA

SOSPESA ← PESSOAS → SOSPESA

Como na palavra PESSOAS a letra **S** se repete três vezes, cada anagrama se repete 3! vezes. Assim, o número de anagramas dessa palavra é dado por:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$$

Portanto, a palavra PESSOAS possui 840 anagramas.

A quantidade de permutações de *n* elementos com repetições, dos quais $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são as quantidades dos diferentes elementos, e $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, é dada por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Exemplo 1

Quantos anagramas possui a palavra TATU?

Note que essa palavra possui duas letras **T**.

$$P_4^{(2,1,1)} = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

Portanto, a palavra TATU possui 12 anagramas.

Temos que:

$$P_4^{(2,1,1)} = P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Exemplo 2

Quantos anagramas possui a palavra CARROSSÉIS?

Note que essa palavra possui duas letras **R** e três letras **S**.

$$P_{10}^{(2,\,3,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1)} = P_{10}^{(2,\,3)} = \frac{10!}{2!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 302\,400$$

Portanto, a palavra CARROSSÉIS possui 302 400 anagramas.

Atividades resolvidas

R12. Considerando os anagramas da palavra **MATEMÁTICA**, determine:

a) o número total de anagramas

b) quantos começam com **A**

Resolução

a) A palavra **MATEMÁTICA** tem 10 letras, sendo 3 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{10}^{(3,\,2,\,2)} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{604\,800}{4} = 151\,200 \longrightarrow 151\,200 \text{ anagramas}$$

b) Fixando a primeira letra, sobram 9 letras para permutar, sendo 2 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{9}^{(2,\,2,\,2)} = \frac{9!}{2!\,2!\,2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{181\,440}{4} = 45\,360 \longrightarrow 45\,360 \text{ anagramas}$$

R13. No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, quantas soluções tem a equação $a+b+c=7$?

Resolução

Sendo *a*, *b* e *c* números naturais, podemos considerar que as soluções da equação correspondem às maneiras pelas quais podemos separar 7 elementos em 3 partes inteiras. Assim, representando por “bolinhas” esses elementos e separando-os por “barras”, temos, por exemplo, que $\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$ corresponde à solução $(2, 3, 2)$ e que $||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$, à solução $(0, 0, 7)$.

Dessa maneira, a quantidade de soluções naturais da equação é dada pela quantidade de permutação das 7 “bolinhas” e das 2 “barrinhas”, com 7 e 2 repetições.

$$P_{9}^{(7,\,2)} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot 2\cdot 1} = \frac{72}{2} = 36 \longrightarrow 36 \text{ soluções}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

65. Determine quantos anagramas tem cada palavra.

a) MONITOR 2 520 anagramas

b) AMERICANA 60 480 anagramas

c) LIBERTADOR 1 814 400 anagramas

d) CALCULADORA 1 663 200 anagramas

e) RENASCIMENTO 119 750 400 anagramas

66. Sendo *x*, *y*, *z* e *w* números naturais, quantas soluções possui a equação $x+y+z+w=6$? 84 soluções

67. Permutando os algarismos do número 125 612, quantos números:

a) são obtidos? 180 números

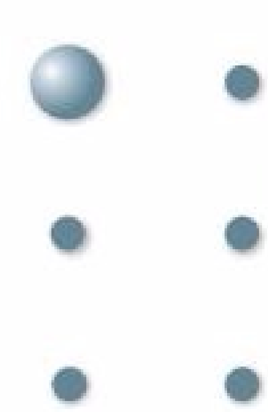
b) pares são obtidos? 90 números

c) menores que 400 000 são obtidos? 120 números

68. Armando tem 8 moedas de 1 real e irá guardar cada uma em um de seus três cofrinhos idênticos, que se encontram vazios. De quantas maneiras distintas as moedas poderão ficar distribuídas nos cofrinhos após Armando guardar todas elas? 45 maneiras

69. Ao ordenar alfabeticamente todos os anagramas da palavra CÉLULA, qual ocupará a 301ª posição? UACÉLL

70. (Enem-MEC) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



Acervo da editora

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é: d

a) 12

b) 31

c) 36

d) 63

e) 720

Binômio de Newton

Um dos matemáticos mais produtivos e importantes da história é o inglês Isaac Newton (1642-1727). Entre suas diversas contribuições, está o que atualmente denominamos **Binômio de Newton**.

Autor desconhecido. Gravura. Coleção particular. Foto: Oxford Science Archive/Heritage/Glow Images

Isaac Newton

Para compreender esse conceito matemático, observe o desenvolvimento de potências da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, para alguns valores de *n*. Cada uma dessas potências é chamada de Binômio de Newton.

- $n=0 \to (x+y)^0 = 1$
- $n=1 \to (x+y)^1 = x+y$
- $n=2 \to (x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2+2xy+y^2$
- $n=3 \to (x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $n=4 \to (x+y)^4 = (x+y)\cdot(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

Seguindo esse mesmo raciocínio, para $n=5$ teríamos $(x+y)^5 = (x+y)\cdot(x+y)^4$. De modo geral, para $n>0$, temos $(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)^{n-1}$.

Dependendo do valor de *n*, esse método de calcular potências pode ser muito trabalhoso. Neste capítulo, iremos estudar uma fórmula que permite desenvolver $(x+y)^n$ de maneira menos trabalhosa, ou obter qualquer de seus termos sem efetuar todo o seu desenvolvimento.

Triângulo de Pascal

Sabemos que, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n \geq p$$

No estudo do Binômio de Newton, como forma de simplificar a escrita, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$ (lê-se: "binomial de *n* sobre *p*").

O número $\binom{n}{p}$ é denominado **coeficiente binomial** ou **número binomial**.

Nesse número, *n* é chamado de **numerador**, e *p*, de **denominador**.

Podemos organizar os números binomiais em uma estrutura triangular, conhecida como **Triângulo de Pascal**.

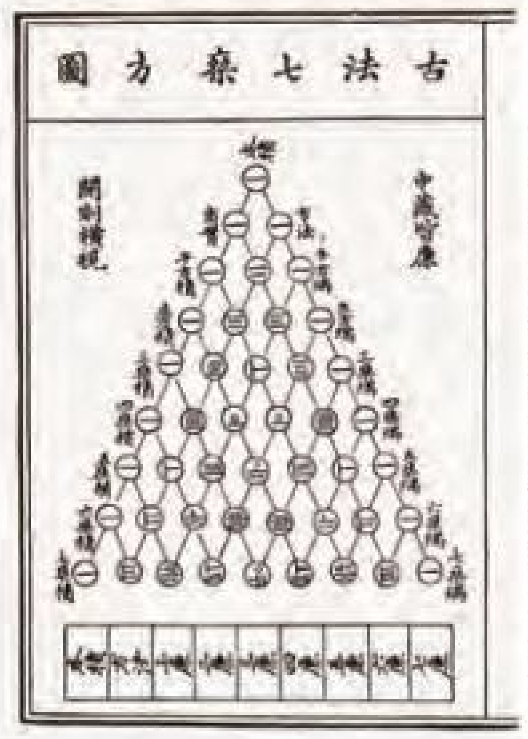
$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Observando parte desse triângulo, notamos que os números binomiais que possuem mesmo:

- numerador são dispostos na mesma linha.
- denominador são dispostos na mesma coluna.

Capítulo 4

O Triângulo de Pascal também pode ser representado pelos valores dos números binomiais. Substituindo os números binomiais por seus valores, temos:



Autor desconhecido. Séc. XIV. Coleção particular

Representação do Triângulo de Pascal publicada na China, em 1303.

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Agora, destacaremos algumas propriedades do Triângulo de Pascal.

1ª propriedade: Tomando uma linha qualquer do Triângulo de Pascal, verificamos que dois números equidistantes dos extremos são iguais.

$$\underbrace{\binom{5}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}$$

Note que os números binomiais equidistantes são complementares, pois a soma dos denominadores é igual ao numerador.

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ tal que } p + (n-p) = n$$

2ª propriedade: A partir da 3ª linha, e com exceção do primeiro e do último elemento de cada linha, cada elemento do Triângulo de Pascal é igual à soma do elemento imediatamente superior a ele com o elemento anterior a este.

$$\underbrace{\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}}_{2=1+1}$$

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

$$\underbrace{\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}}_{6=3+3}$$

$$\underbrace{\binom{5}{4} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3}}_{5=1+4}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \text{ para } n \geq 2$$

A igualdade correspondente à 2ª propriedade é conhecida como Relação de Stifel. Ela recebeu esse nome em homenagem a Michael Stifel (1486-1567), comumente apresentado como o maior algebrista alemão do século XVI. Stifel foi um dos vários autores responsáveis por difundir os símbolos + e −.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

3ª propriedade: A soma dos elementos de uma linha *n* qualquer do Triângulo de Pascal é igual a 2^n. Observe a soma dos elementos de algumas linhas.

Linha 0 $\rightarrow 1 = 2^0$

Linha 1 $\rightarrow 1+1=2=2^1$

Linha 2 $\rightarrow 1+2+1=4=2^2$

Linha 3 $\rightarrow 1+3+3+1=8=2^3$

Linha 4 $\rightarrow 1+4+6+4+1=16=2^4$

...

$$\text{Linha } n \rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Atividades resolvidas

R14. Um professor elaborou o seguinte quebra-cabeça para seus alunos.

55	165	330	462
66			
78			
91			

Dizendo apenas que o quebra-cabeça é parte de um Triângulo de Pascal, o professor pediu aos alunos que o completassem. Explique um procedimento que os alunos poderiam utilizar e complete o quebra-cabeça.

Resolução

Para completar o quebra-cabeça, os alunos poderiam utilizar a Relação de Stifel.

$$\underbrace{\binom{2}{1}=\binom{1}{1}+\binom{1}{0}}_{2=1+1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Logo, completando o quebra-cabeça, temos:

55	165	330	462
66	$\underbrace{220}_{55+165}$	$\underbrace{495}_{165+330}$	$\underbrace{792}_{330+462}$
78	$\underbrace{286}_{66+220}$	$\underbrace{715}_{220+495}$	$\underbrace{1\,287}_{495+792}$
91	$\underbrace{364}_{78+286}$	$\underbrace{1\,001}_{286+715}$	$\underbrace{2\,002}_{715+1\,287}$

R15. Calcule o valor de $\binom{5}{0}+\binom{7}{1}+\binom{8}{8}$.

Resolução

$$\binom{5}{0}+\binom{7}{1}+\binom{8}{8}=\frac{5!}{0!(5-0)!}+\frac{7!}{1!(7-1)!}+\frac{8!}{8!(8-8)!}=\frac{\cancel{5!}}{1\cdot\cancel{5!}}+\frac{7\cdot\cancel{6!}}{1\cdot\cancel{6!}}+\frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot1}=1+7+1=\boxed{9}$$

Verifique que: $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$ e $\binom{n}{n}=1$.

R16. Em uma lanchonete, o cliente pode escolher até oito opções de frutas para compor sua vitamina. Quantas opções possíveis de vitamina estão disponíveis para o cliente?

Resolução

A ordem em que as frutas são escolhidas não é importante, ou seja, das oito opções de frutas, cada vitamina representa uma combinação, na qual o cliente pode compor sua vitamina com:

- uma fruta $\rightarrow \binom{8}{1}$ possibilidades
- duas frutas $\rightarrow \binom{8}{2}$ possibilidades
- três frutas $\rightarrow \binom{8}{3}$ possibilidades

...

- oito frutas $\rightarrow \binom{8}{8}$ possibilidades

Logo, o total de opções é:

$$\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\ldots+\binom{8}{8}=2^8-\binom{8}{0}=256-1=255$$

Portanto, estão disponíveis 255 opções de vitaminas.

Note que $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{8}=2^8 \Rightarrow \binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{8}=2^8-\binom{8}{0}$.

71. Calcule.

a) $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}$ 112

b) $\binom{10}{4}+\binom{2}{0}+\binom{8}{3}$ 267

c) $\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\binom{15}{3}+\ldots+\binom{15}{14}+\binom{15}{15}$ 32 768

d) $\binom{6}{2}+\binom{12}{7}+\binom{7}{0}$ 808

72. Resolva as equações.

a) $\binom{9}{3}=\binom{x}{6}$ $S=\{9\}$

b) $\binom{24}{x}+\binom{24}{12}=\binom{25}{12}$ $S=\{11,13\}$

c) $\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{3}+\ldots+\binom{x}{x}=2^{(-x+200)}$ $S=\{100\}$

d) $\binom{10}{x}^{x}=\binom{20}{14}-\binom{20}{6}+1$ $S=\{0,10\}$

73. Quantos elementos tem a 8ª linha do Triângulo de Pascal? Qual é a soma desses elementos? 8 elementos; 256

74. A expressão $\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+\binom{6}{3}+\binom{6}{2}$ corresponde a: d

a) $\binom{7}{6}$ b) $\binom{8}{5}$ c) $\binom{6}{5}$ d) $\binom{8}{4}$

Nesta atividade, utilize a Relação de Stifel.

75. Resolva a inequação.

$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{3}+\ldots+\binom{x}{x-1}+\binom{x}{x}<500$ $S=\{x\in\mathbb{N}|x<9\}$

76. De um grupo de 10 pessoas, deseja-se formar uma comissão com no mínimo 1 e no máximo 10 integrantes. Quantas comissões podem ser formadas? 1 023 comissões

77. Qual o valor de n na expressão

$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=4\,095$? 12

Fórmula do Binômio de Newton

Anteriormente, vimos que toda potência da forma $(x+y)^n$, com $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$, é chamada de Binômio de Newton. Observe a seguir o desenvolvimento de alguns Binômios de Newton e como podemos associar os coeficientes de cada termo desses desenvolvimentos com uma das linhas do Triângulo de Pascal.

$(x+y)^0=1$	1	$\binom{0}{0}$
$(x+y)^1=x+y$	1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$	1 2 1 $\rightarrow$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

Substituindo esses coeficientes pelos números binomiais correspondentes, temos:

$$(x+y)^0=\binom{0}{0}x^0y^0$$

$$(x+y)^1=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1$$

$$(x+y)^2=\binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4y^0+\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x^1y^3+\binom{4}{4}x^0y^4$$

A **fórmula do Binômio de Newton** é dada por:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+$$
$$+\ldots+\binom{n}{p}x^{n-p}y^p+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n$$

para *n* e *p* naturais e *x* e *y* reais.

A partir dessa fórmula, destacamos:

- Em qualquer dos termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$, a soma dos expoentes de *x* e *y* é igual a *n*.
- O desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui $n+1$ termos.
- Os expoentes de *x* decrescem, de 1 em 1, de *n* até 0.
- Os expoentes de *y* crescem, de 1 em 1, de 0 até *n*.
- Os elementos da linha *n* do Triângulo de Pascal correspondem aos coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Atividades resolvidas

R17. Efetue o desenvolvimento de:

a) $(-x+5)^4$ b) $(x-2)^5$

Note que o binômio $(x-y)^n$ pode ser interpretado por $\left(x+(-y)\right)^n$.

Resolução

a) $$(-x+5)^4=\underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(-x)^4\cdot5^0+\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(-x)^3\cdot5^1+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(-x)^2\cdot5^2+\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(-x)^1\cdot5^3+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(-x)^0\cdot5^4=$$
$$=x^4+4\cdot(-x^3)\cdot5+6x^2\cdot25+4\cdot(-x)\cdot125+625=\boxed{x^4-20x^3+150x^2-500x+625}$$

b) $$(x-2)^5=\underbrace{\binom{5}{0}}_{1}x^5(-2)^0+\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}x^4(-2)^1+\underbrace{\binom{5}{2}}_{10}x^3(-2)^2+\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}x^2(-2)^3+\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}x^1(-2)^4+\underbrace{\binom{5}{5}}_{1}x^0(-2)^5=$$
$$=x^5+5x^4\cdot(-2)+10x^3\cdot4+10x^2\cdot(-8)+5x\cdot16+(-32)=\boxed{x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32}$$

R18. Sabendo que $(x+\alpha)^3=x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3$, desenvolva o trinômio $(x+y+z)^3$.

Resolução

Considerando $\alpha=y+z$, temos:

- $\alpha^2=(y+z)^2=y^2+2yz+z^2$
- $\alpha^3=(y+z)^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$

Desenvolvendo o trinômio, temos:

$$(x+y+z)^3=(x+\alpha)^3=x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3=$$
$$=x^3+3x^2y+3x^2z+3x(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=$$
$$=\boxed{x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3}$$

R19. Qual é a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(5x^2-2y)^3$?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(5x^2-2y)^3=(5x^2)^3\cdot(-2y)^0+3\cdot(5x^2)^2\cdot(-2y)+3\cdot5x^2\cdot(-2y)^2+(5x^2)^0\cdot(-2y)^3$$

Para determinar a soma dos coeficientes dos termos, basta considerarmos $x=y=1$. Assim, substituindo $x=y=1$ em $(5x^2-2y)^3$, segue que:

$$(5\cdot1^2-2\cdot1)^3=(5-2)^3=3^3=27$$

Portanto, a soma dos coeficientes dos termos é 27.

Termo geral do Binômio de Newton

Indicando cada termo do desenvolvimento de $(x+y)^n$ por T, temos:

$$(x+y)^n=\underbrace{\binom{n}{0}x^ny^0}_{T_{0+1}}+\underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y^1}_{T_{1+1}}+\underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{T_{2+1}}+\underbrace{\binom{n}{3}x^{n-3}y^3}_{T_{3+1}}+\ldots+\underbrace{\binom{n}{p}x^{n-p}y^p}_{T_{p+1}}+\ldots+\underbrace{\binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1}}_{T_{n-1+1}}+\underbrace{\binom{n}{n}x^0y^n}_{T_{n+1}}$$

Observe que, para cada valor de p, com $0\leq p\leq n$, o termo $\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$ ocupa a posição $(p+1)$, ou seja, $T_{p+1}=\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$.

O **termo geral** do Binômio de Newton é dado por:

$$T_{p+1}=\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$$

para n e p naturais, com $0\leq p\leq n$ e x e y reais.

Atividades resolvidas

R20. No desenvolvimento de $(3x+y)^6$, com expoentes decrescentes de x, determine:

a) o 3º termo

b) o termo médio (ou central)

c) o termo independente de x

d) o termo em x^6

Uma vez que $(x+y)^n$ pode ser interpretado como $(y+x)^n$, no desenvolvimento do Binômio de Newton sempre que necessário será informado qual termo deve ter expoentes decrescentes (ou crescentes).

Resolução

a) Para o 3º termo, temos que $p+1=3\Rightarrow p=2$. Logo:

$$T_{2+1}=\underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(3x)^{6-2}y^2=15\cdot(3x)^4y^2=15\cdot 81x^4y^2=\boxed{1\,215x^4y^2}$$

b) Como o binômio tem 7 termos, o 4º termo é o termo central. Temos que $p+1=4\Rightarrow p=3$. Logo:

$$T_{3+1}=\underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(3x)^{6-3}y^3=20\cdot(3x)^3y^3=20\cdot 27x^3y^3=\boxed{540x^3y^3}$$

No desenvolvimento de $(x+y)^n$, com n ímpar, a quantidade de elementos é par. Nesse caso, o binômio possui dois termos centrais.

c) O termo independente de x é aquele em que x^0, ou seja:

$$x^{6-p}=x^0\Rightarrow 6-p=0\Rightarrow p=6$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{6+1}=\underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(3x)^{6-6}y^6=(3x)^0y^6=\boxed{y^6}$$

d) O termo em x^6 ocorre quando $x^{n-p}=x^6$, ou seja:

$$x^{n-p}=x^6\Rightarrow x^{6-p}=x^6\Rightarrow 6-p=6\Rightarrow p=0$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{0+1}=\underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(3x)^{6-0}y^0=(3x)^6=\boxed{729x^6}$$

Desenvolvendo o binômio $(3x+y)^6$, temos:

$(3x+y)^6=729x^6+1\,458x^5y+1\,215x^4y^2+540x^3y^3+135x^2y^4+18xy^5+y^6$

R21. Determine o valor de *k*, sabendo que 7 é o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x+k)^8$.

Resolução

O termo em x^5 ocorre quando $x^{n-p}=x^5$, ou seja:

$$x^{n-p}=x^5 \Rightarrow x^{8-p}=x^5 \Rightarrow 8-p=5 \Rightarrow p=3$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{3+1}=\underbrace{\binom{8}{3}}_{56}x^{8-3}k^3=56x^5k^3$$

Como o coeficiente de x^5 é 7, então o termo em x^5 é $7x^5$.

$$7x^5=56x^5k^3 \Rightarrow k^3=\frac{7\cancel{x^5}}{56\cancel{x^5}} \Rightarrow k=\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

78. Desenvolva os binômios. Respostas no final do livro.

a) $(x+y)^5$

b) $(2a-b)^4$

c) $\left(2x-\frac{y}{4}\right)^6$

d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4$

e) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4$

f) $\left(xy+\frac{z}{3}\right)^6$

79. Determine a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento dos binômios:

a) $(7a-6b)^{14}$ 1

b) $(3x-4y)^7$ −1

c) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$ 0

d) $(-7x+9y)^8$ 256

80. Calcule:

a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^5$ $220\sqrt{5}-284\sqrt{3}$

b) $(\sqrt{7}+3\sqrt{5})^4$ $3\,964+624\sqrt{35}$

c) $(1-\sqrt{2})^{10}$ $3\,363-2\,378\sqrt{2}$

d) $\left(3+2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$ $2\,403+981\sqrt{6}$

81. Sabendo que a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{2}{a^5}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^n$ é 6 561, determine o valor de *n*. 8

82. Determine a fórmula do termo geral dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(9-a)^7$

b) $\left(3+\frac{x}{3}\right)^5$

c) $\left(5ab-\frac{c}{7}\right)^9$

d) $\left(\frac{7}{x}+\frac{8y}{3}\right)^6$

83. Qual é o 8º termo do desenvolvimento do binômio $\left(-2x+\frac{1}{3}\right)^{10}$, com expoentes decrescentes de *x*?

84. Determine o 17º termo do desenvolvimento do binômio $(2x-y)^{20}$, com expoentes decrescentes de *x*. $77\,520x^4y^{16}$

85. Determine o termo central no desenvolvimento dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(y^2+3)^6$, com expoentes decrescentes de *y*.

b) $\left(a^2-\frac{b}{a}\right)^8$, com expoentes decrescentes de *a*.

c) $\left(\frac{2}{xy}+\frac{z^3}{5}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de $\frac{1}{xy}$.

86. Calcule, caso exista, o termo independente de *x* no desenvolvimento de:

a) $(x^2+3)^6$ 729

b) $\left(\frac{3}{x}+4\right)^5$ 1 024

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x^3\right)^8$ não possui termo independente de *x*

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)^8$ 5 670

87. No desenvolvimento do binômio $\left(x-\frac{2}{y}\right)^{20}$, com expoentes decrescentes de *x*, qual é o termo em x^{18}? $\frac{760x^{18}}{y^2}$

88. Em relação ao desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{y}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de *x*, determine:

a) o 10º termo.

b) o termo central.

c) o termo em x^8

88. a) $\frac{55x^3}{2y^9}$ b) $\frac{231x^6}{16y^6}$ c) $\frac{495x^8}{256y^4}$

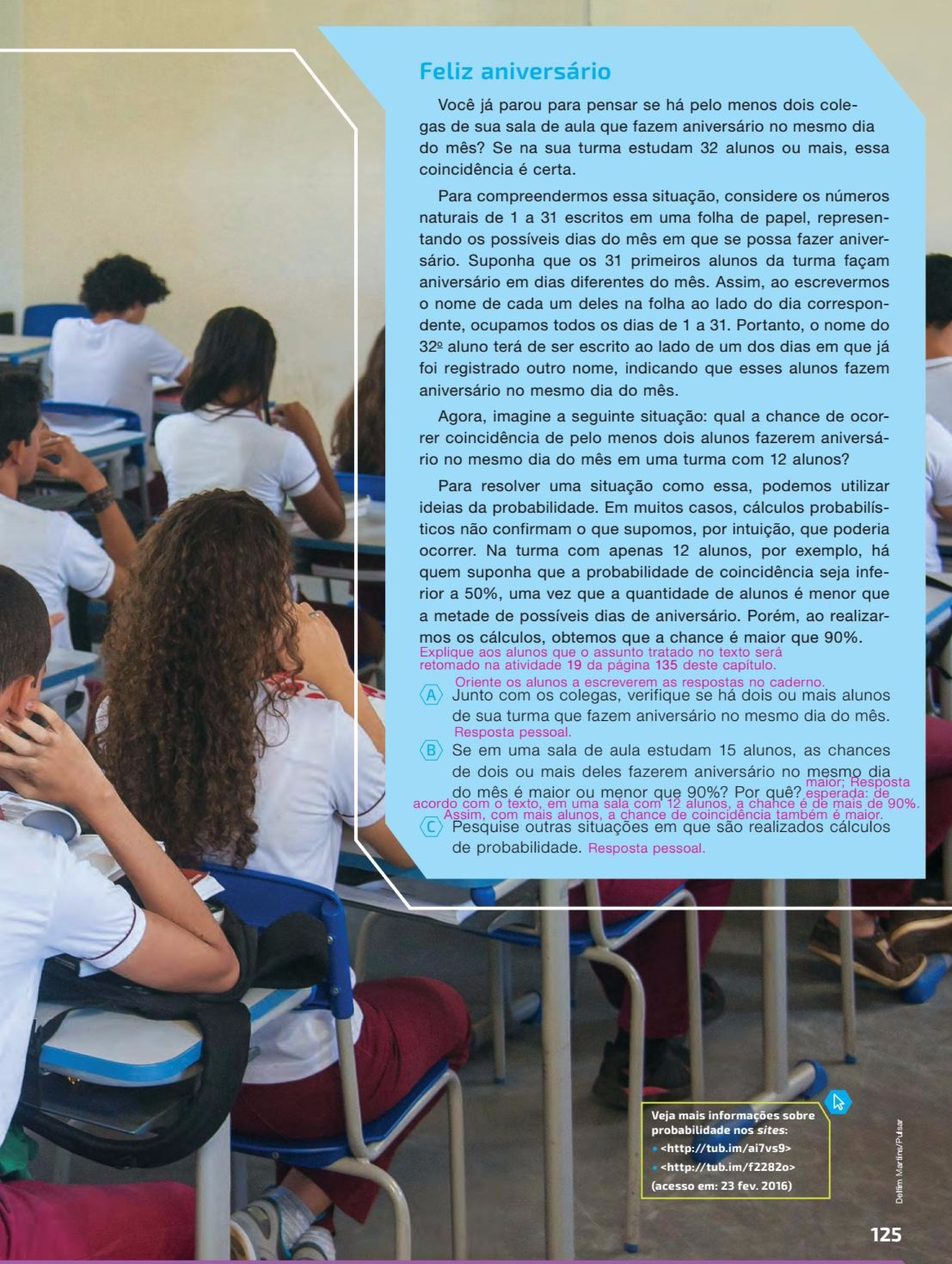
83. $-\frac{320x^3}{729}$

Capítulo 4

capítulo 5

Probabilidade

Sala de aula com alunos da rede estadual de ensino, em Teresina (PI), em 2015.



Delfim Martins/Pulsar

Feliz aniversário

Você já parou para pensar se há pelo menos dois colegas de sua sala de aula que fazem aniversário no mesmo dia do mês? Se na sua turma estudam 32 alunos ou mais, essa coincidência é certa.

Para compreendermos essa situação, considere os números naturais de 1 a 31 escritos em uma folha de papel, representando os possíveis dias do mês em que se possa fazer aniversário. Suponha que os 31 primeiros alunos da turma façam aniversário em dias diferentes do mês. Assim, ao escrevermos o nome de cada um deles na folha ao lado do dia correspondente, ocupamos todos os dias de 1 a 31. Portanto, o nome do 32º aluno terá de ser escrito ao lado de um dos dias em que já foi registrado outro nome, indicando que esses alunos fazem aniversário no mesmo dia do mês.

Agora, imagine a seguinte situação: qual a chance de ocorrer coincidência de pelo menos dois alunos fazerem aniversário no mesmo dia do mês em uma turma com 12 alunos?

Para resolver uma situação como essa, podemos utilizar ideias da probabilidade. Em muitos casos, cálculos probabilísticos não confirmam o que supomos, por intuição, que poderia ocorrer. Na turma com apenas 12 alunos, por exemplo, há quem suponha que a probabilidade de coincidência seja inferior a 50%, uma vez que a quantidade de alunos é menor que a metade de possíveis dias de aniversário. Porém, ao realizarmos os cálculos, obtemos que a chance é maior que 90%.

Explique aos alunos que o assunto tratado no texto será retomado na atividade **19** da página **135** deste capítulo.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Junto com os colegas, verifique se há dois ou mais alunos de sua turma que fazem aniversário no mesmo dia do mês. Resposta pessoal.

B Se em uma sala de aula estudam 15 alunos, as chances de dois ou mais deles fazerem aniversário no mesmo dia do mês é maior ou menor que 90%? Por quê? maior; Resposta esperada: de acordo com o texto, em uma sala com 12 alunos, a chance é de mais de 90%. Assim, com mais alunos, a chance de coincidência também é maior.

C Pesquise outras situações em que são realizados cálculos de probabilidade. Resposta pessoal.

Veja mais informações sobre probabilidade nos *sites*:

- <http://tub.im/ai7vs9>
- <http://tub.im/f2282o>

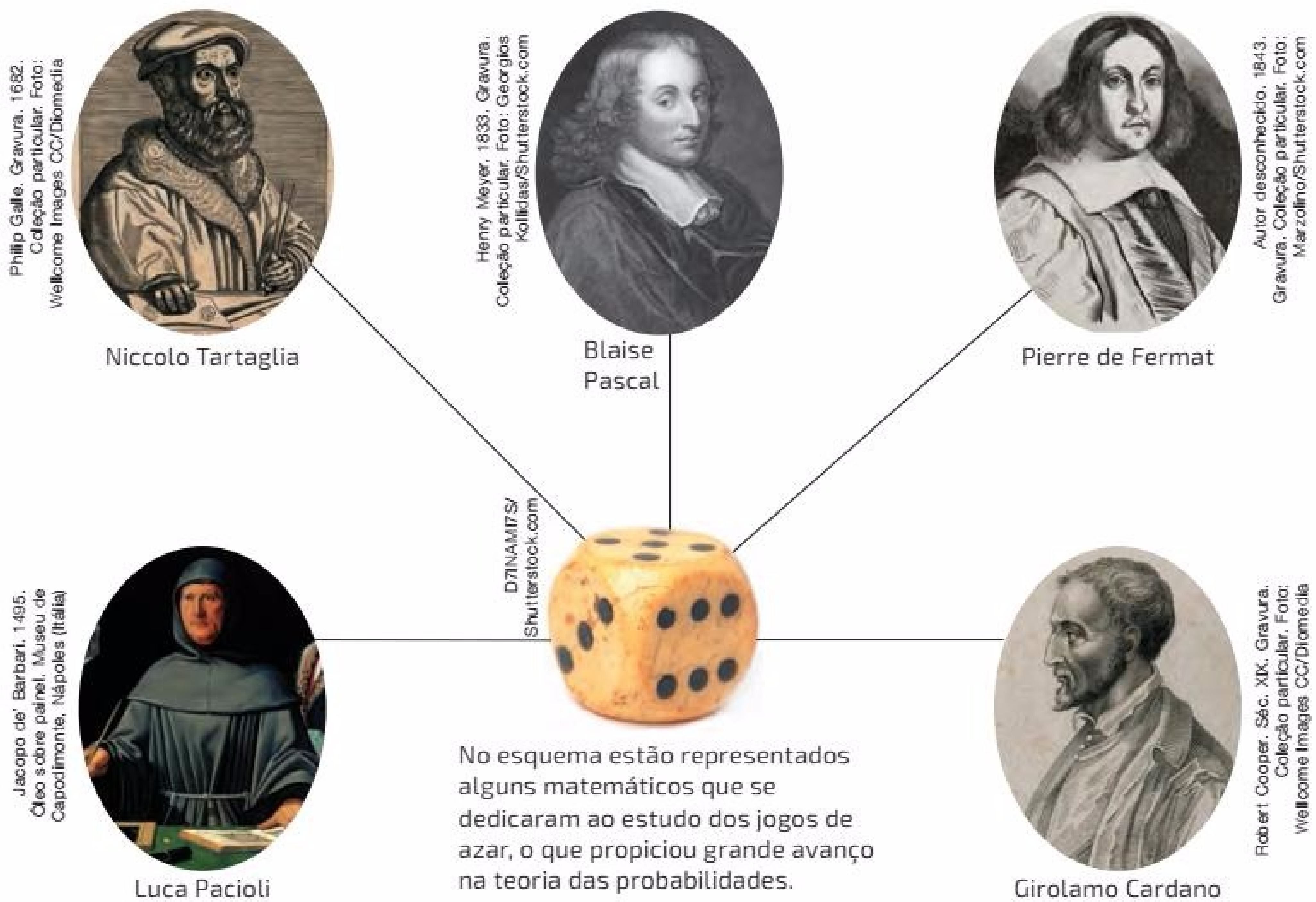
(acesso em: 23 fev. 2016)

Estudando probabilidade

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página 272 da seção Acessando tecnologias.

Embora as probabilidades já exercessem fascínio há muitos séculos, elas não tiveram um tratamento matemático aprofundado até o século XV e início do século XVI. A primeira obra conhecida que aborda esse assunto é a **De Ludo Aleae (Sobre os jogos de azar)**, de Girolamo Cardano (1501-1576), publicada em 1663. De acordo com o que comumente se diz, a teoria das probabilidades originou-se de um problema relacionado a um jogo de azar chamado "problema dos pontos". Ele foi discutido por vários matemáticos famosos, tais como Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557), Luca Pacioli (c. 1445-1509), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665) e Cardano.

Jogo de azar: aquele em que o ganho ou a perda dependem exclusivamente da sorte, ou pelo menos dependem dela mais do que dos cálculos ou da habilidade do jogador.



No esquema estão representados alguns matemáticos que se dedicaram ao estudo dos jogos de azar, o que propiciou grande avanço na teoria das probabilidades.

Em nosso cotidiano, é frequente ouvirmos frases como "a probabilidade de chover amanhã é maior que 25%", "a probabilidade de que ocorram acidentes nas rodovias seria menor se as leis de trânsito fossem respeitadas" ou "a probabilidade de que haja reduções de preço é remota". Além dessas, existem muitas outras situações em que são utilizados cálculos para determinar as chances de que certo acontecimento ocorra.

Um meteorologista, por exemplo, a partir de algumas informações, pode calcular a probabilidade de que ocorram chuvas em determinada região nas próximas horas. Outra situação é a determinação do valor do seguro de um bem, que é calculado levando em consideração a sua probabilidade de perda ou avaria.

A partir dos conteúdos que estudaremos neste capítulo, você poderá responder a questões como:

- Qual é a probabilidade de que, no lançamento de um dado, sejam obtidos dois pontos?
- Qual é a probabilidade de que, em uma ninhada de cinco cães, somente dois sejam fêmeas?
- Das 500 peças produzidas diariamente por uma máquina, 3% apresentam defeito. Escolhendo cinco dessas peças, qual é a probabilidade de que nenhuma apresente defeito?

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

No lançamento de uma moeda, por exemplo, não é possível prever o resultado, ou seja, se a face voltada para cima será cara ou coroa. Situações como essa, em que não é possível prever o resultado, são chamadas de **experimento aleatório**. Nesse caso, mesmo repetindo várias vezes o lançamento dessa moeda, sob as mesmas condições, não poderemos prever o resultado do próximo lançamento.

> Chamamos de **experimento aleatório** todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.

Nos estudos de probabilidade consideramos moedas, dados, roletas etc. honestos (não viciados), ou seja, sem qualquer tipo de modificação que possa influenciar os resultados obtidos.

Alguns exemplos de experimentos aleatórios são:

- lançamento de um dado não viciado
- resultado de uma loteria
- sorteio de uma ficha de uma urna

No caso do lançamento de um dado comum, temos seis possíveis resultados, que correspondem às faces dos dados.

A esse conjunto de resultados damos o nome de **espaço amostral**.

> Chamamos de **espaço amostral**, e geralmente indicamos por Ω (lê-se: ômega), o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos

- O espaço amostral do lançamento de uma moeda é dado pelo conjunto:

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$$

- O espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana é dado pelo conjunto:

$$\Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

Em relação ao espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana, destacamos os seguintes **eventos**:

- *A*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja **s**.

$$A = \{\text{segunda-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

- *B*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja diferente de **t**.

$$B = \{\text{domingo, segunda-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

- *C*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja **d**.

$$C = \{\text{domingo}\}$$

  O evento *C* é representado por um conjunto unitário. Nesse caso, dizemos que esse evento é **simples** ou **unitário**.

- *D*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma consoante.

$$D = \Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

  O evento *D* é representado pelo próprio espaço amostral, ou seja, $D = \Omega$. Nesse caso, dizemos que esse evento é **certo**.

É muito provável que o evento *B* ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele irá ocorrer sempre. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência alta.

É pouco provável que o evento *C* ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele não irá ocorrer. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência baixa.

- *E*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma vogal.

$$E = \varnothing$$

O evento *E* é representado por um conjunto vazio. Nesse caso, dizemos que esse evento é **impossível**.

Chamamos de **evento** ou **acontecimento**, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, cada subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Cada um dos elementos do espaço amostral é denominado **evento elementar**.

Atividades resolvidas

R1. Antônio (A), Bento (B) e Carlos (C) estão em um baile. Na mesa ao lado, Lurdes (L), Maria (M), Neuza (N) e Olinda (O) aguardam um convite para dançar. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar um par de homem e mulher para a próxima dança.

Resolução

Para representar todas as opções de pares de homem e mulher para a próxima dança, podemos utilizar o quadro abaixo.

	Lurdes (L)	Maria (M)	Neuza (N)	Olinda (O)
Antônio (A)	(A, L)	(A, M)	(A, N)	(A, O)
Bento (B)	(B, L)	(B, M)	(B, N)	(B, O)
Carlos (C)	(C, L)	(C, M)	(C, N)	(C, O)

Portanto, o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{(A, L), (A, M), (A, N), (A, O), (B, L), (B, M), (B, N), (B, O), (C, L), (C, M), (C, N), (C, O)\}$$

R2. Uma concessionária oferece um modelo de automóvel no valor de R$ 38 000,00, na cor sólida (branco ou preto) e com 2 portas. Como opcionais, o cliente pode escolher:

- cor metálica (prata) por R$ 2 000,00
- 4 portas por R$ 4 000,00

Um automóvel prata com 4 portas, por exemplo, irá custar R$ $\underbrace{44\,000{,}00}_{38\,000+2\,000+4\,000}$.

Determine o espaço amostral com todas as possibilidades de escolha do cliente em relação ao preço.

Resolução

Para representar todas as opções de escolha do cliente, podemos utilizar o seguinte diagrama:

branco
- 2 portas $\rightarrow$ branco, 2 portas $\rightarrow$ R$ 38 000,00
- 4 portas $\rightarrow$ branco, 4 portas $\rightarrow$ R$ 42 000,00

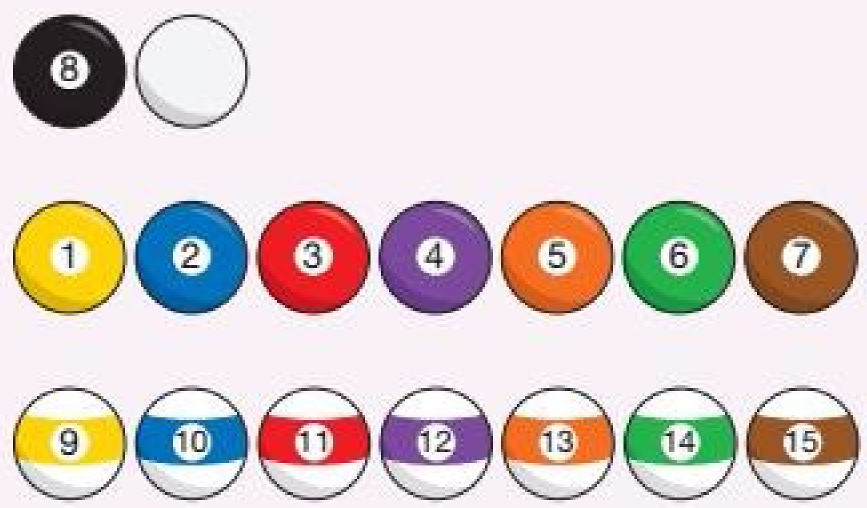
preto
- 2 portas $\rightarrow$ preto, 2 portas $\rightarrow$ R$ 38 000,00
- 4 portas $\rightarrow$ preto, 4 portas $\rightarrow$ R$ 42 000,00

prata
- 2 portas $\rightarrow$ prata, 2 portas $\rightarrow$ R$ 40 000,00
- 4 portas $\rightarrow$ prata, 4 portas $\rightarrow$ R$ 44 000,00

Assim, em relação ao preço, temos 4 possibilidades:

$$\Omega = \{R\$\ 38\,000{,}00;\ R\$\ 40\,000{,}00;\ R\$\ 42\,000{,}00;\ R\$\ 44\,000{,}00\}$$

R3. Em certo jogo de sinuca são utilizadas 16 bolas: uma branca; uma preta com o número 8; as numeradas de 1 a 7 com cores lisas; e as numeradas de 9 a 15 listradas.



Guilherme Casagrandi

Considerando uma tacada aleatória com todas as bolas na mesa, em que a bola branca acerte somente uma delas, resolva os itens a seguir.

a) Escreva o espaço amostral Ω que representa as possíveis bolas que a branca pode acertar.

b) Determine os seguintes eventos para a tacada:

- *A*: acertar a bola 11
- *B*: acertar uma bola de cor lisa
- *C*: acertar uma bola listrada
- *D*: acertar uma bola de número ímpar e cor lisa

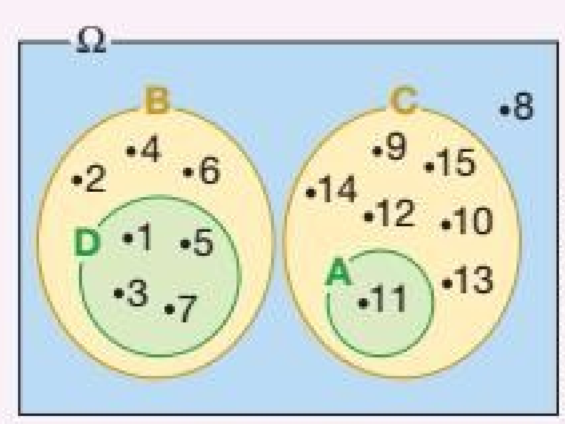
c) Represente por um diagrama de Venn os conjuntos Ω, *A*, *B*, *C* e *D*.

Resolução

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

b)
- $A = \{11\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $C = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- $D = \{1, 3, 5, 7\}$

c)



Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. O time de futebol de certa escola disputará um campeonato escolar. Para isso, foram convocados, dentre outros, 4 alunos que jogam na posição de atacante (alunos *A*, *B*, *C* e *D*). Determine o espaço amostral das duplas de ataque que podem ser formadas com esses alunos.
$\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2. No bolso da calça de um menino estão quatro bolinhas de gude que diferenciam-se apenas pela cor, sendo que duas delas são verdes (V) e duas são azuis (A). Considerando que ele irá retirar aleatoriamente do bolso 3 bolinhas sucessivamente, determine:

a) o espaço amostral Ω, considerando a ordem em que elas serão retiradas Resposta no final do livro.

b) o evento *E* em que todas as bolinhas de gude retiradas são da mesma cor $E = \varnothing$

3. Jéssica deseja preparar um lanche com pão de forma e mais três ingredientes, que ela irá escolher entre alface, tomate, queijo e carne. O valor calórico das porções de cada ingrediente que ela pode utilizar está indicado no quadro a seguir.

Ingrediente	Pão de forma (P)	Alface (A)	Tomate (T)	Queijo (Q)	Carne (C)
Valor calórico (em kcal)	130	10	18	55	110

Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha de Jéssica em relação:

a) aos ingredientes

b) ao valor calórico $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$

Uma das possibilidades em relação aos ingredientes é (P, A, T, Q).

3. a) $\Omega = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$

Capítulo 5

4. Em geral, os baralhos atuais possuem 52 cartas, divididas igualmente em 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus. Esses naipes se originaram da fusão entre os baralhos espanhóis e franceses, sendo que os nomes vieram dos espanhóis, e os símbolos que os representam, dos franceses.

Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória de duas cartas de um baralho completo.
Respostas no final do livro.

As quatro damas de um baralho. Da esquerda para a direita: copas, paus, ouros e espadas.

a) *A*: as duas cartas serem do mesmo naipe

b) *B*: pelo menos uma carta ser de ouros

c) *C*: nenhuma carta ter naipe de copas

5. Se fosse mantido o rápido crescimento populacional do Brasil, que aumentou cerca de 10 vezes no século XX, no futuro faltariam alimentos, moradia e infraestrutura. A partir de 1970 as mulheres passaram a ter um número menor de filhos, acarretando a queda da taxa de fecundidade, que é um dos fatores que mais influenciam a taxa de crescimento populacional.

Número médio de filhos por mulher

Fonte: <http://7a12.ibge.gov.br/vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/nupcialidade-e-fecundidade.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Fonte: <http://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-fecundidade-total.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

$^*A = \{(M, M, M), (F, F, F)\}$ $^{**}B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}$

Aproxime ao inteiro mais próximo a quantidade média de filhos que uma mulher tinha em 1991 e, a partir do resultado obtido, resolva as questões.
Em 1991, as mulheres tinham, em média, 3 filhos.

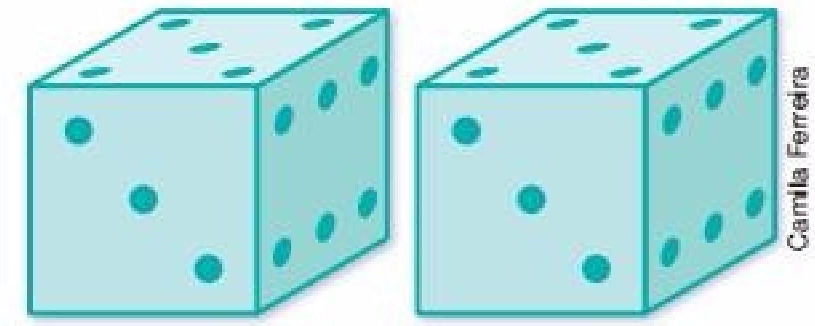
a) Construa um diagrama para representar todas as possibilidades de filhos por mulher, em relação ao sexo masculino (M) e feminino (F).
Resposta no final do livro.

b) Escreva os conjuntos que representam os eventos.

- *A*: todos os filhos terem o mesmo sexo *
- *B*: exatamente 2 filhos do sexo masculino **
- *C*: pelo menos um filho do sexo feminino

$C = \{(M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$

6. Considere o lançamento de dois dados comuns, não viciados. Respostas no final do livro.



a) Represente em um quadro o espaço amostral (Ω) dos possíveis resultados obtidos.

b) Determine a ocorrência dos seguintes eventos:

- *A*: duas faces ímpares voltadas para cima
- *B*: faces iguais voltadas para cima
- *C*: soma das faces voltadas para baixo ser igual a 7
- *D*: soma das faces voltadas para cima ser maior que 12
- *E*: produto das faces voltadas para cima ser maior que 16

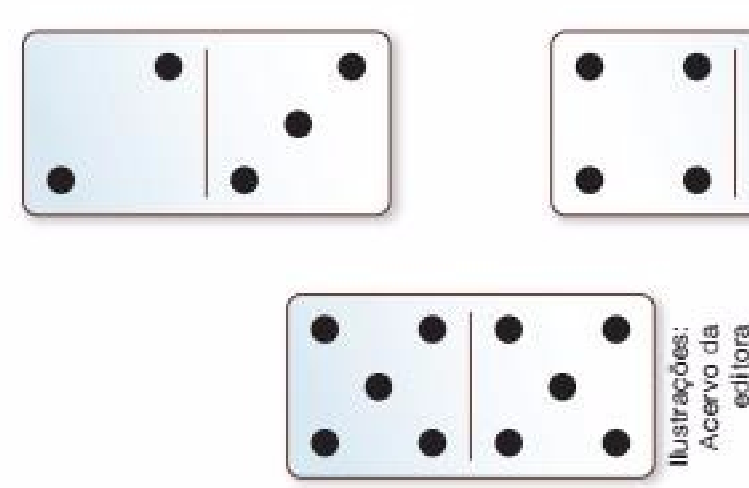
7. Em certa loja, estão à venda camisas polo, camisas de manga curta e de manga longa, cujos preços são R$ 60,00, R$ 70,00 e R$ 90,00, respectivamente.

a) De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode comprar duas camisas nessa loja?
6 maneiras

b) Qual é o espaço amostral em relação ao valor pago na compra de duas camisas?
Resposta no final do livro.

8. O dominó é um jogo de 28 peças retangulares, divididas ao meio, combinando os pontos de 0 a 6.

As peças abaixo podem ser representadas, respectivamente, pelos pares $(2, 3)$, $(4, 6)$ e $(5, 5)$.



Considerando que uma peça seja retirada aleatoriamente de um jogo de dominó e colocada com a face voltada para cima, determine os eventos a seguir. Respostas no final do livro.

a) *A*: peça com a mesma quantidade de pontos em ambos os lados

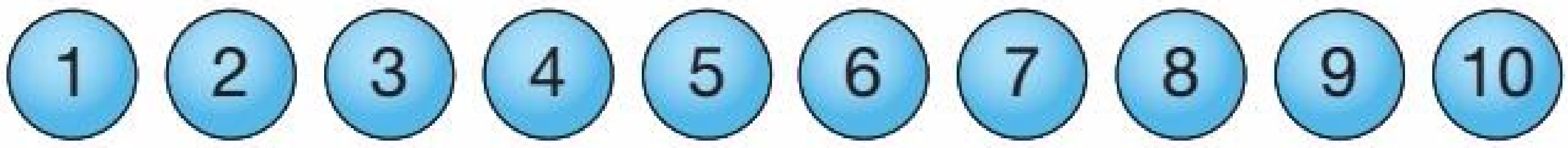
b) *B*: peça cuja soma dos pontos seja 6

c) *C*: peça em que a diferença dos pontos seja maior que 6

d) *D*: peça em que o produto dos pontos seja não negativo

Calculando probabilidades

Considerando o sorteio de um número natural de 1 a 10, qual é a probabilidade de esse número ser o 7?



Sergio Lima

Nesse caso, temos um experimento aleatório cujo espaço amostral é $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e o evento simples "o número sorteado ser 7", dado por $A=\{7\}$.

Todos os elementos desse espaço amostral têm a mesma chance de serem sorteados, ou seja, Ω é um **espaço amostral equiprovável**.

Como o 7 aparece uma única vez no espaço amostral, e este possui 10 elementos, então há uma chance em dez de o número 7 ser sorteado.

Assim, a probabilidade de o número 7 ser sorteado é:

$$1 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ ou } \frac{10}{100}=10\%$$

E qual é a probabilidade de o número sorteado ser menor do que 5?

Nesse caso, temos o mesmo espaço amostral Ω e o evento "o número sorteado ser menor que 5", dado por $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Assim, há quatro chances em dez de um número menor que 5 ser sorteado, isto é:

$$4 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{4}{10} \text{ ou } \frac{40}{100}=40\%$$

Considere um evento *A* de um espaço amostral Ω finito e equiprovável. A razão entre a quantidade de elementos de *A* (indicada por $n(A)$) e a quantidade de elementos de Ω (indicada por $n(\Omega)$) é a probabilidade $P(A)$ de o evento *A* ocorrer.

$$P(A)=\frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de }\Omega}=\frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } P(A)=\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Considere *A* um evento qualquer de certo espaço amostral Ω. Para os conjuntos $\varnothing$, *A* e Ω, temos:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega)>0$, obtemos:

$$\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Portanto, a probabilidade de um evento ocorrer é um valor de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%.

Para todo evento *A*, temos:
$0 \leq P(A) \leq 1$ ou $0\% \leq P(A) \leq 100\%$

- Se *A* é um evento **impossível**, temos $P(A)=0$:

$$A=\varnothing \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)}=0$$

- Se *A* é um evento **certo**, temos $P(A)=1$:

$$A=\Omega \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}=1$$

Podemos ainda calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.

Para isso, considere como espaço amostral os números naturais de 1 a 10 e o evento A, da ocorrência de um número maior que 7 no sorteio de um desses números.

- $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A=\{8, 9, 10\}$

A probabilidade de o evento A não ocorrer é dada por $P(\overline{A})$.

Seja $\overline{A}$ o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A, ou seja, $\overline{A}=\Omega-A$. Dizemos que $\overline{A}$ é **complementar** de A em relação a Ω.

$$\overline{A}=\Omega-A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Como $\overline{A}=\Omega-A$ e $\overline{A}\cap A=\varnothing$, temos:

$$n(\overline{A})=n(\Omega)-n(A)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega)>0$, obtemos:

$$\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)-n(A)}{n(\Omega)}\Rightarrow\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}-\frac{n(A)}{n(\Omega)}\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)$$

Portanto, a probabilidade de não ocorrer um número maior que 7 é:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{10}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{7}{10}$$

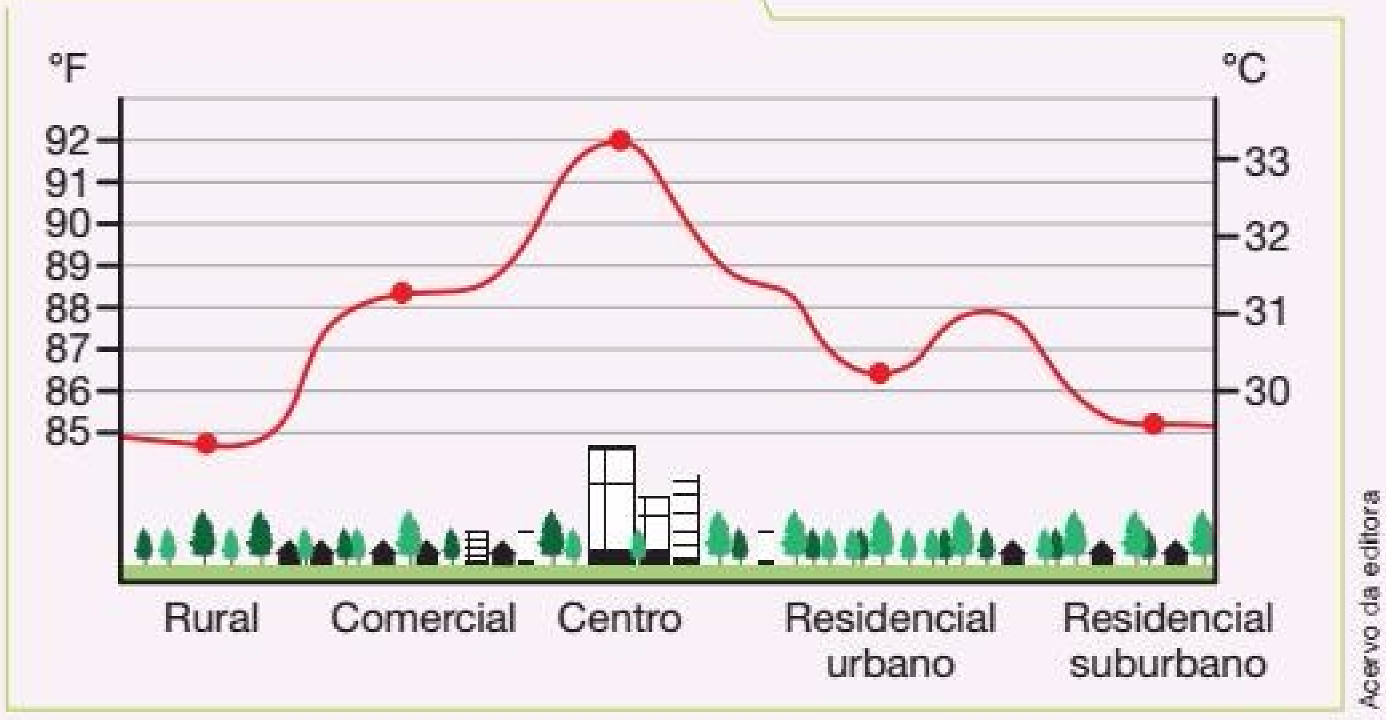
A probabilidade de um evento A não ocorrer (que indicamos por $P(\overline{A})$) é igual a 1 menos a probabilidade de A ocorrer, ou seja:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Atividades resolvidas

R4. (Enem-MEC) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

Perfil da ilha de calor urbana



Fonte: EPA.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

Resolução

Entre as quatro regiões que ele pode escolher, a Rural, a Residencial Urbana e a Residencial Suburbana são adequadas, pois, de acordo com o gráfico, a temperatura da "ilha de calor" dessas regiões é inferior a 31 °C. Logo, a probabilidade do evento A de "escolher uma região adequada às recomendações médicas" é:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}=\frac{3}{4}$$

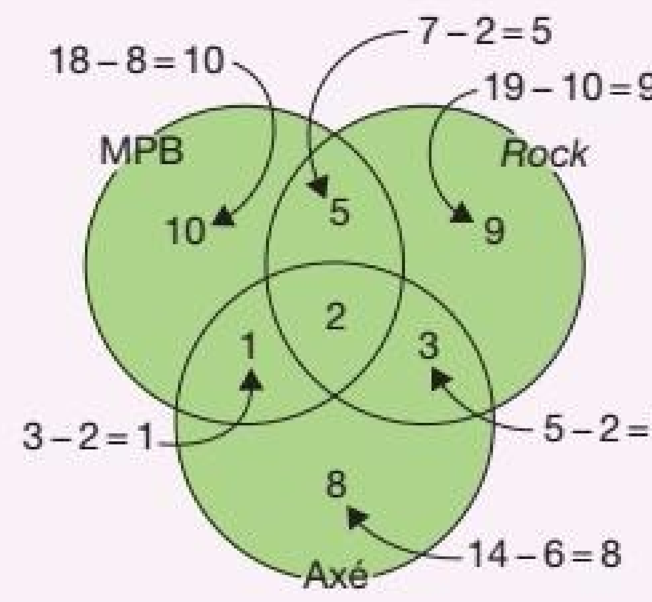
Portanto, a alternativa correta é a **e**.

R5. Marcela investigou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB (Música Popular Brasileira), *Rock* e Axé. Dos 38 entrevistados, 18 gostam de MPB; 19 gostam de *Rock*; 14 gostam de Axé; 7 gostam de MPB e *Rock*; 5 gostam de *Rock* e Axé; 3 gostam de MPB e Axé e 2 gostam dos três gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele goste somente de Axé?

Resolução

Inicialmente, construímos um diagrama de Venn, como indicado ao lado.



Acervo da editora

Seja A o evento "gostar somente de Axé", então $n(A) = 8$.

Assim, a probabilidade de o entrevistado gostar somente de Axé é dada por: Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa, junto com os alunos.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{38} = \boxed{\frac{4}{19}} \text{ ou aproximadamente } \boxed{21{,}05\%}$$

R6. No jogo Campo minado o objetivo é descobrir onde estão as 10 minas escondidas nos 81 quadradinhos, sem clicar nessas minas. Um jogador clicou em dois quadradinhos em que não havia minas: no 1º apareceu o número 3, indicando que há 3 bombas nos 8 quadradinhos que o cercam; no 2º apareceu o 2, indicando que há duas bombas nos 8 quadradinhos que o cercam, conforme a figura.

Campo minado

Acervo da editora

Qual das jogadas abaixo é a mais indicada para o próximo clique? Justifique.

- Jogada **A**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 3
- Jogada **B**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 2
- Jogada **C**: clicar em um dos quadradinhos restantes, não indicados nas jogadas **A** ou **B**

Resolução

Calculamos a probabilidade de clicar em uma mina para cada jogada.

- Jogada **A**

  Há 3 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 3 é:

$$P(A) = \boxed{\frac{3}{8}} \text{ ou } \boxed{37{,}5\%}$$

- Jogada **B**

  Há 2 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 2 é:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ ou } \boxed{25\%}$$

- Jogada **C**

  Restam 5 minas escondidas nos 63 quadradinhos não incluídos nas jogadas **A** ou **B**. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina em um deles é:

$$P(C) = \boxed{\frac{5}{63}} \text{ ou aproximadamente } \boxed{7{,}9\%}$$

Portanto, como $P(C) < P(B) < P(A)$, a jogada mais indicada é a **C**, pois nela há menor probabilidade de se clicar em uma mina.

Note que o evento "clicar em uma mina" é o mesmo para as 3 jogadas, porém o espaço amostral é diferente.

9. Na lista de chamada de uma turma, os 30 alunos são numerados de 1 a 30. Em certo dia, quando faltaram os alunos de números 11 e 26, o professor sorteou, dentre os presentes, um aluno para resolver uma atividade na lousa. Qual é a probabilidade de o número do aluno que irá à lousa ser:

a) par? $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) menor que 9? $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%

c) múltiplo de 4? $\frac{1}{4}$ ou 25%

d) primo? $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%

e) maior que 12 e menor que 25? $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%

10. Ao realizar uma prova objetiva em que cada questão possuía 5 alternativas de respostas, sendo apenas uma correta, um aluno decidiu assinalar aleatoriamente a resposta da última questão por falta de tempo. Qual é a probabilidade de esse aluno acertar a questão? E de errar?

11. Considere todos os números de 3 dígitos distintos formados a partir dos algarismos 6, 7 e 8. Se escolhermos um desses números ao acaso, calcule a probabilidade de ele ser:

a) ímpar $\frac{1}{3}$ ou 33,$\overline{3}$%

b) par $\frac{2}{3}$ ou 66,$\overline{6}$%

c) múltiplo de 3 1 ou 100%

d) maior que 770 $\frac{1}{2}$ ou 50%

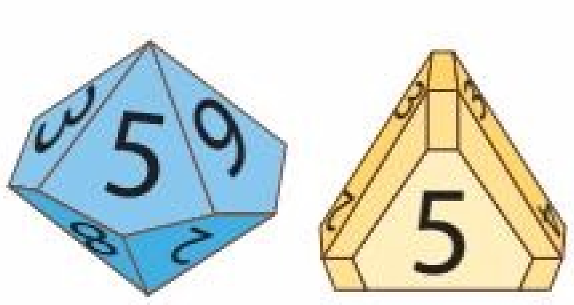
e) múltiplo de 5 0 ou 0%

12. Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? c

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

13. (Ence-RJ) O *Role-playing game* (RPG) é um tipo de jogo no qual os jogadores assumem papéis de personagens e criam narrativas. Como nesses jogos sempre existem eventos aleatórios, é comum o uso de dados para decidir o fracasso ou sucesso das ações de cada jogador. A figura abaixo representa dois dados: um de 10 faces (numeradas de 1 a 10) e outro de 5 faces (numeradas de 1 a 5). Escolhendo-se ao acaso uma face de cada um desses dados, qual é a probabilidade de a soma dos números das faces escolhidas ser um número ímpar? c



Ilustrações: Acervo da editora

Considere que todas as faces de cada um dos dados têm a mesma probabilidade de serem escolhidas.

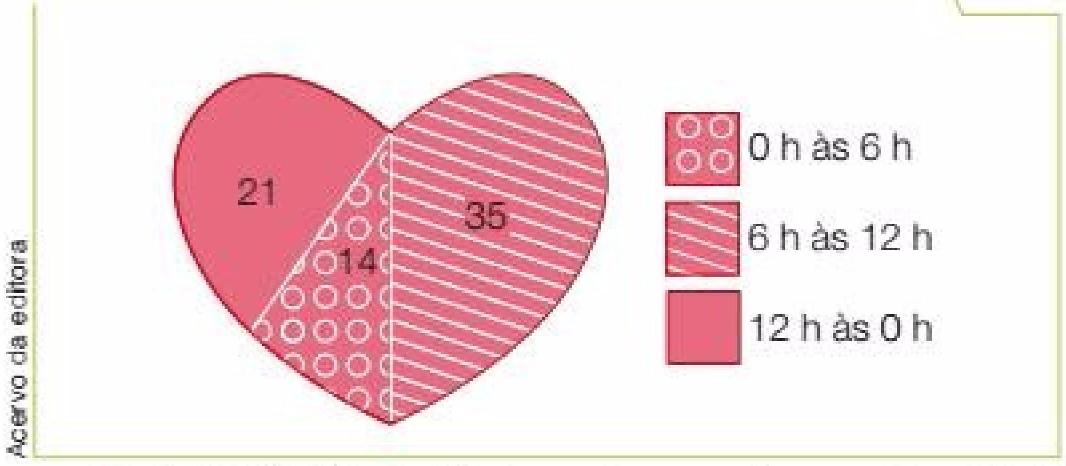
a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

10. $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%

14. Momentos antes de acordar, nosso organismo envia cortisol e adrenalina para circular pelo corpo. Esses hormônios são responsáveis por nos deixar mais dispostos, e no sistema cardiovascular aumentam a pressão arterial e aceleram a frequência cardíaca. Contudo, o cortisol e a adrenalina favorecem a formação de placas de gordura nas artérias, o que pode provocar um enfarte durante a manhã.

Certo grupo de médicos cardiovasculares realizou uma pesquisa com os pacientes que deram entrada no hospital em determinado mês, obtendo como resultado os dados do gráfico a seguir.

Número de pacientes que sofreram enfartes por faixa horária



Fonte: BERNARDO, André. Em que hora acontecem mais enfartes? Superinteressante, São Paulo: Abril, ano 23, n. 3, p. 46, mar. 2009.

a) Em qual faixa horária esse hospital deve colocar a maior quantidade de médicos de plantão? Por quê? Na faixa horária das 6 h às 12 h, pois é nessa faixa horária que ocorre o maior número de enfartes.

b) Considerando que a proporção de pacientes com enfartes se mantenha, qual é a probabilidade de uma pessoa enfartada dar entrada nesse hospital das:

- 0 h às 6 h? $\frac{1}{5}$ ou 20%
- 0 h às 12 h? $\frac{7}{10}$ ou 70%

15. Em um congresso compareceram oftalmologistas (profissionais especializados no tratamento dos olhos), ortopedistas (médicos especialistas no tratamento do sistema locomotor) e odontologistas (especialistas que se dedicam ao tratamento dentário), conforme apresentado a seguir.

	Homem	Mulher	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Odontologistas	13	11	24
Total	42	43	85

Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser:

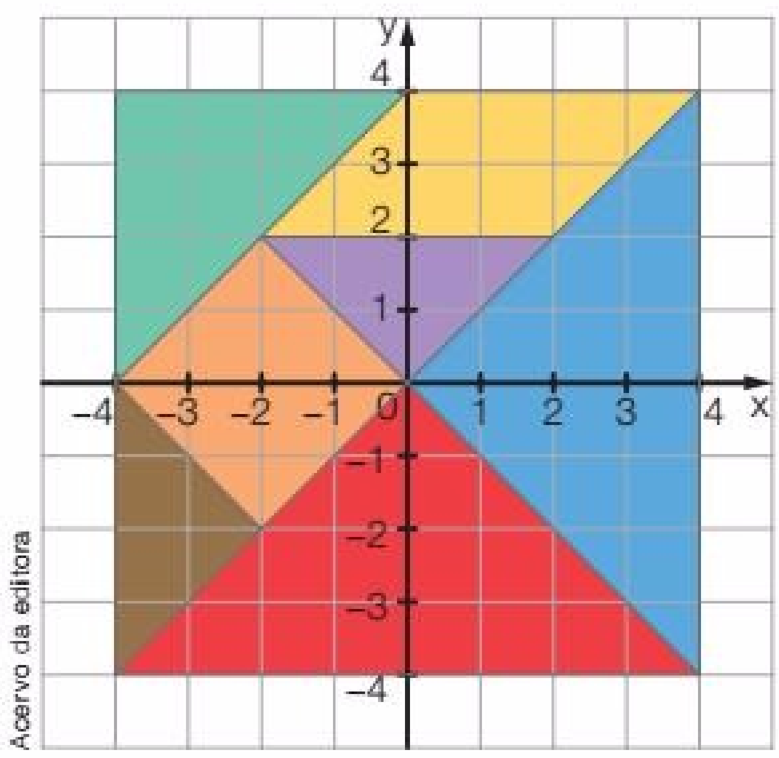
a) um homem $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%

b) um ortopedista $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%

c) uma mulher oftalmologista $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%

16. O Tangram é um jogo chinês de origem milenar, composto por sete formas geométricas que, organizadas, podem formar cerca de 1 700 silhuetas. Os chineses o chamam de "Tábua da sabedoria" ou "Tábua das sete sabedorias".

Considere o seguinte Tangram em um plano cartesiano.



Acervo da editora

Silhueta: desenho que representa um objeto ou uma pessoa de acordo com sua sombra.

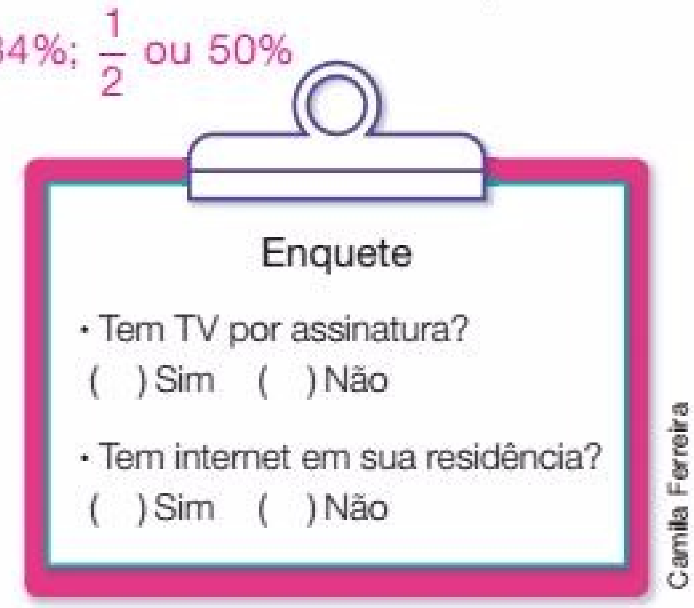
a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao Tangram, esse ponto:

- pertencer à região alaranjada? $\frac{1}{8}$ ou 12,5%
- pertencer à região roxa? $\frac{1}{16}$ ou 6,25%
- não pertencer à região azul? $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) Se marcarmos um ponto pertencente ao Tangram com abscissa −3, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região vermelha? E à região verde? $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao Tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela? $\frac{1}{4}$ ou 25%

17. Em uma enquete realizada com 50 moradores de um bairro, 42 afirmaram que têm internet em casa, 28 que têm TV por assinatura e 5 que não têm internet nem TV por assinatura. Ao sortear aleatoriamente um dos 50 moradores desse bairro, qual é a probabilidade de ele ter somente internet? E de ter internet e TV por assinatura?
$\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%



Camila Ferreira

18. Selecionando aleatoriamente dois números distintos do intervalo $1 \leq n < 10$, com $n \in \mathbb{N}$, qual é a probabilidade de que a soma desses números seja maior que seu produto? $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$

19. Nas páginas 124 e 125, estudamos algumas informações sobre coincidências de dias do mês em que um grupo de pessoas faz aniversário.

Julho 2017

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Guilherme Casagrandi

Para efetuar o cálculo da probabilidade da ocorrência do evento *A* "pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês" em um grupo de 12 pessoas, vamos considerar $\overline{A}$ como "nenhuma pessoa fazer aniversário no mesmo dia do mês que outra".

A probabilidade de ocorrer o evento A é dada por:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Para que ocorra $\overline{A}$, considere que a 1ª pessoa do grupo faça aniversário em qualquer um dos 31 dias do mês, a 2ª pessoa faça aniversário em qualquer um dos outros 30 dias do mês, até que a 12ª pessoa faça aniversário em qualquer um dos outros 20 dias do mês. O cálculo de $P(\overline{A})$ é dado por:

$$P(\overline{A}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 20}{31^{12}}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{31 \cdot (31-1) \cdot (31-2) \cdot \ldots \cdot (31-12+1)}{31^{12}}$$

$$P(\overline{A}) \simeq 0,09$$

Assim, a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês em um grupo de 12 pessoas é:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \simeq 1 - 0,09 = 0,91$$

Logo, a probabilidade é de aproximadamente 91%.

a) Escreva uma fórmula para calcular a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês em um grupo de *n* pessoas, com $n \leq 32$.

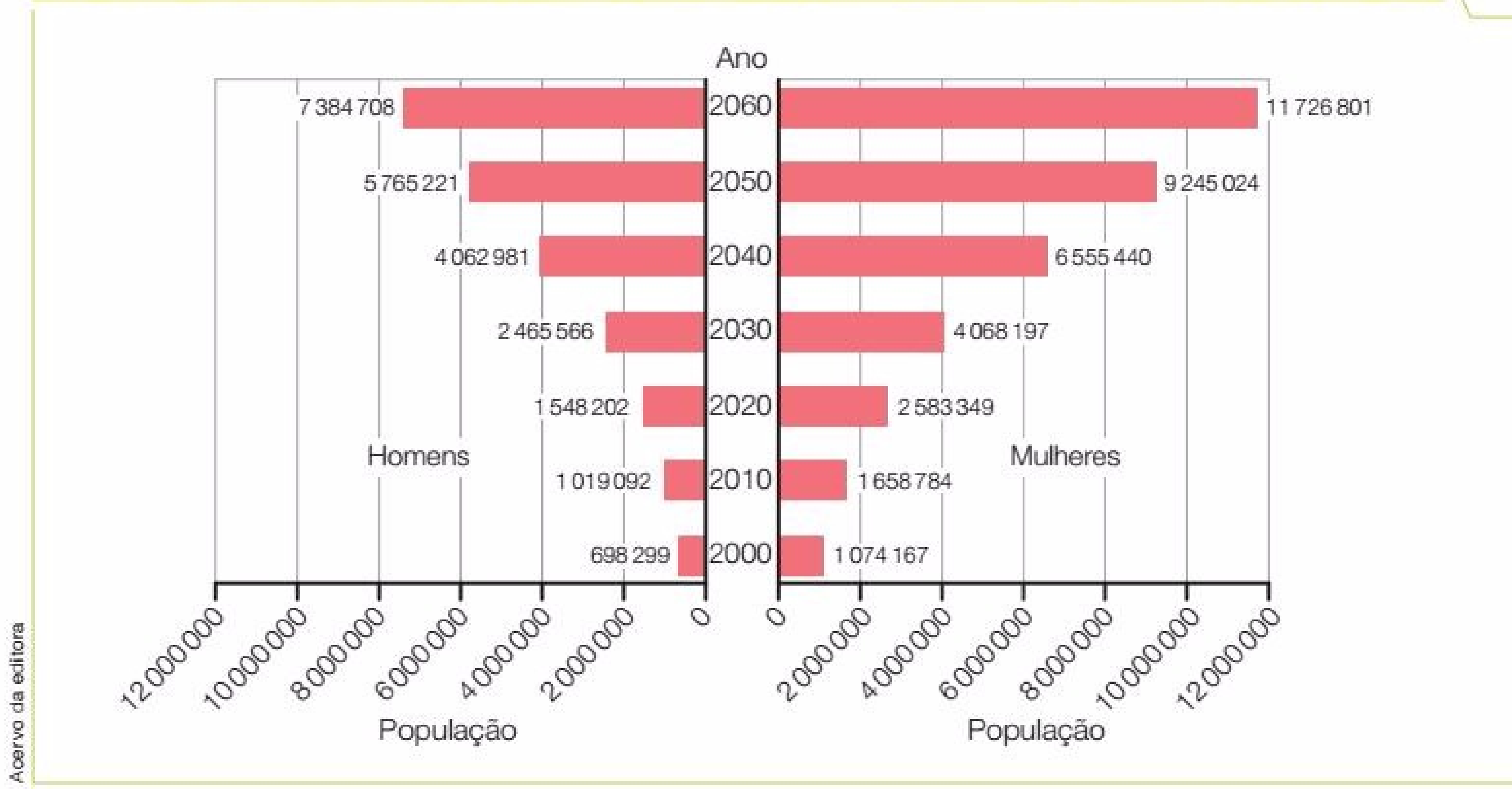
b) Em um grupo de 5 pessoas, qual é a probabilidade de pelo menos duas fazerem aniversário no mesmo dia do mês? E em um grupo de 10 pessoas? aproximadamente 29%; aproximadamente 80%

19. a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{31 \cdot (31-1) \cdot (31-2) \cdot \ldots \cdot (31-n+1)}{31^n}$

20. Leia as informações e responda.

Os futuros governantes do Brasil precisarão formular uma política que venha capacitar a economia e a área de saúde, pois vem aumentando a perspectiva de longevidade dos brasileiros.

Evolução da população de 80 anos ou mais de idade por sexo – Brasil: 2000/2060



Fonte: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 2 fev. 2016.

a) Se certo instituto realizar uma pesquisa escolhendo aleatoriamente determinada quantidade de pessoas com 80 anos ou mais, no ano de 2040, é provável que sejam entrevistados mais homens ou mulheres? Por quê? Resposta no final do livro.

b) A probabilidade de se escolher ao acaso uma pessoa com 80 anos ou mais, em 2000, e ela ser homem, é maior ou menor do que essa mesma escolha em 2020? maior

c) Utilizando uma calculadora, determine a probabilidade de se escolher ao acaso 3 pessoas com 80 anos ou mais em 2030 e se obter 1 homem e 2 mulheres.
aproximadamente 43,89%

21. A ararinha-azul (*Cyanopsitta spixii*) habitava o Nordeste brasileiro e foi extinta da natureza em 2000. Atualmente existem poucos exemplares, em cativeiros espalhados por várias partes do mundo. A destruição de seu *habitat* natural e o tráfico de animais foram os principais responsáveis pela extinção dessa ave.

Fonte de pesquisa: <www.icmbio.gov.br/portal/biodiversidade/fauna-brasileira/lista-de-especies/livro-vermelho.html>. Acesso em: 1º fev. 2016.

Ser vivo adulto

Ararinha-azul: 57 cm de comprimento

ararinhas-azuis

Supondo que em um cativeiro existam 5 exemplares de ararinhas-azuis fêmeas e 8 machos, qual é a probabilidade de se retirar ao acaso desse cativeiro duas ararinhas-azuis do mesmo sexo? E de formarem um casal?
Resposta no final do livro.

22. Para fazer o sorteio de um livro de História da Matemática entre todos os alunos das turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola, o professor reproduziu todos os anagramas da palavra LIVRO em pedaços de papel, distribuiu aos alunos e colocou uma cópia em uma urna, onde seria realizado o sorteio. Qual é a probabilidade:

a) de o aluno que possui o anagrama ORVIL ganhar o livro? $\frac{1}{120}$ ou $0{,}8\overline{3}\%$

b) de ser sorteado um anagrama que comece com uma consoante? $\frac{3}{5}$ ou 60%

c) de ser sorteado um anagrama que contenha todas as vogais juntas? $\frac{2}{5}$ ou 40%

23. Um consultório conta com 12 médicos, dos quais 4 são do sexo feminino. Escolhendo aleatoriamente dois médicos para representar o consultório em um evento, determine a probabilidade de:

a) ambos serem do sexo feminino $\frac{1}{11}$ ou $9{,}\overline{09}\%$

b) pelo menos um ser do sexo masculino $\frac{10}{11}$ ou $90{,}\overline{90}\%$

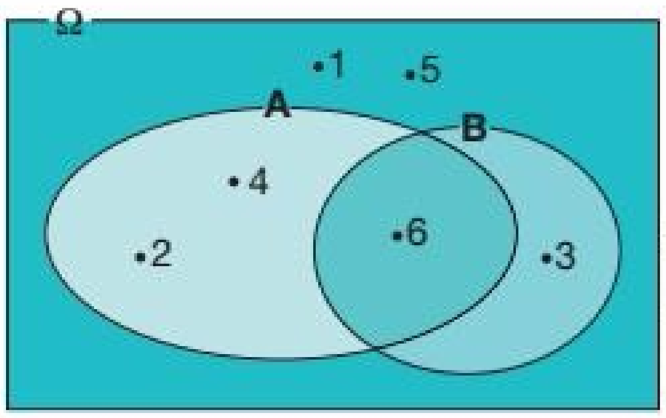
24. Em um recipiente há balas de cereja, hortelã e uva, totalizando 33 balas idênticas, que se diferenciam apenas pelo sabor. Determine a quantidade de balas de cada sabor, sabendo que, ao ser retirada uma bala aleatoriamente, a probabilidade de ser uma bala de hortelã é o triplo da probabilidade de ser de uva e o dobro da probabilidade de ser de cereja. 9 balas de cereja; 18 balas de hortelã; 6 balas de uva

Probabilidade da união de dois eventos

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, como podemos calcular a probabilidade de ocorrer ao menos um desses eventos?

Para responder a essa pergunta vamos considerar o lançamento de um dado comum e os eventos A, "o número obtido ser múltiplo de 2", e B, "o número obtido ser múltiplo de 3". Nesse caso:

- $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(\Omega)=6$
- $A=\{2, 4, 6\}$; $n(A)=3$
- $B=\{3, 6\}$; $n(B)=2$



Acervo da editora

O diagrama nos auxilia a verificar que:

- $A\cap B=\{6\} \rightarrow$ o elemento 6 satisfaz simultaneamente os eventos A e B
- $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\} \rightarrow$ os elementos 2, 3, 4 e 6 satisfazem o evento A ou B

Calculando $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ e $P(A\cup B)$, temos:

- $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A)=\dfrac{3}{6}$
- $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$
- $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B)=\dfrac{2}{6}$
- $P(A\cup B)=\dfrac{n(A\cup B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A\cup B)=\dfrac{4}{6}$

Portanto, em um lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é de $\dfrac{4}{6}$ ou $66,\bar{6}\%$.

A partir desses cálculos, podemos verificar que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$$

Para demonstrar essa igualdade, considere os eventos A e B de um espaço amostral Ω finito.

Da teoria de conjuntos:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega)>0$, obtemos:

$$\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}+\frac{n(B)}{n(\Omega)}-\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, ou seja, a união dos dois eventos, é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade da interseção de A com B.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Quando $A\cap B=\varnothing$, ou seja, A e B são conjuntos disjuntos, dizemos que os eventos são **mutuamente exclusivos**, isto é, a ocorrência de um deles exclui a possibilidade da ocorrência do outro.

Nesses casos, temos $n(A\cap B)=0$ e $P(A\cap B)=0$, logo $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Atividades resolvidas

R7. Em uma pesquisa realizada com 400 jovens de 15 a 20 anos verificou-se que 200 estudam e 180 trabalham, sendo que, entre esses jovens, 130 estudam e trabalham. Qual é a probabilidade de que um dos jovens pesquisados, escolhido aleatoriamente, estude ou trabalhe?

Resolução

Sejam *E* e *T* os eventos "estude" e "trabalhe", respectivamente.

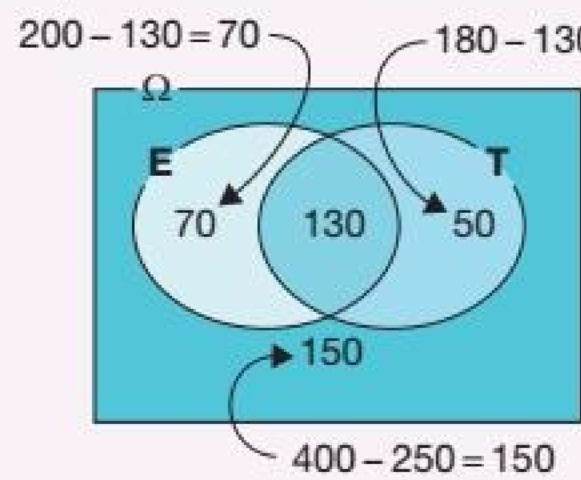
Temos que:

- $P(E) = \frac{200}{400}$
- $P(T) = \frac{180}{400}$
- $P(E \cap T) = \frac{130}{400}$

A probabilidade de que um jovem escolhido aleatoriamente estude ou trabalhe é dada por:

$$P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) = \frac{200}{400} + \frac{180}{400} - \frac{130}{400} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \text{ ou } 62{,}5\%$$

Podemos resolver esta atividade de outra maneira, representando o número de jovens que estudam e trabalham no diagrama abaixo.



Acervo da editora

$$P(E \cup T) = \frac{n(E \cup T)}{n(\Omega)} = \frac{70 + 130 + 50}{400} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

25. De um grupo de 48 pessoas, 36 possuem cachorro como animal de estimação, 20 possuem gato, 12 possuem as duas espécies e os demais não possuem animal ou possuem outra espécie de animal de estimação. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade de ela possuir:

Rita Kochmarjova/Shutterstock.com

gato e cachorro

Ser vivo adulto

Gato: cerca de 76 cm de comprimento

Cachorro: 18 cm a 86 cm de altura

a) cachorro de estimação? $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) cachorro ou gato de estimação? $\frac{11}{12}$ ou $91{,}\overline{6}\%$

c) apenas gato de estimação? $\frac{1}{6}$ ou $16{,}\overline{6}\%$

26. Os baralhos comuns com 52 cartas são divididos em quatro naipes distintos – copas, espadas, ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas, sendo que 9 delas são numeradas de 2 a 10. A carta que representa o 1 é aquela que contém a letra **A**, chamada de Ás, palavra originária do latim que significa "uma unidade". As outras três cartas – Valete, Dama e Rei, também conhecidos como figuras – são representadas pelas iniciais das palavras em inglês: **J**, de *jack* (valete), **Q** de *queen* (rainha) e **K** de *king* (rei). Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual é a probabilidade de essa carta ser:

Respostas no final do livro.

a) um rei de paus?

b) uma carta com o número 8?

c) um valete ou uma carta de ouros?

d) uma dama ou uma carta com o número 3?

e) uma carta de copas, que não seja figura?

27. Um aluno, após concluir o Ensino Médio, prestou vestibular em duas universidades, uma pública e outra particular. A probabilidade de esse aluno ser aprovado no vestibular da universidade pública é de 15%; na universidade particular é de 23%; e em ambas é de 7%. Qual é a probabilidade de esse aluno:

a) ser aprovado em pelo menos uma das universidades? 31%

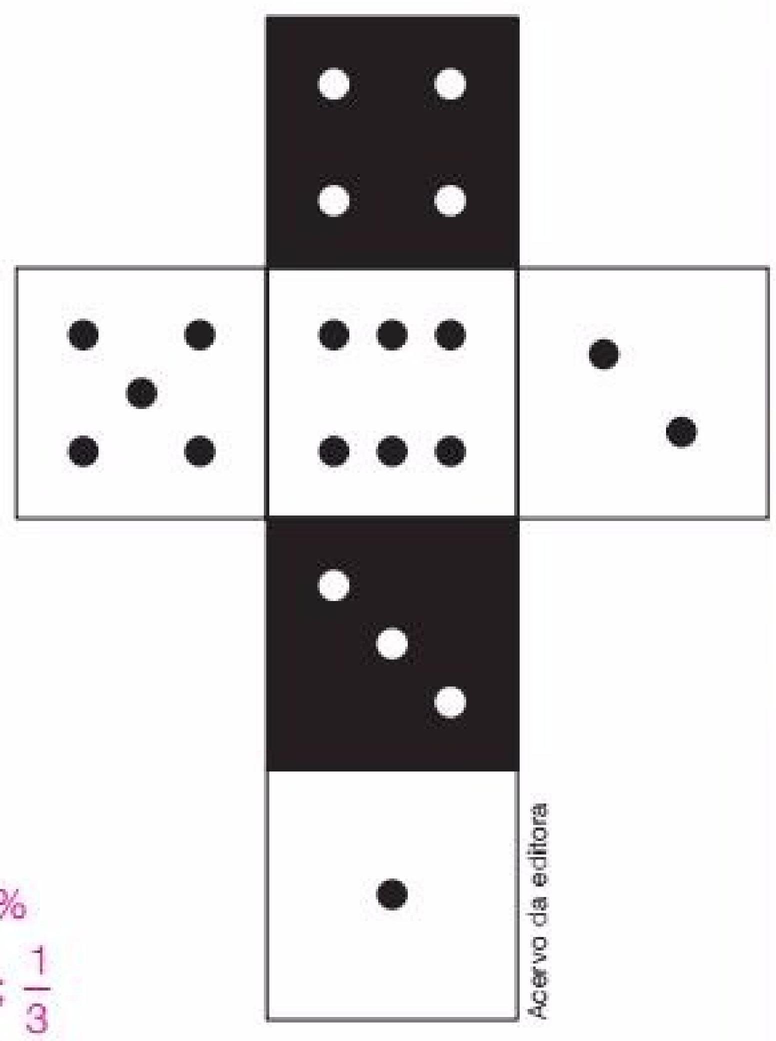
b) ser aprovado em apenas uma das universidades? 24%

c) não ser aprovado em nenhuma das universidades? 69%

28. Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir.

- Luana: face preta ou número menor que 4
- Marcos: face branca ou número primo
- Natália: face preta ou número 1
- Otávio: face branca ou número menor que 3

Considere que no lançamento do dado a probabilidade de obtenção de qualquer face seja a mesma.



Acervo da editora

28. a) Natália; $\frac{1}{2}$ ou 50%
b) Marcos e Otávio; $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}$%

a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

b) Se em cada caso o termo **ou** for trocado por **e**, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

29. Certa professora de Matemática propôs 20 problemas para que os alunos resolvessem em casa. O aluno **A** resolveu 17, e o aluno **B**, 14 desses problemas. Sabendo que é de 95% a probabilidade de, ao ser sorteado um dos problemas, ele ter sido resolvido por um desses alunos, calcule a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos os alunos. 60%

30. Para a retirada da primeira Carteira Nacional de Habilitação (CNH), os candidatos devem ser considerados aptos nos exames médicos, psicológicos, de legislação de trânsito e de direção. A primeira CNH pode ser solicitada, por exemplo, nas categorias **A**, para condução de motociclетas de duas ou três rodas, e **B**, para condução de veículos que não contenham mais de 8 lugares (excluído o do motorista) e que não ultrapassem 3,5 t.

Em certo município, em uma semana, dos 120 candidatos que realizaram os exames médicos e psicológicos, 112 foram aprovados no exame médico, 104 foram considerados aptos no exame psicológico e apenas 6 não foram aprovados em nenhum desses exames. Qual é a probabilidade de, ao se escolher ao acaso uma das 120 pessoas, ela ter sido aprovada:

a) no exame médico ou no psicológico? $\frac{19}{20}$ ou 95%

b) em ambos os exames? $\frac{17}{20}$ ou 85%

c) apenas no exame psicológico? $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}$%

R.M. Nunes/Shutterstock.com

Tráfego de veículos em uma rua localizada em Brasília (DF), em 2015.

31. Dos 120 alunos matriculados em certa academia, 62 praticam musculação, 48 participam das aulas de ginástica aeróbica e 20 praticam as duas modalidades de exercício físico. Ao ser sorteado um brinde entre os alunos dessa academia, qual é a probabilidade de esse aluno praticar musculação ou ginástica aeróbica? $\frac{3}{4}$ ou 75%

32. Considere o sorteio aleatório de um número natural maior do que 0 e menor do que 501.

a) Qual a probabilidade de esse número ser divisível por 4? $\frac{1}{4}$ ou 25%

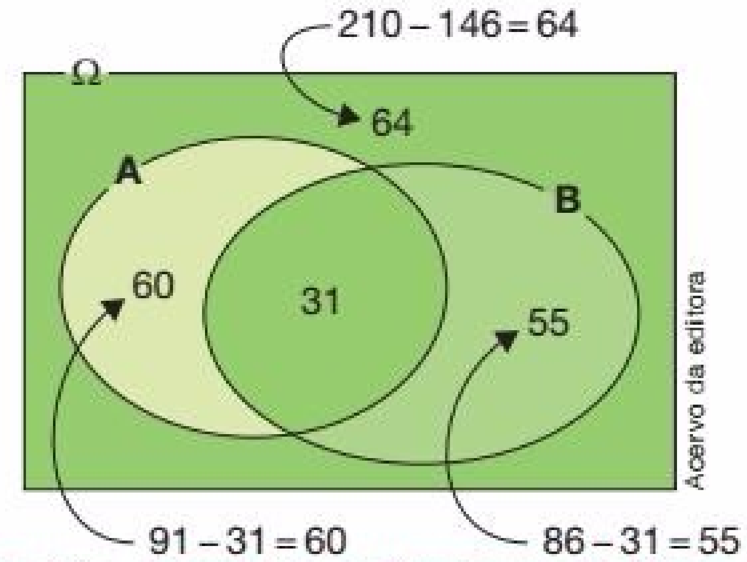
b) Qual a probabilidade de esse número ser divisível por 5? $\frac{1}{5}$ ou 20%

c) Qual a probabilidade de esse número ser divisível por 4 ou por 5? $\frac{2}{5}$ ou 40%

d) Qual a probabilidade de esse número não ser divisível nem por 4, nem por 5? $\frac{3}{5}$ ou 60%

Probabilidade condicional

Em uma pesquisa em que 210 alunos foram entrevistados, constatou-se que 91 praticam esportes coletivos (A), 86 praticam esportes individuais (B), 31 praticam os dois tipos de esporte e 64 não praticam esportes. Essas informações podem ser organizadas no diagrama de Venn indicado ao lado.



Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa, junto com os alunos.

Agora, vamos analisar três situações:

- Sorteando um desses alunos, a probabilidade de ele praticar os dois tipos de esporte é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{31}{210}$$

Nessa situação, o espaço amostral é Ω, ou seja, todos os alunos entrevistados.

- Sorteando um aluno que pratica esporte coletivo (A), a probabilidade de ele praticar também esporte individual (B) é dada por:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{31}{91}$$

Note que, nessa situação, o espaço amostral é *A*, pois sorteamos um aluno dentre aqueles que praticam esportes coletivos (A), ou seja, os casos possíveis são os alunos que praticam esportes coletivos.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ de **probabilidade condicional de *B* em relação a *A***, ou seja, a probabilidade de *B* ocorrer sabendo que *A* ocorreu, e indicamos por $P(B|A)$.

- Sorteando um aluno que pratica esporte individual (B), a probabilidade de ele praticar também esporte coletivo (A) é dada por:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{31}{86}$$

Nessa situação, o espaço amostral é *B*, pois sorteamos um aluno dentre aqueles que praticam esportes individuais (B), ou seja, os casos possíveis são os alunos que praticam esportes individuais.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ de **probabilidade condicional de *A* em relação a *B***, ou seja, a probabilidade de *A* ocorrer sabendo que *B* ocorreu, e indicamos por $P(A|B)$.

> Sejam *A* e *B* eventos não vazios de um espaço amostral Ω. Denominamos de probabilidade condicional de *A* em relação a *B* e indicamos por $P(A|B)$ a probabilidade de ocorrer o evento *A*, sabendo que já ocorreu o evento *B*.
>
> $$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Para escrever $P(A|B)$ em função de $P(A \cap B)$ e $P(B)$, dividimos o numerador e o denominador de $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ por $n(\Omega)$.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow \boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Eventos dependentes e eventos independentes

Sabemos que $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ é a probabilidade de ocorrer o evento *A* sabendo que já ocorreu o evento *B*. Dessa razão, obtemos:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)}$$

Por meio dessa igualdade, podemos calcular a probabilidade de ocorrer eventos **dependentes**, ou seja, calculamos a probabilidade de ocorrer certo acontecimento em situações nas quais estão envolvidos eventos em que a ocorrência de um deles influencia na ocorrência de outro.

Exemplo

De uma urna com 30 fichas numeradas de 1 a 30, serão retiradas duas fichas sem reposição. Qual é a probabilidade de o número em cada uma das fichas ser ímpar?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o evento *B*, "retirar a 1ª ficha e o número ser ímpar", o evento *A*, "retirar a 2ª ficha e o número ser ímpar", e calcular $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$.

Ao retirar a 1ª ficha, temos 15 números ímpares em um total de 30. A probabilidade de obter um número ímpar na 1ª retirada é:

$$P(B)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

Ao retirar a 2ª ficha, já tendo retirado uma ficha com número ímpar sem reposição, temos 14 números ímpares em um total de 29. A probabilidade de obter um número ímpar na 2ª retirada é:

$$P(A|B)=\frac{14}{29}$$

Calculando $P(A\cap B)$, obtemos a probabilidade de ambos os números serem ímpares:

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=\frac{14}{29}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=\frac{7}{29}}$$

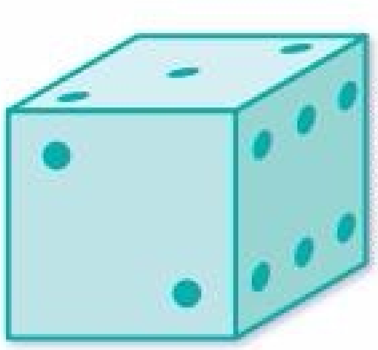
Portanto, a probabilidade de obter números ímpares nas 1ª e 2ª fichas é $\frac{7}{29}$.

Em situações em que os eventos *A* e *B* de um mesmo espaço amostral são **independentes**, ou seja, a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro, temos $P(A|B)=P(A)$ e $P(B|A)=P(B)$. Assim:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Exemplo

Qual é a probabilidade de, ao lançar um dado comum duas vezes, obter em ambos os lançamentos um número par de pontos?


Camila Ferreira

Vamos considerar o evento *A*, "número de pontos do 1º lançamento ser par", e o evento *B*, "número de pontos do 2º lançamento ser par". Note que esses eventos são independentes, pois a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro. Então, para responder a essa pergunta, calculamos $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Para obter um número par de pontos no 1º lançamento, temos 3 chances em um total de 6. A probabilidade de obter um número par de pontos no 1º lançamento é:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Para obter um número par de pontos no 2º lançamento, ainda temos 3 chances em um total de 6. Assim temos:

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Calculando $P(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

Portanto, a probabilidade de obter um número par de pontos em ambos os lançamentos é $\frac{1}{4}$.

Se os eventos não vazios *A* e *B* de um mesmo espaço amostral são **dependentes**, então $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. No caso em que *A* e *B* são **independentes**, temos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Atividades resolvidas

R8. Um casal planeja ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino (M), sendo que o primeiro filho que nasceu é do sexo feminino (F)?

Resolução

O espaço amostral que representa as possibilidades de o casal ter 3 filhos é:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

Logo:

- Evento *B*: o primeiro filho é do sexo feminino $\longrightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;
- $A \cap B$: exatamente dois filhos do sexo masculino e o primeiro filho do sexo feminino $\longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

Calculando $P(A|B)$, obtemos a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino, sendo que o primeiro filho que nasceu é do sexo feminino.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ ou } \boxed{25\%}$$

Note que os eventos *A* e *B* são dependentes, ou seja, a ocorrência de *A* depende da ocorrência de *B*, pois $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

R9. Utilizando uma aposta simples na Mega-Sena, a probabilidade de ganhar na quadra é de uma em 2 332; na quina é de uma em 154 518; e na sena é de uma em 50 063 860. Matematicamente, essas probabilidades são consideradas tão baixas que a Polícia Federal investiga o acúmulo patrimonial de pessoas que o justificam com uma série de prêmios nessa loteria.

Calcule a probabilidade de um apostador, utilizando uma aposta simples na Mega-Sena, ganhar na quadra em um sorteio, e na quina em um sorteio consecutivo.

Para ganhar na Mega-Sena com uma aposta simples, o jogador deve escolher 6 números do total de 60 e acertar 4 (quadra), 5 (quina) ou 6 (sena) desses números.

Resolução

Representando por *A* o evento "ganhar na quadra" e por *B* o evento "ganhar na quina", temos que os eventos *A* e *B* são independentes, ou seja, a ocorrência do evento *A* não influencia a ocorrência do evento *B*, pois os sorteios são diferentes.

Calculando $P(A \cap B)$, obtemos a probabilidade de um apostador ganhar na quadra em um sorteio, e na quina em outro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2\,332} \cdot \frac{1}{154\,518} \simeq \boxed{0{,}000000003} \text{ ou aproximadamente } \boxed{0{,}0000003\%}$$

33. Em um congresso de ciências, os participantes foram classificados da seguinte maneira:

	Físicos	Químicos	Biólogos
Homens	35	30	45
Mulheres	20	40	40

Considere o evento em que é escolhida ao acaso uma dessas pessoas e calcule as probabilidades. Respostas no final do livro.

Para resolver esta atividade, considere a inicial da palavra o evento em que é escolhida uma pessoa da respectiva categoria.

a) $P(H|F)$
b) $P(Q|M)$
c) $P(M|B)$
d) $P(H|\overline{Q})$
e) $P(\overline{M}|B)$
f) $P(\overline{H}|\overline{F})$

34. De cada lote de 20 peças produzidas por uma máquina que está com um pequeno problema de regulagem, 4 apresentam algum tipo de defeito. Retirando-se aleatoriamente 2 peças de um desses lotes, sem reposição, calcule a probabilidade de se retirar: Respostas no final do livro.

a) duas peças perfeitas
b) uma peça perfeita e uma defeituosa
c) duas peças defeituosas

35. O bloco lógico é composto por 48 peças que combinam cores, formatos, espessuras e tamanhos. Existem peças para todas as combinações possíveis, podendo ser amarelas, azuis e vermelhas, nos formatos circular, quadrangular, retangular e triangular, e ainda podem ser finas ou grossas, grandes ou pequenas. As 48 peças estão distribuídas da seguinte maneira: 16 peças de cada cor; 12 peças de cada formato; 24 peças de cada espessura; e 24 peças de cada tamanho.


peças do bloco lógico
José Vitor Elorza/ASC Imagens

a) Ao escolher duas dessas peças aleatoriamente, qual é a probabilidade de ambas:
- serem vermelhas? $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%
- terem a mesma forma? $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%

b) Qual é a probabilidade de se retirar uma peça com formato triangular, dentre aquelas que não possuem formato circular? $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

36. (Enem-MEC) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é: d

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{5}{7}$
e) $\frac{5}{14}$

37. Para testar um novo medicamento contra certa doença e seus efeitos colaterais, foi realizado um teste com 200 pessoas, sendo 25% sadias e as restantes portadoras da doença. Nesse teste, 160 pessoas tomaram o remédio, e as restantes, placebo. Sabendo que 35 pessoas sadias tomaram placebo, qual é a probabilidade de escolher ao acaso uma pessoa que tomou o remédio entre as pessoas sadias? $\frac{3}{10}$ ou 30%

Placebo: substância neutra que substitui um medicamento com finalidade de controlar as reações psicológicas.

38. No Brasil, os jovens menores de 16 anos não podem votar. Já para as pessoas analfabetas ou maiores de 70 anos, ou com idade entre 16 e 18 anos, o voto é facultativo. Para o restante da população, o voto é obrigatório. Em um bairro, 45% da população é de homens e 80% deles são obrigados a votar. Qual é a probabilidade de uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, ser homem e não ser obrigado a votar? $\frac{9}{100}$ ou 9%

39. Para a realização do exame *antidoping*, no campeonato brasileiro de futebol de 2015, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) estipulou que seriam sorteados dois jogadores de cada equipe, entre titulares e suplementares, após os 30 min da segunda etapa de cada jogo. Suponha que uma equipe com 18 jogadores, até o momento do sorteio, registrasse 4 com cartão amarelo. Qual é a probabilidade de ser sorteado para o exame *antidoping* um jogador que recebeu cartão amarelo, visto que já foi sorteado um jogador que recebeu cartão amarelo?
$\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%

Capítulo 5

40. Os glóbulos vermelhos (ou hemácias) são um dos tipos de células que compõem o sangue. Eles são elásticos e arredondados, não apresentando dificuldade em passar pelos vasos sanguíneos. Dentro dessas células, há um pigmento chamado hemoglobina A, que dá a coloração vermelha ao sangue e é responsável pelo transporte de oxigênio do pulmão aos tecidos e órgãos.

Existem outras variações genéticas da hemoglobina, das quais uma delas é a hemoglobina S. Esta, por sua vez, não exerce a função de oxigenar o corpo de forma satisfatória, logo as pessoas que a possuem podem ter uma anemia que não se corrige com alimentação ou ferro. Essa doença genética, conhecida por anemia falciforme, causa deformação na membrana dos glóbulos vermelhos, deixando-os com o formato de foice. Com isso, perdem mobilidade e flexibilidade, o que dificulta o transporte de oxigênio aos tecidos e órgãos.

Os sinais e sintomas associados à anemia falciforme são, dentre outros, dores em ossos, músculos e juntas, palidez, cansaço fácil, olhos amarelados, febre alta, úlceras nas pernas e mais tendência a infecções. O exame laboratorial específico que identifica a anemia falciforme é a eletroforese de hemoglobina, o qual é realizado na triagem de recém-nascidos, conhecido como teste do pezinho, ou quando houver a necessidade de identificar traços da hemoglobina S.

Existem tratamentos para a anemia falciforme que não são específicos, mas que proporcionam ao paciente uma vida com qualidade, conforto e segurança. Atualmente, são realizados transplantes de medula óssea como forma de tratamento e possível cura da doença, mas, para ser realizado, são necessários alguns requisitos, dentre eles o de encontrar um doador que seja compatível.

A maioria das pessoas recebe dos seus pais o gene para hemoglobina A. Como uma parte vem da mãe e outra do pai, dizemos que seu genótipo é AA. As pessoas com anemia falciforme recebem de seus pais o gene para hemoglobina S, portanto possuem genótipo SS. Quando uma pessoa herda de um dos pais o gene para hemoglobina A e do outro o gene para hemoglobina S, seu genótipo é AS, e dizemos que ela possui o traço falciforme, porém não desenvolverá a doença. (Veja os esquemas na página ao lado.)

Fontes de pesquisa: NELSON, David L.; COX, Michael M. **Princípios da bioquímica de Lehninger.** Tradução Fabiana Horn. Revisão técnica Carla Dalmaz e Sandra Estrazulas Farias. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011. <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/doenca_falciforme_condutas_basicas.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2016.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens BSIP/Getty Images e Shaynepp/Shutterstock.com

A triagem neonatal, também conhecida como teste do pezinho, é um exame gratuito realizado em recém-nascidos que pode detectar diversas doenças, entre elas a anemia falciforme.

Antes de realizar o item a, se necessário, peça aos alunos que estudem todas as combinações possíveis em relação aos genótipos dos pais, considerando a mãe com o traço falciforme, ou seja, AAxAS, ASxAS e SSxAS. Nesse caso, apenas a última combinação não foi apresentada nos esquemas destas páginas.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) É possível uma pessoa com traço falciforme ter um filho com anemia falciforme? Justifique.

a) sim; Resposta esperada: caso ela tenha um filho com uma pessoa que tenha o traço, o filho terá 25% de chance de ter a doença. Caso ela tenha um filho com uma pessoa que tem a doença, terá 50% de chance de ter um filho com anemia falciforme.

b) Um casal teve dois filhos, um com anemia falciforme e outro com o traço da doença. Como pode ser o genótipo dos pais? ASxSS ou ASxAS

c) Qual é a probabilidade de um casal, em que ambos possuem o traço falciforme, ter:

- dois filhos sem a doença? $\frac{9}{16}$
- um filho sem a doença e outro com a doença? $\frac{3}{16}$
- dois filhos com o traço falciforme? $\frac{1}{4}$

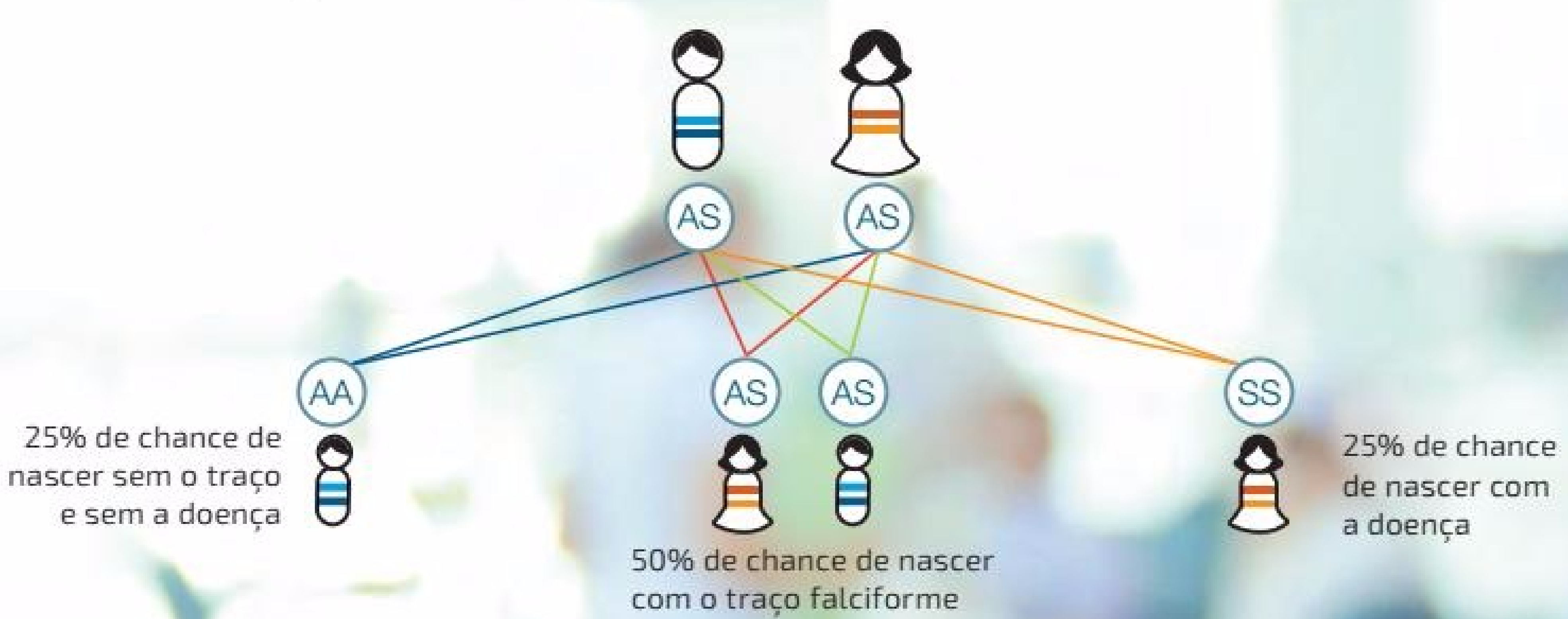
d) Uma mulher cujo pai tinha anemia falciforme casa-se com um homem cuja mãe tinha a doença e o pai não tinha o traço nem a doença. Qual é a probabilidade de esse casal ter um filho com o traço falciforme? 50%

e) Junte-se a um colega e pesquisem outras aplicações de probabilidade no estudo da genética. Depois, apresentem os resultados da pesquisa à turma. Resposta pessoal.

Anemia falciforme

No caso de um casal em que um deles possui o traço falciforme (AS) e o outro não possui esse traço nem a doença (AA), temos 50% de chance de um filho desse casal nascer com o traço falciforme e 50% de chance de nascer sem o traço e sem a doença.

Já no caso de um casal em que ambos possuem o traço falciforme (AS), temos 25% de chance de nascer um filho desse casal sem o traço e sem a doença, 50% de chance de nascer com o traço falciforme e 25% de chance de nascer com a doença.



Ilustrações: Renan Fonseca

Capítulo 5

Experimentos binomiais

Ao repetirmos um experimento várias vezes, sob as mesmas condições, de modo que as repetições sejam independentes umas das outras, a probabilidade de que ocorra certo evento em uma, duas, três ou todas as vezes em que o experimento for repetido pode ser calculada por meio da **lei binomial das probabilidades**.

Considere uma urna com as 15 fichas indicadas a seguir. Realizando cinco sorteios com reposição, qual é a probabilidade de, em exatamente 3 desses sorteios, ocorrer um número maior que 10?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	

Nessa situação, para cada lançamento, temos:

- espaço amostral: $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- probabilidade do evento *A* "ocorrer um número maior que 10":
  $A=\{11, 12, 13, 14, 15\}$
  $$P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$
- probabilidade do evento $\overline{A}$ "não ocorrer um número maior que 10":
  $\overline{A}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  $$P(\overline{A})=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

Nesses cinco sorteios, os eventos *A* e $\overline{A}$ podem ocorrer em diferentes ordens. Uma delas é $AAA\overline{A}\overline{A}$, ou seja, as três primeiras fichas sorteadas apresentarem números maiores que 10, e as duas últimas, não. A partir dessa ordem, e sabendo que os sorteios são independentes, ou seja, a ocorrência de um não influencia na do outro, temos:

$$P(A\cap A\cap A\cap \overline{A}\cap \overline{A})=P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})=$$
$$=[P(A)]^3\cdot[P(\overline{A})]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{243}$$

Essa é a probabilidade de ocorrer três vezes o evento *A* e duas vezes o evento $\overline{A}$, em determinada ordem. Devemos então multiplicar esse valor pela quantidade de ordens possíveis, que pode ser obtida por meio da combinação simples $\binom{5}{3}$.

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!}=10$$

Portanto, como existem 10 ordens diferentes e a probabilidade de cada uma dessas ordens é $\frac{4}{243}$, a probabilidade de, em cinco sorteios, ocorrer exatamente três vezes o evento *A* é dada por:

$$10\cdot\frac{4}{243}=\frac{40}{243}, \text{ ou aproximadamente } 16{,}46\%$$

> Se em um experimento aleatório a probabilidade de o evento *A* ocorrer em cada uma das *n* tentativas é dada por $P(A)$, então a probabilidade de o evento *A* ocorrer exatamente *p* vezes em *n* tentativas é:
> $$\binom{n}{p}\cdot[P(A)]^p\cdot[P(\overline{A})]^{n-p}$$
> sendo $n\geq p$ e sendo $\overline{A}$ o evento complementar de *A*.

Atividades resolvidas

R10. Em 2015, uma das provas do Enem era a de Matemática e suas tecnologias, composta por 45 questões. Sabendo que cada questão dessa prova continha cinco alternativas, das quais somente uma era correta, calcule a probabilidade de um aluno, ao marcar as alternativas aleatoriamente:

a) acertar 60% das questões

b) errar todas as questões

Resolução

Seja *A* o evento dado por "marcar a alternativa correta em uma questão". Logo:

$$P(A)=\frac{1}{5}$$

Sabendo que $P(\overline{A})=1-P(A)$, podemos escrever:

$$\binom{n}{p}\cdot\left[P(A)\right]^{p}\cdot\left[1-P(A)\right]^{n-p}$$

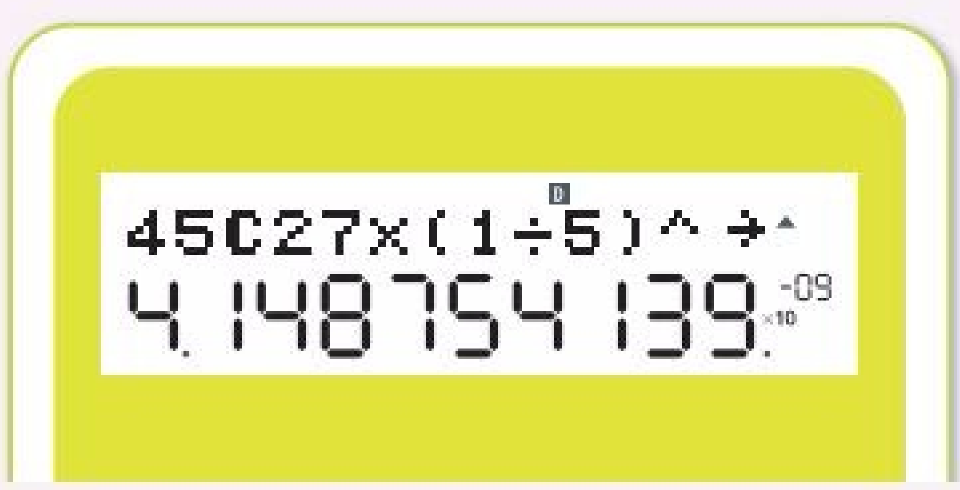
a) Como os acertos são independentes, isto é, o acerto de uma questão não depende das demais, calculamos a probabilidade de acertar 60% do total de 45 questões da prova, ou seja, a probabilidade de o evento *A* ocorrer 27 vezes (p) em 45 tentativas (n).

$$\binom{n}{p}\cdot[P(A)]^{p}\cdot[1-P(A)]^{n-p}=\binom{45}{27}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{27}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{45-27}=\binom{45}{27}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{27}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{18}\simeq \boxed{0{,}000000004},\text{ ou}$$

aproximadamente $\boxed{0{,}0000004\%}$

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular $\binom{45}{27}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{27}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{18}$ com a seguinte sequência de teclas:

4 → 5 → nCr → 2 → 7 → × → (→ 1 →
→ ÷ → 5 →) → ^ → 2 → 7 → × → (→
→ 4 → ÷ → 5 →) → ^ → 1 → 8 → =



Camila Ferreira

Diga aos alunos que este procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora.

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

b) Se a probabilidade de acertar uma questão é $P(A)=\frac{1}{5}$, então a de errar a questão é $P(\overline{A})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Calculamos a probabilidade de errar todas as 45 questões do grupo, ou seja, a probabilidade de o evento $\overline{A}$ ocorrer 45 vezes (p) em 45 tentativas (n).

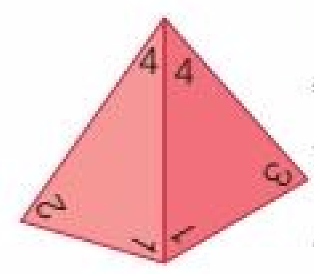
$$\binom{n}{p}\cdot[P(\overline{A})]^{p}\cdot[1-P(\overline{A})]^{n-p}=\binom{45}{45}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{45}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{45-45}=\underbrace{\binom{45}{45}}_{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{45}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{0}}_{1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{45}\simeq$$

$\simeq \boxed{0{,}000043556}$, ou aproximadamente $\boxed{0{,}0043556\%}$

Anote as respostas no caderno.

41. Uma loja de calçados constatou que 4 entre 5 clientes do sexo feminino compram sapatos com a numeração de 35 a 39. Num dia em que 12 mulheres compraram sapatos nessa loja, qual era a probabilidade de exatamente 9 delas terem comprado sapatos com a numeração apresentada? aproximadamente 23,62%

42. Considere um tetraedro regular em que, próximo a cada vértice, esteja escrito um dos números naturais de 1 a 4, em cada face adjacente a esse vértice. Ao lançarmos esse tetraedro, o número sorteado é aquele que estiver próximo ao vértice voltado para cima. Na figura, por exemplo, o número sorteado é 4.



Acervo da editora

Supondo que esse tetraedro seja lançado 5 vezes, calcule a probabilidade de:

a) ser sorteado o número 3 em exatamente dois lançamentos aproximadamente 26,37%

b) ser sorteado apenas o número 2 aproximadamente 0,1%

c) ser sorteado o número 4 apenas uma vez aproximadamente 39,55%

d) não ser sorteado o número 1 aproximadamente 23,73%

43. De acordo com a FIFA (*Fédération Internationale de Football Association*) uma partida de futebol deve ter início após um sorteio de cara ou coroa, e a equipe que ganhar o sorteio escolhe a direção em que atacará na 1ª etapa de jogo. Em 6 partidas, qual é a probabilidade de uma equipe escolher a direção de ataque em exatamente 5 delas? Resposta no final do livro.

44. O salto em distância é uma modalidade olímpica em que o objetivo é saltar a maior distância possível. Os atletas correm em uma pista em direção a uma caixa com areia e saltam. Para que o salto seja válido, é necessário que o atleta o inicie antes da plataforma de decolagem. Em competições oficiais, os atletas têm 3 chances para efetuar o salto, mas somente o melhor deles é considerado. Supondo que a probabilidade de certo atleta saltar mais de 8,5 m seja de 80%, qual é a probabilidade de esse atleta realizar exatamente dois saltos com mais de 8,5 m em uma competição? 38,4%

45. Um jogador de basquete tem média de aproveitamento de 70% nos arremessos livres. Sabendo que em certo jogo esse jogador efetuou 8 arremessos livres, determine a probabilidade de ele ter acertado:

a) exatamente 5 arremessos aproximadamente 25,41%

b) nenhum arremesso aproximadamente 0,007%

c) mais de 6 arremessos aproximadamente 25,53%

46. A probabilidade de uma mulher com menos de 30 anos gerar uma criança com síndrome de Down é de aproximadamente 0,04%; já em uma mulher com 40 anos, as chances são de aproximadamente 0,9%. Isso ocorre devido a uma alteração genética causada por um erro na divisão celular durante a divisão embrionária.

Fontes de pesquisa: CAMPBELL, Neil A. et al. **Biology**. 8. ed. San Francisco: Pearson Benjamin Cummings, 2008. p. 299.
<http://drauziovarella.com.br/crianca-2/sindrome-de-down>. Acesso em: 3 fev. 2016.

Supondo que a probabilidade de uma mulher gerar uma criança com síndrome de Down dos 20 aos 25 anos seja de 0,04%, qual é a probabilidade de uma mulher ter 3 filhos nesse intervalo de tempo e sem síndrome de Down? aproximadamente 99,88%

47. Para uma pessoa ser aprovada em certo concurso, ela precisa passar por um teste composto de duas fases. A 1ª fase é uma prova objetiva com 10 questões de Matemática e 14 de conhecimentos gerais, em que apenas uma entre as 4 alternativas de cada questão está correta. Será classificado para realizar a 2ª fase, de teste físico, o candidato que atingir no mínimo 50% de aproveitamento em cada área da prova objetiva. Se um candidato assinalar aleatoriamente as respostas da prova objetiva, qual é a probabilidade de ele ser classificado para a 2ª fase com exatamente o aproveitamento mínimo? aproximadamente 0,16%

48. A probabilidade da ocorrência de combinações curiosas quanto ao sexo dos filhos de um casal acontece em diversos casos. Os filhos do casal norte-americano Emory Landon Harrison representam um agrupamento inusitado: 13 filhos, todos meninos.


Betmann/Corbis/Latinstock

Casal Emory Landon Harrison e seus treze filhos homens, 1º de maio de 1955, Manhattan, Nova Iorque, EUA.

a) Qual é a probabilidade de essa combinação de filhos acontecer? $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,012%

b) Qual combinação de filhos tem a maior probabilidade de ocorrer: 13 filhos do mesmo sexo ou 13 filhos com alternância de sexo? Justifique. Resposta no final do livro.

Estatística e probabilidade

Estudamos neste capítulo que a probabilidade de um evento ocorrer em um espaço amostral equiprovável pode ser calculada teoricamente por meio da seguinte razão:

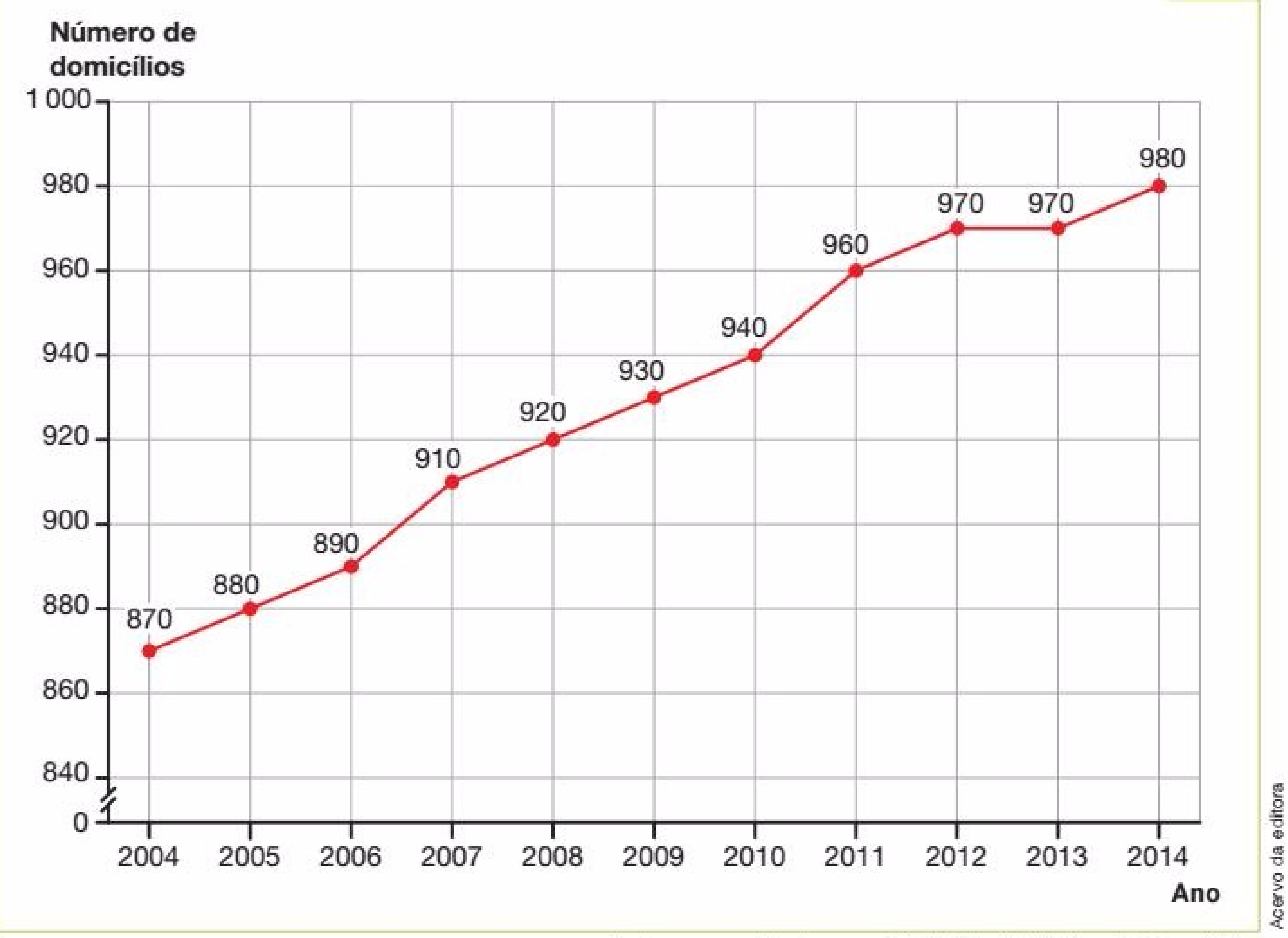
$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Porém, existem situações em que não é possível realizar o cálculo da probabilidade teoricamente, sendo necessário considerar várias repetições de um experimento e obter a probabilidade a partir da frequência relativa da ocorrência do evento. Assim, a probabilidade de um evento ocorrer pode ser estimada por meio de cálculos estatísticos.

À medida que aumentamos o número de repetições do experimento, mais precisa é a probabilidade estimada. Por exemplo, mesmo que cinco peças produzidas por uma máquina e escolhidas ao acaso não apresentem defeitos, não podemos afirmar que a probabilidade de sortear uma peça sem defeito seja de 100%, pois essa quantidade analisada ainda é pequena. Para obter um valor que melhor represente a ocorrência do evento "a peça não apresentar defeito", devemos analisar uma quantidade maior de peças.

Nem sempre é necessária a realização de um experimento para obter os dados amostrais; esses dados também podem ser obtidos em registros históricos fornecidos por órgãos públicos e privados. O gráfico a seguir, por exemplo, apresenta informações registradas pelo IBGE.

Quantidade aproximada de domicílios com geladeira por mil domicílios



Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1954>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Os valores apresentados no gráfico foram obtidos pelo cálculo da frequência relativa da ocorrência do evento "o domicílio ter geladeira".

Por meio dos dados apresentados nesse gráfico, podemos verificar que, em 2004, sorteando um domicílio brasileiro, a probabilidade de ele ter uma geladeira era de aproximadamente $\frac{870}{1\,000}$ ou 87%. Entretanto, note que essa probabilidade foi aumentando. Em 2014, por exemplo, era de aproximadamente 98%.

Atividades resolvidas

Explique aos alunos que a notação P(X < 8) e P(X = 7) é utilizada, por exemplo, para indicar a probabilidade de que o tempo de vida útil da lâmpada seja menor que 8 000 horas e igual a 7 000 horas, respectivamente.

R11. O Programa Brasileiro de Etiquetagem (PBE) é um programa de conservação de energia do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Inmetro), que atua por meio de etiquetas informativas cujo objetivo é alertar o consumidor sobre a eficiência energética de eletrodomésticos. Entre os produtos etiquetados pelo PBE, as lâmpadas fluorescentes são avaliadas em relação à durabilidade e intensidade luminosa. As lâmpadas permanecem ligadas durante meses para que se verifique se sua vida útil mínima corresponde a 5 000 horas. Além disso, são ligadas e desligadas várias vezes ao dia.

A seguir, estão apresentados os resultados obtidos por um laboratório de controle de qualidade para uma amostra de 320 lâmpadas da marca **A** em relação à durabilidade.

Tempo de vida útil (milhares de horas)	Número de lâmpadas
3	10
4	17
5	25
6	35
7	44
8	49
9	46
10	38
11	28
12	18
13	10
Total	320

O selo Procel indica melhor eficiência energética em eletrodomésticos.

Considerando que essa amostra representa significativamente todas as lâmpadas da marca **A** vendidas ao consumidor, resolva.

a) Construa um gráfico de barras representando a probabilidade de durabilidade das lâmpadas da marca **A** em função do tempo de vida.

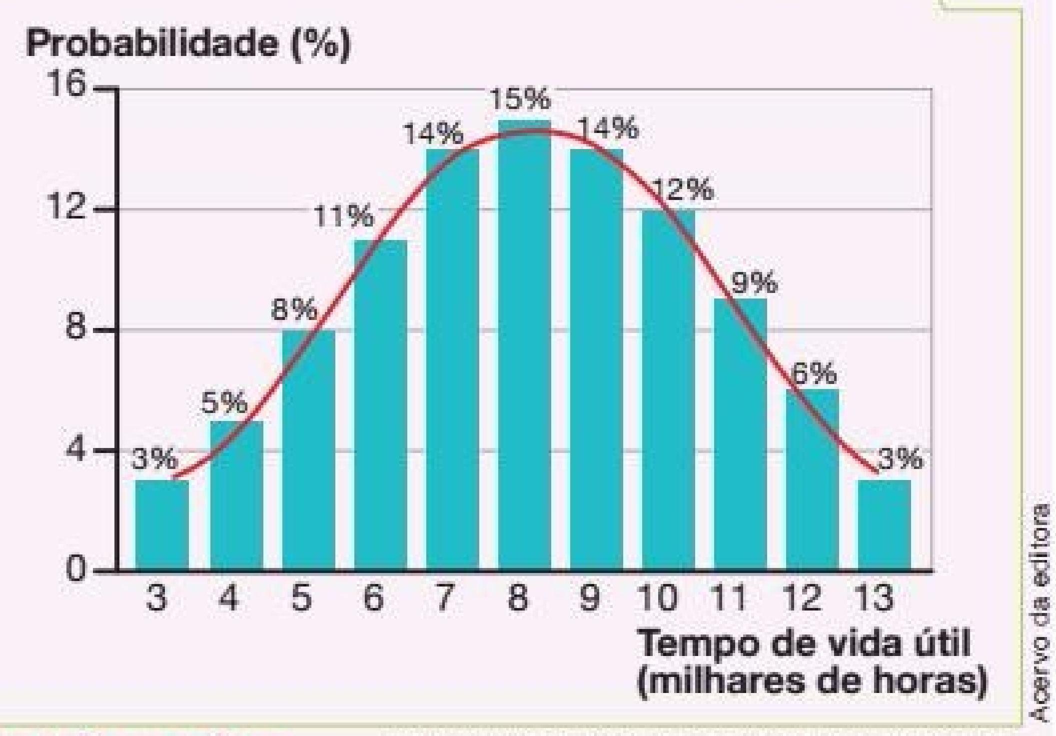
b) Na etiqueta das lâmpadas da marca **A** vem indicada durabilidade média de 8 000 horas. Qual é a probabilidade de que, ao sortear uma lâmpada, ela tenha tempo de vida útil menor que as 8 000 horas indicadas na etiqueta?

Resolução

a) Para construir o gráfico de barras, calculamos a probabilidade aproximada para cada tempo de vida útil das lâmpadas.

Tempo de vida útil (milhares de horas)	Número de lâmpadas	Probabilidade
3	10	$\frac{10}{320} \simeq 3\%$
4	17	$\frac{17}{320} \simeq 5\%$
5	25	$\frac{25}{320} \simeq 8\%$
6	35	$\frac{35}{320} \simeq 11\%$
7	44	$\frac{44}{320} \simeq 14\%$
8	49	$\frac{49}{320} \simeq 15\%$
9	46	$\frac{46}{320} \simeq 14\%$
10	38	$\frac{38}{320} \simeq 12\%$
11	28	$\frac{28}{320} \simeq 9\%$
12	18	$\frac{18}{320} \simeq 6\%$
13	10	$\frac{10}{320} \simeq 3\%$
Total	320	100%

Probabilidade em função do tempo de vida útil da lâmpada da marca A



Fonte: Laboratório de controle de qualidade.

As informações apresentadas no gráfico e nos quadros são fictícias.

b) Representando por X o tempo de vida útil da lâmpada, em milhares de horas, temos que a probabilidade de que uma lâmpada da marca **A** tenha duração menor que 8 000 horas é:

$$P(X < 8) = P(X = 7) + P(X = 6) + P(X = 5) + $$
$$+ P(X = 4) + P(X = 3) = 0,14 + 0,11 +$$
$$+ 0,08 + 0,05 + 0,03 = 0,41 \text{ ou } 41\%$$

Explique aos alunos que o item **b** dessa atividade também pode ser resolvido dividindo a quantidade de lâmpadas com vida útil menor que 8 mil horas pelo total de lâmpadas: $P(X < 8) = \frac{131}{320} = 0,41$ ou aproximadamente 41%.

49. O esgoto doméstico é formado após utilizarmos água no banho, na limpeza da louça, na descarga do vaso sanitário, entre outros. O escoamento da água da chuva é denominado esgoto pluvial e aqueles gerados em fábricas são chamados de esgotos industriais. O sistema da rede coletora de esgoto é importante para a saúde pública, pois geralmente o esgoto não tratado contém diversos microrganismos que podem provocar uma série de contaminações e transmissão de doenças.

Veja como vem aumentando o número total de domicílios urbanos e o de domicílios ligados à rede coletora de esgoto no Brasil.

Número total de domicílios urbanos no Brasil (em mil) nos anos de 2011 a 2014

Ano	Total de domicílios urbanos no Brasil (em mil)
2011	53 623
2012	54 886
2013	55 968
2014	57 718

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1941>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Domicílios urbanos servidos de rede coletora de esgoto no Brasil

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1956>. Acesso em: 29 jan. 2016.

a) Em 2011, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio urbano no Brasil, qual era a probabilidade de ele ter serviço de rede de esgoto? aproximadamente 63%

b) Qual era a probabilidade de, ao ser escolhido ao acaso um domicílio urbano em 2014, ele não contar com a rede coletora de esgoto? aproximadamente 34%

c) Em que ano, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio urbano no Brasil, havia a maior probabilidade de ele estar ligado à rede coletora de esgoto: 2012 ou 2013? 2013

50. Uma urna contém 30 bolinhas, entre brancas, pretas e vermelhas. Ao realizar repetidas vezes um experimento, que consistia em sortear uma bolinha da urna, anotar sua cor e devolvê-la à urna, foram obtidos os seguintes resultados:

Cor da bolinha	Quantidade de sorteios
Branca	427
Preta	902
Vermelha	271

A partir dos resultados obtidos no experimento, estime qual deve ser o número de bolinhas de cada cor dentro dessa urna. 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas

51. Em certo experimento realizado com um dado de seis faces, foram feitos 900 lançamentos, obtendo os seguintes resultados:

Face	Quantidade de lançamentos
1	113
2	225
3	105
4	120
5	202
6	135

Pode-se suspeitar da honestidade desse dado? Justifique.

52. Entre os 10 200 torcedores que compareceram ao ginásio para acompanhar uma partida da seleção brasileira de vôlei feminino, apenas um será sorteado para receber uma bola autografada por todas as jogadoras. Sabendo que 75% dos torcedores estão vestidos com uma camiseta da seleção brasileira e que, desses, 52% são do sexo masculino, calcule a probabilidade de uma mulher que está vestida com a camiseta da seleção brasileira ganhar a bola autografada. $\frac{9}{25}$ ou 36%

53. No ano 1900, a população brasileira era composta por 17 438 434 pessoas, e dessas aproximadamente 51% eram do sexo masculino. Já no ano 2014 a população brasileira contava com 203 191 000 pessoas, sendo 104 772 000 do sexo feminino. De 1900 a 2014, a probabilidade de se escolher uma pessoa, entre toda a população brasileira, e esta ser do sexo feminino aumentou ou diminuiu? Em quantos pontos percentuais? Aumentou em cerca de 3 pontos percentuais.

51. sim; Resposta esperada: a probabilidade de se obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica ($16,\overline{6}\%$). Existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 (25%) e 5 ($22,\overline{4}\%$).

Ser consciente

Reciclar: acerte a lixeira!

Você já pensou na quantidade de resíduos sólidos que produzimos diariamente e para onde vai todo este lixo? Se ainda não pensou, está na hora de começar a se preocupar e agir, reduzindo, reutilizando e ajudando a reciclar o seu lixo.

Seria ótimo se não gerássemos lixo algum em nossas atividades cotidianas; porém, como isso é quase impossível, podemos nos esforçar para reduzir nossa produção com atitudes simples, como planejar melhor as compras do mercado, evitando o desperdício de alimentos, substituir itens descartáveis, escolher produtos com menos embalagens e utilizar sacolas retornáveis. Além disso, muito do que seria descartado pode ser reutilizado, criando-se itens com outras finalidades, por exemplo: garrafas de vidro tornam-se itens de decoração, como luminárias ou vasos.

Os resíduos que inevitavelmente precisamos descartar devem ser separados corretamente em nossas residências. Se, por exemplo, resíduos secos (plástico, vidro, papelão etc.) forem misturados com resíduos úmidos (restos de comida, papel higiênico etc.), o percentual de reciclagem pode reduzir de 70% para 1%.

Alguns resíduos precisam receber atenção especial: 1 litro de óleo de cozinha, por exemplo, se descartado inadequadamente, pode contaminar 20 mil litros de água. As pilhas e baterias também não devem ser descartadas em lixeiras comuns, pois contém materiais tóxicos, que podem contaminar o meio ambiente e prejudicar a saúde de coletores.

Em locais onde há algum tipo de coleta seletiva, também é importante separar materiais que não são orgânicos e nem recicláveis. Veja alguns exemplos abaixo.

- Papel: papel higiênico, guardanapos, papel-carbono, papéis metalizados.
- Plástico: cabos de panela, acrílicos, adesivos.
- Metal: esponja de aço, latas de produtos tóxicos, clipes.
- Vidro: lâmpadas, espelhos, louças, vidros temperados.

Fontes de pesquisa: <www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2012/04/separacao-incorreta-do-lixo-dificulta-reciclagem>. Acesso em: 18 jan. 2016. <www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2014/08/oleo-de-cozinha-pode-ser-descartado-de-forma-consciente>. Acesso em: 18 jan. 2016. <www.poli.usp.br/pt/a-poli/comissoes/comissao-poli-usp-recicla/2011-05-26-14-51-46/o-que-e-e-o-que-nao-e-reciclavel.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Dicas para descartar o lixo

É essencial que façamos a separação e o descarte corretos dos resíduos sólidos, pois este é o primeiro passo para a reciclagem.

Analisando com cidadania

a) No município em que você mora há algum tipo de coleta seletiva? Qual? Resposta pessoal.

b) Você tem o hábito de separar o lixo por tipo? Relate como você faz. Resposta pessoal.

c) Pesquise e escreva uma lista de iniciativas que podem ser adotadas na escola para contribuir com o processo de reciclagem do lixo. Resposta pessoal.

Analisando com Matemática

d) Em 2015, segundo dados do Compromisso Empresarial para Reciclagem (Cempre), aproximadamente 83% dos municípios brasileiros não possuíam coleta seletiva. Ao sortear um município brasileiro aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele tenha coleta seletiva? $\frac{17}{100}$ ou 17%

e) Em alguns locais públicos são colocadas lixeiras coloridas a fim de separar o lixo a ser reciclado (vidro, plástico, metal e papel) e o orgânico. As cores atribuídas para cada tipo de material estão representadas abaixo.

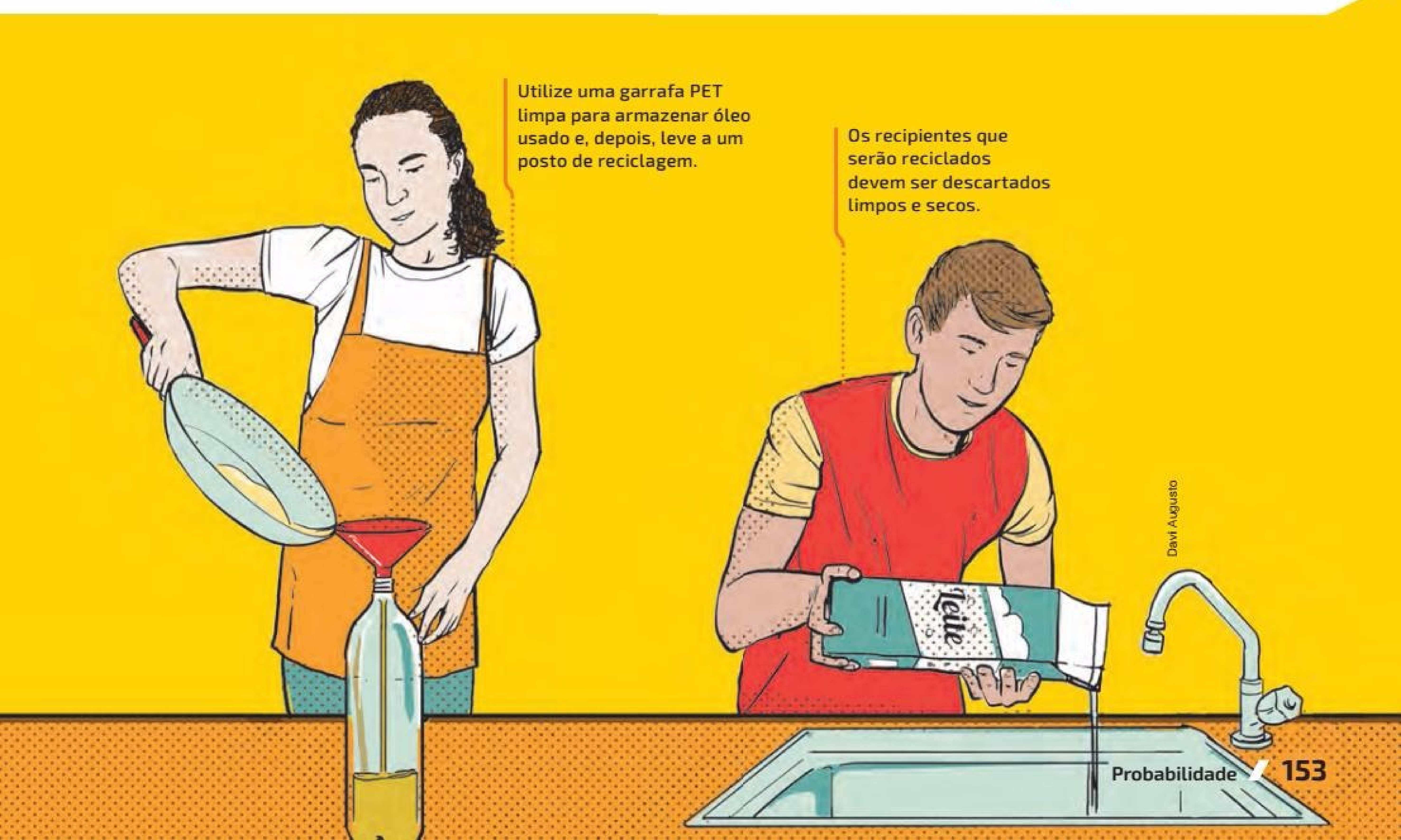
Marcelo Justo/Folhapress

Lixeiras utilizadas para a coleta seletiva.

Veja mais informações sobre reciclagem no *site*:
- <http://tub.im/5qk9ty>

(acesso em: 4 abr. 2016)

Uma pessoa desinformada, ao passar por uma dessas lixeiras, joga aleatoriamente uma embalagem de papel e uma lata metálica em lixeiras diferentes. Qual é a probabilidade dela ter jogado pelo menos um dos materiais na lixeira correta? $\frac{7}{20}$ ou 35%



Davi Augusto

Capítulo 5

capítulo 6

Área de figuras planas

Delpixel/Shutterstock.com

O disco de vinil foi criado em 1948, sendo por muitos anos a principal mídia utilizada na reprodução de músicas.

Veja mais informações sobre os discos de vinil nos *sites*:
- <http://tub.im/jvjeeo>
- <http://tub.im/mtc6nv>

(acesso em: 26 fev. 2016)

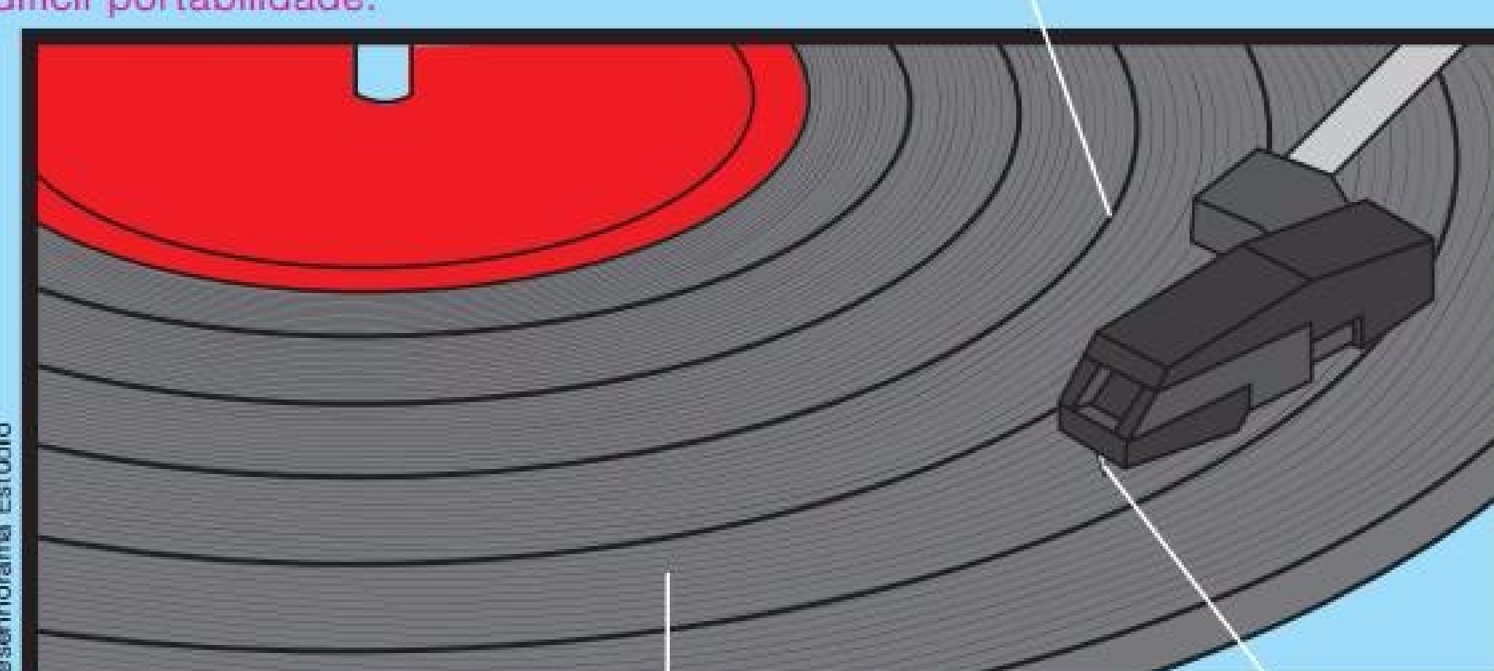
Discos de vinil

Na era da alta tecnologia, na qual conseguimos armazenar muitas músicas em um *smartphone*, há quem ainda goste dos antigos discos de vinil, os chamados "bolachões". E se você acha que isso é coisa de colecionador, está enganado, pois muitas pessoas se encantam com o chiado do som, a beleza e a criatividade dos encartes e também pelo fato de ter que reservar um tempo para ouvir música, em razão da difícil portabilidade dos tocadores.

Para reproduzir o som de um disco de vinil, a agulha do toca-discos desliza entre sulcos muito pequenos, desenhados em forma de espiral no disco, da borda para o centro. A vibração da agulha é transformada em sinal elétrico, que é amplificado e transformado em som perceptível aos nossos ouvidos.

Os discos de vinil, geralmente, são compostos de dois lados com faixas. Se o ouvinte não quiser esperar por uma música gravada no meio do disco, ele precisa levantar a agulha do aparelho e movê-la até a faixa desejada. É possível ter uma ideia do tempo das músicas observando as faixas: quanto maior o tempo da música, maior será a área da faixa da gravação.

A) Resposta esperada: em razão do chiado do som, da beleza e da criatividade dos encartes, e também pelo fato de ter que reservar um tempo especial para ouvir música, já que a maioria dos toca-discos é de difícil portabilidade.



Desenhorama Estúdio

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) De acordo com o texto, por que algumas pessoas ainda se encantam com discos de vinil?

B) Quais aparelhos você utiliza para ouvir músicas e em quais momentos você faz isso?
Resposta pessoal.

C) No disco de vinil, como é possível saber se uma gravação tem mais tempo que a outra?
Resposta esperada: observando as áreas das faixas, quanto maior o tempo da música, maior também será esta área.

Estudando área de figuras planas

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 268 e 269 da seção **Acessando tecnologias**.

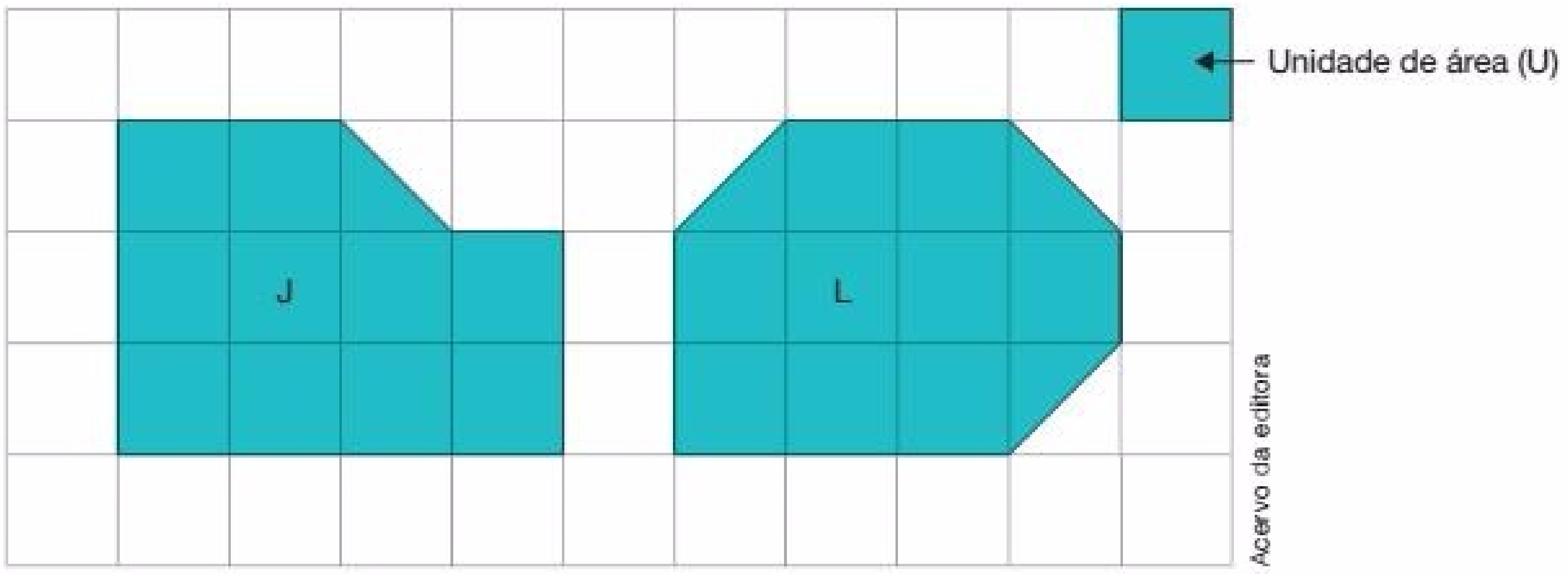
O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Agrimensor: que ou quem está legalmente habilitado para medir, dividir e/ou demarcar terras ou propriedades rurais.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de área correspondem a ela.

Considere, por exemplo, as seguintes figuras:



Observando as figuras **J** e **L**, podemos notar que são necessários 10,5 U para cobrir cada uma delas. Dessa maneira, dizemos que a área de cada uma das figuras é 10,5 U, isto é:

$$\text{área de } \mathbf{J} = \text{área de } \mathbf{L} = 10{,}5\,\text{U}$$

Para medir a área das figuras **J** e **L**, utilizamos **U** como unidade de medida de área. Como a quantidade de unidades **U** é igual, dizemos que essas figuras têm áreas iguais.

www.BibleLandPictures.com/Alamy Stock Photo/Latinstock

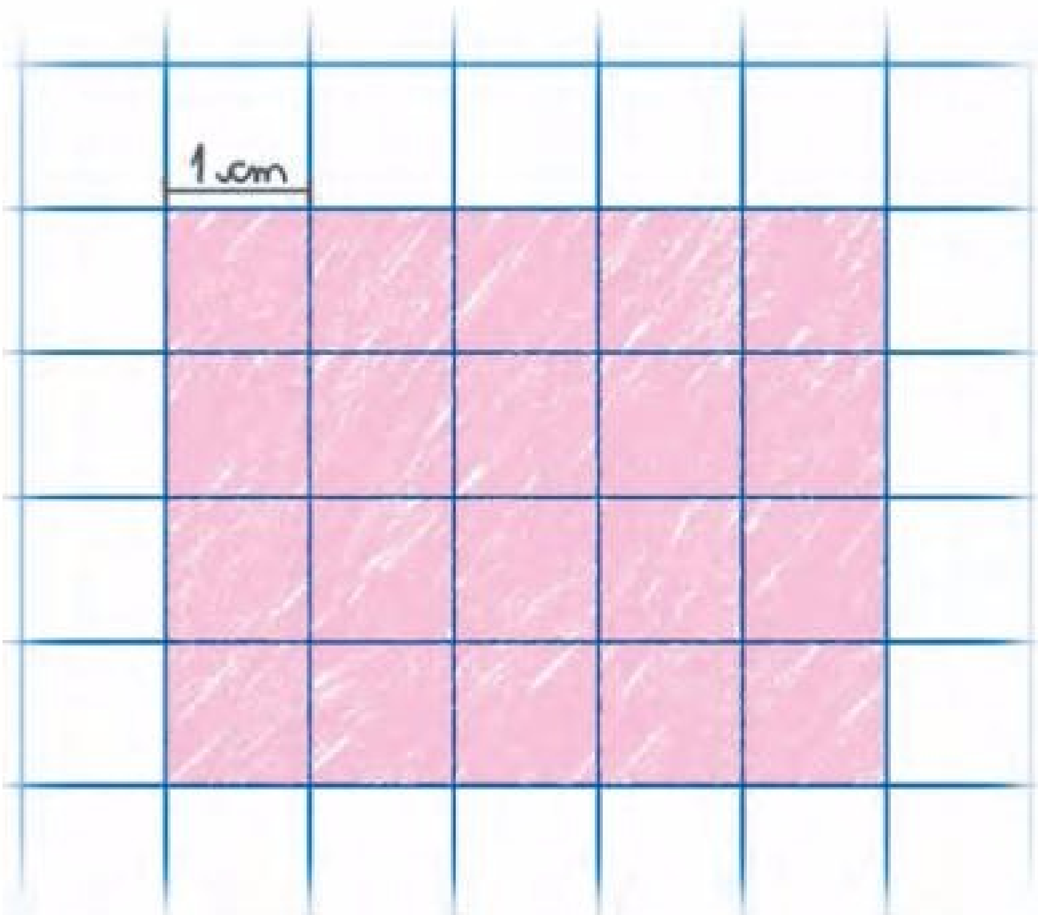
Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena (por volta de 1400 a.C. a 1350 a.C.), na antiga Tebas (Egito), mostrando o trabalho de alguns agrimensores da época.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Área de polígonos

Área do retângulo

O retângulo a seguir foi construído em uma malha quadriculada na qual cada quadradinho tem 1 cm de lado. Note que esse retângulo tem 5 cm de comprimento e 4 cm de largura, e que cada quadradinho que compõe essa malha tem $1\,cm^2$.



Acervo da editora

Retângulo é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos.

Quadrado é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com a mesma medida. Assim, podemos dizer que o quadrado é um caso particular de retângulo.

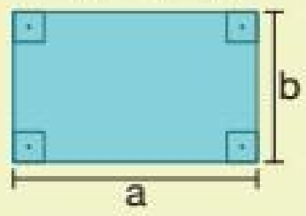
Podemos calcular o número de quadradinhos que formam o retângulo da seguinte forma:

$$4 \cdot 5 = 20 \text{ ou } 5 \cdot 4 = 20$$

Assim, são necessários 20 quadradinhos de $1\,cm^2$ para cobrir o retângulo, ou seja, sua área corresponde a $20\,cm^2$.

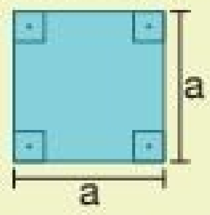
De maneira geral, podemos calcular a área de um retângulo multiplicando a medida de seu comprimento pela medida de sua largura.

$$A = a \cdot b$$



Para calcular a área do quadrado, utilizamos a mesma ideia, isto é, multiplicamos a medida de seus lados. Como o quadrado tem todos os lados com medidas iguais, temos:

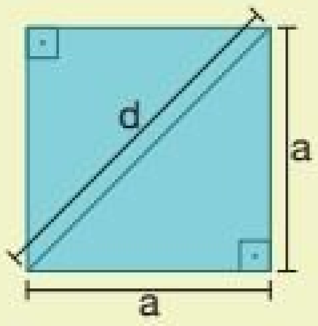
$$A = a \cdot a \Rightarrow A = a^2$$



Também podemos calcular a área do quadrado utilizando a medida da diagonal. Observe:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2\underbrace{a^2}_{A} \Rightarrow A = \frac{d^2}{2}$$

A introdução do conceito de área do retângulo foi trabalhada com medidas inteiras para os lados; contudo, explique aos alunos que as fórmulas obtidas podem ser utilizadas para medidas não inteiras também.



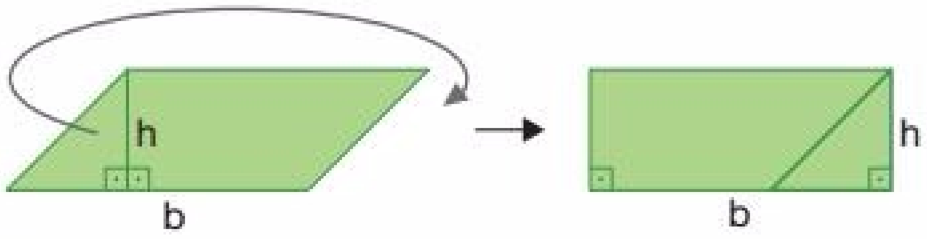
Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 6

Área do paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

No paralelogramo, b corresponde à medida da base, e h, à medida da altura. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões b e h e mesma área do paralelogramo.



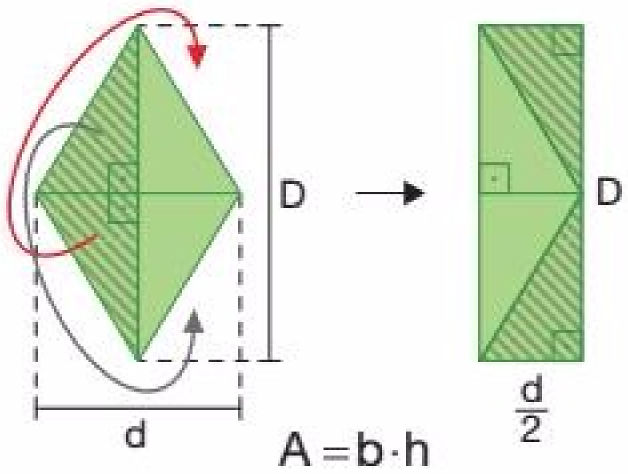
Calculamos a área de um paralelogramo multiplicando a medida de sua base pela medida de sua altura.

$$A = b \cdot h$$

Área do losango

Losango é todo paralelogramo com os quatro lados de mesma medida.

No losango, D corresponde à medida da diagonal maior, e d, à medida da diagonal menor. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões D e $\frac{d}{2}$ e mesma área do losango.



$A = b \cdot h$

A área do retângulo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_r = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$.

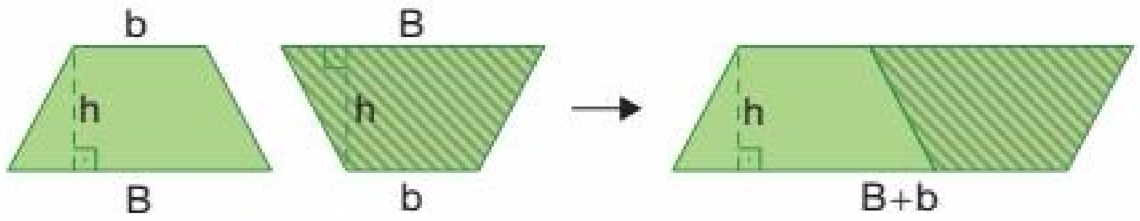
Calculamos a área de um losango multiplicando a medida de suas diagonais e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área do trapézio

Trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.

No trapézio, B corresponde à medida da base maior; b, à medida da base menor; e h, à medida da altura. Com outro trapézio congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja medida da altura é h, e a da base, $B+b$.



Ilustrações: Acervo da editora

A área do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = (B+b) \cdot h$.

Como a área do trapézio corresponde à metade da área do paralelogramo, temos:

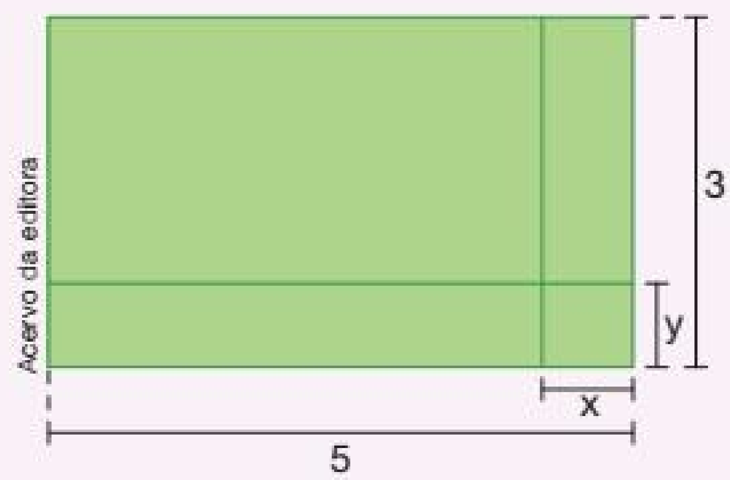
$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Calculamos a área de um trapézio adicionando a medida da base maior com a da menor, multiplicando a soma obtida pela medida da altura e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Atividades resolvidas

R1. (Enem-MEC) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 − x)(3 − y).



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) 2xy b) 15 − 3x c) 15 − 5y d) −5y − 3x e) 5y + 3x − xy

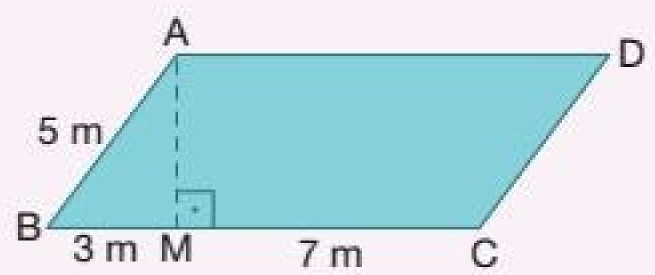
Para obter a área perdida do forro, calculamos a diferença entre as áreas dos retângulos de lados 5 e 3 e de lados $(5-x)$ e $(3-y)$.

$$(5\cdot 3)-\left[(5-x)(3-y)\right]=15-(15-5y-3x+xy)=15-15+5y+3x-xy=\boxed{5y+3x-xy}$$

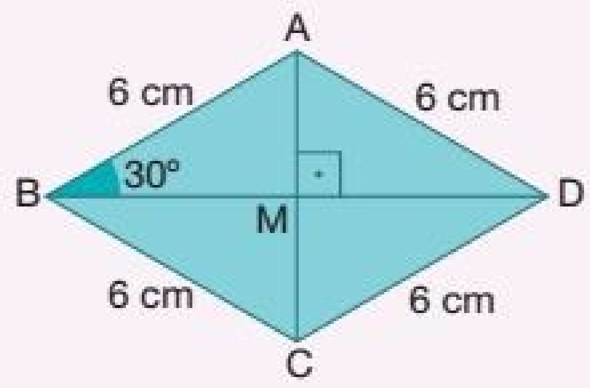
Portanto, a alternativa correta é a **e**.

R2. Calcule a área das figuras a seguir.

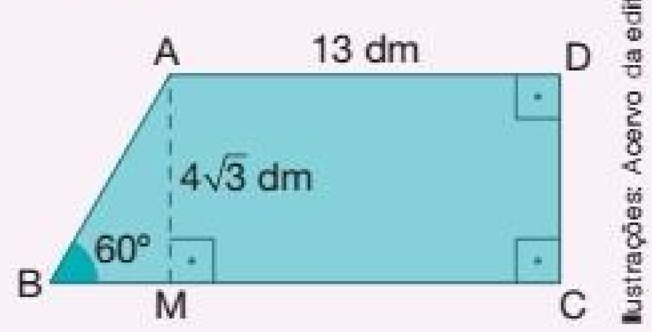
a) paralelogramo



b) losango



c) trapézio



Resolução

a) Inicialmente, calculamos a medida da altura $\overline{AM}$ do paralelogramo utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2=(BM)^2+(AM)^2\Rightarrow 5^2=3^2+(AM)^2\Rightarrow (AM)^2=25-9\Rightarrow AM=\sqrt{16}=4\rightarrow 4\text{ m}$$

Assim, a área do paralelogramo é dada por: $S=BC\cdot AM=\underbrace{10}_{3+7}\cdot 4=40\rightarrow \boxed{40\text{ m}^2}$.

b) Calculando as medidas das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ do losango, temos:

- $\cos 30°=\dfrac{BM}{AB}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\frac{BD}{2}}{6}\Rightarrow BD=6\sqrt{3}\rightarrow 6\sqrt{3}\text{ cm}$
- $\operatorname{sen} 30°=\dfrac{AM}{AB}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{AC}{2}}{6}\Rightarrow AC=6\rightarrow 6\text{ cm}$

Assim, a área do losango é dada por: $S=\dfrac{BD\cdot AC}{2}=\dfrac{6\sqrt{3}\cdot 6}{2}=18\sqrt{3}\rightarrow \boxed{18\sqrt{3}\text{ cm}^2}$.

c) No triângulo retângulo AMB, temos: $\operatorname{tg} 60°=\dfrac{AM}{BM}\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{BM}\Rightarrow BM=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4\rightarrow 4\text{ dm}$

Logo:

$$BC=BM+\underbrace{CM}_{CM=AD}=4+13=17\rightarrow 17\text{ dm}$$

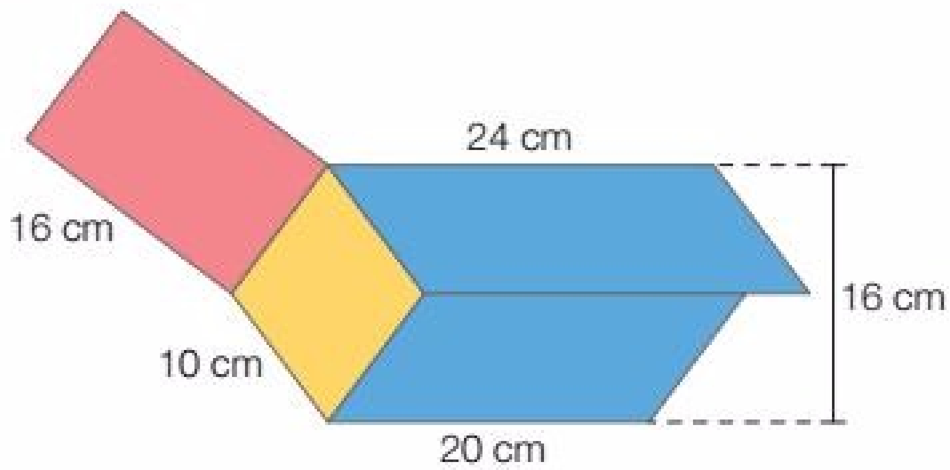
Assim, a área do trapézio é dada por:

$$S=\frac{(BC+AD)\cdot AM}{2}=\frac{(17+13)\cdot 4\sqrt{3}}{2}=\frac{120\sqrt{3}}{2}=60\sqrt{3}\rightarrow \boxed{60\sqrt{3}\text{ dm}^2}$$

Atividades

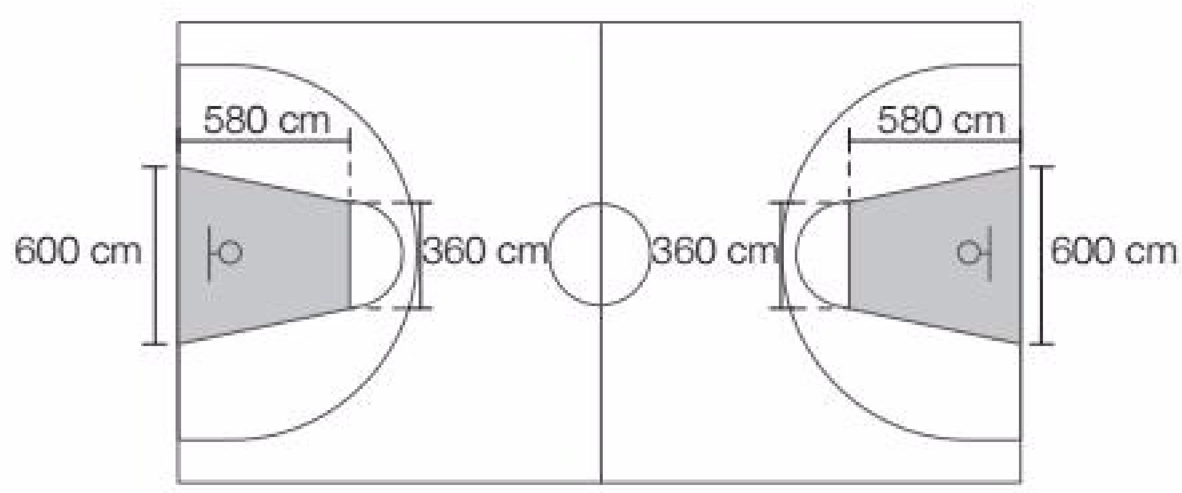
Anote as respostas no caderno.

1. De acordo com as medidas indicadas, calcule a área total da figura, sabendo que os polígonos em vermelho, em azul e em amarelo são, respectivamente, retângulo, paralelogramo e losango. 608 cm^2



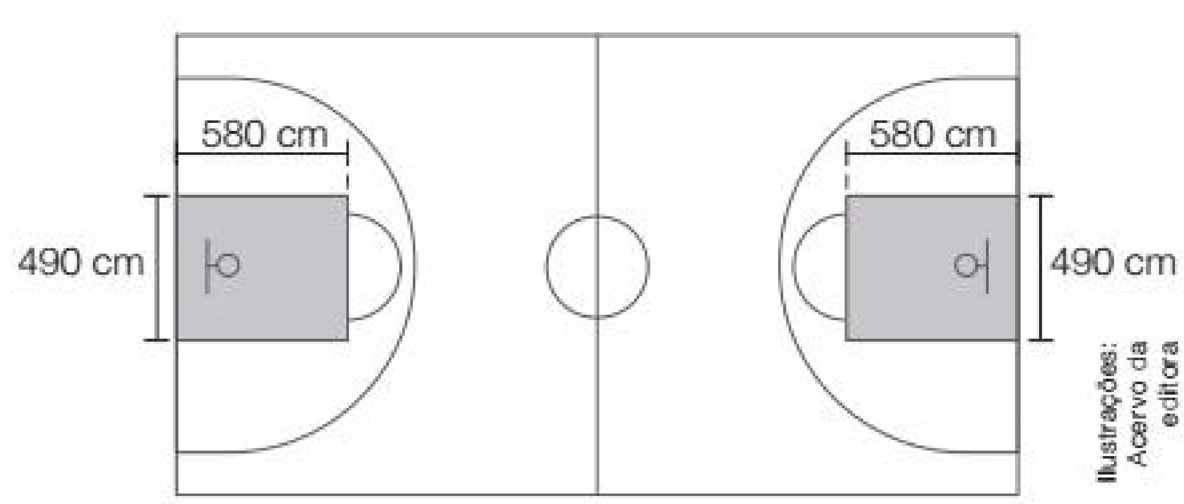
Acervo da editora

2. (Enem-MEC) O esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Ilustrações: Acervo da editora

Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a): a

a) aumento de 5 800 cm^2.

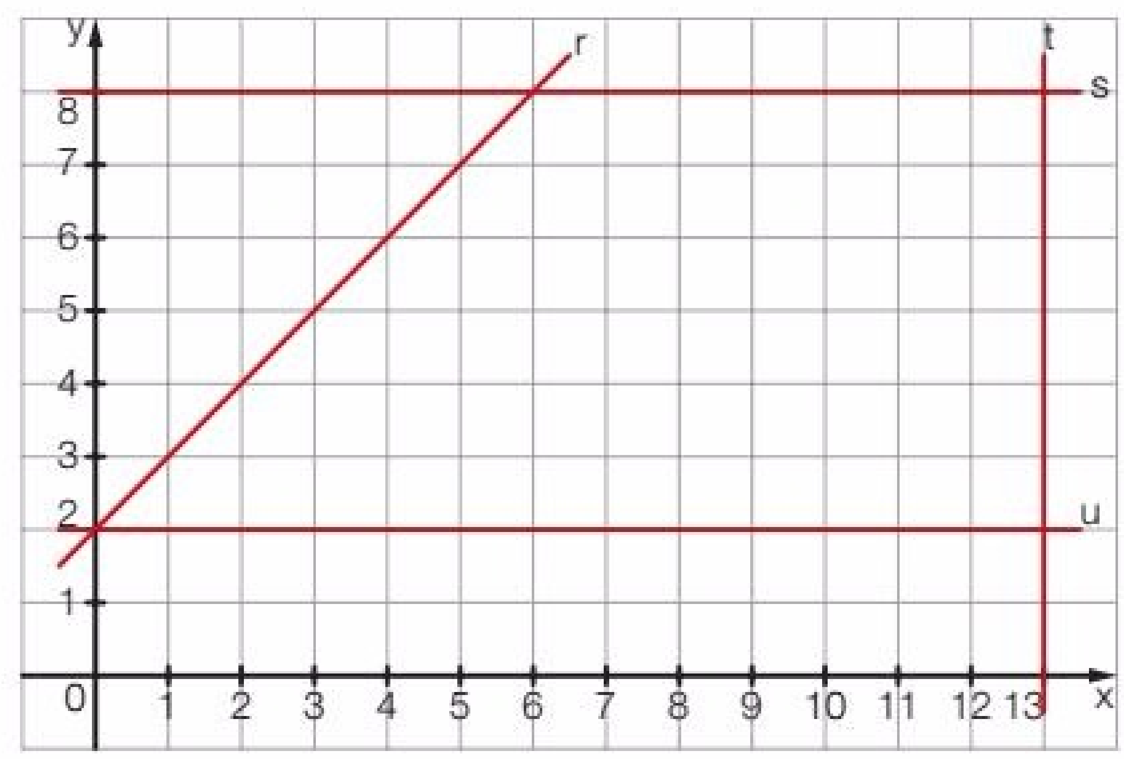
b) aumento de 75 400 cm^2.

c) aumento de 214 600 cm^2.

d) diminuição de 63 800 cm^2.

e) diminuição de 272 600 cm^2.

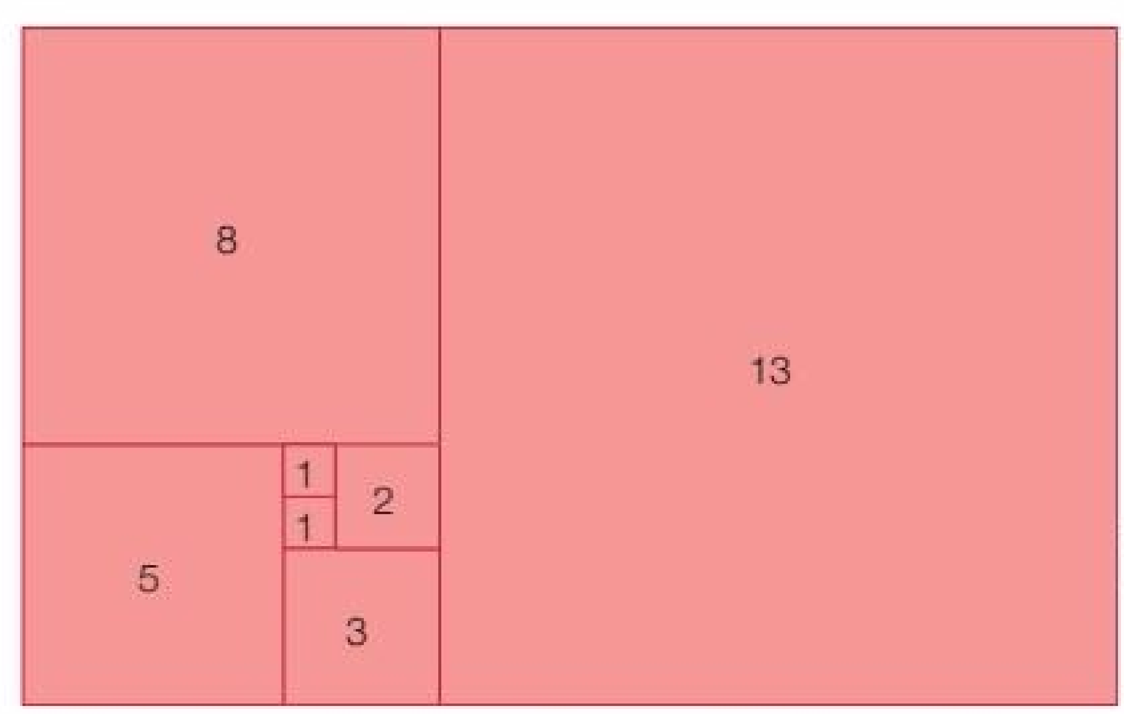
3. Calcule a área da região externa ao retângulo de vértices $(7, 4)$, $(11, 4)$, $(11, 6)$ e $(7, 6)$ e delimitada pelas retas *r*, *s*, *t* e *u*, sabendo que o plano cartesiano está graduado em decímetros. 52 dm^2



Acervo da editora

4. Um dos fenômenos que podem ser observados na natureza é a presença da chamada sequência de Fibonacci, como, por exemplo, no padrão de crescimento de algumas plantas e outros seres vivos. Nela, o 1º e o 2º termo são iguais a 1, e cada termo seguinte é obtido por meio da adição dos dois antecedentes $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$.

Uma das maneiras de obter a sequência de Fibonacci é por meio da justaposição de quadrados seguindo o padrão proposto:



Acervo da editora

Na figura, a medida do lado de cada quadrado está indicada em seu interior.

Dessa maneira, obtemos a sequência de Fibonacci, que, neste caso, está escrita em função da medida do lado de cada quadrado.

Considerando que a medida dos lados de cada quadrado apresentado na figura acima está em metros, calcule a área total da figura obtida ao justapor o quadrado que corresponde, na sequência de Fibonacci, ao:

a) 8º termo 714 m^2

b) 9º termo 1 870 m^2

5. Para expor seus trabalhos escolares, os alunos de uma classe devem imprimi-los em uma folha de papel A4, cujas dimensões são 210 mm × 297 mm, e posteriormente fixá-los em murais retangulares de 1,28 m de altura por 2,38 m de comprimento.

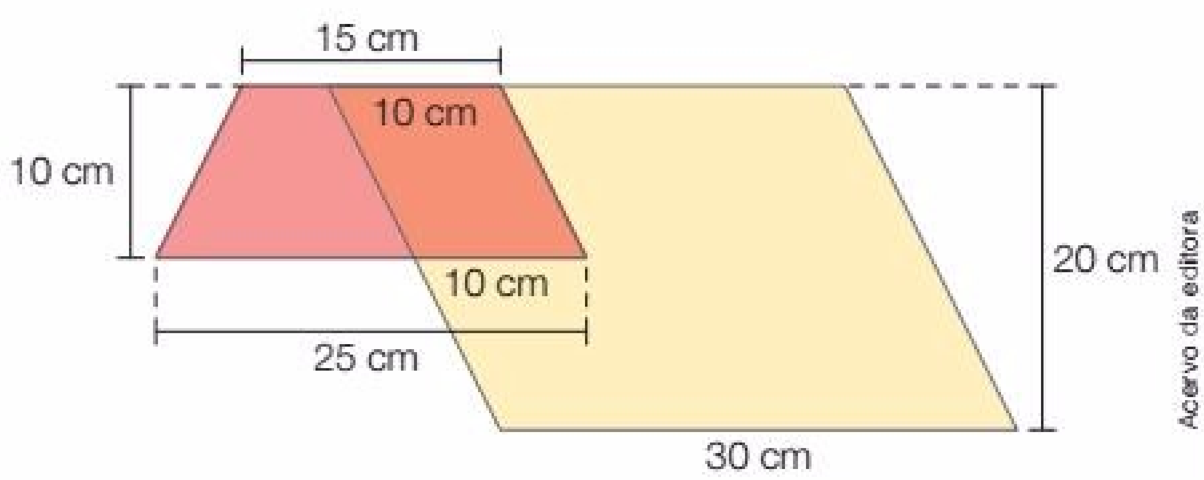
Para que sejam fixados no mural, os alunos podem optar por imprimir todos os trabalhos no estilo retrato (lado maior na vertical) ou no estilo paisagem (lado maior na horizontal). Considerando que nenhuma página deve sobrepor outra e que elas não podem superar os limites do mural, resolva.

a) Quantos centímetros quadrados tem cada folha de papel A4? 623,7 cm^2

b) Qual opção de impressão possibilita o melhor aproveitamento de cada mural: estilo retrato ou paisagem? estilo paisagem

c) Se em um mural forem fixados apenas trabalhos impressos no estilo retrato, na maior quantidade possível, qual será a área, em centímetros quadrados, que ficará desocupada nesse mural? 3 021,2 cm^2

6. Determine a área total da figura, sabendo que ela foi construída por meio de sobreposição de trapézio e paralelogramo. 700 cm^2



7. Determinada fábrica produz bobinas de papel toalha do tipo **A**, com 20 cm de largura e 100 m de comprimento. Nessa mesma fábrica, são produzidas também bobinas do tipo **B**, com 22 cm de largura e 105 m de comprimento. Considerando que o preço de cada bobina seja proporcional à correspondente área de papel toalha, responda.

a) Quantos metros quadrados de papel é enrolado na bobina do tipo **A**? E na do tipo **B**? 20 m^2; 23,1 m^2

b) Quantos por cento mais cara é a bobina do tipo **B**, em relação à do tipo **A**? 15,5%

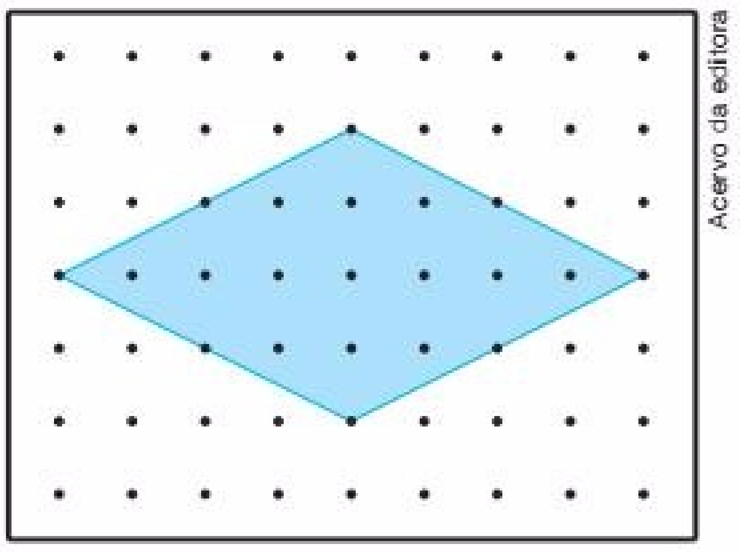
8. O desmatamento da chamada Amazônia Legal, no Brasil, foi estimado em 5 831 km^2 no ano de 2015.

Esse desmatamento corresponde à área de aproximadamente quantos campos de futebol com 30 m de largura e 120 m de comprimento? 1 619 722 campos de futebol

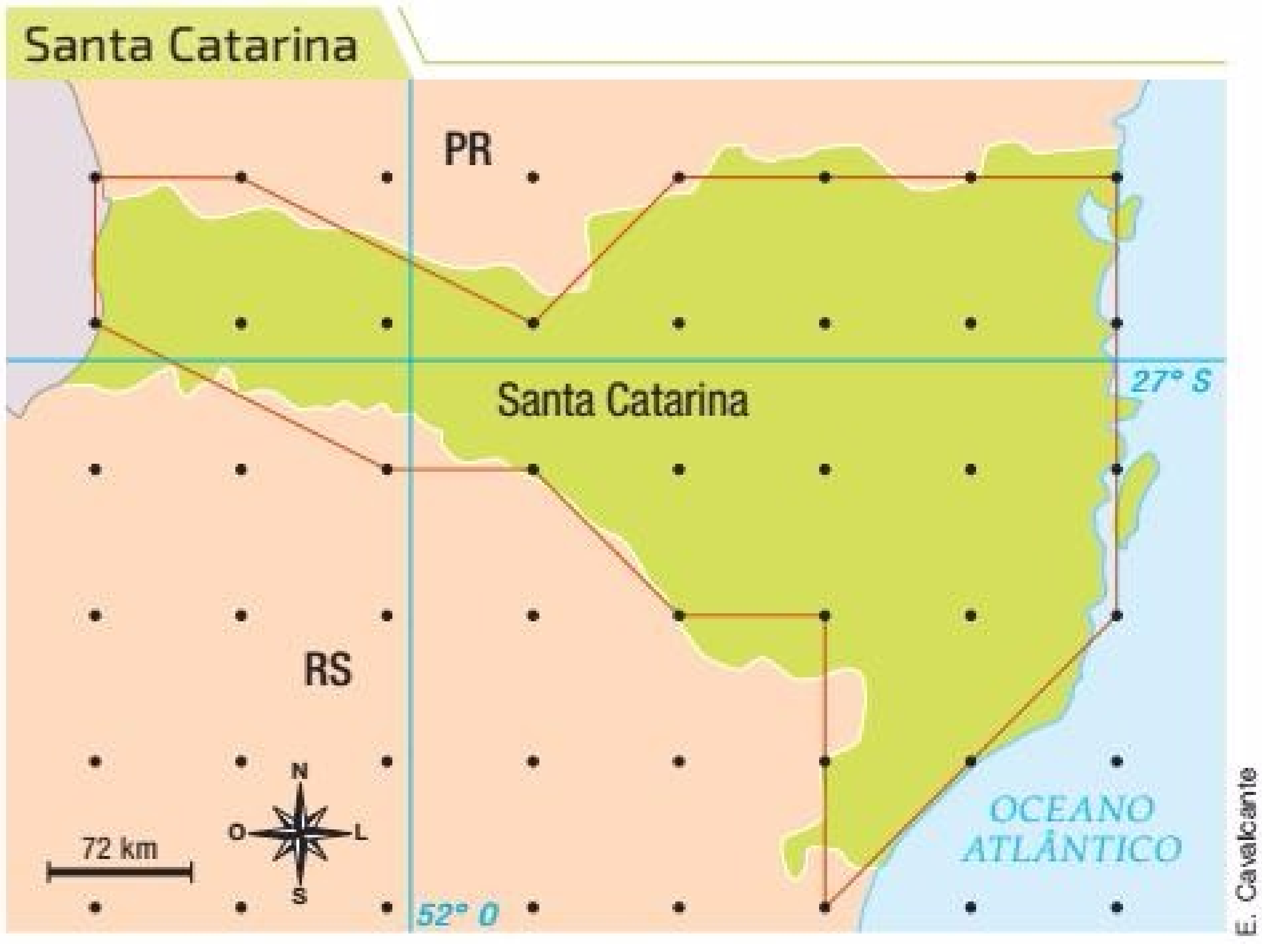
9. Em 1899, o matemático Georg Alexander Pick publicou uma fórmula válida para a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma **rede** no plano (conjunto de pontos dispostos de maneira regular vertical e horizontalmente, tal que a menor distância entre dois pontos é igual a 1u). A borda do polígono deve ser uma poligonal fechada, que pode ser percorrida sem passar duas vezes pelo vértice.

A fórmula é dada pela expressão $A = 0{,}5 \cdot B + C - 1$, em que *A* é a área do polígono, *B* é o número de pontos da rede situados na borda do polígono e *C* é o número de pontos da rede situados na região interior do polígono.

a) Calcule, por meio da fórmula de Pick, a área da figura abaixo. 16 u^2



b) Uma curiosa aplicação da fórmula está no cálculo aproximado de áreas utilizando mapas geográficos. Por exemplo, para estimar a área de Santa Catarina, pela fórmula de Pick, basta construir uma rede de pontos sobre o mapa, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm, e traçar um polígono com vértices na rede que mais se assemelhe ao estado.



Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Por meio da fórmula de Pick e com auxílio do mapa acima, calcule a área aproximada de Santa Catarina. Compare sua resposta com a área de Santa Catarina estimada pelo IBGE: 95 346,181 km^2. 88 128 km^2; Resposta pessoal.

Contexto — A medição da terra

10. O surgimento das medições de área está relacionado à necessidade, no decorrer da história da humanidade, que as civilizações tiveram de demarcar territórios, sobretudo nas regiões destinadas ao plantio.

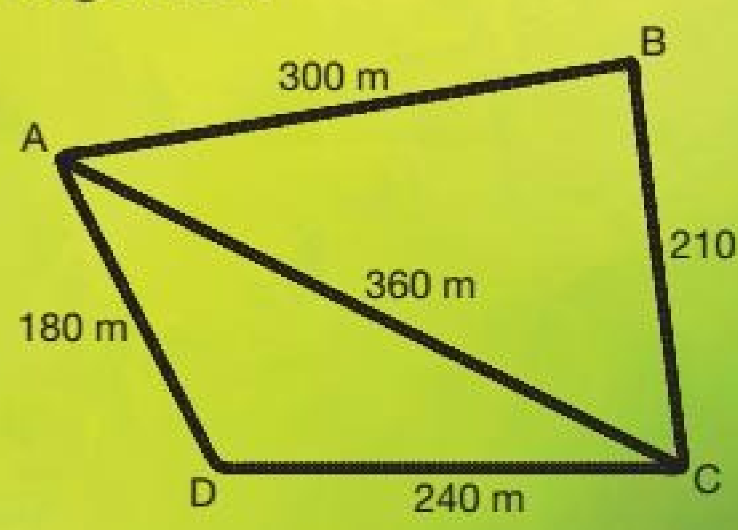
No antigo Egito, por exemplo, às margens do rio Nilo, onde essa civilização se desenvolveu, as terras que estavam demarcadas e repartidas entre os camponeses tinham, anualmente, parte de sua extensão inundada pelo rio, que, ao voltar ao nível normal, deixava o solo fértil e propício ao plantio, mas também carregava consigo as demarcações dos lotes. Para repartir novamente essas terras, agrimensores realizavam medições de área, devolvendo aos camponeses a parte correspondente que estava submersa. Esses agrimensores utilizavam cordas com unidades de comprimento preestabelecidas na realização do trabalho e, por consequência, ficaram conhecidos como “esticadores de cordas”.

Em registros antigos, como no Papiro de Rhind, há diversos relatos e problemas envolvendo áreas de polígonos, círculos, entre outros. Esses registros evidenciam o quanto já se dava importância a medições de área. O problema da quadratura do círculo, em que se pedia a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo dado, é um dos mais emblemáticos nesse sentido, principalmente porque sua resolução não é possível; apenas uma aproximação, utilizando régua e compasso.

Cubação

No método da cubação, faz-se uso de um procedimento já utilizado no antigo Egito, que consiste em aproximar figuras para facilitar o cálculo da área aproximada do terreno. No exemplo a seguir, a região indicada pelo quadrilátero ABCD é aproximada por um retângulo A'B'C'D'.

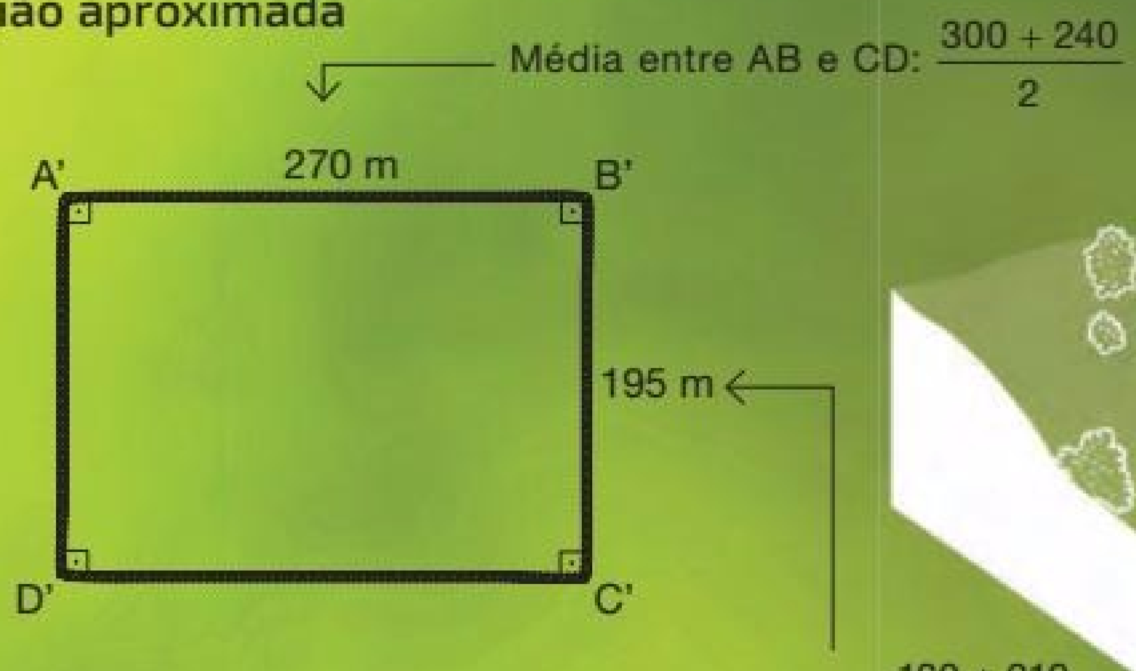
Região real

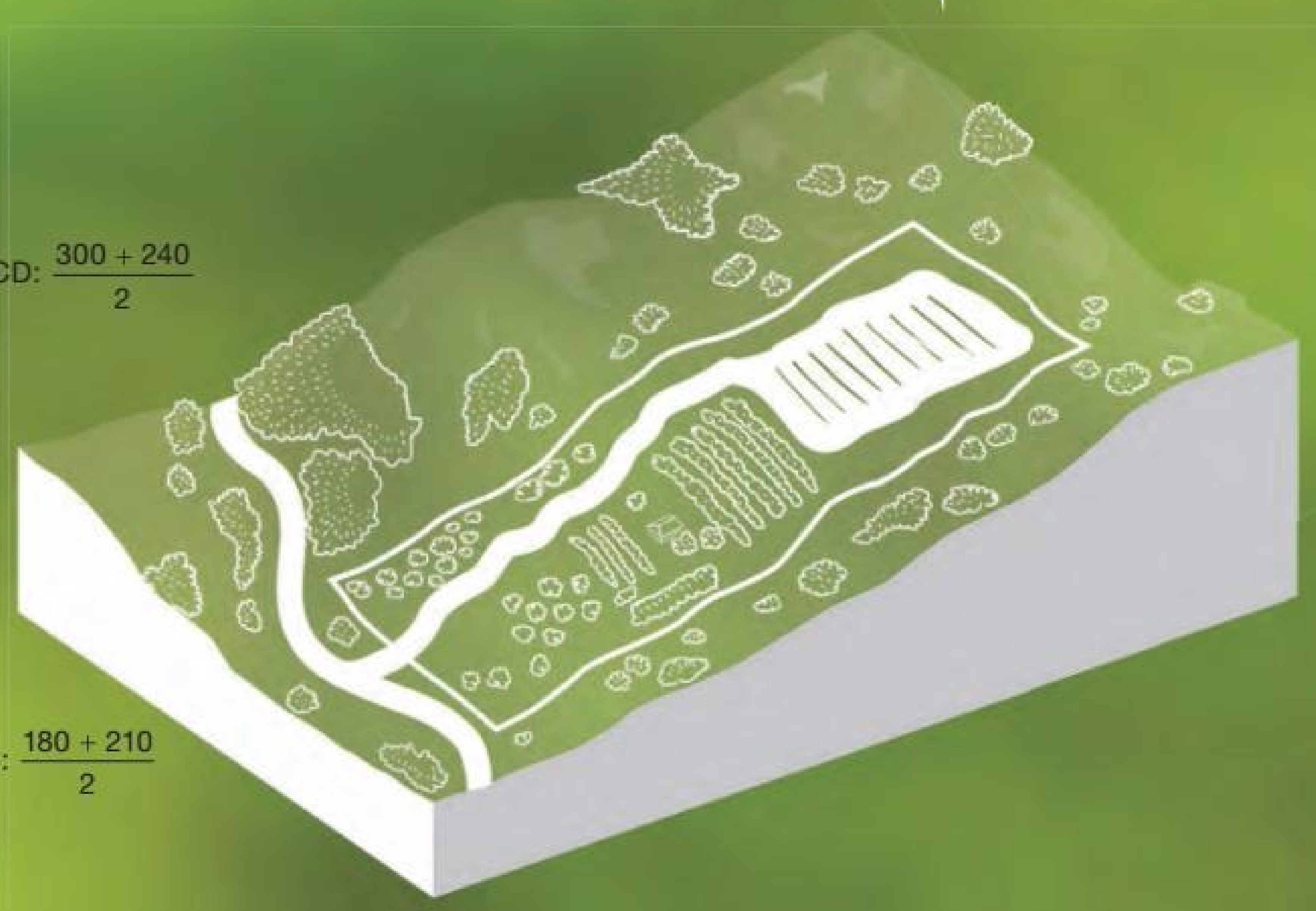


Área real

$A_1 = \sqrt{435 \cdot 135 \cdot 225 \cdot 75} + \sqrt{390 \cdot 210 \cdot 30 \cdot 150} =$
$= 50\,677{,}56 \rightarrow 50\,677{,}56\ m^2$

Região aproximada





Área aproximada

$A_2 = 270 \cdot 195 = 52\,650 \rightarrow 52\,650\ m^2$

Ilustrações: Camila Ferreira

Atualmente, diversos métodos e instrumentos são empregados na tarefa de medição de áreas, como a utilização de aparelhos GPS, medidores a laser e fotografias aéreas e por satélites. Isso levou a resultados mais precisos e ágeis.

Porém, há, ainda, principalmente em algumas populações camponesas, o hábito de realizar medições de terras utilizando métodos de aproximação. Um desses métodos, chamado cubação, é utilizado em diversas regiões do Brasil.

A cubação consiste em medir o contorno do terreno cuja área será calculada, considerando seus acidentes de relevo (inclinações, ondulações, entre outros), geralmente com o uso de cordas, assim como os antigos egípcios faziam. A área obtida nesse sistema costuma ser denominada efetiva ou desenvolvida. Embora esse método divirja da medição topográfica, aquela em que é realizada a projeção do contorno do terreno sobre um plano horizontal, servindo para fins de escritura legal, a cubação é utilizada pelos camponeses para previsões de plantio, financiamentos de safra etc.

a) A necessidade de realizar medições de terrenos destinados à agricultura, sobretudo aqueles cujas demarcações eram perdidas nas cheias do rio Nilo.

b) aproximadamente 3,9%

c) 200 000 m²; 250 000 m²

d) Resposta pessoal.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

KNIJNIK, Gelsa. **A matemática da cubação da terra**. Scientific American Brasil, São Paulo: Duetto Editorial, n. 11, p. 86-89. Edição Especial Etnomatemática.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Que fato levou o antigo Egito a obter grande desenvolvimento no cálculo de áreas?

b) No esquema apresentado, em relação à área real da região, o erro da área aproximada foi de aproximadamente quantos por cento?

c) Suponha que um terreno tenha a forma de um trapézio isósceles com os lados medindo 500 m, 200 m, 500 m e 800 m. Qual é a área real desse terreno? Qual é a área aproximada desse terreno, pelo método da cubação?

d) Construa um quadrilátero que não seja um paralelogramo ou um trapézio e indique medidas para os lados. Depois, troque com um colega para que cada um determine a área aproximada, pelo método da cubação, do quadrilátero construído pelo outro.

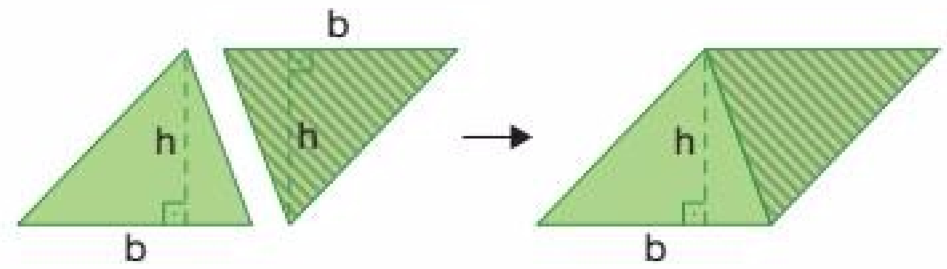
O aparelho de GPS é um dos instrumentos utilizados para delimitar e calcular áreas.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens Eimantas Buzas e ZaZa Studio/Shutterstock.com

Área do triângulo

Triângulo é todo polígono de três lados. Aquele em que um dos ângulos internos é reto, chamamos de **triângulo retângulo**; aquele que possui todos os lados com medidas iguais chamamos de **triângulo equilátero**.

No triângulo, *b* corresponde à medida da base, e *h*, à da altura. Com outro triângulo congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja medida da altura é *h*, e a da base é *b*.



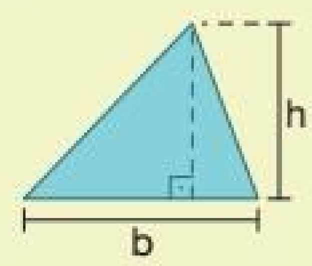
A área do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = b \cdot h$.

Como a área do triângulo corresponde à metade da área do paralelogramo, temos:

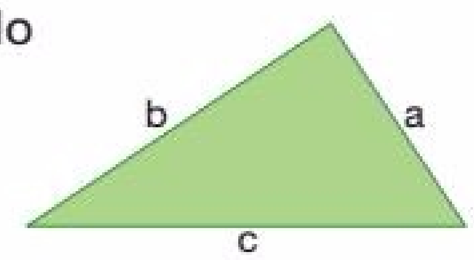
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Calculamos a área de um triângulo multiplicando a medida da base pela medida da altura e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



Também podemos calcular a área de um triângulo conhecendo apenas as medidas de seus três lados.



No triângulo, *a*, *b* e *c* correspondem às medidas dos lados.

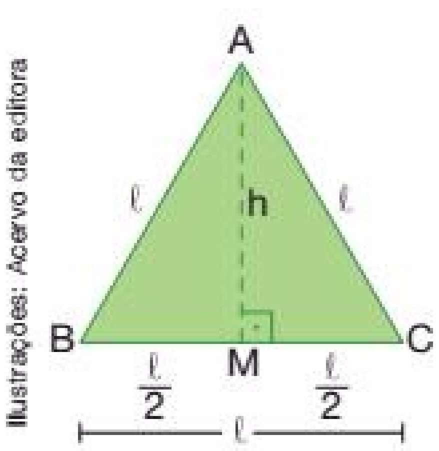
Diga aos alunos que o semiperímetro corresponde à metade da soma das medidas de todos os lados de um polígono.

A fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como fórmula de Herão, em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu por volta da segunda metade do século I d.C. Em sua obra **A métrica**, são tratadas as áreas de várias figuras planas e encontra-se a dedução dessa fórmula.

Utilizando o **semiperímetro** $p = \frac{a+b+c}{2}$, podemos demonstrar que a área desse triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

No caso do triângulo equilátero, podemos ainda calcular a área por meio de outra fórmula.

No triângulo equilátero de lado medindo ℓ, traçamos a altura $\overline{AM}$.



Ilustrações: Acervo da editora

Em um triângulo equilátero, a altura também corresponde à mediatriz e à bissetriz.

Lembre aos alunos o que é mediatriz e bissetriz.

Note que o ΔAMC é retângulo. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determinamos a medida da altura desse triângulo em função da medida ℓ do lado.

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ em $A = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

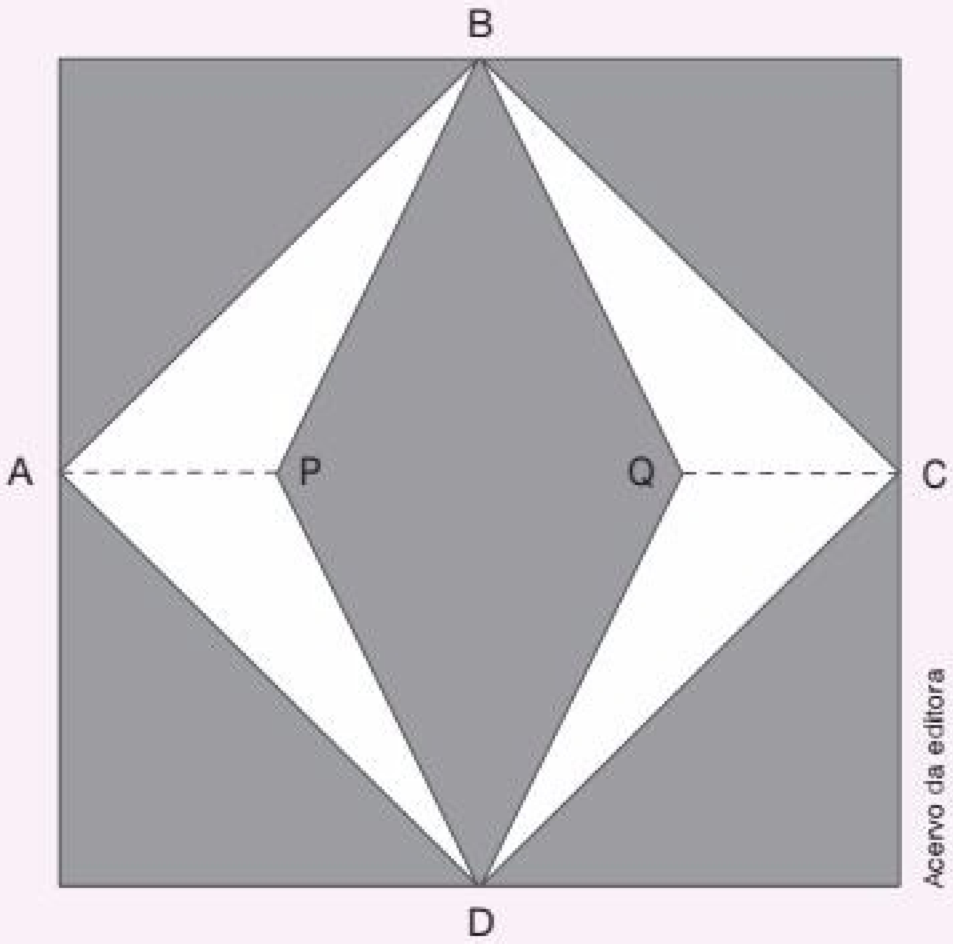
Calculamos a medida da altura *h* e a área *A* de um triângulo equilátero em função da medida ℓ do lado utilizando, respectivamente, as fórmulas $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Atividades resolvidas

R3. (Enem-MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?



a) R$ 22,50 b) R$ 35,00 c) R$ 40,00 d) R$ 42,50 e) R$ 45,00

Resolução

- Área da parte mais clara

Essa parte pode ser decomposta em 4 triângulos congruentes cuja base tem a medida do segmento AP, ou seja, $\frac{1}{4}$ m, e a medida da altura corresponde à metade da medida do lado do quadrado, ou seja, $\frac{1}{2}$ m. Logo, sua área é:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}\ m^2$$

- Área da parte sombreada

A área dessa parte corresponde à diferença entre a área do quadrado e a área da parte mais clara, ou seja:

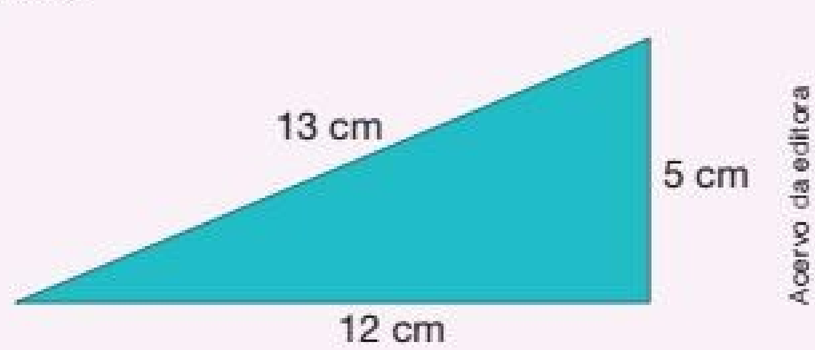
$$A_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4}\ m^2$$

Segue que os custos dos materiais correspondem a:

$$A_1 \cdot 50 + A_2 \cdot 30 = \frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 35 \rightarrow \text{R\$ } 35,00$$

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R4. Calcule a área do triângulo.



Resolução

Utilizando a fórmula do semiperímetro para a = 5, b = 12 e c = 13, temos:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30 \rightarrow \boxed{30\ cm^2}$$

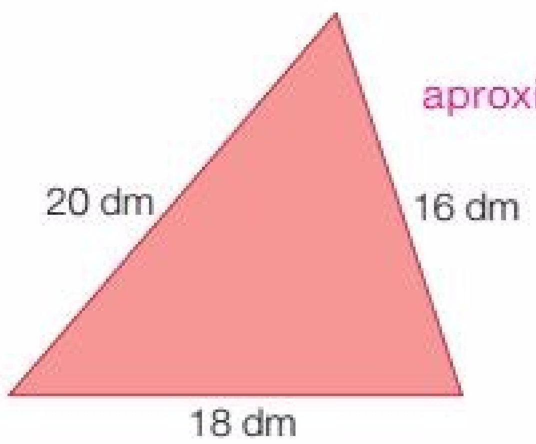
Note que o triângulo é retângulo $(13^2 = 12^2 + 5^2)$, com base medindo 12 cm e altura medindo 5 cm. Logo, outra maneira de obter sua área é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \rightarrow 30\ cm^2$$

Capítulo 6

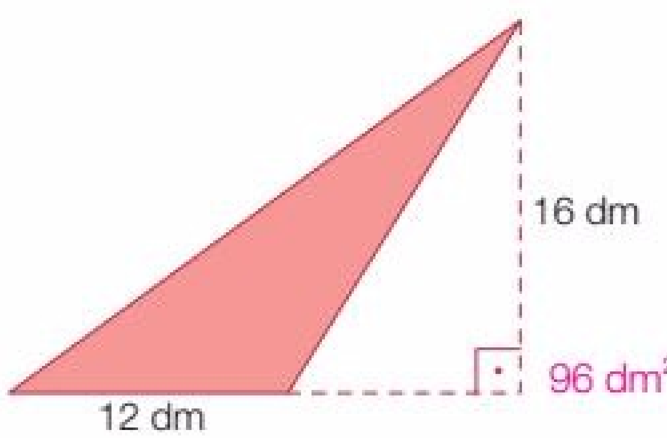
11. Calcule a área de cada triângulo.

a)



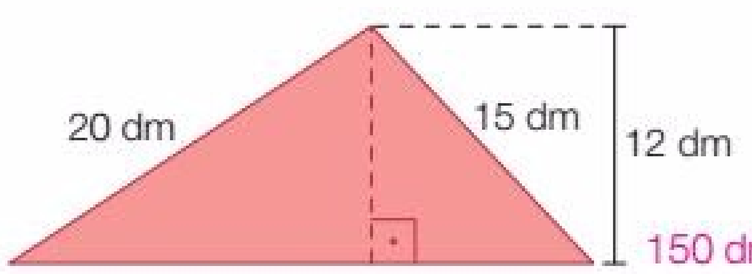
aproximadamente $136{,}8\ dm^2$

b)



$96\ dm^2$

c)



$150\ dm^2$

Ilustrações: Acervo da editora

12. Utilizando a fórmula de Herão, calcule a área de um triângulo cujos lados medem:

a) 5 m, 7 m e 4 m $4\sqrt{6}\ m^2$

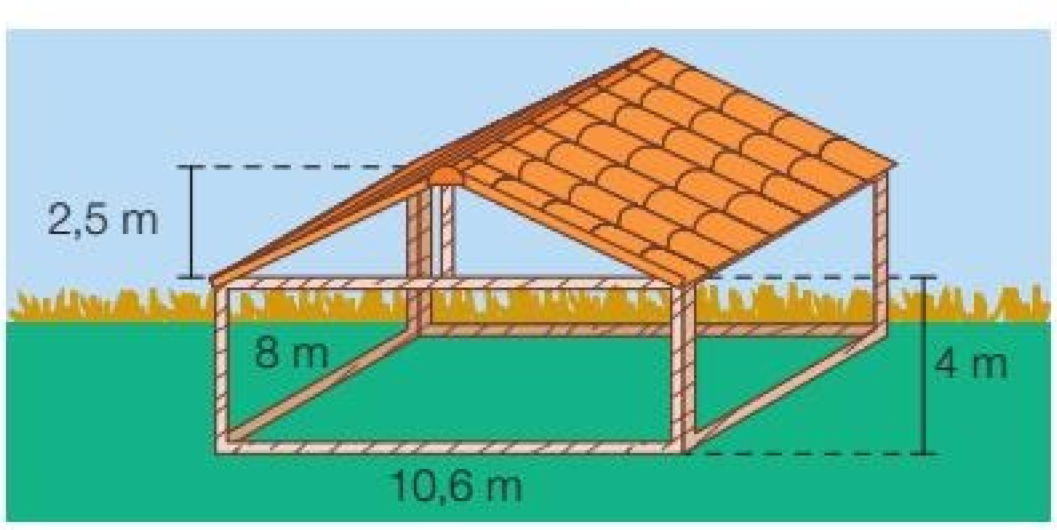
b) 12 dm, 15 dm e 9 dm $54\ dm^2$

c) 2 km, 3 km e 4 km $\frac{3\sqrt{15}}{4}\ km^2$

d) 14 cm, 16 cm e 10 cm $40\sqrt{3}\ cm^2$

13. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede $\sqrt{3}$ cm e a hipotenusa mede $2\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do outro cateto e a área desse triângulo. $\sqrt{5}$ cm; $\frac{\sqrt{15}}{2}\ cm^2$

14. Em certo sítio, o proprietário construiu uma estrutura de madeira, como ilustrada abaixo, que será utilizada como armazém. As paredes, portas e janelas desse armazém serão construídas com tábuas de madeira.



Acervo da editora

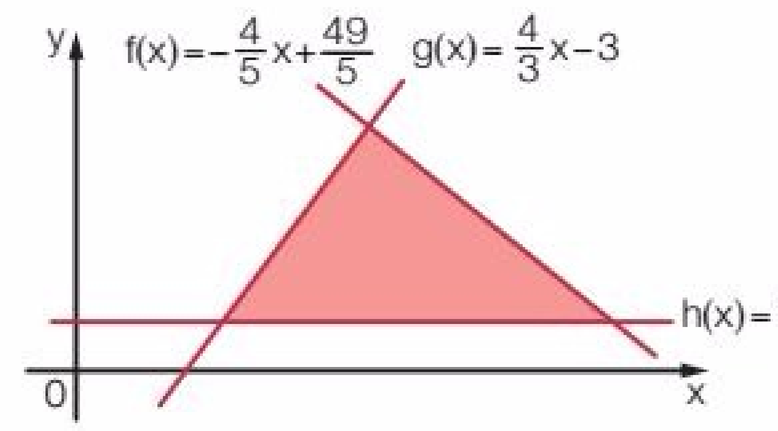
De acordo com a imagem, responda.

a) Qual será a área ocupada por esse armazém? $84{,}8\ m^2$

b) Quantos metros quadrados de madeira, no mínimo, serão necessários para construir as paredes do armazém sabendo que as portas e janelas ocuparão $8\ m^2$? $167{,}3\ m^2$

15. Desafio

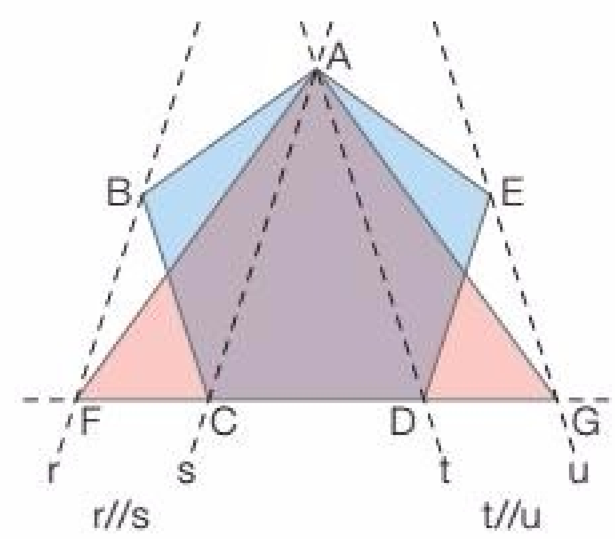
Calcule a área do triângulo determinado pelos gráficos das funções *f*, *g* e *h*, sabendo que os eixos estão graduados em metros. $16\ m^2$



Acervo da editora

16. Classifique a afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, justifique.

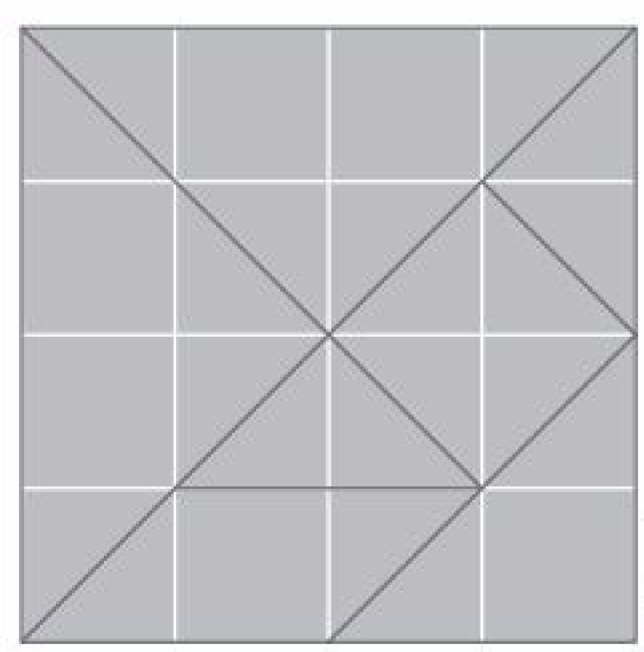
"Na figura, as áreas do pentágono ABCDE e do triângulo AFG são iguais." Resposta no final do livro.



Acervo da editora

17. Qual é a altura de um triângulo equilátero cuja área é $9\sqrt{3}\ cm^2$? $3\sqrt{3}$ cm

18. Observe o Tangram, um quebra-cabeça chinês.



Tangram em uma malha quadriculada.

Com as 7 peças do Tangram podemos formar várias figuras, como o hexágono abaixo.

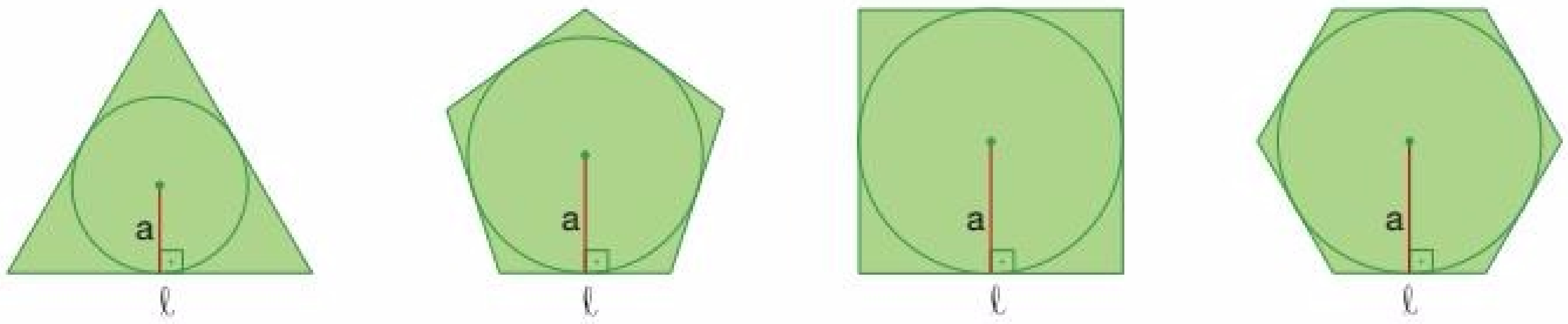
Ilustrações: Acervo da editora

Determine a área desse hexágono, sabendo que a peça em forma de paralelogramo (peça não quadrada) possui $10\ cm^2$ de área. $80\ cm^2$

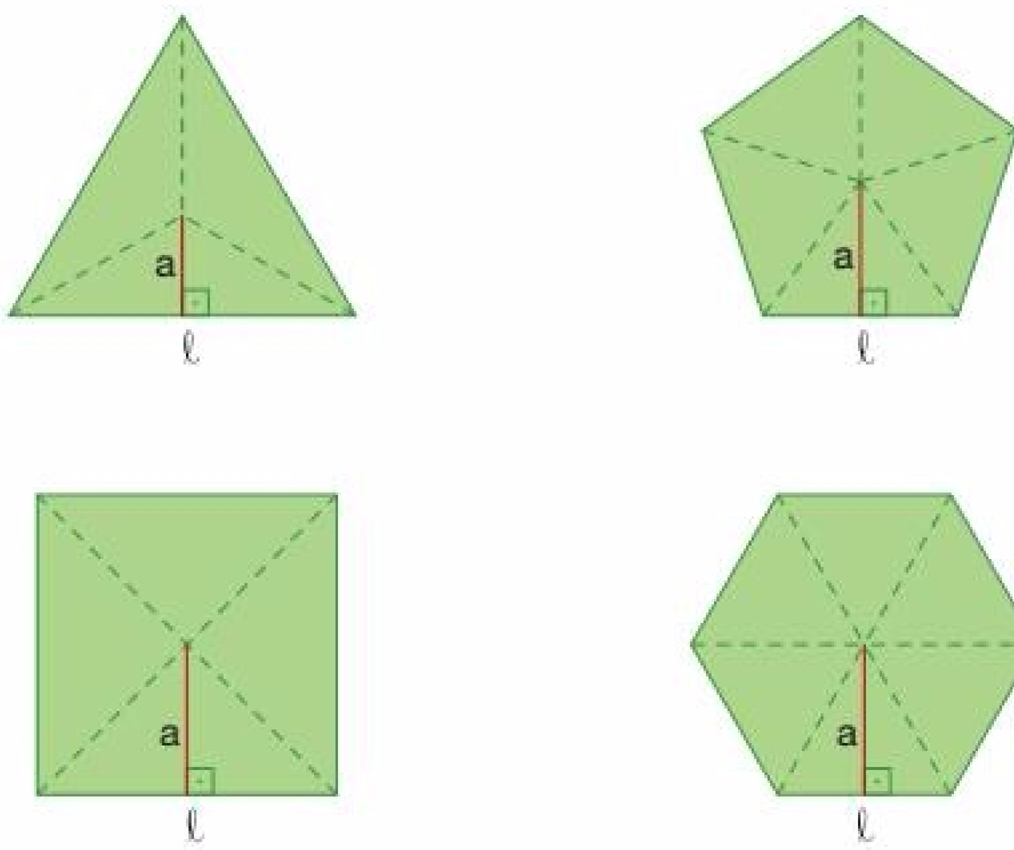
Área de polígonos regulares

Polígonos regulares são aqueles cujas medidas de todos os lados e de todos os ângulos internos são iguais.

Em todo polígono regular pode ser inscrita uma circunferência. O raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao **apótema** do polígono. Nos exemplos abaixo, **a** é a medida do apótema dos polígonos regulares.



Os polígonos regulares abaixo foram decompostos em triângulos isósceles congruentes.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que cada polígono de *n* lados foi dividido em *n* triângulos congruentes. Podemos obter a área de cada um desses polígonos, calculando a área de um triângulo e multiplicando o resultado pelo número de lados correspondentes.

Estudamos que, para calcular a área de um triângulo, podemos multiplicar a medida da base pela da altura e dividir o resultado por 2, isto é, utilizar a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. No caso dos triângulos em que os polígonos regulares foram divididos, a base é um dos lados de medida ℓ do polígono, e a altura corresponde ao apótema *a*.

Assim, podemos indicar a área de um polígono regular de *n* lados com medida ℓ da seguinte maneira:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$$

Podemos escrever essa fórmula de outra maneira, ou seja:

$$A = \underbrace{\frac{n \cdot \ell}{2}}_{p} \cdot a \Rightarrow \boxed{A = p \cdot a},$$

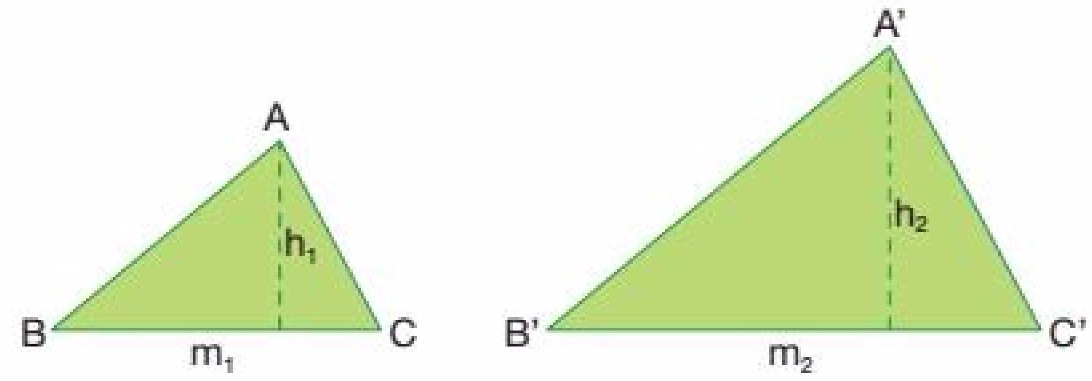
em que *p* é o semiperímetro do polígono regular e *a* é o apótema.

Na fórmula, $\frac{n \cdot \ell}{2}$ corresponde ao semiperímetro de um polígono regular, pois:

$$\frac{n \cdot \ell}{2} = \frac{\overbrace{\ell + \ell + \ell + \ldots + \ell}^{n \text{ fatores } \ell}}{2} = p$$

Razão entre área de figuras planas

Provavelmente você já estudou e verificou que, quando dois polígonos são semelhantes, a razão entre a medida de seus lados correspondentes é igual. Vamos considerar os seguintes triângulos semelhantes.



Ilustrações: Acervo da editora

Lembre-se de que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Como $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, temos: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$. ← razão de semelhança

Agora, vamos calcular a razão entre a área dos triângulos ABC e A'B'C':

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{\frac{m_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{m_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{m_1 \cdot h_1}{m_2 \cdot h_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$$

Note que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Essa propriedade ocorre não somente para os triângulos, mas também para quaisquer duas superfícies semelhantes.

Exemplo

As áreas de dois triângulos semelhantes são, respectivamente, $5\ cm^2$ e $45\ cm^2$. Sabendo que a medida do maior lado do 1º triângulo é 5 cm, podemos obter a medida do maior lado do 2º triângulo da seguinte maneira:

$$k^2 = \frac{45}{5} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

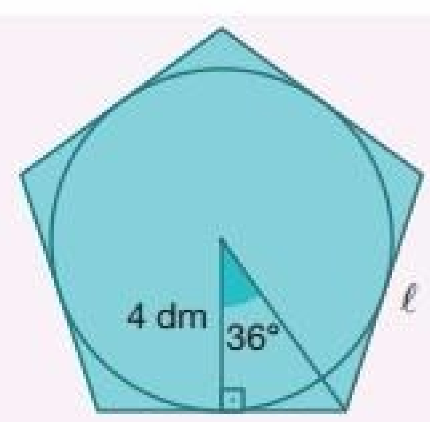
Assim, temos que:

$$k = \frac{x}{5} \Rightarrow 3 = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

Portanto, a medida do maior lado do 2º triângulo é 15 cm.

Atividades resolvidas

R5. Determine a área de um pentágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 4 dm.
Considere: $tg\ 36 = 0{,}73$.



Acervo da editora

Resolução

O raio da circunferência determina a medida *a* do apótema do pentágono de lado ℓ.

Note que, na figura, temos um triângulo retângulo de catetos medindo *a* e $\frac{\ell}{2}$. O ângulo central da circunferência, que corresponde a um dos ângulos do triângulo, mede $\frac{360°}{10} = 36°$.

Assim, segue que:

$$tg\ 36° = \frac{\frac{\ell}{2}}{4} \Rightarrow tg\ 36° = \frac{\ell}{8} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 5{,}84 \rightarrow 5{,}84\ dm$$

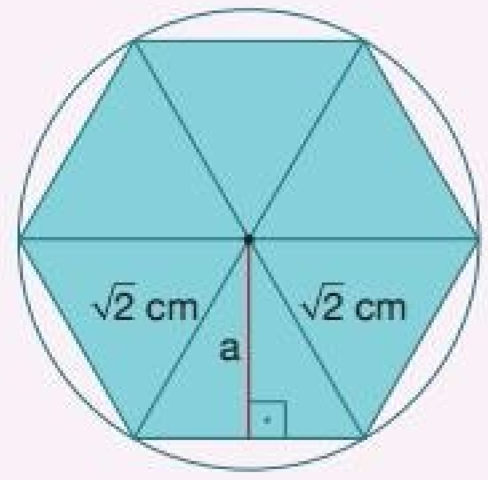
Logo, a área do pentágono é dada por:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = 5 \cdot \frac{5{,}84 \cdot 4}{2} = 58{,}4 \rightarrow \boxed{58{,}4\ dm^2}$$

R6. Qual é a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ cm?

Resolução

O hexágono pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm, conforme a figura.



Podemos calcular a área do hexágono de duas maneiras.

1ª maneira:

Inicialmente, obtemos a medida do apótema do hexágono, utilizando a fórmula da altura do triângulo equilátero.

$$h = a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}\text{ cm}$$

Em seguida, substituímos na fórmula $A = n\cdot\frac{\ell\cdot a}{2}$:

$$A = 6\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 2} = \frac{3\cdot\sqrt{12}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{3\sqrt{3}\text{ cm}^2}$$

Um triângulo equilátero possui três lados com medidas iguais, ou seja, é um caso particular de triângulo isósceles.

2ª maneira:

Calculamos a área de seis triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm.

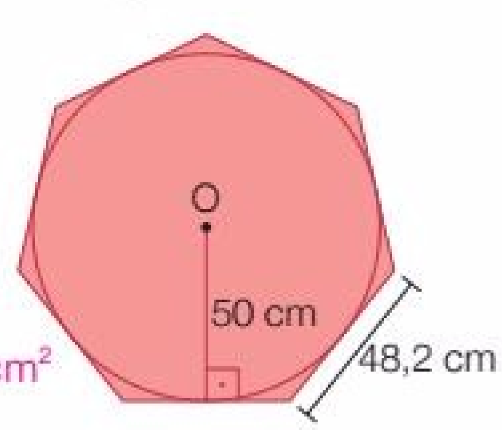
$$A = 6\cdot\underbrace{\frac{\ell^2\cdot\sqrt{3}}{4}}_{\substack{\text{área do}\\ \text{triângulo}\\ \text{equilátero}}} = 6\cdot\frac{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{3\sqrt{3}\text{ cm}^2}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

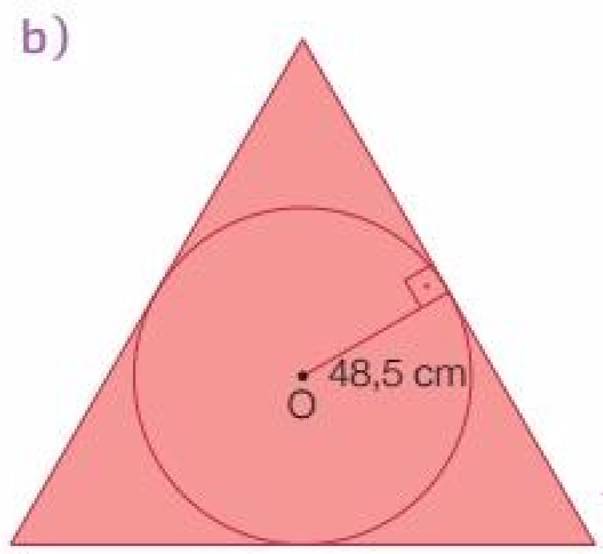
19. Em cada item, calcule a área aproximada do polígono regular.

a)



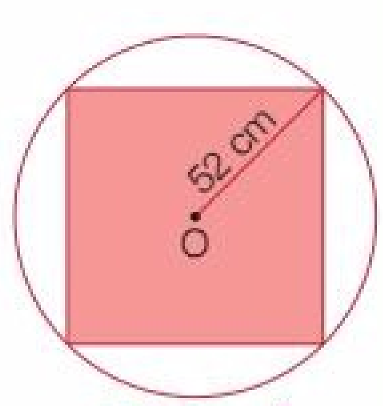
8 435 cm²

b)



12 222,6 cm²

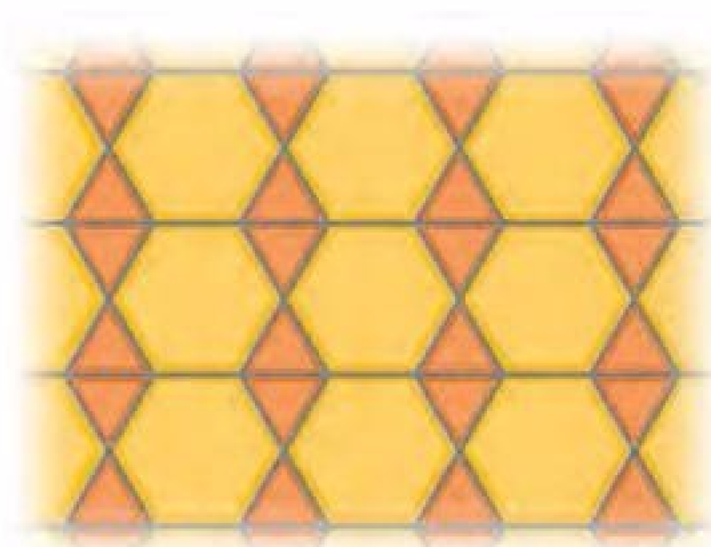
c)



5 408 cm²

Ilustrações: Acervo da editora

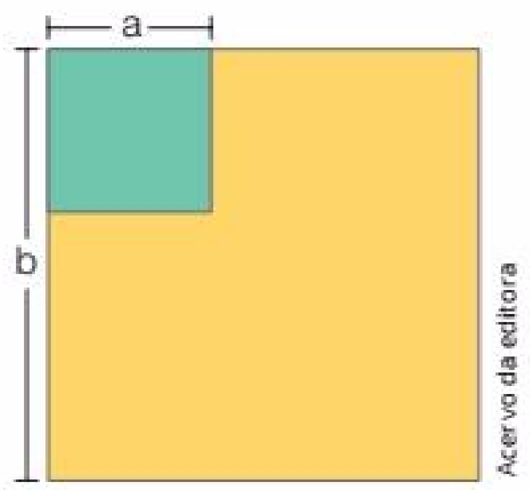
20. Em determinada praça de 3 000 m² de área, serão assentadas lajotas de dois formatos, hexágonos regulares e triângulos equiláteros, seguindo o padrão proposto.



De acordo com as informações e desconsiderando desperdícios, calcule quantos metros quadrados de cada tipo de lajota serão utilizados para cobrir toda a área da praça.

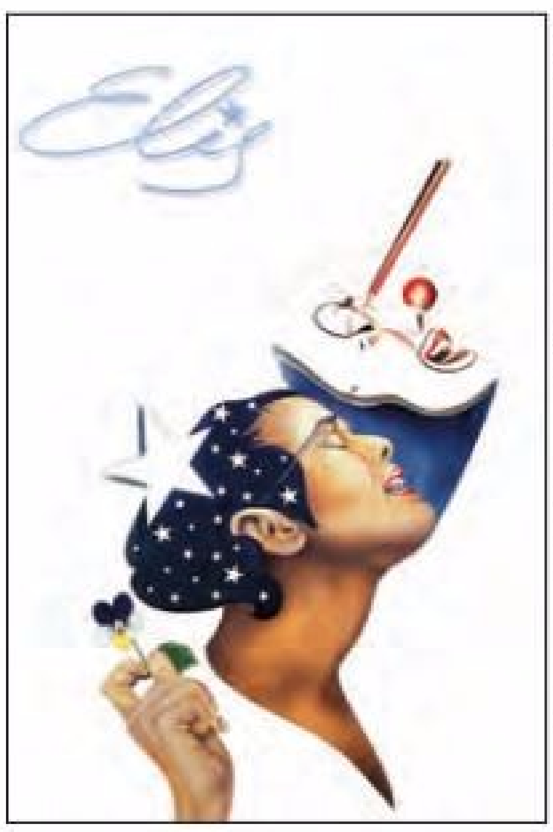
hexágonos regulares: 2 250 m²; triângulos equiláteros: 750 m²

21. Na figura estão ilustrados dois quadrados. Sabe-se que a razão entre a área da região em amarelo e a área da região em verde é 6. Com base nessas informações, determine a razão de semelhança entre o quadrado maior e o menor, e a razão entre suas áreas. razão de semelhança: $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7



Acervo da editora

22. A imagem representada abaixo, produzida pelo artista gráfico Elifas Andreato e impressa em 1983 para a Semana Elis Regina (evento realizado no Centro Cultural São Paulo), tem dimensões 60 cm por 40 cm. Utilizando uma régua, meça as dimensões da reprodução e determine a razão R entre a área da imagem original e a da reprodução. $R = 117,9$



Elifas Andreato. 1983. Acrílica sobre papel. 60 x 40 cm. Coleção particular

A imagem ao lado faz parte da coleção InfELISmente, composta de cartazes da Semana Elis, que marcou o primeiro aniversário da morte de Elis Regina, em 1983.

23. (Enem-MEC) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

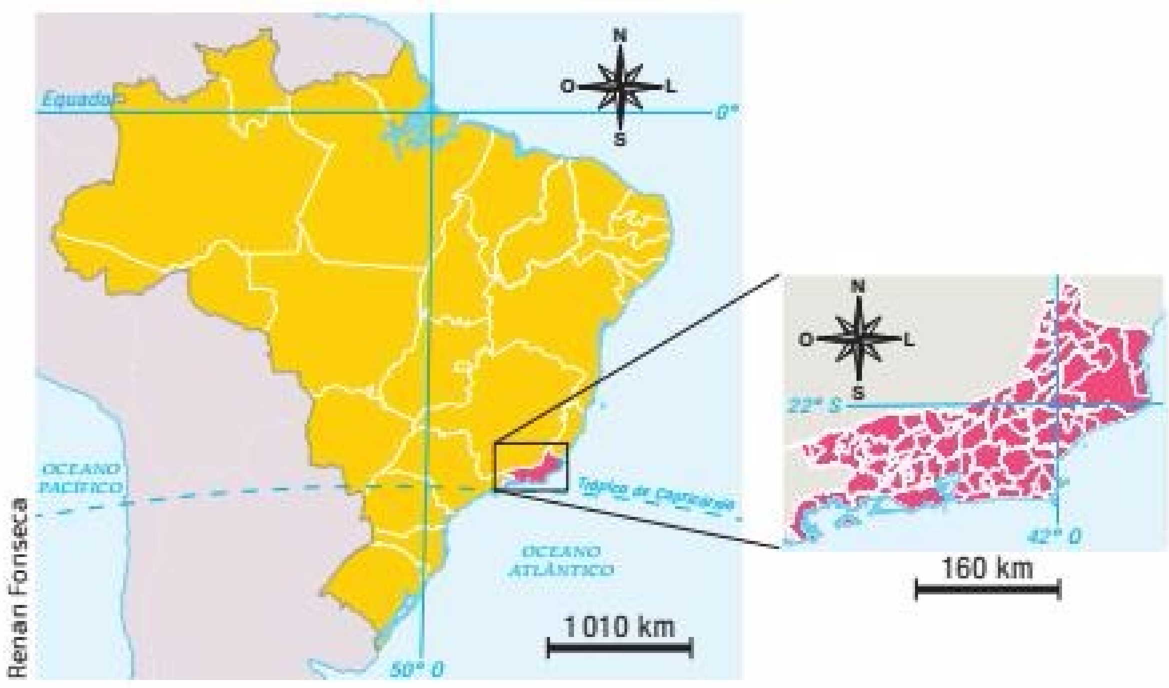
Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em: c

a) 4%
b) 20%
c) 36%
d) 64%
e) 96%

24. Calcule a razão entre as áreas de dois decágonos regulares, sendo que as medidas de seus lados são respectivamente 9 cm e 3 cm. 9

25. (Enem-MEC) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

Área do estado do Rio de Janeiro



Renan Fonseca

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é: d

a) menor que 10
b) maior que 10 e menor que 20
c) maior que 20 e menor que 30
d) maior que 30 e menor que 40
e) maior que 40

26. Estudamos neste capítulo a fórmula para a área de um triângulo qualquer deduzida por Herão em sua obra **A métrica**. Ocorre que essa fórmula é válida pelo fato de que qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, o que não ocorre, por exemplo, para todos os quadriláteros.

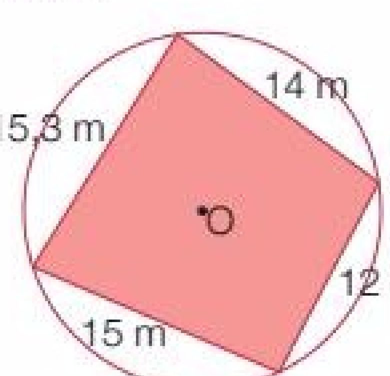
Em trabalhos posteriores, creditados a matemáticos hindus, foi deduzida uma extensão da fórmula de Herão, válida para quadriláteros que podem ser inscritos em uma circunferência. Essa fórmula pode ser escrita como:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Em que a, b, c, d são as medidas dos lados do quadrilátero, p é o semiperímetro e A é a área.

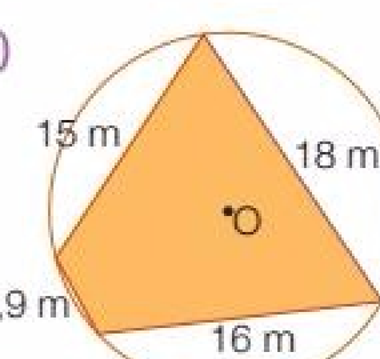
Utilizando a fórmula acima, calcule a área aproximada de cada quadrilátero inscrito na circunferência.

a)



$196,5\ m^2$

b)



$160,7\ m^2$

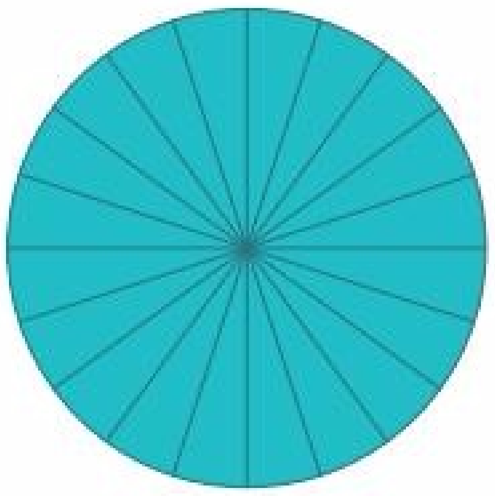
Ilustrações: Acervo da editora

Área do círculo

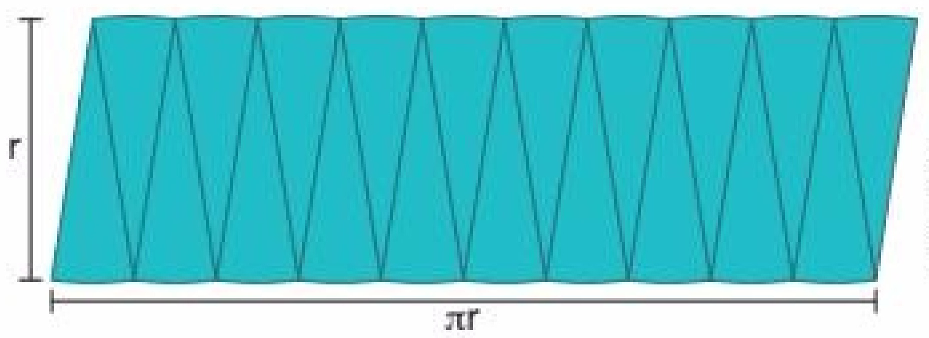
Podemos calcular a área da superfície de um círculo por meio da fórmula $A = \pi r^2$, cuja dedução envolve conceitos que não serão estudados. Contudo, veja a seguir uma maneira que auxilia na compreensão dessa fórmula.

Inicialmente, dividimos um círculo em 20 partes iguais.

Explique aos alunos que uma dedução da fórmula da área do círculo envolve o conceito de limite.



Depois, organizamos cada uma dessas partes e obtemos uma figura que lembra um paralelogramo, cuja medida da altura é aproximadamente a medida do raio do círculo e a medida da base é cerca da metade do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.



Ilustrações: Acervo da editora

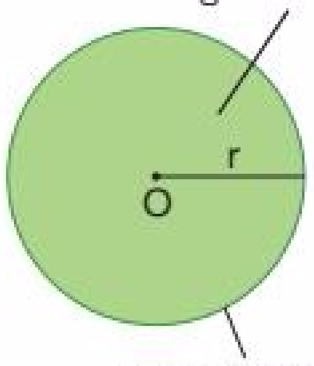
Temos que a área A_p de um paralelogramo é dada pelo produto da medida de sua base *b* e de sua altura *h*:

$$A_p = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, temos que a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

Calculamos a área de um círculo de raio *r* utilizando a fórmula $A = \pi r^2$.

Ao reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obtemos uma figura denominada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar os seguintes elementos:



O: centro   r: raio

Exemplo

Vamos calcular a área aproximada de um círculo cuja medida do raio é 7 cm, considerando $\pi = 3{,}14$.

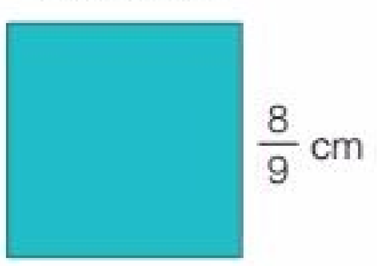
$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 7^2 = 3{,}14 \cdot 49 = 153{,}86$$

Portanto, a área aproximada do círculo é 153,86 cm².

Antes de se conhecer a área exata de um círculo, muitos estudiosos obtiveram aproximações com uma precisão impressionante, levando em consideração os recursos disponíveis na época. Entre os inúmeros problemas citados no papiro de Rhind, documento egípcio que data de cerca de 1650 a.C., está uma aproximação para a área do círculo, que é assumida como igual à área de um quadrado cujo lado mede $\frac{8}{9}$ da medida do diâmetro do círculo dado.

Por exemplo, um círculo de diâmetro igual a 1 cm tem área aproximada à de um quadrado de lado $\frac{8}{9}$ cm.

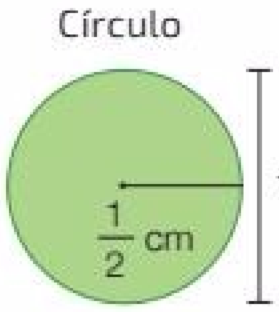
Quadrado



$A_q = \left(\frac{8}{9}\right)^2$

$A_q \simeq 0{,}790 \text{ cm}^2$

Círculo



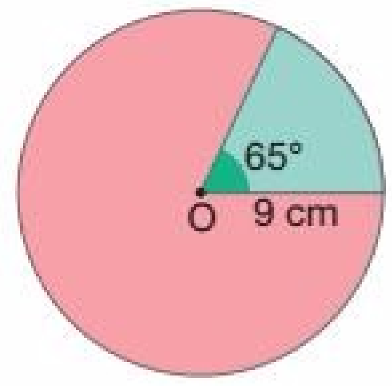
$A_c = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$A_c \simeq 0{,}785 \text{ cm}^2$

Ilustrações: Acervo da editora

Área do setor circular

A parte indicada em verde no círculo corresponde a um setor circular que é determinado por um ângulo central de 65°.



A área desse setor circular e o ângulo central que o determina são grandezas diretamente proporcionais. Assim, utilizando a fórmula $A = \pi r^2$, a regra de três simples e considerando $\pi = 3{,}14$, podemos calcular a área aproximada desse setor circular da seguinte maneira:

Ângulo (em graus)	Área (cm^2)
360	πr^2
65	A_s

$$\frac{360}{65} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = 65 \cdot \pi r^2 \Rightarrow 360 \cdot A_s = 65 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 360 \cdot A_s = 16\,532{,}1 \Rightarrow A_s = \frac{16\,532{,}1}{360} \simeq 45{,}92$$

Portanto, a área aproximada do setor circular é $45{,}92\ cm^2$.

Calculamos a área de um setor circular utilizando a seguinte fórmula:

Ângulo (em graus)	Área (cm^2)
360	πr^2
x	A_s

$$\frac{360}{x} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = x \cdot \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_s = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2}$$

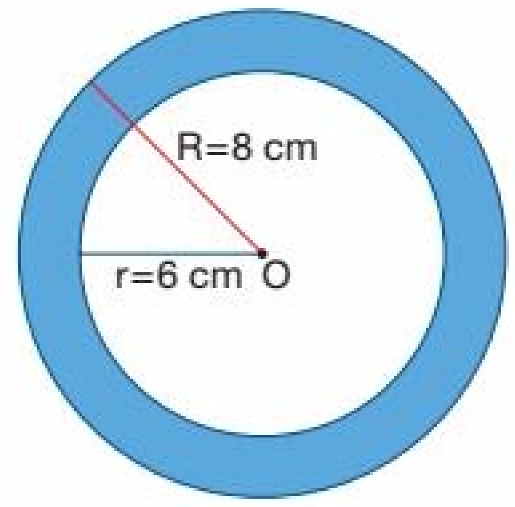
x: medida do ângulo central $\quad$ A_s: área do setor circular

Área da coroa circular

A região indicada em azul corresponde a uma coroa circular.

Duas circunferências são **concêntricas** quando possuem o mesmo centro. A região compreendida entre essas duas circunferências é denominada **coroa circular**.

Com base nos exemplos apresentados nesta página, é importante que os alunos percebam que é possível resolver problemas relacionados à área do setor circular e da coroa circular sem o uso de fórmulas específicas, utilizando para tanto a fórmula da área do círculo.



Ilustrações: Acervo da editora

A área dessa coroa circular pode ser obtida calculando-se a diferença entre a área do círculo de maior raio e a área do círculo de menor raio, isto é:

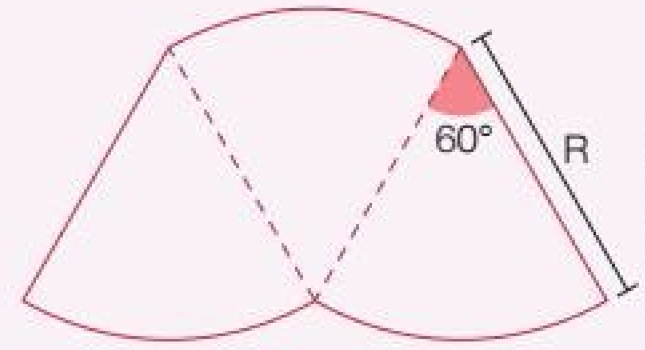
$$A_c = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \simeq 3{,}14(8^2 - 6^2) = 3{,}14 \cdot 28 = 87{,}92$$

Portanto, a área aproximada da coroa circular é $87{,}92\ cm^2$.

Calculamos a área da coroa circular utilizando a fórmula $A_c = \pi(R^2 - r^2)$.

Atividades resolvidas

R7. (Enem-MEC) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



Acervo da editora

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π. O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser:

a) 16 b) 28 c) 29 d) 31 e) 49

Resolução

Inicialmente, calculamos as áreas ocupadas por cada piscina.

- Piscina retangular

$$A_r = 50 \cdot 24 = 1\,200 \rightarrow 1\,200\ m^2$$

- Piscina com setores circulares

$$A_s = 3 \cdot \left(\frac{60}{360} \cdot 3 \cdot R^2\right) = \frac{3}{2}R^2$$

Do enunciado, devemos ter $A_s < A_r$. Assim:

$$\frac{3}{2}R^2 < 1\,200 \Rightarrow R^2 < 800$$

Como $\underbrace{28^2}_{784} < 800 < \underbrace{29^2}_{841}$ e *R* tem que ser o maior número natural possível, segue que $R = 28$.

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R8. A partir de 2002, passou a circular no Brasil um novo modelo da moeda de 1 real. Ela possui um núcleo prateado composto por aço inoxidável e um anel externo dourado, que lembra uma coroa circular, composto por aço revestido de bronze. Nessa moeda, entre outras características, estão presentes grafias encontradas em cerâmicas de origem indígena, fazendo referência às raízes étnicas brasileiras. Essas características da moeda de 1 real são importantes elementos de segurança para evitar fraudes. Calcule a área aproximada da coroa circular dourada da moeda de 1 real, conforme indicações ao lado. (Use: $\pi = 3{,}14$.)

Fonte de pesquisa: <www.bcb.gov.br/dinheirobrasileiro/pdf/FolderMoedas.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2016.

Captura via escâner

Resolução

A área da coroa circular é dada por:

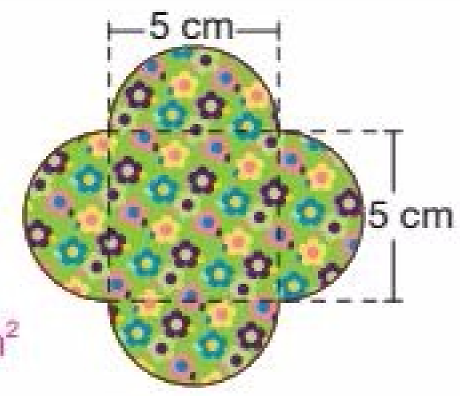
$$A_c = \pi(R^2 - r^2) = 3{,}14(\underbrace{13{,}5}_{\frac{27}{2}}{}^2 - \underbrace{9}_{\frac{18}{2}}{}^2) = 3{,}14 \cdot 101{,}25 = 317{,}925$$

Portanto, a área da coroa dourada da moeda de 1 real é aproximadamente 317,925 mm^2.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

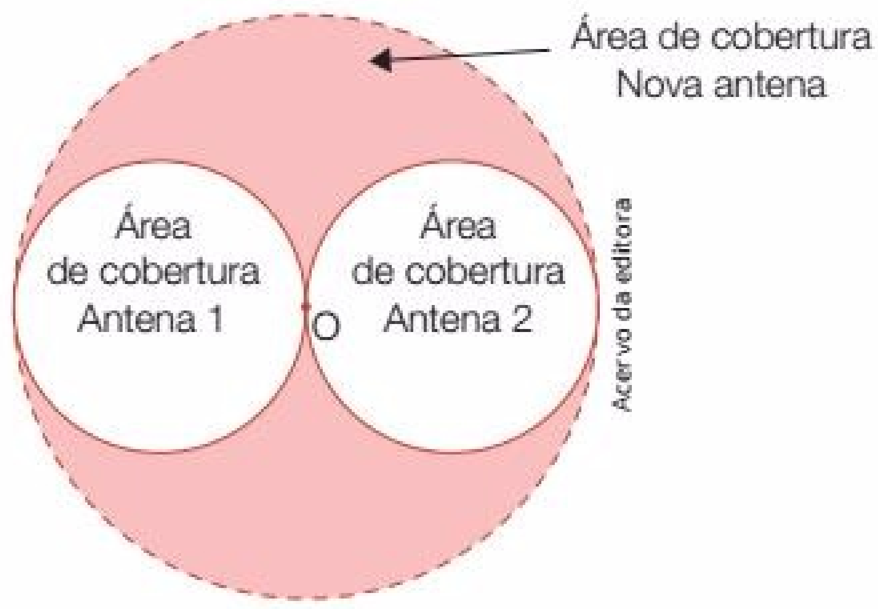
27. Na confecção de um tapete de retalhos, uma costureira utilizou 20 pedaços de tecido como ilustrado ao lado.
Considerando que o pedaço de tecido pode ser dividido em um quadrado e quatro semicírculos iguais, determine, de acordo com as medidas indicadas, quantos centímetros quadrados de tecido foram utilizados na confecção do tapete. 1 285 cm^2



Acervo da editora

Capítulo 6

28. (Enem-MEC) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto *O*, como mostra a figura.



Acervo da editora

O ponto *O* indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em: a

a) 8π b) 12π c) 16π d) 32π e) 64π

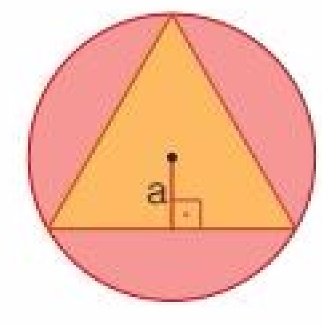
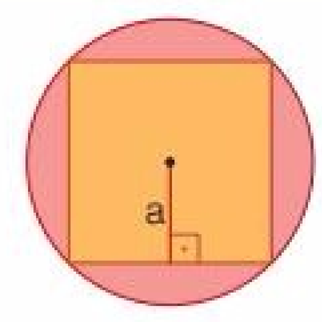
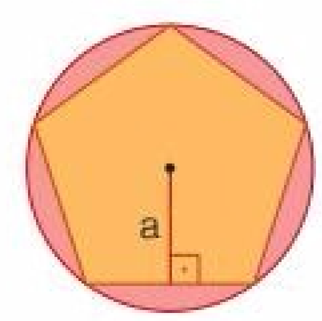
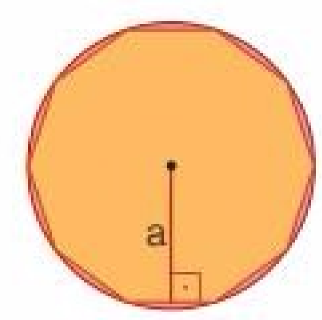
29. Um grande marco para a agricultura irrigada foi a utilização do sistema de irrigação de pivô central. Esse sistema é composto por uma gigantesca haste que gira em torno de seu próprio eixo, na qual estão fixas as tubulações, os aspersores e outros componentes. O pivô central tem várias vantagens em relação a outros sistemas: uma delas é que, ao se completar um ciclo de irrigação, o equipamento se encontra no mesmo lugar em que estava inicialmente, pronto para iniciar outro ciclo.

Sabendo que em certa propriedade há uma área circular de 7 850 m² irrigada por um único pivô central, calcule, aproximadamente, o comprimento da haste desse pivô. 50 m

Delfim Martins/Pulsar

Vista aérea de plantação de milho com irrigação de pivô central na cidade de Guaíra (SP), em 2013.

30. Observe a sequência de figuras, em que estão ilustrados polígonos regulares de *n* lados inscritos em círculos de raio igual a 100 cm.

n	Figura	a
3		50 cm
4		70,7 cm
5		80,9 cm
⋮	⋮	⋮
10		95,1 cm
⋮	⋮	⋮

Ilustrações: Acervo da editora

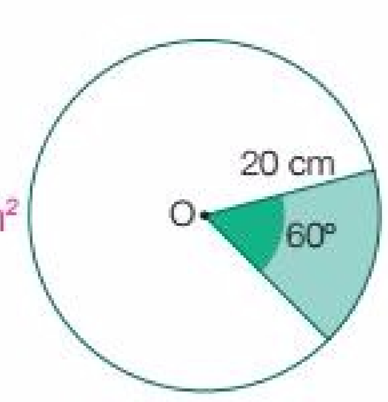
a) Considerando $\pi = 3{,}14$, qual é a área de cada círculo? 31 400 cm²

b) Calcule a área aproximada dos polígonos ilustrados na sequência.

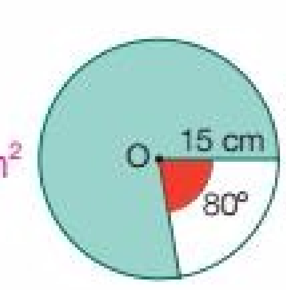
c) O que é possível notar em relação às áreas do polígono e do círculo, à medida que *n* aumenta? Resposta esperada: a área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

31. Calcule a área de cada setor em verde.

a) $\frac{200\pi}{3}$ cm²



b) 175π cm²

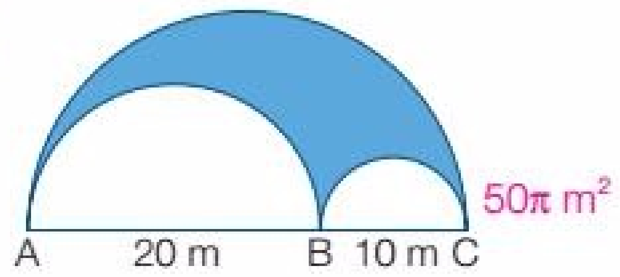


Ilustrações: Acervo da editora

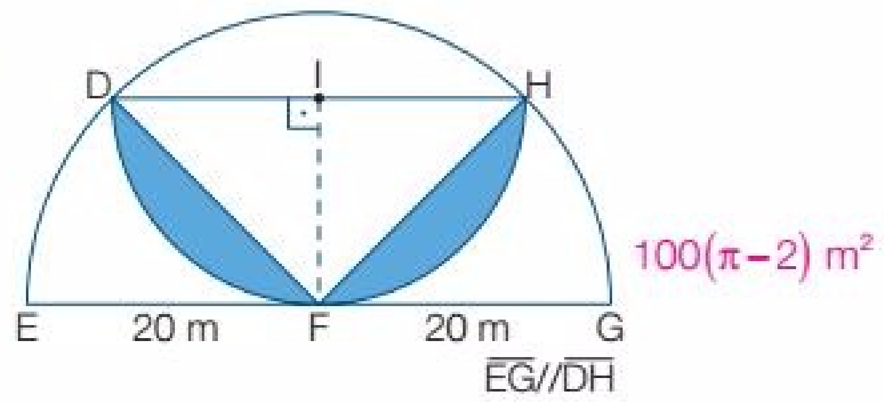
Nesta atividade, escreva as áreas dos setores em função de π.

30. b) n = 3: 12 990 cm²; n = 4: 19 994 cm²; n = 5: 23 777 cm²; n = 10: 29 405 cm²

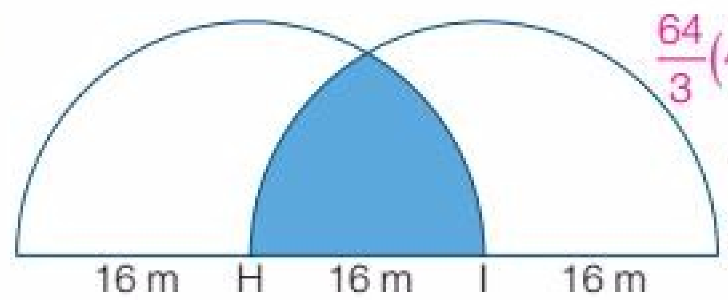
32. As figuras a seguir foram construídas a partir de semicírculos. Em cada item, determine a área da região em azul.

a) 

$50\pi\ m^2$

b) 

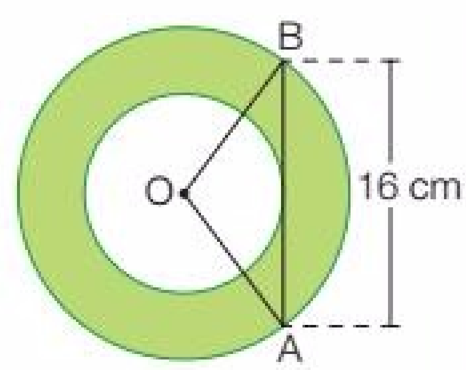
$100(\pi - 2)\ m^2$

c) 

$\frac{64}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$

Ilustrações: Acervo da editora

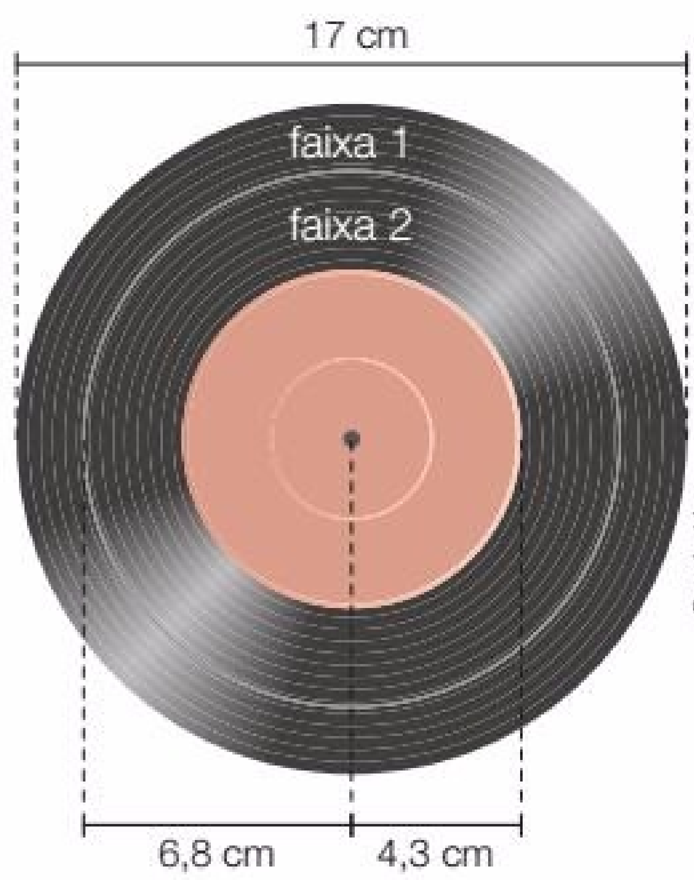
33. Na figura, os círculos são concêntricos de centro no ponto *O* e o lado AB do triângulo OAB é tangente ao círculo de menor raio. Sabendo que a área do círculo de maior raio é $100\pi\ cm^2$ e que a área do triângulo é $48\ cm^2$, determine a área da coroa circular em verde. $64\pi\ cm^2$



Acervo da editora

34. Nas páginas **154** e **155** foram apresentadas algumas informações sobre os discos de vinil. Por exemplo, vimos que o tempo das músicas está relacionado à área das faixas do disco.

Existem diferentes tipos de discos de vinil, como, por exemplo, os EP (abreviatura do termo inglês *Extented Play*), que são discos com 17 cm de diâmetro e capacidade para aproximadamente 8 minutos de música em cada lado. Observe o EP a seguir e duas de suas faixas em um dos lados:



Sergio Lima

a) Calcule a área aproximada de cada faixa?
faixa 1: 81,6714 cm²; faixa 2: 87,135 cm²

b) Qual das faixas apresentadas tem maior duração? Justifique sua resposta.
Faixa 2, pois sua área é maior que a da faixa 1.

35. É provável que por volta de 1650 a.C. o escriba Ahmes tenha copiado o Papiro de Rhind, uma das principais fontes de informações referentes à Matemática egípcia antiga, de um documento ainda mais antigo.

Muitos dos problemas do Papiro de Rhind decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras. Os problemas 48 e 50 podem dar uma pista de como os egípcios obtiveram a fórmula para calcular a área do círculo.

Problema 48: "Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito".

Este é o único problema em que sua solução é geométrica.

Acervo da editora

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a sua área?"

Um escriba apresentou a seguinte solução a este problema:

Remova $\frac{1}{9}$ do diâmetro, o restante é 8. Faça a multiplicação de 8 por 8. Portanto, a área é 64.

Em linguagem atual, temos:

"Para calcular a área do círculo, subtraia do diâmetro sua nona parte, e o restante eleve ao quadrado".

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 9, 13. <www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2016.

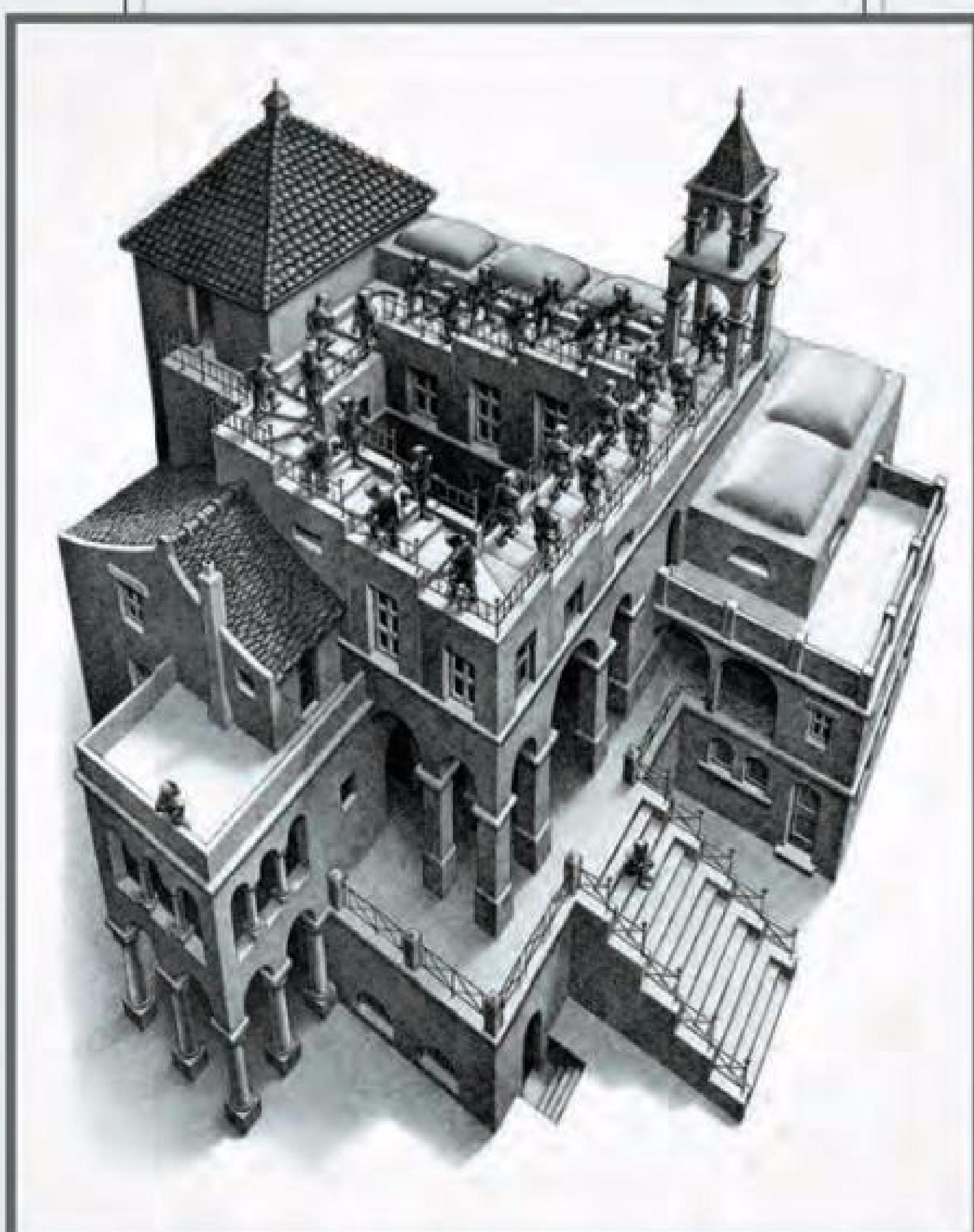
a) A partir do **problema 50**, é possível obter um valor para π que era utilizado pelos egípcios. Qual era essa aproximação? $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$

b) A quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado é um dos mais famosos problemas na história da Matemática. A importância desse problema reside no fato de que ele não pode ser resolvido com compasso e régua não graduada. Considerando um círculo de diâmetro *d* e a maneira pela qual os egípcios calculavam sua área, escreva uma relação entre o lado ℓ do quadrado e o diâmetro de um círculo de mesma área.

$\ell = \frac{8}{9}d$

capítulo 7

Geometria espacial de posição



M.C. Escher's "Ascending and Descending" © 2016 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

Escada acima e escada abaixo, de Maurits Cornelis Escher, 1960. Litografia, 35 cm × 28,5 cm. Coleção particular.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens SFIO CRACHO, Comaniciu Dan, Aleksandar Mijatovic/Shutterstock.com

Litografia: reprodução impressa sobre papel, por meio de prensa, de um desenho executado com tinta graxenta sobre uma superfície calcária ou uma placa metálica.

Xilogravura: estampa obtida por meio de gravuras em relevo sobre madeira.

Veja mais informações sobre Escher nos *sites*:

- <http://tub.im/c4njps>
- <http://tub.im/erwpob>

(acesso em: 25 fev. 2016)

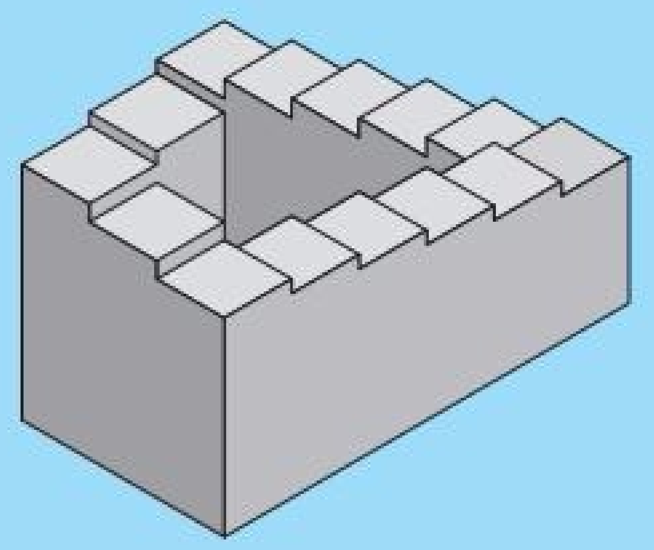
Ilusão de ótica de Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Sua obra reúne mais de 448 litografias, xilogravuras e gravações em madeira somadas ainda a mais de 2 000 desenhos e esboços.

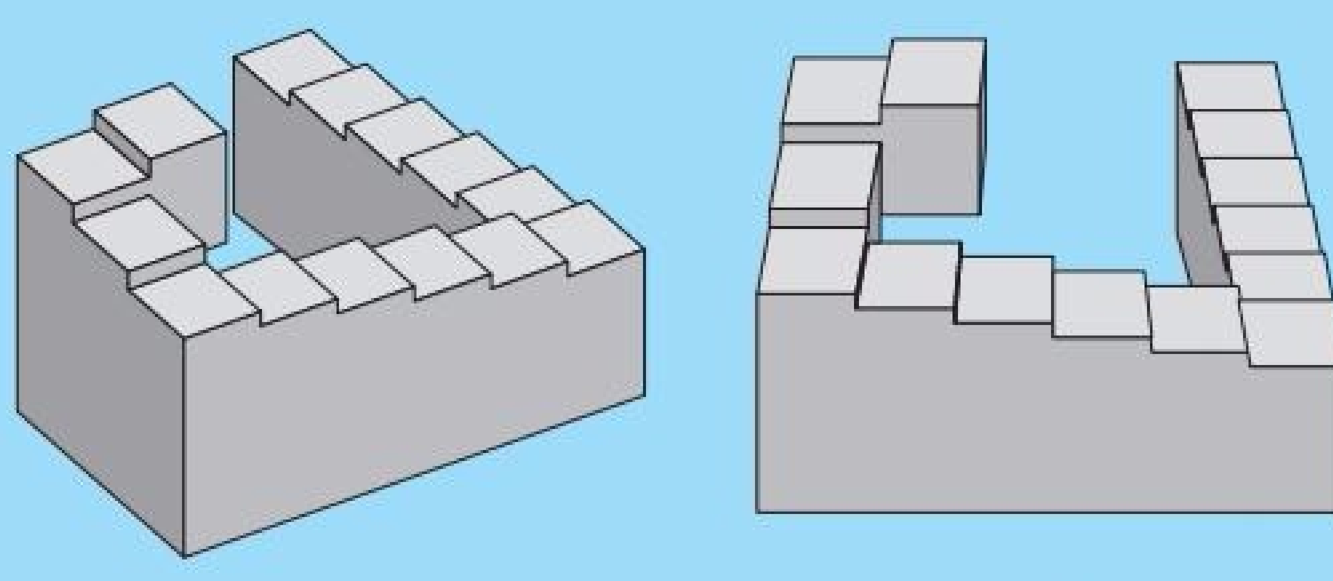
A criatividade do artista nos mostra características interessantes em algumas de suas obras, nas quais ele "brinca" com arquitetura e perspectiva, desenhando no plano construções que seriam impossíveis no espaço.

Na obra apresentada ao lado, ele propõe uma escada na qual, ao pensarmos em uma pessoa subindo (ou descendo), a ilusão de ótica sugerida é que ela voltaria sempre ao mesmo lugar. Mas como isso é possível? Veja no esquema a seguir!

Vista na perspectiva com ilusão de ótica



Rotações que apresentam perspectivas que desvendam a ilusão de ótica



Ilustrações: Sergio Lima

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

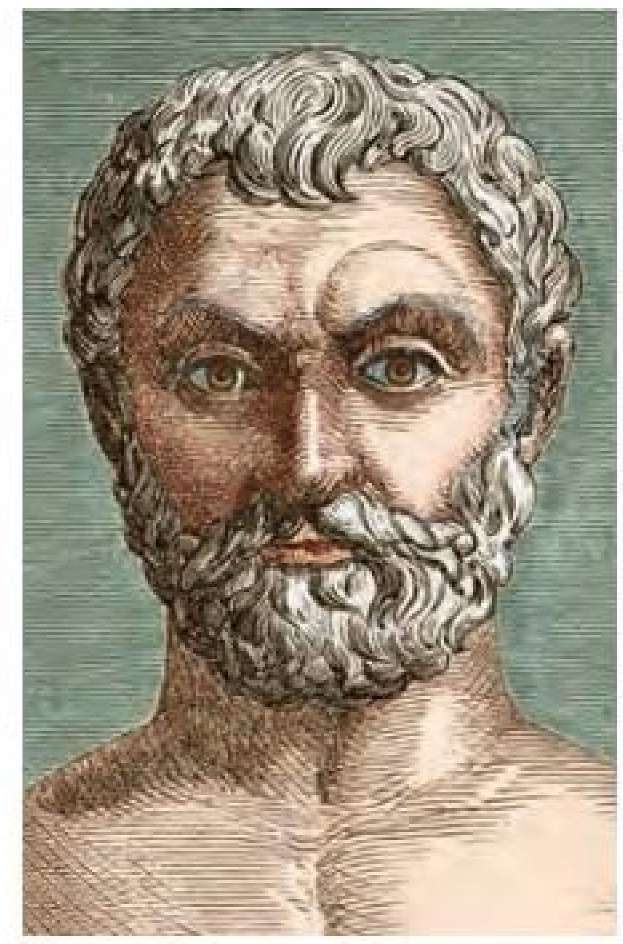
A Descreva com suas palavras por que seria impossível subir (ou descer) a escada proposta por Escher e voltar ao mesmo lugar. Resposta pessoal.

B Por meio da primeira imagem da sequência apresentada acima temos a "falsa" impressão de que é possível subir voltando sempre ao mesmo lugar. Por que isso ocorre? Resposta esperada: porque o ponto de vista (perspectiva) proposto ao espectador sugere uma ilusão de ótica.

C Pesquise outras obras de Escher nas quais ele propõe construções que seriam impossíveis no espaço. Resposta pessoal.

Estudando geometria de posição

Fazer afirmações sobre a origem da geometria é demasiadamente arriscado, pois seus primórdios são mais antigos que a própria escrita. Somente há alguns milênios a humanidade foi capaz de registrar por escrito seus conhecimentos e ideias. O que sabemos é que alguns povos, como os mesopotâmios, os egípcios e os babilônicos, já utilizavam conhecimentos geométricos, principalmente os relativos à mensuração.



Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: Sheila Terry/SPL/Latinstock

Tales de Mileto

Em algum momento da história o homem sentiu a necessidade de argumentos lógicos para que certas afirmações fossem aceitas como verdadeiras. Foi assim que surgiu a chamada geometria demonstrativa. Comumente se diz que ela teve início no século VI a.C. com o matemático Tales de Mileto, um dos primeiros personagens conhecidos a quem se creditam descobertas matemáticas.

Outro contribuinte notável da geometria demonstrativa, talvez o mais importante, foi Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.). Ele foi um excelente organizador de resultados matemáticos obtidos por vários estudiosos que o precederam, revelando grande habilidade ao escrever suas demonstrações de forma simples e clara. Muito do trabalho de Euclides está contido em sua obra-prima, **Os elementos**. Essa coleção, composta de 13 livros, é um dos trabalhos mais influentes da história, contabilizando mais de mil edições publicadas.

Sir Henry Billingsley. 1570. Coleção particular

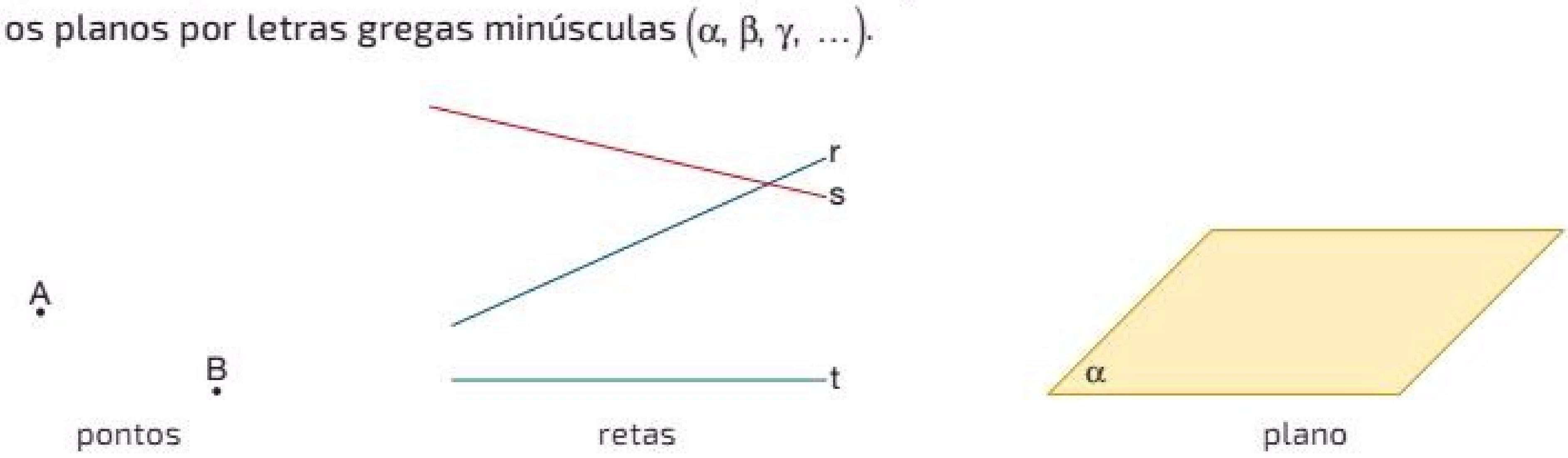
Página de rosto de uma versão em inglês de 1570 da obra **Os elementos**.

Durante muito tempo, as deduções matemáticas realizadas por Euclides foram o texto escolar padrão em quase todo o mundo, e ainda hoje muito do que se ensina de geometria nas escolas é baseado no livro **Os elementos**. A grandiosa obra de Euclides buscou formalizar o que atualmente conhecemos como geometria euclidiana.

No estudo de geometria, existem noções ou conceitos que são aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrá-los. As noções de **ponto**, **reta**, **plano** e **espaço** são chamadas **primitivas** e não definidas formalmente: nós as distinguimos intuitivamente. O ponto, a reta e o plano são elementos básicos do espaço.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Geralmente indicamos os pontos por letras maiúsculas $(A, B, C, \dots)$, as retas por letras minúsculas $(r, s, t, \dots)$ e os planos por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.



Ilustrações: Acervo da editora

Essas noções primitivas servem como base para novos conceitos, sendo os **postulados** (ou **axiomas**) afirmações tomadas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração, e os **teoremas**, conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, que necessitam de demonstração para serem aceitos como verdadeiros.

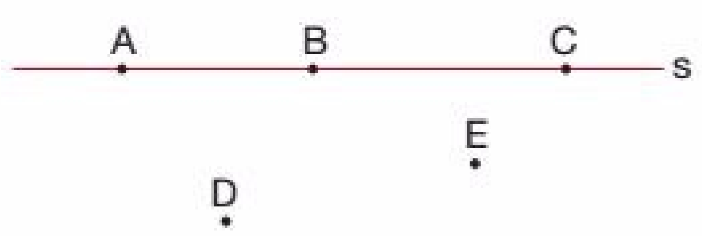
Provavelmente você já estudou as posições relativas entre pontos e retas em um mesmo plano. Agora, estenderemos esse conceito para a posição relativa entre ponto e plano.

- Relação entre ponto e reta

O ponto *A* pertence à reta s $(A \in s)$.

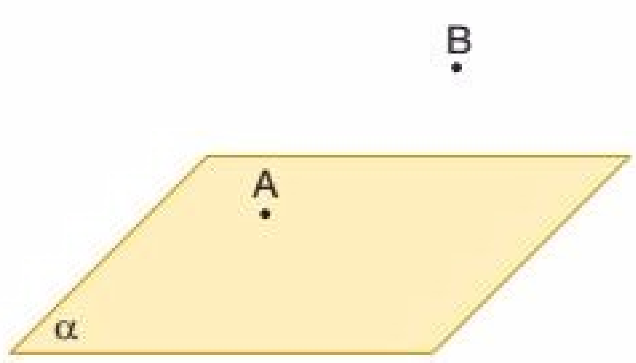
O ponto *B* não pertence à reta s $(B \notin s)$.

- Relação entre pontos



Os pontos *A*, *B* e *C* são denominados colineares, pois pertencem à mesma reta s. Os pontos *A*, *D* e *E* não são colineares.

- Relação entre ponto e plano

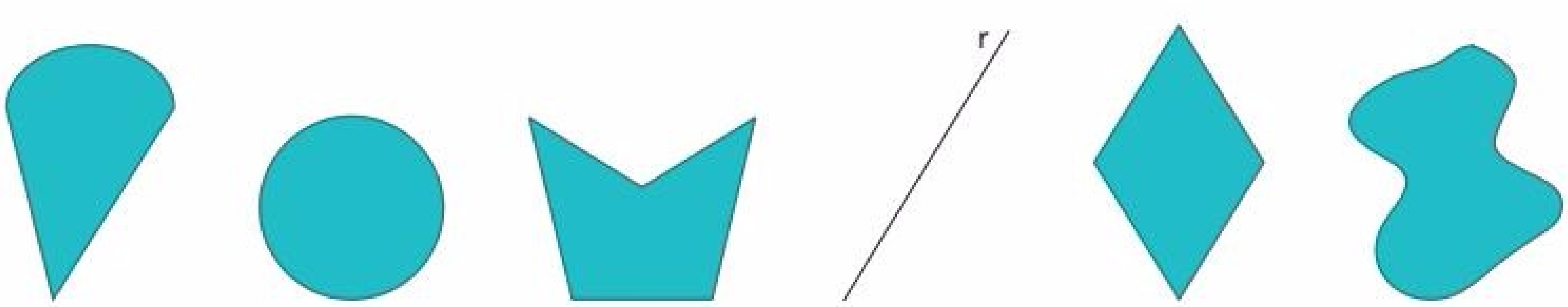


O ponto *A* pertence ao plano α $(A \in \alpha)$.

O ponto *B* não pertence ao plano α $(B \notin \alpha)$.

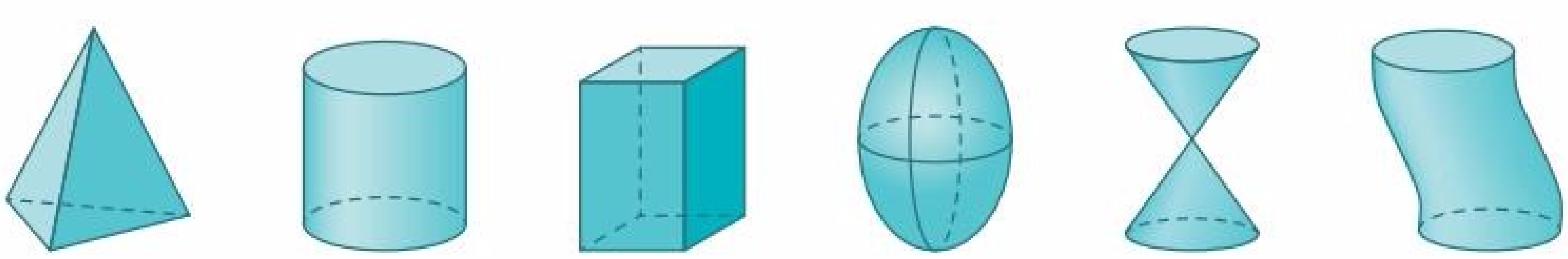
Podemos considerar o espaço como um conjunto de pontos dos quais os pontos, as retas e os planos são subconjuntos. As figuras geométricas também são subconjuntos do espaço, sejam elas planas ou espaciais.

- Figuras planas



As figuras planas estão totalmente contidas em um plano.

- Figuras espaciais



Ilustrações: Acervo da editora

As figuras espaciais não estão totalmente contidas em um plano.

Agora, enunciaremos os primeiros postulados e demonstraremos alguns teoremas. A partir deles, iniciaremos o estudo das posições relativas entre retas e planos no espaço.

Postulado 1

Retas e planos são conjuntos de pontos.

> Na Matemática nem tudo se manifesta de maneira imediata. Existem situações em que é necessário comprovar a veracidade de alguma proposição, ideia ou teoria. Para que isso seja possível, são considerados alguns princípios, chamados axiomas, que são reconhecidos como verdadeiros, ou, então, proposições que já foram comprovadas como verdadeiras. Por meio da dedução e do raciocínio lógico, é elaborado um método que torne visível ou de fácil percepção a veracidade do que se está questionando. Esse processo de dedução e investigação foi introduzido por Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e ficou conhecido como demonstração.

Postulado 2

Existem infinitos pontos que pertencem a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela.

Postulado 3

Existem infinitos pontos que pertencem a um plano, assim como infinitos pontos que não pertencem a ele.

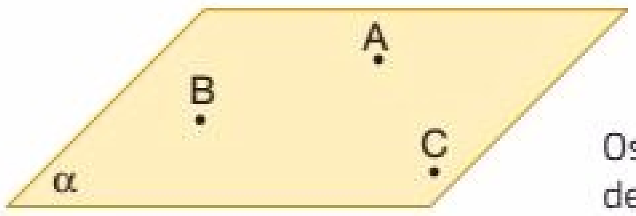
Postulado 4

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Os pontos *A* e *B* determinam a reta s.

Postulado 5

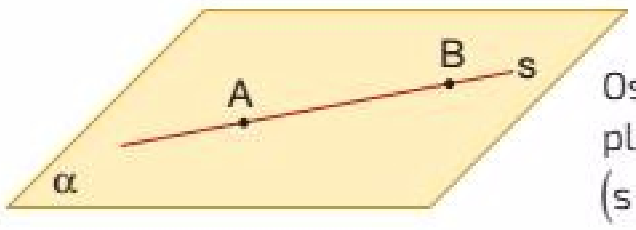
Três pontos não colineares determinam um único plano.



Os pontos *A*, *B* e *C* determinam o plano α.

Postulado 6

Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano.



Os pontos *A* e *B* da reta *s* pertencem ao plano α. Portanto, *s* está contida em α $(s \subset \alpha)$.

Considerando esses postulados e os conceitos primitivos de ponto, reta, plano e espaço, podemos enunciar e, utilizando o método dedutivo, demonstrar os teoremas a seguir.

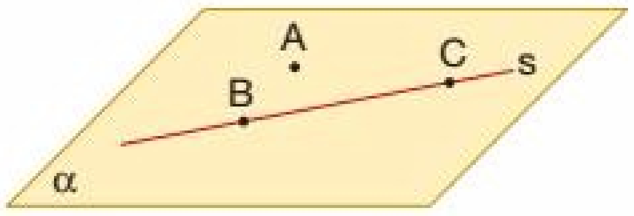
Teorema 1

Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um único plano.

Demonstração

Considere uma reta *s* e um ponto *A* não pertencente a ela. Sejam ainda os pontos *B* e *C* pertencentes à reta *s*.

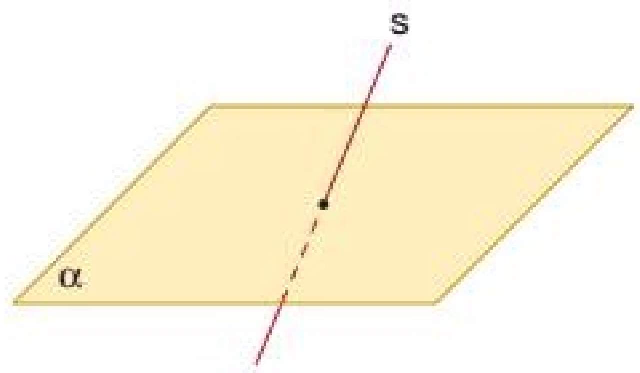
Pelo postulado 5, existe um único plano α determinado por *A*, *B* e *C*. O postulado 6 nos permite concluir que *s* está contida em α, pois *B* e *C* pertencem a *s* e também a α. Portanto, α é o único plano que contém a reta *s* e o ponto *A*.



Ilustrações: Acervo da editora

Teorema 2

Se uma reta não contida em um plano o corta, a interseção dessa reta com esse plano é um único ponto.



Acervo da editora

Hipótese: proposição (ou conjunto de proposições) que se admite como um princípio, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa.

Tese: proposição que se expõe para ser defendida.

Demonstração

Supondo que existam pelo menos dois pontos distintos de interseção entre a reta *s* e o plano α, pelo postulado 6, *s* está contida em α. Essa afirmação é falsa, pois *s* não está contida em α. Portanto, o ponto de interseção de *s* e α é único.

Na demonstração dedutiva por absurdo, utilizada no teorema 2, considera-se a hipótese e a negação da tese verdadeiras. Utilizando argumentos verdadeiros, deduz-se uma sentença absurda, demonstrando-se então que a tese é verdadeira.

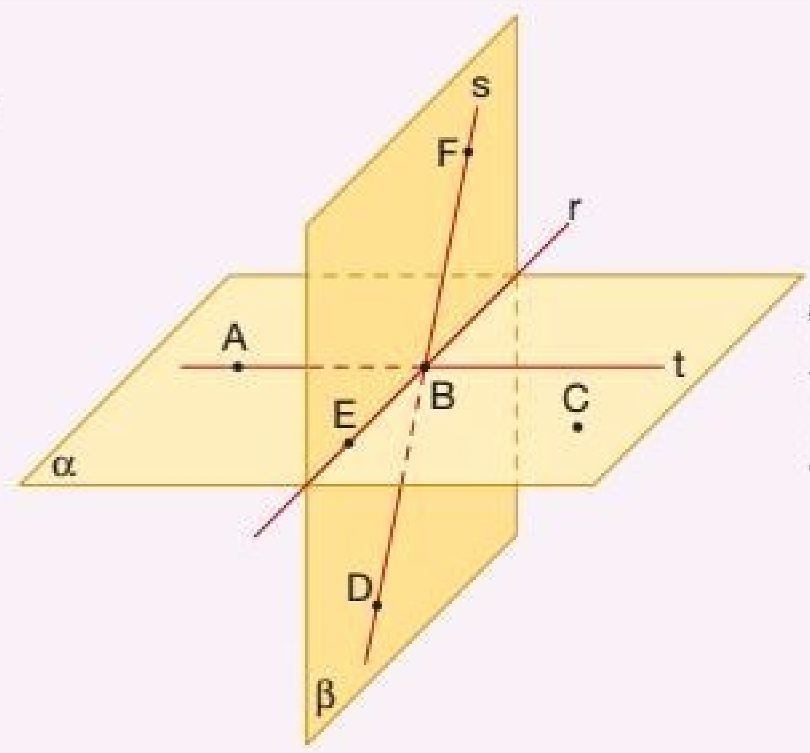
Atividades resolvidas

R1. A partir da figura ao lado, determine a relação de pertinência ou continência de cada:

a) ponto em relação aos planos α e β

b) reta em relação aos planos α e β

c) ponto em relação às retas *r*, *s* e *t*



Acervo da editora

Resolução

Da figura, temos que:

a) • os pontos *A*, *B*, *C* e *E* pertencem ao plano α
 • os pontos B, D, E e F pertencem ao plano β

b) • as retas *r* e *t* estão contidas no plano α
 • as retas *r* e *s* estão contidas no plano β

c) • os pontos *A* e *B* pertencem à reta *t*
 • os pontos *B* e *E* pertencem à reta *r*
 • os pontos *D*, *B* e *F* pertencem à reta *s*
 • o ponto *C* não pertence à reta *r*, *s* ou *t*

Note que:
- os pontos *B* e *E* pertencem aos dois planos
- a reta *r* está contida nos dois planos
- o ponto *B* pertence às três retas

R2. Classifique a afirmação a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, justifique.

> Quatro pontos distintos, com quaisquer três deles não colineares, determinam apenas cinco retas.

Resolução

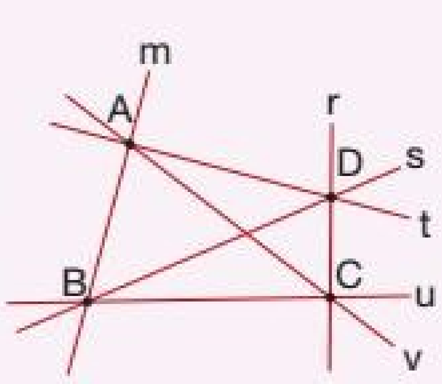
A afirmação é falsa, pois, de acordo com o postulado 4, dois pontos distintos determinam uma única reta e, portanto, o número de retas que passam por quatro pontos, com quaisquer três deles não colineares, é o número de combinações de quatro pontos tomados dois a dois.

Caso os alunos não se recordem, retome o significado da fórmula de combinação simples.

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \rightarrow C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 6$$

Assim, quatro pontos distintos, com quaisquer três deles não colineares, determinam seis retas.

Acervo da editora



Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* determinam seis retas: *m*, *r*, *s*, *t*, *u* e *v*.

Capítulo 7

Anote as respostas no caderno.

1. Em relação às afirmações a seguir, reescreva aquelas que julgar falsas, corrigindo-as.

a) Por um ponto passam infinitas retas.

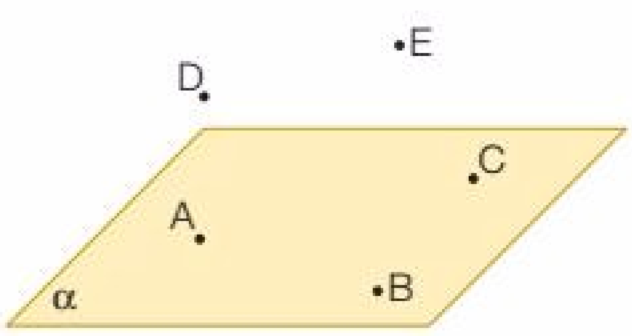
b) Existem finitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem ao plano. Uma possível resposta: existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem a um plano.

c) Três pontos quaisquer determinam sempre uma única reta. Uma possível resposta: três pontos colineares determinam uma única reta.

d) Existem infinitas retas que estão contidas em um único plano.

e) Quando dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta não está contida no plano. Uma possível resposta: quando dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

2. Considere os pontos A, B e C, pertencentes ao plano α, e D e E, não pertencentes a α.



Acervo da editora

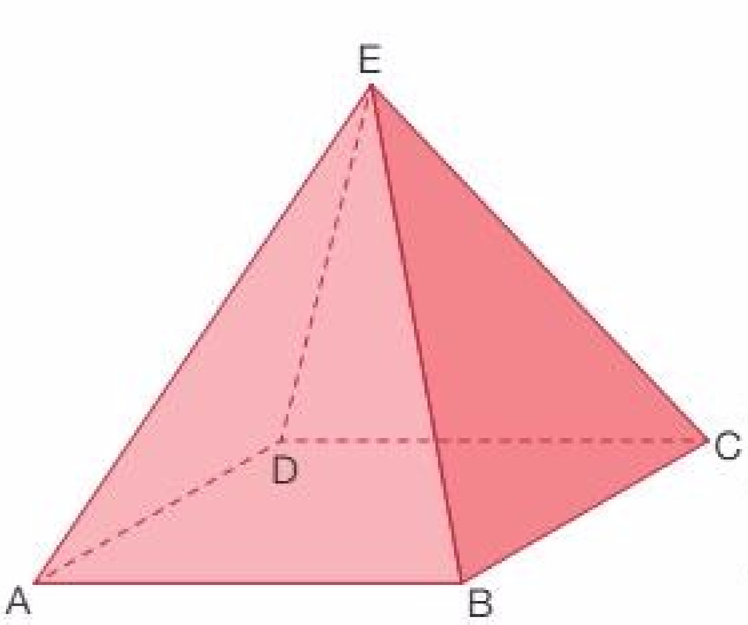
Note que, neste caso, quaisquer três desses pontos são não colineares.

a) Quantas retas contendo dois desses pontos podem ser determinadas? 10 retas

b) Da quantidade de retas indicadas no item **a**, quantas estão contidas no plano α em infinitos pontos? 3 retas

c) Se considerarmos apenas os pontos A, B, C e D, quantos planos contendo três desses pontos são determinados? 4 planos

3. De acordo com a pirâmide de base quadrangular, responda às questões.



Acervo da editora

a) Por regiões de quantos planos as faces dessa pirâmide são formadas? 5 planos

b) Cada vértice da pirâmide está contido em quantos dos planos indicados no item **a**? Os pontos A, B, C e D em três planos, e E em quatro planos.

4. Qual das expressões pode ser utilizada para calcular o número de planos que passam por 3 de n pontos distintos do espaço e não colineares três a três? e

a) n^2-3n+2

b) $\dfrac{n^2-3n+2}{3}$

c) $\dfrac{n^3-3n^2+2n}{3}$

d) $\dfrac{n^2-3n+2}{6}$

e) $\dfrac{n^3-3n^2+2n}{6}$

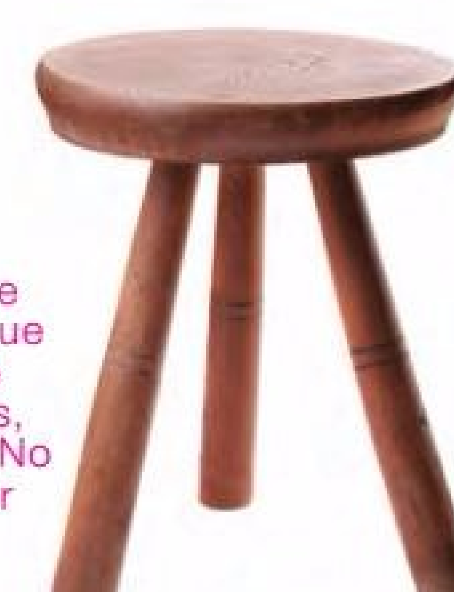
5. A maioria das mesas e cadeiras que utilizamos no dia a dia possui quatro pernas. No entanto, dependendo da regularidade do piso onde estão apoiadas, elas podem balançar. A fim de evitar o balanço, alguns objetos são construídos com três pernas, como o tripé para câmera fotográfica ou telescópio e o suporte para pintar telas. Por qual motivo, em geral, os objetos que possuem três pernas não balançam?

VTT Studio/Shutterstock.com

Suporte em madeira utilizado para pintura de telas.

Photodisc/Getty Images

Tripé com telescópio.



BEPictured/Shutterstock.com

Banco de madeira.

5. Resposta esperada: porque três pontos não colineares, que correspondem aos pontos de apoio dos pés desses objetos, determinam um único plano. No caso de um piso irregular, por exemplo, os três pontos de apoio determinam um plano imaginário que intersecta esse piso nesses pontos.

Posições relativas entre duas retas

Neste tópico, estudaremos as posições relativas entre retas contidas em um mesmo plano (retas coplanares) e entre retas não contidas em um mesmo plano (não coplanares).

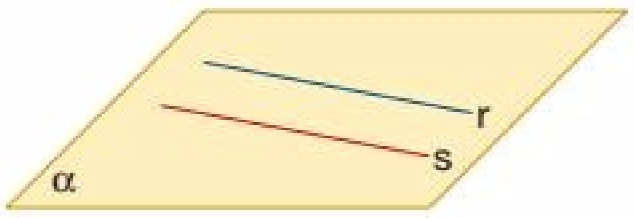
André Thévet. c. 1584. Gravura. Biblioteca Nacional da França, Paris

O postulado 7, conhecido como Postulado das paralelas ou Postulado de Euclides, foi enunciado pelo matemático grego Euclides por volta do século III a.C.

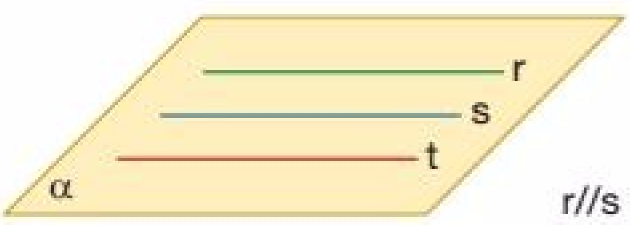
No caso de retas contidas em um mesmo plano, temos:

- Paralelas

  Duas retas quaisquer *r* e *s* são paralelas se e somente se elas são coplanares e não possuem pontos em comum. Indicamos por r//s.



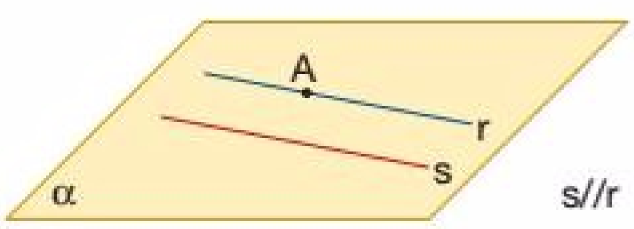
Além disso, duas retas distintas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.



r//s e t//s $\Rightarrow$ r//t

Postulado 7

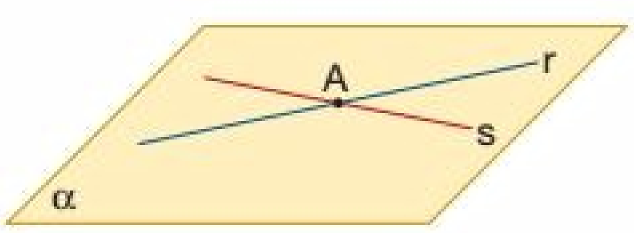
Sendo *A* um ponto não pertencente à reta *s*, existe apenas uma reta *r* que passa por *A* e é paralela a *s*.



s//r

- Concorrentes ou secantes

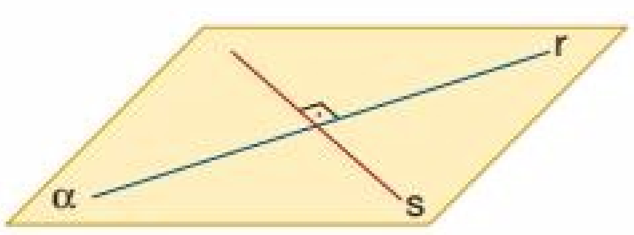
  Duas retas *r* e *s* quaisquer são concorrentes (ou secantes) se e somente se elas são coplanares e possuem apenas um ponto em comum.



Se nenhum dos ângulos formados por duas retas concorrentes não é reto, então dizemos que essas retas são **concorrentes oblíquas**.

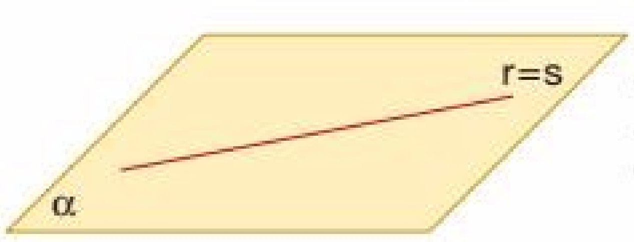
- Perpendiculares

  Se duas retas concorrentes *r* e *s* formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares entre si. Indicamos por r⊥s.



- Coincidentes

  Se duas retas *r* e *s* correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que elas são coincidentes. Indicamos por r=s.



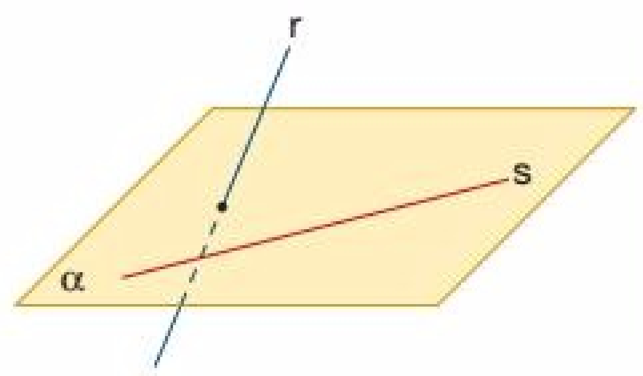
Ilustrações: Acervo da editora

No caso de retas não contidas em um mesmo plano, temos:

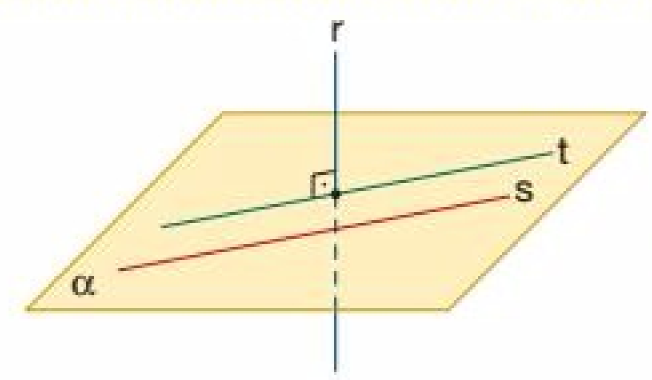
Capítulo 7

- Reversas

  Duas retas *r* e *s* são chamadas reversas (ou não coplanares) quando todo plano que contém uma delas não contém a outra.



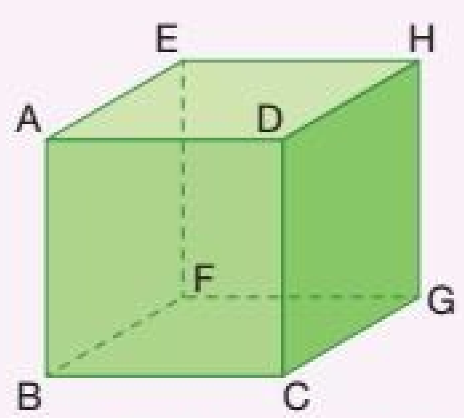
Duas retas reversas *r* e *s* são chamadas de **ortogonais** caso exista uma reta *t* perpendicular a uma delas e paralela à outra. Caso duas retas reversas não sejam ortogonais, dizemos que elas são **reversas oblíquas**.



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R3. Observe o cubo.



Utilizamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para indicar a reta que contém o segmento AB.

Nesta atividade, relembre com os alunos o que são vértices, arestas e faces de um poliedro, conceitos estudados em anos anteriores.

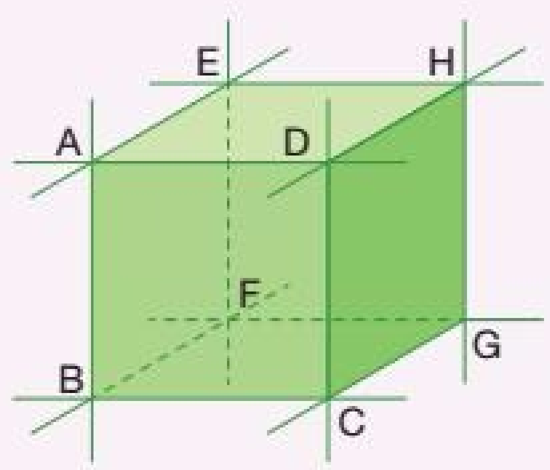
Considerando as retas que contêm as arestas desse cubo, determine:

a) as retas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AD}$.

b) a posição relativa entre $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

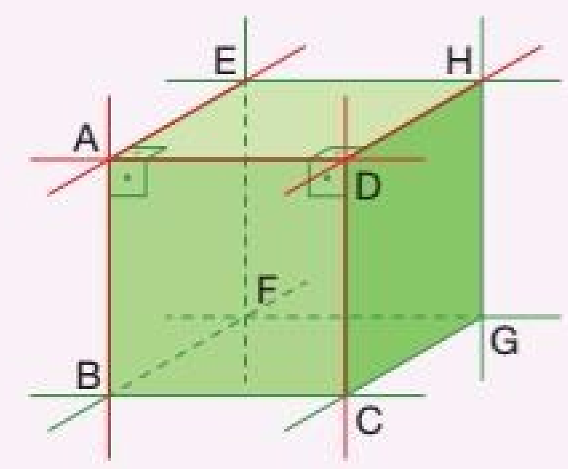
Resolução

As retas que contêm as arestas do cubo são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.

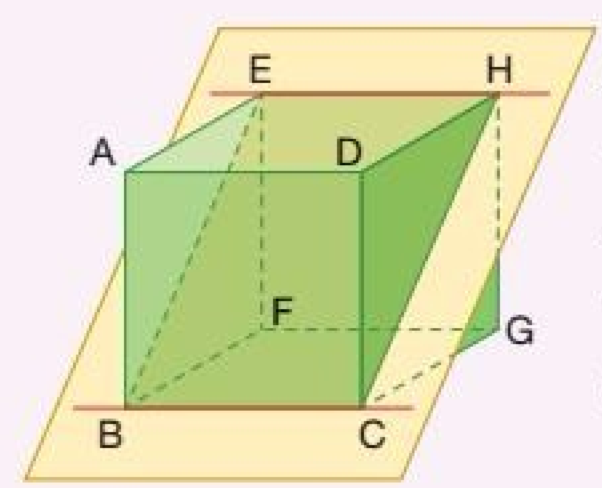


Ilustrações: Acervo da editora

a) Em relação a $\overleftrightarrow{AD}$, as retas perpendiculares são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.



b) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ambas paralelas à reta $\overleftrightarrow{AD}$, pois são lados opostos de quadrados. Logo, essas retas são paralelas.



Ilustrações: Acervo da editora

As retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ são paralelas entre si, assim como as retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

6. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

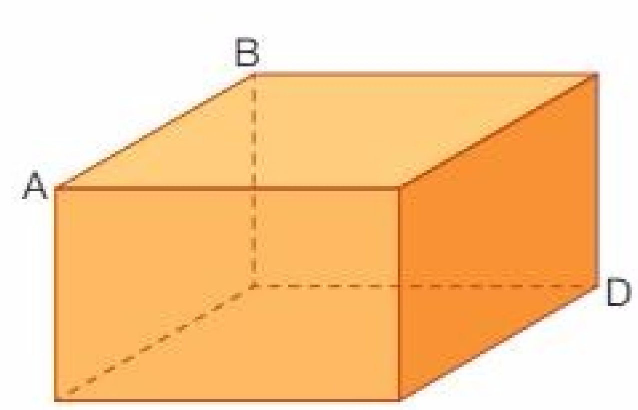
a) Existem pares de retas que são concorrentes e ortogonais ao mesmo tempo. Resposta no final do livro.

b) Duas retas distintas podem ser coplanares ou reversas. verdadeira

c) Todo par de retas perpendiculares também é concorrente. verdadeira

d) Todo par de retas concorrentes também é perpendicular. Falsa, pois retas concorrentes também podem ser oblíquas.

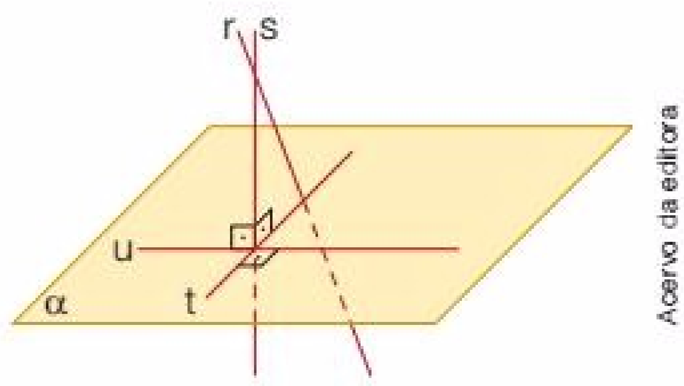
7. Em relação ao paralelepípedo retângulo abaixo, é possível afirmar que as retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são coplanares? Por quê?



Acervo da editora

Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre *A*, *B*, *C* e *D*, são coplanares.

8. Dada a representação das retas *r*, *s*, *t* e *u*, concorrentes duas a duas, e do plano α, responda.

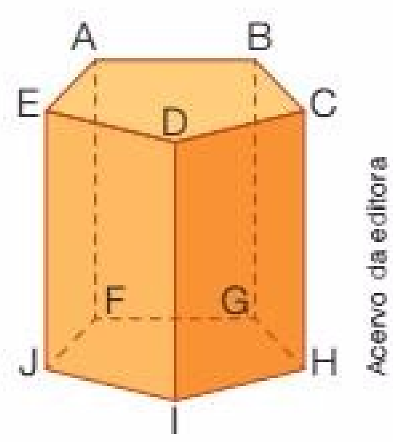


a) Qual é a posição relativa entre:
- *s* e *u*? perpendiculares
- *r* e *u*? reversas

b) É possível que a reta *r* seja perpendicular à reta *t*? Por quê? Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por *r*, *t* e *s* possuiria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

9. Considere as retas *r*, *s* e *t*, não coincidentes, com $r \perp s$, $s \perp t$, e *t* e *r* não paralelas. Essas três retas são coplanares? Justifique. Resposta no final do livro.

10. Observe o prisma reto de base pentagonal e, considerando as retas que contêm as arestas, escreva as retas: Respostas no final do livro.



a) paralelas à $\overleftrightarrow{AB}$

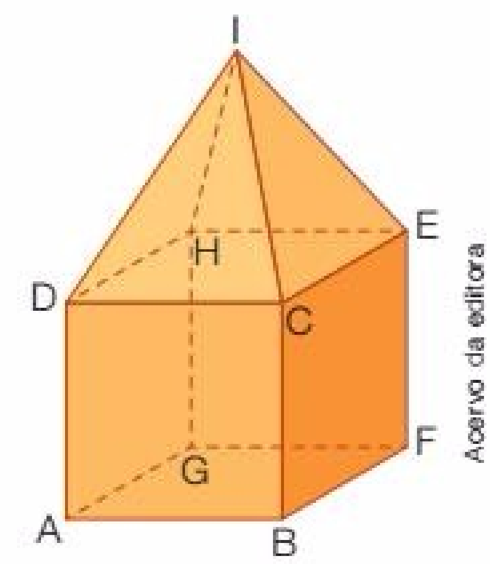
b) ortogonais à $\overleftrightarrow{CD}$

c) perpendiculares à $\overleftrightarrow{IJ}$

d) coplanares à $\overleftrightarrow{CH}$

e) reversas à $\overleftrightarrow{AE}$

11. A figura representa um poliedro composto de um cubo e uma pirâmide reta.



Em relação às retas que contêm as arestas desse poliedro, resolva.

a) Escreva três retas coplanares a $\overleftrightarrow{CD}$.
Uma possível resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.

b) Determine todas as retas paralelas a $\overleftrightarrow{EF}$.
$\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$

c) Quais das retas não possuem paralelas?
$\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$

d) Qual é a posição de $\overleftrightarrow{AD}$ em relação a $\overleftrightarrow{CE}$?
ortogonal

12. Sejam *r*, *s*, *t* e *u* quatro retas não coincidentes e coplanares, com $r \perp s$, $u \perp t$ e *s* e *t* oblíquas. Qual das afirmações a seguir está incorreta? c

a) É possível que todas as retas se intersectem em um único ponto.

b) A reta *t* é oblíqua em relação à reta *r*.

c) A reta *s* é perpendicular à reta *u*.

d) As retas *r* e *u* são secantes.

e) Todas essas retas estão contidas em um único plano.

Capítulo 7

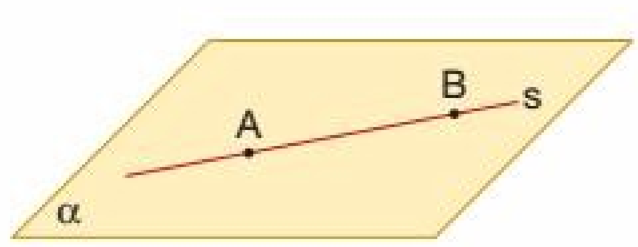
Posições relativas entre reta e plano

Agora, estudaremos as posições relativas entre reta e plano. Considerando uma reta e um plano no espaço, temos:

- Reta contida no plano

  Se dois pontos distintos *A* e *B* de uma reta *s* pertencem a um plano α, então a reta está contida nesse plano. Indicamos por $s \subset \alpha$.

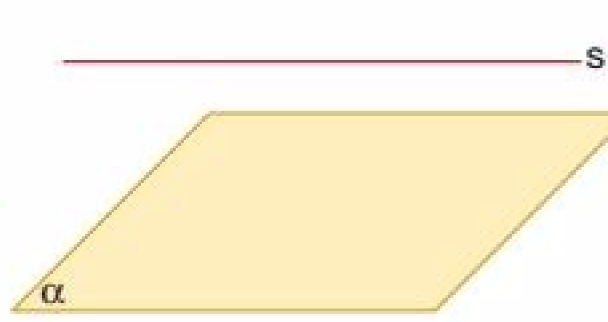
$s \cap \alpha = s$



- Reta paralela ao plano

  Se uma reta *s* não possui ponto em comum com um plano α, então a reta é paralela a esse plano. Indicamos por $s // \alpha$.

$s \cap \alpha = \varnothing$

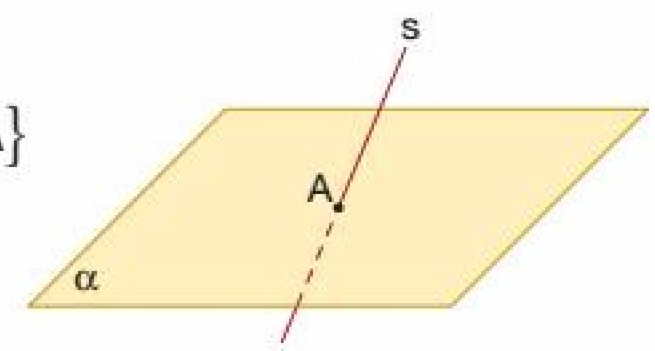


Ilustrações: Acervo da editora

- Reta concorrente ou secante ao plano

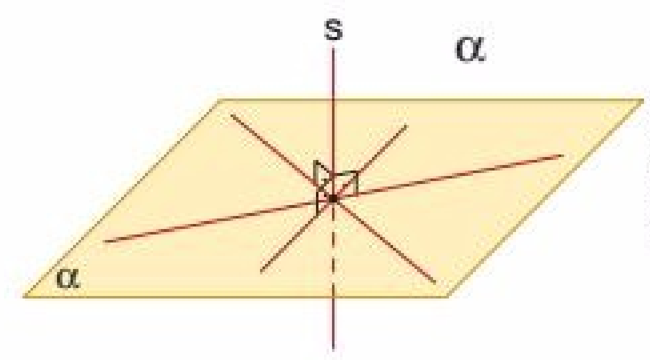
  Se uma reta *s* possui um único ponto *A* em comum com um plano α, então a reta e o plano são concorrentes.

$s \cap \alpha = \{A\}$



- Reta perpendicular ao plano

  Uma reta *s* é perpendicular a um plano α se e somente se *s* é perpendicular a todas as retas concorrentes a ela contidas em α. Indicamos por $s \perp \alpha$.

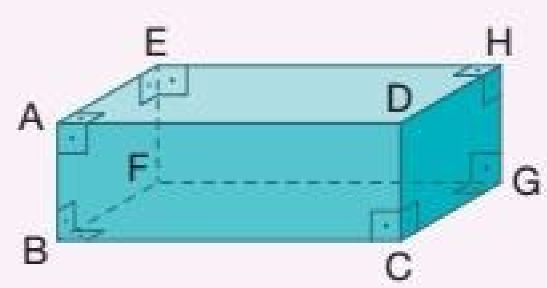


Ilustrações: Acervo da editora

Por outro lado, se uma reta *s* é perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes de um plano α, então *s* é perpendicular a α.

Atividades resolvidas

R4. Observe o paralelepípedo reto retângulo.



Considerando as retas que contêm as arestas do paralelepípedo e os planos que contêm as faces, determine:

a) as retas contidas no plano que contém a face DCGH

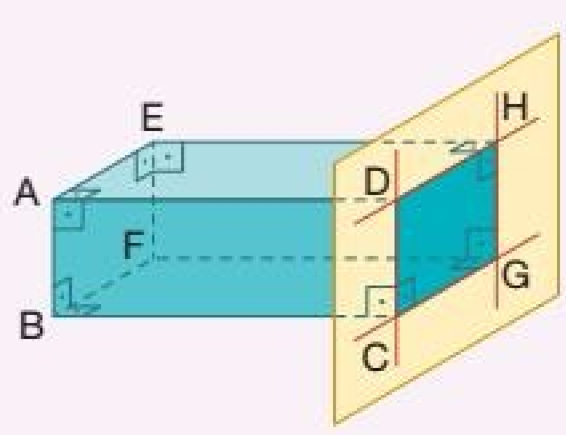
b) as retas paralelas ao plano que contém a face ABFE

c) as retas perpendiculares ao plano que contém a face BCGF

d) a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CG}$ e o plano que contém a face ADHE

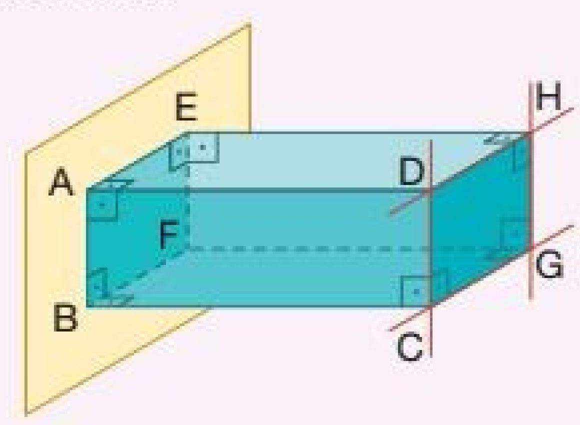
Resolução

a) O plano que contém a face DCGH contém as retas $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.

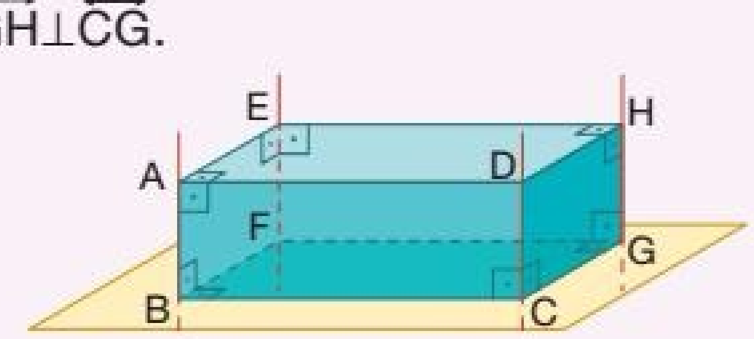


Ilustrações: Acervo da editora

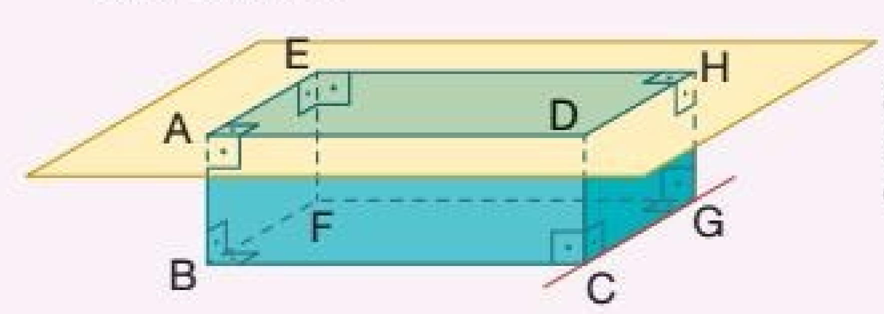
b) Em relação ao plano que contém a face ABFE, as retas paralelas são: $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.



c) As retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são perpendiculares ao plano que contém a face BCGF, pois cada uma delas é perpendicular a duas retas concorrentes desse plano: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{CG}$.



d) Como a reta $\overleftrightarrow{CG}$ está contida em uma face oposta à face ADHE, e faces opostas de paralelepípedos são paralelas, então $\overleftrightarrow{CG}$ é paralela ao plano que contém ADHE.



Ilustrações: Acervo da editora

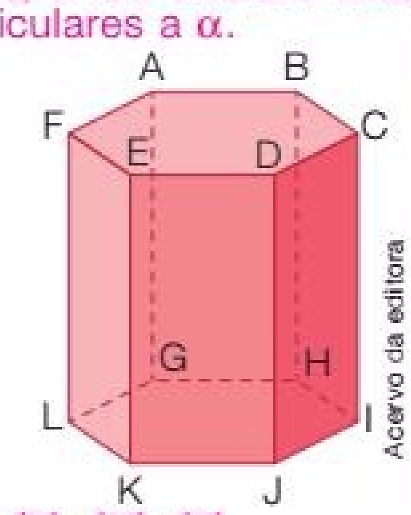
13. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação, reescrevendo corretamente aquelas que julgar falsas.

a) Se uma reta r é perpendicular a duas outras retas paralelas e contidas em um mesmo plano α, então r está contida em α. verdadeira

b) Existem infinitas retas paralelas a um plano qualquer e infinitos planos paralelos a uma reta qualquer. verdadeira

c) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular a r será perpendicular a α. falsa; Uma possível resposta: se uma reta r e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

14. Considerando os planos que contêm as faces e as retas que contêm as arestas do prisma hexagonal regular, responda às questões.



a) Quais retas são perpendiculares ao plano que contém a face ABCDEF? $\overleftrightarrow{AG}$; $\overleftrightarrow{BH}$; $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DJ}$; $\overleftrightarrow{EK}$; $\overleftrightarrow{FL}$

b) Quantas retas são perpendiculares ao plano que contém a face CDJI? nenhuma

c) Quais são as retas paralelas ao plano que contém a face GHIJKL? $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{DE}$; $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{AF}$

d) Qual é a posição relativa entre o plano que contém a face EFLK e a reta $\overleftrightarrow{CD}$? concorrente

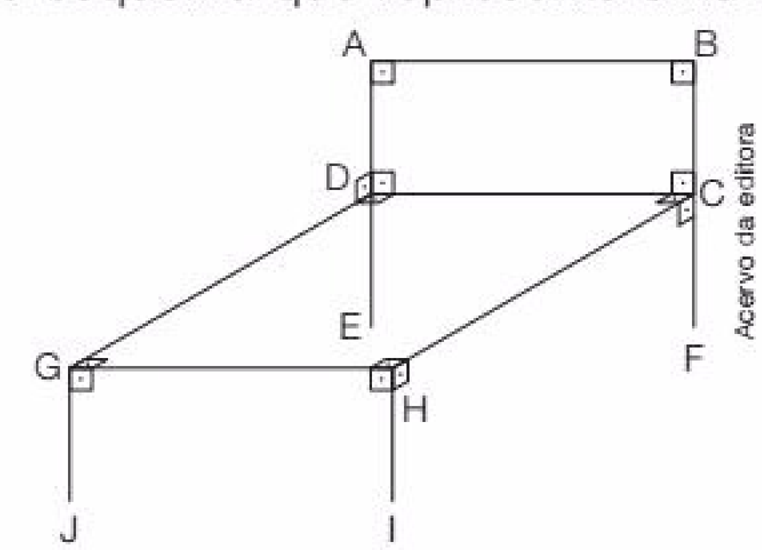
e) Quais retas são paralelas a $\overleftrightarrow{KL}$? $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$

15. Determine as possíveis posições relativas entre duas retas r e s, sabendo que:

- r é concorrente a um plano α
- $s \cap \alpha = s$

Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

16. Veja o esquema que representa uma cama.



a) Qual é a posição relativa entre $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano determinado por:

- CDEF? contida no plano
- CDGH? paralela

b) Quais retas, que contêm os segmentos do esquema, são perpendiculares ao plano determinado por ABCD? $\overleftrightarrow{DG}$; $\overleftrightarrow{CH}$

c) Quais retas, que contêm os segmentos do esquema, são paralelas ao plano determinado por ABCD? $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{GJ}$

d) Determine as retas, que contêm os segmentos do esquema, reversas a $\overleftrightarrow{AE}$. $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$

17. Se uma reta s for perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α, s será perpendicular a α? Justifique. Não, pois para ser perpendicular a α, a reta s tem de ser perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas em α.

Posições relativas entre dois planos

Agora, estudaremos as posições relativas entre dois planos. Considerando dois planos no espaço, temos:

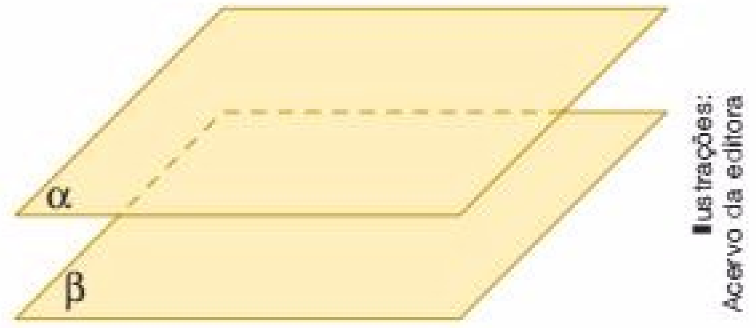
- Coincidentes

  Se dois planos α e β correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que eles são coincidentes. Indicamos por $\alpha = \beta$.

- Paralelos

  Dois planos quaisquer α e β são paralelos se e somente se não possuem pontos em comum. Indicamos por $\alpha // \beta$.

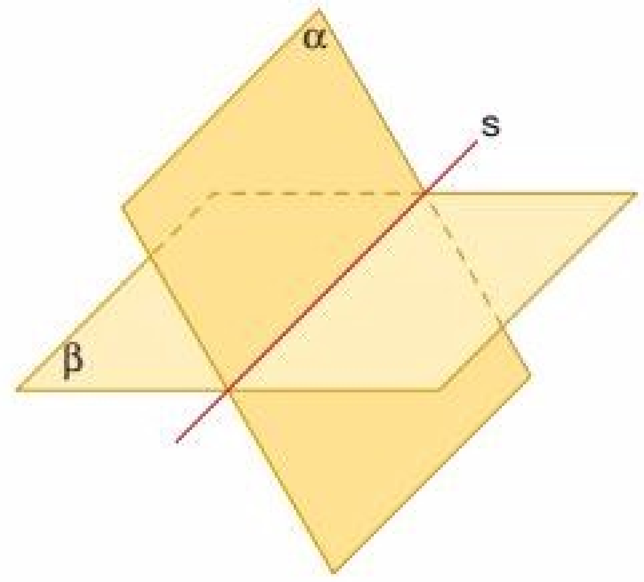
$\alpha \cap \beta = \varnothing$



- Concorrentes ou secantes

  Dois planos quaisquer α e β são concorrentes se e somente se possuem apenas uma reta em comum.

$\alpha \cap \beta = s$



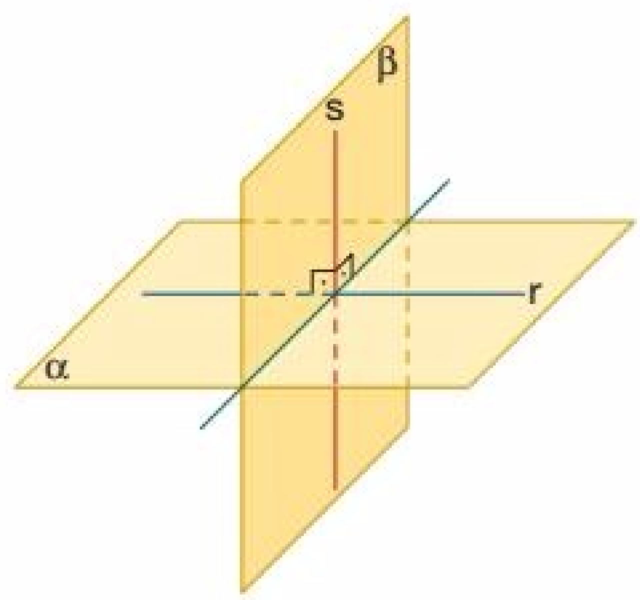
> Se dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que eles são **oblíquos**.

Quando concorrentes, a interseção de dois planos distintos é uma reta.

- Perpendiculares

  Dois planos concorrentes α e β são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Indicamos por $\alpha \perp \beta$.

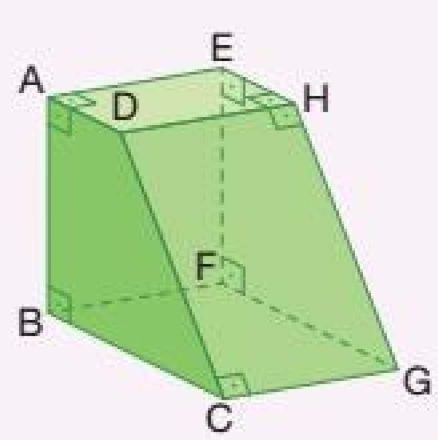
$r \subset \alpha,\ r \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R5. Considerando os planos que contêm as faces do sólido ao lado, determine:



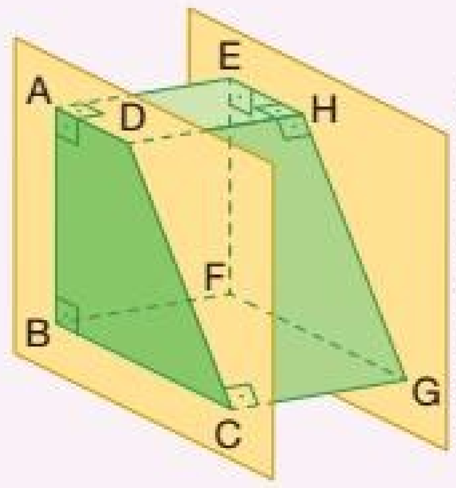
a) os planos paralelos ao plano que contém a face ABCD

b) os planos perpendiculares ao plano que contém a face ABFE

c) a posição relativa entre os planos que contêm as faces ABFE e DCGH

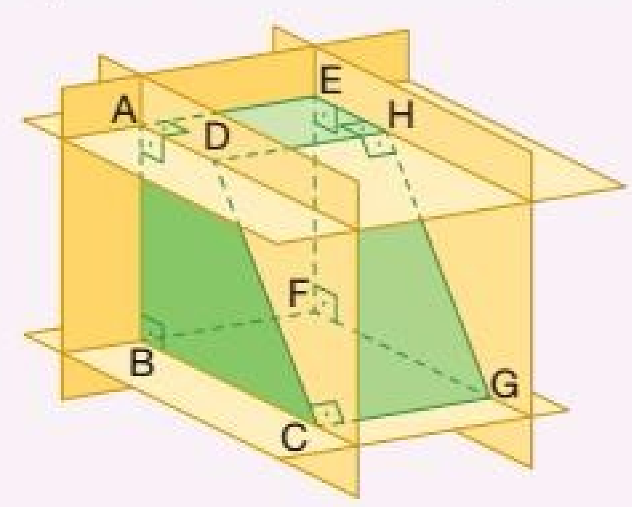
Resolução

a) Em relação ao plano que contém a face ABCD, o plano paralelo é aquele que contém a face EFGH.



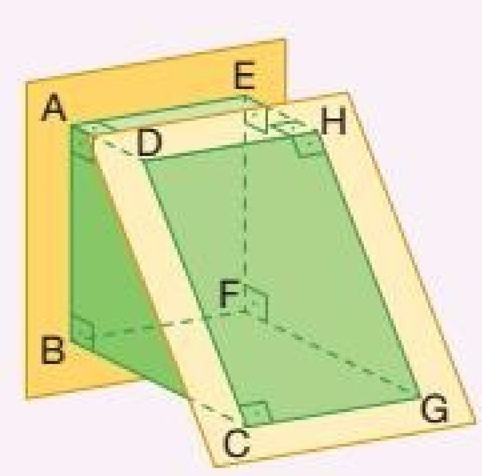
Ilustrações: Acervo da editora

b) As retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são perpendiculares ao plano que contém a face ABFE. Logo, os planos que contêm essas retas são perpendiculares a esse plano.



Portanto, os planos que contêm as faces ADHE, ABCD, EFGH e BCGF são perpendiculares àquele que contém a face ABFE.

c) Os planos que contêm as faces ABFE e DCGH são oblíquos.



Ilustrações: Acervo da editora

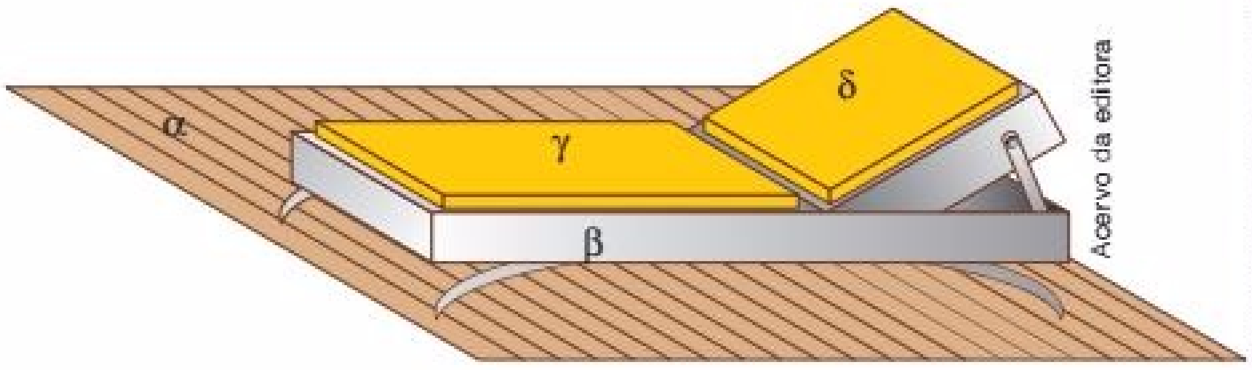
Atividades

Anote as respostas no caderno.

19. a) Falsa, pois dois planos secantes possuem uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.

19. c) Falsa, pois, se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.

18. Na espreguiçadeira ilustrada a seguir, considere os planos α, β, γ e δ, que contêm o solo, uma das laterais, o assento e o encosto, respectivamente, com $\beta \perp \alpha$ e $\beta \perp \gamma$. Quais desses planos são paralelos? α; γ



19. Determine se cada proposição é verdadeira ou falsa. Depois, justifique aquelas que classificar como falsas.

a) Dois planos secantes possuem um único ponto em comum.

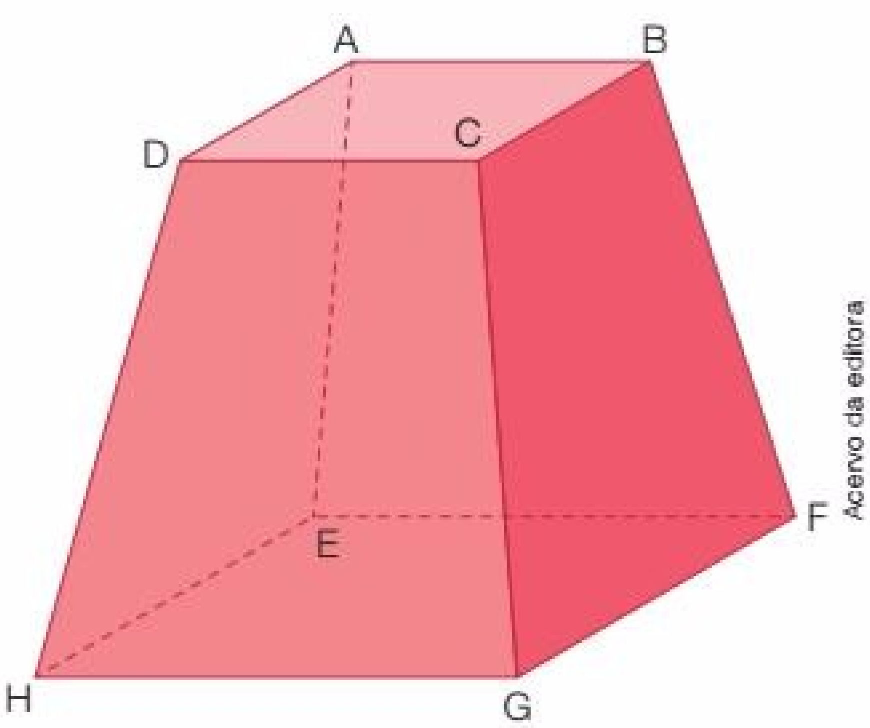
b) Dois planos perpendiculares são secantes. verdadeira

c) Se dois planos α e β são paralelos, então todas as retas paralelas a α são secantes a β.

d) Se uma reta está contida em dois planos não coincidentes, então estes são concorrentes. verdadeira

e) Se os planos α e β são concorrentes, então podemos concluir que $\alpha = \beta$. Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando possuem apenas uma reta em comum.

20. Considere apenas os planos que contêm as faces do poliedro.



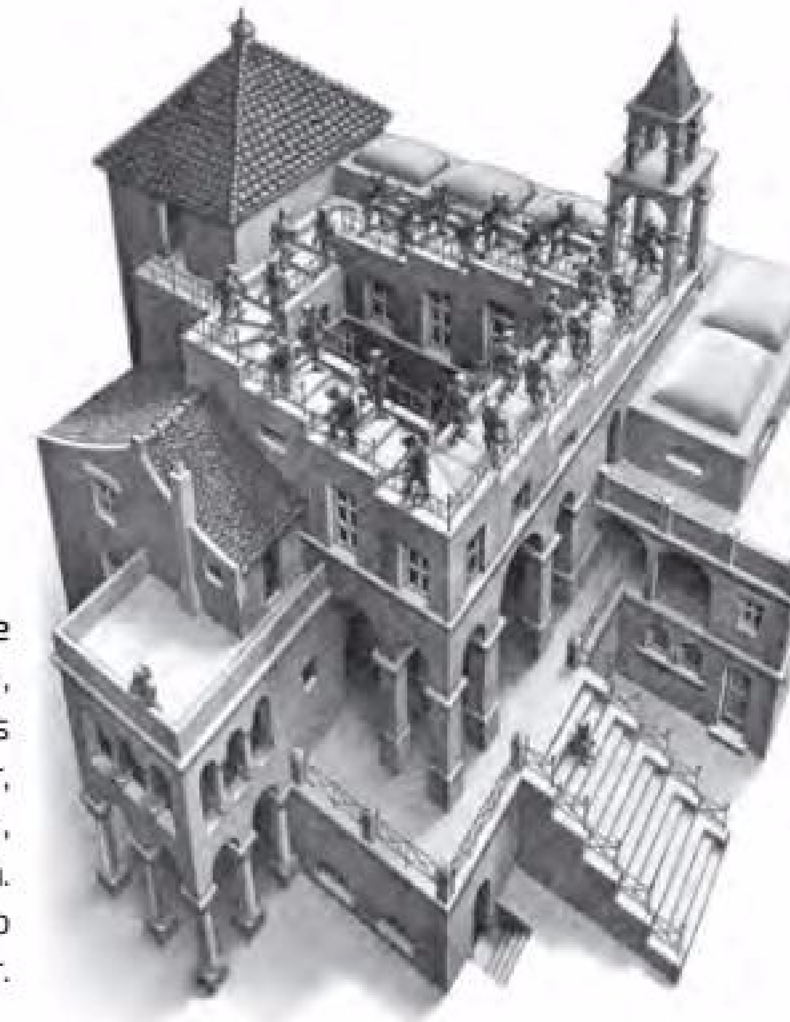
No poliedro, as faces laterais são trapézios congruentes e as bases, quadrados.

a) O plano que contém a face ABCD é concorrente ao plano que contém a face ABFE? Por quê? Sim, pois eles possuem apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.

b) Há algum plano perpendicular àquele que contém a face CDHG? não

c) Sabendo que os planos que contêm as faces ABCD e EFGH são paralelos, determine quais dos planos são secantes a todos os outros. Os planos que contêm as faces ABFE, BCGF, CDHG e ADHE.

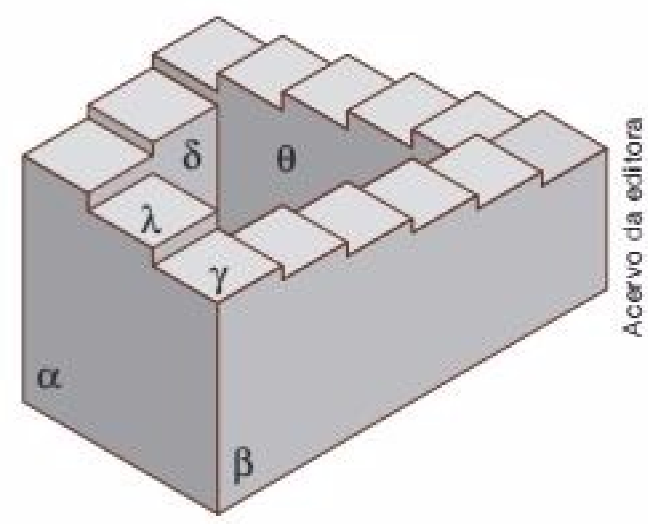
21. Nas páginas 176 e 177, estudamos um pouco sobre o artista Maurits Cornelis Escher e uma de suas obras, a **Escada acima e escada abaixo**, na qual nos deparamos com uma escada que tanto pode subir quanto descer, sem que se chegue a lugar algum.



Escada acima e escada abaixo, de Maurits Cornelis Escher, 1960. Litografia, 35 cm × 28,5 cm. Coleção particular.

M.C. Escher's "Ascending and Descending" © 2016 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

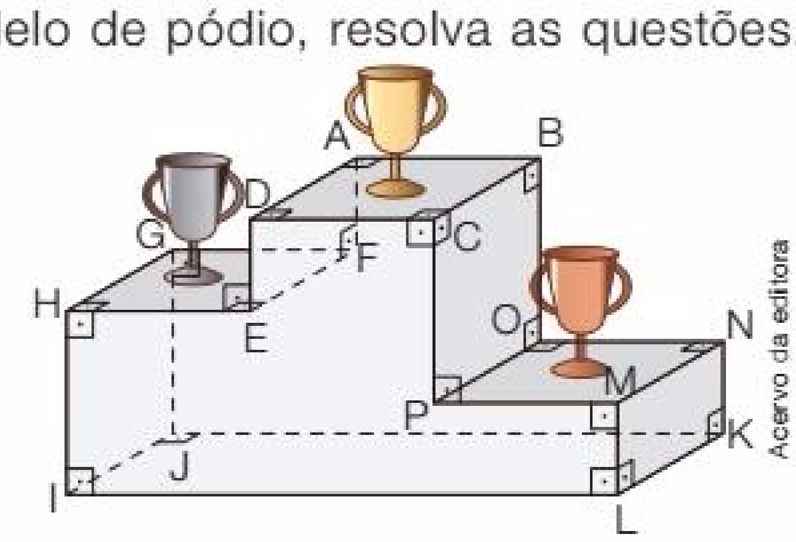
A imagem representa um modelo de escada semelhante ao utilizado por Escher, em que os degraus são paralelos.



Em relação aos planos que contêm as superfícies indicadas, qual é a posição relativa entre:

- α e β? concorrentes
- γ e λ? paralelos
- α e δ? concorrentes
- β e θ? concorrentes

22. Considerando os planos e as retas que contêm, respectivamente, as faces e as arestas de um modelo de pódio, resolva as questões.



a) Determine os planos que são:

- perpendiculares àquele que contém a face MNOP Os planos que contêm as faces KLMN, BCPO, ADEF, GHIJ, CDEHILMP e ABONKJGF.
- paralelos ao plano que contém a face EFGH Os planos que contêm as faces IJKL, MNOP e ABCD.

b) Em relação ao plano que contém a face CDEHILMP:

- quantos planos são concorrentes a ele? 8 planos
- qual plano é paralelo a ele? O plano que contém a face ABONKJGF.

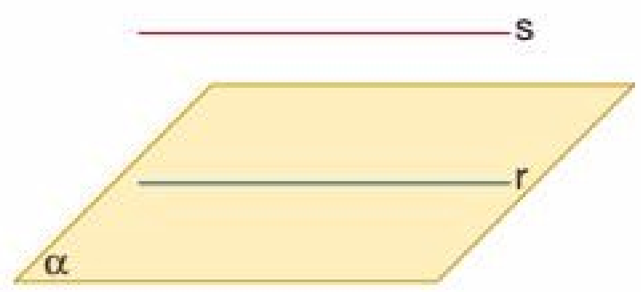
Propriedades de paralelismo e perpendicularismo

Neste tópico, estudaremos algumas propriedades relacionadas a paralelismo e perpendicularismo no espaço. Tais propriedades são teoremas que podem ser demonstrados; porém, nesta obra, apenas as enunciaremos.

Em relação ao paralelismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades:

Propriedade 1

Uma reta *s* não contida em um plano α é paralela a esse plano se for paralela a uma reta *r* contida em α.

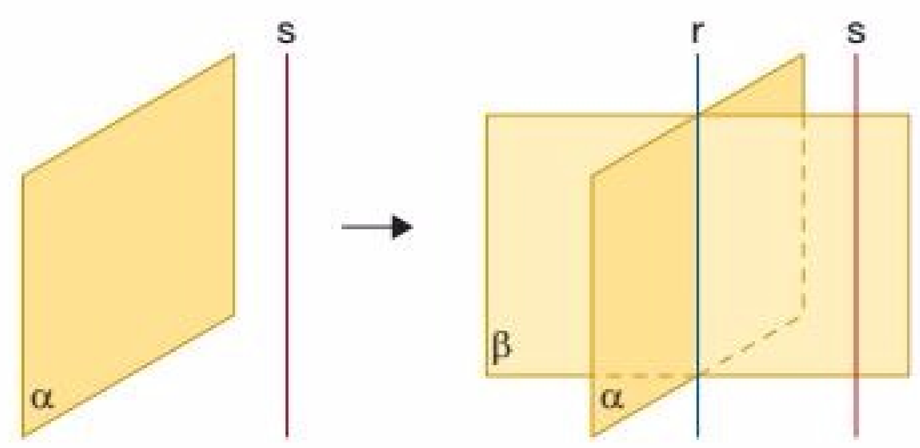


$r // s, r \subset \alpha \Rightarrow s // \alpha$

Propriedade 2

Uma reta *s* paralela a um plano α é paralela a pelo menos uma reta *r* desse plano.

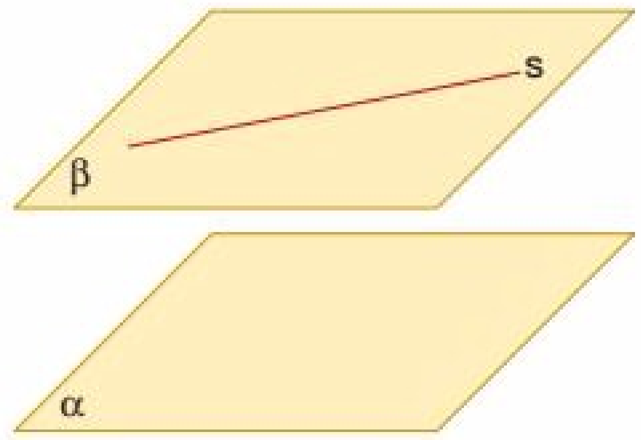
$s // \alpha \Rightarrow r // s$



Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta *s* contida em um deles será paralela ao outro.

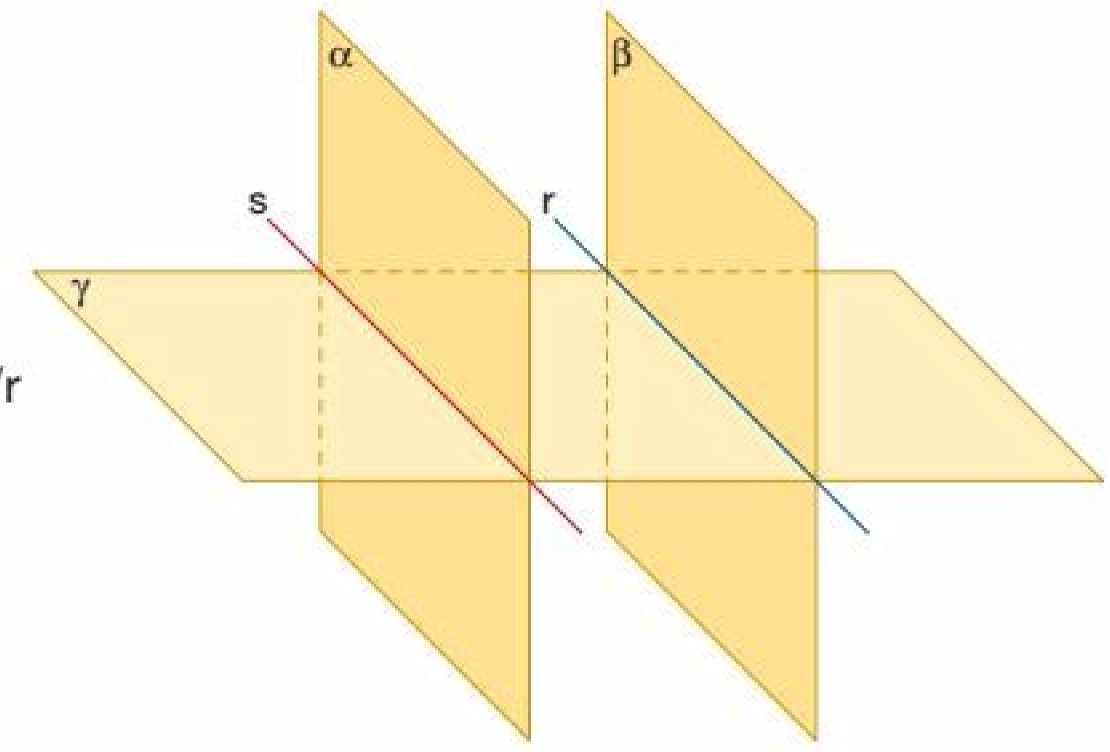
$s \subset \beta, \alpha // \beta \Rightarrow s // \alpha$



Propriedade 4

Sejam α e β planos paralelos e γ um plano secante a α e β. As interseções de γ com α e β são retas paralelas.

$\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = s, \beta \cap \gamma = r \Rightarrow s // r$

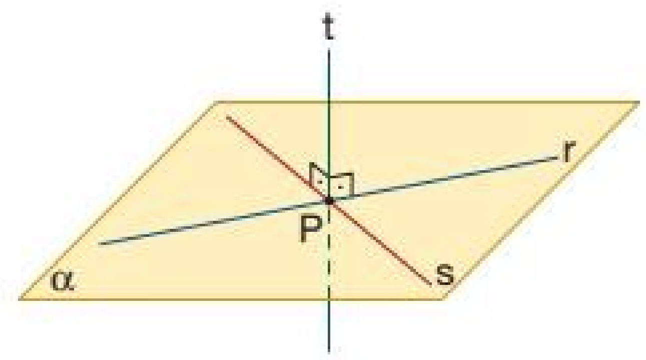


Ilustrações: Acervo da editora

Em relação ao perpendicularismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades:

Propriedade 1

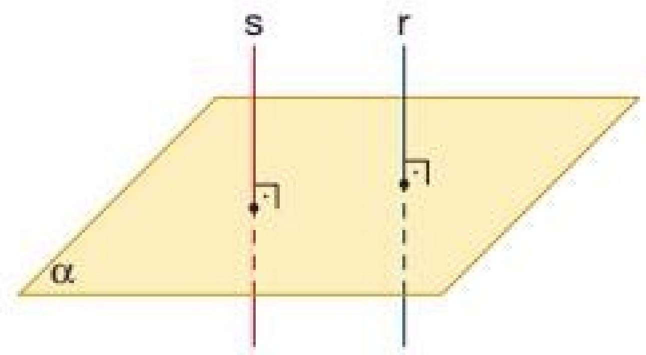
Sejam *r* e *s* retas contidas no plano α e concorrentes em um ponto *P*. Para que uma reta *t* seja perpendicular a α em *P*, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a *r* e *s*.



$$r \perp t,\ s \perp t \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

Propriedade 2

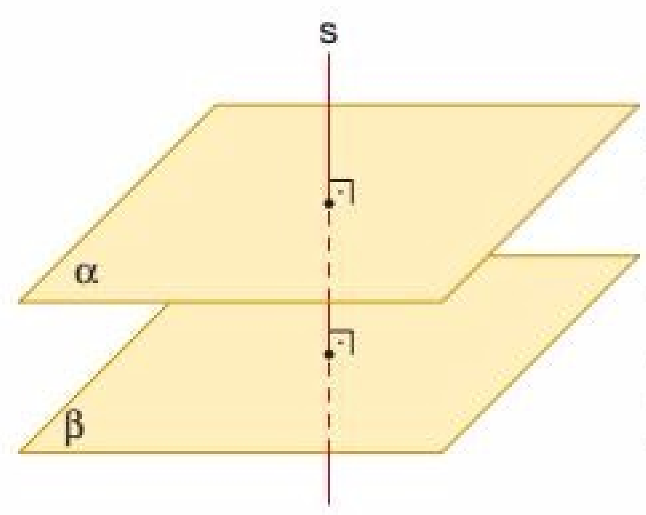
Se *s* é uma reta perpendicular a um plano α, então qualquer reta *r*, paralela a *s*, é perpendicular a α.



$$s \perp \alpha,\ s /\!/ r \Rightarrow r \perp \alpha$$

Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta *s* perpendicular a um deles será perpendicular ao outro.



Ilustrações: Acervo da editora

$$\alpha /\!/ \beta,\ s \perp \alpha \Rightarrow s \perp \beta$$

Atividades resolvidas

R6. Classifique em verdadeiro ou falso cada item a seguir, justificando cada caso.

a) Se uma reta *r* é paralela a um plano α, então *r* é paralela a qualquer reta de α.

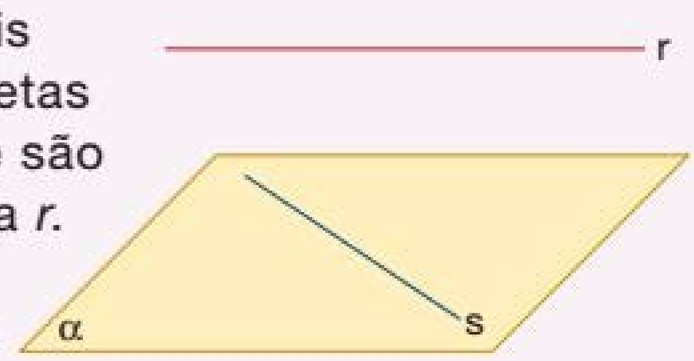
b) Por uma reta *r*, perpendicular a um plano α, passam infinitos planos perpendiculares a α.

c) Se dois planos α e β são paralelos a uma reta *r*, então α e β são paralelos entre si.

d) Se dois planos α e β são secantes, então toda reta de um desses planos é secante ao outro.

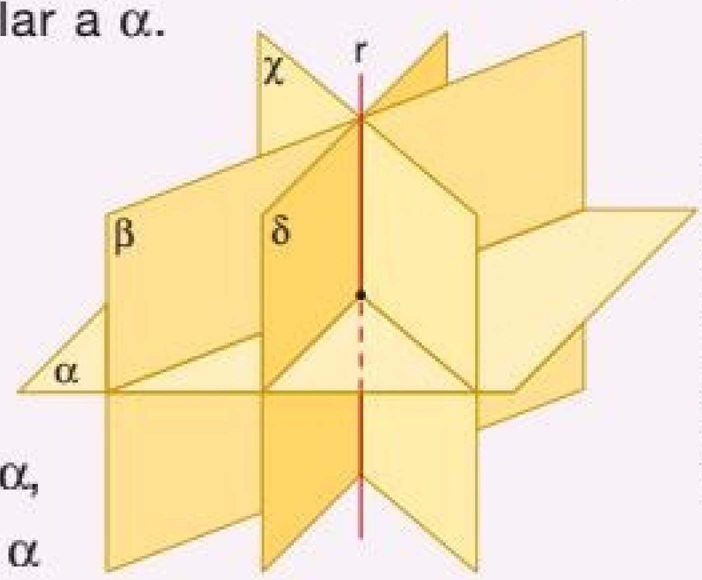
Resolução

a) Falso, pois existem retas em α que são reversas a *r*.



$s \subset \alpha,\ r /\!/ \alpha$

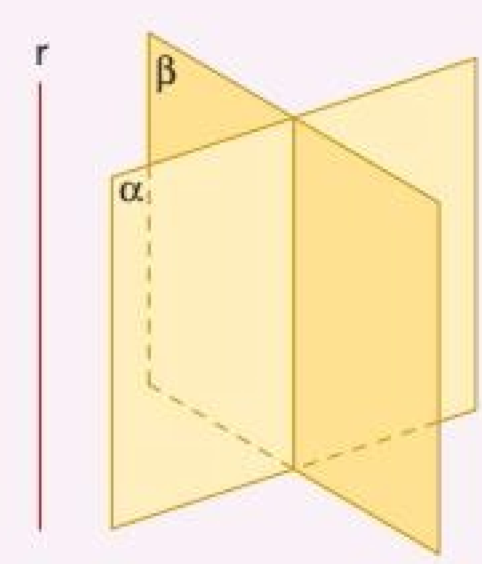
b) Verdadeiro, pois se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então qualquer plano que contenha *r* será perpendicular a α.



Ilustrações: Acervo da editora

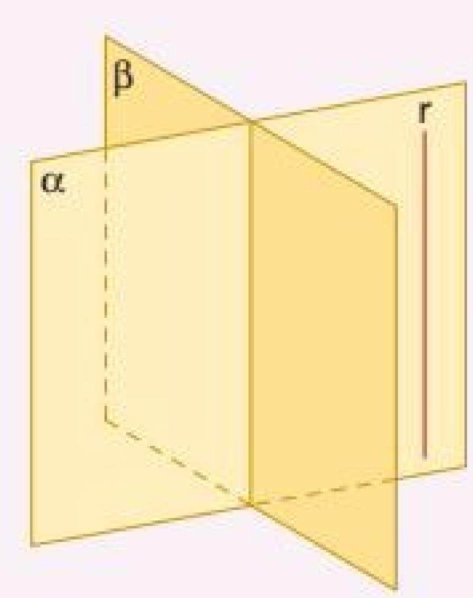
$r \perp \alpha,\ \beta \perp \alpha,$
$\chi \perp \alpha,\ \delta \perp \alpha$

c) Falso, pois os planos α e β podem ser secantes.



$r /\!/ \alpha,\ r /\!/ \beta$

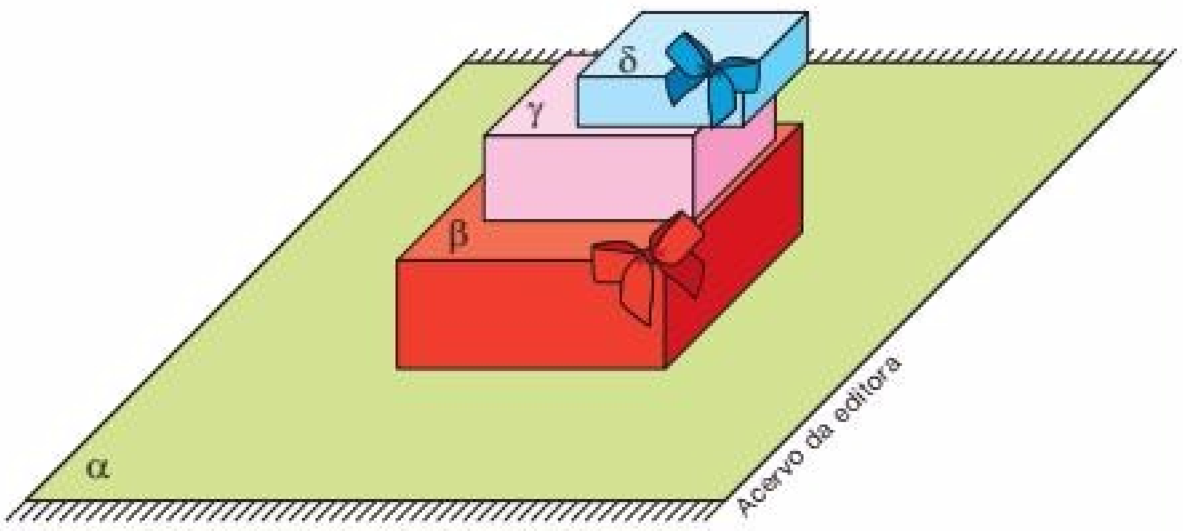
d) Falso, pois existem retas de α, por exemplo, que são paralelas a β.



Ilustrações: Acervo da editora

$r \subset \alpha,\ r /\!/ \beta$

23. A figura ilustra três caixas, com formato de paralelepípedo reto, empilhadas sobre um tapete (plano α), sendo β, γ e δ os planos que contêm as bases superiores dessas caixas.



Com relação à figura, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) Toda reta contida em δ é paralela aos demais planos. verdadeira

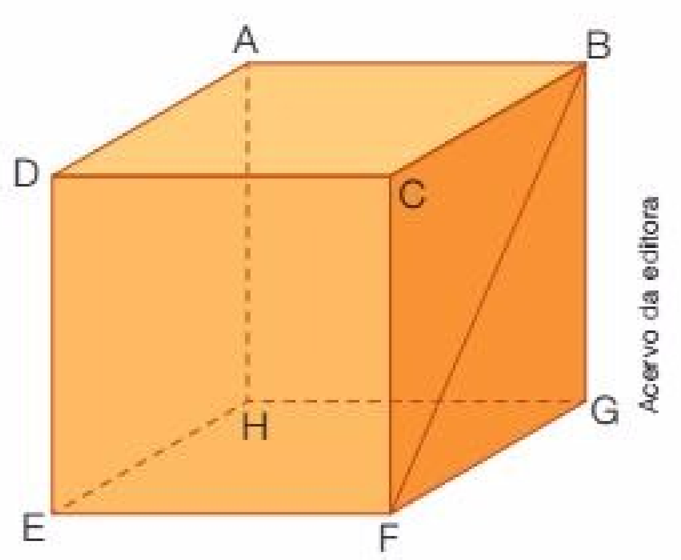
b) Uma reta não contida em α é paralela a esse plano se e somente se for paralela a γ. Resposta no final do livro.

c) Qualquer plano paralelo a β, não coincidente a α, γ e δ, é paralelo a esses planos. verdadeira

d) Todo plano paralelo a γ também é paralelo a δ. Falsa, pois pode ser um plano coincidente a δ.

e) Todo plano perpendicular a α também é perpendicular aos demais planos. verdadeira

24. No cubo a seguir, considere as retas que contêm as arestas e os planos que contêm as faces.



a) Quais planos são:

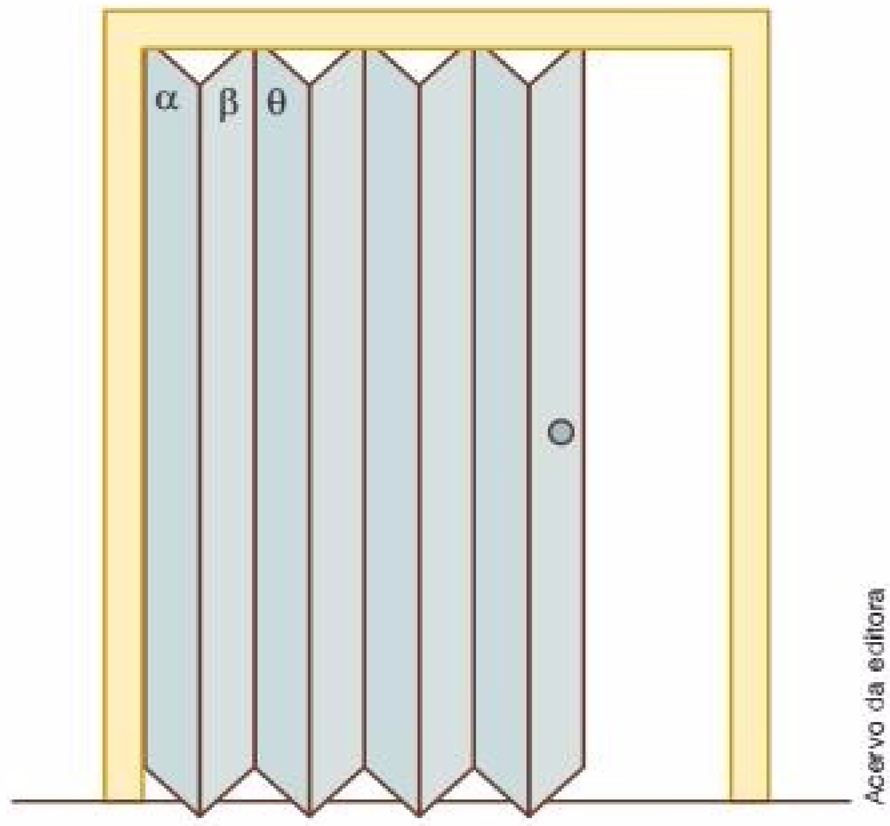
- perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$? Os planos que contêm as faces BCFG e ADEH.
- perpendiculares àquele que contém a face EFGH? Os planos que contêm as faces CDEF, BCFG, ABGH e ADEH.
- paralelos àquele que contém a face BCFG? O plano que contém a face ADEH.

b) A reta $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{EF}$? Por quê? Resposta no final do livro.

c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ está contida em quais planos perpendiculares àquele que contém a face ABCD? Nos planos que contêm as faces CDEF e BCFG.

25. Se a reta r é oblíqua a um plano ρ, determine quantos planos contêm a reta r e são perpendiculares a ρ. um plano

26. Uma opção para quem deseja instalar uma porta em locais com pouco espaço é a chamada porta sanfonada. No esquema, está representada uma dessas portas, sendo destacados alguns planos que contêm três das faixas móveis.



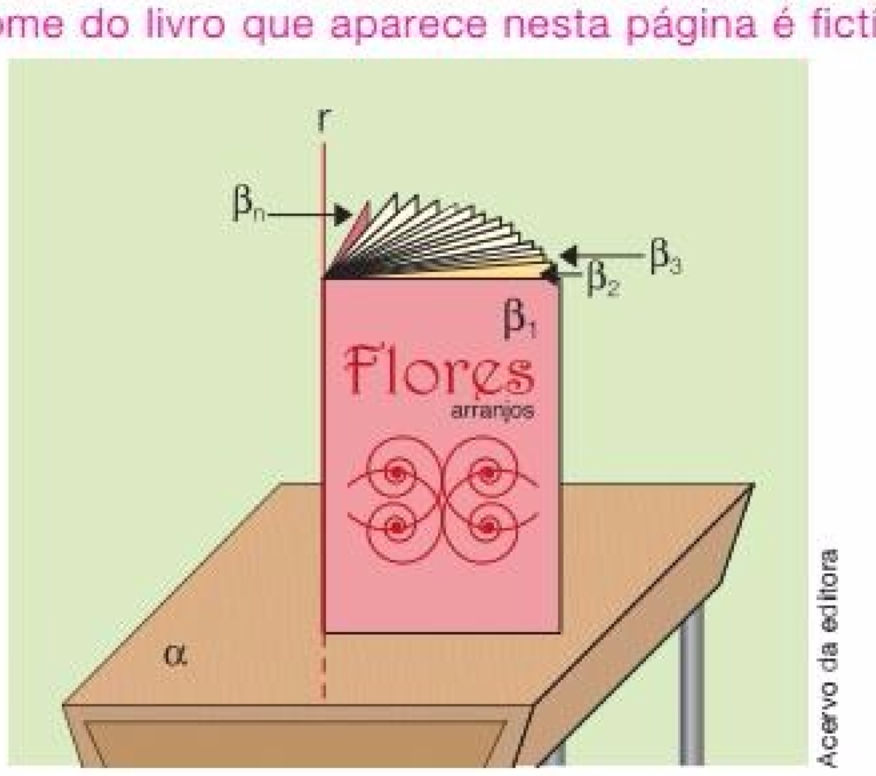
a) Qualquer que seja a abertura da porta, ao traçar uma reta r perpendicular ao plano α, qual será a posição do plano θ em relação a r? Justifique. Resposta esperada: perpendicular, pois α e θ sempre são paralelos.

b) Qual é a posição relativa entre o plano do solo e os planos indicados na porta sanfonada? Essa posição relativa muda de acordo com a abertura da porta? Resposta esperada: perpendicular. Resposta esperada: não.

c) Considere que, quando a porta está totalmente aberta, os planos α, β e θ ficam paralelos entre si. Nessa posição, se uma reta r for perpendicular em relação ao plano α, qual será a posição relativa de r em relação aos demais planos? Resposta esperada: perpendicular.

27. A imagem representa um livro na posição vertical sobre uma mesa, em que α é o plano correspondente ao tampo da mesa (na horizontal), e os planos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ representam a capa e cada uma das páginas do livro. Se uma reta r está contida em $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$, qual a posição relativa de r em relação a α? perpendicular

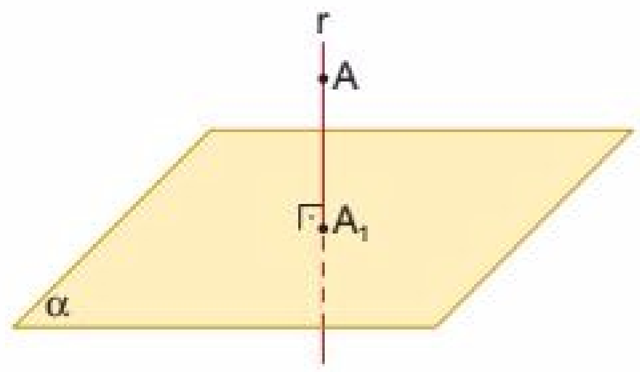
O nome do livro que aparece nesta página é fictício.



Projeções ortogonais sobre um plano

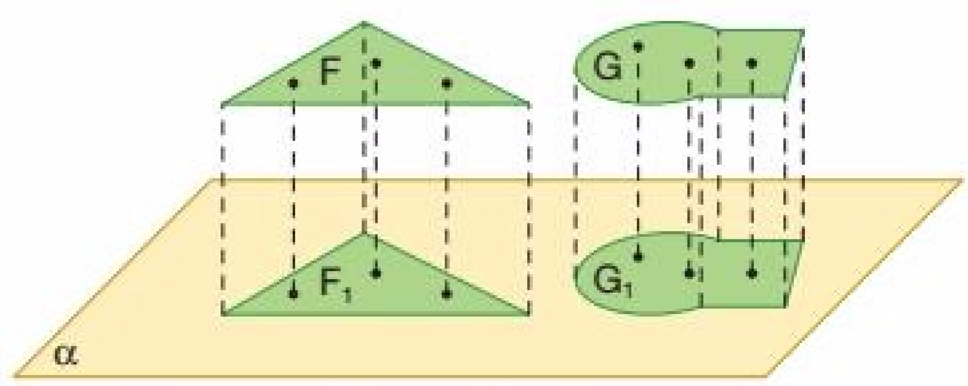
- Projeção de um ponto sobre um plano

  A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é dada pelo ponto A_1, correspondente à interseção da reta r e α, com r perpendicular a α e passando por A.



- Projeção de uma figura sobre um plano

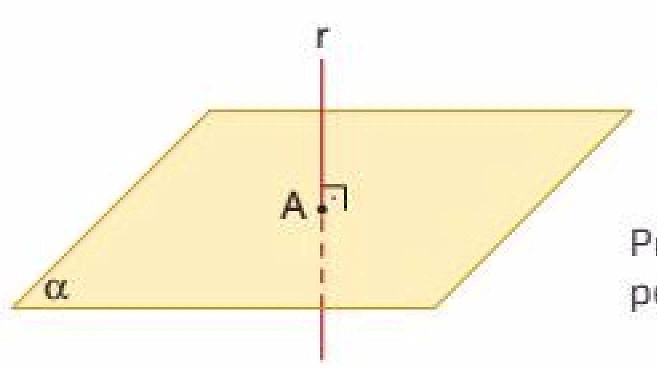
  A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano α é dada pela projeção ortogonal de todos os pontos dessa figura.



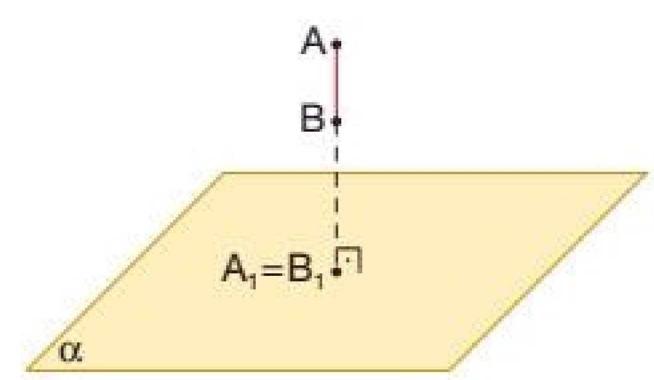
As figuras F_1 e G_1 são as projeções ortogonais, respectivamente, das figuras F e G sobre o plano α.

- Projeção de uma reta ou um segmento de reta sobre um plano

  Caso a reta r ou o segmento AB seja perpendicular em relação ao plano α, a projeção ortogonal tanto da reta quanto do segmento em α será um ponto.

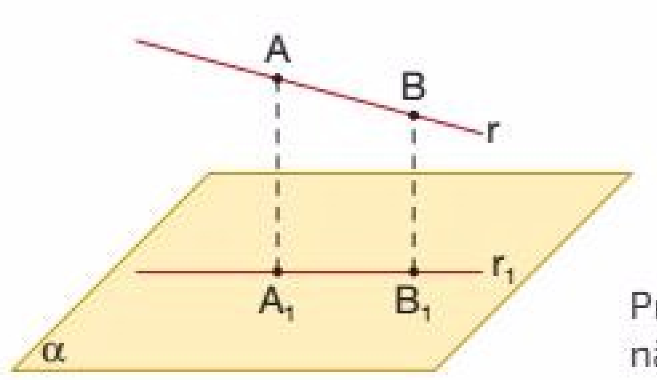


Projeção ortogonal da reta r perpendicular ao plano.

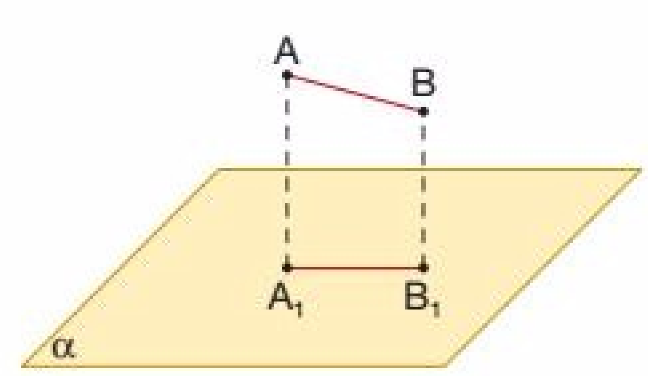


Projeção ortogonal do segmento AB perpendicular ao plano.

Caso a reta r ou o segmento AB seja não perpendicular em relação ao plano α, a projeção ortogonal da reta será outra reta, e a do segmento de reta, outro segmento.



Projeção ortogonal da reta r não perpendicular ao plano.



Projeção ortogonal do segmento AB não perpendicular ao plano.

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

28. Considere um triângulo contido no plano ϕ que será projetado sobre os planos λ, δ e π, não coincidentes. Qual será a projeção do triângulo sobre:

- λ, sabendo que $\lambda // \phi$?
  triângulo
- δ, sabendo que $\delta \perp \lambda$?
  segmento de reta
- π, sabendo que $\pi // \lambda$?
  triângulo

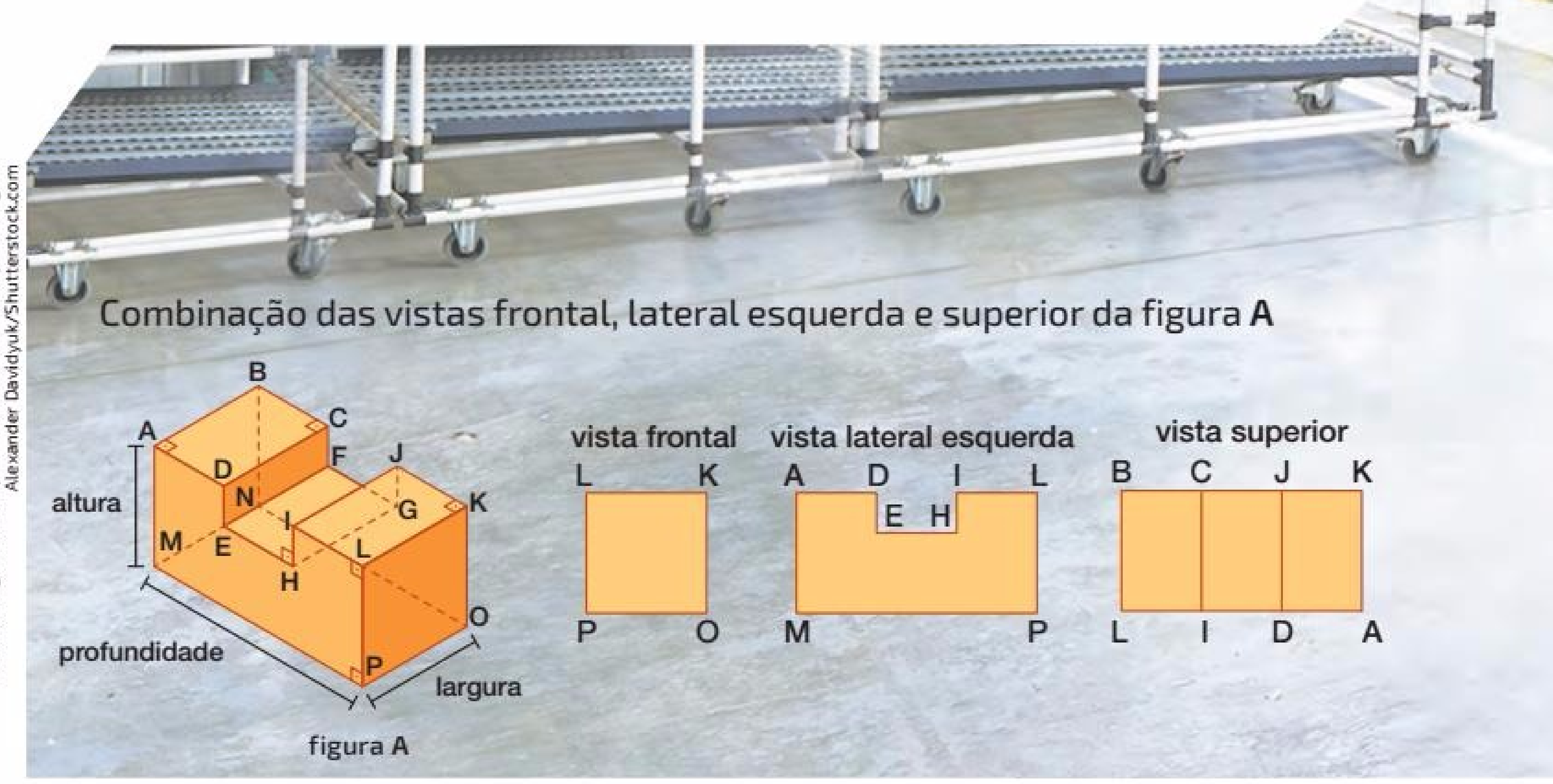
29. A expressão gráfica está presente em diversas áreas, como medicina, artes, engenharia e arquitetura, além da indústria automobilística, moveleira e cosmética.

Na engenharia, por exemplo, é utilizada na constituição da base para o desenvolvimento de projetos e, consequentemente, na fabricação dos mais variados produtos. Para transmitir informações precisas aos fabricantes acerca do objeto, máquina ou estrutura que se deseja construir, é necessário que o engenheiro prepare descrições completas, principalmente por meio de desenhos, indicando formas e dimensões. A linguagem verbal é utilizada como complemento, sob a forma de especificações no projeto.

Por descrever a forma exata de um objeto, a projeção ortogonal é empregada na maioria dos trabalhos de engenharia. Alguns objetos podem ser descritos totalmente pelos conjuntos das vistas (superior, frontal, lateral direita, lateral esquerda, de baixo e de trás) sobre esses planos.

Na elaboração de alguns projetos, não é necessário desenhar as seis vistas, pois é possível descrever o objeto com exatidão pela combinação de algumas delas. A combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior pode ser suficiente para representar a forma de um objeto considerado.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pela imagem Alexander Davidyuk/Shutterstock.com



Combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior da figura **A**

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

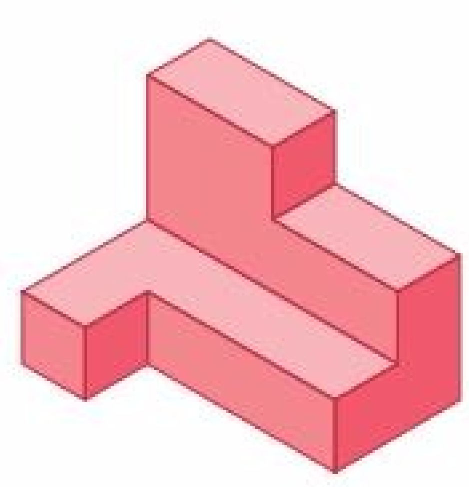
a) Conforme os planos que contêm as faces, e as retas que contêm as arestas da figura acima, determine:

- os planos paralelos àquele que contém a face EFGH.*
- os planos perpendiculares àquele que contém a face LKOP. **

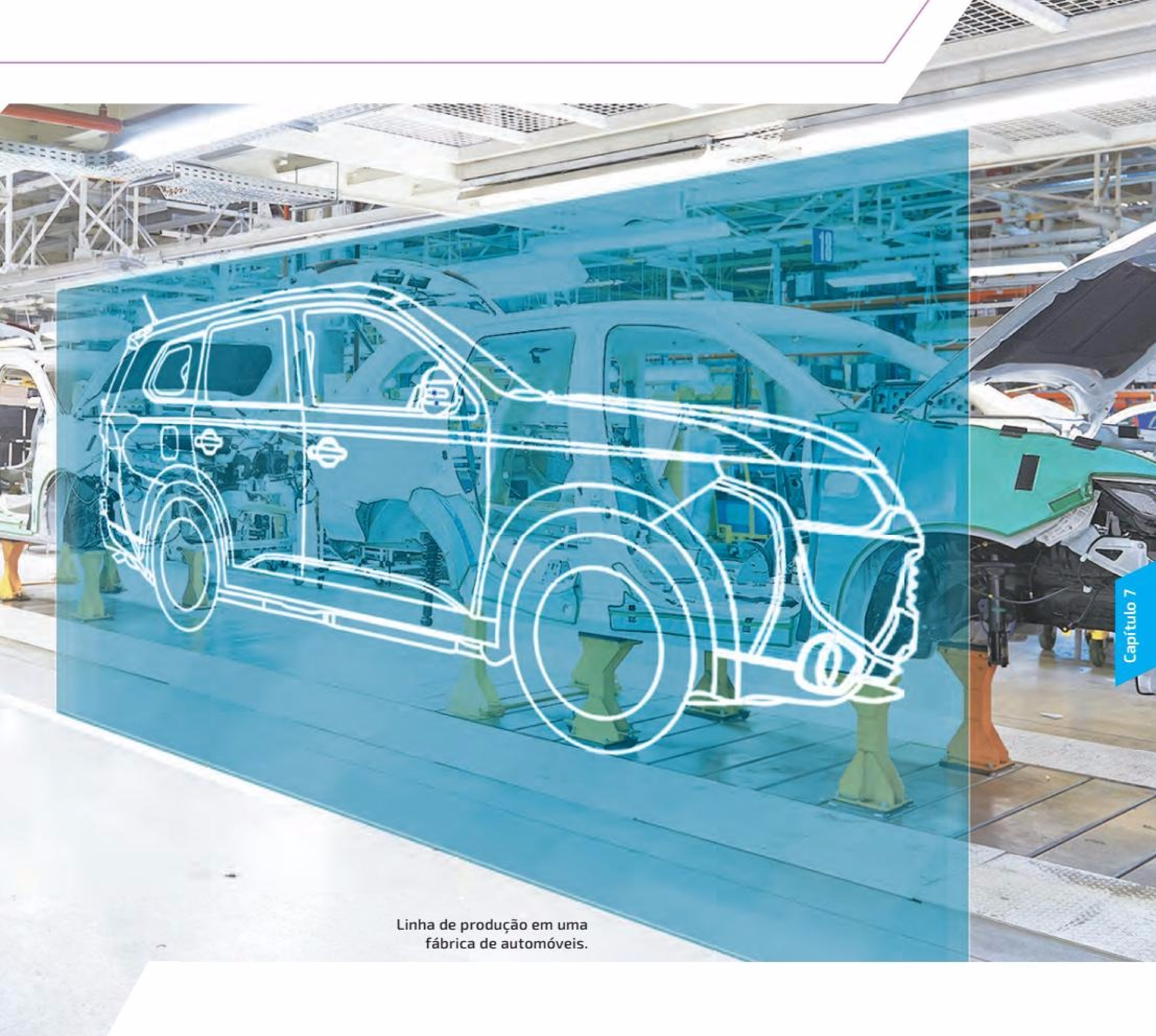
b) Desenhe a vista superior, a vista frontal e a vista lateral esquerda do objeto a seguir, desenhado em perspectiva. Resposta no final do livro.

*Os planos que contêm as faces ABCD, IJKL e MNOP.

**Os planos que contêm as faces ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, BCFGJKON e ADEHILPM.

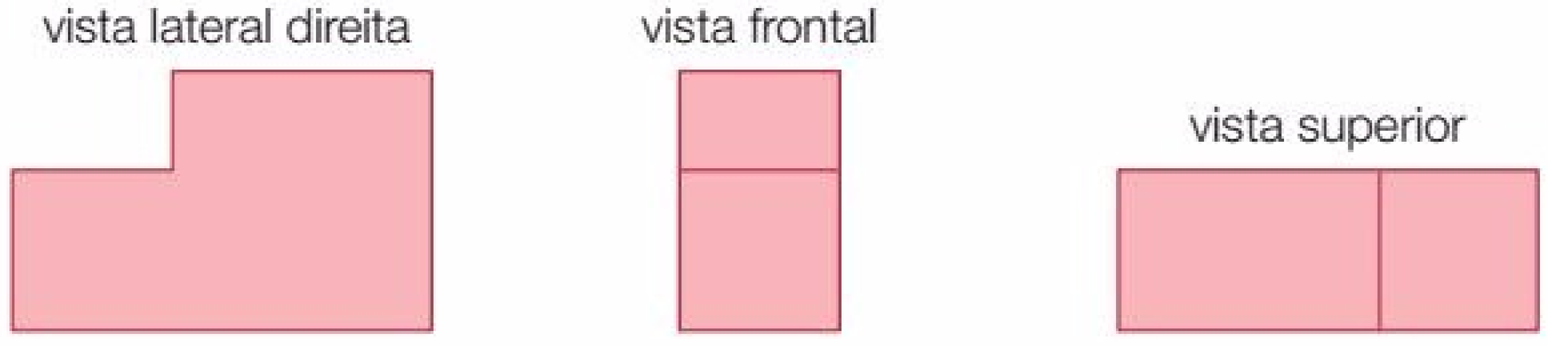


Ilustrações: Acervo da editora



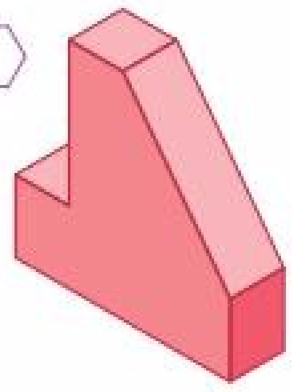
Linha de produção em uma fábrica de automóveis.

c) Desenhe em perspectiva o objeto cujas vistas lateral direita, frontal e superior são dadas por:
Resposta no final do livro.



d) Quais vistas podem ser utilizadas para melhor representar cada objeto a seguir?

I

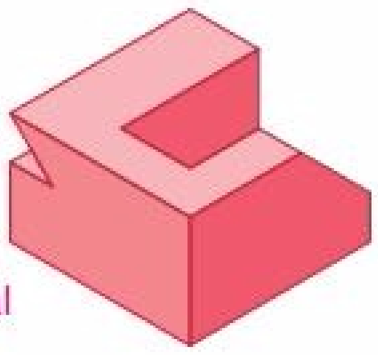


Uma possível resposta: vistas superior e lateral esquerda ou direita.

II

Uma possível resposta: vistas lateral e superior.

III



Uma possível resposta: vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

Ilustrações: Acervo da editora

30. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) A projeção ortogonal de duas retas concorrentes sobre um plano sempre será dada por duas retas concorrentes.

b) Se um segmento de reta AB é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre um plano β, com $\alpha \perp \beta$ e $\overline{AB}$ não contido em β, será um segmento paralelo e de mesmo comprimento de $\overline{AB}$. verdadeira

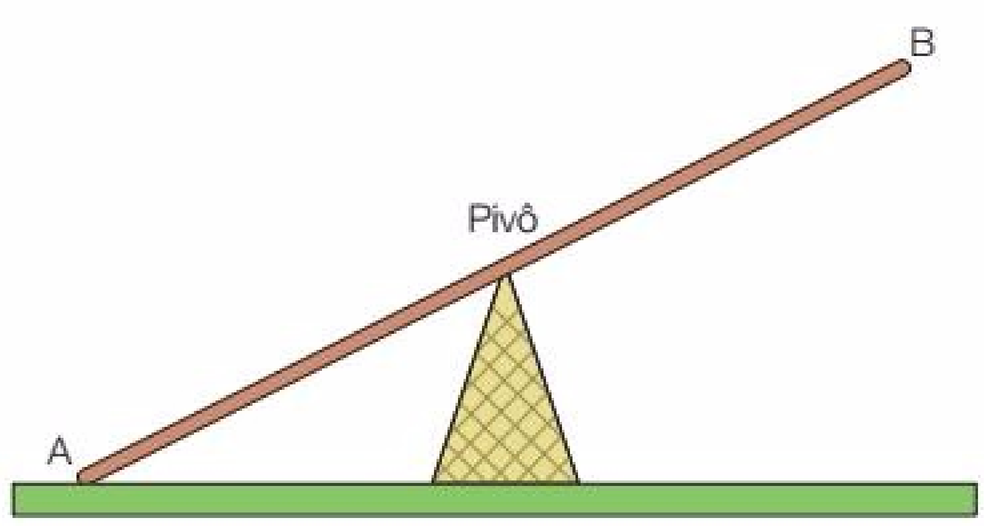
c) Sabendo que as projeções ortogonais de duas retas, *r* e *s*, sobre um plano são dadas por duas retas paralelas, necessariamente temos r//s. Falsa, pois *r* e *s* podem ser retas reversas.

d) A projeção ortogonal de um hexágono sobre um plano sempre será dada por um hexágono. Resposta no final do livro.

e) A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento de reta AB e de um ponto não pertencente a $\overleftrightarrow{AB}$, pode ser dada por dois pontos distintos. verdadeira

31. (Enem-MEC) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é: b

a) 

b) 

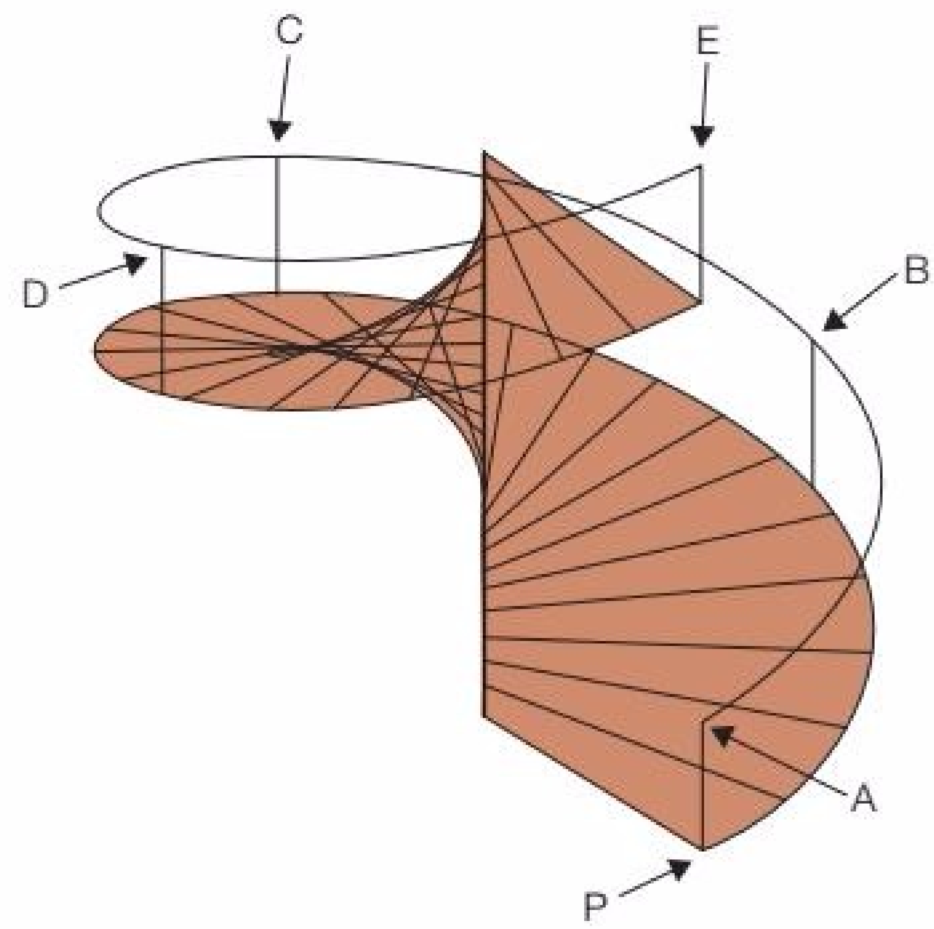
c) 

d) 

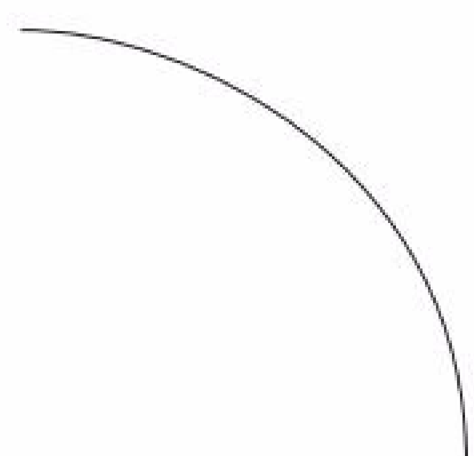
e) 

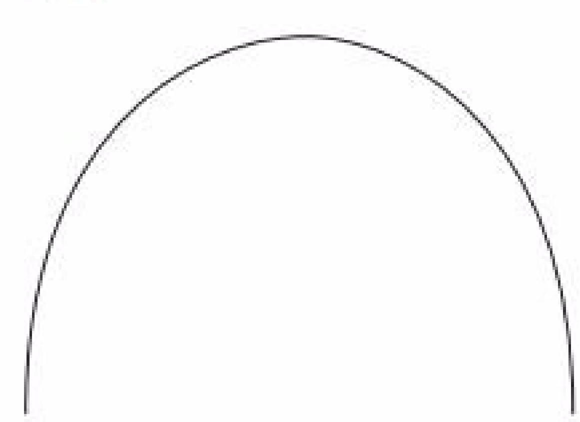
Ilustrações: Acervo da editora

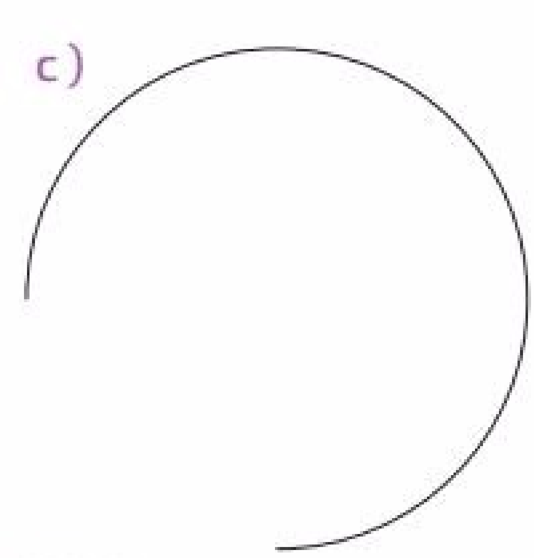
32. (Enem-MEC) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.

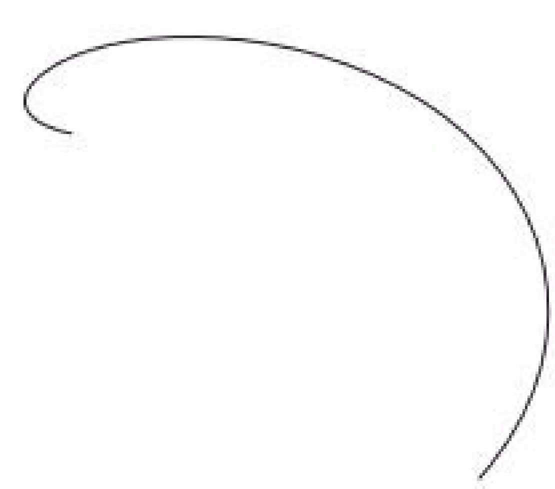


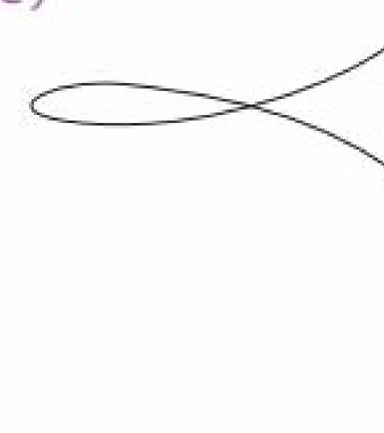
A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é: c

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Ilustrações: Acervo da editora

30. a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, como, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.

Distâncias no espaço

- Distância entre dois pontos

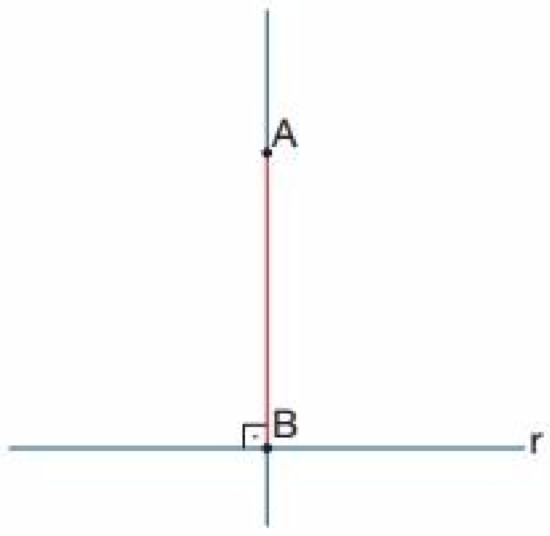
  A distância entre dois pontos distintos *A* e *B* é a medida do segmento AB em uma dada unidade de comprimento.

Se os pontos *A* e *B* forem coincidentes, a distância entre eles será nula.

- Distância entre ponto e reta

  Podemos obter a distância entre uma reta *r* e um ponto *A*, não pertencente a *r*, traçando uma reta perpendicular a *r* e passando por *A*, obtendo em *r* o ponto *B*. A medida AB é a distância entre a reta *r* e o ponto *A*.

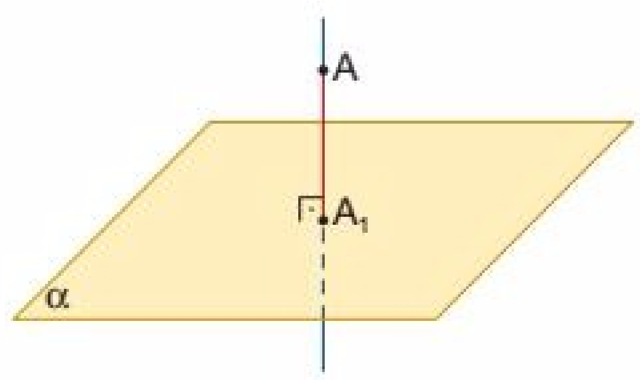
Se o ponto *A* pertencer à reta *r*, a distância entre eles será nula.



- Distância entre ponto e plano

  A distância entre um plano α e um ponto *A*, não pertencente a α, é a medida do segmento AA_1, sendo A_1 a projeção ortogonal de *A* sobre α.

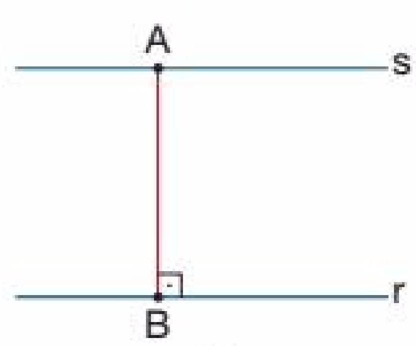
Se o ponto *A* pertencer ao plano α, a distância entre eles será nula.



- Distância entre duas retas paralelas

  A distância entre duas retas paralelas *r* e *s* é a distância entre um ponto qualquer de uma delas à outra.

Se as retas *r* e *s* forem coincidentes, a distância entre elas será nula. Caso as retas sejam concorrentes, não definimos a distância entre elas.

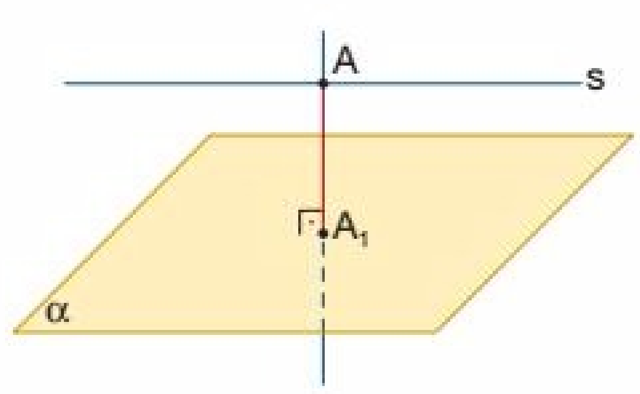


r//s

- Distância entre reta e plano paralelos

  A distância entre um plano α e uma reta *s*, paralela a α, é a distância entre um ponto qualquer de *s* a α.

Se a reta *s* estiver contida no plano α, a distância entre eles será nula. Caso a reta seja concorrente ao plano, não definimos a distância entre eles.



s//α

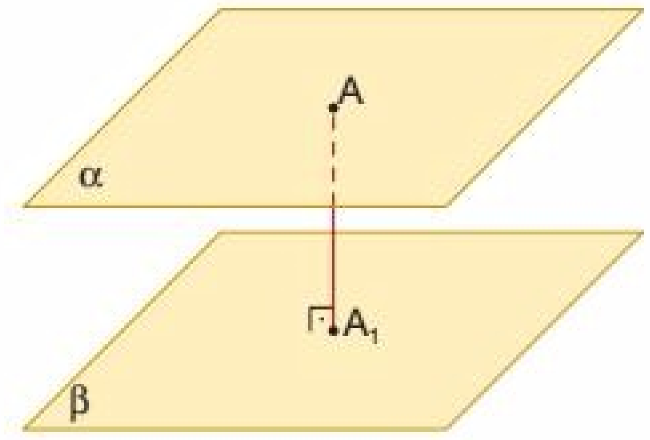
Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 7

Se α e β forem coincidentes, a distância entre eles será nula. Caso os planos sejam concorrentes, não definimos a distância entre eles.

- Distância entre dois planos paralelos

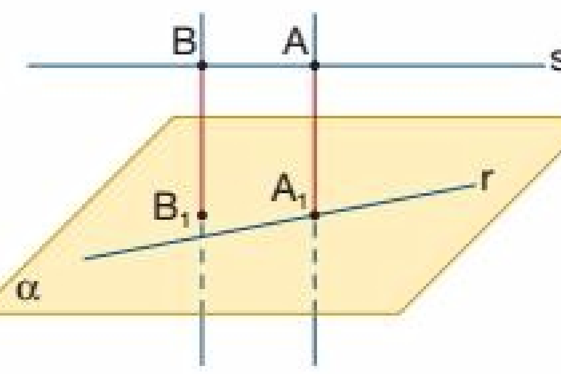
  A distância entre dois planos paralelos α e β é a distância entre um ponto qualquer de um deles ao outro plano.



$\alpha // \beta$

- Distância entre duas retas reversas

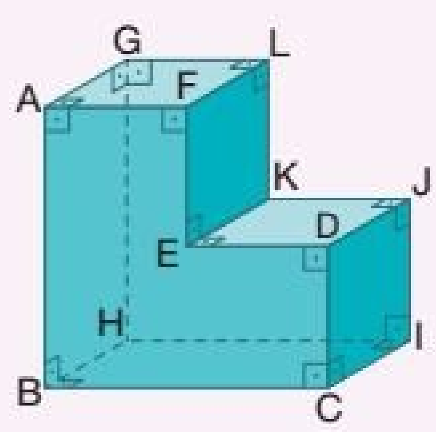
  A distância entre duas retas reversas *r* e *s* é a distância entre um ponto qualquer de *s* ao plano α, paralelo a *s* que contém *r*.



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R7. Observe o sólido abaixo.



Acervo da editora

De acordo com esse sólido, determine os segmentos de reta cujas extremidades são vértices e as medidas representam a distância entre:

a) os pontos *F* e *I*

b) o ponto *A* e a reta $\overleftrightarrow{BC}$

c) o ponto *H* e o plano que contém a face DCIJ

d) as retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{EK}$

e) a reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o plano que contém a face BCIH

f) os planos que contêm as faces AFLG e EDJK

Resolução

a) $\overline{FI}$ c) $\overline{HI}$ e) $\overline{CD}$

b) $\overline{AB}$ d) $\overline{AE}$ e $\overline{GK}$ f) $\overline{EF}$ e $\overline{KL}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

33. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

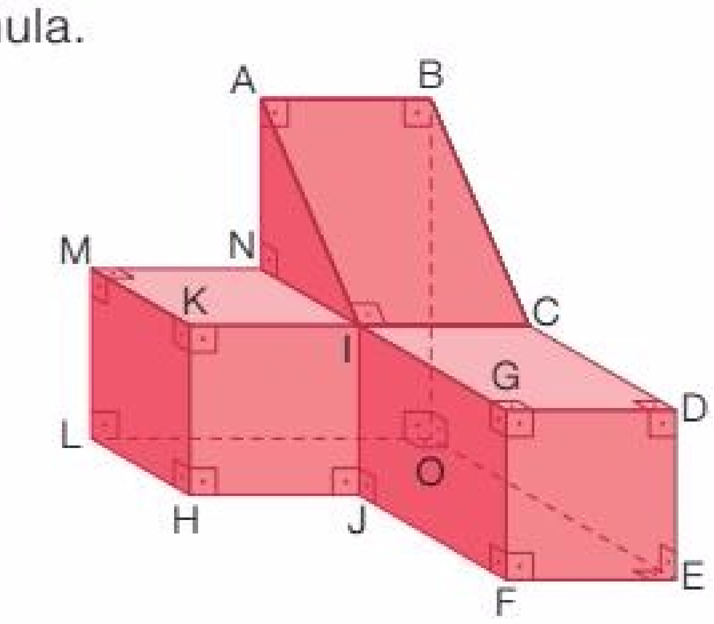
a) Não existe um ponto e uma reta cuja distância entre eles seja nula.
Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.

b) A distância entre um plano α e um ponto *P*, não pertencente a α, corresponde a PP_1, em que P_1 é a projeção ortogonal de *P* sobre α. verdadeira

c) Se $\overline{AA'}$ é um segmento de reta cuja medida corresponde à distância entre as retas reversas *r* e *s* ($A \in r$ e $A' \in s$), então $\overleftrightarrow{AA'} \perp s$. verdadeira

d) Qualquer reta e ponto contidos em um mesmo plano têm distância nula.
Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

34. Considere o sólido geométrico ao lado.



Acervo da editora

Determine o(s) segmento(s) de reta cujas extremidades sejam vértices do sólido e a medida represente a distância entre:

a) o plano que contém a face HKML e aquele que contém a face AIN $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$

b) o plano que contém a face DEFG e $\overleftrightarrow{LO}$ $\overline{EO}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano que contém a face EFJHLO $\overline{BO}$

d) $\overleftrightarrow{CK}$ e $\overleftrightarrow{LO}$ $\overline{CO}$; $\overline{KL}$

35. Como já estudamos, o artista gráfico Maurits Cornelis Escher é conhecido por suas obras que se apoiam em conceitos matemáticos, especialmente os da geometria. Fascinado por paradoxos visuais, Escher criou nessas obras situações impossíveis, como em **Queda-d'água**, de 1961.

Nesse tipo de trabalho, um leitor desatento pode não perceber a situação impossível. Observando cuidadosamente, porém, percebemos a água passando continuamente pela calha, movimentando-se para baixo e afastando-se do leitor, ou, ainda, a água passando por um ponto mais alto e próximo do leitor, o que mantém o curso de água contínuo, ou seja, tem-se uma dupla interpretação da situação.

M.C. Escher's "Waterfall" © 2016 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

Queda-d'água, de Maurits Cornelis Escher, 1961. Litografia, 38 cm × 30 cm. Coleção particular.

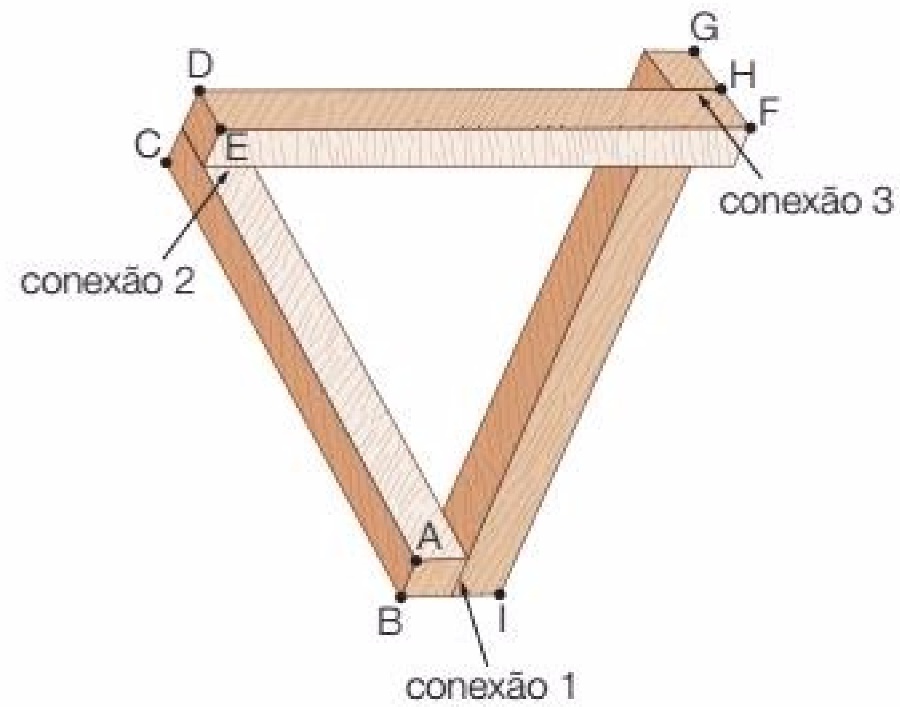
Escher utilizou nessa obra a ideia de triângulos impossíveis, representada por Roger Penrose em 1958, embora existam versões anteriores desses triângulos, como a de Oscar Reutersvärd, de 1934.

Podemos representar um triângulo impossível por meio de paralelepípedos que se sobrepõem perpendicularmente e que só possuem consistência como desenho, pois as medidas dos ângulos internos desse suposto triângulo somam 270°. Isso justifica o porquê de a obra **Queda-d'água** ser impossível em três dimensões, sendo possível apenas no plano bidimensional.

Fontes de pesquisa: LOPES, Cláudio Fragata. Escher, o gênio da arte matemática. **Galileu**, São Paulo: Globo, ano 8, n. 88, p. 89, nov. 1998.
ROONEY, Anne. **A história da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. M.Books do Brasil: São Paulo, 2012. p. 122.

Reutersvärd, 1981. Coleção particular. © Oscar/AUTVIS, Brasil, 2016

Selo sueco projetado por Oscar Reutersvärd em 1981.



Acervo da editora

Representação do triângulo impossível de Penrose.

a) Quantos triângulos impossíveis são sugeridos na obra **Queda-d'água**? três

b) Considerando somente a conexão **1** como impossível e admitindo que os pontos A, B e C pertençam a um plano α, que os pontos D, E e F pertençam a um plano β e que os pontos G, H e I pertençam a um plano δ, determine os planos:
- paralelos entre si α e δ
- perpendiculares entre si α e β; β e δ

c) Quais segmentos de reta determinam a distância entre os planos α e δ, indicados no item **b**? $\overline{DH}$; $\overline{EF}$

capítulo 8

Figuras geométricas espaciais

Representação espacial de uma molécula de *buckminsterfullerene*, que se assemelha a uma bola de futebol, o que lhe proporcionou o pseudônimo *buckball*.

Andrey Yurlov/Shutterstock.com

Veja mais informações sobre estruturas moleculares no *site*:

- <http://tub.im/4nfode> (acesso em: 5 mar. 2016)

B) Algumas possíveis respostas: semelhanças: possuem "vértices" e "arestas"; diferenças: polígonos das "faces" da representação espacial do diamante e da grafite, polígonos das "faces" da representação espacial do diamante e da molécula do *buckminsterfullerene*.

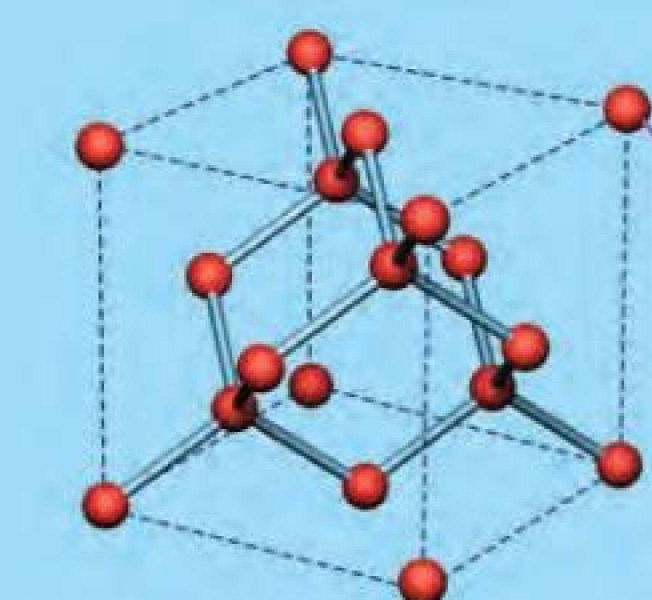
Estruturas moleculares

Diversas substâncias podem ser encontradas na natureza em forma de moléculas, ou seja, de dois ou mais átomos ligados entre si. Dentre elas, existem moléculas formadas pelo mesmo tipo de átomo, como a do gás oxigênio (O_2), assim como moléculas constituídas de mais de um tipo de átomo, como a da água (H_2O).

As propriedades de uma substância estão relacionadas a aspectos como a força e polaridade das ligações existentes entre suas moléculas, bem como à forma e ao tamanho das moléculas que a constituem. A forma de uma molécula pode influenciar tanto em reações bioquímicas, como a absorção ou os efeitos colaterais de um medicamento no organismo, quanto em sensações de olfato e visão.

Robert Curl Jr. e Richard Smalley, da Rice University, nos EUA, com Harold Kroto, da University of Sussex Brighton, do Reino Unido, ganharam o Prêmio Nobel em 1996 pela descoberta de moléculas como a denominada *buckminsterfullerene*, composta de 60 átomos de carbono, com forma semelhante à de uma bola de futebol e considerada uma das mais revolucionárias descobertas da Química no século XX.

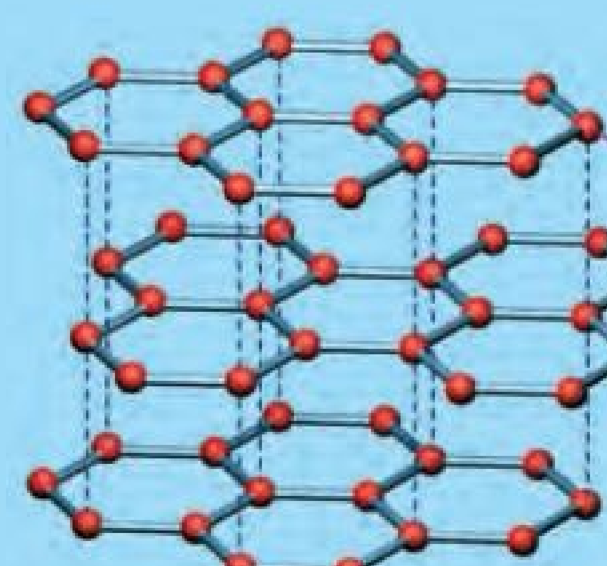
Fonte de pesquisa: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc04/atual.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2016.



Representação espacial da estrutura molecular do diamante.

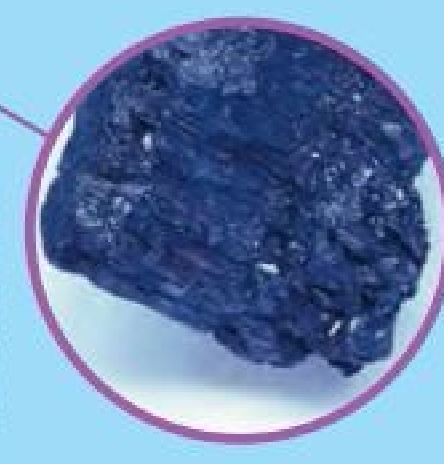
Steve Cole/Photodisc/Getty Images

Diamante: mineral de aspecto incolor e duro muito raro, formado em rochas vulcânicas especiais, situadas nas profundezas da crosta terrestre, onde há temperatura e pressão muito elevadas.



Representação espacial da estrutura molecular da grafite.

Ilustrações: N. Akira



Fabio Colombini

Grafite: mineral de aspecto cinzento, opaco e leve, comumente encontrado em rochas que se formam geralmente na parte superior da crosta terrestre.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Que aspectos das moléculas estão relacionados às propriedades da substância que elas constituem?

Força, polaridade das ligações, forma e tamanho.

B) Aponte semelhanças e diferenças entre as representações espaciais das estruturas moleculares apresentadas acima.

C) Pesquise e dê exemplos de moléculas que tenham uma representação espacial diferente das apresentadas.

Resposta pessoal.

Poliedros

Ao elaborar um projeto, um arquiteto fica atento a vários elementos, entre eles o formato externo que a edificação terá após o término da obra. Essas construções possuem as mais variadas formas, e algumas delas apresentam características próprias.

Algumas obras possuem linhas mais retas, como as apresentadas a seguir.

Mark E. Gibson/Corbis/Latinstock

Moody Gardens Aquarium Pyramid, Texas, nos EUA, em 2002.

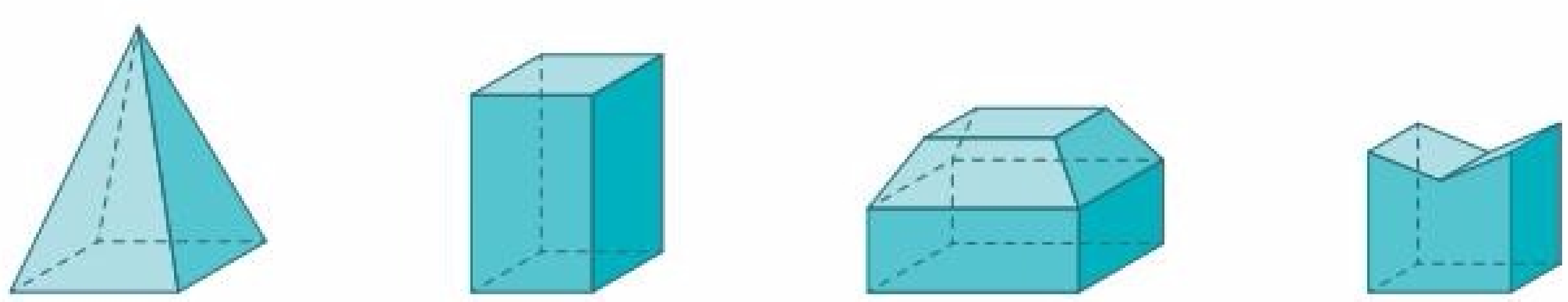
Paulo Fridman/Alamy Stock Photo/Latinstock

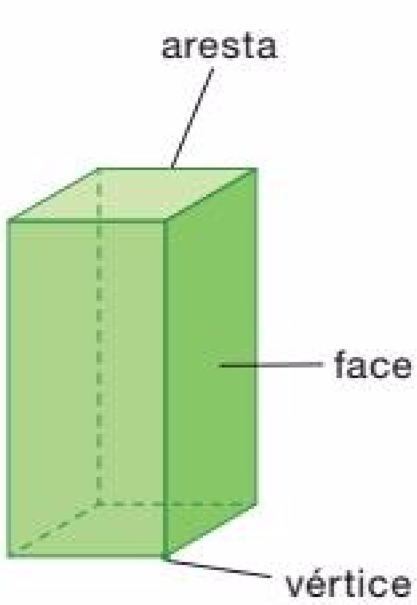
Museu de Arte de São Paulo (MASP), em 2004.

Renata Mello/Pulsar

Prédio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), Rio de Janeiro (RJ), em 2006.

As obras que possuem linhas mais retas têm formas que lembram poliedros, assunto que será estudado neste capítulo. Veja a seguir alguns poliedros.

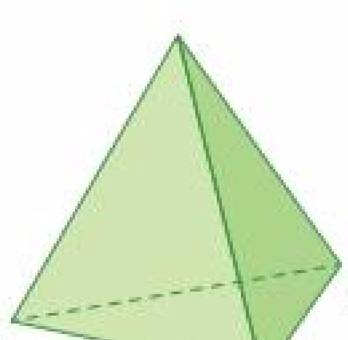




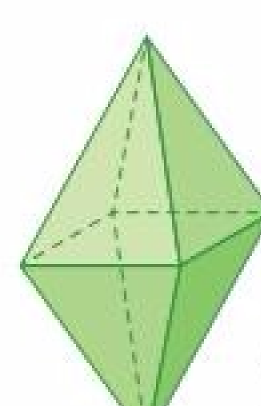
Os **poliedros** são sólidos limitados por superfícies planas poligonais. Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

- As **faces** são os polígonos que limitam os poliedros. A quantidade de faces de um poliedro é finita.
- As **arestas** são os lados de cada face do poliedro, sendo que cada aresta é comum a somente duas faces.
- Os **vértices** são os pontos de interseção de três ou mais arestas, sendo que os vértices de cada face são também vértices do poliedro.

Exemplos



4 faces, 6 arestas e 4 vértices

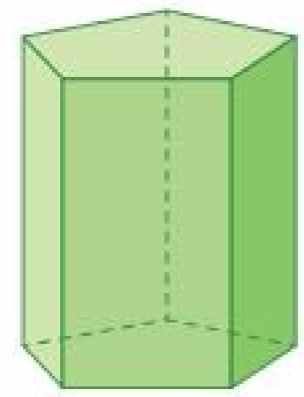


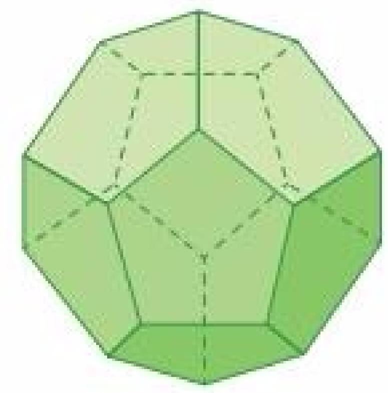
8 faces, 12 arestas e 6 vértices

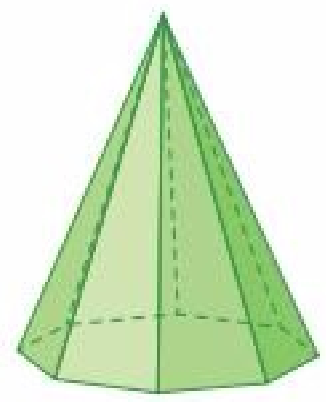
Ilustrações: Acervo da editora

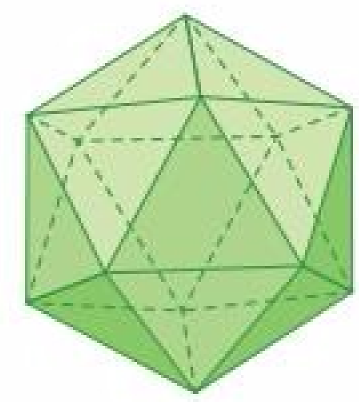
Podemos classificar um poliedro de acordo com o número de faces. Veja alguns exemplos:

Número de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
...	...
20	Icosaedro


heptaedro


dodecaedro

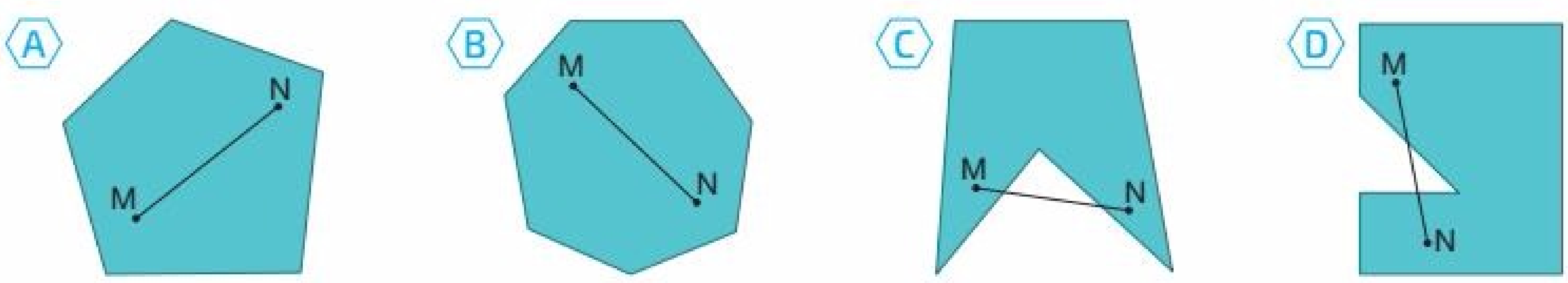

eneaedro


icosaedro

Poliedros convexos e poliedros não convexos

Antes de definirmos **poliedros convexos** e **poliedros não convexos**, é importante relembrar o que são polígonos convexos e polígonos não convexos.

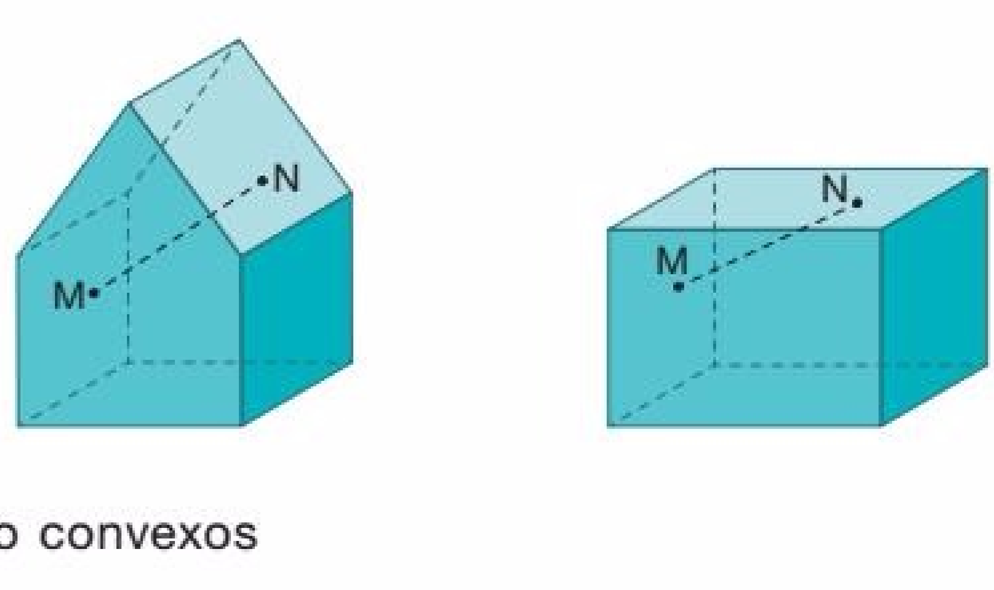
Dizemos que um polígono é convexo quando todo segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dele está inteiramente contido nele. Os polígonos **A** e **B** a seguir são convexos e os polígonos **C** e **D** são não convexos.



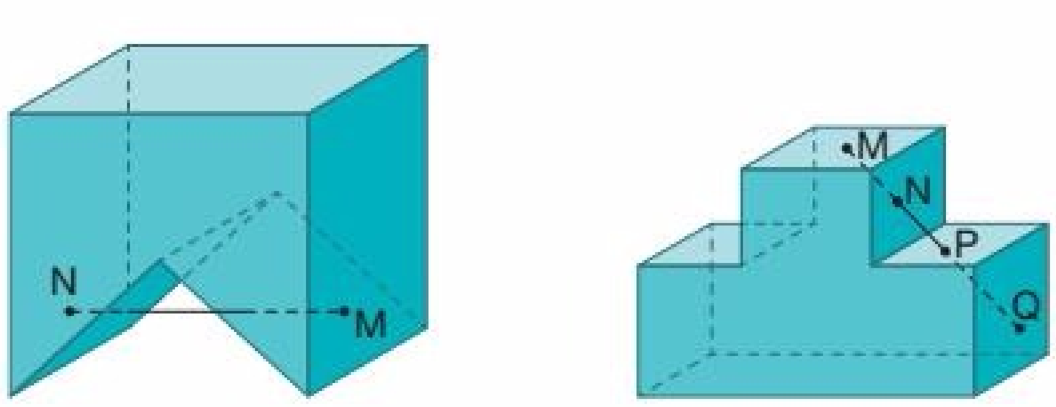
No caso dos poliedros, dizemos que são convexos quando todo segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de um poliedro está inteiramente contido nele.

Exemplos

- Poliedros convexos



- Poliedros não convexos

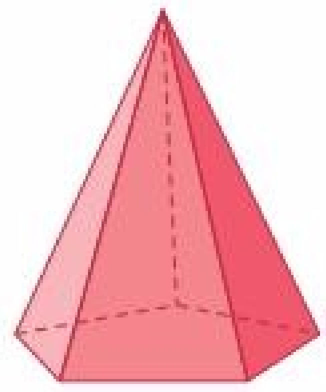


Ilustrações: Acervo da editora

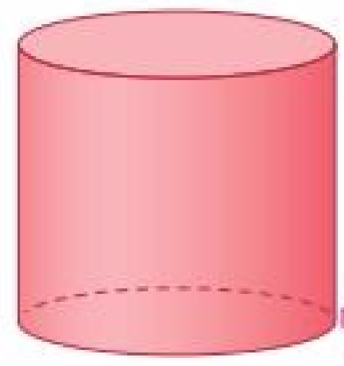
Atividades

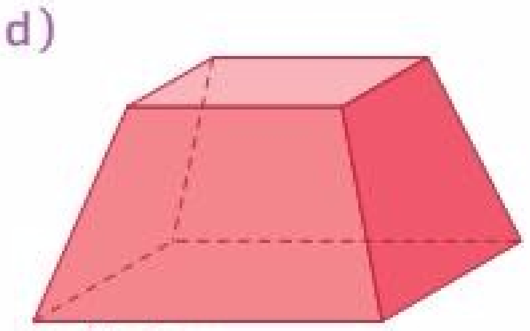
Anote as respostas no caderno.

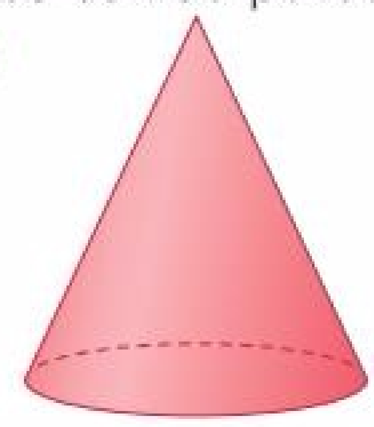
1. Classifique cada uma das figuras geométricas espaciais em poliedros ou não poliedros.

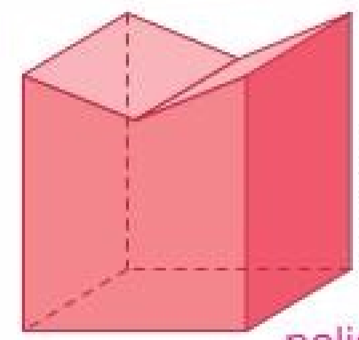
a)  poliedro

b)  não poliedro

c)  não poliedro

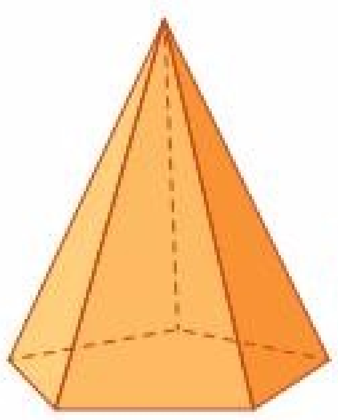
d)  poliedro

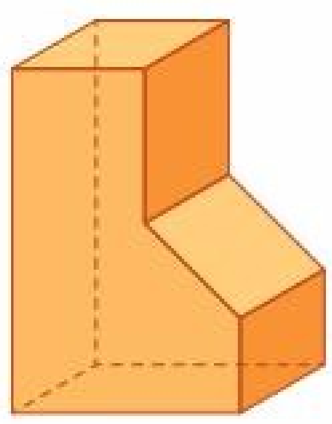
e)  não poliedro

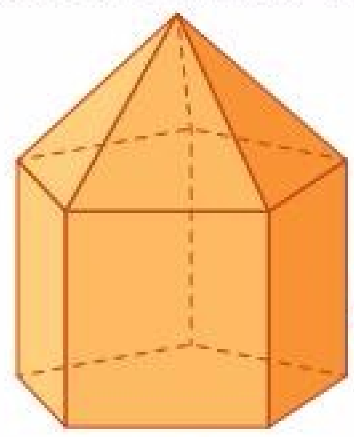
f)  poliedro

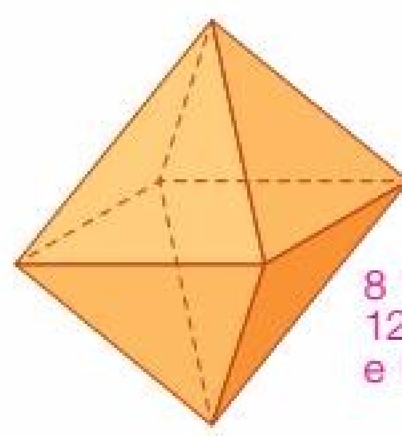
Ilustrações: Acervo da editora

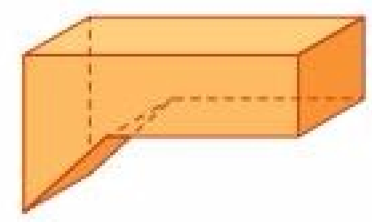
2. Determine o número de faces, arestas e vértices de cada poliedro.

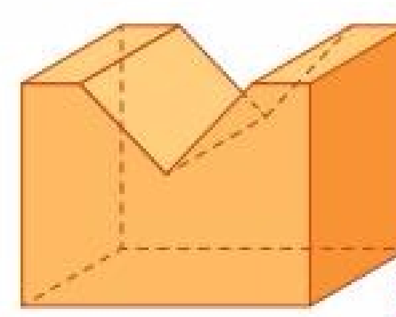
a)  6 faces, 10 arestas e 6 vértices

b)  8 faces, 18 arestas e 12 vértices

c)  11 faces, 20 arestas e 11 vértices

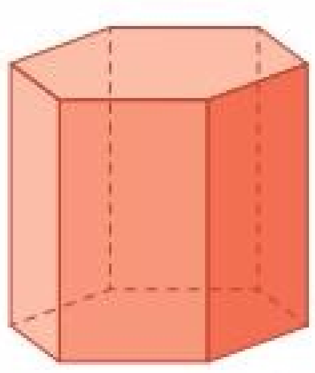
d)  8 faces, 12 arestas e 6 vértices

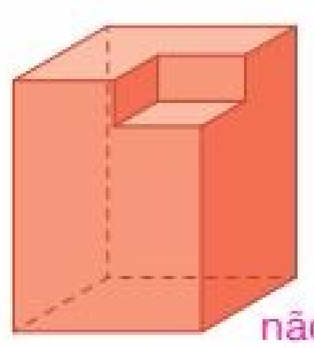
e)  7 faces, 15 arestas e 10 vértices

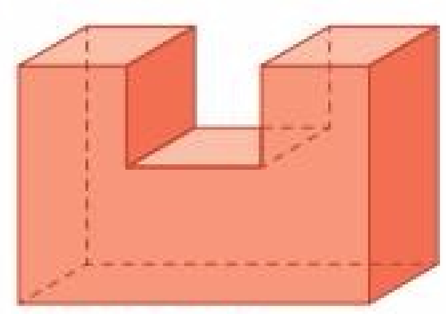
f)  9 faces, 21 arestas e 14 vértices

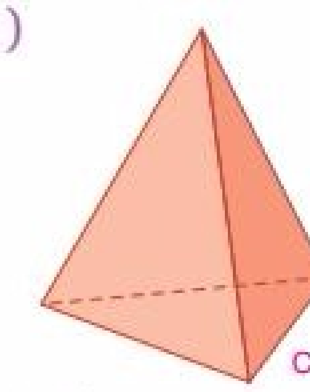
Ilustrações: Acervo da editora

3. Classifique cada poliedro em convexo ou não convexo.

a)  convexo

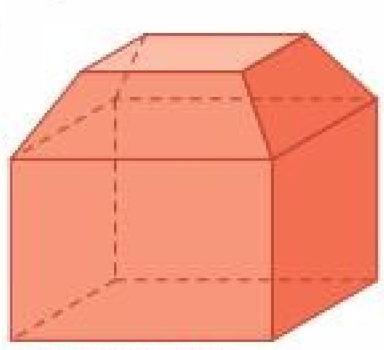
b)  não convexo

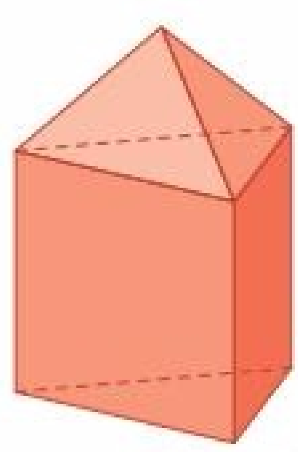
c)  não convexo

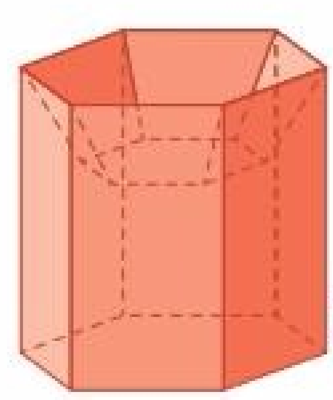
d)  convexo

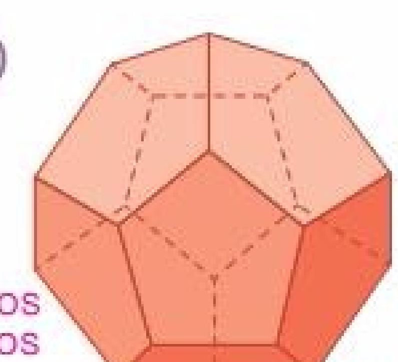
Ilustrações: Acervo da editora

4. Determine a quais polígonos correspondem as faces dos poliedros: triângulo, quadrilátero, pentágono ou hexágono.

a)  quadriláteros

b)  triângulos e quadriláteros

c)  quadriláteros e hexágonos

d)  pentágonos

Ilustrações: Acervo da editora

5. (Enem-MEC) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro *P*, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro *P*, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu? c

a) 6 b) 8 c) 14 d) 24 e) 30

6. Esboce um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 7 faces. Em seguida, troque essas figuras com um colega e determine a quantidade de vértices e arestas das figuras que você recebeu. Por fim, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

Relação de Euler

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) realizou muitas contribuições à Matemática. Mesmo ficando cego aos 59 anos de idade, Euler continuou seus estudos. É provável que nenhum outro matemático tenha produzido tanto quanto ele, que durante toda a vida publicou cerca de 500 trabalhos, entre livros e artigos.

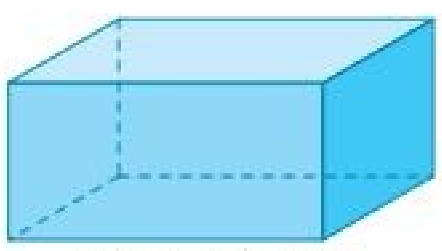
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 324-325.


Autor desconhecido. Séc. XVIII. Gravura. Coleção particular

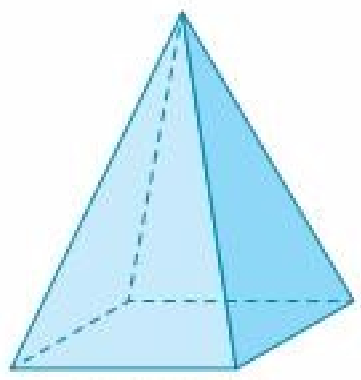
Leonhard Euler

Dentre as várias contribuições de Euler, podemos destacar uma importante relação envolvendo o número de faces (F), arestas (A) e vértices (V) de um poliedro.

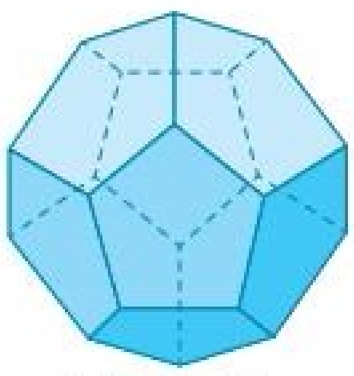
Antes de escrevermos essa relação, observe os seguintes poliedros, nos quais está indicado o número de vértices, faces e arestas:


paralelepípedo ou hexaedro

$V=8$ $F=6$ $A=12$


pentaedro

$V=5$ $F=5$ $A=8$


dodecaedro

$V=20$ $F=12$ $A=30$

Em cada um desses poliedros, podemos notar que o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais dois.

Paralelepípedo ou hexaedro

$$\underbrace{8}_{V}+\underbrace{6}_{F}=\underbrace{12}_{A}+2$$
$$14=14$$

Pentaedro

$$\underbrace{5}_{V}+\underbrace{5}_{F}=\underbrace{8}_{A}+2$$
$$10=10$$

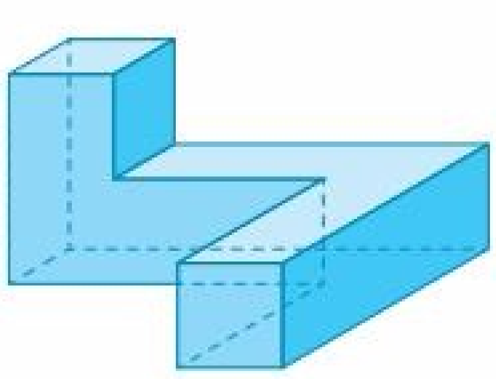
Dodecaedro

$$\underbrace{20}_{V}+\underbrace{12}_{F}=\underbrace{30}_{A}+2$$
$$32=32$$

Representamos essa relação da seguinte maneira:

$$V+F=A+2$$

Essa igualdade é conhecida como **Relação de Euler** e é válida para todo poliedro convexo. No entanto, essa relação é válida também para alguns poliedros não convexos. Veja o exemplo.


Ilustrações: Acervo da editora

$V=16$

$F=10$

$A=24$

$$V+F=A+2 \Rightarrow \underbrace{16+10=24+2}_{\text{relação verdadeira}}$$

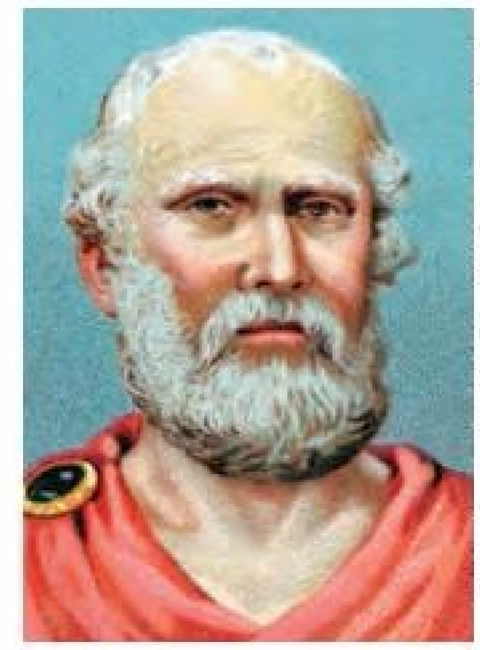
Há valores que satisfazem a relação de Euler, mas não correspondem ao número de vértices, faces e arestas de um poliedro, como $V=1$, $F=1$ e $A=0$.

Os poliedros cuja Relação de Euler é válida são chamados **poliedros eulerianos**. Assim, podemos afirmar que todos os poliedros convexos são eulerianos, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Poliedros de Platão

Platão (427 a.C.-347 a.C.) foi um filósofo grego, discípulo de Sócrates, nascido em Atenas.

Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associada ao cubo; fogo, associado ao tetraedro; e água, associada ao icosaedro. O quinto e último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.



Autor desconhecido. Séc. XX. Coleção particular. Foto: Ann Ronan Pictures/Heritage Images/Glow Images

Platão

Fontes de pesquisa: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 131.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 63.

Esses poliedros convexos são chamados **Poliedros de Platão**. Um Poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

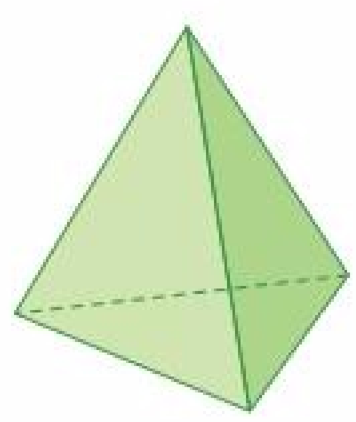
- todas as faces têm o mesmo número de arestas
- de cada vértice parte o mesmo número de arestas
- a Relação de Euler é válida

Exemplos

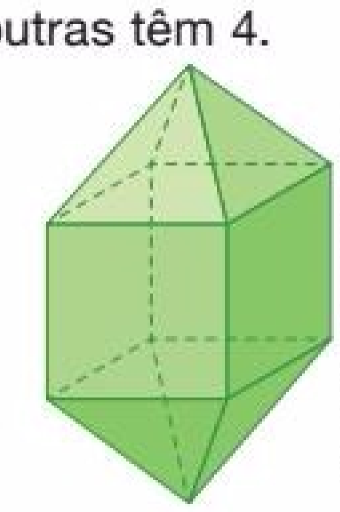
- O poliedro abaixo é de Platão, pois todas as faces têm o mesmo número de arestas (3); de cada vértice parte o mesmo número de arestas (3); a Relação de Euler é válida, ou seja:

$$V=4;\ F=4;\ A=6$$

$$V+F=A+2 \Rightarrow 4+4=6+2 \Rightarrow 8=8$$



- O poliedro abaixo não é de Platão. Apesar de duas das condições serem satisfeitas, ou seja, de ter o mesmo número de arestas partindo de cada vértice e a Relação de Euler ser válida, nem todas as faces têm o mesmo número de arestas. Podemos notar que algumas faces têm 3 arestas, enquanto outras têm 4.



Ilustrações: Acervo da editora

Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade: Existem 5, e somente 5, classes de Poliedros de Platão.

Para demonstrar essa propriedade, considere um Poliedro de Platão e também que *n* é o número de arestas de cada face e que *p* é o número de arestas que partem de cada vértice.

As restrições $n \geq 3$ e $p \geq 3$ são necessárias, pois se *n* for menor que 3 não é possível obter um polígono, e se *p* for menor que 3, não é possível formar um poliedro.

Cada face tem *n* arestas $(n \geq 3)$, e cada aresta é comum a 2 faces. Assim:

$$A=\frac{n \cdot F}{2} \Rightarrow F=\frac{2 \cdot A}{n}$$

Como cada aresta contém 2 vértices, e *p* $(p \geq 3)$ corresponde ao número de arestas que partem de cada vértice, temos:

$$A=\frac{p \cdot V}{2} \Rightarrow V=\frac{2 \cdot A}{p}$$

Substituímos F por $\frac{2 \cdot A}{n}$ e V por $\frac{2 \cdot A}{p}$ na Relação de Euler. Em seguida, dividimos a equação obtida por 2A:

$$V+F=A+2 \Rightarrow \frac{2 \cdot A}{p}+\frac{2 \cdot A}{n}=A+2 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}>0$$

Temos que A é positivo e, consequentemente, $\frac{1}{A}>0$. Assim, $\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}$ também é maior que 0.

Vamos supor que as faces sejam triangulares. Nesse caso, temos $n=3$, e assim:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}-\frac{1}{6}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{6} \Rightarrow p<6$$

Para $n=3$, temos que p pode ser 3, 4 ou 5.

Agora, vamos supor que as faces sejam quadrangulares. Nesse caso, temos $n=4$, e assim:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}-\frac{1}{4}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{4} \Rightarrow p<4$$

Para $n=4$, temos p igual a 3.

Supondo que as faces sejam pentagonais $(n=5)$, temos:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}-\frac{3}{10}>0 \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{3}{10} \Rightarrow p<\frac{10}{3}=3,\overline{3}$$

Para $n=5$, temos p igual a 3.

Se $n \geq 6$, obteremos $p<3$, o que não é possível, pois p deve ser maior ou igual a 3, isto é, $p \geq 3$.

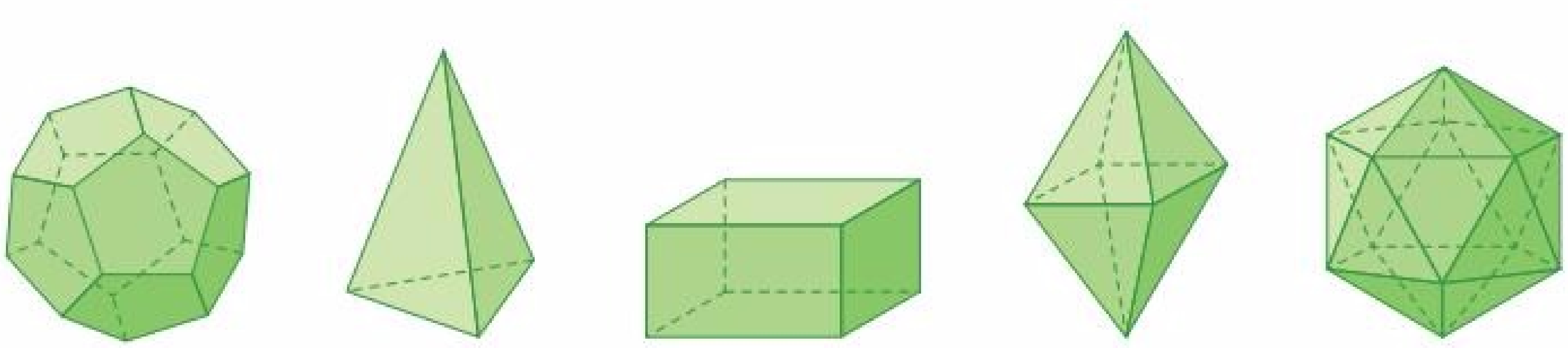
Organizando as informações obtidas, temos:

	n	p
Faces triangulares	3	3
	3	4
	3	5
Face quadrangular	4	3
Face pentagonal	5	3

Observando essas informações podemos notar que há 5 classes de Poliedros de Platão. Utilizando as relações obtidas anteriormente, determinamos os valores de V, F e A. Organizando esses valores em um quadro, temos as 5 classes de poliedros possíveis.

n	p	V	F	A	Nome do poliedro
3	3	4	4	6	Tetraedro
3	4	6	8	12	Octaedro
3	5	12	20	30	Icosaedro
4	3	8	6	12	Hexaedro
5	3	20	12	30	Dodecaedro

Observe alguns Poliedros de Platão:



dodecaedro tetraedro hexaedro octaedro icosaedro

Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 8

Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz as seguintes condições:

- as faces são polígonos regulares e congruentes entre si
- de cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas

> Em relação aos poliedros regulares, temos a seguinte propriedade:
> Existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

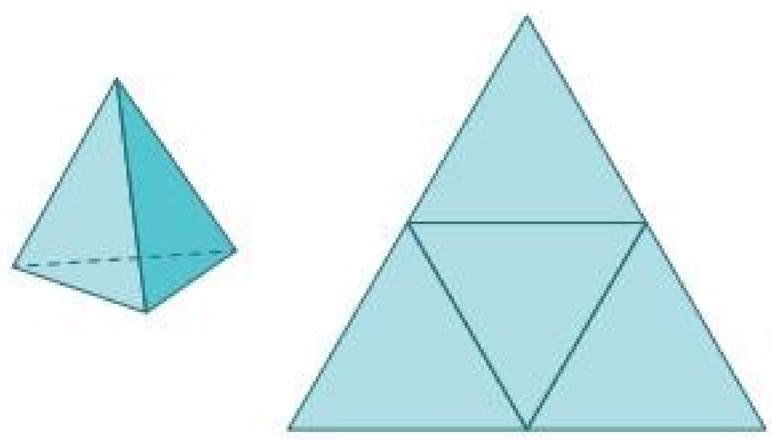
Podemos demonstrar essa propriedade da seguinte maneira:

Se um poliedro é regular, suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e, desse modo, todas as faces têm o mesmo número de lados. Além disso, em um poliedro regular, de cada vértice parte o mesmo número de arestas.

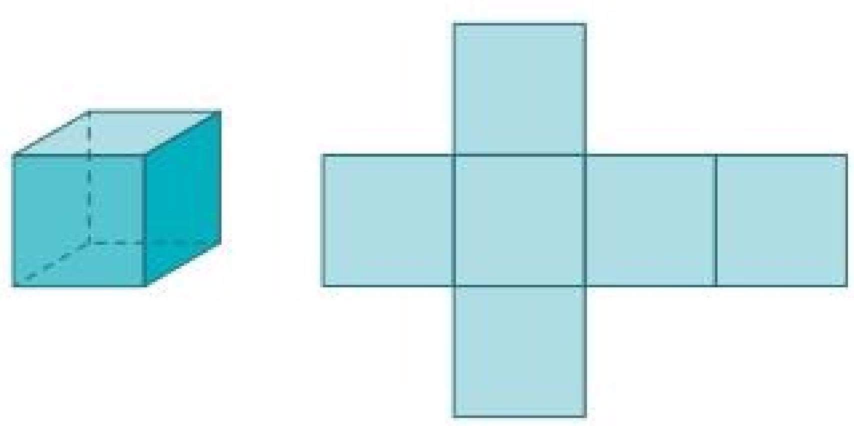
Assim, dizemos que todo poliedro regular é de Platão. Logo, existem, no máximo, 5 poliedros regulares.

Veja a seguir os 5 poliedros regulares e suas respectivas planificações:

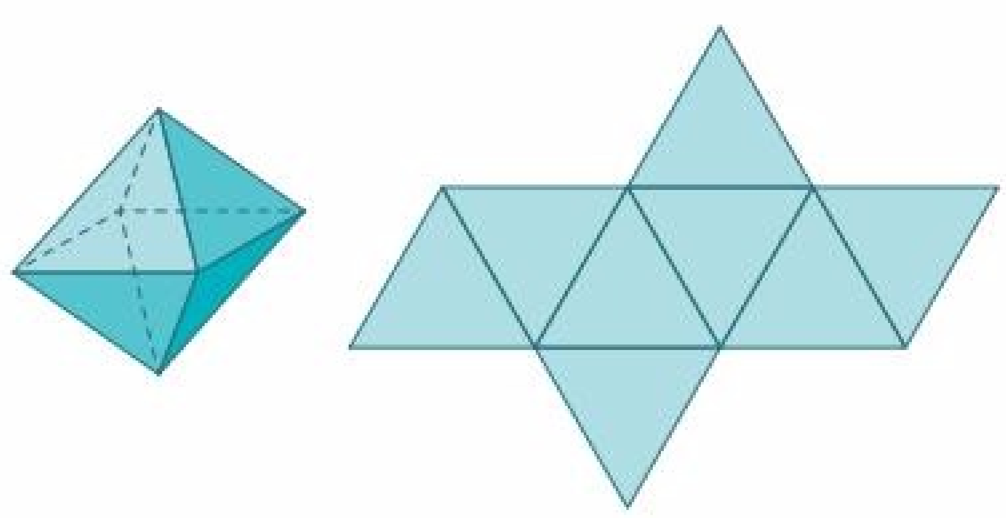
É possível compor outras planificações desses poliedros. Para isso, é necessário organizar os polígonos correspondentes às faces de maneira conveniente.



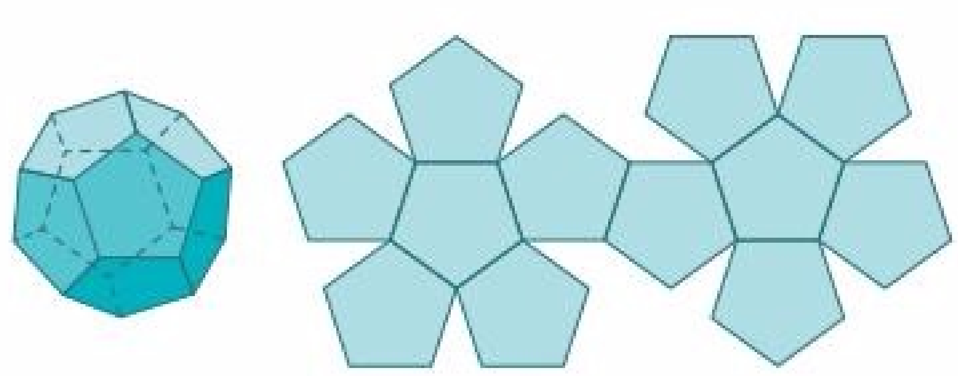
Tetraedro regular: 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que partem de cada vértice.



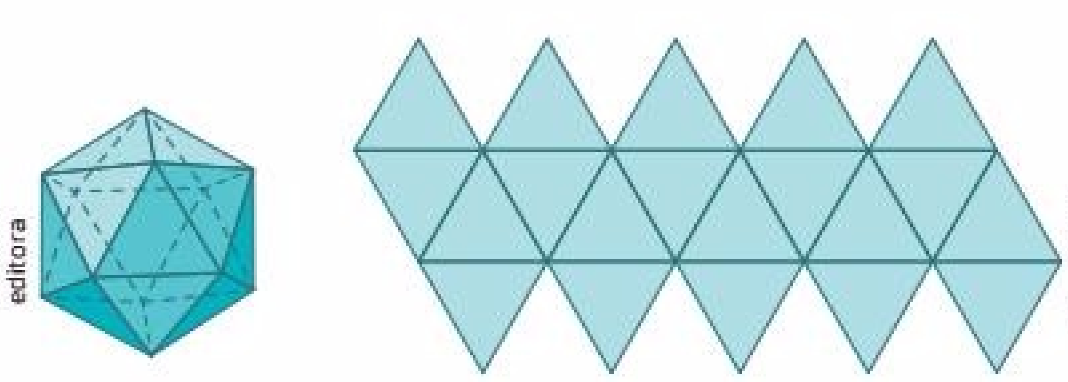
Hexaedro regular ou cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que partem de cada vértice.



Octaedro regular: 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que partem de cada vértice.



Dodecaedro regular: 12 faces pentagonais regulares e 3 arestas que partem de cada vértice.



Icosaedro regular: 20 faces triangulares equiláteras e 5 arestas que partem de cada vértice.

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R1. Um poliedro convexo possui quatro faces hexagonais e quatro faces triangulares. Qual é o número de vértices e arestas desse poliedro?

Resolução

Do enunciado, temos que o número *A* de arestas é dado por:

- 4 faces hexagonais: $4 \cdot 6 = 24$
- 4 faces triangulares: $4 \cdot 3 = 12$

Logo: $A = \dfrac{12 + 24}{2} = 18$

Como o poliedro é convexo, é válida a Relação de Euler. Assim, o número *V* de vértices é:

$$V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12$$

Portanto, o poliedro convexo tem 12 vértices e 18 arestas.

R2. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando cada caso.

a) O cubo é um Poliedro de Platão.

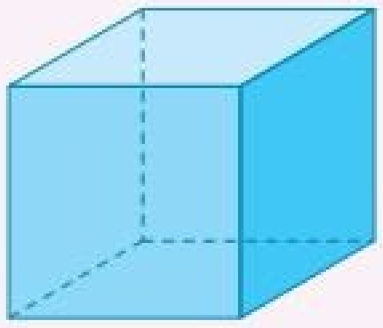
b) As faces de um icosaedro regular são triângulos equiláteros.

c) A Relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.

d) Se as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares congruentes entre si, então o poliedro é regular.

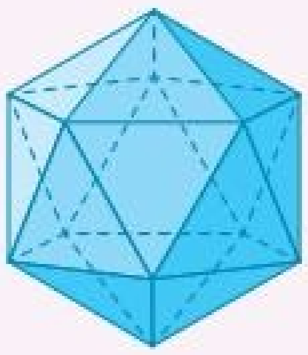
Resolução

a) Verdadeira, pois o cubo é um hexaedro regular e, portanto, um Poliedro de Platão.



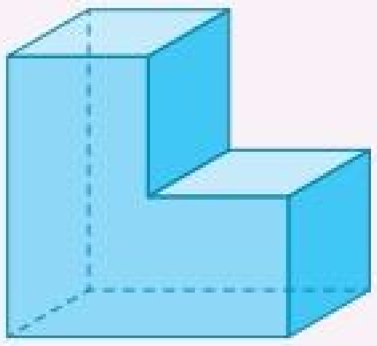
cubo ou hexaedro regular

b) Verdadeira, pois o icosaedro regular tem como faces 20 triângulos regulares.



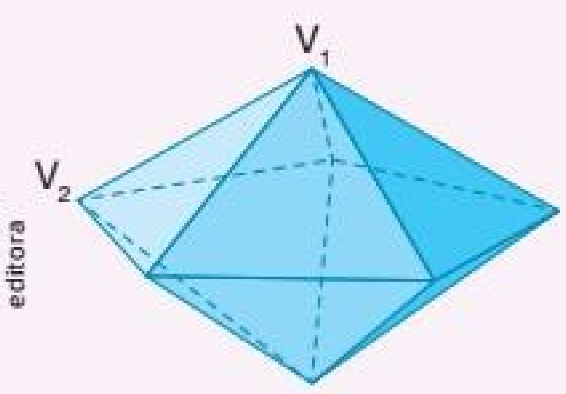
icosaedro regular

c) Falsa, pois a Relação de Euler é válida também para alguns poliedros não convexos, como o apresentado a seguir.



8 faces, 12 vértices e 18 arestas (relação $V + F = A + 2$ verdadeira)

d) Falsa, pois também é necessário que de cada vértice do poliedro parta o mesmo número de arestas.



As faces desse poliedro são triângulos regulares e, além disso, é válida a Relação de Euler. Porém, do vértice V_1 partem 5 arestas, e do vértice V_2, 4 arestas.

Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 8

Atividades

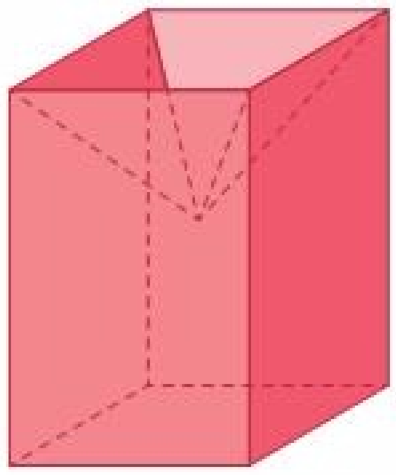
*Lembre aos alunos como obter a soma dos ângulos internos de um polígono por meio da decomposição em triângulos ou da fórmula $S=(n-2)\cdot 180°$, em que n corresponde ao número de lados do polígono.

Anote as respostas no caderno.

7. Qual é o número de faces de um poliedro convexo que possui 10 vértices e 15 arestas? 7 faces

8. Observe o poliedro.

8. a) Não convexo, pois é possível traçar um segmento de reta ligando quaisquer dois de seus pontos e que não está inteiramente contido no poliedro.



Acervo da editora

a) Esse poliedro é convexo ou não convexo? Justifique.

b) Determine o número de vértices, arestas e faces desse poliedro. 9 vértices, 16 arestas e 9 faces

c) Nesse poliedro, a Relação de Euler é válida? Justifique. Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \underbrace{9}_{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

9. Esboce um poliedro em que a Relação de Euler não é válida. Depois, escreva o número de vértices, arestas e faces desse poliedro. Resposta pessoal.

10. **Desafio**

Um poliedro convexo de 16 arestas e 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Determine o número de faces triangulares e quadrangulares desse poliedro.
4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares

11. Em um poliedro convexo, o número de arestas é o dobro do número de vértices. Quantos vértices, arestas e faces tem esse poliedro, sabendo que todas as suas faces são triangulares?
6 vértices, 12 arestas e 8 faces

12. **Desafio**

Nas páginas **200** e **201**, estudamos a representação de uma molécula de *buckminsterfullerene*, que são estruturas de carbono e podem assumir diversas formas, também conhecidas como fulereno. Determine a quantidade de faces pentagonais e hexagonais que compõe uma molécula de *buckminsterfullerene*, considerando cada átomo como um vértice. 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

Lembre-se de que a molécula de *buckminsterfullerene* é composta de 60 átomos de carbono.

13. Um poliedro convexo possui duas faces octogonais e oito faces quadradas. Qual é o número de vértices e arestas desse poliedro?
16 vértices e 24 arestas

14. De um poliedro convexo de 12 vértices, partem 5 arestas de cada vértice. Determine o número de faces e arestas desse poliedro. 20 faces e 30 arestas

15. Considere o poliedro regular cujo número de faces é igual ao de vértices e resolva.

a) Quantas faces, vértices e arestas possui esse poliedro? 4 faces, 4 vértices e 6 arestas

b) Que nome recebe esse poliedro? tetraedro regular

c) Qual é a forma das faces desse poliedro?
Todas são triangulares equiláteras.

16. Podemos afirmar que um octaedro, poliedro que se enquadra em uma das cinco classes dos Poliedros de Platão, é um poliedro regular? Justifique.
Resposta no final do livro.

17. Qual é, em graus, a soma dos ângulos internos das faces de um tetraedro regular? 720°
*

18. A IX Copa do Mundo de futebol da FIFA foi realizada em 1970, no México, e teve como campeã a seleção brasileira. Nessa Copa, foi utilizada pela primeira vez a bola confeccionada com pentágonos e hexágonos. Essa bola foi inspirada em um icosaedro truncado, um dos 13 poliedros conhecidos como Sólidos de Arquimedes. O icosaedro truncado é um poliedro convexo cuja superfície é formada por 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares.

ASA/dpa/Corbis/Latinstock

Bola de futebol utilizada na Copa do mundo de 1970.

Fonte de pesquisa: LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. p. 239. v. 2.

Qual é o número de vértices e arestas do icosaedro truncado? 60 vértices e 90 arestas

19. Sabendo-se que determinado poliedro regular possui 12 vértices e que suas faces são triangulares, responda.

a) Quantas arestas e faces tem esse poliedro?
30 arestas e 20 faces

b) Qual é o nome desse poliedro? icosaedro regular

c) Esse poliedro é de Platão? Justifique.
Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

20. **Desafio**

Considere dois poliedros convexos, **A** e **B**, em que **A** tem 8 vértices a mais que **B** e ambos têm o mesmo número de arestas. Sabendo que o poliedro **A** é formado apenas por faces pentagonais e que **B** é formado apenas por faces triangulares, determine o número de faces, vértices e arestas de cada um desses poliedros.
poliedro A: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas;
poliedro B: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas

21. Certo poliedro convexo é formado apenas por faces pentagonais e hexagonais, todas regulares. Sabendo que esse poliedro possui 90 arestas e que a soma dos ângulos internos de suas faces é igual a 20 880°, calcule a quantidade de faces pentagonais e hexagonais desse poliedro.
12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

Prismas

Neste tópico, estudaremos o prisma, que é um caso particular de poliedro. Veja a seguir alguns objetos cujas formas assemelham-se a prismas.


Pantherstock/Glow Images

bloco de madeira

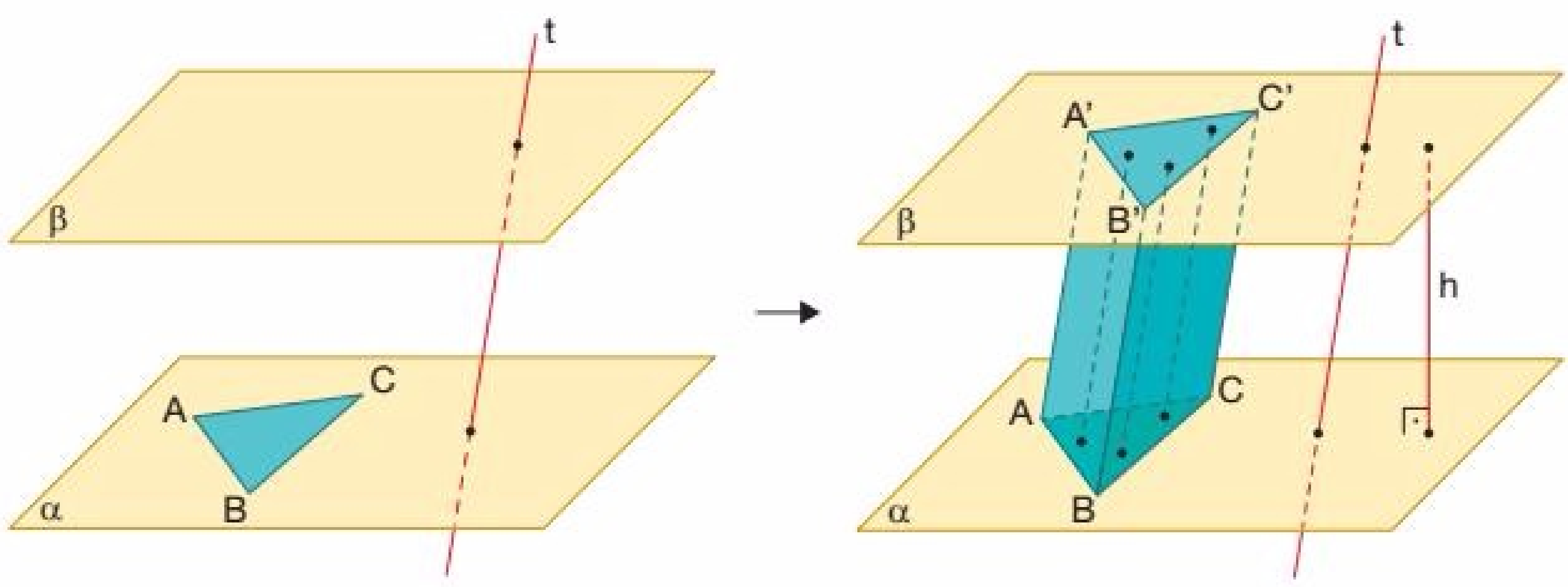

villorejo/Shutterstock.com

caixa de madeira


Roman Samokhin/Shutterstock.com

caixa de sapatos

Para definir um prisma, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β, um polígono convexo contido em α e uma reta t concorrente a esses planos. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a t com uma das extremidades no polígono e a outra em β denomina-se **prisma**.

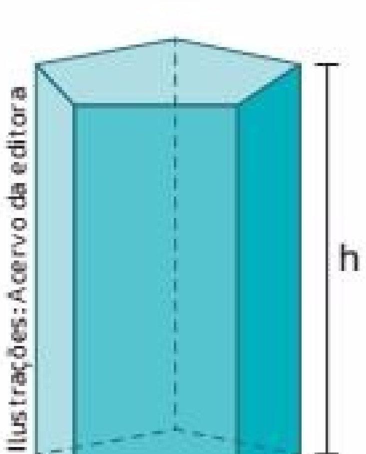


Em um prisma, podemos definir os seguintes elementos:

- As **bases** são as regiões poligonais ABC e A'B'C'. Essas regiões são congruentes.
- As arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$ são denominadas **arestas das bases**.
- Os quadriláteros ABB'A', BCC'B' e ACC'A' são denominados **faces laterais**. Esses quadriláteros são paralelogramos.
- As arestas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são denominadas **arestas laterais**. Essas arestas são paralelas e possuem o mesmo comprimento.
- A distância h, entre os planos das bases, corresponde à **altura** do prisma.

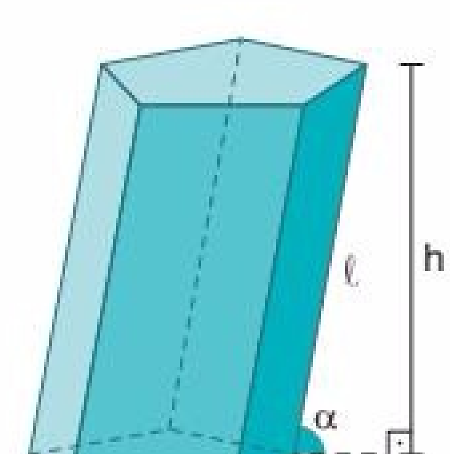
De acordo com algumas características, um prisma pode ser classificado em reto ou oblíquo.

Em um **prisma reto**, as arestas laterais são perpendiculares às bases, e em um **prisma oblíquo**, as arestas laterais são oblíquas às bases.



Ilustrações: Acervo da editora

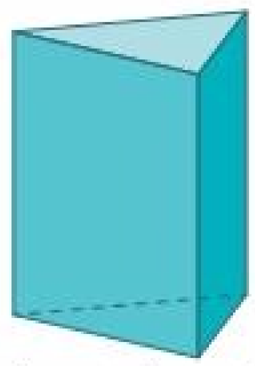
Em um prisma reto, a altura corresponde à medida do comprimento da aresta lateral.

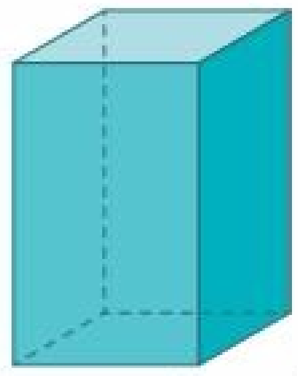


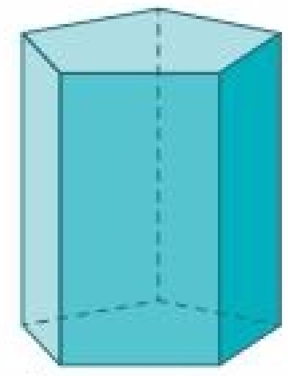
Em um prisma oblíquo, a altura está relacionada à medida da aresta lateral e ao ângulo formado entre a aresta lateral e sua projeção no plano da base.

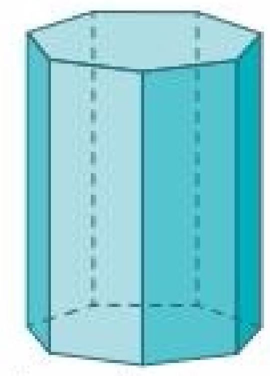
Um prisma pode ser denominado de acordo com o polígono que compõe sua base. Se a base for um triângulo, o prisma é **triangular**; se a base é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; e assim por diante. Veja alguns exemplos:

Quando a base de um prisma reto é um polígono regular, dizemos que este é um **prisma regular**.


prisma triangular

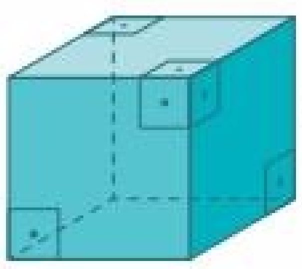

prisma quadrangular


prisma pentagonal


prisma heptagonal

No caso dos prismas quadrangulares, eles recebem denominações diferentes de acordo com algumas características. Um deles é o **paralelepípedo**, cujas bases são paralelogramos. O paralelepípedo pode ser reto ou oblíquo.

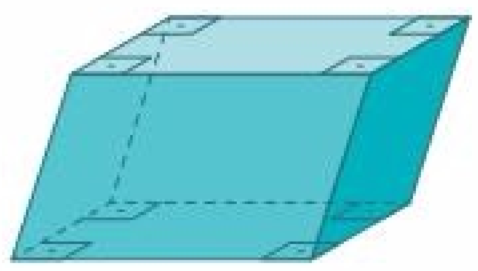
O cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo que possui todas as faces quadradas.



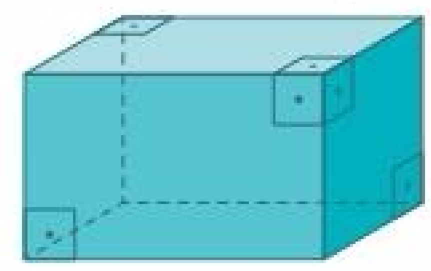
Ilustrações: Acervo da editora

Em relação aos paralelepípedos, temos:

- **paralelepípedo retângulo**, cujas bases são retângulos

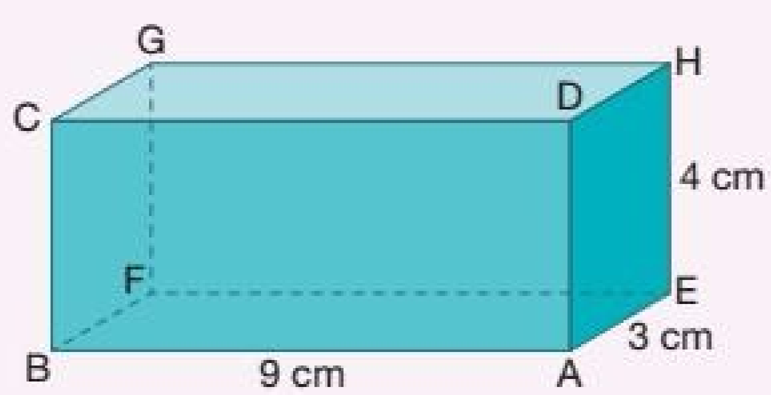


- **paralelepípedo reto retângulo** ou **bloco retangular**, cujas bases e faces laterais são retângulos



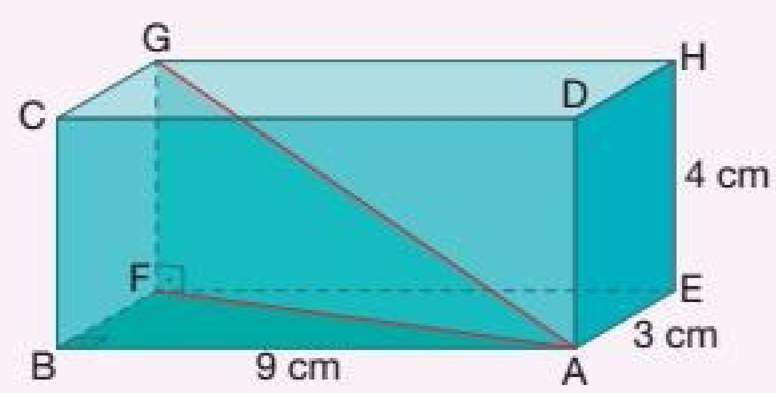
Atividades resolvidas

R3. Determine as medidas AF e AG no paralelepípedo reto retângulo.



Resolução

Note que, no triângulo retângulo ABF, o segmento AF corresponde à hipotenusa. Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AF)^2 = (AB)^2 + (BF)^2 \Rightarrow (AF)^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow (AF)^2 = 90 \left\langle \begin{array}{l} AF = 3\sqrt{10} \rightarrow \boxed{AF = 3\sqrt{10}\text{ cm}} \\ AF = -3\sqrt{10}\text{ (impossível)} \end{array} \right.$$

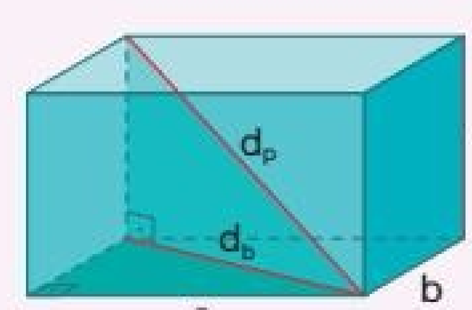
Note que, como o valor procurado representa uma medida de comprimento, o valor $AF = -3\sqrt{10}$ é impossível.

No triângulo retângulo AFG, o segmento AG corresponde à hipotenusa, logo:

$$(AG)^2 = (AF)^2 + (FG)^2 \Rightarrow (AG)^2 = (3\sqrt{10})^2 + 4^2 \Rightarrow AG = \sqrt{106} \rightarrow \boxed{AG = \sqrt{106}\text{ cm}}$$

Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*, conforme a figura ao lado, temos que:

- d_b é a diagonal da base do paralelepípedo, dada por $d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$
- d_p é a diagonal do paralelepípedo, dada por $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

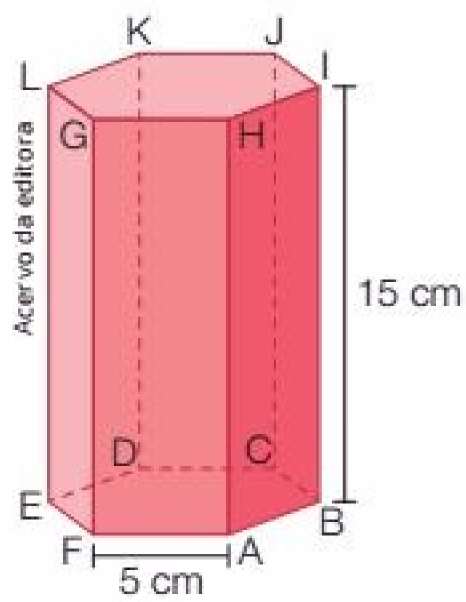


Ilustrações: Acervo da editora

22. Escreva como é denominado, de acordo com o polígono da base, um prisma reto cuja base seja um polígono regular de:

a) 6 lados prisma regular hexagonal
b) 8 lados prisma regular octogonal
c) 10 lados prisma regular decagonal

23. Observe o prisma hexagonal regular.

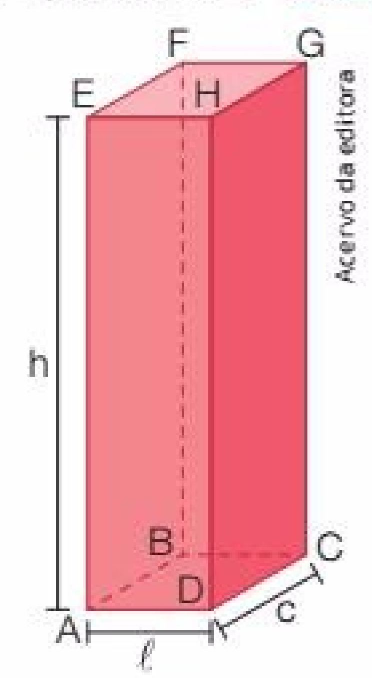


Para resolver o item a desta atividade, lembre aos alunos que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros congruentes.

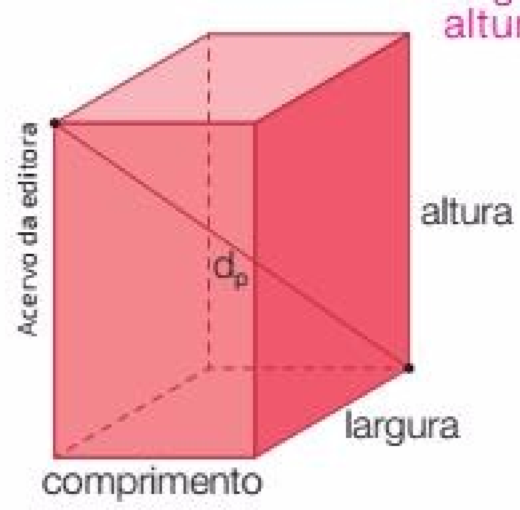
a) Determine as medidas AD e AK. AD = 10 cm; AK = $5\sqrt{13}$ cm

b) Qual é a área e o perímetro do triângulo BEL? área: 75 cm²; perímetro: $5\cdot(5+\sqrt{13})$ cm

24. Sabendo que a diagonal da base e a diagonal do paralelepípedo reto retângulo a seguir medem 5 cm e 13 cm respectivamente, e que a medida da área do retângulo ABFE é 48 cm², quais são os valores de ℓ, c e h? $\ell = 3$ cm; $c = 4$ cm; $h = 12$ cm



25. A medida d_p da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo é $15\sqrt{2}$ cm. Sabendo que o comprimento, a largura e a altura desse paralelepípedo têm medidas proporcionais aos números 3, 4 e 5, respectivamente, determine as dimensões desse paralelepípedo. comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm



26. As dimensões externas de uma caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo são números consecutivos, e a diagonal desse paralelepípedo mede $\sqrt{194}$ cm. Quantos centímetros tem cada uma das dimensões externas dessa caixa?
7 cm, 8 cm e 9 cm

27. Qual é a altura de um prisma oblíquo cujas arestas laterais, que formam com o plano da base ângulos de 60°, medem $10\sqrt{3}$ cm? 15 cm

28. Em uma aula de geometria espacial o professor solicitou aos alunos que construíssem, com canudos de 20 cm, as arestas de um cubo, de maneira que a diagonal desse cubo tivesse o mesmo comprimento de um canudo. Quantos centímetros de cada canudo devem ser cortados para construir as arestas desse cubo?
aproximadamente 8,5 cm

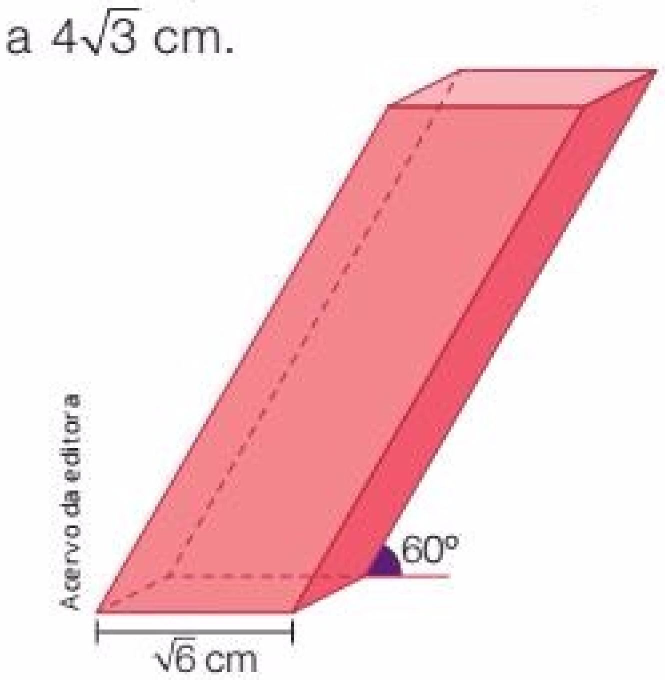
29. A diagonal de um paralelepípedo reto retângulo forma com a base um ângulo de 60°, e a diagonal da base desse paralelepípedo forma com as arestas da base ângulos de 45°. Sabendo que a diagonal da base desse paralelepípedo mede $4\sqrt{2}$ cm, resolva.

a) Quais são as medidas das arestas da base desse paralelepípedo? 4 cm

b) Qual a medida da diagonal desse paralelepípedo? $8\sqrt{2}$ cm

c) Calcule a altura desse paralelepípedo. $4\sqrt{6}$ cm

30. As arestas laterais de um prisma oblíquo de base quadrada, representado a seguir, têm medida igual a $4\sqrt{3}$ cm.

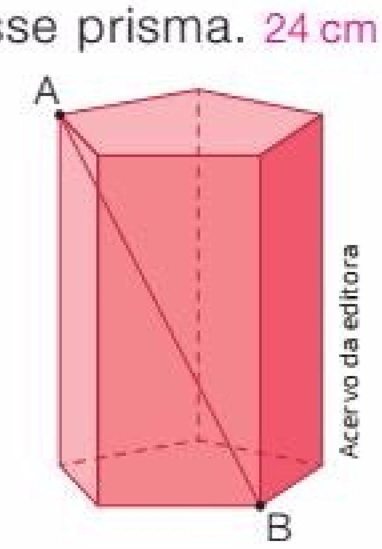


Em relação a esse prisma, calcule:

a) a medida da diagonal da base $2\sqrt{3}$ cm

b) a altura 6 cm

31. O segmento AB, indicado no prisma regular pentagonal representado a seguir, mede 30 cm. Para que esse segmento aumente 16,8 cm, de maneira que a medida das arestas da base não seja alterada, a altura desse prisma deve ser aumentada 19,2 cm. Calcule quantos centímetros de altura tem esse prisma. 24 cm



Capítulo 8

Área da superfície de um prisma

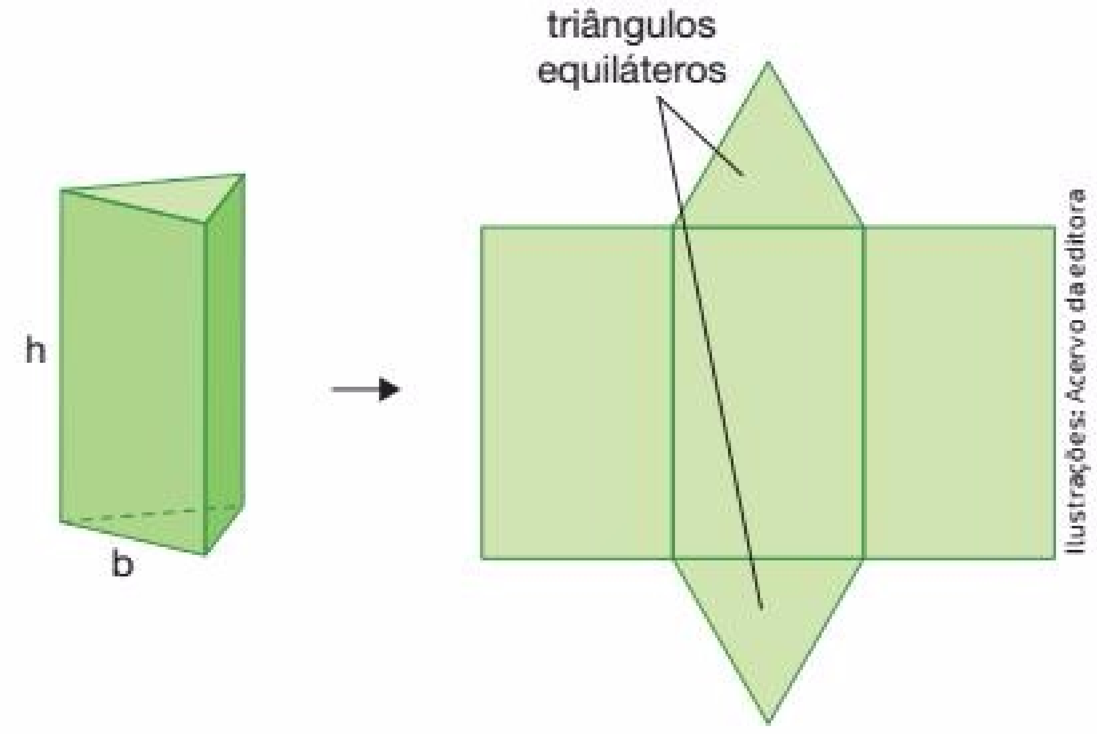
Para iniciarmos o estudo acerca do cálculo da área da superfície de um prisma, faremos algumas considerações. Em um prisma:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a **área lateral** do prisma (A_ℓ);
- a **área da base** corresponde à área do polígono que constitui cada uma das bases do prisma (A_b);
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a **área total** do prisma (A_t) a soma da área lateral e a área das bases.

Assim, a área total da superfície de um prisma corresponde à área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + 2A_b$

Veja a representação de um prisma regular e sua planificação.

Explique aos alunos que é possível compor outras planificações deste prisma.



Nesse caso, a área total do prisma é dada pela área lateral, que corresponde a três vezes a área de uma face (retângulo), mais a área das bases, que corresponde a duas vezes a área de uma base (triângulo equilátero):

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{3 \cdot b \cdot h} + 2\underbrace{A_b}_{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} = 3bh + 2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3bh + \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

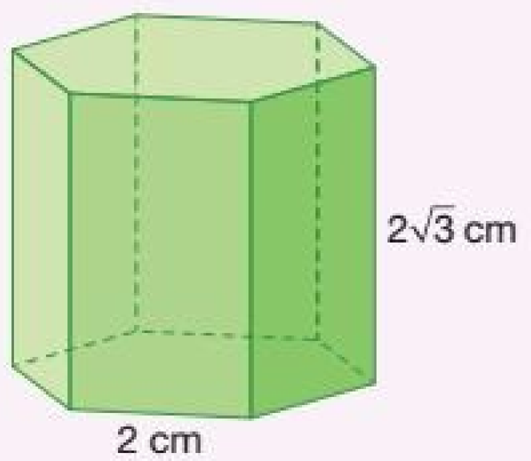
Atividades resolvidas

R4. Em relação ao prisma hexagonal regular ao lado, calcule:

a) a área da base

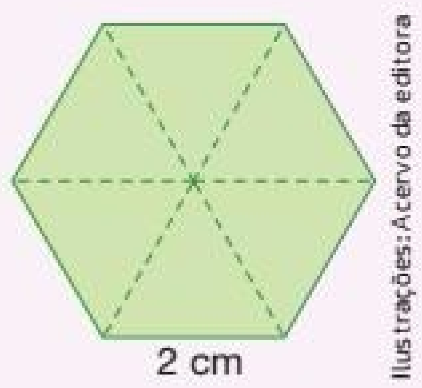
b) a área lateral

c) a área total



Resolução

a) Por ser hexagonal, a base pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado com medida 2 cm. Como a área de um triângulo equilátero de lado de medida ℓ é dada por $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, a área de cada base do prisma é:



$$A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{6\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

b) A superfície lateral é formada por 6 retângulos de dimensões 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm. Logo, a área lateral do prisma é:

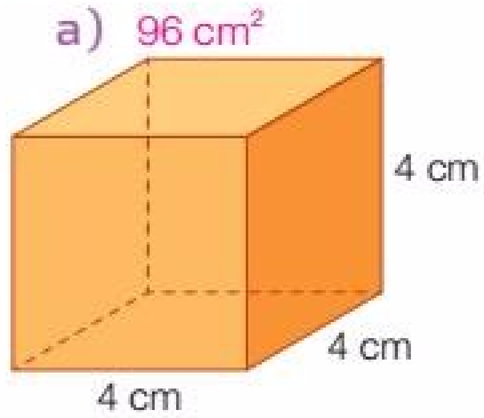
$$A_\ell = 6 \cdot \left(2 \cdot 2\sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{24\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

c) A área total do prisma é:

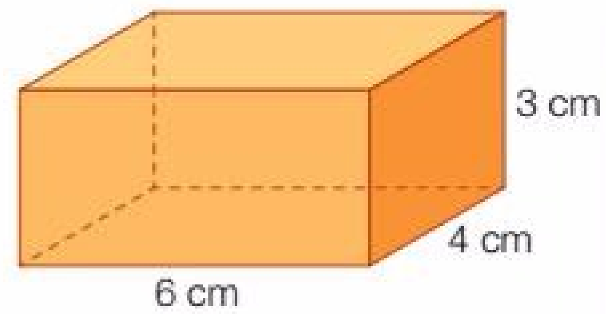
$$A_t = A_\ell + 2A_b = 24\sqrt{3} + 2 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{36\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

32. Calcule a área da superfície de cada prisma.

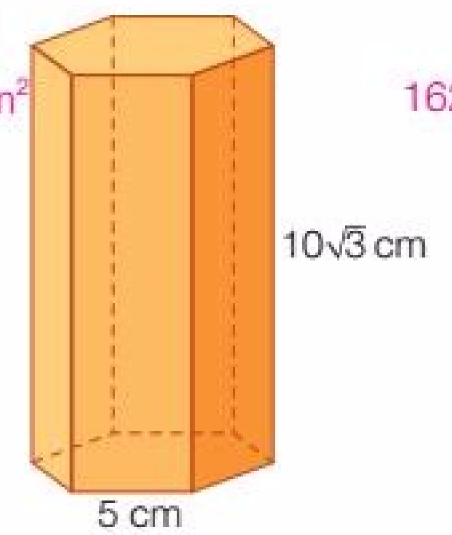
a) $96\ cm^2$



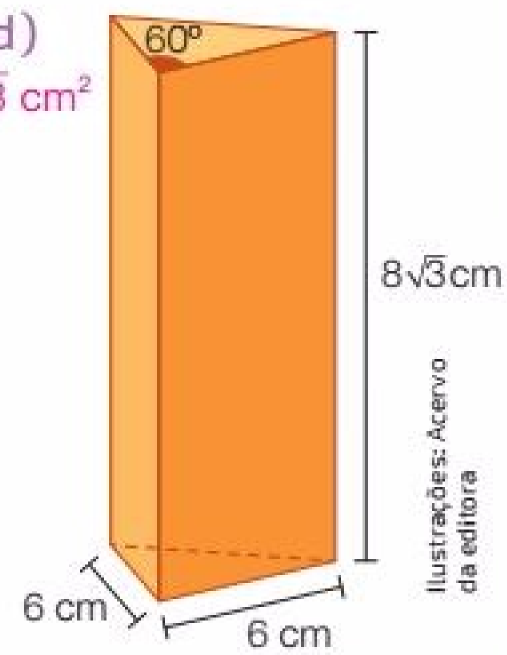
c) $108\ cm^2$



b) $375\sqrt{3}\ cm^2$

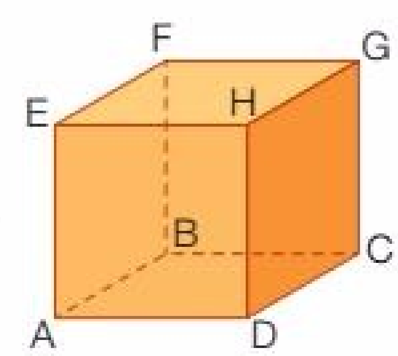


d) $162\sqrt{3}\ cm^2$



Ilustrações: Acervo da editora

33. Na imagem, está representado um cubo, cuja área da superfície é igual a $54\ cm^2$.



Acervo da editora

a) Calcule a medida de cada aresta desse cubo. 3 cm

b) Qual é o perímetro do quadrilátero AEGC? $6\cdot(1+\sqrt{2})$ cm

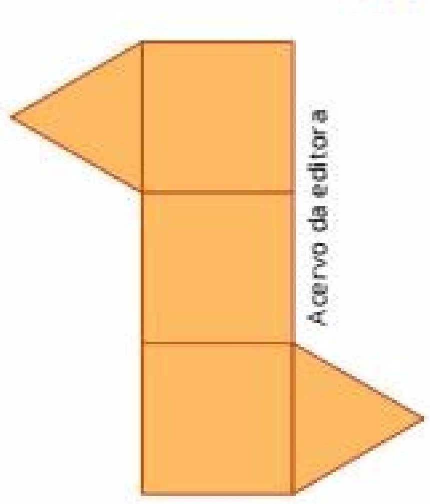
34. Todas as faces de um cubo de madeira com 120 cm de aresta foram pintadas de vermelho; em seguida, o cubo foi dividido em cubinhos com 4 cm de aresta.

a) Em quantos cubinhos o cubo vermelho foi dividido? 27 000 cubinhos

b) Quantos cubinhos têm ao menos duas faces pintadas de vermelho? 344 cubinhos

c) Qual é a razão entre a área total da superfície de cada cubinho e a do cubo vermelho? $\frac{1}{900}$

35. Observe a planificação de um prisma triangular regular, cujas medidas das arestas das bases e das arestas laterais são iguais a 30 cm.



Acervo da editora

a) Qual é a área da base desse prisma? $225\sqrt{3}\ cm^2$

b) Calcule a área lateral e a área total desse prisma.
$A_\ell = 2\,700\ cm^2$; $A_t = 450\cdot(6+\sqrt{3})\ cm^2$

36. Em quantos centímetros deve ser aumentada a diagonal de um cubo, cuja área total é $384\ cm^2$, de modo que sua área lateral aumente $144\ cm^2$? 3,46 cm

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

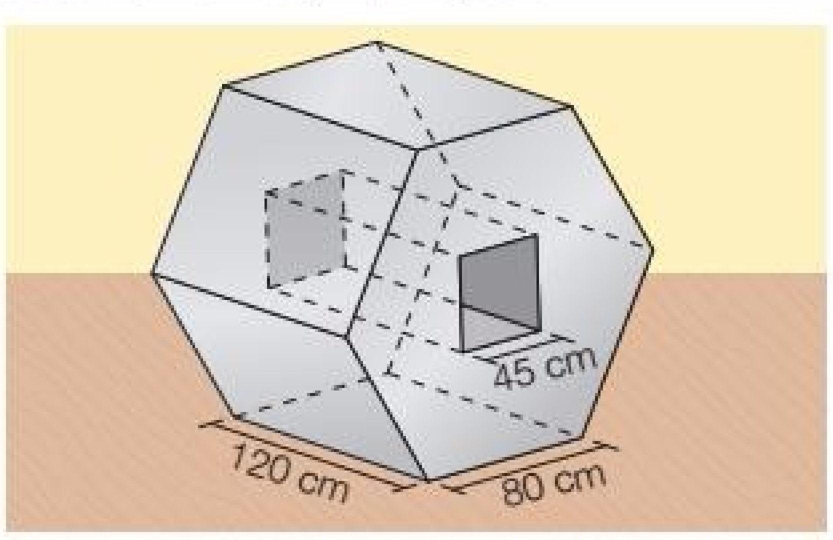
37. Considere um pedaço retangular de cartolina com 20 cm de largura por 35 cm de comprimento. De cada "canto" dessa cartolina foi retirado um quadrado de lado medindo *x*; em seguida, a cartolina foi dobrada na linha tracejada, de maneira a formar uma caixa sem tampa.

Acervo da editora

a) Qual é o valor de *x*, de modo que a área da superfície externa da caixa obtida seja $684\ cm^2$? x = 2 cm

b) Calcule a área da base e a área lateral da caixa obtida. área da base: $496\ cm^2$; área lateral: $188\ cm^2$

38. Uma peça, confeccionada em uma liga metálica, tem a forma de um prisma hexagonal regular com um "furo" em forma de prisma reto de base quadrada. Em seu processo de produção, a peça teve sua superfície pintada com uma tinta anticorrosiva, cujo custo e rendimento por litro são, respectivamente, R$ 25,00 e $4\ m^2$.

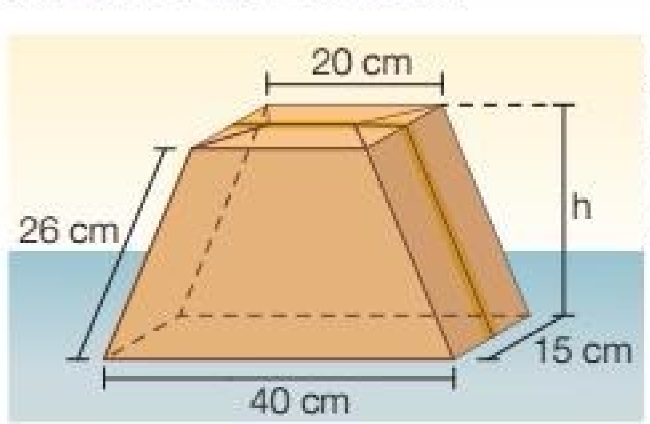


Acervo da editora

a) Qual é a área total da superfície dessa peça?

b) Quantos reais aproximadamente serão gastos com tinta para pintar essa peça? R$ 67,75

39. Utilizando 4 pedaços de papelão com forma de retângulo e 2 com forma de trapézio, Rafael confeccionou uma caixa que servirá como urna de votação em uma eleição que será realizada na escola onde ele estuda.



Acervo da editora

a) Nessa caixa, qual é a medida *h*? 24 cm

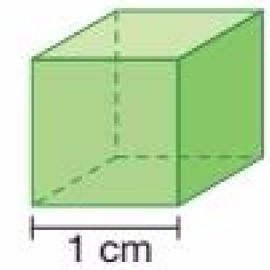
b) Quantos centímetros quadrados de papelão foram utilizados para montar a caixa? $3\,120\ cm^2$

38. a) aproximadamente $108\,405\ cm^2$ ou $10{,}8405\ m^2$

Volume de um prisma

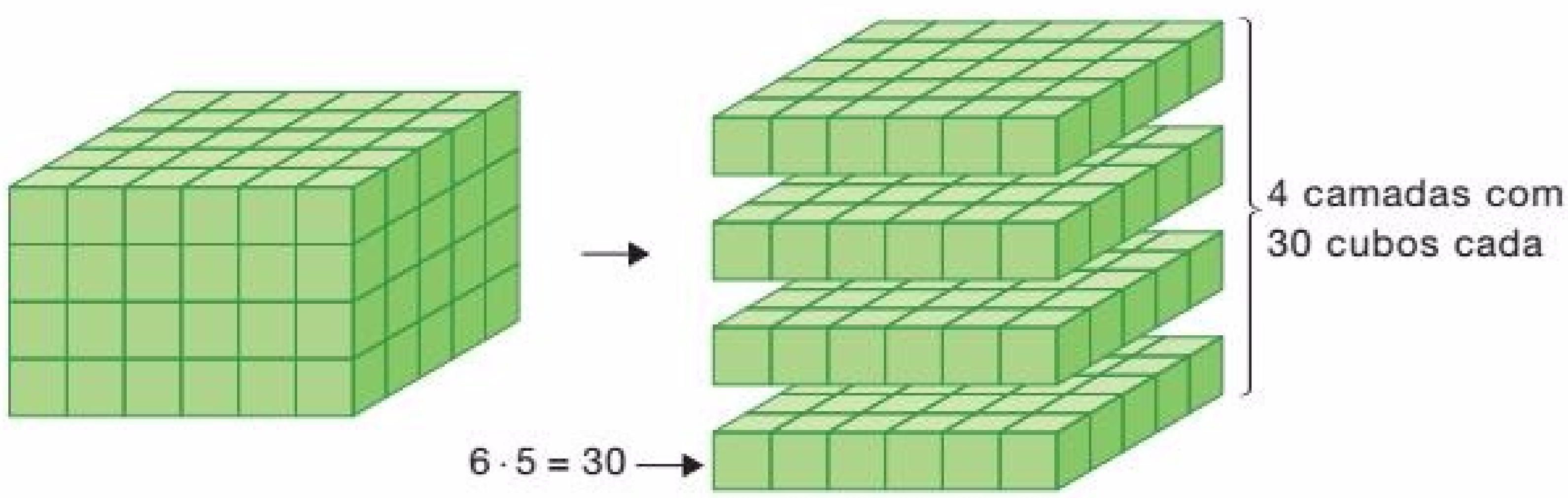
Assim como podemos medir a massa de um objeto, o comprimento de uma sala, a superfície de uma quadra esportiva etc., podemos também medir o espaço ocupado por um objeto ou uma forma geométrica espacial. Quando calculamos o espaço ocupado por um corpo, estamos determinando o seu **volume**.

Entre as unidades de medida de volume mais utilizadas estão o centímetro cúbico (cm^3), o decímetro cúbico (dm^3) e o metro cúbico (m^3). Um centímetro cúbico corresponde ao volume de um cubo com 1 cm de aresta; um decímetro cúbico, ao volume de um cubo com 1 dm de aresta; e um metro cúbico, ao volume de um cubo com 1 m de aresta.



Volume do paralelepípedo reto retângulo

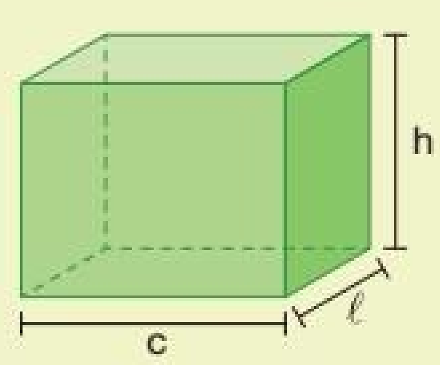
O paralelepípedo abaixo foi construído com cubos de 1 cm de aresta, isto é, cubos com $1 cm^3$ de volume. O volume *V* desse paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos com os quais ele é formado. Para calcularmos o número de cubos e, consequentemente, o volume do paralelepípedo, multiplicamos a quantidade de cubos em cada camada pelo número de camadas.



$$V = \overbrace{6 \cdot 5}^{\text{cubos em cada camada}} \cdot \underbrace{4}_{\text{número de camadas}} = 120$$

Assim, o volume do paralelepípedo é $120 cm^3$.

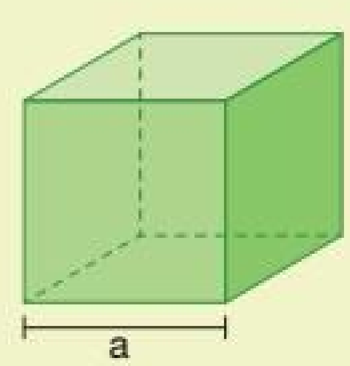
O volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado por $V = c \cdot \ell \cdot h$.



A área da base do paralelepípedo é dada por $A_b = c \cdot \ell$. Dessa maneira, também podemos escrever a seguinte fórmula para o volume: $V = A_b \cdot h$.

Para obter o volume de um cubo multiplicamos as medidas de suas dimensões. Porém, como elas são iguais, temos a fórmula: $V = a \cdot a \cdot a$ ou $V = a^3$.

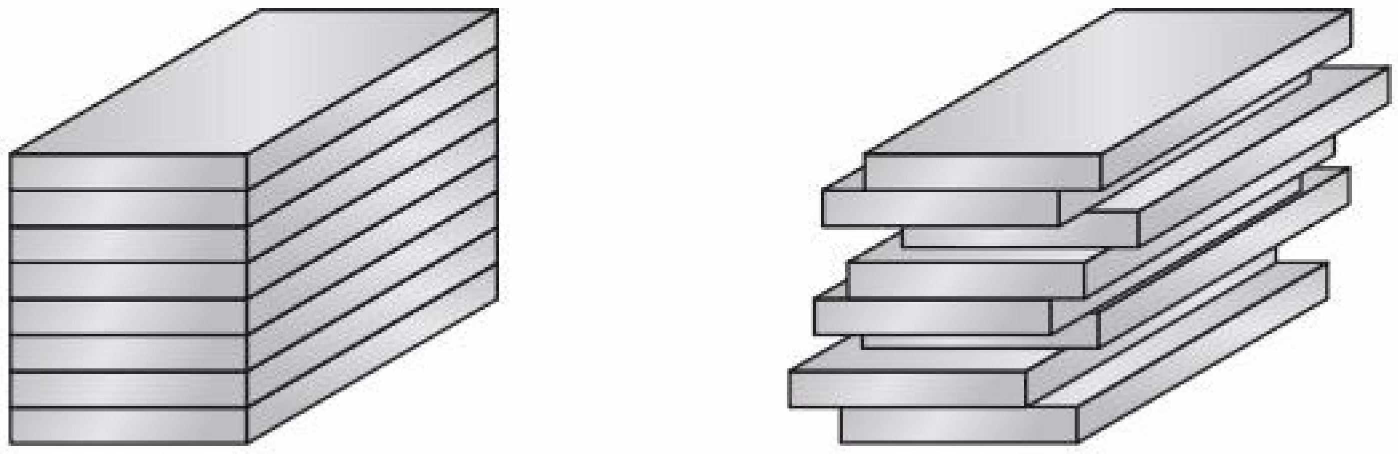
Lembre-se de que o cubo é um caso particular de paralelepípedo.



Ilustrações: Acervo da editora

Princípio de Cavalieri

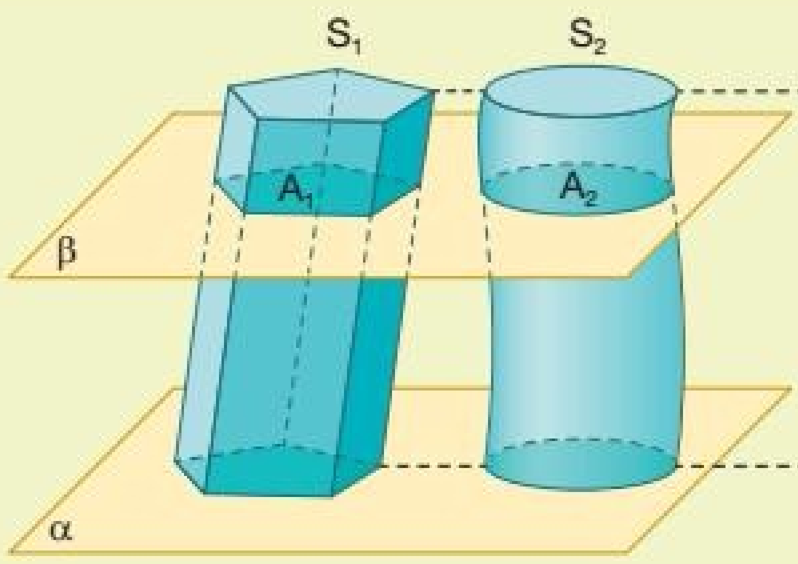
Considere algumas chapas metálicas em forma de paralelepípedo reto, empilhadas de duas maneiras diferentes, como mostram as figuras.



Percebe-se que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

A formalização dessa situação, que veremos a seguir, é conhecida como **Princípio de Cavalieri**.

Considere os sólidos S_1 e S_2, cuja altura *h* é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α, que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, temos que o volume de S_1 é igual ao de S_2, ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.



Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: De Agostini Picture Library/Diomedia

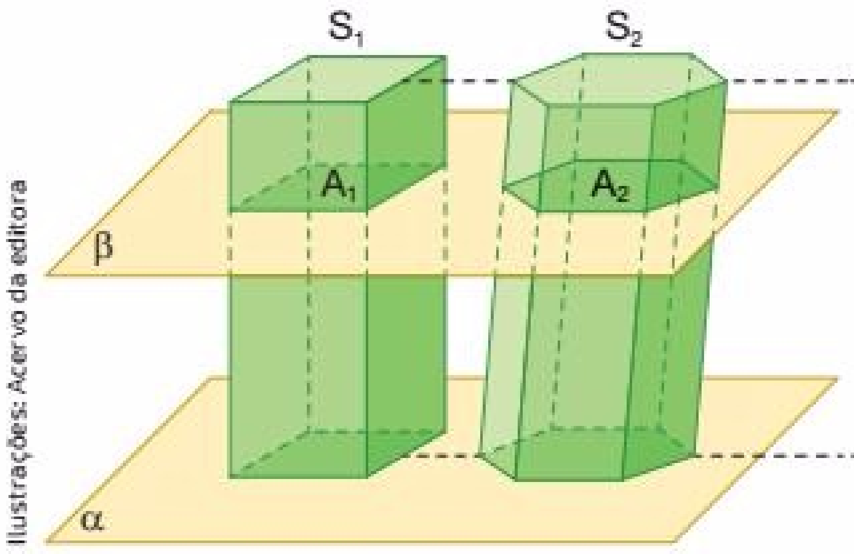
O matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nasceu em Milão, na Itália. Foi aluno de Galileu e atuou como professor na Universidade de Bolonha por quase duas décadas.

Capítulo 8

O Princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, mas nesta coleção iremos apenas considerá-lo como verdadeiro.

Volume de um prisma qualquer

Agora, utilizando o Princípio de Cavalieri, vamos obter o volume de um prisma qualquer. Para isso, consideraremos um paralelepípedo reto retângulo (S_1) e um prisma qualquer (S_2), apoiados em um plano horizontal α, ambos de altura *h* e de bases com áreas iguais. Todo plano β, paralelo a α, determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas iguais.



Ilustrações: Acervo da editora

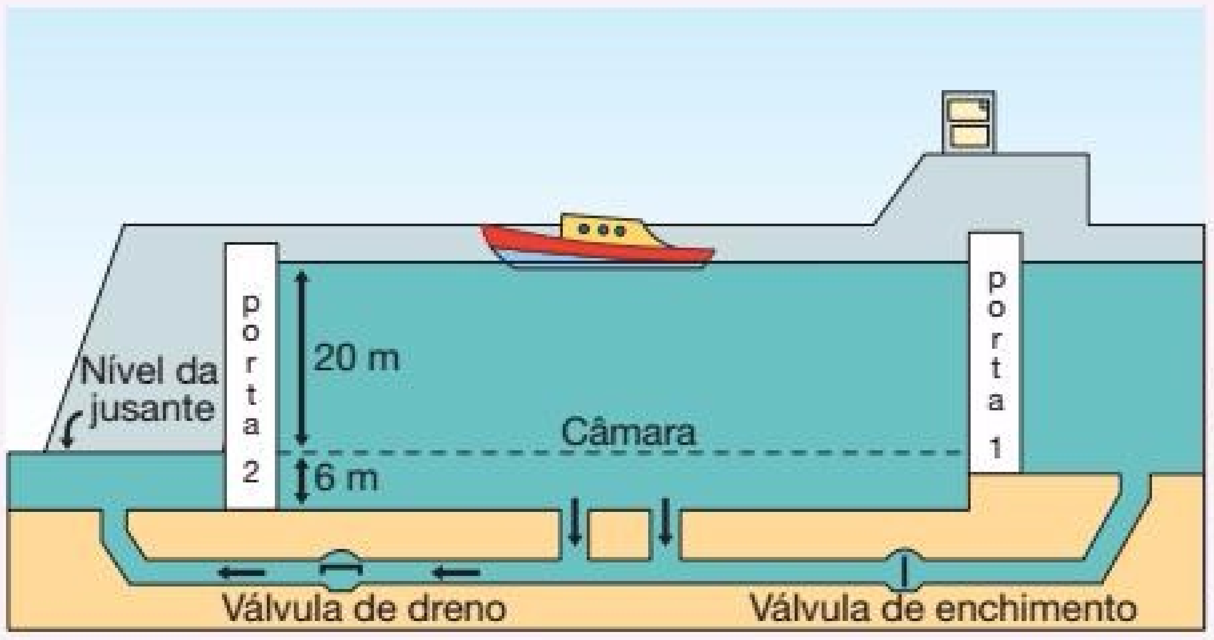
Pelo Princípio de Cavalieri, temos que os dois sólidos têm o mesmo volume: $V_{S_1} = V_{S_2}$.

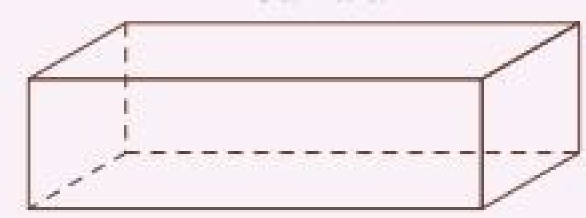
Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado por $V_{S_1} = A_b \cdot h$. Assim, o volume do prisma também é dado por $V_{S_2} = A_b \cdot h$.

Portanto, podemos determinar o volume de um prisma qualquer multiplicando a área da base pela medida de sua altura.

Atividades resolvidas

R5. (Enem-MEC) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.





Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto.

Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutos b) 5 minutos c) 11 minutos d) 16 minutos e) 21 minutos

Resolução

A câmara da eclusa tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo. O volume de água a ser retirado da câmara corresponde ao do paralelepípedo cujas dimensões estão indicadas na imagem ao lado.

Ilustrações: Acervo da editora

O volume desse paralelepípedo é dado por:

$$V = 200 \cdot 17 \cdot 20 = 68\,000 \rightarrow 68\,000\ m^3$$

Calculamos o tempo necessário para o esvaziamento da eclusa por meio de uma regra de três:

volume (m^3)		tempo (min)
4 200	———	1
68 000	———	x

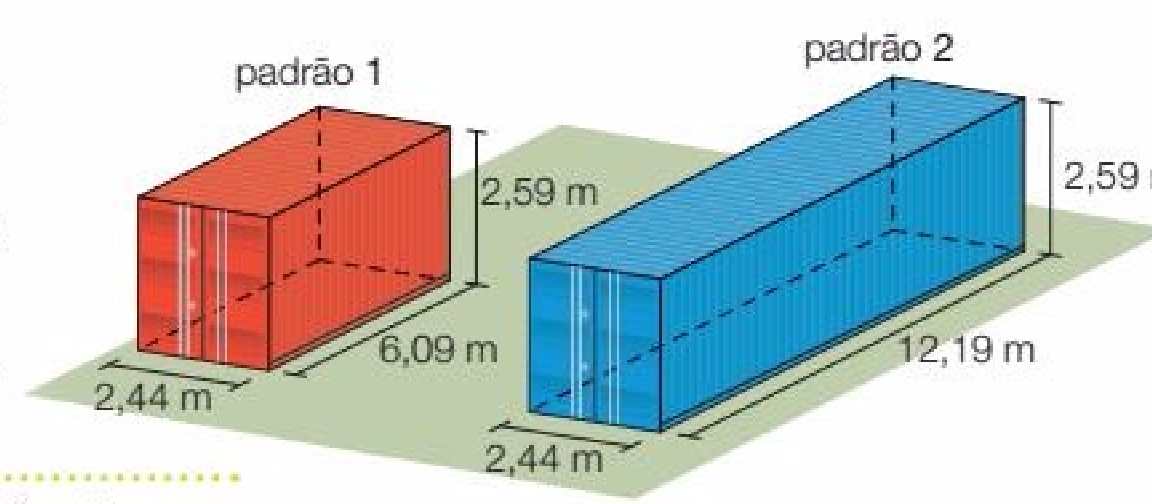
$$\frac{4\,200}{68\,000} = \frac{1}{x} \Rightarrow 4\,200x = 68\,000 \Rightarrow x \simeq 16{,}2 \rightarrow \text{aproximadamente } 16\text{min}12\text{s}$$

Portanto, para descer do nível mais alto até a jusante, uma embarcação leva cerca de 16 minutos, ou seja, a alternativa correta é a **d**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

40. Observe ao lado as dimensões dos dois padrões mais populares de contêineres.



Acervo da editora

a) Qual é a capacidade aproximada dos contêineres de padrões 1 e 2? padrão 1: 38,49 m^3; padrão 2: 77 m^3

b) Determine a área aproximada da superfície externa dos contêineres de padrões 1 e 2.

Para resolver esta atividade, considere que os contêineres têm forma de paralelepípedo e desconsidere sua espessura no cálculo do volume.

41. A área da superfície de um cubo é 384 cm^2. Em quantos centímetros deve ser aumentada cada aresta desse cubo para que seu volume passe a ser 1 728 cm^3? 4 cm

40. b) padrão 1: 73,9 m^2; padrão 2: 135,27 m^2

42. (Enem-MEC) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é: c

a) 450
b) 500
c) 600
d) 750
e) 1 000

43. Em um recipiente com forma de paralelepípedo reto, cujas medidas internas da largura, do comprimento e da altura são respectivamente 10 cm, 12 cm e 14 cm, foi colocada água até que esta atingisse 8 cm de altura. Em seguida, foi colocado dentro desse recipiente um cubo sólido que ficou totalmente submerso, fazendo o nível da água subir 1,8 cm.

a) Qual é a capacidade desse recipiente em centímetros cúbicos? 1 680 cm^3

b) Qual é o volume de água dentro do recipiente? 960 cm^3

c) Qual é a medida da aresta do cubo colocado no recipiente? 6 cm

44. Uma galeria comercial foi dividida em 10 salas retangulares, todas de mesmo tamanho, cada uma medindo 4 m de largura por 6 m de comprimento. O piso dessa galeria é feito de concreto, com 15 cm de espessura. Qual é o volume de concreto utilizado no piso da galeria? 36 m^3

45. No projeto de construção de uma ponte está prevista a instalação de 8 colunas de sustentação, todas com a forma de um prisma regular hexagonal, com 2 m de aresta da base e 12 m de altura. Sabendo que o volume de cada coluna é composto de 80% de concreto e 20% de ferragem, responda.

a) Quantos metros cúbicos de volume tem cada uma das colunas? aproximadamente 124,7 m^3

b) Qual é o volume de concreto utilizado para construir as 8 colunas? 798,08 m^3

46. De um reservatório com formato cúbico, que estava totalmente cheio, foram retirados 2 700 L de água, fazendo o nível da água baixar 30 cm. Qual é a capacidade total, em litros, desse reservatório? 27 000 L

47. Um líquido, que ocupa uma altura de 50 cm em um recipiente A, de forma cúbica, será despejado em um recipiente B, também de forma cúbica, cuja medida da diagonal é o dobro da medida da diagonal de A.

a) Calcule a razão entre o volume de A e o de B. $\frac{1}{8}$

b) Que altura o líquido ocupará no recipiente B? 12,5 cm

48. Um paralelepípedo reto retângulo tem dimensões a, b e c com $a<b<c$. Diminuindo em 20% a medida de a e mantendo a medida de b, o que deve ser feito com a medida de c para que o volume do paralelepípedo não seja alterado? A medida de c deve ser aumentada em 25%.

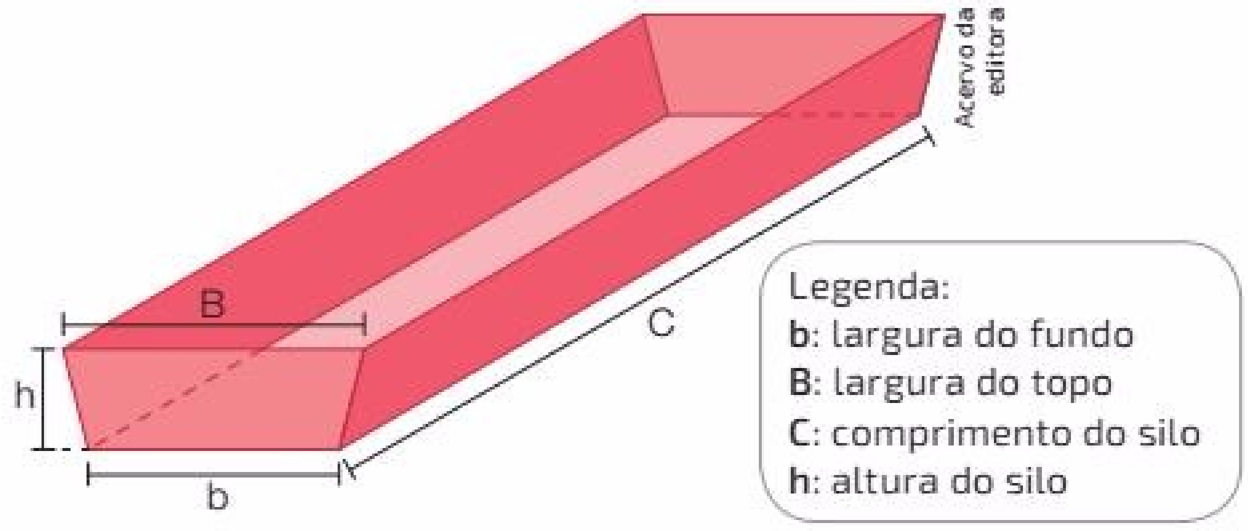
49. Um prisma hexagonal regular tem todas as arestas congruentes e área total igual a $96(2\sqrt{3}+4)$ cm^2.

a) Quais são as medidas das arestas desse prisma? 8 cm

b) Calcule o volume desse prisma. $768\sqrt{3}$ cm^3

50. Certo líquido, que ocupava 75% da capacidade de um recipiente cúbico, foi despejado em um recipiente com forma de prisma triangular regular, atingindo 40% da sua altura. Qual é a capacidade do recipiente em forma de prisma triangular, sabendo que a do recipiente cúbico é de 4 L? 7,5 L

51. (Enem-MEC) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

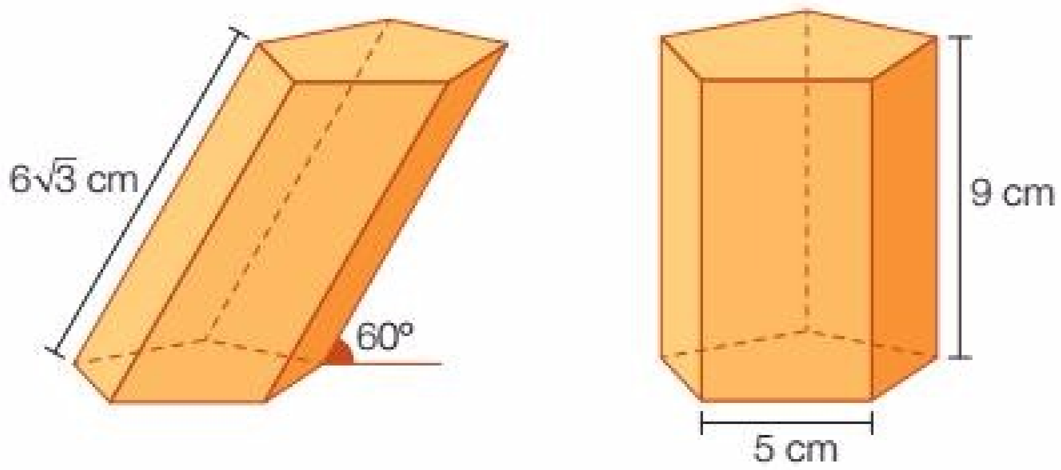
EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em : 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é: a

a) 110
b) 125
c) 130
d) 220
e) 260

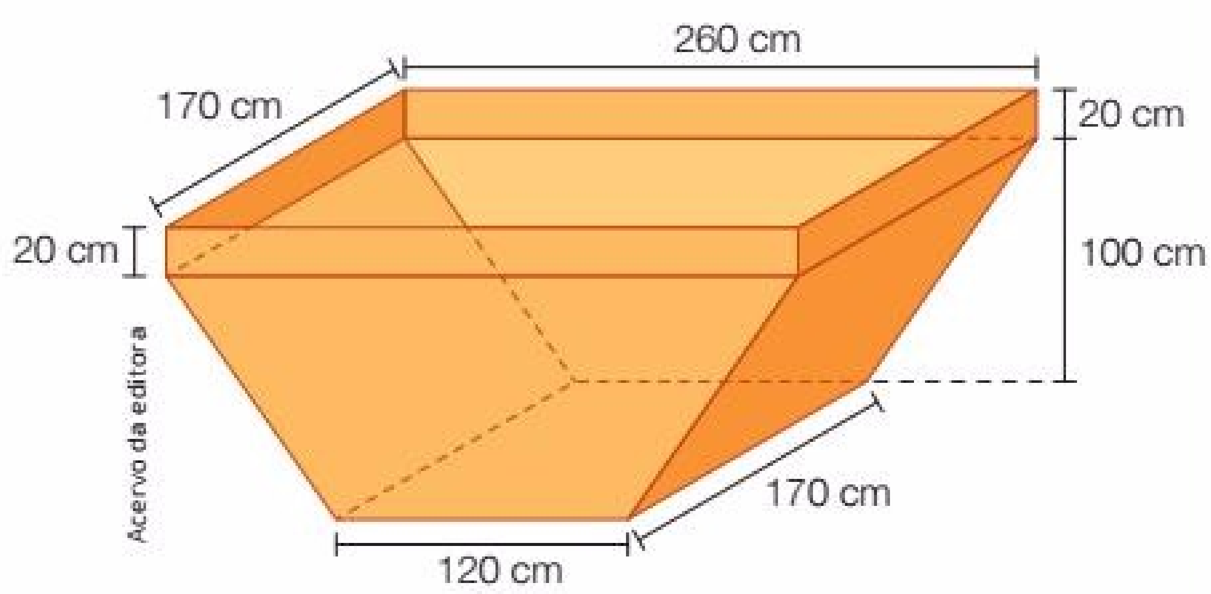
Capítulo 8

52. Os prismas a seguir possuem a mesma área da base. O que podemos afirmar em relação aos seus volumes? Justifique. Resposta no final do livro.



Ilustrações: Acervo da editora

53. Lucas contratou um serviço de remoção de entulhos com caçambas estacionárias durante uma reforma em sua casa. A quantidade de entulho gerado na reforma foi transportada em quatro caçambas com forma e dimensões representadas a seguir.

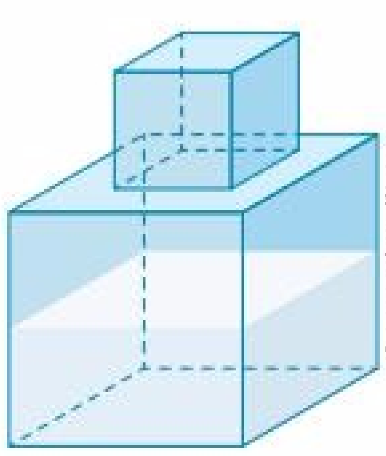


Acervo da editora

Considerando que não possa ser colocado entulho acima da borda da caçamba, quantos metros cúbicos de entulho, no máximo, foram gerados e removidos na reforma da casa de Lucas? aproximadamente $16{,}46\ m^3$

> Note que a caçamba pode ser decomposta em duas partes com formas de paralelepípedo reto retângulo e prisma reto cujas bases são trapézios isósceles.

54. (Enem-MEC) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Acervo da editora

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito? b

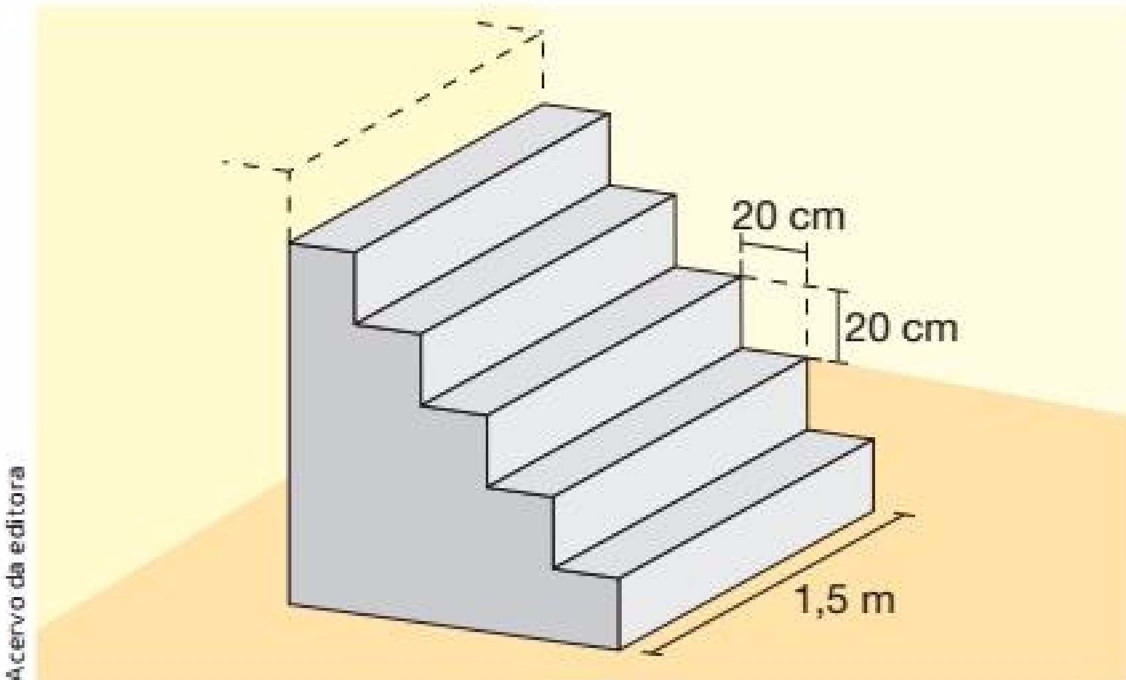
a) 8 b) 10 c) 16 d) 18 e) 24

55. A base de um prisma reto, cujo volume é $640\ cm^3$, tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com a hipotenusa medindo $8\sqrt{2}$ cm.

a) Quantos centímetros de altura tem esse prisma? 20 cm

b) Calcule a área total desse prisma. aproximadamente $610{,}27\ cm^2$

56. A figura representa parte de uma escada construída com blocos de concreto na forma de prisma reto de base quadrada, cujas arestas da base medem 20 cm, e a altura, 1,5 m.



Acervo da editora

a) Quantos blocos são necessários para construir uma escada como essa com 20 degraus? 210 blocos

b) Qual é o volume de concreto necessário para construir a escada descrita no item **a**? $12{,}6\ m^3$

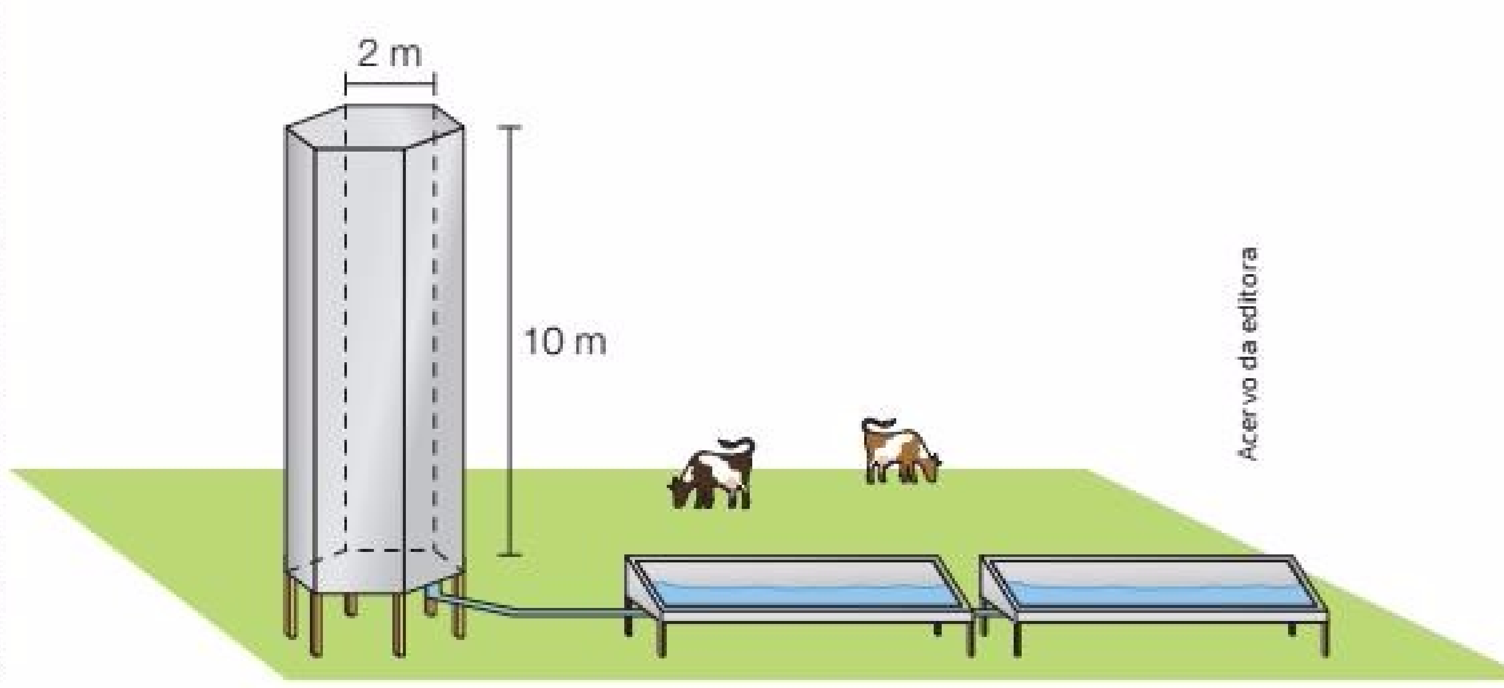
57. Uma piscina deve ser projetada de maneira a ter o maior volume possível e forma de prisma reto retangular com dimensões iguais a x m, $(30-x)$ m e 2,5 m.

a) Quais devem ser as dimensões dessa piscina? 2,5 m, 15 m e 15 m

b) De quantos metros cúbicos será a capacidade dessa piscina? $562{,}5\ m^3$

58. Um tanque em forma de prisma hexagonal regular, conforme representado a seguir, é utilizado como reservatório de água e abastece bebedouros para o gado em uma fazenda. Nesses bebedouros, são consumidos diariamente cerca de 10 000 L de água.

Estando inicialmente cheio, durante quantos dias a água do reservatório consegue suprir os bebedouros? aproximadamente 10 dias



Acervo da editora

Pirâmides

Agora, estudaremos as pirâmides, que constituem outro tipo de poliedro. Veja a seguir uma embalagem e construções que lembram pirâmides.


Marcus Cappellano

embalagem de presente

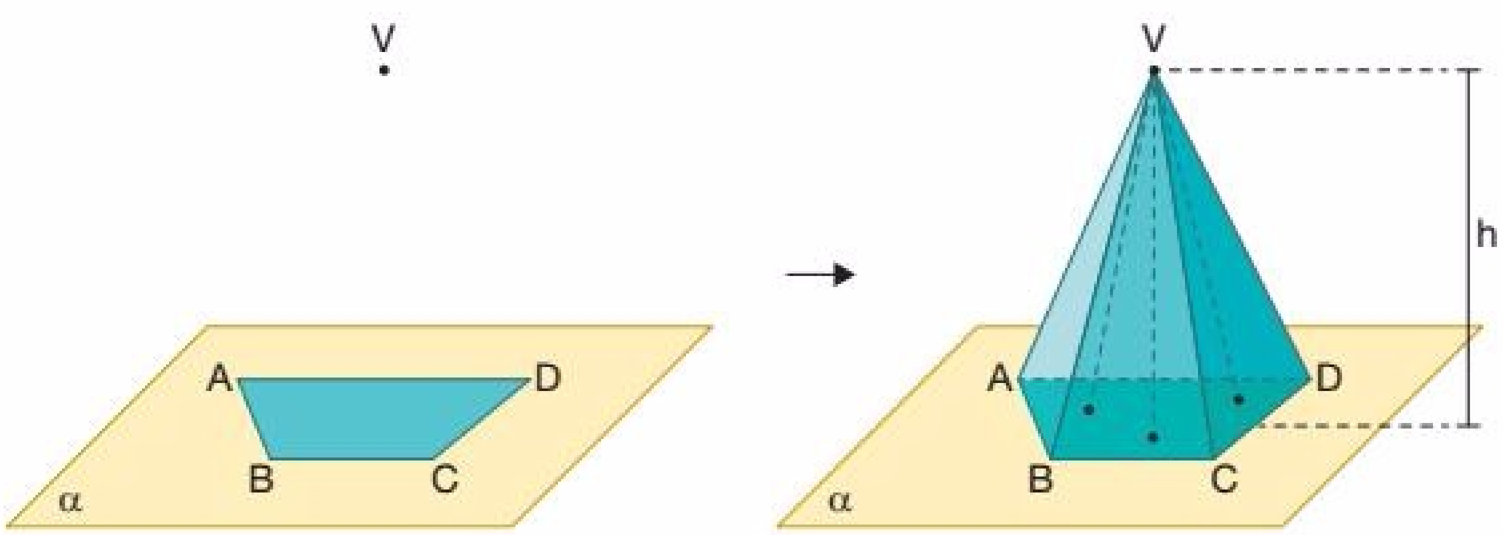

G.A. Rossi/picture-alliance/dpa/AP Images/Glow Images

Pirâmides de Gizé, no Cairo, Egito, em 2015.


Veniamin Kraskov/Shutterstock.com

Museu do Louvre, em Paris, na França, em 2014.

Para definir uma pirâmide, consideramos um plano α, um polígono convexo contido em α e um ponto *V*, fora do plano. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e outra em um ponto do polígono é denominada pirâmide.

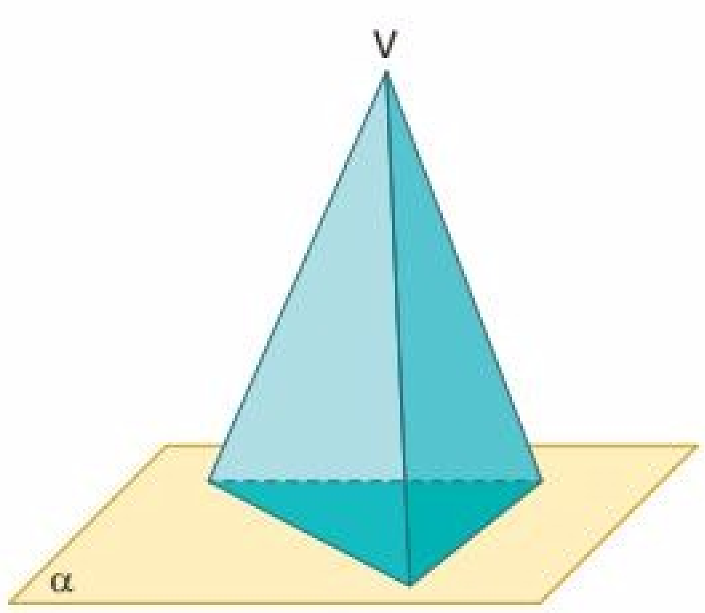


Em uma pirâmide, podemos definir os seguintes elementos:

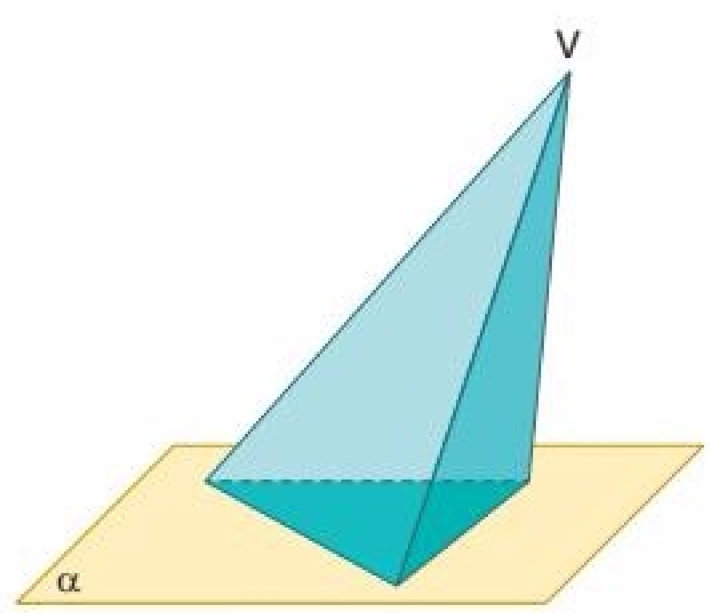
- A **base** é a região poligonal ABCD.
- O ponto *V* é chamado **vértice da pirâmide**.
- As arestas $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, $\overline{CV}$ e $\overline{DV}$ são as **arestas laterais**.
- As arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ são as **arestas da base**.
- Os triângulos ABV, BCV, CDV e ADV são as **faces laterais**.
- A distância *h*, entre o plano α e o vértice *V*, corresponde à **altura** da pirâmide.

De acordo com algumas características, uma pirâmide pode ser classificada em reta ou oblíqua.

Em uma **pirâmide reta**, as faces laterais são congruentes, o que não ocorre na **pirâmide oblíqua**.



pirâmide reta

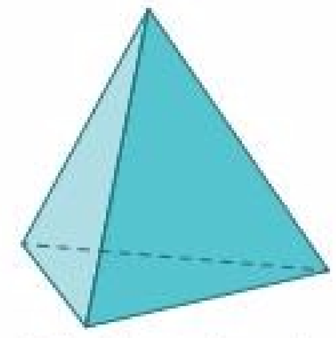


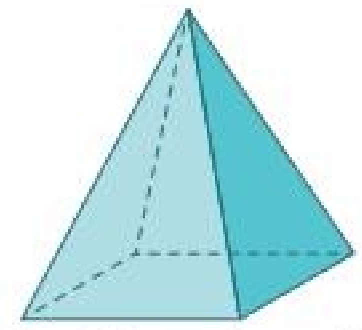
pirâmide oblíqua

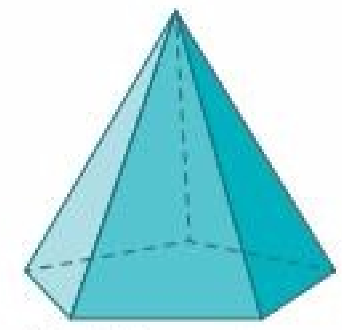
Ilustrações: Acervo da editora

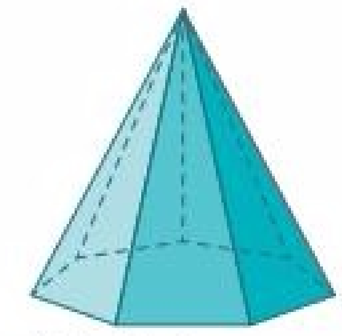
Lembre aos alunos de que todo **polígono regular** pode circunscrever uma circunferência e que o raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao **apótema** do polígono.

Uma pirâmide pode ser denominada de acordo com o polígono que compõe sua base. Se a base for um triângulo, a pirâmide é **triangular**; se a base for um quadrilátero, a pirâmide é **quadrangular**; e assim por diante. Veja alguns exemplos:

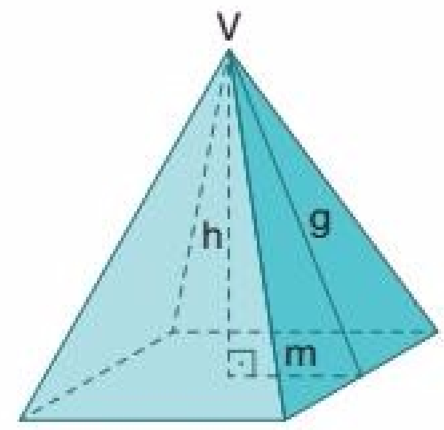

pirâmide triangular


pirâmide quadrangular


pirâmide pentagonal

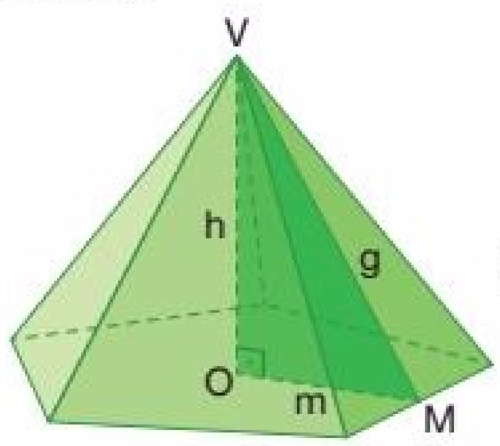

pirâmide heptagonal

Em uma pirâmide reta, quando a base é um polígono regular, dizemos que ela é uma **pirâmide regular**. Nesse caso, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Além disso, o apótema do polígono da base é o **apótema da base** (*m*), e a altura de uma face lateral é o **apótema da pirâmide** (*g*).



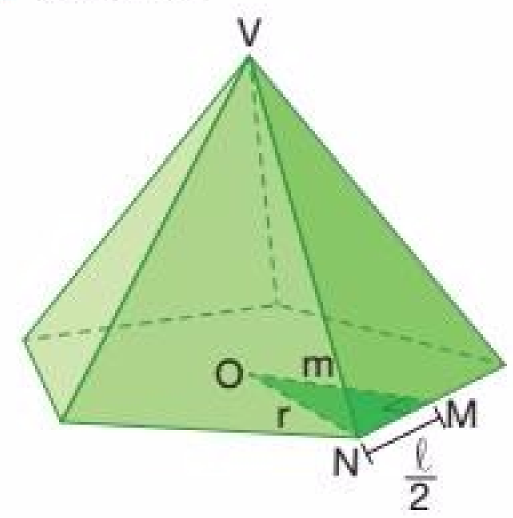
Em uma pirâmide regular, podemos destacar quatro triângulos retângulos que relacionam três medidas entre: aresta lateral (*L*), aresta da base (ℓ), raio da circunferência que circunscreve a base (*r*), apótema da pirâmide (*g*), apótema da base (*m*) e altura (*h*). Veja, em uma pirâmide pentagonal regular, os triângulos destacados.

- ΔVOM



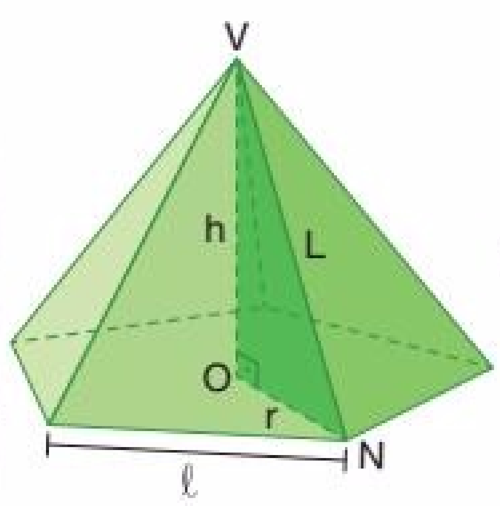
$g^2 = m^2 + h^2$

- ΔOMN



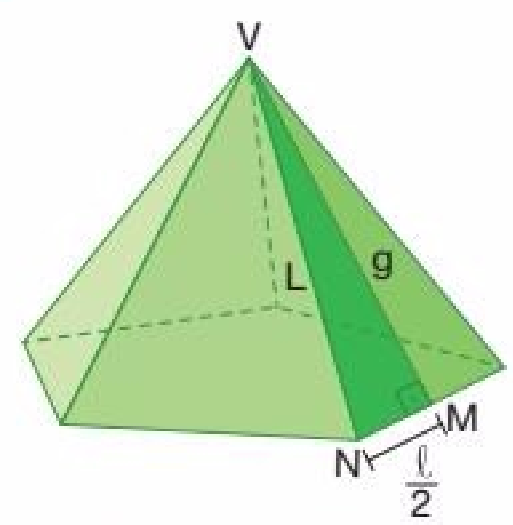
$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m^2$

- ΔVON



$L^2 = r^2 + h^2$

- ΔVMN



$L^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + g^2$

Ilustrações: Acervo da editora

Área da superfície de uma pirâmide

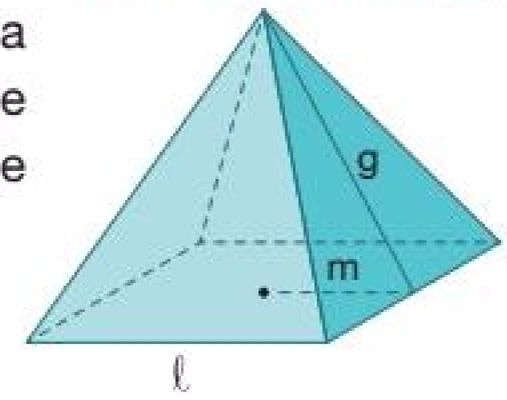
Assim como os prismas, temos em uma pirâmide que:

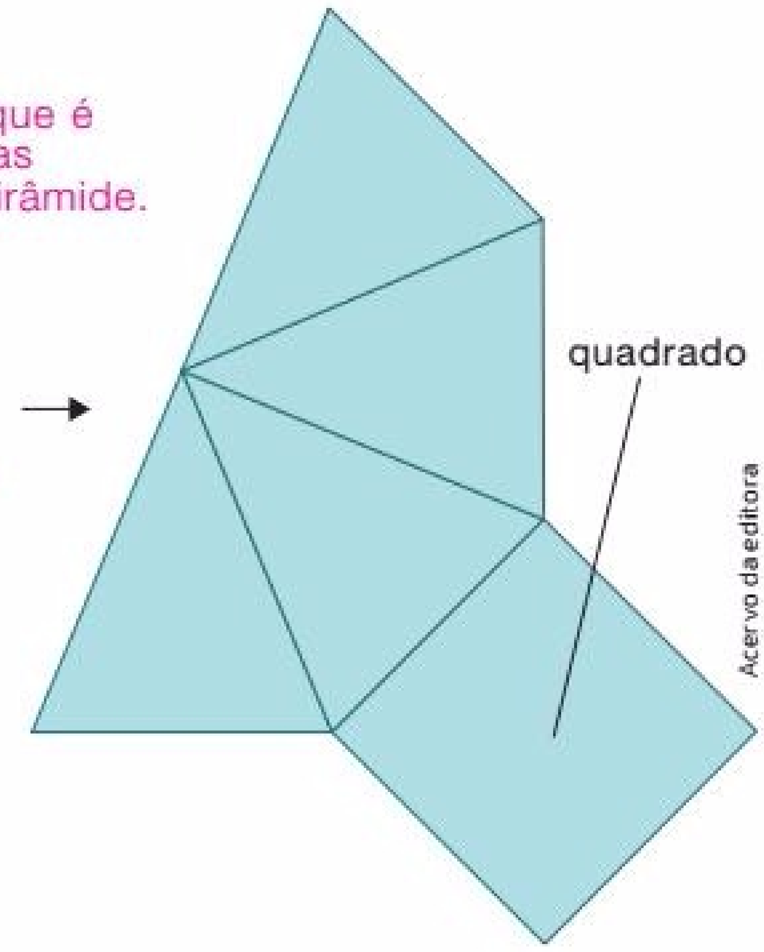
- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a **área lateral** da pirâmide (A_ℓ);
- a **área da base** corresponde à área do polígono que constitui a base da pirâmide (A_b);
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com a base, sendo a área dessa superfície a **área total** da pirâmide (A_t).

Assim, a área total de uma pirâmide corresponde à área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + A_b$.

Veja a representação de uma pirâmide regular e sua planificação.

Explique aos alunos que é possível compor outras planificações desta pirâmide.



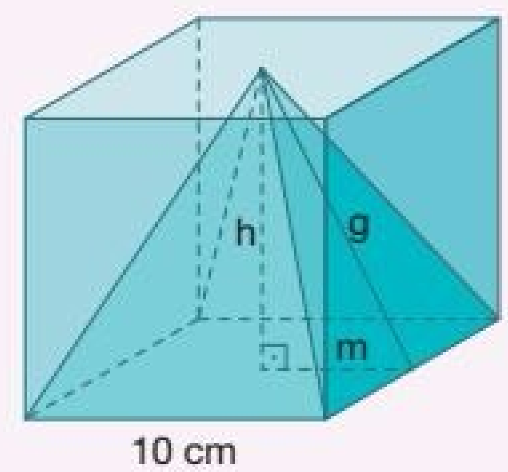


Nesse caso, a área total da pirâmide é dada pela área lateral, que corresponde a quatro vezes a área de uma face (triângulo isósceles), mais a área da base (quadrado):

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{4\cdot\frac{\ell g}{2}} + \underbrace{A_b}_{\ell^2} = 4\cdot\frac{\ell g}{2} + \ell^2 = 2\ell g + \ell^2$$

Atividades resolvidas

R6. A figura ao lado apresenta uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de aresta 10 cm, de modo que a base e o vértice da pirâmide estão contidos nas bases do cubo.



Em relação a essa pirâmide, calcule a medida:

a) da altura

b) do apótema da base

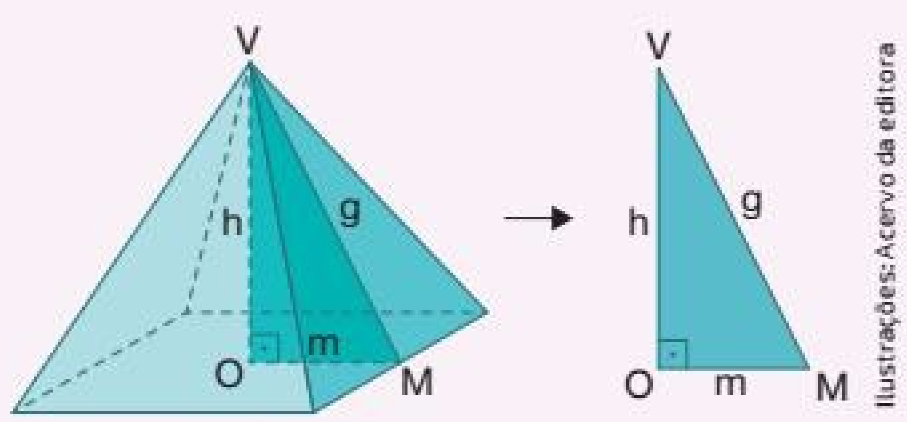
c) do apótema da pirâmide

Resolução

a) A distância entre o vértice e a base da pirâmide corresponde à medida da aresta do cubo. Logo, $h = 10$ cm.

b) O apótema da base da pirâmide e do cubo são coincidentes. Logo, $m = 5$ cm.

c) O apótema da base, a altura e o apótema da pirâmide formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo VOM, conforme a figura a seguir.



$$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 10^2 \Rightarrow g^2 = 125 \Rightarrow g = 5\sqrt{5} \longrightarrow \boxed{5\sqrt{5}\ \text{cm}}$$

R7. O apótema g de uma pirâmide hexagonal regular mede $4\sqrt{3}$ cm, e a aresta ℓ da base, 4 cm. Calcule:

a) a área da base

b) a área lateral

c) a área total

Resolução

a) A base hexagonal pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado 4 cm. Logo, a área da base da pirâmide é dada por:

$$A_b = 6\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 6\cdot\frac{16\cdot\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{24\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

b) A superfície lateral é formada por 6 triângulos isósceles de base 4 cm e altura $4\sqrt{3}$ cm. Logo, a área lateral da pirâmide é dada por:

$$A_\ell = 6\cdot\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{2}\right) = 68\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{48\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

c) A área total da pirâmide é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b = 48\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{72\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

59. Qual relação existe entre o número de lados do polígono que compõe a base da pirâmide e o número: Respostas no final do livro.
- total de arestas da pirâmide?
- de faces da pirâmide?

60. Certa pirâmide hexagonal regular possui aresta da base e altura com medidas de 4 cm e 12 cm, respectivamente. Determine a medida:

a) do raio da base 4 cm

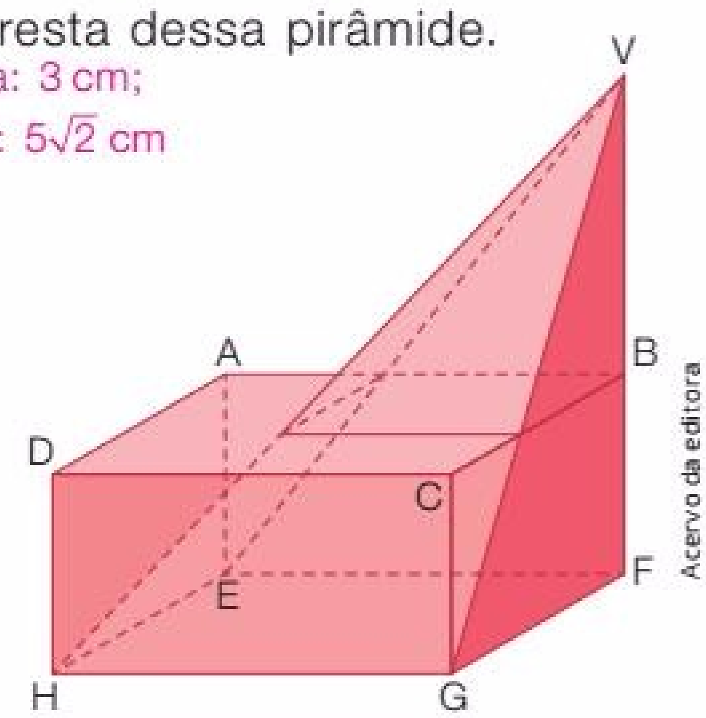
b) da aresta lateral $4\sqrt{10}$ cm

c) do apótema da base $2\sqrt{3}$ cm

d) do apótema da pirâmide $2\sqrt{39}$ cm

61. Considere o paralelepípedo ABCDEFGH, com GH = 4 cm, AD = 3 cm e CG = 2 cm. Ao traçarmos o segmento BV com 3 cm, perpendicular ao plano que contém a face ABCD, e os segmentos EV, GV e HV, obtemos uma pirâmide de base quadrangular. Determine a medida da menor e da maior aresta dessa pirâmide.

menor aresta: 3 cm;
maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm



Acervo da editora

62. Desafio

Uma pirâmide triangular regular tem em sua base uma circunferência inscrita de raio 2 cm. Qual é a medida do raio de uma circunferência que circunscreve a base dessa pirâmide? 4 cm

63. Em geral, os dados têm forma de poliedros com gravações em suas faces, sendo muito utilizados para gerar resultados aleatórios em jogos tradicionais de tabuleiros ou em jogos de RPG (*Role-playing game*). Considere um dado com formato de tetraedro regular, cuja soma das medidas das arestas é 12 cm. Em relação a esse dado, calcule:

a) a área lateral $3\sqrt{3}$ cm²

b) a área total $4\sqrt{3}$ cm²

Dado com formato de tetraedro.

André L. Silva/ ASC Imagens

64. Se uma pirâmide quadrangular regular tem apótema da base medindo 5 dm e altura 10 dm, então qual é a:

a) medida da aresta da base? 10 dm

b) medida do raio da circunferência que circunscreve a base? $5\sqrt{2}$ dm

c) área da base? 100 dm²

d) área total? $100\cdot(1+\sqrt{5})$ dm²

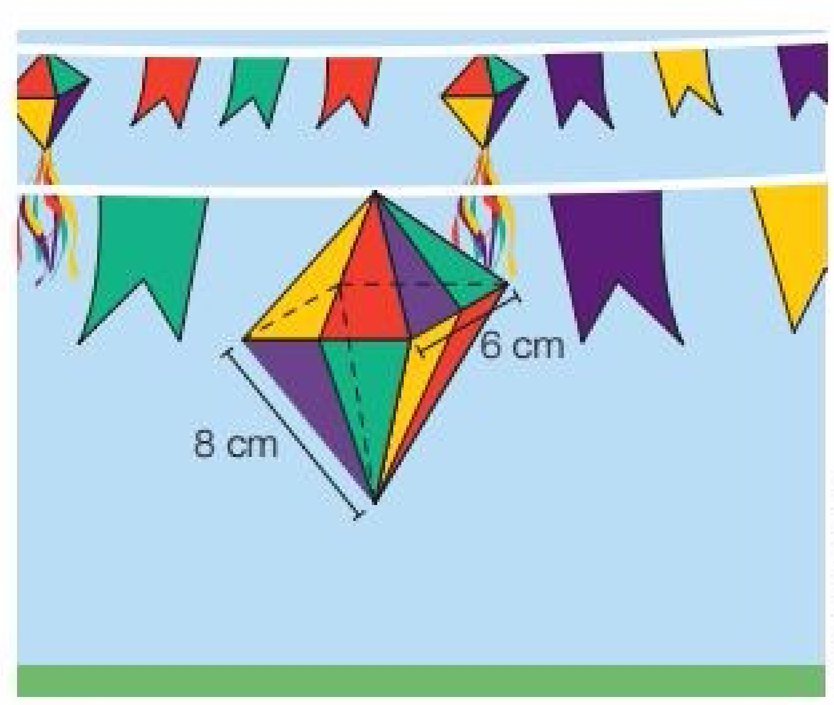
65. Considerando uma pirâmide hexagonal regular com área total de $24(4+\sqrt{3})$ cm², cuja circunferência que circunscreve a base tem raio medindo 4 cm, calcule a medida do apótema dessa pirâmide. 8 cm

66. Os incêndios causados por balões, principalmente em épocas de festa junina, causam vários prejuízos à natureza e à sociedade. Quando atingem certa altura, os balões saem do controle dos "baloeiros" e entram em correntes de ar que os levam para locais imprevisíveis, podendo cair sobre florestas, casas e até se chocar e provocar a queda de aeronaves. Esses acidentes vêm diminuindo desde 1998, quando a legislação classificou a soltura de balões como crime ambiental. Portanto, qualquer cidadão que fabricar, vender, transportar ou soltar balões que possam provocar incêndios está sujeito a pena de detenção de três anos ou multa.

Fonte de pesquisa: <www.dgst.cbmerj.rj.gov.br/modules.php?name=News&file=print&sid=246>. Acesso em: 22 fev. 2016.

Para manter a tradição, na época de festa junina, podem ser construídos balões decorativos por meio da arte do origami. Considerando um balão com formato de octaedro, feito de origami, determine quantos centímetros quadrados de papel, no mínimo, foram utilizados para encapar sua parte inferior. $12\sqrt{55}$ cm²

Esse balão pode ser decomposto em duas pirâmides regulares.



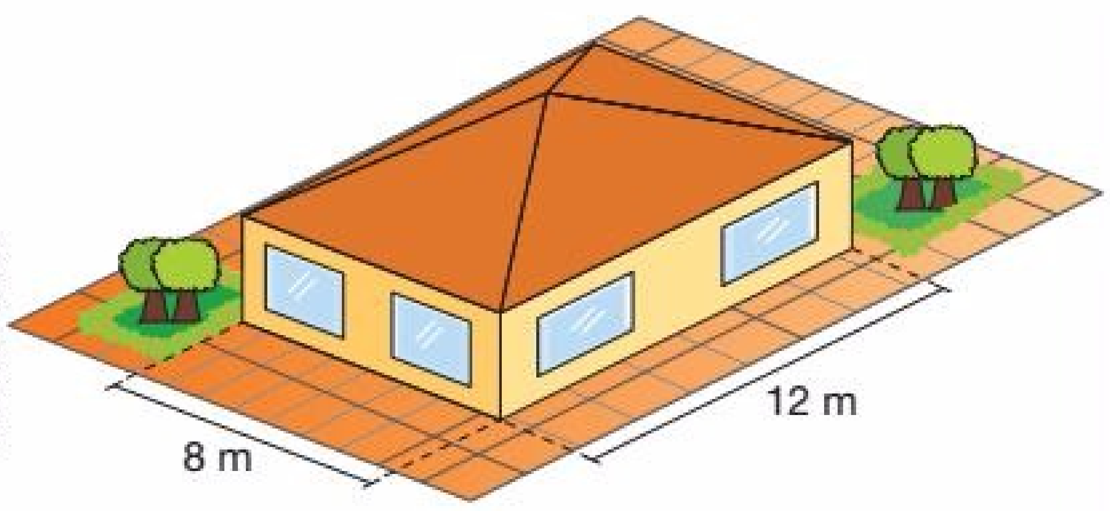
Acervo da editora

Origami: do japonês *ori*, "dobra", e *kami*, "papel". Arte tradicional japonesa de dobrar papel em formas representativas de animais, objetos e outros.

67. Em uma passeata realizada em uma grande cidade contra a poluição do ar, foram distribuídos pingentes com formato de octaedro regular (Poliedro de Platão associado ao ar). Sabendo que as arestas do octaedro tinham 1 cm, determine a área da superfície de cada pingente distribuído na passeata. $2\sqrt{3}$ cm²

68. A partir de um recorte retangular de papel de presente, com 15 cm por 25 cm, deseja-se encapar uma embalagem com formato de pirâmide quadrangular regular, cujas medidas do apótema da base e da altura são de, respectivamente, 6 cm e 8 cm. Considerando que não haverá desperdício ao encapar a embalagem, podemos concluir que sobrará ou faltará papel? Quantos centímetros quadrados? faltará; 9 cm²

69. O telhado de uma casa será construído com formato de superfície lateral de pirâmide de base quadrangular, com as arestas laterais congruentes, medindo $\sqrt{61}$ m.



Acervo da editora

Sabendo que são necessárias 16 telhas, do modelo escolhido, para cobrir 1 m² de telhado e supondo que serão desperdiçadas 195 telhas com quebras e emendas, calcule o número mínimo de telhas utilizadas na cobertura desse telhado. (Use $\sqrt{5}=2{,}2$.) 2 000 telhas

70. Para trocar a lona de um guarda-sol, uma pessoa precisa calcular quantos metros quadrados de lona irá utilizar. Sabendo que a armação a ser revestida possui forma semelhante à da superfície lateral de uma pirâmide decagonal regular, com 1 m de aresta lateral e 60 cm de aresta da base, e da superfície lateral de um prisma decagonal regular com 5 cm de altura, determine a quantidade mínima aproximada de lona necessária para revestir o guarda-sol. 3,16 m²

Acervo da editora

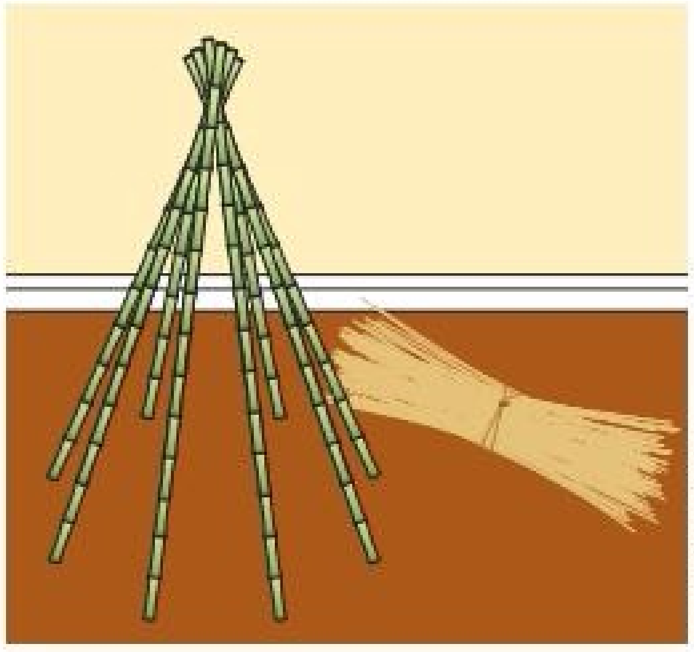
71. No dia 19 de abril de 1940, índios de várias etnias compareceram ao I Congresso Indigenista Interamericano, realizado no México, para tratar da luta de seus direitos. A partir desse ano, nessa data, passou a ser comemorado o Dia do Índio, em todo o continente americano.

Fonte de pesquisa: <www.funai.gov.br/index.php/comunicacao/noticias/1893-por-que-dia-19-e-dia-do-indio>. Acesso em: 22 fev. 2016.

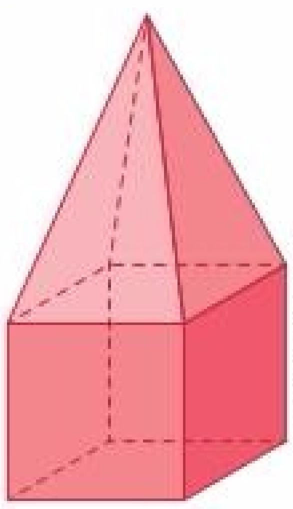

Fabio Colombini

Indígenas da tribo Barasana tocando instrumento musical, em Manaus (AM), em 2014.

Para comemorar essa data, uma escola irá promover diversas apresentações culturais sobre os costumes indígenas. Na construção de uma réplica de oca (moradia indígena), os alunos construíram uma armação de bambu, em formato de pirâmide octogonal regular, com 1 m de aresta da base e 3,5 m de aresta lateral. Sabendo que os alunos deixarão uma das faces laterais sem cobertura para ser utilizada como porta, qual é a quantidade mínima de material necessária para revestir a oca? (Utilize $\sqrt{3}=1{,}7$.)
11,9 m²


Acervo da editora

72. Uma pirâmide quadrangular regular foi construída com base sobre uma das faces de um cubo de aresta 6 cm. Sabendo que as arestas laterais da pirâmide têm medida igual à da diagonal do cubo, determine:


Acervo da editora

a) a medida do apótema da base da pirâmide 3 cm

b) a medida da altura da pirâmide $3\sqrt{10}$ cm

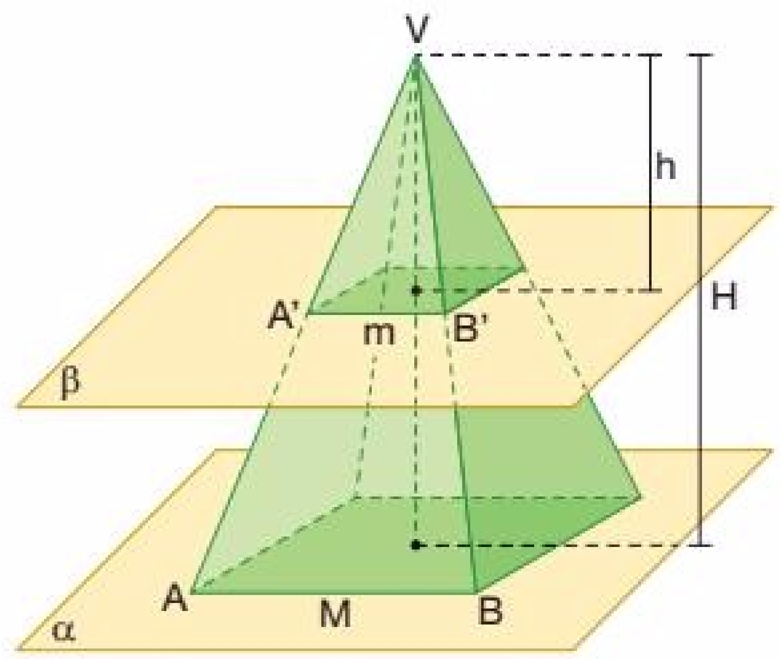
c) a área lateral da pirâmide $36\sqrt{11}$ cm²

d) a área total do sólido obtido $36\cdot(5+\sqrt{11})$ cm²

Volume de uma pirâmide

Na figura, temos uma pirâmide de base *M* apoiada em um plano α, e um plano β, paralelo a α, que determina nessa pirâmide uma região poligonal *m*, semelhante a *M*. O plano β determina também uma pirâmide menor, de altura *h* e base *m*, semelhante à pirâmide maior, de altura *H* e base *M*.

As regiões poligonais *M* e *m* são semelhantes, pois possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

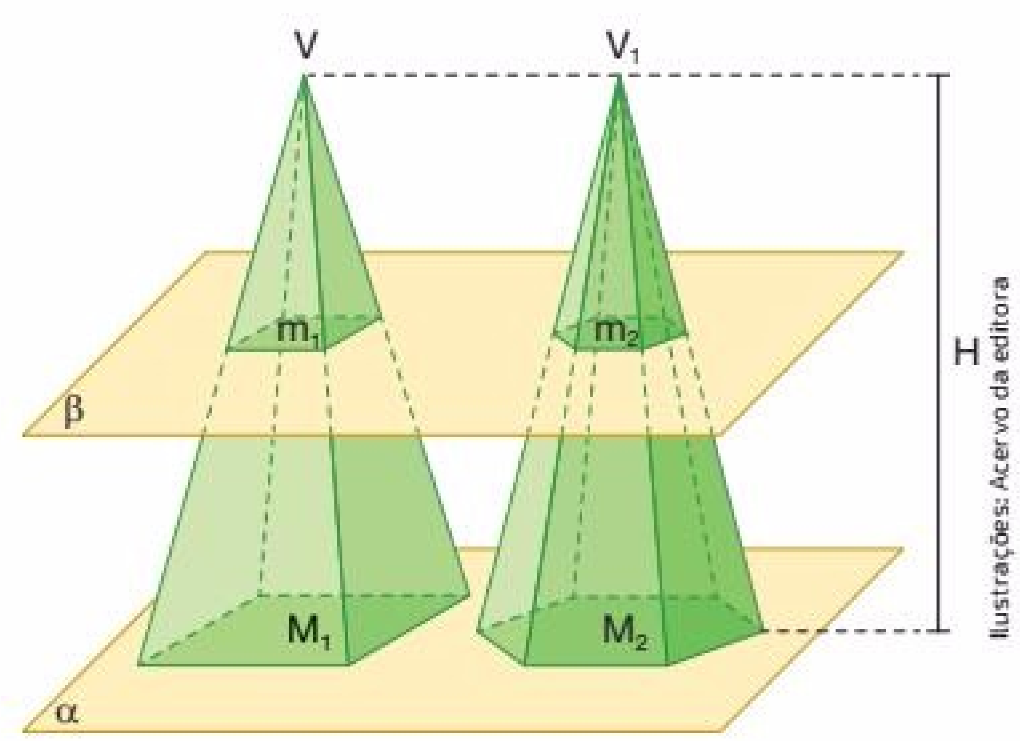


Como já foi estudado anteriormente, se a razão de semelhança entre duas figuras semelhantes é dada por *k*, então a razão de semelhança entre as suas áreas é dada por k^2. No caso da figura apresentada, temos que *k* é a razão entre as alturas *H* e *h* das pirâmides, isto é, se $k = \frac{H}{h}$, então $k^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2$. Logo, se *M* e *m* são semelhantes, temos $\frac{\text{área de M}}{\text{área de m}} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$.

Agora, utilizando esses conceitos, demonstraremos o seguinte teorema:

> Pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura têm o mesmo volume.

Para isso, consideramos duas pirâmides apoiadas em um plano horizontal α, ambas de altura *H* e bases com áreas iguais. Considere também um plano β, paralelo a α, que determina duas regiões planas.



Vimos anteriormente que $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } m_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } m_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$.

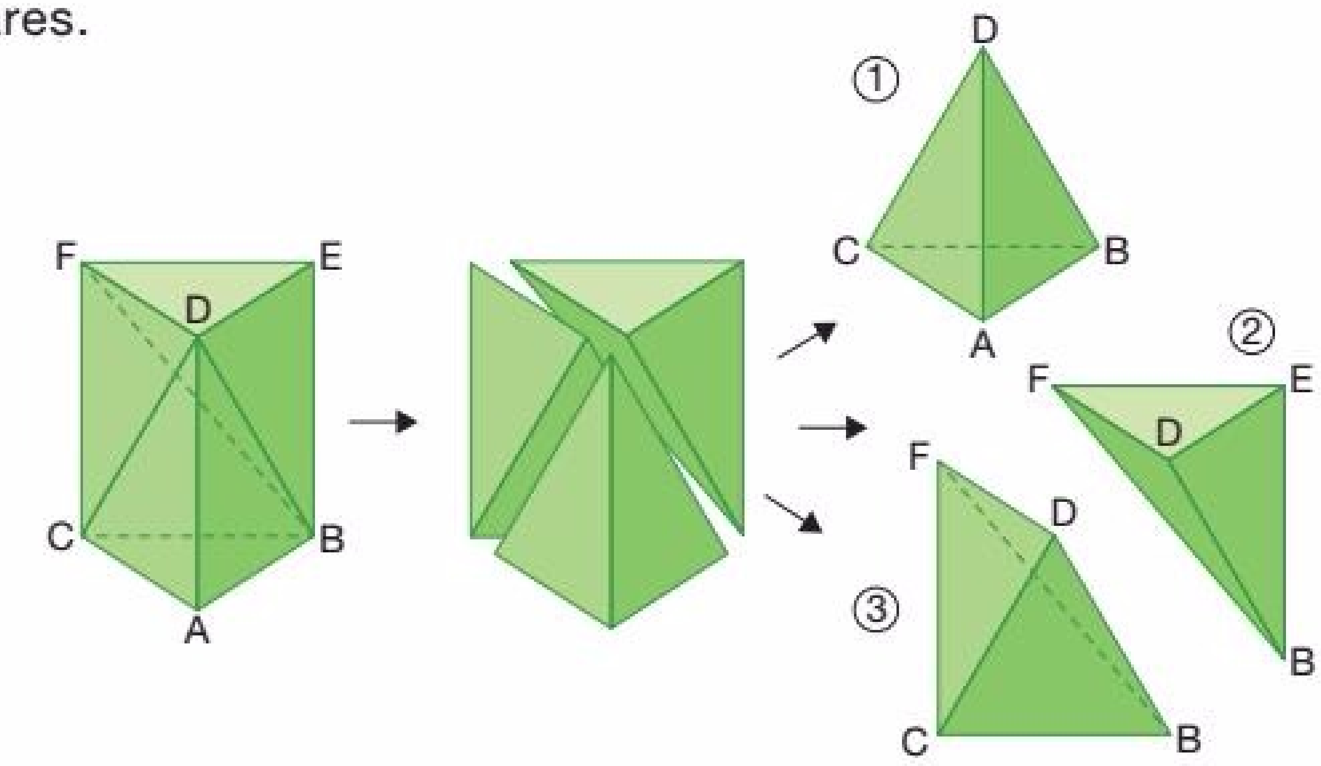
Dessa maneira, $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } m_1} = \frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } m_2}$.

Como a área de M_1 é igual à área de M_2, temos que a área de m_1 é igual à área de m_2, para qualquer plano β paralelo a α.

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, se todo plano paralelo a α determina regiões planas de mesma área nas duas pirâmides, então os volumes das pirâmides são iguais.

Volume de uma pirâmide qualquer

Obtemos o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, consideramos um prisma de base triangular e o decompomos em três pirâmides triangulares.



Ilustrações: Acervo da editora

Podemos notar que as pirâmides **1** e **2** possuem bases congruentes $(\Delta ABC \equiv \Delta DEF)$ e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides **1** e **2** possuem o mesmo volume.

Note também que as bases das pirâmides **2** e **3** também são congruentes $(\Delta BEF \equiv \Delta BFC)$ e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto *D* ao paralelogramo BEFC. Assim, as pirâmides **2** e **3** possuem o mesmo volume.

Portanto, as pirâmides **1**, **2** e **3** possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$.

Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$ e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Note que o volume da pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma.

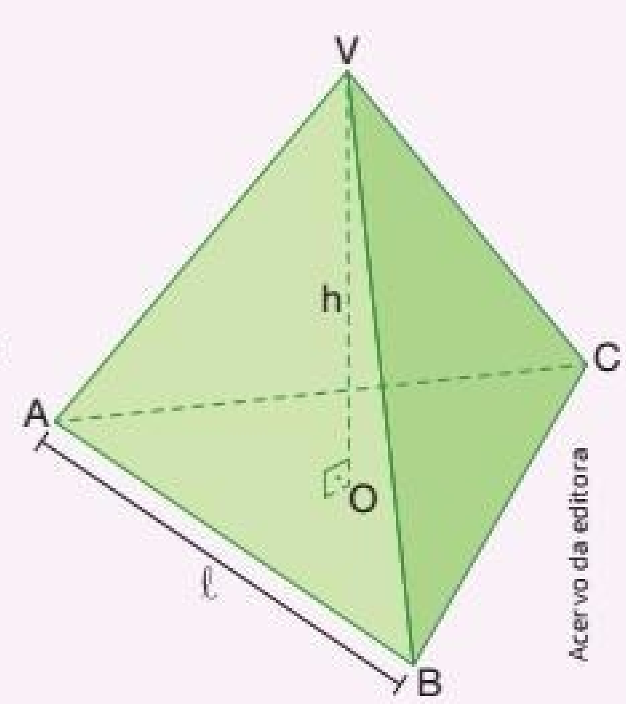
Estudamos anteriormente que o volume do prisma é dado por $V_{prisma} = A_b \cdot h$. Assim:

$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Com essa fórmula, é possível calcular o volume de uma pirâmide qualquer, e não somente de pirâmides triangulares. Isso pode ser garantido pelo Princípio de Cavalieri, visto que pirâmides com áreas das bases iguais e de mesma altura possuem volumes iguais.

Atividades resolvidas

R8. Calcule o volume do tetraedro regular ao lado, sabendo que $h = 12\sqrt{2}$ cm e $\ell = 12\sqrt{3}$ cm.



Acervo da editora

Resolução

A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.
Desse modo, o volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot h}{3} = \frac{\frac{(12\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} = \frac{\frac{432\sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} =$$

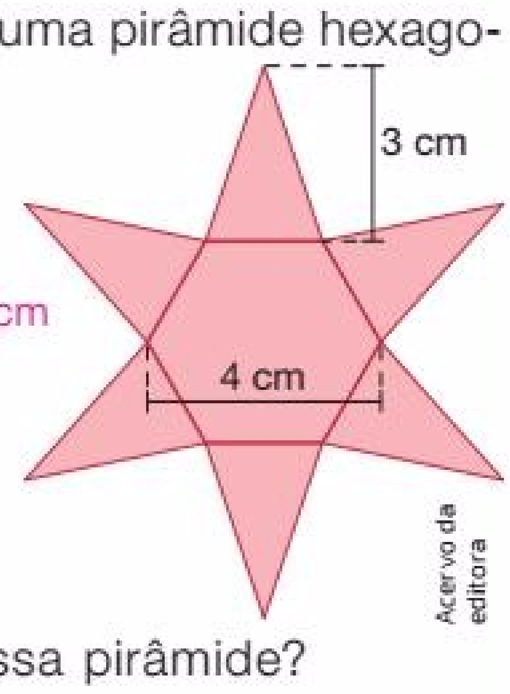
$$= 432\sqrt{6} \longrightarrow \boxed{V = 432\sqrt{6}\ \text{cm}^3}$$

Pode-se demonstrar que o volume de um tetraedro regular de aresta ℓ é dado por $V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$.

73. Uma pirâmide quadrangular regular possui 12 m de aresta da base e 8 m de altura. Se for realizada uma seção transversal paralelamente à sua base, à distância de 6 m, qual será o volume da pirâmide menor obtida? $6\ m^3$

74. O volume de uma pirâmide de 5 cm de altura é $20\ cm^3$. Sabendo que o polígono correspondente à base dessa pirâmide é um retângulo, determine todas as possíveis medidas inteiras, em centímetros, que as arestas da base podem ter. 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm

75. Observe a planificação de uma pirâmide hexagonal regular.



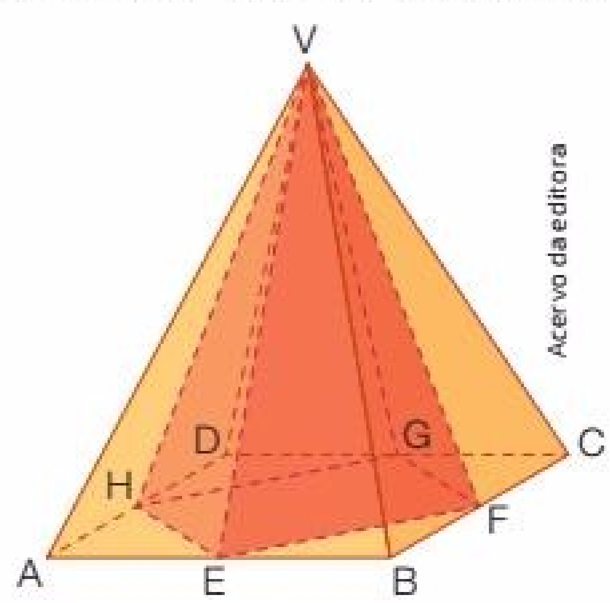
Acervo da editora

a) Determine a medida do:
- apótema da pirâmide 3 cm
- apótema da base $\sqrt{3}$ cm

b) Calcule a área:
- da base $6\sqrt{3}\ cm^2$
- total $6\cdot(3+\sqrt{3})\ cm^2$

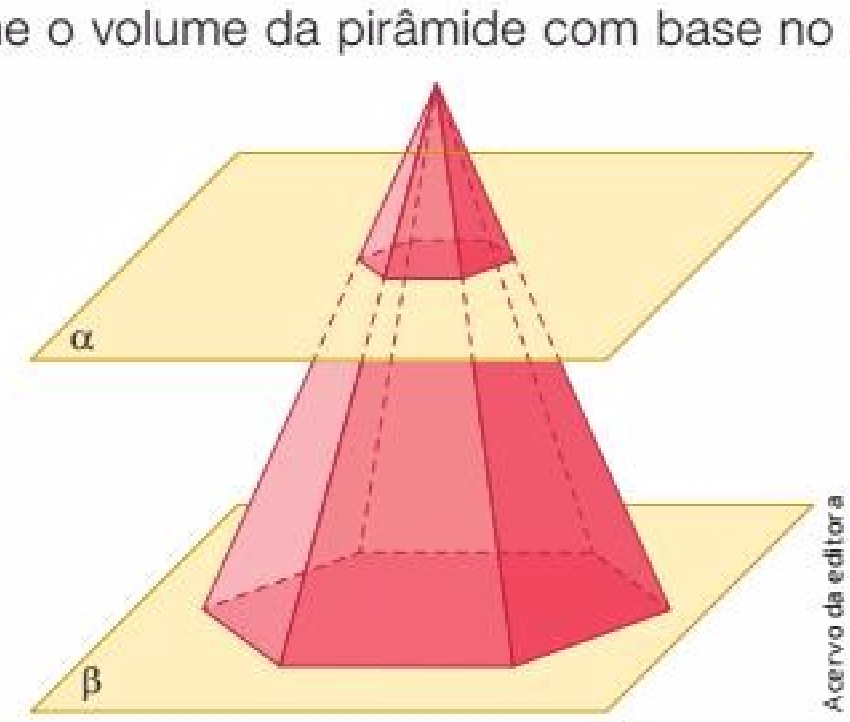
c) Quando construída, qual será o volume dessa pirâmide? $6\sqrt{2}\ cm^3$

76. Considere a pirâmide quadrangular de vértices *A*, *B*, *C*, *D* e *V*, com altura *h*, cuja base é um retângulo com as medidas AB = a e BC = b. Sabendo que os pontos *E*, *F*, *G* e *H* são coincidentes aos pontos médios das arestas da base da pirâmide ABCDV, calcule a razão entre os volumes das pirâmides EFGHV e ABCDV. $\frac{1}{2}$



Acervo da editora

77. O volume da pirâmide hexagonal regular, cuja aresta da base mede 4 cm e cuja base está contida no plano β, é $72\sqrt{3}\ cm^3$. Sabendo que a razão entre as alturas das pirâmides com base no plano α e com base no plano β é $\frac{1}{3}$, determine o volume da pirâmide com base no plano α. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\ cm^3$



Acervo da editora

78. Para ostentar a grandiosidade de seu reino, o rei de uma antiga civilização ordenou a construção de uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado 50 m e a altura é 60 m. Em média, para construir uma parte da pirâmide equivalente a $500\ m^3$, os trabalhadores levaram cerca de 1 mês. De acordo com essa média, quanto tempo foi necessário para a conclusão da obra? 8 anos e 4 meses

79. Geralmente encontrado em aluviões e em veios de quartzo associados a rochas intrusivas ácidas, o ouro cristaliza-se em forma de cubos e octaedros, mas o mais comum é encontrá-lo na forma de escamas, fios irregulares ou pepitas (massas irregulares).

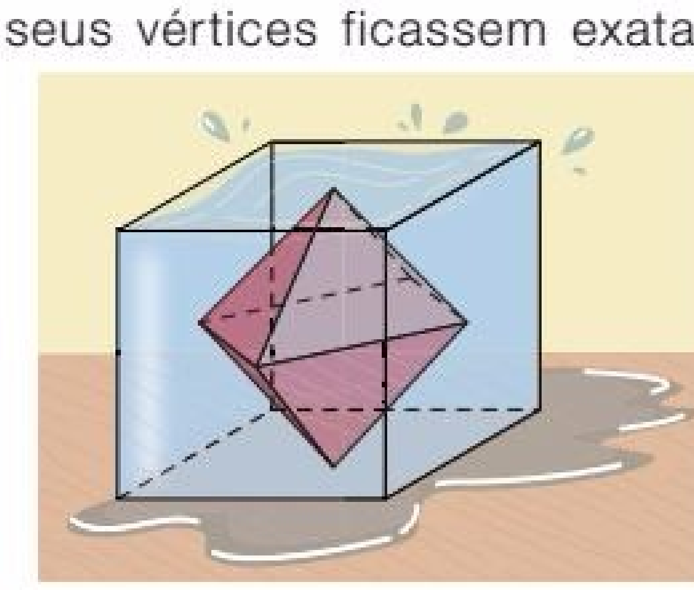

ouro

Sérgio Dotta Jr/The Next

Se necessário, lembre aos alunos que a densidade é a razão entre a massa e o volume.

Sabendo que a densidade do ouro é de $19{,}3\ g/cm^3$, determine a massa de uma pedra de ouro que possui formato de octaedro regular, com arestas medindo 3 cm. (Utilize $\sqrt{2}=1{,}4$.) 243,18 g

80. Dentro de uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, totalmente cheia de água, foi colocado um sólido maciço com a forma de um octaedro regular, de maneira que seus vértices ficassem exatamente nos centros das faces da caixa cúbica, fazendo parte da água derramar para fora da caixa. Observe a figura.


Acervo da editora

a) Qual é a área da superfície externa desse octaedro? $400\sqrt{3}\ cm^2$

b) Calcule o volume de água, em litros, que permaneceu na caixa após o sólido ser colocado em seu interior. $\frac{20}{3}$ L

81. Considerando uma pirâmide hexagonal regular de volume $384\ cm^3$ e área da base $96\sqrt{3}\ cm^2$, calcule o valor do apótema dessa pirâmide. $4\sqrt{6}$ cm

82. **Desafio**

Qual é o volume de um tetraedro regular que possui uma de suas faces inscrita em uma circunferência de raio 10 dm? $250\sqrt{6}\ dm^3$

Tronco de pirâmide reta

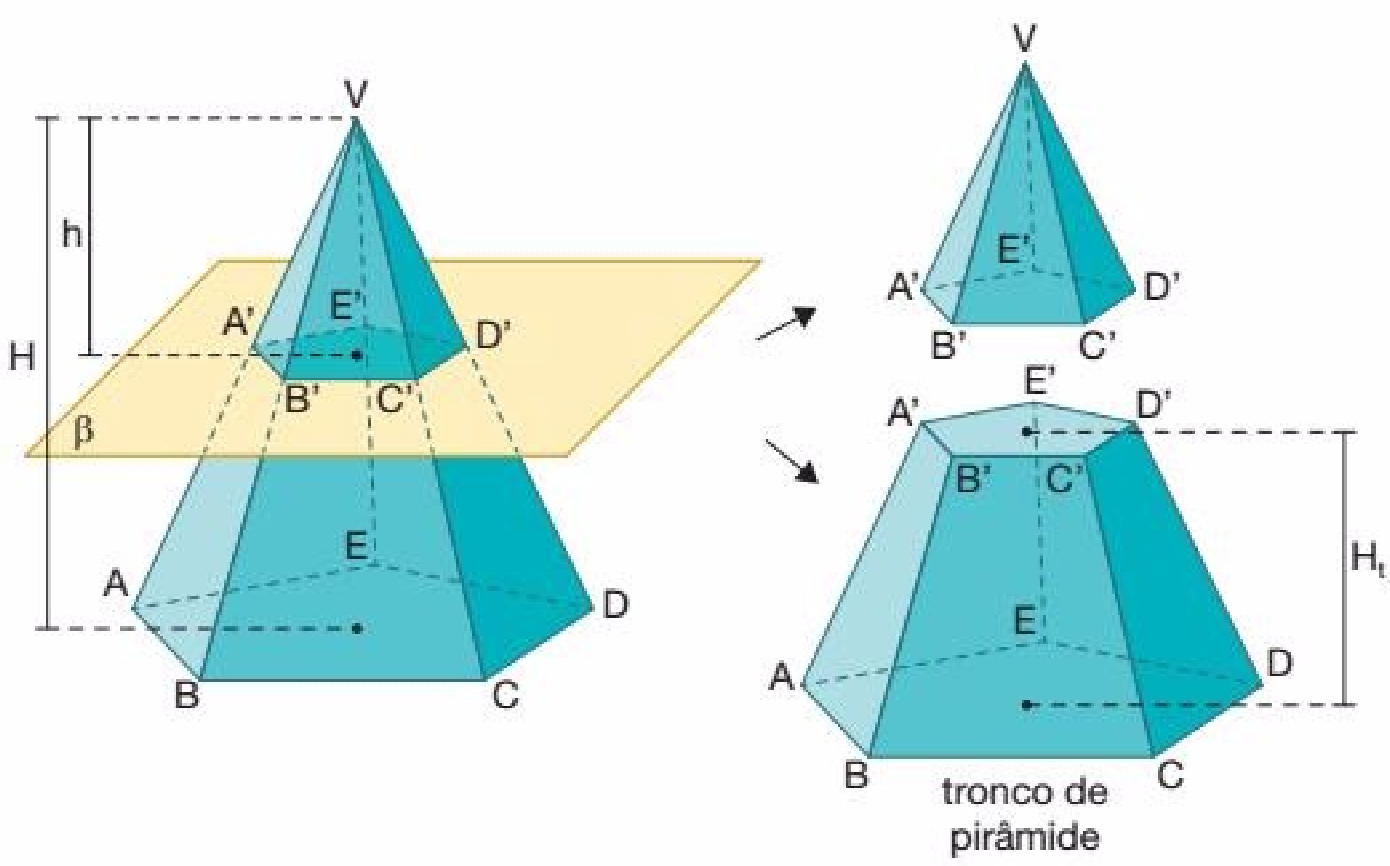
Na península de Yucatán – México – podem ser encontradas muitas ruínas da antiga civilização maia. Dentre suas construções está a Pirâmide de Kukulkán, uma das mais visitadas por turistas atualmente, localizada na cidade de Chichén-Itzá. Com 27 m de altura, essa edificação, que se assemelha ao que chamamos tronco de pirâmide, possui quatro escadarias com 91 degraus cada e um patamar de chegada no topo. Se adicionarmos o número de degraus e o patamar, obteremos 365, que corresponde ao número de dias do ano no calendário maia.

Fonte de pesquisa: <http://revistagalileu.globo.com/EditoraGlobo/componentes/article/edg_article_print/0,3916,1045103-1719-1,00.html>. Acesso em: 22 fev. 2016.

eXpose/Shutterstock.com

Pirâmide de Kukulkán, em Chichén-Itzá, México, em 2015.

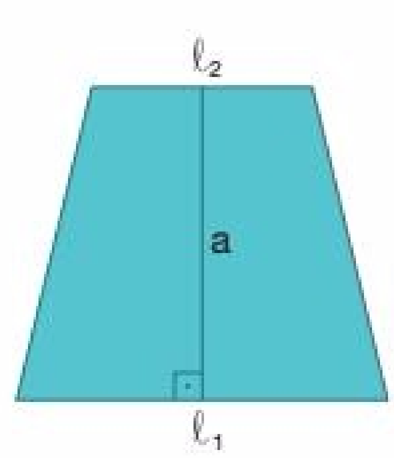
Na figura a seguir, temos uma pirâmide pentagonal de vértice V e altura H, e um plano β, paralelo à base. Esse plano determina uma pirâmide menor de altura h e um poliedro denominado **tronco de pirâmide**.



Em um tronco de pirâmide, podemos destacar os seguintes elementos:

- A **base maior** é a região poligonal ABCDE.
- A **base menor** é a região poligonal A'B'C'D'E'.
- Os trapézios ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D' e AEE'A' são as **faces laterais**.
- A distância H_t, entre a base maior e a base menor, corresponde à **altura** do tronco de pirâmide.

Dizemos que um tronco de pirâmide é regular se este é obtido a partir de uma pirâmide regular. Nesse caso, as bases são polígonos regulares semelhantes e as faces laterais são trapézios isósceles congruentes. Além disso, a altura de uma face lateral é chamada **apótema do tronco** (a).



Ilustrações: Acervo da editora

a: apótema do tronco
ℓ_1: aresta da base maior
ℓ_2: aresta da base menor

Área da superfície de um tronco de pirâmide reta

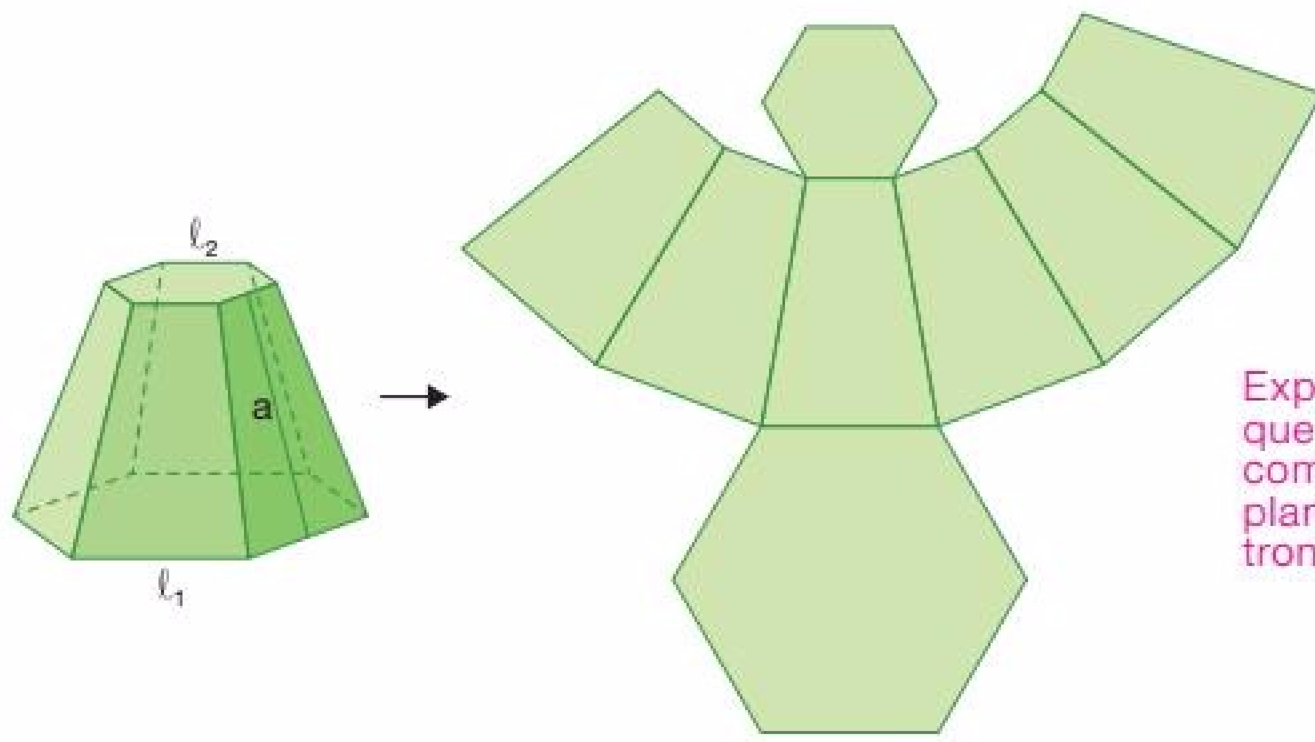
Assim como os prismas e as pirâmides, temos em um tronco de pirâmide que:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a **área lateral** do tronco (A_ℓ).
- a **área da base maior** corresponde à área do polígono que constitui a base maior do tronco (A_B), e a **área da base menor**, à área do polígono que constitui a base menor (A_b).
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a **área total do tronco** (A_t).

Assim, a área total de um tronco de pirâmide corresponde à área lateral mais a área das bases, isto é:

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B$$

Veja na imagem a representação de um tronco de pirâmide regular e sua planificação.



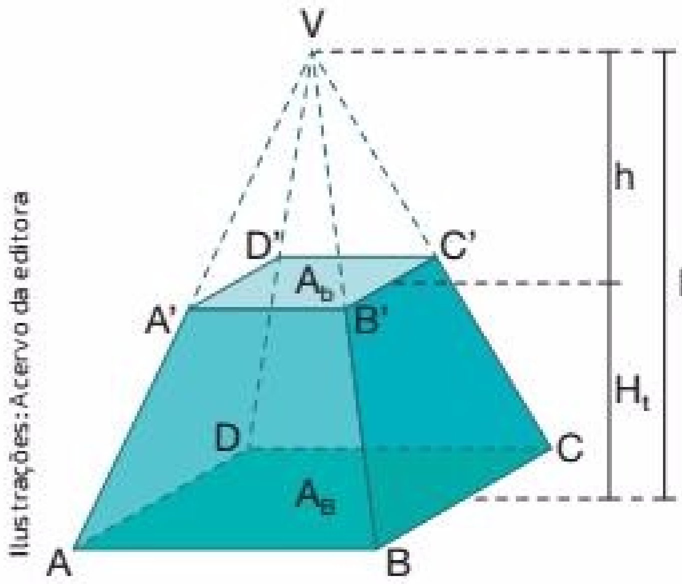
Explique aos alunos que é possível compor outras planificações deste tronco de pirâmide.

Nesse caso, a área total do tronco é dada pela área lateral, que corresponde a seis vezes a área de uma face lateral (trapézio isósceles) mais a área das bases (hexágonos regulares):

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{6\cdot\frac{(\ell_1+\ell_2)\cdot a}{2}} + \underbrace{A_b}_{6\cdot\frac{\ell_2^2\cdot\sqrt{3}}{4}} + \underbrace{A_B}_{6\cdot\frac{\ell_1^2\cdot\sqrt{3}}{4}} = 6\cdot\frac{(\ell_1+\ell_2)\cdot a}{2} + 6\cdot\frac{\ell_2^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 6\cdot\frac{\ell_1^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

Volume de um tronco de pirâmide reta

Na imagem está representado um tronco de pirâmide. Para obter o volume desse tronco, podemos calcular a diferença entre os volumes das pirâmides VABCD e VA'B'C'D', isto é:



A_B: área da base maior
A_b: área da base menor
H: altura da pirâmide VABCD
h: altura da pirâmide VA'B'C'D'
H_t: altura do tronco

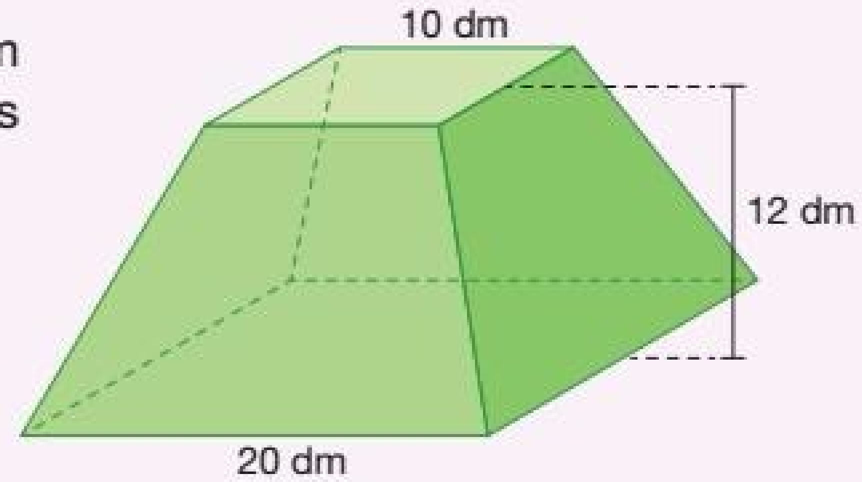
$$V_{tronco} = V_{VABCD} - V_{VA'B'C'D'} = \frac{A_B\cdot H}{3} - \frac{A_b\cdot h}{3} = \frac{A_B\cdot H - \mathbf{A}_b\cdot h}{3}$$

Desenvolvendo essa igualdade, deduzimos a fórmula do volume de um tronco de pirâmide, que é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3}\cdot\left(\sqrt{A_b\cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

Atividades resolvidas

R9. Um tronco de pirâmide reta de altura 12 dm tem como bases duas regiões quadradas de lados 10 dm e 20 dm, conforme segue.



Em relação ao tronco, calcule a área:

a) da base menor
b) da base maior
c) lateral
d) total

Resolução

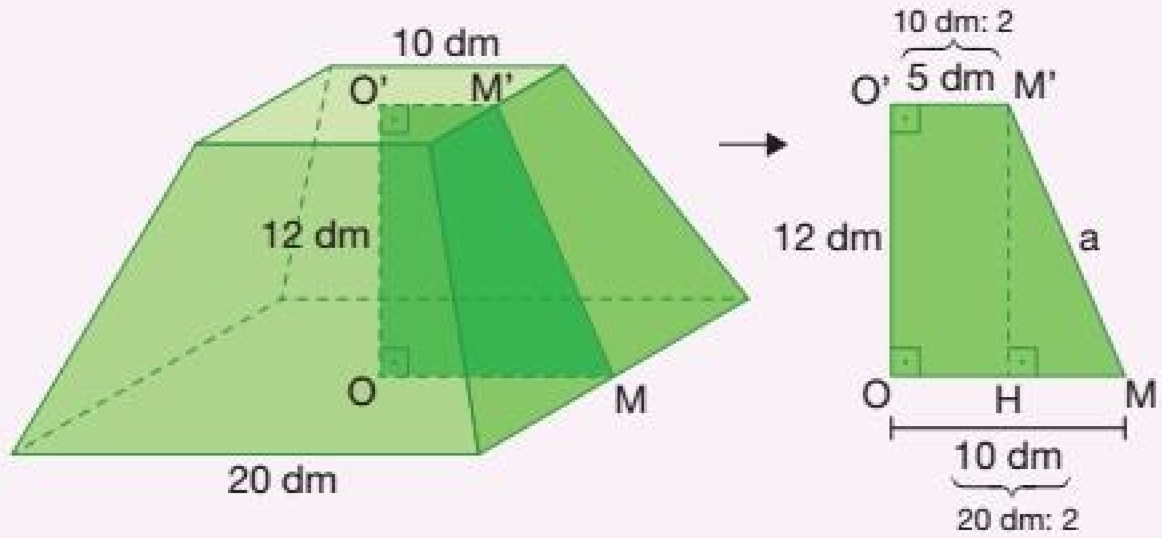
a) A base menor é um quadrado de lado 10 dm. Logo:

$$A_b = 10^2 = 100 \rightarrow \boxed{100\ dm^2}$$

b) A base maior é um quadrado de lado 20 dm. Logo:

$$A_B = 20^2 = 400 \rightarrow \boxed{400\ dm^2}$$

c) As faces laterais são trapézios isósceles congruentes de bases 10 dm e 20 dm, cuja altura é o apótema do tronco. Calculamos a medida do apótema do tronco aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.



Ilustrações: Acervo da editora

$$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$$

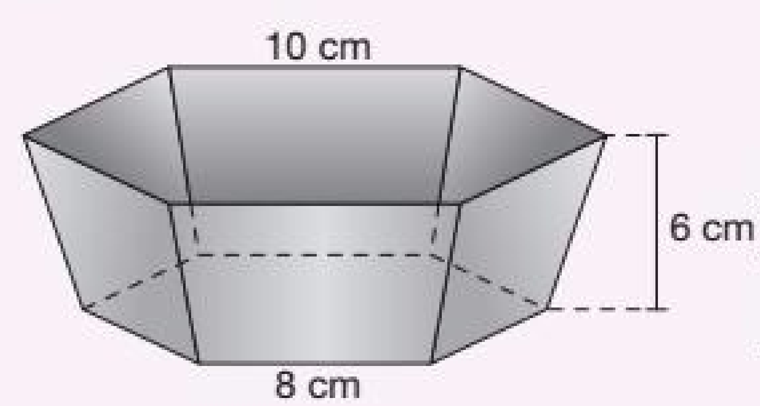
Como a área lateral é a reunião dos quatro trapézios, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(\ell_1 + \ell_2) \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{(20+10) \cdot 13}{2} = 780 \rightarrow \boxed{780\ dm^2}$$

d) A área total é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B = 780 + 100 + 400 = 1\,280 \rightarrow \boxed{1\,280\ dm^2}$$

R10. Uma forma de alumínio tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal regular, conforme a figura. Qual é a capacidade, em litros, dessa forma? (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



Acervo da editora

Resolução

As bases são hexágonos regulares de lados 10 cm e 8 cm. Sendo A_B e A_b as áreas das bases maior (superior) e menor (inferior), temos:

$$A_B = 6 \cdot \frac{\ell_1^{\,2}\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \qquad A_b = 6 \cdot \frac{\ell_2^{\,2}\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Segue que o volume do tronco é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) = \frac{6}{3} \cdot \left(\sqrt{96\sqrt{3} \cdot 150\sqrt{3}} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) =$$

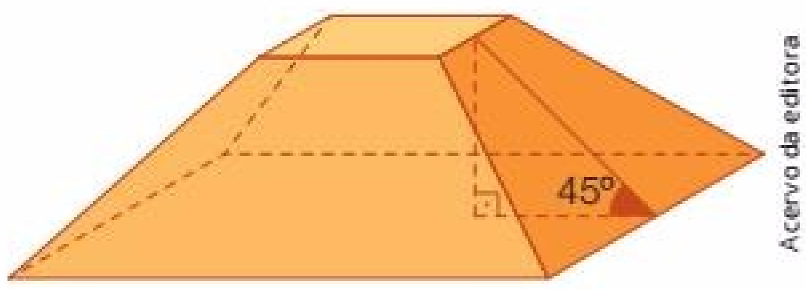
$$= 2 \cdot \left(120\sqrt{3} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) = 2 \cdot 366\sqrt{3} = 732\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}7} = 732 \cdot 1{,}7 = 1\,244{,}4 \rightarrow 1\,244{,}4\ cm^3$$

Como $1\ L = 1\,000\ cm^3$, temos que:

$$\frac{1000}{1\,244{,}4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1\,244{,}4}{1\,000} \Rightarrow x = 1{,}2444 \rightarrow \boxed{1{,}2444\ L}$$

83. Dois triângulos equiláteros, um com lados medindo 9 m e outro com lados medindo 3 m, são as bases de um tronco de pirâmide reta de aresta lateral 5 m. Calcule a área total desse tronco de pirâmide. $9\cdot\left(8+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{m}^2$

84. Um tronco de pirâmide quadrangular regular possui diagonal da base maior com medida $12\sqrt{2}$ cm e aresta da base menor com medida 4 cm.



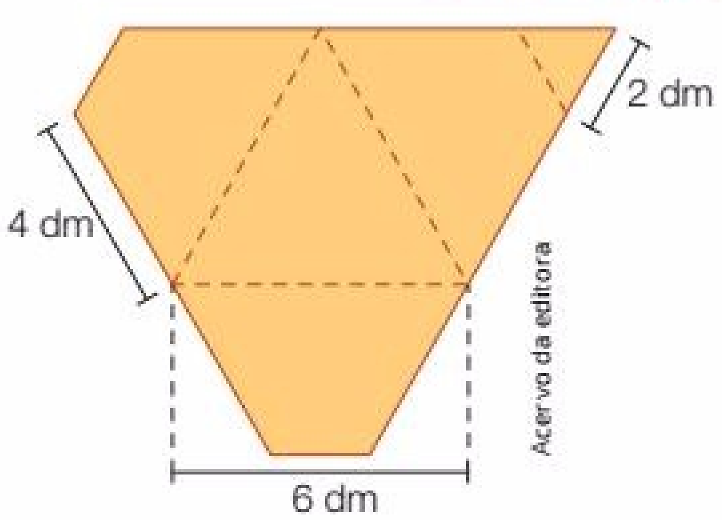
A partir das informações apresentadas, determine a:

a) altura do tronco da pirâmide 4 cm

b) área lateral $128\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

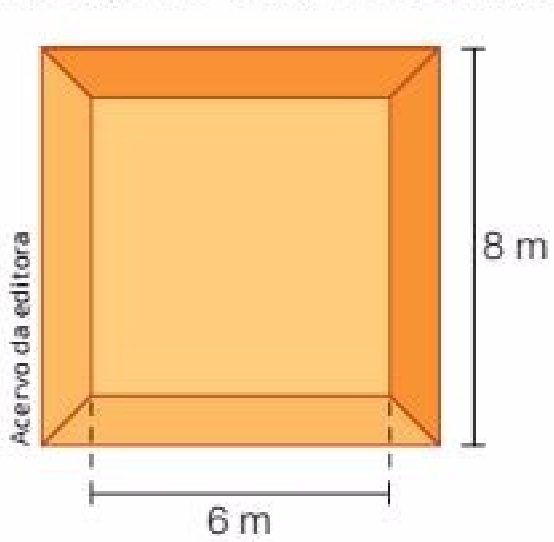
c) área total $32\cdot\left(4\sqrt{2}+5\right)\ \text{cm}^2$

85. A figura corresponde à planificação de um tronco de pirâmide reta, cuja base é um triângulo equilátero. Qual é a área lateral desse tronco de pirâmide? E a área total? $24\sqrt{3}\ \text{dm}^2$; $34\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

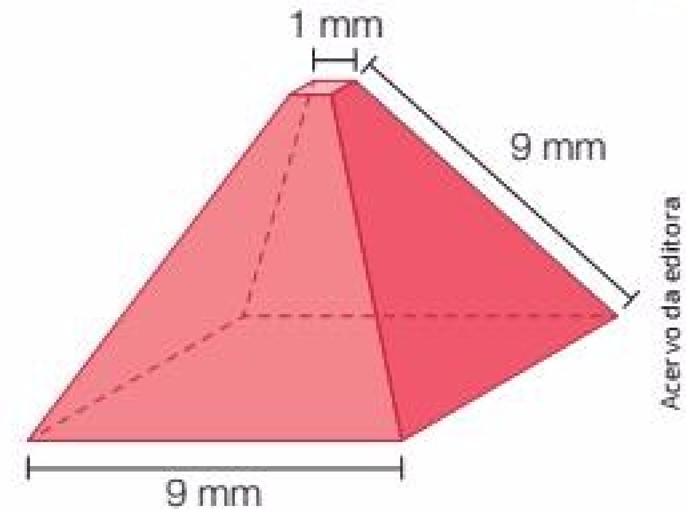


86. Sabendo que a área total de um tronco de pirâmide hexagonal regular é de $924\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ e que as áreas da base menor e maior medem, respectivamente, $150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ e $384\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, quais são as medidas das arestas da base maior, das arestas da base menor e da altura desse tronco de pirâmide? 16 cm, 10 cm e $4\sqrt{3}$ cm

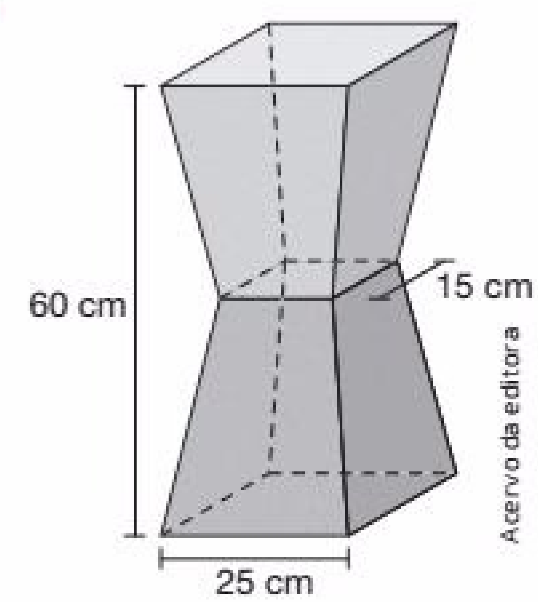
87. Observando a figura, que ilustra a vista superior de um tronco de pirâmide de base quadrangular regular, e sabendo que a aresta lateral do tronco da pirâmide mede 3 m, determine sua área total. $4\cdot\left(25+14\sqrt{2}\right)\ \text{m}^2$



88. Considere o tronco de pirâmide de base quadrangular regular representado a seguir. Qual é o volume desse tronco de pirâmide? $\dfrac{637}{3}\ \text{mm}^3$



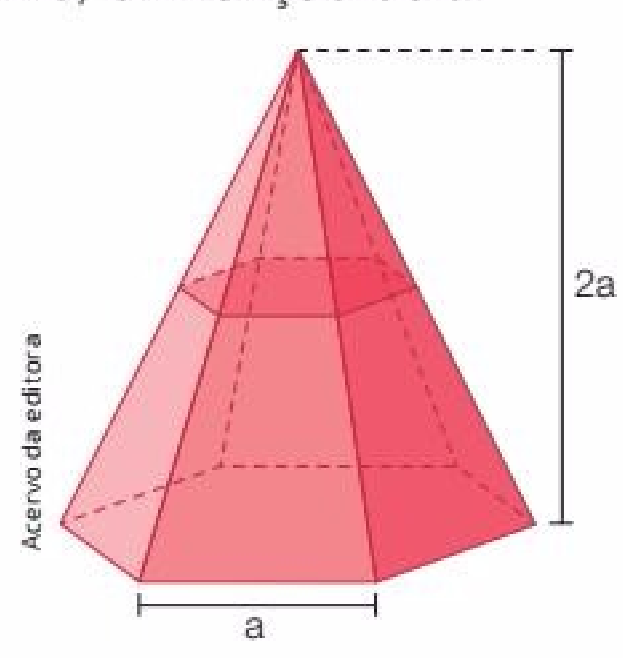
89. Calcule o volume de concreto necessário para construir uma banqueta maciça, composta de dois troncos congruentes de pirâmide quadrangular regular sobrepostos pelas bases menores. $24\,500\ \text{cm}^3$



90. Em um tronco de pirâmide pentagonal regular, os raios das circunferências que circunscrevem as bases têm 3 cm e 5 cm. Sabendo também que as áreas das bases maior e menor são, respectivamente, $60\ \text{cm}^2$ e $21\ \text{cm}^2$, e que o volume é $6\left(2\sqrt{35}+27\right)\ \text{cm}^3$, determine a aresta lateral desse tronco de pirâmide. $2\sqrt{10}$ cm

91. Uma pirâmide hexagonal regular foi secionada por um plano paralelo à base, de modo que o tronco da pirâmide e a pirâmide, obtidos após a seção, possuíssem a mesma altura.

Determine, em função de *a*:



a) a área da base da pirâmide obtida $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

b) o volume da pirâmide obtida $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) o volume do tronco de pirâmide obtido $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

92. Em 1932, entre os meses de julho e outubro, ocorreu no Brasil o movimento armado conhecido como Revolução Constitucionalista, que visava à derrubada do governo provisório de Getúlio Vargas e a instituição de um regime constitucional. Em homenagem aos heróis dessa revolução, foi construído, na cidade de São Paulo – em mármore travertino –, o Monumento ao Soldado Constitucionalista, mais conhecido como obelisco do Ibirapuera, cujo formato lembra um tronco de pirâmide quadrangular regular. Em seu interior existe um mausoléu que guarda as cinzas dos estudantes Martins, Miragaia, Drausio e Camargo, mortos em combate, cujas iniciais MMDC formam a sigla usada como símbolo da revolução. A cripta também abriga as cinzas de outros ex-combatentes.

A obra, do escultor italiano Galileo Ugo Emendabili, começou a ser construída em 1947, e foi concluída apenas no ano de 1970. Das sepulturas, no subsolo, até o topo, são 81 m; a altura do obelisco é 72 m; a aresta da base maior possui 9 m; e a aresta da base menor, 7 m.

Fonte de pesquisa: <www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/cultura/patrimonio_historico/adote_obra/index.php?p=4524>. Acesso em: 22 fev. 2016.

Aleksandar Todorovic/Shutterstock.com

Obelisco do Ibirapuera, em 2015.

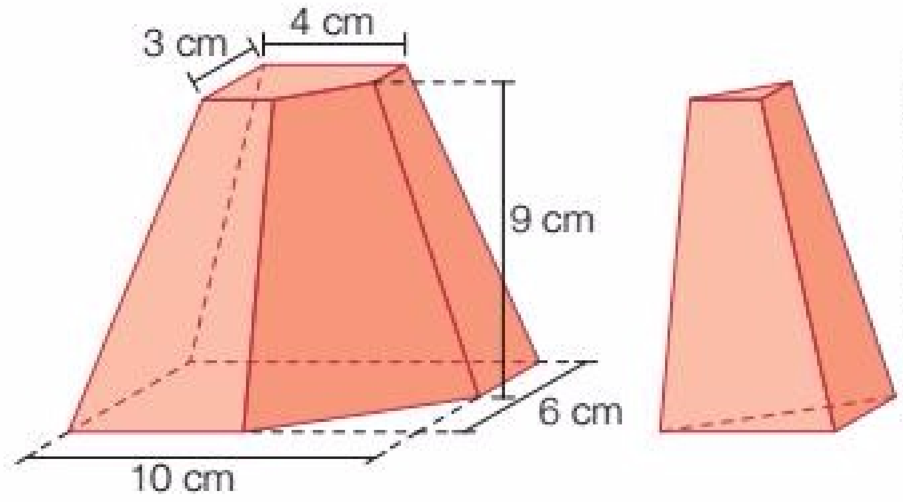
Cripta: dependência subterrânea utilizada para sepultamentos.

a) Qual é a altura do subsolo do monumento? 9 m

b) Que quantidade de material seria necessária para construir uma réplica maciça do obelisco (desconsiderando o subsolo) com 10% das dimensões originais? $4{,}632\ m^3$

c) Junte-se a um colega e faça uma pesquisa sobre a Revolução Constitucionalista de 1932. Em seguida, apresentem à turma os resultados. Resposta pessoal.

93. Um tronco de pirâmide reta, cujas bases são retângulos, foi secionado por um plano nos pontos médios de duas arestas da base menor e duas da base maior, como representado na figura.



Ilustrações: Acervo da editora

a) Determine a soma das áreas das bases do tronco de pirâmide maior, obtido após a seção. $63\ cm^2$

b) Qual era o volume do tronco da pirâmide antes da seção? $36 \cdot (\sqrt{5}+6)\ cm^3$

c) Calcule o volume do tronco de pirâmide menor obtido após a seção. $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+3\right)\ cm^3$

94. A premiação de um torneio de tênis será realizada com troféus construídos a partir de materiais reciclados. A base desse troféu terá formato de tronco de pirâmide hexagonal regular maciça, e sua matéria-prima será o plástico.

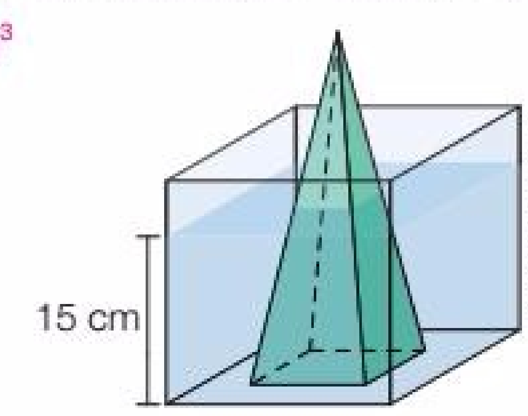
Qual será o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu? $114\sqrt{3}\ cm^3$

Acervo da editora

95. Certo reservatório de 3 m de altura possui formato de tronco de pirâmide triangular regular com as arestas internas das bases maior e menor medindo, respectivamente, 2 m e 1 m. Quantos litros, no máximo, esse reservatório é capaz de armazenar? (Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$.) 2 975 L

96. Desafio

Em um tanque cúbico de 20 cm de aresta, contendo certo tipo de líquido, foi inserida uma pirâmide de 30 cm de altura, com a base apoiada no fundo do tanque, o que elevou o nível do líquido em 4 cm. Determine o volume dessa pirâmide. $\frac{12\,800}{7}\ cm^3$



Acervo da editora

Capítulo 8

Não poliedros

O início da utilização de embalagens ocorreu em tempos primitivos.

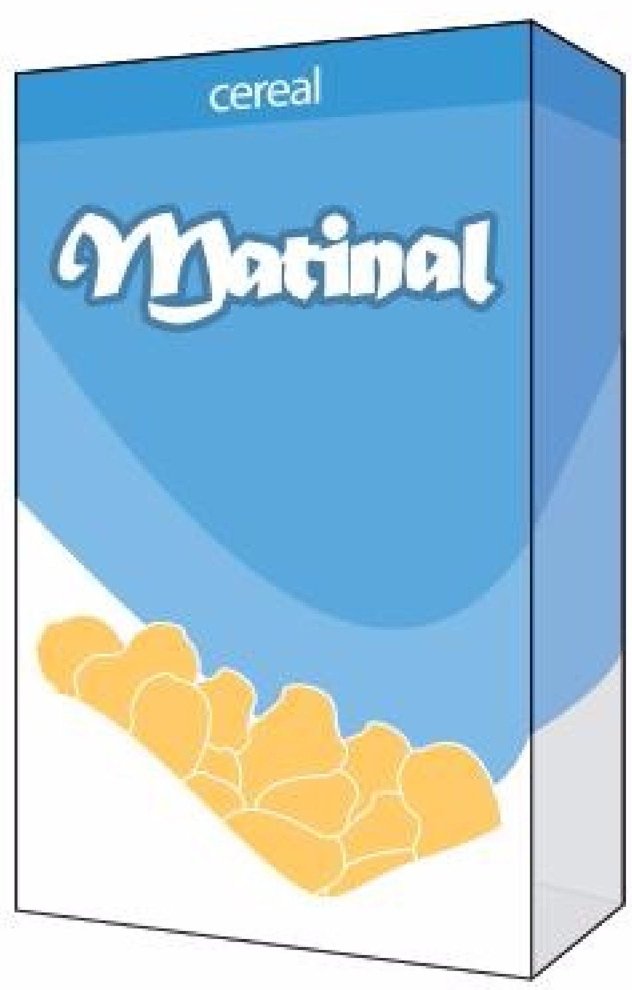
Atualmente, as embalagens não têm somente a finalidade de armazenar os produtos, mas também de manter as suas propriedades originais (sabor, aroma, qualidade etc.), facilitar seu armazenamento e transporte, e até mesmo conquistar o consumidor. As formas das embalagens são as mais diversas, elaboradas, de maneira geral, a partir de critérios como custo, estética, *marketing* e especificações da legislação.

Para contribuir ambientalmente, os fabricantes procuram produzir embalagens reduzindo o consumo de recursos naturais, aprimorando e reciclando materiais. Além disso, as embalagens que podem ser recicladas apresentam um símbolo permitindo o descarte e o encaminhamento correto para a indústria recicladora.

Os nomes dos produtos que aparecem nesta página são fictícios.

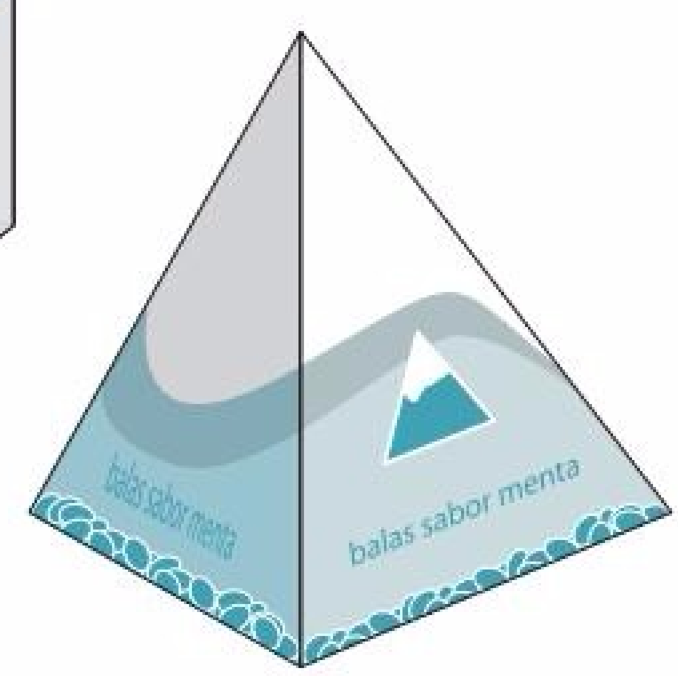
lata de suco


frasco de perfume



caixa de cereal matinal

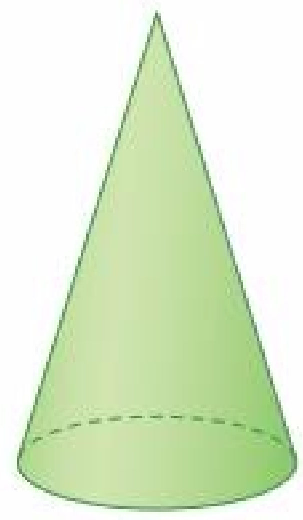
cone de sorvete

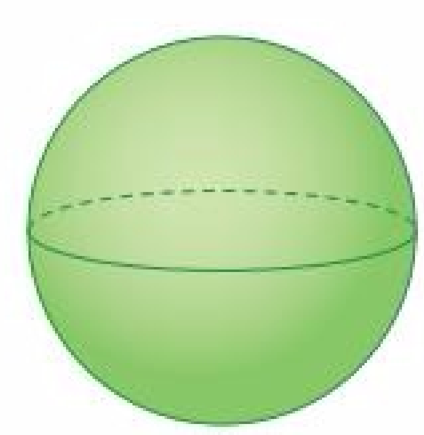


caixa de balas

Entre as embalagens apresentadas acima, as de suco, sorvete e perfume lembram, respectivamente, um cilindro, um cone e uma esfera, que são formas geométricas espaciais não poliédricas e serão estudadas em seguida.


cilindro


cone


esfera

Ilustrações: Acervo da editora

Cilindro

No dia a dia nos deparamos com diversos objetos cuja forma lembra a do cilindro, sendo necessário em certos casos conhecer algumas de suas características, como a quantidade de material necessário para a sua construção ou sua capacidade de armazenamento.


Thaís Falcão

lâmpada

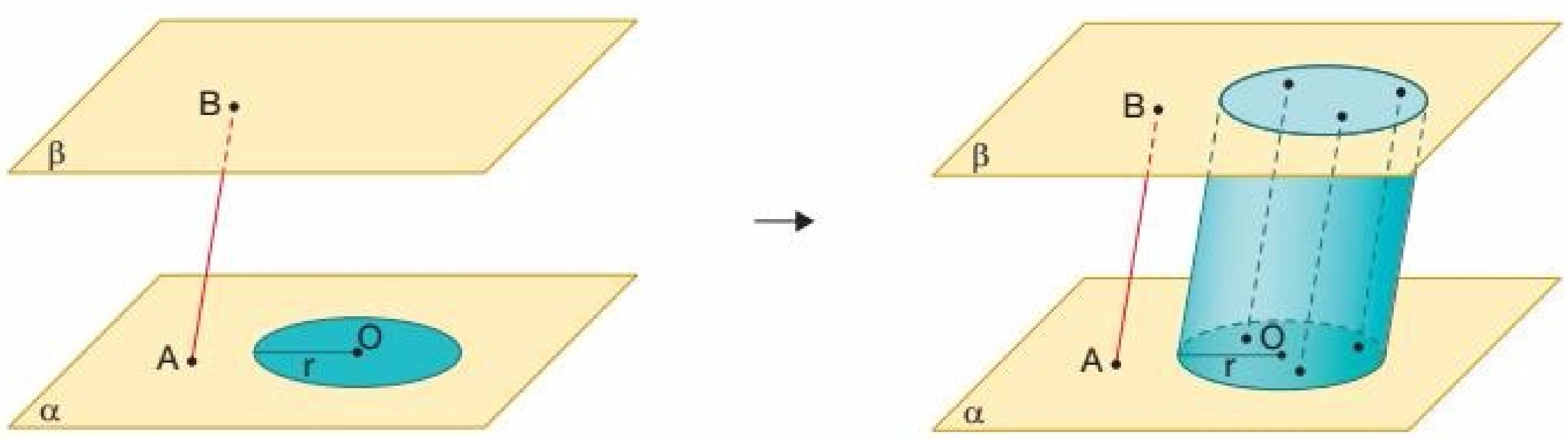

Sérgio Dotta Jr./The Next

recipiente

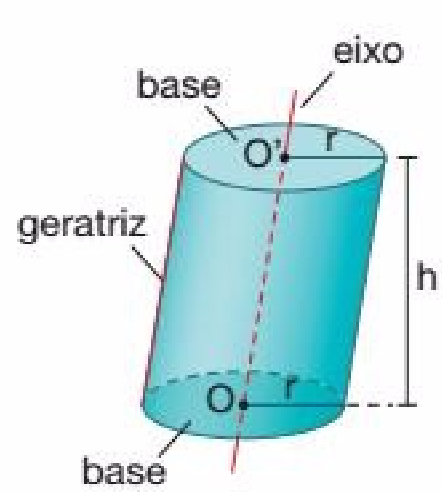

Photodisc/Getty Images

extintor de incêndio

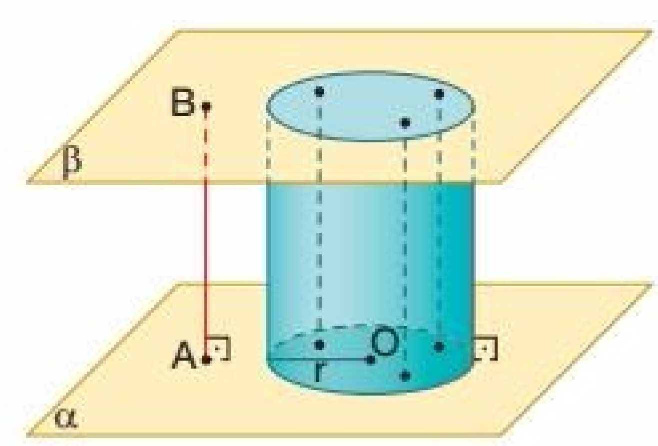
Para definirmos matematicamente um cilindro, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β, um círculo de centro *O* e raio *r*, contido em α, e um segmento AB, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Denomina-se **cilindro circular**, ou simplesmente **cilindro**, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade no círculo de centro *O* em α e outra extremidade em β.



Em um cilindro, podemos destacar os seguintes elementos:

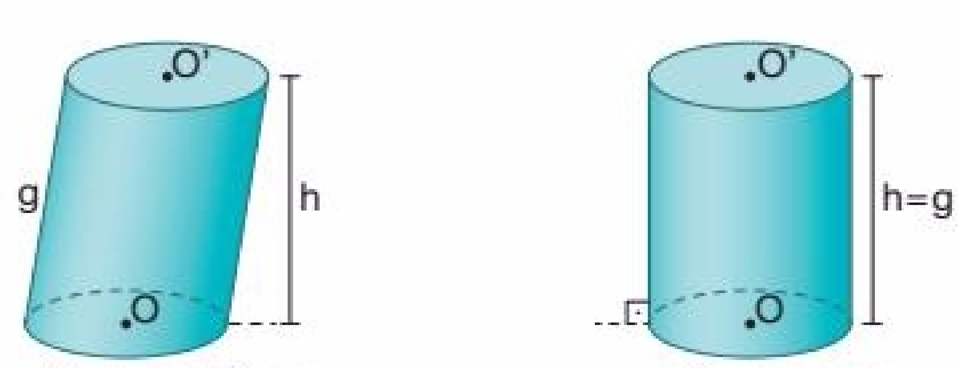


No caso em que $\overline{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, o cilindro obtido é reto.



- As **bases** são os círculos paralelos de raio *r* e centros *O* e O'.
- As **geratrizes** são os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ com extremidades nas circunferências das bases.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- A **altura** *h* é a distância entre os planos das bases.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, classificamos como **cilindro oblíquo**. Já quando as geratrizes são perpendiculares às bases, classificamos como **cilindro reto**.

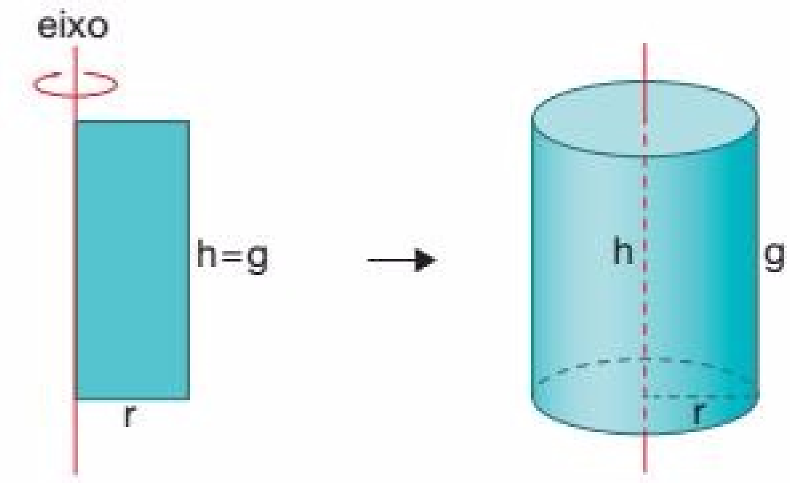


cilindro oblíquo

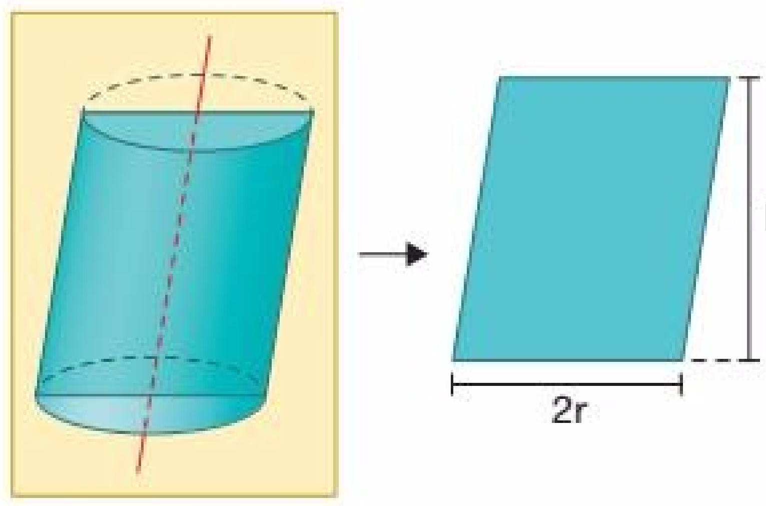
cilindro reto

Ilustrações: Acervo da editora

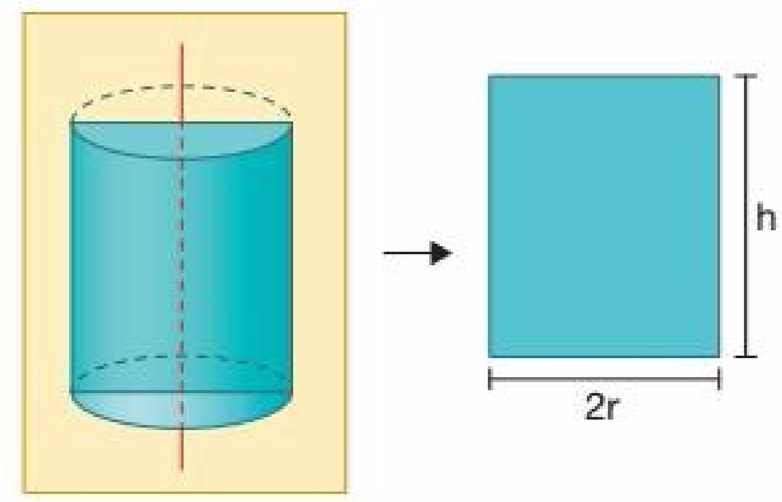
O cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**, visto que pode ser gerado pela rotação de uma região retangular em torno do eixo, em um giro completo.



Denominamos **seção meridiana** de um cilindro a região obtida na interseção do cilindro e de um plano que contém seu eixo.

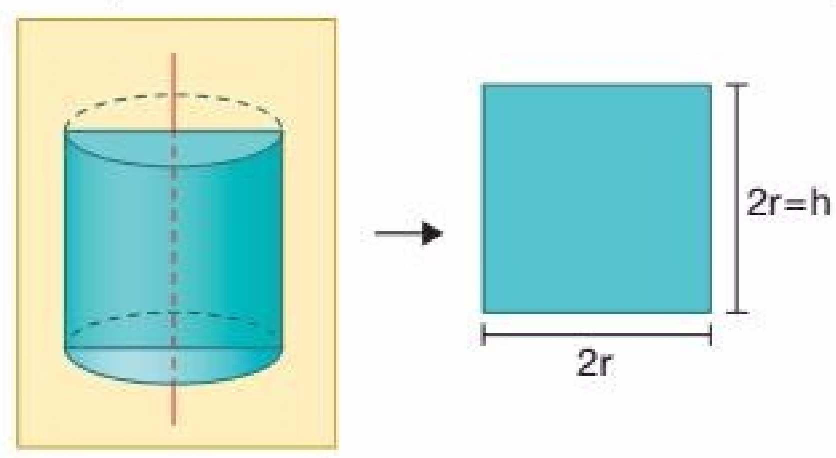


Em um cilindro oblíquo, a seção meridiana é um paralelogramo.



Em um cilindro reto, a seção meridiana é um retângulo.

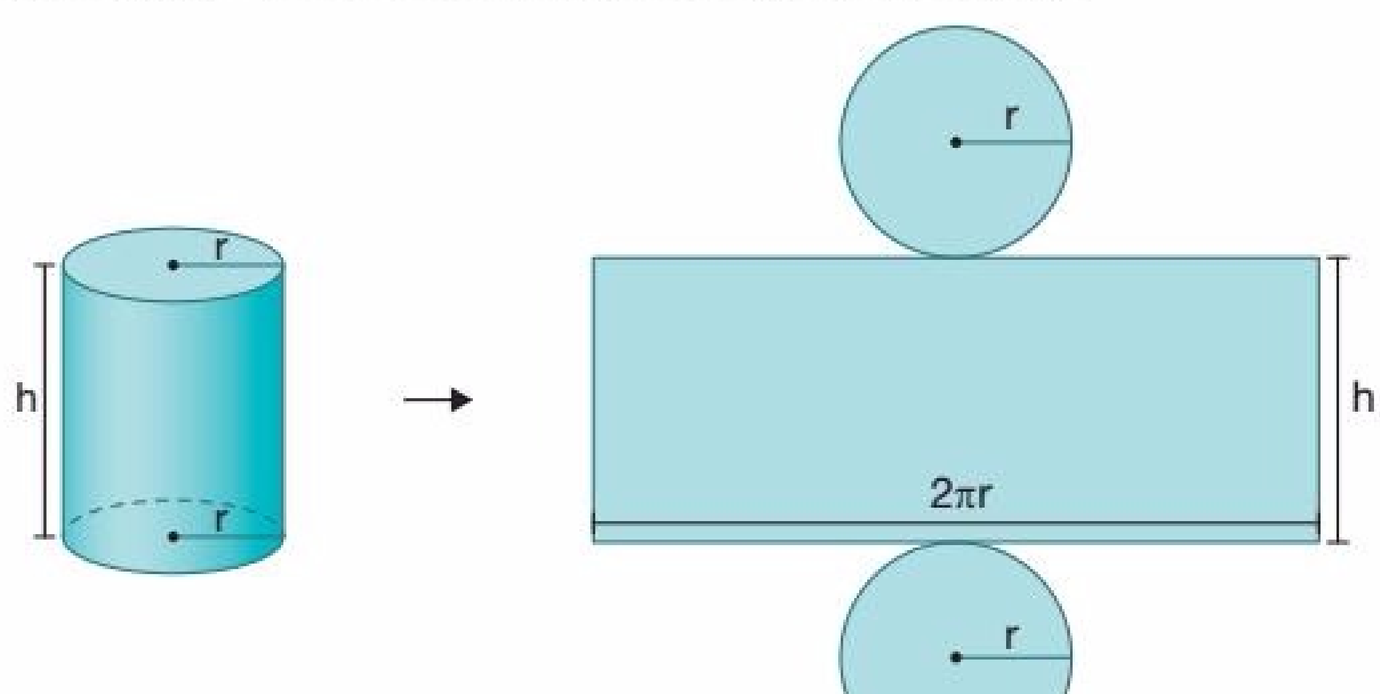
Quando a seção meridiana de um cilindro é um quadrado, ou seja, $2r = h$, o cilindro é denominado cilindro equilátero.



Ilustrações: Acervo da editora

Área da superfície de um cilindro reto

Observe um cilindro reto e sua respectiva planificação.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que as bases do cilindro são círculos congruentes de raio *r* e a superfície lateral corresponde a um retângulo de dimensões *h* e $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base). A partir dessas informações, podemos calcular a área da superfície do cilindro.

Lembre-se de que a área de um círculo de raio *r* é dada por $A = \pi r^2$, e o comprimento da circunferência, por $C = 2\pi r$.

- Área da base: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral: $A_\ell = 2\pi rh$
- Área total da superfície: $A_t = 2A_b + A_\ell = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow A_t = 2\pi r(r + h)$

Mostre aos alunos, caso seja necessário, como obter as fórmulas do cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência.

Atividades resolvidas

R11. Determine a altura de uma lata, em forma de cilindro reto, sabendo que o diâmetro de sua base tem 20 cm e sua superfície externa total foi coberta por $1\,632{,}8\ cm^2$ de alumínio. (Dado: $\pi = 3{,}14$.)

Acervo da editora

Resolução

O diâmetro da base do cilindro mede 20 cm, logo $r = 10$ cm. Calculando a área da base e da superfície lateral, temos:

$$A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314 \longrightarrow 314\ cm^2$$

$$A_\ell = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot h = 62{,}8h \longrightarrow 62{,}8h\ cm^2$$

Como a área total da superfície é $1\,632{,}8\ cm^2$, calculamos a altura da lata:

$$A_t = 2A_b + A_\ell \Rightarrow 1\,632{,}8 = 2 \cdot 314 + 62{,}8h \Rightarrow 62{,}8h = 1\,632{,}8 - 628 \Rightarrow$$

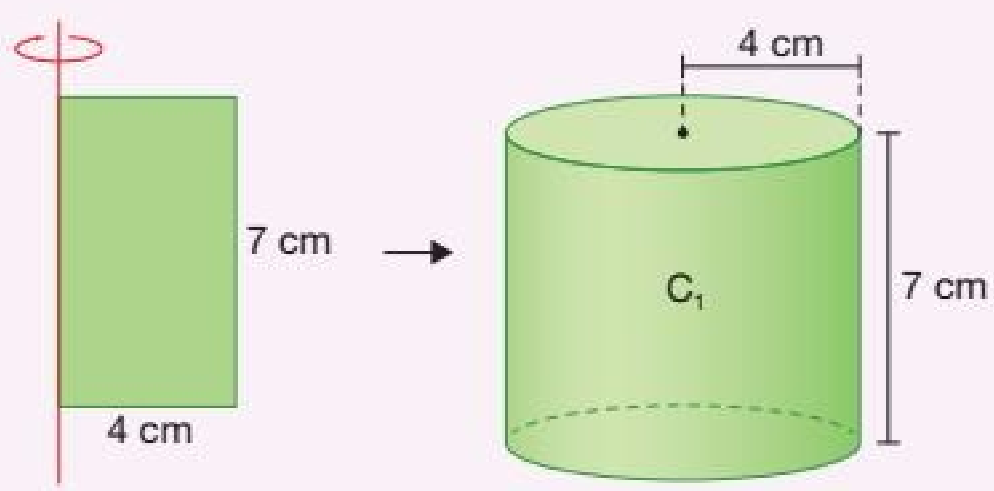
$$\Rightarrow h = \frac{1\,004{,}8}{62{,}8} \Rightarrow h = 16 \longrightarrow \boxed{16\ cm}$$

Outra maneira de resolver essa atividade é substituir os valores na fórmula $A_t = 2\pi r(r+h)$.

R12. Considere um retângulo de lados 4 cm e 7 cm. Calcule a área total da superfície dos cilindros C_1 e C_2, obtidos pela rotação do retângulo em torno do seu lado maior e do seu lado menor, respectivamente. (Dado: $\pi = 3{,}14$.)

Resolução

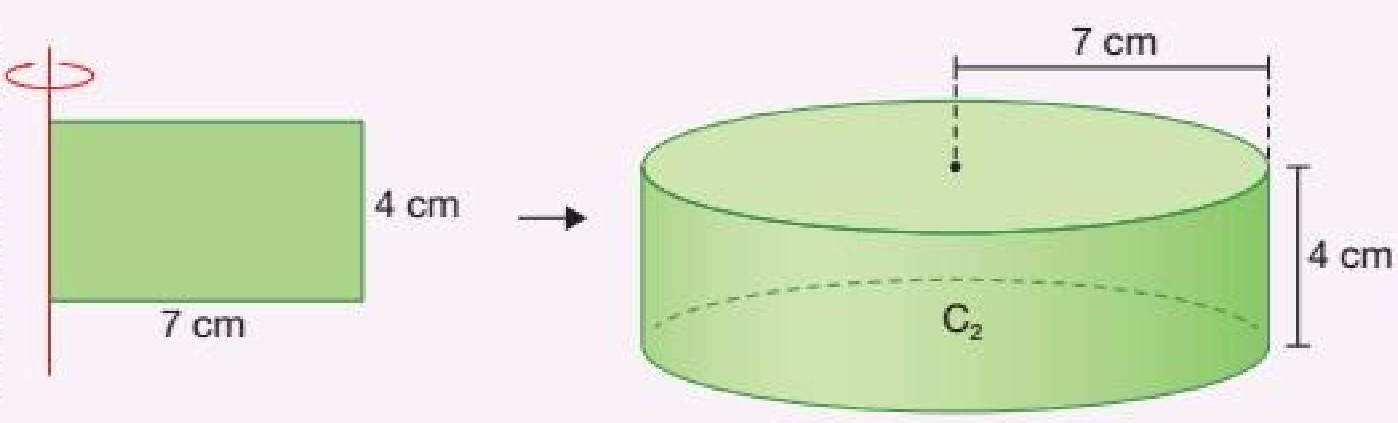
- O cilindro C_1 tem altura 7 cm e raio da base 4 cm. Logo:



$$A_t = 2\pi r(r+h) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot (4+7) = 276{,}32 \longrightarrow \boxed{276{,}32\ cm^2}$$

- O cilindro C_2 tem altura 4 cm e raio da base 7 cm. Logo:

Ilustrações: Acervo da editora



$$A_t = 2\pi r(r+h) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot (7+4) = 483{,}56 \longrightarrow \boxed{483{,}56\ cm^2}$$

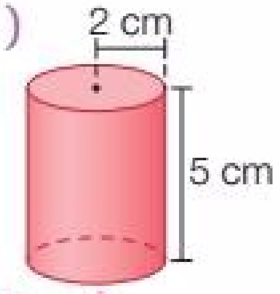
Em que caso dois cilindros, C_1 e C_2, obtidos pela rotação em torno de lados não paralelos de um mesmo retângulo, possuem áreas iguais?

Quando o retângulo for um quadrado, pois os cilindros serão iguais e, consequentemente, as áreas das superfícies também.

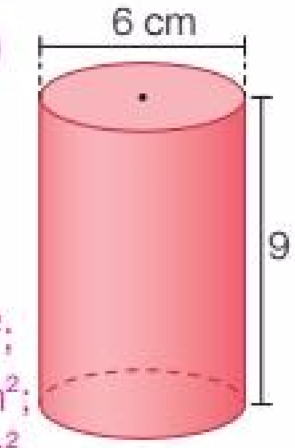
 Anote as respostas no caderno.

Quando necessário, na resolução das atividades deste capítulo, considere $\pi = 3{,}14$.

97. Calcule a área da base, a área lateral e a área total de cada cilindro.

a) 

$A_b = 12{,}56\ cm^2$;
$A_\ell = 62{,}8\ cm^2$;
$A_t = 87{,}92\ cm^2$

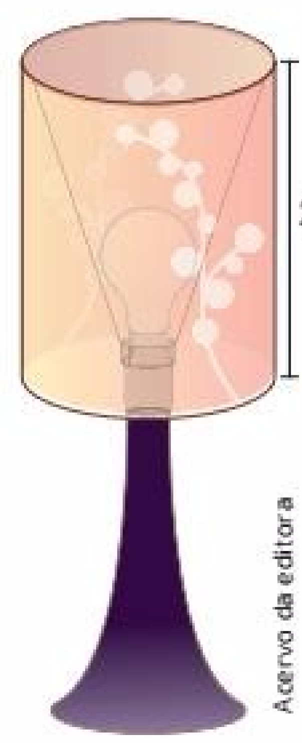
b) 

$A_b = 28{,}26\ cm^2$;
$A_\ell = 169{,}56\ cm^2$;
$A_t = 226{,}08\ cm^2$

Ilustrações: Acervo da editora

98. Calcule a área total de um cilindro reto cujo diâmetro da base é 25 dm, e a altura, 40 dm. $4\,121{,}25\ dm^2$

99. Na confecção da cúpula de um abajur é construída uma armação cilíndrica que, em seguida, tem sua superfície lateral totalmente coberta por um tecido retangular. Para que a cúpula do abajur com 25 cm de altura tenha $1570\ cm^2$ de tecido em sua superfície lateral, é necessário que a armação cilíndrica tenha quantos centímetros de raio? 10 cm



Acervo da editora

100. Um reservatório de água, com tampa, tem forma cilíndrica e área da superfície igual a $314\ m^2$. Determine a altura desse reservatório sabendo que o diâmetro da sua base tem 10 m. 5 m

101. Uma máquina compactadora de asfalto, comumente chamada "rolo compressor", possui o cilindro compactador localizado na parte dianteira. Sabendo que esse cilindro tem 1,3 m de diâmetro e 1,7 m de comprimento, responda:

máquina compactadora de asfalto

Corel Stock Photo

a) Qual é a área da superfície lateral do cilindro compactador dessa máquina? aproximadamente $6{,}94\ m^2$

b) No asfaltamento de uma rua, se essa máquina se deslocar em linha reta e contínua, que área, em metros quadrados, será compactada quando o cilindro realizar 50 voltas completas? $346{,}97\ m^2$

102. Considere em um plano cartesiano um retângulo com vértices nos pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(5, 3)$ e $(5, 0)$. Calcule a área da superfície do cilindro obtido ao se rotacionar esse retângulo em torno do:

a) eixo x 150,72 u.a. (unidades de área)

b) eixo y 251,2 u.a.

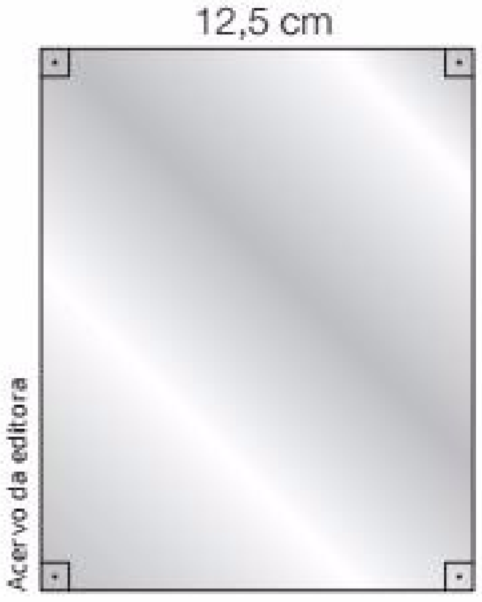
103. Um dos aquários mais interessantes do mundo está localizado em um hotel de Berlim, na Alemanha. Esse aquário, denominado AquaDom, tem forma cilíndrica, com um elevador em seu interior. Com cerca de 1 000 000 litros de água, o AquaDom abriga mais de 1 500 peixes. Sua base tem cerca de 37,7 m de circunferência e sua altura é de 25 m. Qual é a área da superfície lateral desse aquário? aproximadamente $942\ m^2$

Fonte de pesquisa: <www.visitsealife.com/berlin/en/plan-your-visit/aquadom.aspx>. Acesso em: 23 fev. 2016.

AquaDom, em 2015.

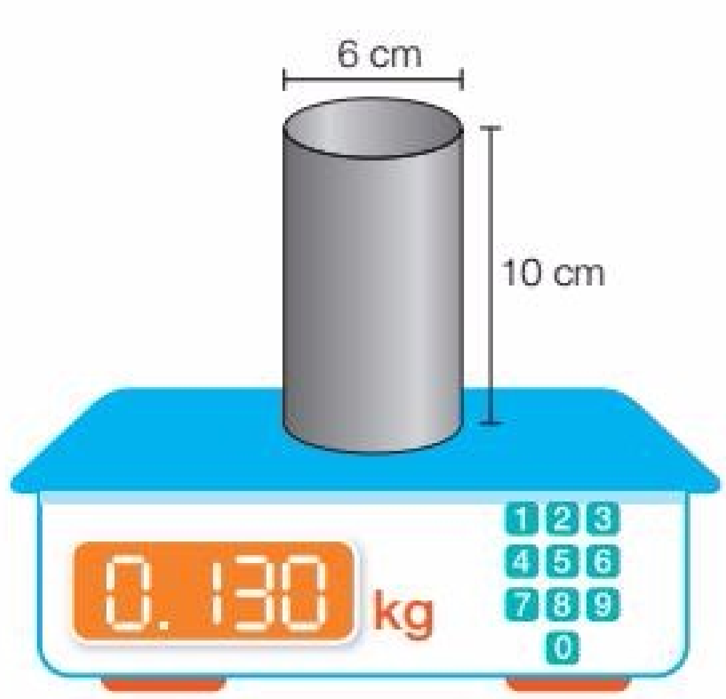
Jörg Carstensen/dpa/Corbis/Latinstock

104. A superfície lateral de um recipiente cilíndrico será produzida com a chapa de metal representada abaixo, sem que haja desperdício de material. No máximo, quantos centímetros quadrados de área terá o fundo do recipiente? $19{,}625\ cm^2$



Acervo da editora

105. A lata a seguir, que tem forma de cilindro reto e não possui tampa, foi produzida a partir de uma chapa de metal. Quantos gramas de metal há em $1\ cm^2$ dessa chapa? aproximadamente 0,7 g



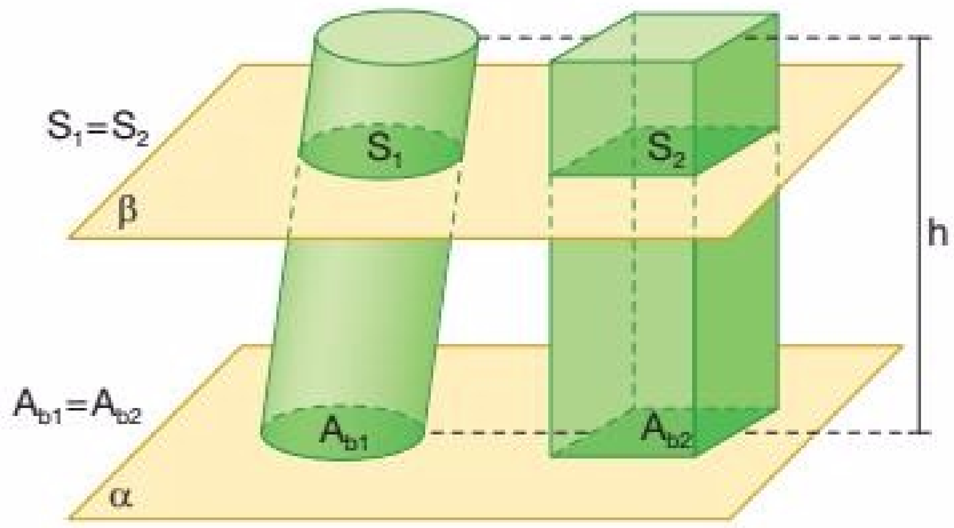
Camila Ferreira

Volume do cilindro

No cálculo da quantidade de água que pode ser armazenada em um reservatório cilíndrico podemos utilizar conhecimentos acerca do volume do cilindro.

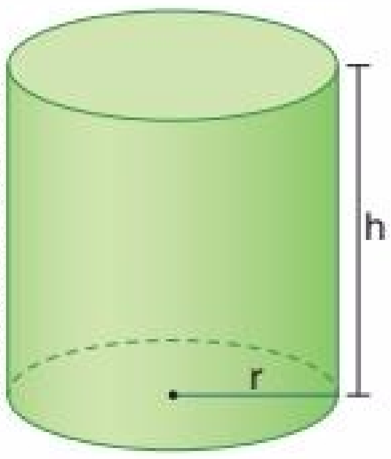
Para estudarmos o volume do cilindro utilizaremos as noções do Princípio de Cavalieri. Considere inicialmente um cilindro e um prisma com a mesma altura e com bases de mesma área contidas em um mesmo plano α.

Qualquer plano β, paralelo a α, que seciona os sólidos determina regiões de mesma área.



Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cilindro e o do prisma são iguais. Como o volume do prisma é dado por $V_p = A_b \cdot h$, temos que o volume do cilindro é dado por:

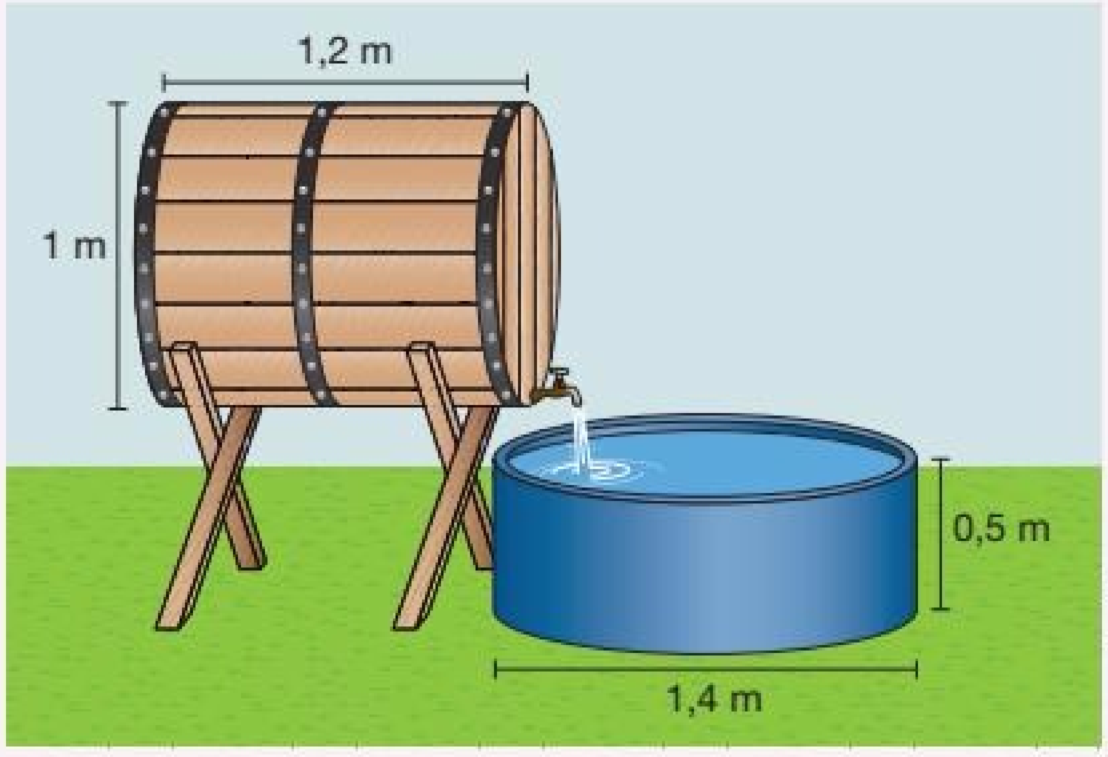
$V = A_b \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \pi r^2 h}$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R13. Um barril de forma cilíndrica, com 1,2 m de altura interna e 1 m de diâmetro interno da base, está completamente cheio de água. Para esvaziá-lo, foi utilizada uma torneira que despeja água à vazão média de 6 L por minuto em um recipiente cilíndrico, conforme a figura.



Acervo da editora

a) Considerando essa vazão média, quanto tempo é necessário para esvaziar totalmente o barril?

b) A capacidade do recipiente será suficiente para conter toda a água do barril?

Capítulo 8

Resolução

Inicialmente, calculamos o volume de água no barril:

$$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \underbrace{0{,}5^2}_{\frac{1}{2}} \cdot 1{,}2 = 0{,}942 \rightarrow 0{,}942\ \text{m}^3$$

Como a vazão é dada em litros e $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{L}$, temos que a capacidade do barril, em litros, é:

$$V = 0{,}942 \cdot 1\,000 = 942 \rightarrow 942\ \text{L}$$

a) O tempo necessário para esvaziar totalmente o barril é dado pela seguinte regra de três:

água (L)	tempo (min)
6	1
942	x

$$\frac{6}{942} = \frac{1}{x} \Rightarrow 6x = 942 \Rightarrow x = 157$$

Portanto, serão necessários 157 minutos ou 2 horas e 37 minutos para esvaziar totalmente o barril.

b) Calculando a capacidade do recipiente cilíndrico, temos:

$$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \underbrace{0{,}7^2}_{\frac{1{,}4}{2}} \cdot 0{,}5 = 0{,}7693 \rightarrow 0{,}7693\ \text{m}^3$$

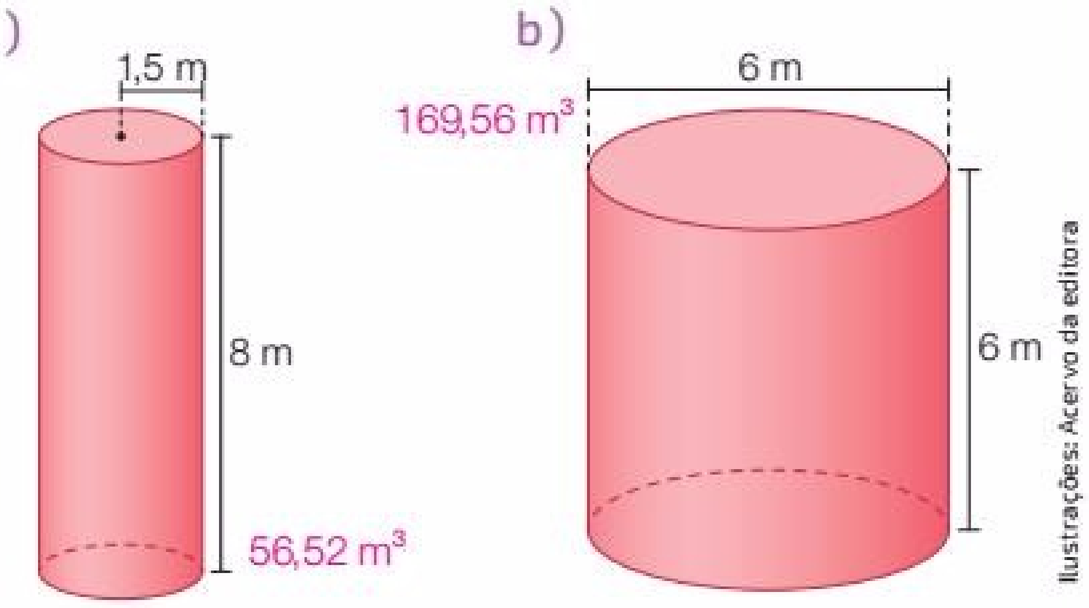
Como a capacidade do recipiente é menor que o volume de água no barril $(0{,}7693 < 0{,}942)$, então a capacidade do recipiente não será suficiente.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

106. Calcule o volume de cada cilindro reto.

a) b)



107. Calcule o volume de parafina utilizada na confecção de uma vela cilíndrica cujo diâmetro da base mede 4 cm, e a altura, 20 cm. $251{,}2\ \text{cm}^3$

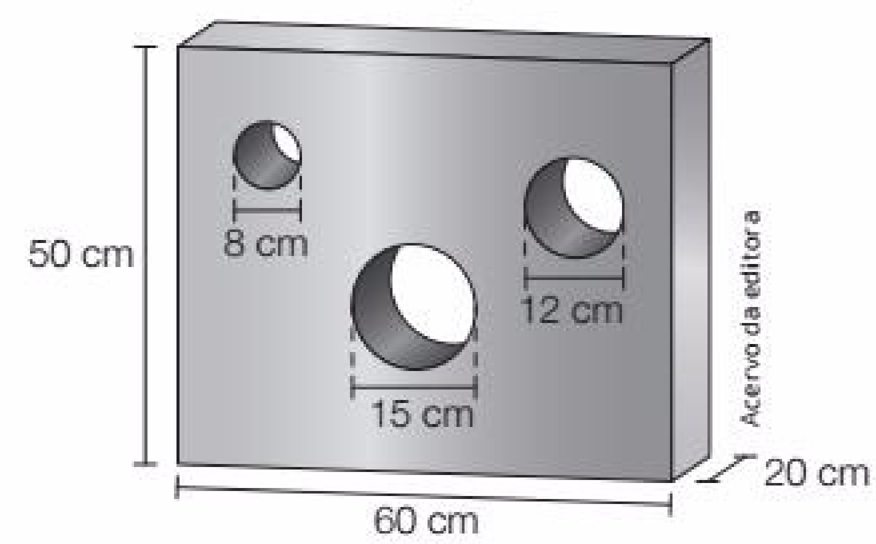
108. Determine o raio da base de um cilindro reto, cujo volume é $15\pi\ \text{cm}^3$, e a altura, 3 cm. $\sqrt{5}$ cm

109. O reservatório de água de um condomínio tem a forma de um cilindro reto com 3 m de raio da base e 4 m de altura. Qual é a capacidade, em litros, desse reservatório? 113 040 L

Lembre-se de que $1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{L}$.

110. Até que altura, em centímetros, deve-se encher uma jarra cilíndrica, cujo raio da base mede 5 cm, para que ela fique com 628 mL de água? 8 cm

111. Para confeccionar uma peça, um torneiro mecânico irá realizar três furos cilíndricos em uma chapa metálica com forma de paralelepípedo, como indicado no esquema.



a) Qual é o volume total de metal retirado da chapa na realização dos furos? $6\,798{,}1\ \text{cm}^3$

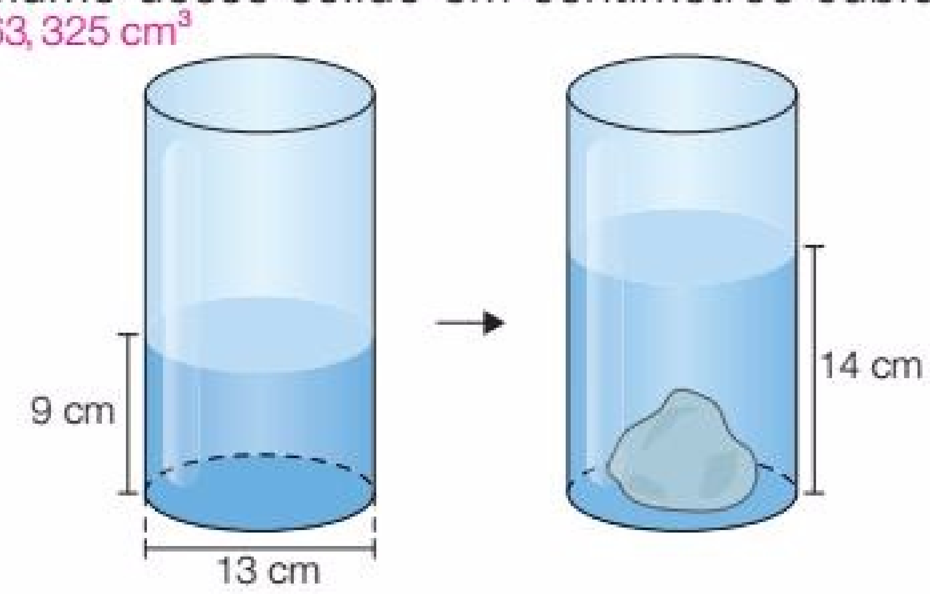
b) Qual é o volume da peça obtida? $53\,201{,}9\ \text{cm}^3$

112. (Enem-MEC) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar $81\ \text{m}^3$ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado? c

a) 0,5 b) 1,0 c) 2,0 d) 3,5 e) 8,0

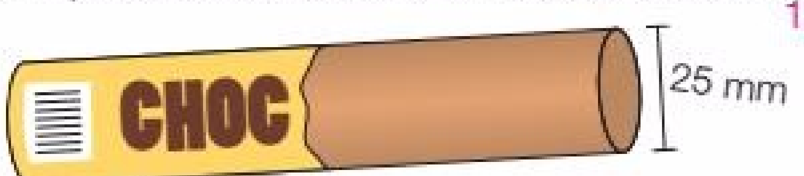
113. Para medir o volume de um sólido irregular, Beatriz o submergiu totalmente em um recipiente cilíndrico com água, conforme o esquema. Qual é o volume desse sólido em centímetros cúbicos? 663,325 cm³



Ilustrações: Acervo da editora

114. Certa indústria produz um chocolate com forma cilíndrica cujo diâmetro da base mede 25 mm. Sabendo que com 58,875 L de chocolate é possível produzir 1000 unidades desse produto, qual é o comprimento desse chocolate cilíndrico? 12 cm

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.



Acervo da editora

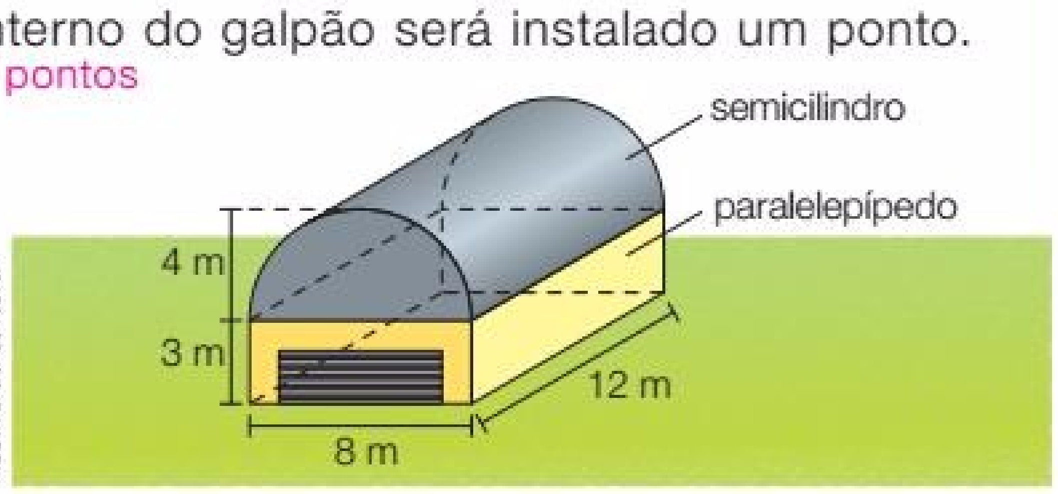
115. (Enem-MEC) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m², ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m² de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço de sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de: d

a) 10,8 b) 12,0 c) 32,4 d) 108,0 e) 324,0

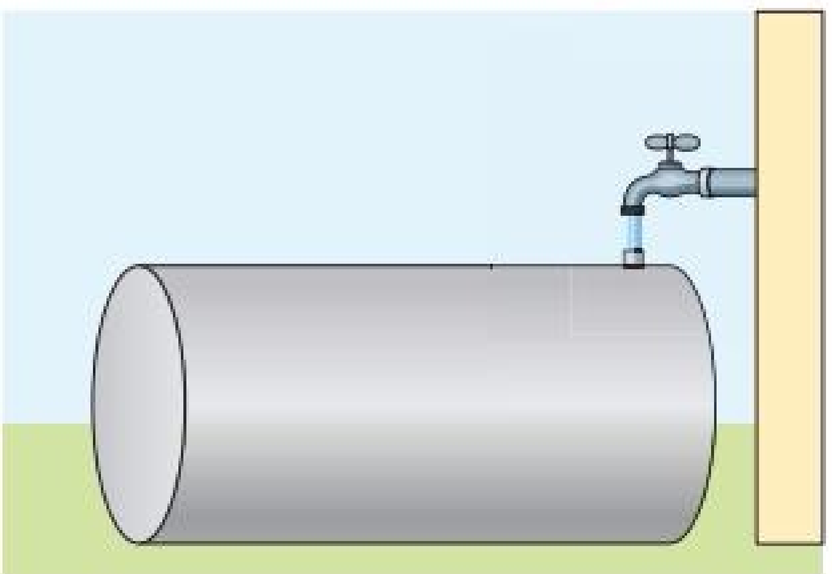
116. O galpão representado a seguir foi construído para armazenar a produção de certa indústria. Para conservar as propriedades originais dos produtos armazenados, será instalado um sistema de refrigeração no qual estarão dispostos em locais estratégicos pontos de entrada de ar. Determine quantos desses pontos serão instalados, sabendo que para cada 120 m³ de espaço interno do galpão será instalado um ponto. 5 pontos

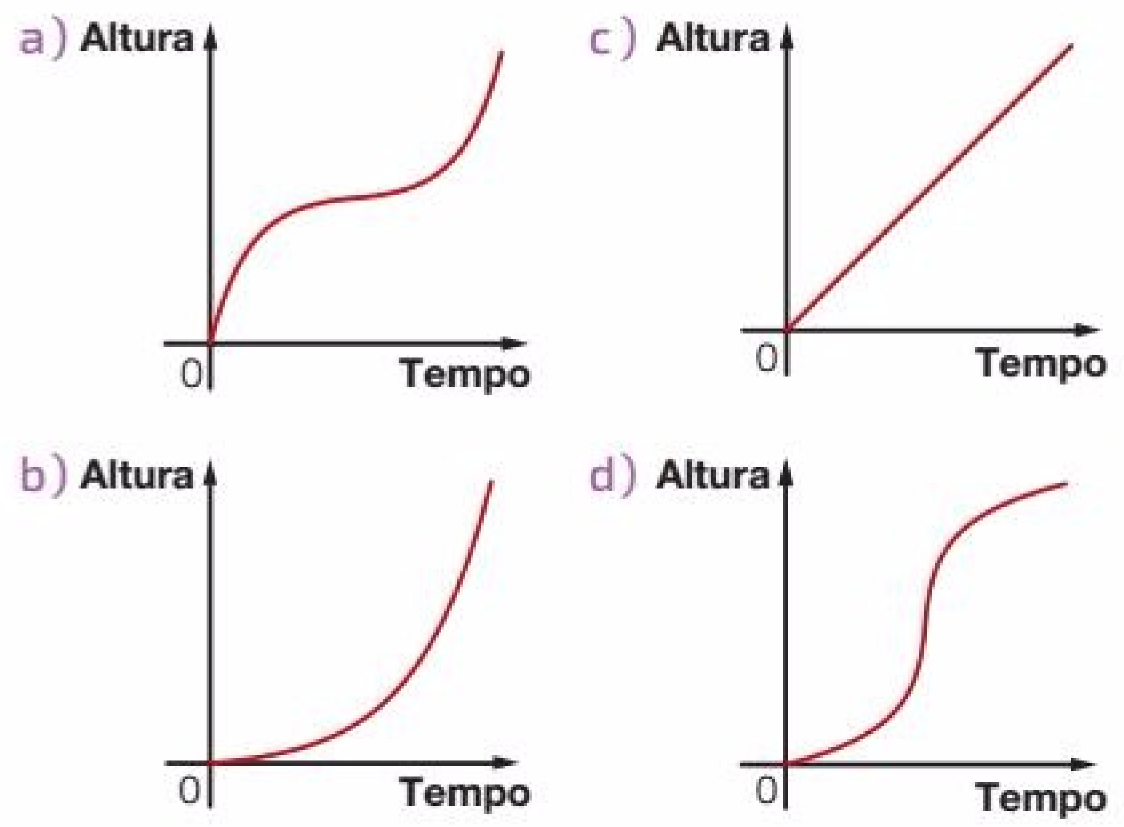


Acervo da editora

117. Desafio

Um reservatório cilíndrico disposto horizontalmente será abastecido com água por meio de uma torneira que possui vazão constante. O gráfico que melhor expressa a altura vertical do nível da água em função do tempo até o enchimento total do reservatório é: a





Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 8

118. O pluviômetro é um instrumento utilizado para medir a quantidade de chuva ocorrida em certa região. De maneira geral, essa quantidade é expressa em milímetros. Quando dizemos, por exemplo, que choveu 10 mm em certa região, equivale a dizer que, nessa região, choveu 10 L de água por metro quadrado. Considere que um agricultor, a fim de verificar a precipitação ocorrida em sua propriedade, tenha instalado em uma área aberta um balde cilíndrico com 12,5 cm de raio e 35 cm de altura. Se, após uma chuva, o balde, que estava vazio, passou a ter água no nível de 8 cm, qual foi a precipitação, em milímetros, ocorrida nessa propriedade? 80 mm

Manoel Novaes


pluviômetro

119. O manejo florestal sustentável é a denominação para a exploração consciente de riquezas das florestas. É possível, por exemplo, potencializar o turismo, extrair frutos, sementes, resina e, até mesmo, madeira, sem prejudicar o ambiente. Contudo, essa exploração deve ser autorizada pelo Serviço Florestal Brasileiro, órgão público ligado ao Ministério do Meio Ambiente.

Em povoamentos florestais, quantificar o volume de madeira de cada árvore se torna indispensável para o estabelecimento de planos do manejo florestal sustentável. Essa quantificação, que consiste em uma das etapas de um **inventário florestal**, pode ser um meio de ajudar o produtor florestal no momento da sua comercialização, pois o auxilia na negociação de preços com base em dados consistentes do volume de madeira.

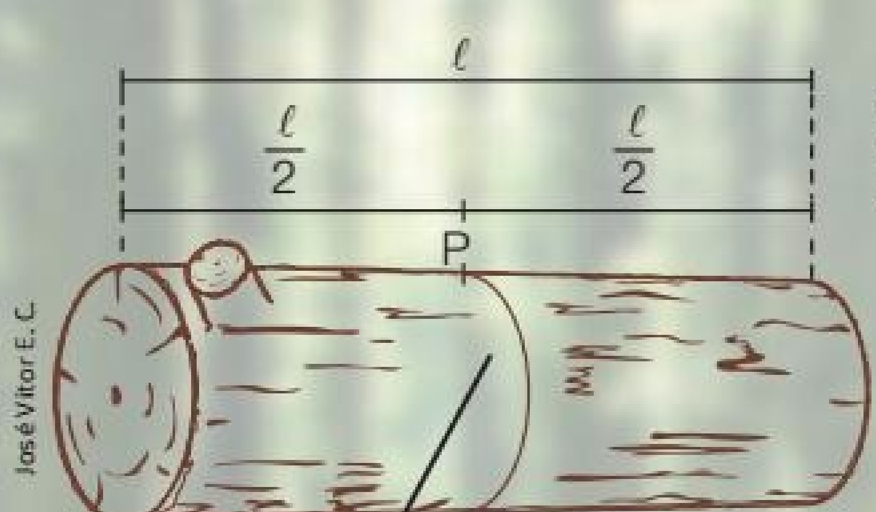
Quando uma árvore é transformada em tora, seu volume pode ser obtido por meio do método geométrico e pelo método de Francon. O primeiro consiste em aproximar o volume de uma tora calculando o volume de um cilindro. O segundo desconsidera partes da tora que não são aproveitadas pela serraria por serem ocas e podres ou apresentarem outros defeitos.

Inventário florestal: é o meio pelo qual se quantifica e qualifica, em determinada área de floresta, produtos madeireiros e não madeireiros.

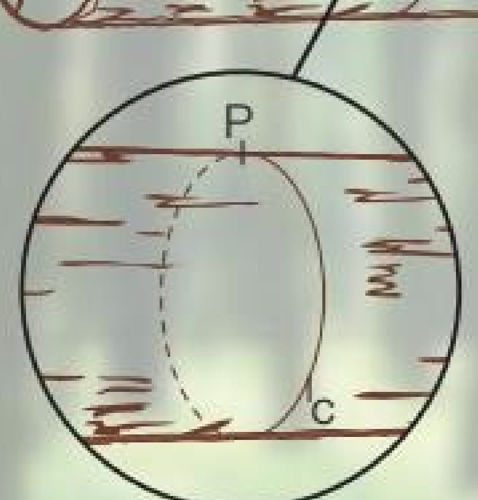
Fontes de pesquisa: <www.florestal.gov.br/pngf/manejo-florestal/apresentacao>. Acesso em: 22 fev. 2016. <www.fca.unesp.br/Home/Extensao/GrupoTimbo/frutiferas.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2016.

Cálculo do volume pelo método geométrico e pelo método de Francon

Método geométrico



Estimar o ponto central *P* da tora de madeira.

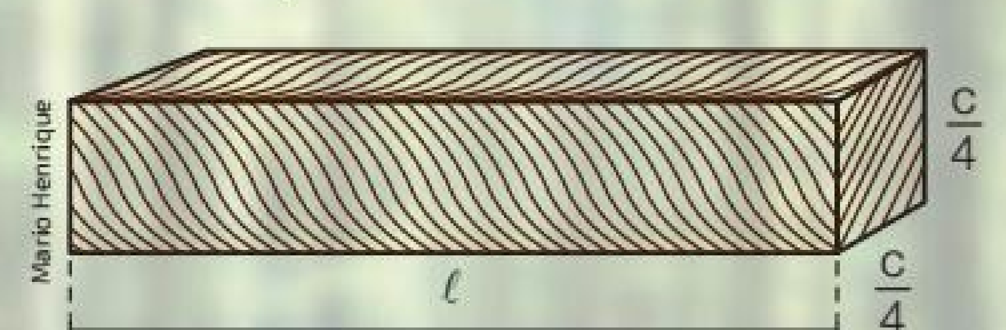


Medir o comprimento *c* da circunferência que passa pelo ponto *P*.

A partir da circunferência *c* e do comprimento ℓ, aproximar o formato da tora ao de um cilindro. Em seguida, obter o raio *r* e calcular o volume do cilindro utilizando a fórmula $V_c = \pi r^2 \ell$.

Método de Francon

Mantendo o perímetro da circunferência *c*, aproximar o formato da tora ao de um paralelepípedo reto de base quadrada, com lado $\frac{c}{4}$, e altura ℓ.



Por fim, basta utilizar a fórmula $V = \left(\frac{c}{4}\right)^2 \ell$.

Relação entre os métodos geométrico e de Francon

O perímetro da circunferência é $c = 2\pi r$. Assim, para o volume no método de Francon, temos:

$$V = \left(\frac{c}{4}\right)^2 \ell = \left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 \ell = \frac{\pi}{4} \pi r^2 \ell$$

Mas $\pi r^2 \ell$ é o volume V_c do cilindro. Portanto, segue que:

$$V = \frac{\pi}{4} V_c \simeq 0{,}7854 V_c$$

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Se comparados os volumes, para uma mesma tora de madeira, obtidos pelos métodos geométrico e de Francon, qual apresentará maior valor? Justifique.

b) No método de Francon, está envolvido o cálculo do volume de que tipo de prisma? E no método geométrico? prisma reto de base quadrada; cilindro reto

c) Calcule, pelo método geométrico e pelo método de Francon, o volume de uma tora de madeira que tem o comprimento de 10 m e a circunferência que passa pelo centro P de 2 m. método geométrico: aproximadamente 3,18 m^3; método de Francon: aproximadamente 2,5 m^3

d) O volume de certa tora de madeira, com 12 m de comprimento, foi calculado em 9,42 m^3 pelo método geométrico. Qual será o volume dessa tora calculado pelo método de Francon? aproximadamente 7,4 m^3

e) Em sua opinião, o método de Francon é uma boa estimativa para o cálculo do volume de madeira que pode ser aproveitado em cada tora? Justifique. Resposta pessoal.

a) Método geométrico, pois este, ao contrário do método de Francon, considera as partes da tora que não serão aproveitadas nas serrarias.

Guarda-florestal medindo a circunferência de uma árvore.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens Robert Crum e Natalia K/Shutterstock.com

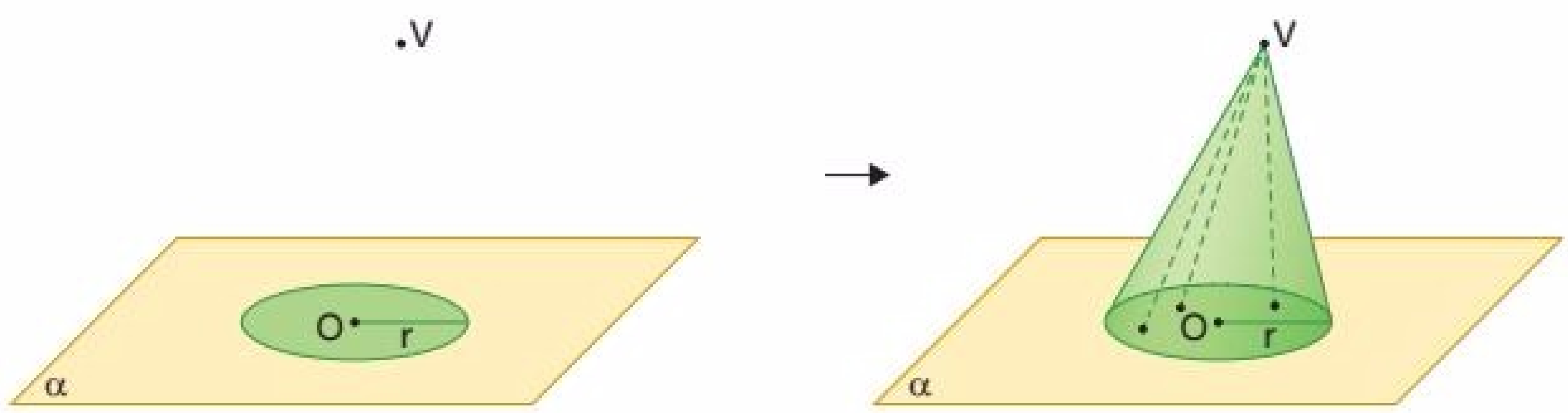
Capítulo 8

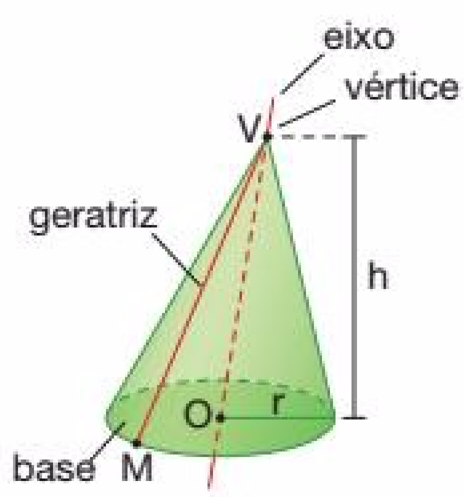
Cone

funil

Parte do funil ao lado assemelha-se a um cone. Para determinarmos a quantidade de material necessário para a sua fabricação ou a capacidade que ele pode comportar, é necessário que estudemos os elementos que compõem o cone, assim como a área de sua superfície e seu volume.

Para definirmos o cone, consideramos um plano α, um círculo de centro O contido nele e um ponto V não pertencente a α. Denomina-se **cone circular**, ou simplesmente **cone**, o conjunto de todos os segmentos com uma extremidade no círculo de centro O em α e a outra extremidade em V.



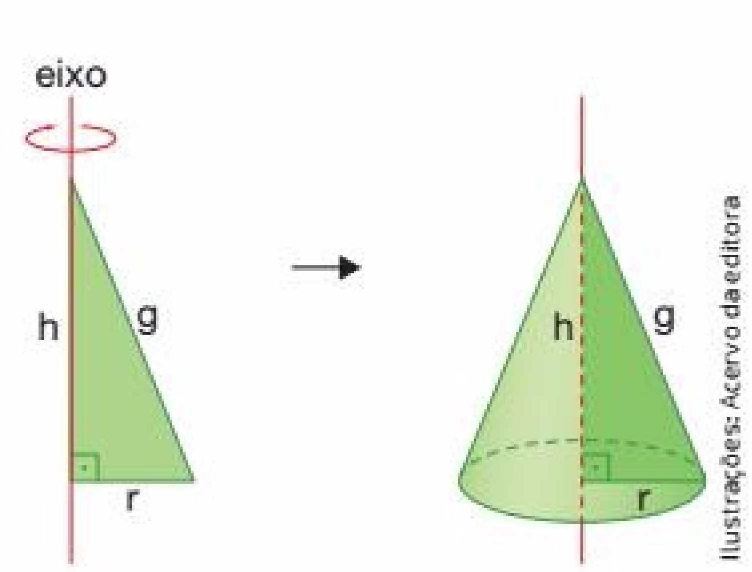


Em um cone, podemos destacar os seguintes elementos:

- A **base** é o círculo de raio r e centro O.
- O **vértice** é o ponto V.
- As **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. Nesse cone, $\overline{VM}$ é um exemplo de geratriz.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A **altura** h é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

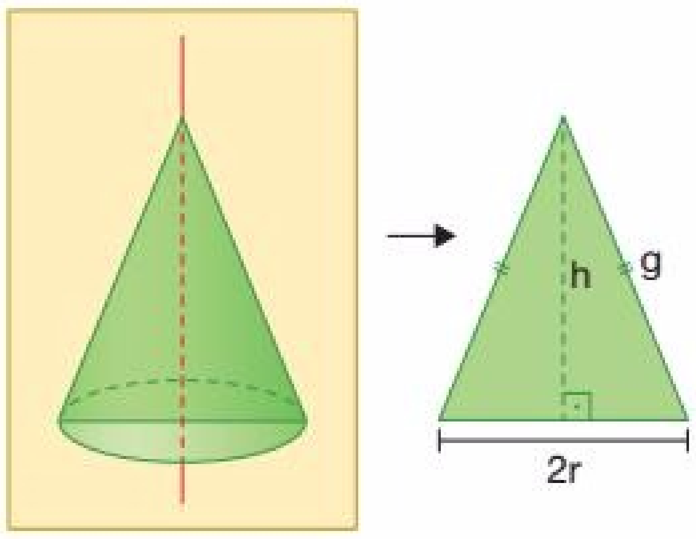
Quando o eixo de um cone é oblíquo à base, classificamos como **cone oblíquo**. Já quando o eixo é perpendicular à base, classificamos como **cone reto**.

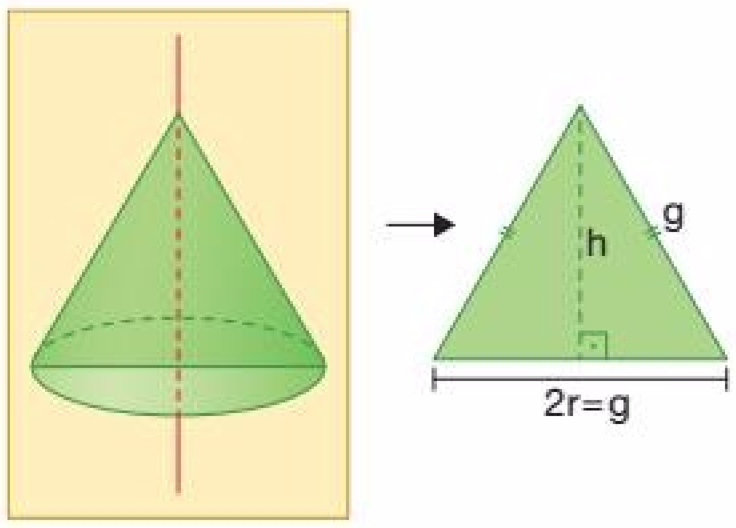
Assim como o cilindro reto, o cone reto também é considerado um sólido de revolução, pois pode ser obtido ao rotacionarmos uma região triangular, cujo contorno é um triângulo retângulo, uma volta completa em torno do eixo (com um dos catetos contido no eixo). Dessa maneira, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.



Em um cone, a **seção meridiana**, obtida na interseção do cone com um plano que contém seu eixo, é um triângulo.

Em um cone reto, a seção meridiana é um triângulo isósceles.

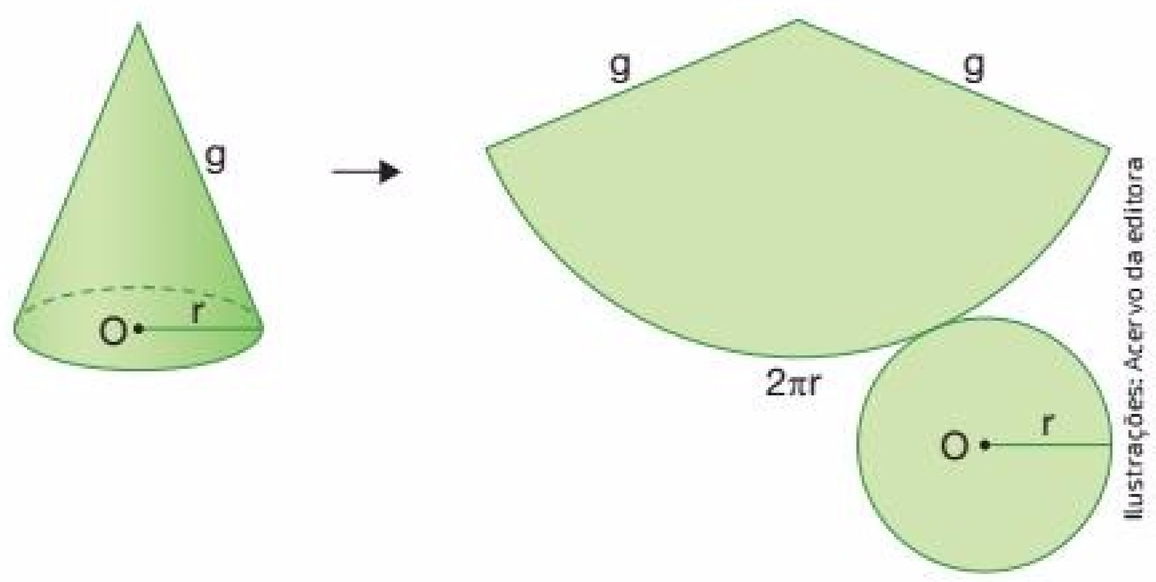




Quando a seção meridiana de um cone é um triângulo equilátero, ele é denominado **cone equilátero**. Nesse caso, $2r = g$.

Área da superfície de um cone reto

Observe um cone reto e sua respectiva planificação.



De acordo com a planificação, é possível notar que a base do cone reto é um círculo de raio *r* e a superfície lateral corresponde a um setor circular de raio *g* e comprimento $2\pi r$. A partir dessas informações, podemos calcular a área da superfície do cone.

- Área da base: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral:

  Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, podemos determinar a área lateral por meio de uma regra de três.

Lembre-se de que *g* é o raio do setor circular.

Comprimento do arco		Área do setor
$2\pi g$	—	πg^2
$2\pi r$	—	A_ℓ

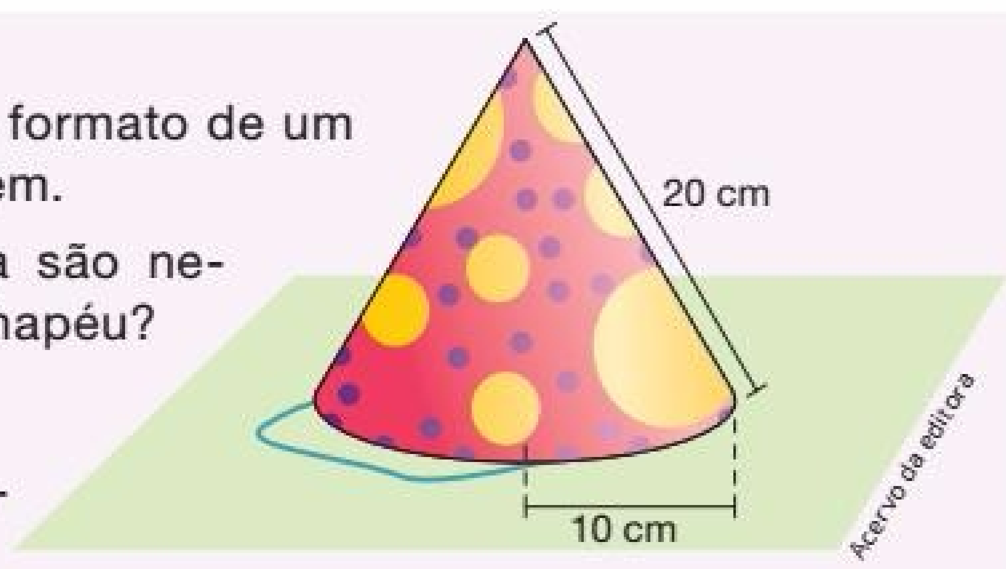
$$\frac{\cancel{2\pi} g}{\cancel{2\pi} r} = \frac{\pi g^2}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell \cdot g = r \cdot \pi g^2 \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

- Área total da superfície: $A_t = A_b + A_\ell = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow \boxed{A_t = \pi r(r+g)}$

Atividades resolvidas

R14. Um chapéu de festa, feito de cartolina, tem o formato de um cone reto e as dimensões indicadas na imagem.

Quantos centímetros quadrados de cartolina são necessários para produzir 50 unidades desse chapéu?



Resolução

A quantidade de cartolina utilizada para produzir uma unidade do chapéu corresponde à área da superfície lateral do cone reto de raio 10 cm e geratriz 20 cm. Logo:

$$A_\ell = \pi r g = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 20 = 628 \longrightarrow 628\ \text{cm}^2$$

Calculando a quantidade *q* necessária para produzir 50 unidades, temos:

$$q = 50 \cdot 628 = 31\,400$$

Portanto, para produzir 50 unidades do chapéu são necessários 31 400 cm^2 de cartolina.

R15. A altura de um cone reto é 12 cm, e o diâmetro da base, 10 cm. Em relação a esse cone, calcule:

a) a medida da geratriz

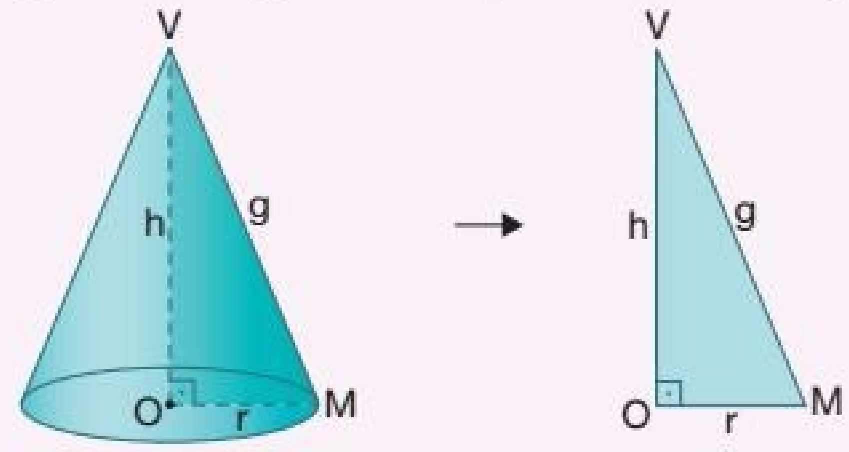
b) a área da superfície lateral

c) a área da superfície total

d) a medida do ângulo do setor circular

Resolução

a) O raio da base, a altura e a geratriz do cone formam, nesta ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo VOM, conforme a figura abaixo.



Como $r = 5$ cm e $h = 12$ cm, calculamos a medida da geratriz do cone utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 169 \Rightarrow g = 13$$

Portanto, a medida da geratriz é 13 cm.

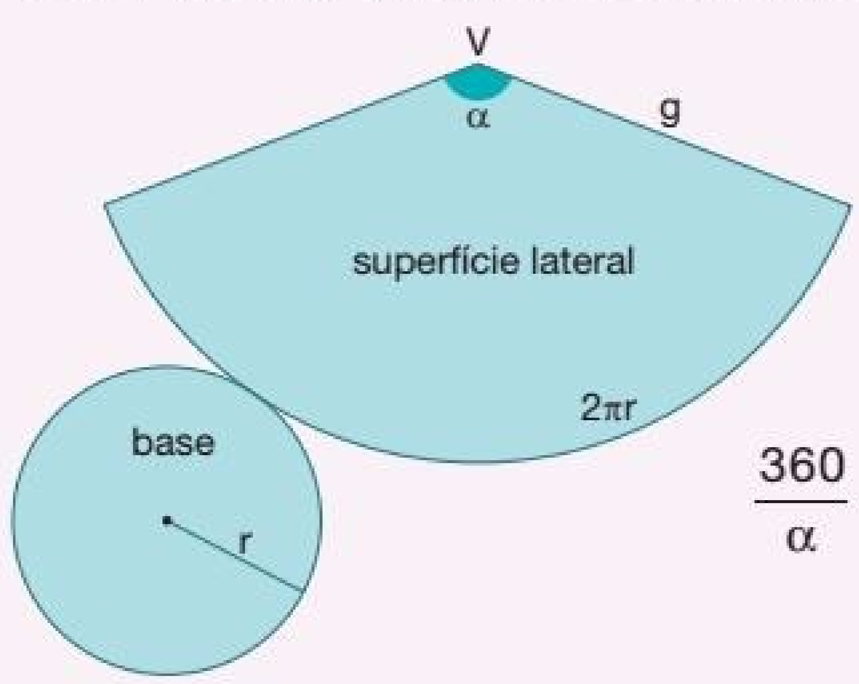
b) Calculando a área da superfície lateral do cone, temos:

$$A_\ell = \pi r g = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}1 \longrightarrow \boxed{204{,}1\,\text{cm}^2}$$

c) Calculando a área da superfície total do cone, temos:

$$A_t = \pi r(r+g) = 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5+13) = 15{,}7 \cdot 18 = 282{,}6 \longrightarrow \boxed{282{,}6\,\text{cm}^2}$$

d) Ao planificar a superfície lateral do cone, obtemos um setor circular de ângulo α e comprimento $2\pi r$. Considerando a circunferência completa (360°), de raio *g*, temos que a medida de seu comprimento é $2\pi g$. Logo, calculamos a medida do ângulo do setor circular por meio da seguinte regra de três:



Ilustrações: Acervo da editora

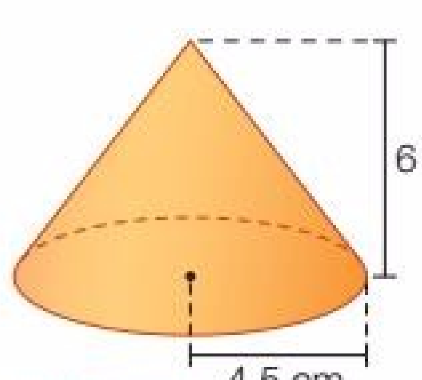
ângulo (°)	comprimento (cm)
360	$2\pi g$
α	$2\pi r$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\cancel{2\pi} g}{\cancel{2\pi} r} \Rightarrow \alpha \cdot \underbrace{g}_{13} = 360 \cdot \underbrace{r}_{5} \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 138{,}5°} \text{ ou } \boxed{\alpha \simeq 138°30'}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

120. Em relação ao cone reto apresentado, calcule:



Acervo da editora

a) a área da base 63,585 cm²

b) a medida da geratriz 7,5 cm

c) a área da superfície lateral 105,975 cm²

d) a área total da superfície 169,56 cm²

121. Qual é a área total da superfície de um cone reto, sabendo que sua geratriz mede 10 cm, e o raio da base, 3 cm? 122,46 cm²

122. Sabendo que em um cone reto a área da superfície lateral é 3 265,6 cm² e a medida da geratriz é 52 cm, responda.

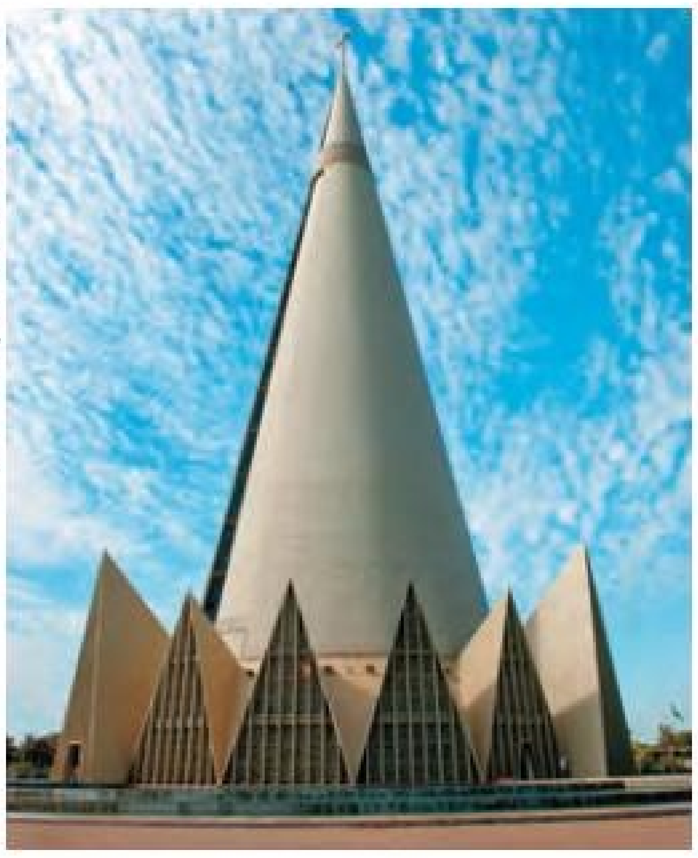
a) Qual é a medida do diâmetro da base desse cone? 40 cm

b) Qual é a altura desse cone? 48 cm

123. Considerado o 10º monumento em altura no mundo e o 2º na América do Sul, a Catedral de Maringá é sem dúvida um cartão-postal do Paraná. Construída no período de julho de 1959 a maio de 1972, essa igreja possui forma cônica, com 50 m de diâmetro externo da base e 114 m de altura. Calcule a área lateral dessa catedral, considerando apenas sua parte cônica. aproximadamente $9161\,m^2$

Fonte de pesquisa: <www2.maringa.pr.gov.br/turismo/?cod=curiosidades/32>. Acesso em: 23 fev. 2016.

Vinicius Tupinamba/Shutterstock.com

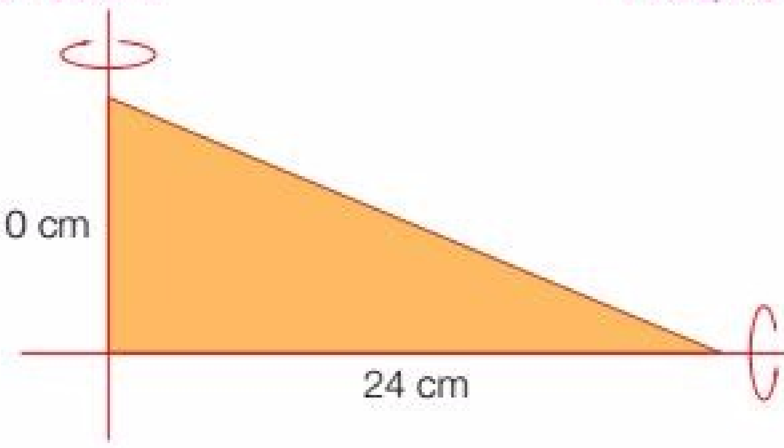


Catedral de Maringá, no Paraná, em 2014.

124. Calcule a área total da superfície do sólido obtido ao rotacionar o triângulo a seguir em torno do:

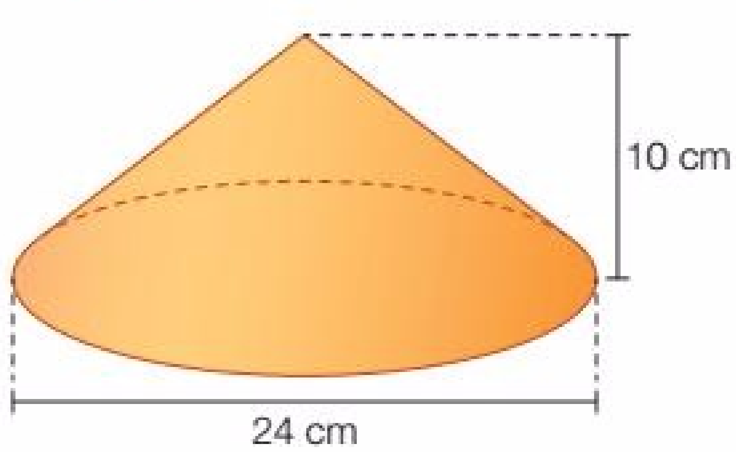
a) menor cateto $3\,768\,cm^2$

b) maior cateto $1\,130{,}4\,cm^2$



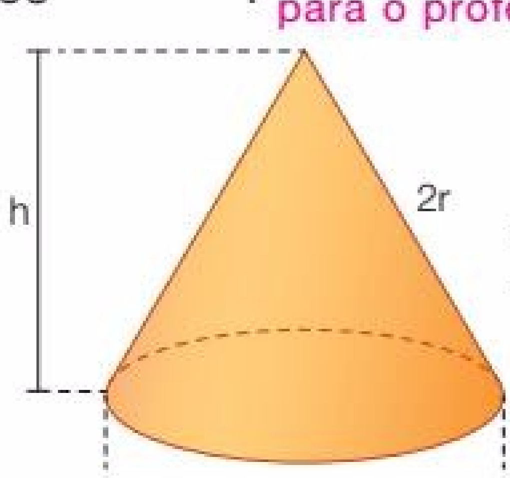
Acervo da editora

125. Determine a altura de um cone reto para que ele tenha a mesma área da base e o dobro da área da superfície lateral do cone reto representado a seguir. $8\sqrt{13}$ cm



Acervo da editora

126. Mostre que em um cone equilátero de altura *h* e raio *r*, temos $h = r\sqrt{3}$. Resposta nas Orientações para o professor.



Acervo da editora

127. Uma pequena empresa prepara e acondiciona amendoins torrados em embalagens cônicas de dois tamanhos, conforme as imagens. Nessas condições, é correto afirmar que a diferença entre as áreas das superfícies dessas embalagens: c

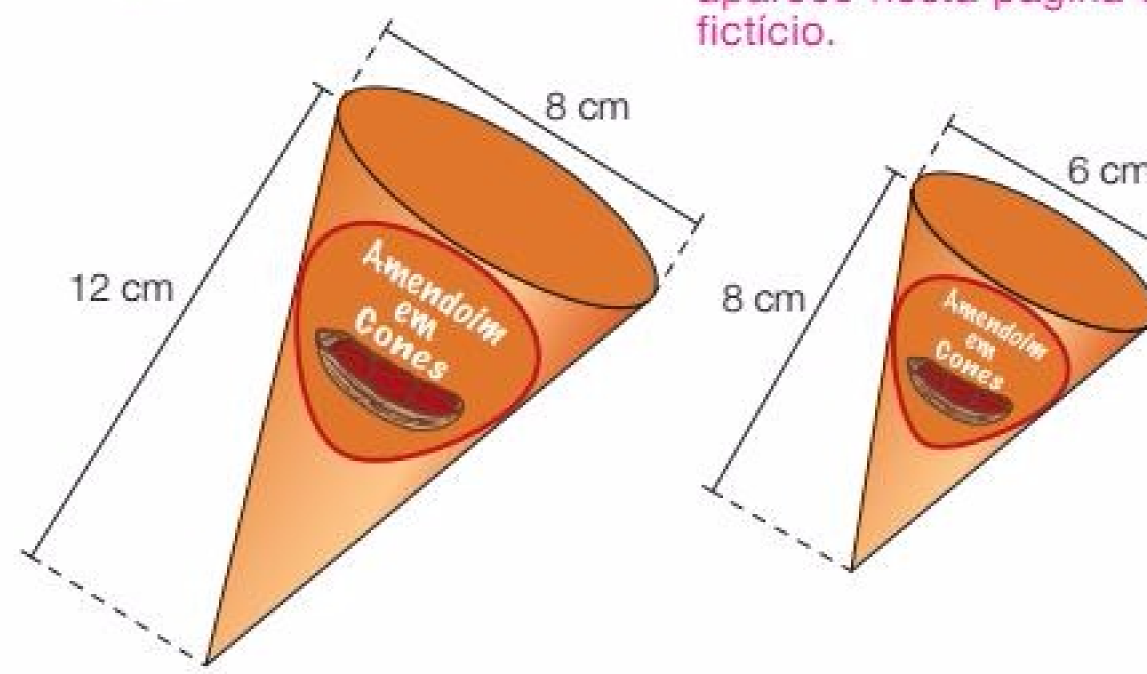
a) é maior que $140\,cm^2$.

b) está entre $110\,cm^2$ e $140\,cm^2$.

c) está entre $90\,cm^2$ e $110\,cm^2$.

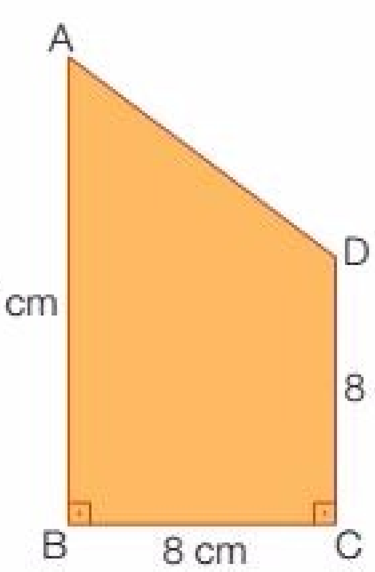
d) é menor que $90\,cm^2$.

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.



Ilustrações: Acervo da editora

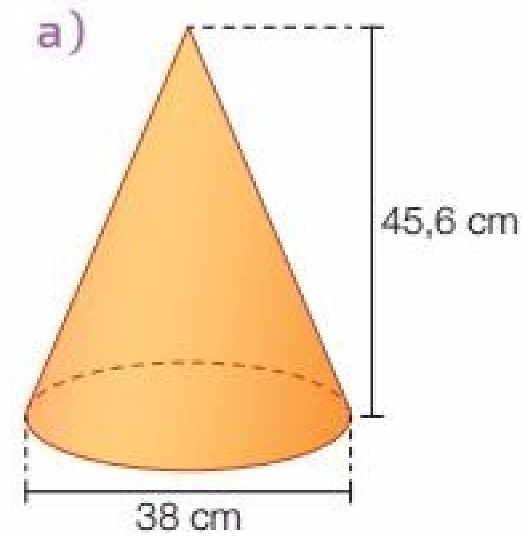
128. Qual é a área total da superfície do sólido obtido pela rotação do trapézio a seguir em torno do lado $\overline{AB}$? $854{,}08\,cm^2$



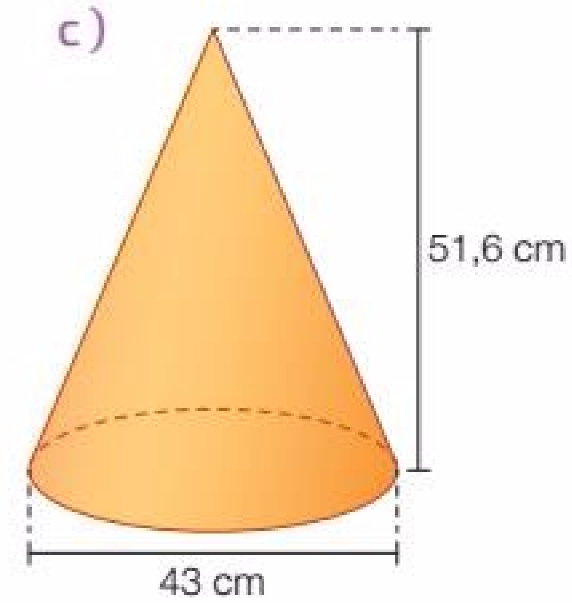
Acervo da editora

129. Qual dos cones a seguir tem a área da superfície maior que a de um cilindro reto com raio da base igual a 15 cm e altura igual a 40 cm, e menor que a de um cubo com 30 cm de aresta? c

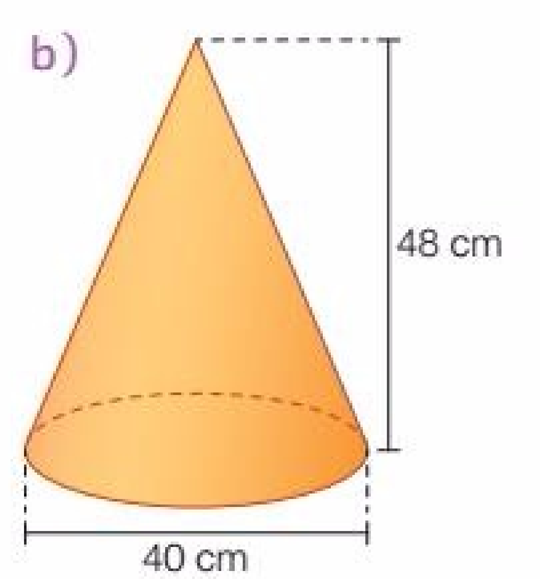
a)



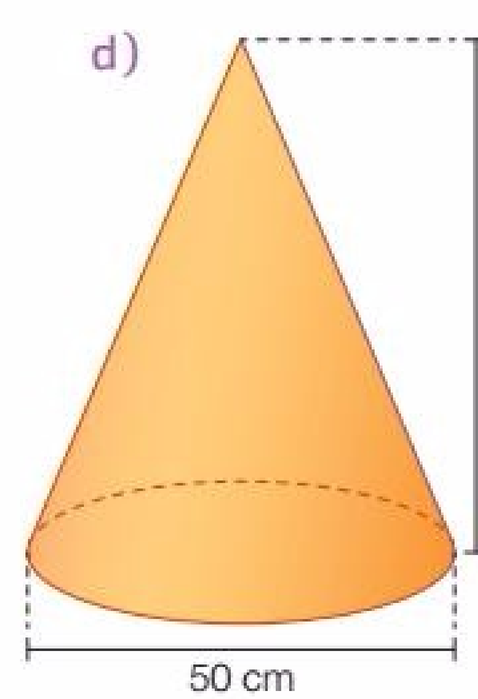
c)



b)



d)

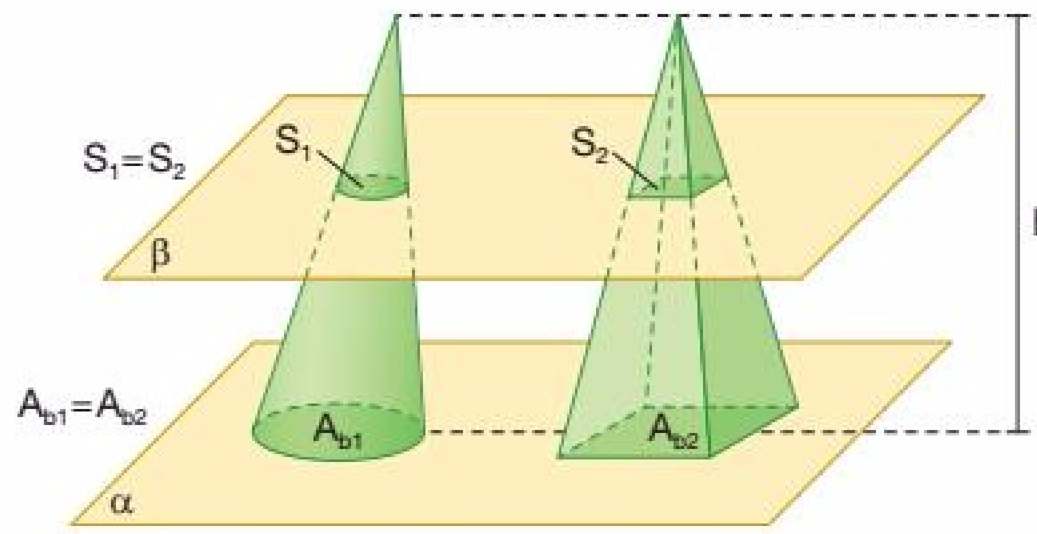


Ilustrações: Acervo da editora

Volume do cone

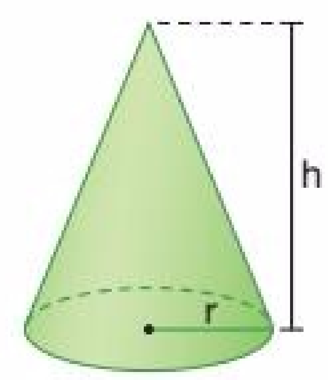
Assim como realizado no estudo do volume do cilindro, utilizaremos o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de um cone. Inicialmente, considere um cone e uma pirâmide com a mesma altura e com as bases de mesma área contidas em um mesmo plano α.

Qualquer plano β, paralelo a α, que secione os sólidos determinará regiões de mesma área.

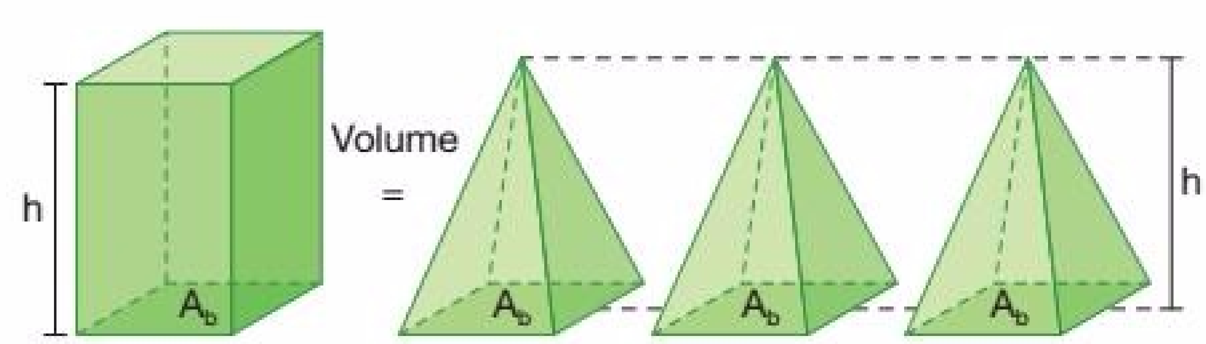


Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone e o da pirâmide são iguais. Como o volume da pirâmide é dado por $V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$, temos que o volume do cone é dado por:

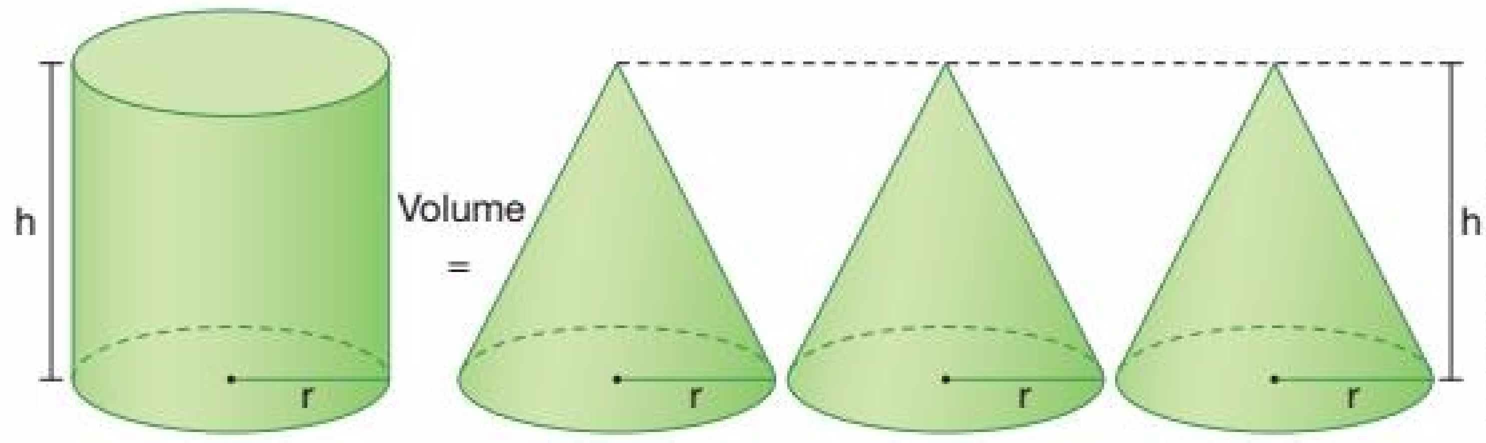
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$



Estudamos que, se um prisma e uma pirâmide de mesma altura têm bases de áreas iguais, então o volume da pirâmide corresponderá a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, ou seja, $V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$.



Também é possível verificar que, se um cone e um cilindro de mesma altura têm bases com áreas iguais, então o volume do cone corresponderá a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro: $V_{\text{cone}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$.



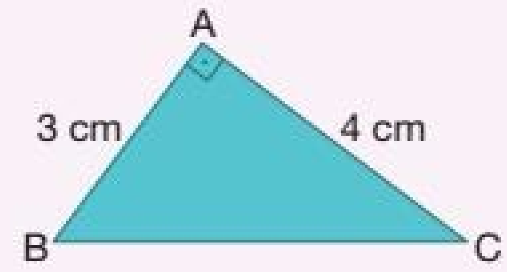
Ilustrações: Acervo da editora

Essa relação foi demonstrada há cerca de 2400 anos pelo grego Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), considerado o mais célebre astrônomo e matemático de seu tempo.

Atividades resolvidas

R16. Considere o triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm.

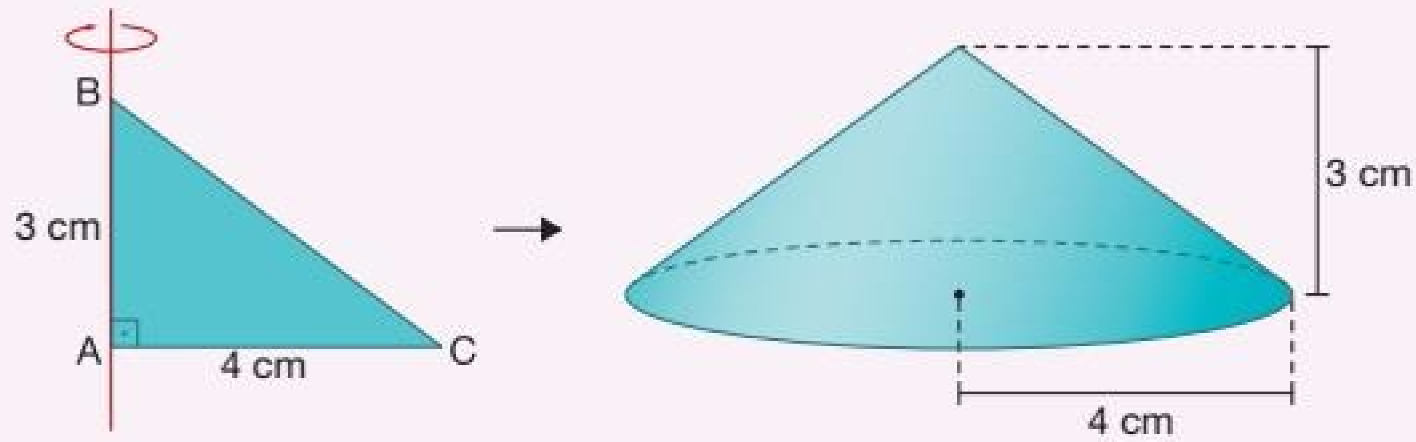
Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo em relação a cada um de seus catetos.



Resolução

- Cateto menor: 3 cm

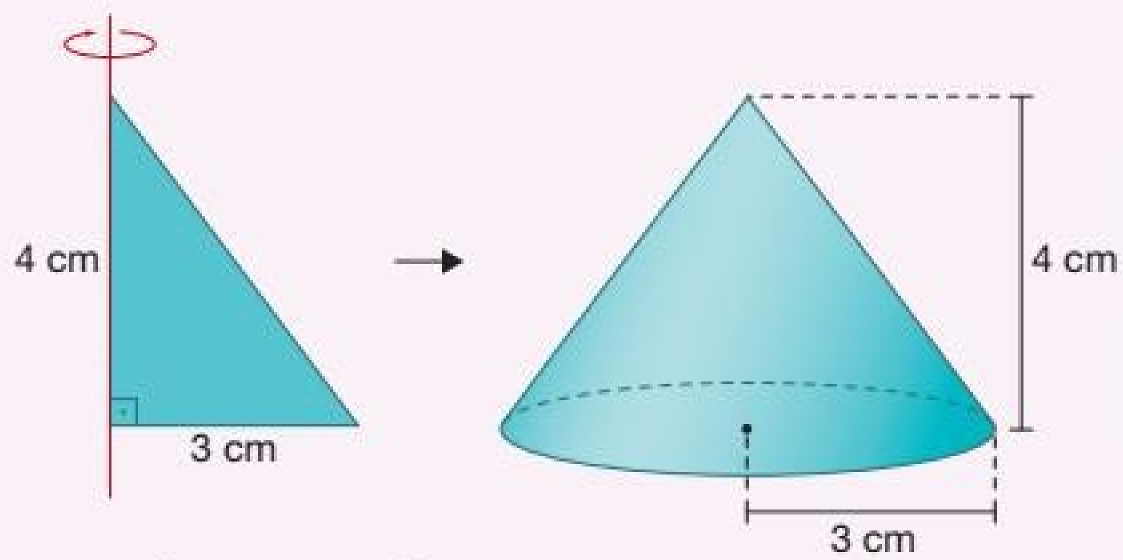
O sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto menor é um cone de altura 3 cm e raio da base 4 cm. Calculando seu volume, temos:



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = \frac{150{,}72}{3} = 50{,}24 \rightarrow \boxed{50{,}24 \text{ cm}^3}$$

- Cateto maior: 4 cm

O sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto maior é um cone de altura 4 cm e raio da base 3 cm. Logo:



Ilustrações: Acervo da editora

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = \frac{113{,}04}{3} = 37{,}68 \rightarrow \boxed{37{,}68 \text{ cm}^3}$$

É possível que dois cones obtidos a partir da rotação em torno de cada um dos catetos de um mesmo triângulo retângulo possuam volumes iguais? Justifique.

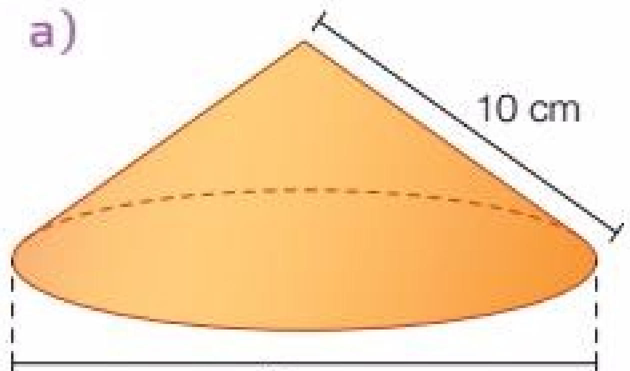
Sim, quando o triângulo retângulo for isósceles, pois os catetos terão a mesma medida e os cones serão iguais e, consequentemente, os volumes também.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

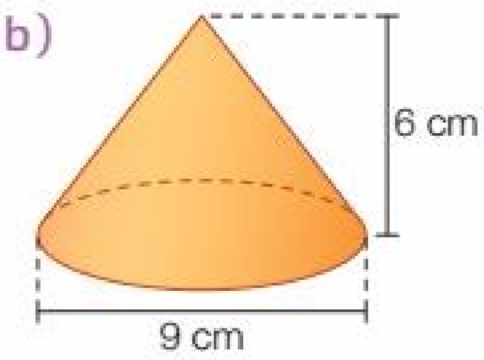
130. Calcule o volume de cada cone reto.

a)



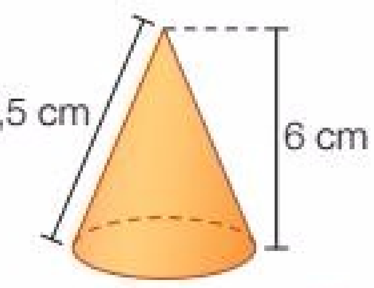
401,92 cm³

b)



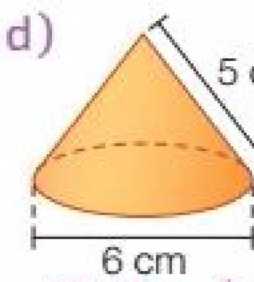
127,17 cm³

c)



39,25 cm³

d)



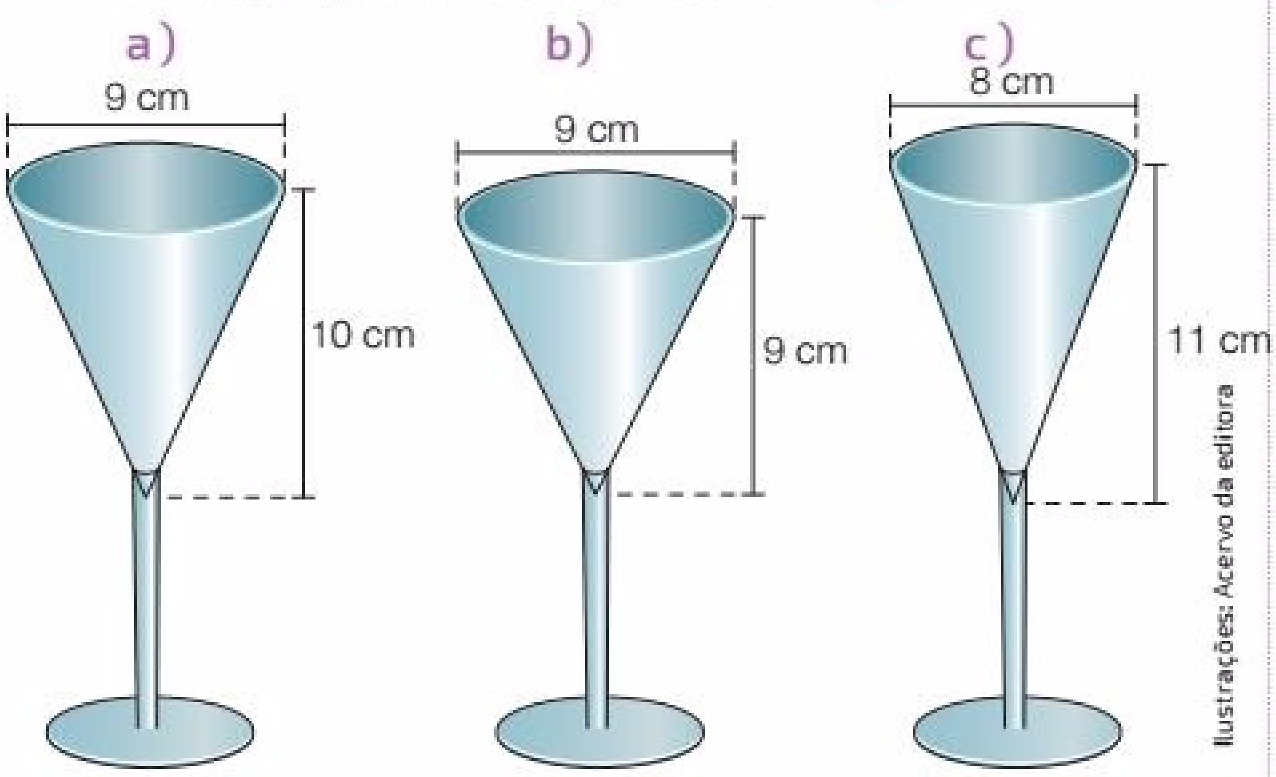
37,68 cm³

Ilustrações: Acervo da editora

131. Determine qual deve ser a altura de um cone reto, cujo raio da base mede 8 cm, para que seu volume seja 1004,8 cm³. 15 cm

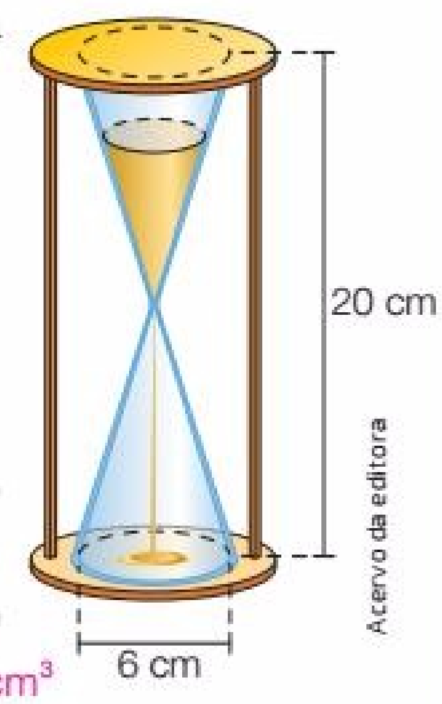
132. Dois recipientes, um cilíndrico e um cônico, têm a mesma altura e bases com raios iguais. Se a capacidade do recipiente cilíndrico é de 600 mL, então qual é a capacidade do recipiente cônico? 200 mL

133. Uma indústria de artefatos de vidro pretende fabricar taças com formato interno cônico e capacidade para 210 mL. Dentre as opções a seguir, qual é aquela cuja capacidade mais se aproxima da taça que se deseja fabricar? a



134. A ampulheta é um dos mais antigos instrumentos utilizados para medir o tempo. Ela consiste em dois recipientes transparentes que se unem por meio de um pequeno orifício, por onde a areia que está no recipiente superior escorre para o inferior a uma vazão constante. O período marcado corresponde ao tempo necessário para que toda a areia de um recipiente desça para o outro.

A ampulheta representada a seguir é formada por duas partes que se assemelham a cones idênticos, e a quantidade de areia no seu interior corresponde a 30% da capacidade de um desses cones. Para que toda a areia escoe de um cone para o outro são necessários 30 min.

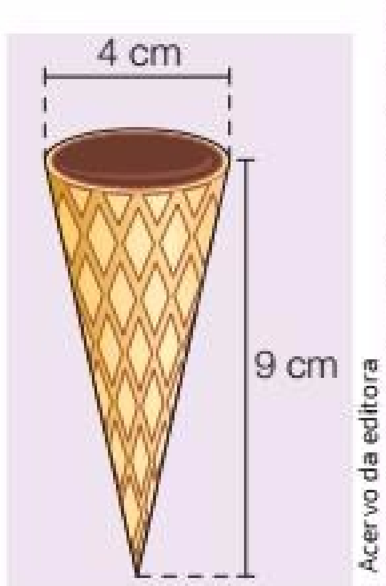


a) Qual é o volume de areia, em centímetros cúbicos, no interior da ampulheta? $28{,}26\ cm^3$

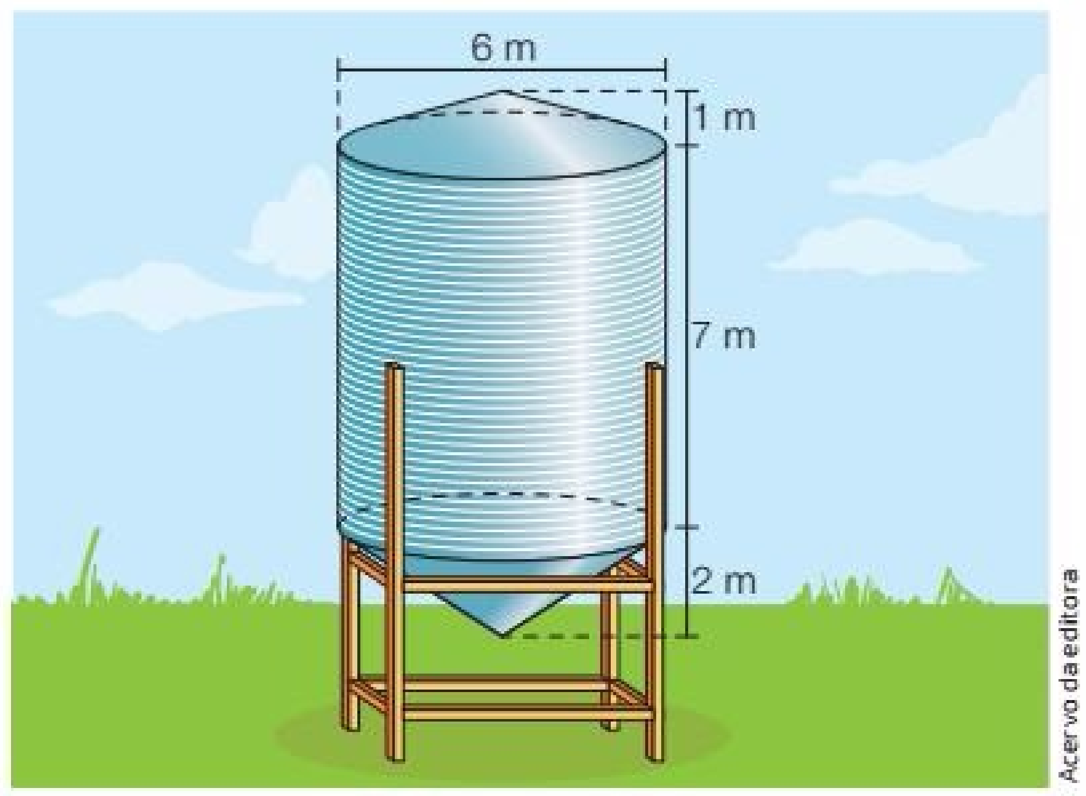
b) Quantos centímetros cúbicos de areia é necessário acrescentar na ampulheta para que ela registre períodos de 40 min? $9{,}42\ cm^3$

135. Qual é o volume de um cone equilátero cuja área da base é $50{,}24\ cm^2$? aproximadamente $134\ cm^3$

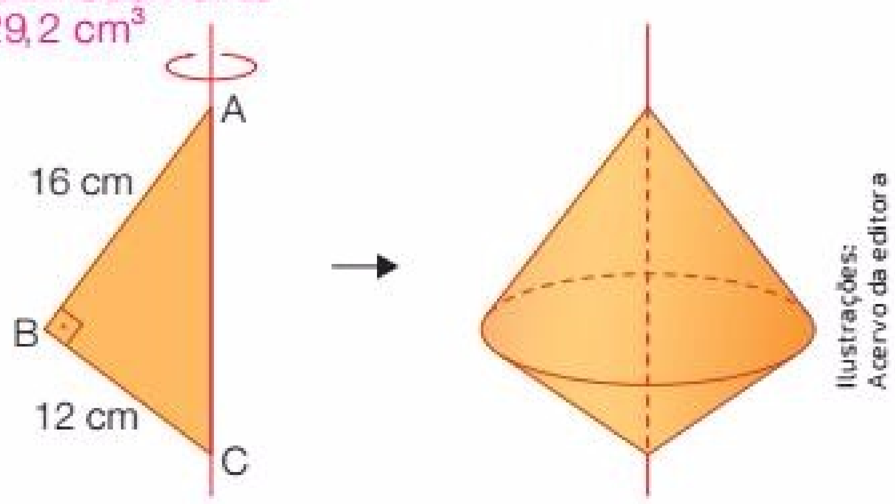
136. Márcia vende cones trufados de chocolate. O preparo dessa sobremesa consiste em rechear casquinhas cônicas de sorvete com massa a base de chocolate e creme de leite até a borda. Sabendo que cada casquinha utilizada por Márcia tem 4 cm de diâmetro da base e 9 cm de altura, aproximadamente quantos litros dessa massa ela utilizará para preparar 85 cones trufados? 3,2 L



137. A imagem a seguir representa um silo de armazenamento de grãos completamente cheio de soja. Considerando que cada metro cúbico dessa soja corresponda a 700 kg, calcule quantas sacas de 50 kg de soja correspondem à quantidade armazenada no silo. aproximadamente 3 165 sacas

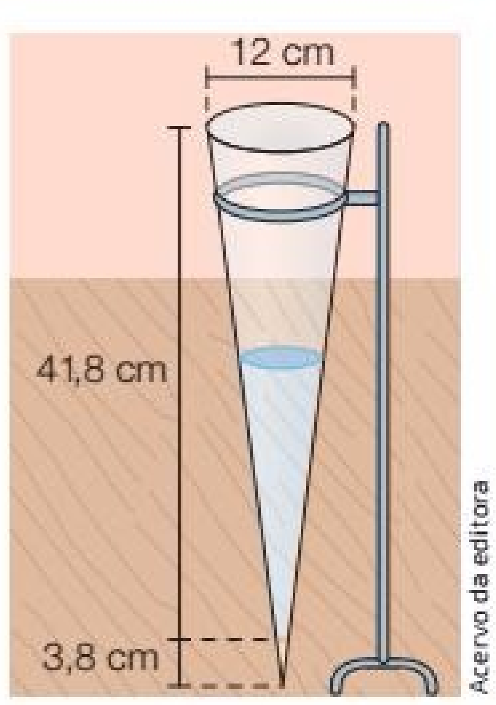


138. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo ABC em torno do maior lado. aproximadamente $1\,929{,}2\ cm^3$



139. Para se analisar a qualidade da água quanto à quantidade de resíduos sólidos existentes, um método que pode ser utilizado é o do Cone de Imhoff, em que uma amostra da água, em geral 1 litro, é colocada em um cone graduado e deixada em repouso por 1 h, fazendo com que as partículas em suspensão sedimentem-se pela ação da gravidade.

Considere um Cone de Imhoff em que foi colocada uma amostra de água e, após 1 h, verificou-se que as partículas sólidas depositadas no fundo atingiram a altura de 3,8 cm, conforme imagem. Admita que não há espaços entre as partículas e que sua densidade é de $2{,}5\ g/cm^3$.

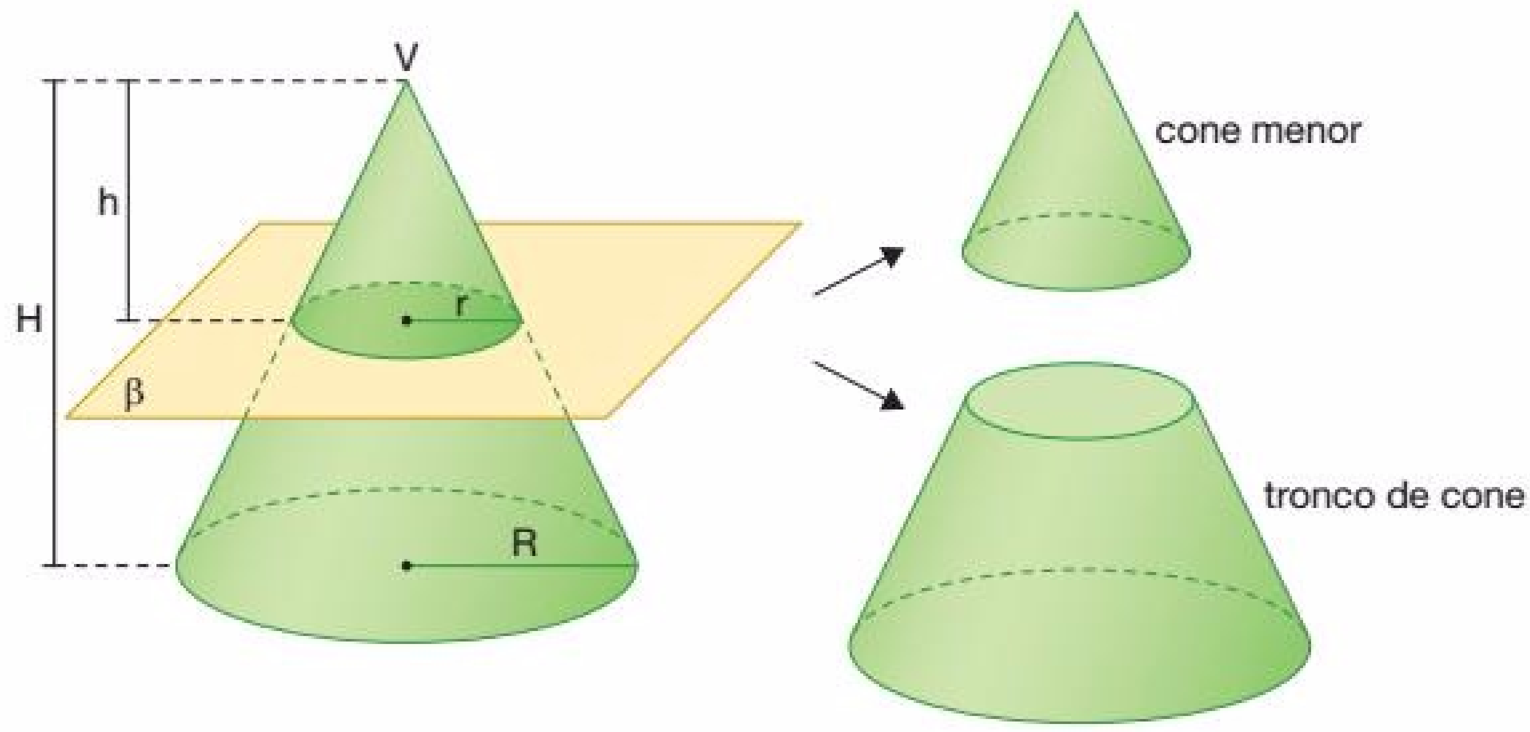


a) Calcule o valor aproximado da massa, em gramas, das partículas sólidas sedimentadas nessa amostra. aproximadamente 2,49 g

b) 25 g dessas mesmas partículas sólidas atingem, aproximadamente, que altura nesse mesmo Cone de Imhoff? aproximadamente 8,2 cm

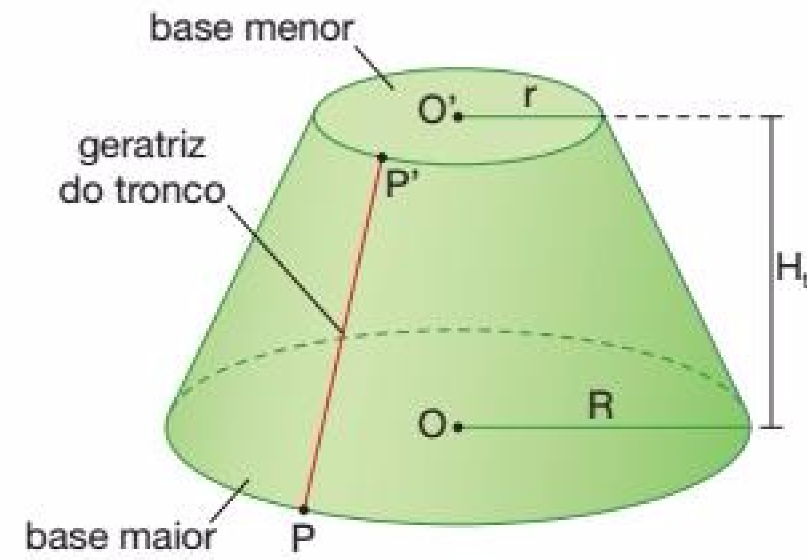
Tronco de cone reto

Na figura está representado um cone reto de altura *H* e raio da base *R*, secionado por um plano β paralelamente à sua base. Esse plano determina um cone menor de altura *h* e raio da base *r*, e um sólido denominado **tronco de cone**.



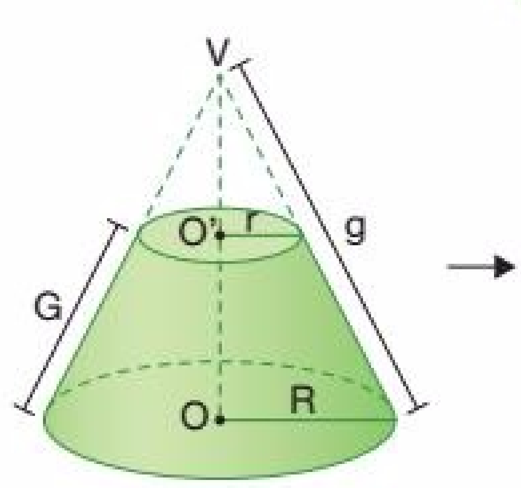
Em um tronco de cone, podemos destacar os seguintes elementos:

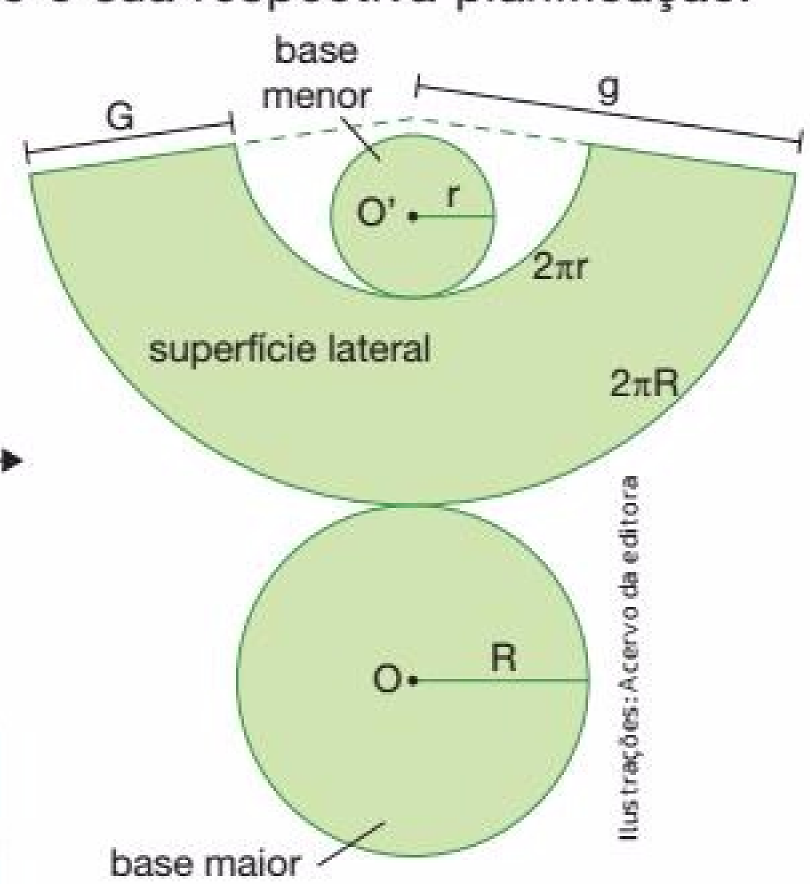
- A **base maior** é o círculo de centro *O* e raio *R*.
- A **base menor** é o círculo de centro O' e raio *r*.
- A distância H_t, entre a base maior e a base menor, corresponde à **altura** do tronco de cone.
- A **geratriz do tronco** corresponde a cada segmento contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às bases do tronco e a medida é igual à diferença entre as medidas das geratrizes dos cones maior e menor. Nesse tronco, $\overline{PP'}$ é um exemplo de geratriz do tronco.
- A **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as geratrizes do tronco.



Área da superfície de um tronco de cone reto

Observe um tronco de cone reto e sua respectiva planificação.





Ilustrações: Acervo da editora

- Área da base maior: $A_B = \pi R^2$
- Área da base menor: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral:

  Podemos obter a área lateral de um tronco de cone calculando a diferença entre as áreas laterais dos cones de vértice *V* e bases de centro *O* e O'.

$$A_\ell = A_O - A_{O'} = \pi R g - \pi r (g - G)$$

  Escrevendo a expressão acima com *g* em função de *G*, *R* e *r*, obtemos a área lateral do tronco de cone:

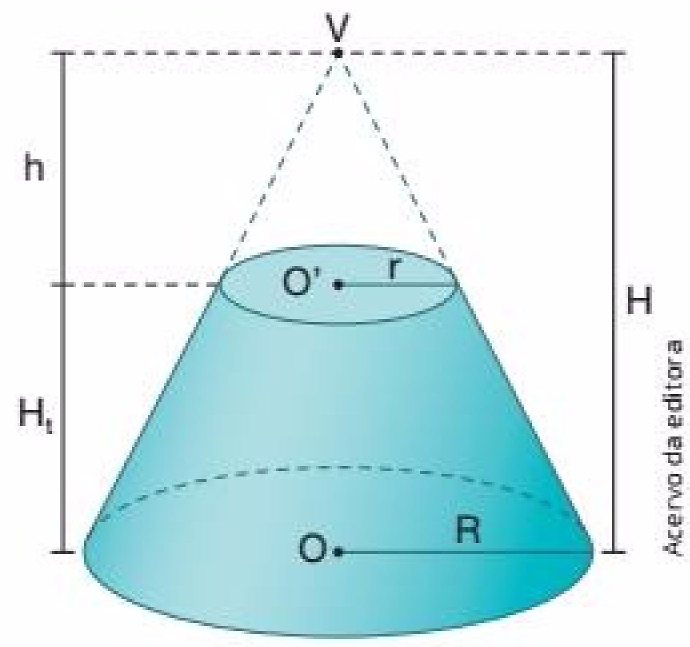
$$A_\ell = \pi G (R + r)$$

- Área total da superfície: $A_t = A_B + A_b + A_\ell$

Volume de um tronco de cone reto

Determinaremos o volume de um tronco de cone reto, como o apresentado a seguir, calculando a diferença entre os volumes dos cones de vértice *V* e bases de centro *O* e O'.

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}-\frac{\pi r^2 h}{3}$$

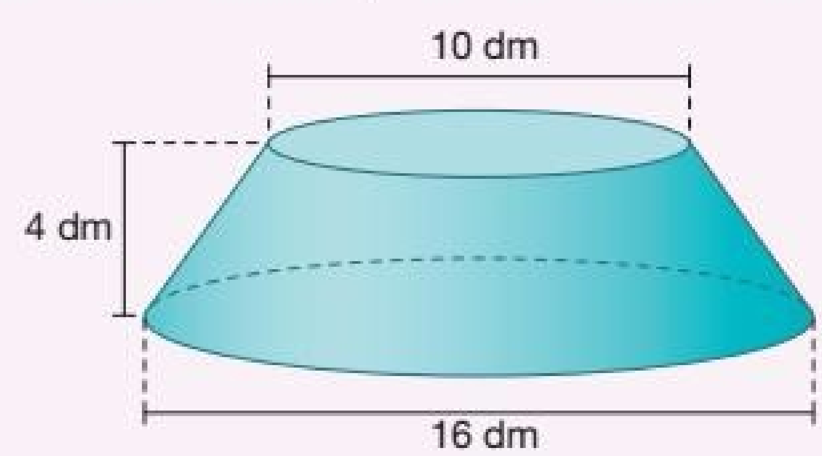


Escrevendo *H* e *h* em função de H_t, *R* e *r*, obtemos o volume do tronco de cone:

$$V=\frac{\pi H_t}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

Atividades resolvidas

R17. Em relação ao tronco de cone abaixo, calcule a área da:



a) base menor b) base maior c) superfície lateral d) superfície total

Resolução

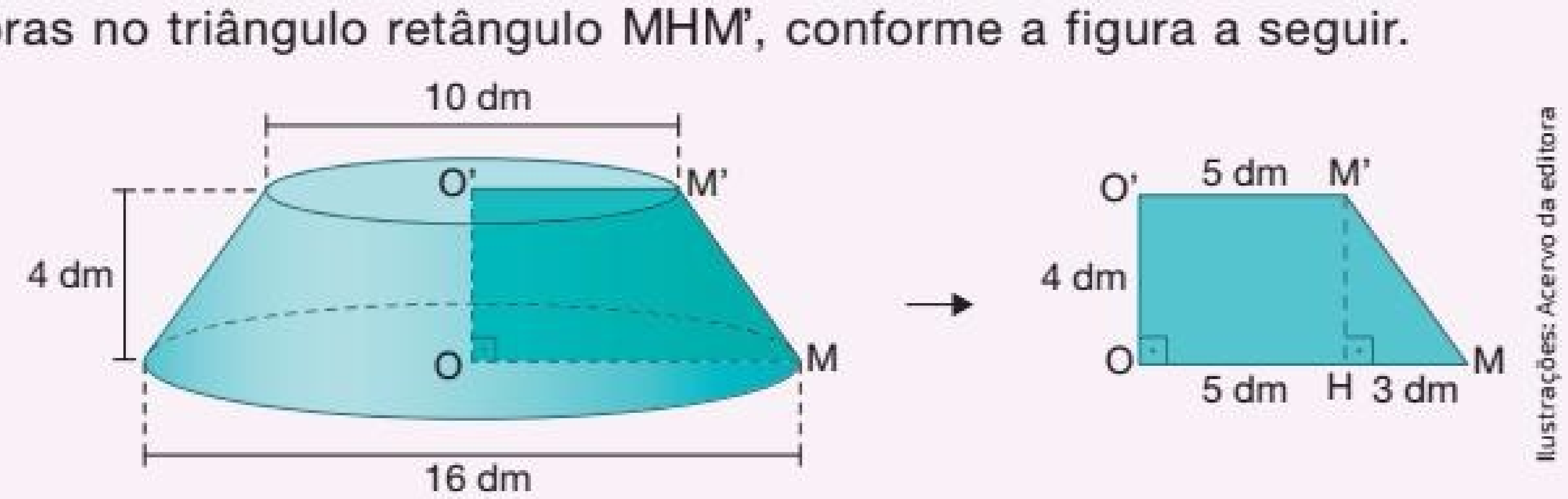
a) A base menor é um círculo de raio 5 dm, logo:

$$A_b=\pi r^2=3{,}14\cdot 5^2=78{,}5 \longrightarrow \boxed{78{,}5\ dm^2}$$

b) A base maior é um círculo de raio 8 dm, logo:

$$A_B=\pi R^2=3{,}14\cdot 8^2=200{,}96 \longrightarrow \boxed{200{,}96\ dm^2}$$

c) Inicialmente calculamos a medida da geratriz do tronco utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.



$$(MM')^2=(HM')^2+(HM)^2 \Rightarrow G^2=4^2+3^2 \Rightarrow G=5 \longrightarrow 5\ dm$$

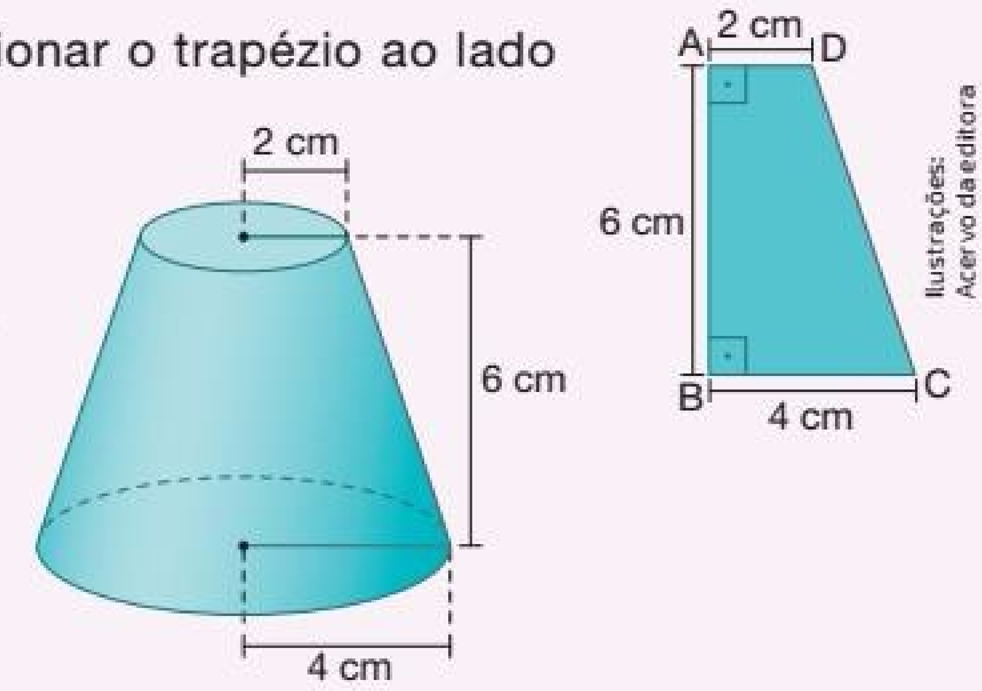
Segue que a área da superfície lateral é:

$$A_\ell=\pi G(R+r)=3{,}14\cdot 5\cdot(8+5)=15{,}7\cdot 13=204{,}1 \longrightarrow \boxed{204{,}1\ dm^2}$$

d) A área da superfície total é:

$$A_t=A_B+A_b+A_\ell=200{,}96+78{,}5+204{,}1=483{,}56 \longrightarrow \boxed{483{,}56\ dm^2}$$

R18. Calcule o volume do sólido obtido ao se rotacionar o trapézio ao lado em torno do lado $\overline{AB}$.



Resolução

Ao rotacionar o trapézio em torno do lado $\overline{AB}$, obtemos um tronco de cone reto.

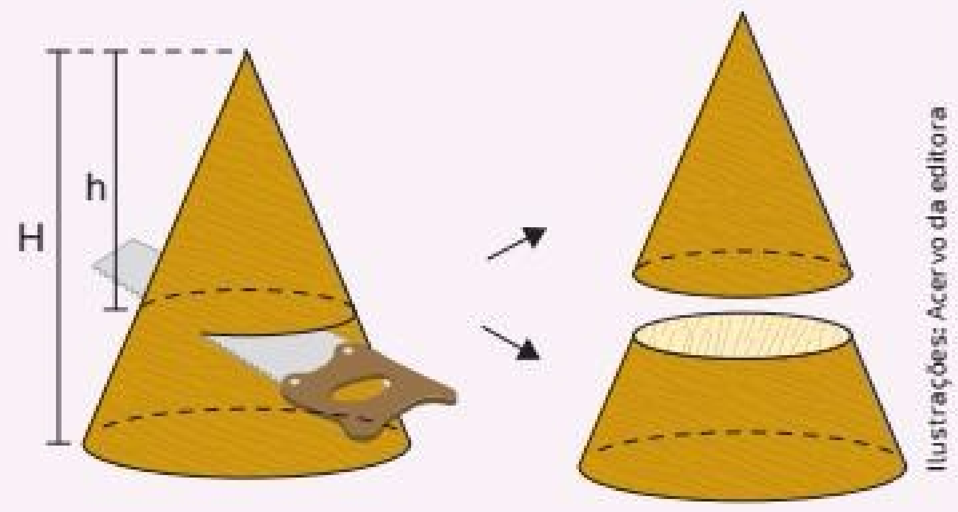
Segue que:

$$V = \frac{\pi h_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{3{,}14 \cdot 6}{3}\left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) =$$

$$= 6{,}28 \cdot 28 = 175{,}84 \rightarrow 175{,}84 \text{ cm}^3$$

R19. Um cone reto de madeira maciça tem massa igual a 27 kg e foi serrado, obtendo-se duas peças: um cone reto menor e um tronco de cone reto.

Considerando a massa da madeira proporcional ao seu volume, calcule a massa de cada peça obtida, sabendo que a razão entre as alturas *H* e *h* é $\frac{3}{2}$.



Resolução

Sejam *V* e V_C os volumes do cone inicial e do cone menor, respectivamente. Como os dois cones são semelhantes e a razão entre suas alturas é $\frac{3}{2}$, então a razão de semelhança entre seus volumes é dada por:

$$\frac{V}{V_C} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V_C} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V_C} = \frac{27}{8} \Rightarrow V_C = \frac{8}{27}V$$

Desse modo, calculamos a massa do cone menor pela seguinte regra de três:

volume (u.v.)	massa (kg)
V	27
V_C	x

$$\frac{V}{\underbrace{V_C}_{\frac{8}{27}V}} = \frac{27}{x} \Rightarrow \frac{V}{\frac{8}{27}V} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{27} \cdot 27 \Rightarrow x = 8 \rightarrow 8 \text{ kg}$$

Dois cones são semelhantes se possuem medidas correspondentes semelhantes (raio da base, altura e geratriz). Se a razão de semelhança entre suas medidas for *k*, então a razão de semelhança entre seus volumes será k^3.

A massa do tronco de cone é dada por $27 - 8 = 19 \rightarrow 19$ kg.

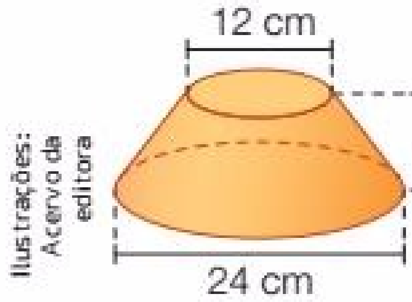
Portanto, a massa do cone menor é 8 kg e a do tronco de cone é 19 kg.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

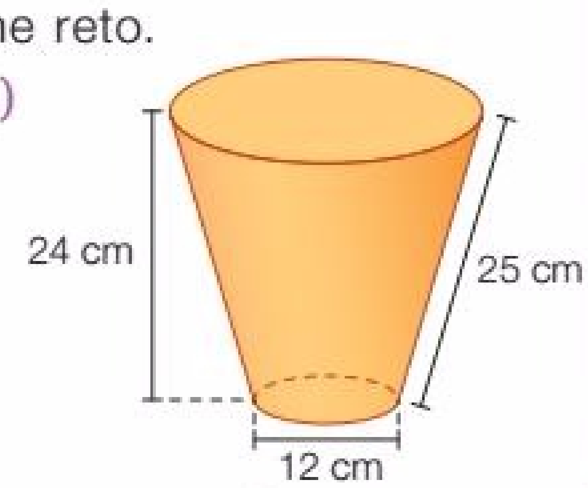
140. Determine a área total da superfície e o volume de cada tronco de cone reto.

a)



A: 1 130,4 cm²; V: 2 110,08 cm³

b)



A: 2 135,2 cm²; V: 7 108,96 cm³

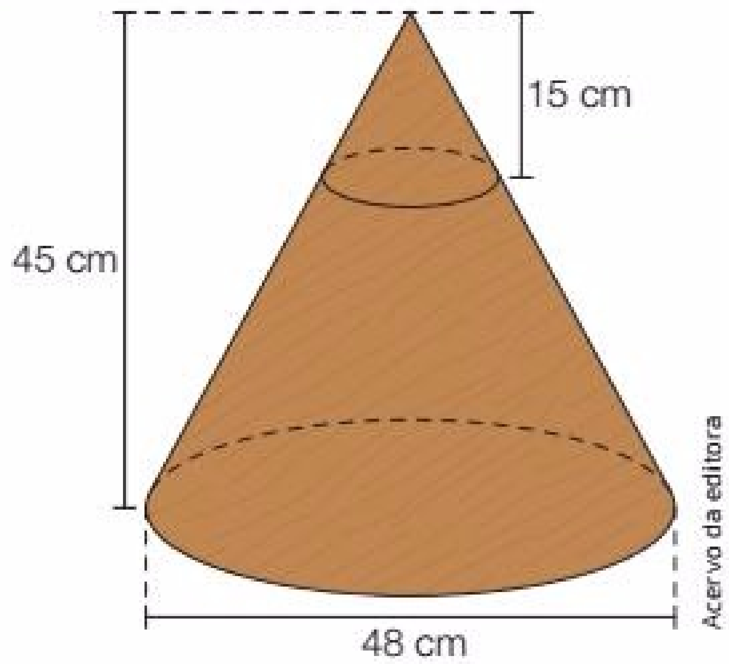
141. Considere um tronco de cone reto cuja área lateral é 405π cm², a geratriz mede 15 cm e o raio da base maior é o dobro do raio da base menor.

a) Qual é a medida do raio da base maior? E da base menor? 18 cm; 9 cm

b) Qual é a altura desse tronco de cone? 12 cm

c) Calcule a área total da superfície desse tronco de cone. 810π cm²

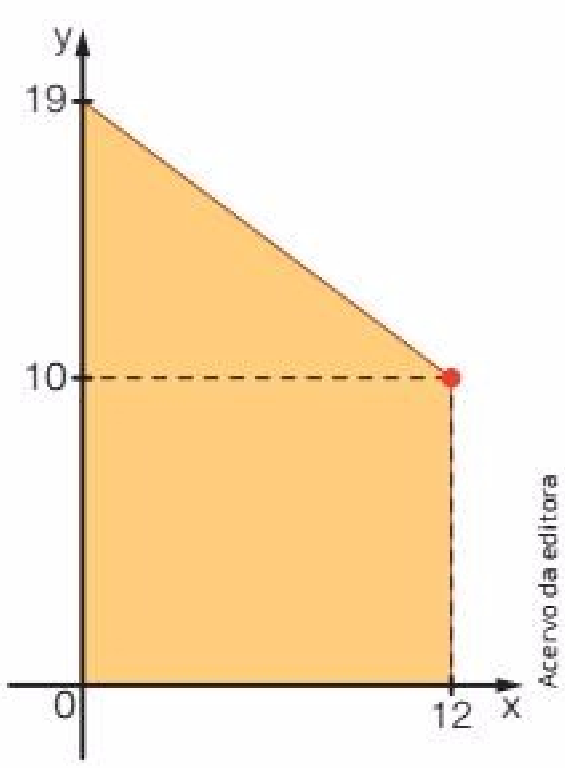
142. Um marceneiro cortou uma peça de madeira em forma de cone reto paralelamente à base, conforme a figura, obtendo um cone menor e um tronco de cone.



a) Calcule as medidas dos raios das bases menor e maior do tronco de cone. 8 cm; 24 cm

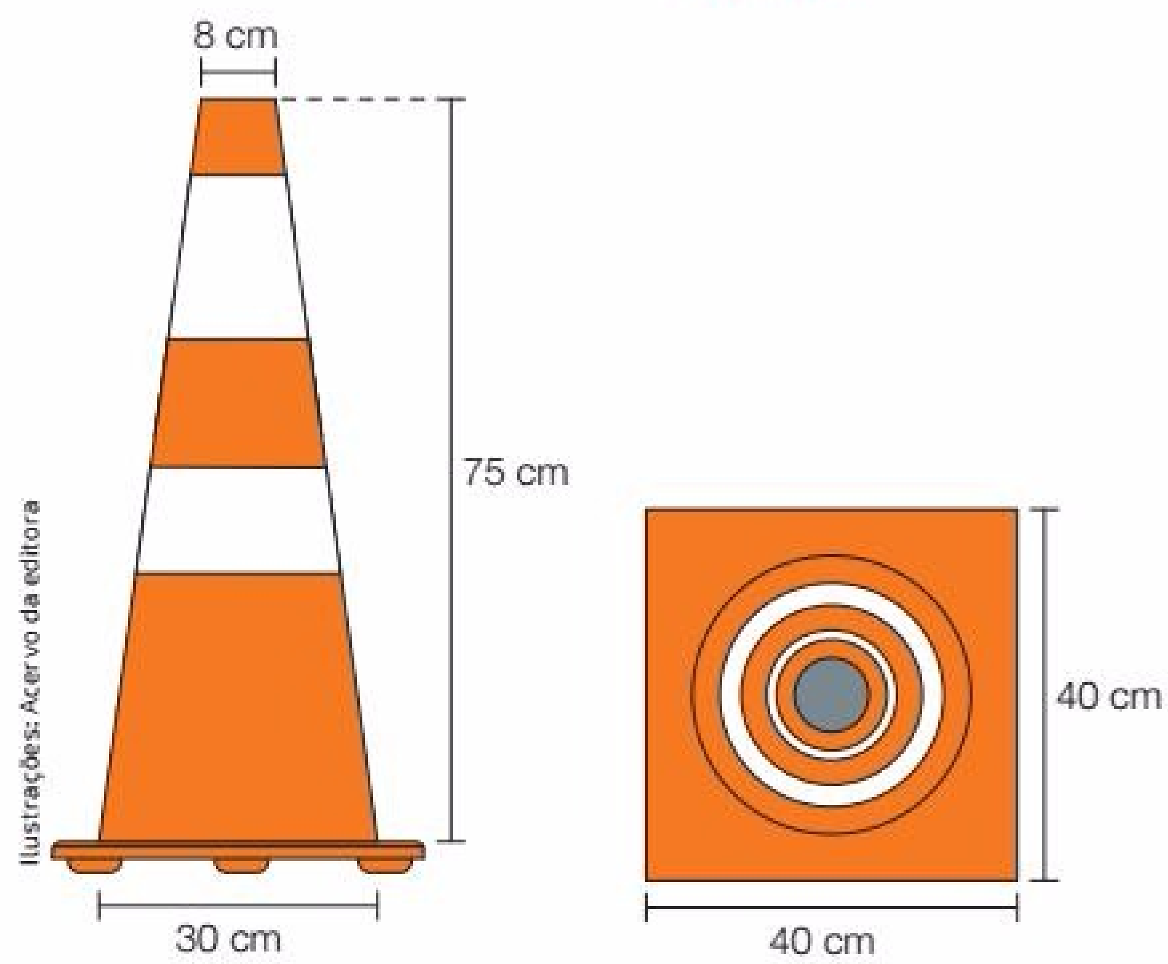
b) Qual é a área total da superfície do cone menor? E do tronco de cone? 628 cm²; 5 425,92 cm²

143. Calcule a área total da superfície do sólido obtido ao se rotacionar em torno do eixo *x* o seguinte polígono. 2 813,44 u.a.



144. O rebolo cônico é um instrumento musical de percussão cuja forma é de um tronco de cone reto vazado na base menor e geralmente revestido de couro na base maior. Para confeccionar um instrumento desses com 50 cm de altura e raios das bases menor e maior medindo, respectivamente, 10 cm e 15 cm, quantos centímetros quadrados de madeira ou alumínio são necessários para confeccionar sua superfície lateral? aproximadamente 3 948,55 cm²

145. Observe as vistas frontal e superior de um cone de sinalização. Note que ele é composto por um tronco de cone e uma base quadrada. Calcule, em centímetros quadrados, a área da superfície desse cone de sinalização. aproximadamente 5 416 cm²

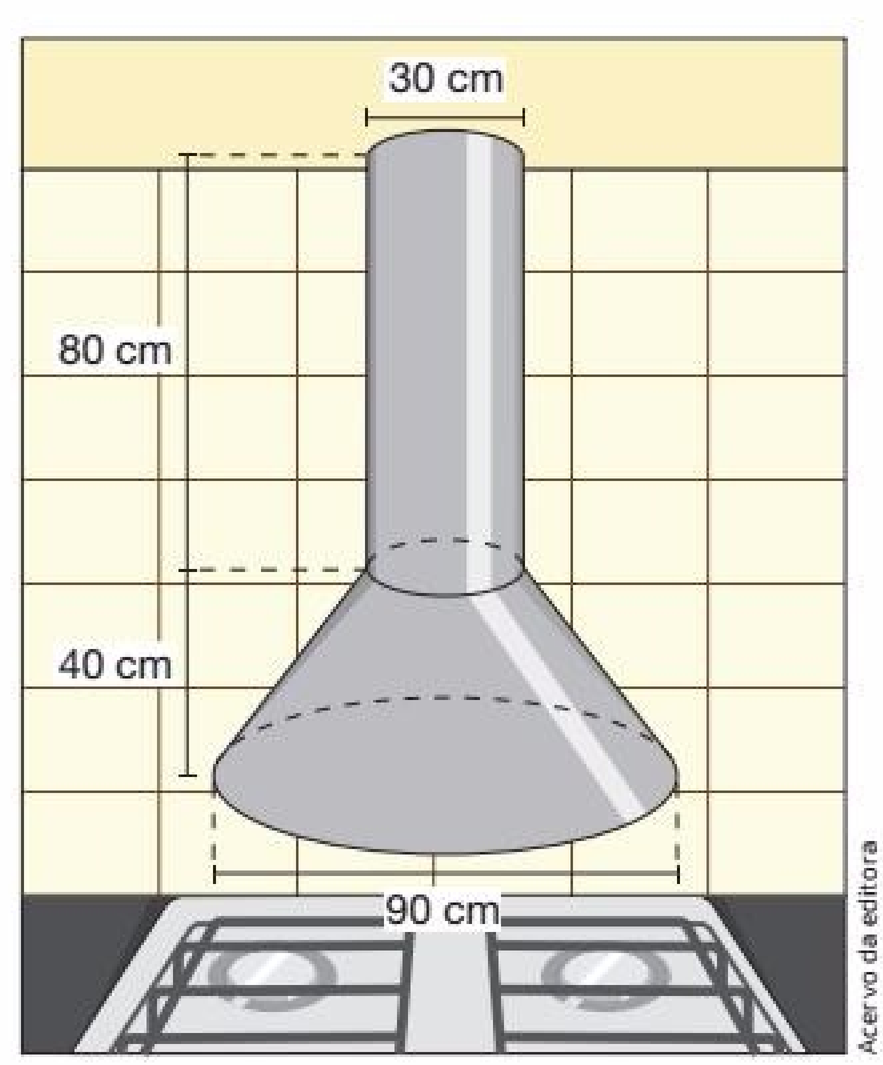


vista frontal

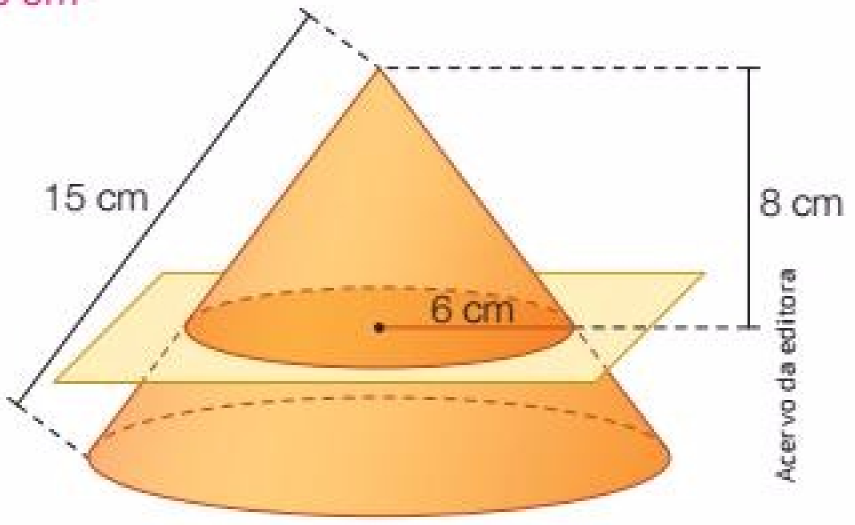
vista superior

146. Uma fábrica produz copos plásticos descartáveis cujas formas lembram troncos de cones retos. Um desses copos tem o fundo (base menor) com raio de 2,7 cm e a parte aberta (base maior) com raio de 4,5 cm. Sabendo que a superfície externa desses copos mede $66{,}33\pi$ cm², qual é a altura de cada um deles? 8 cm

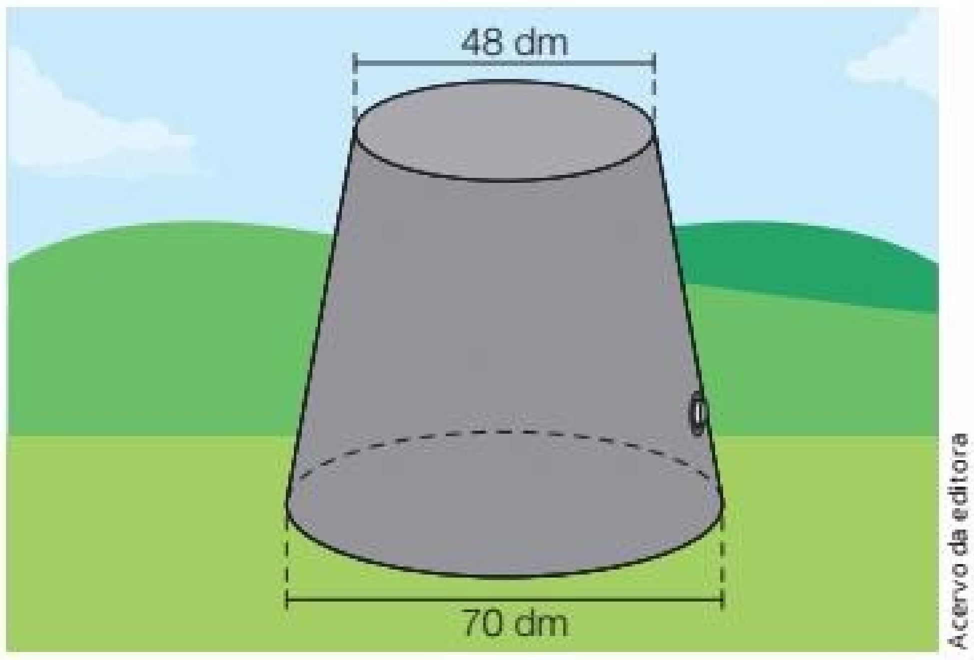
147. José comprou uma coifa formada por duas partes que lembram um tronco de cone e um cilindro. Ele deseja pintar a parte lateral externa do alumínio que reveste essa coifa com certa tinta, de modo que a cor escolhida combine com a decoração do ambiente. Quantas latas de tinta com 500 mL serão necessárias, sabendo que 100 mL da tinta que José escolheu permitem cobrir 900 cm² de alumínio? 4 latas



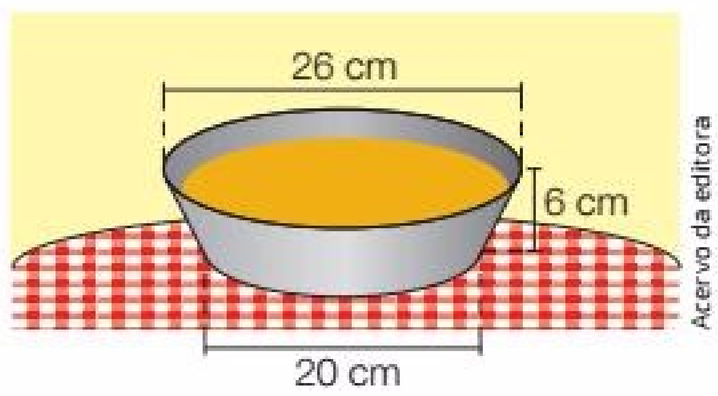
148. Considere um cone reto com geratriz medindo 15 cm. Ao secionar esse cone por um plano paralelo à sua base e distando 8 cm de seu vértice, determina-se um círculo de raio 6 cm. Calcule a área total da superfície do tronco de cone obtido. $602{,}88\ cm^2$



149. Um reservatório de água tem a forma de tronco de cone reto, com diâmetro de 70 dm na base maior e 48 dm na base menor. Sabendo que sua capacidade é de 165 854,8 L, qual é a altura desse reservatório? 60 dm



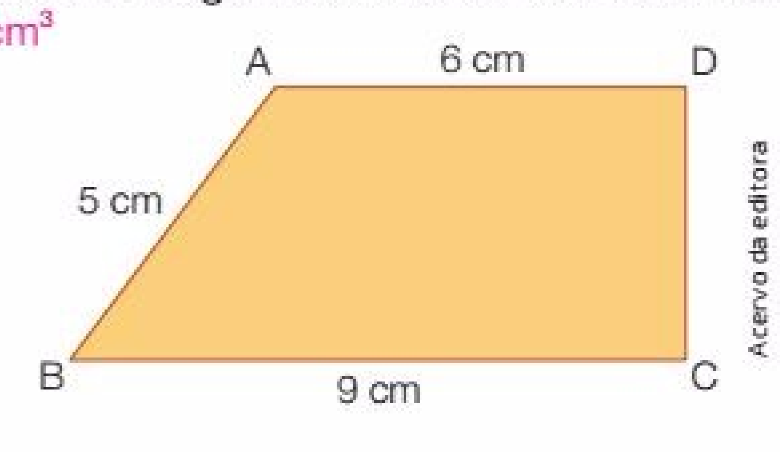
150. Uma forma de bolo tem o formato de um tronco de cone reto, em que o fundo corresponde à base menor. A fim de reservar espaço para que a massa de certo bolo cresça ao assar, é acondicionada na forma uma quantidade de massa correspondente a 75% de sua capacidade.



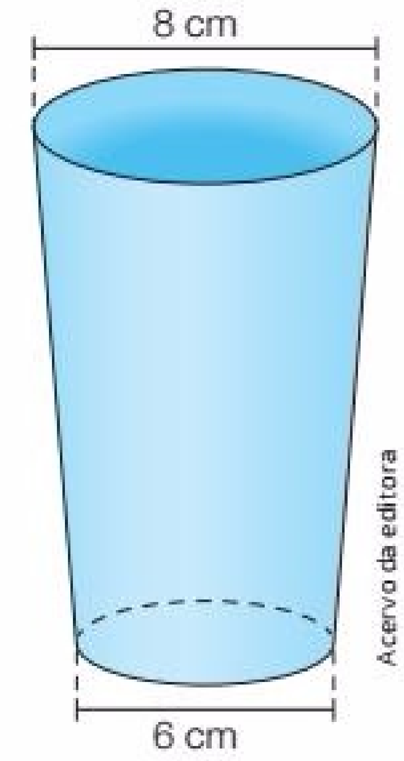
a) Qual é a capacidade dessa forma? $2\,505{,}72\ cm^3$

b) No preparo do bolo citado, qual é o volume máximo de massa, em mililitros, que deve ser acondicionado na forma? 1879,28 mL

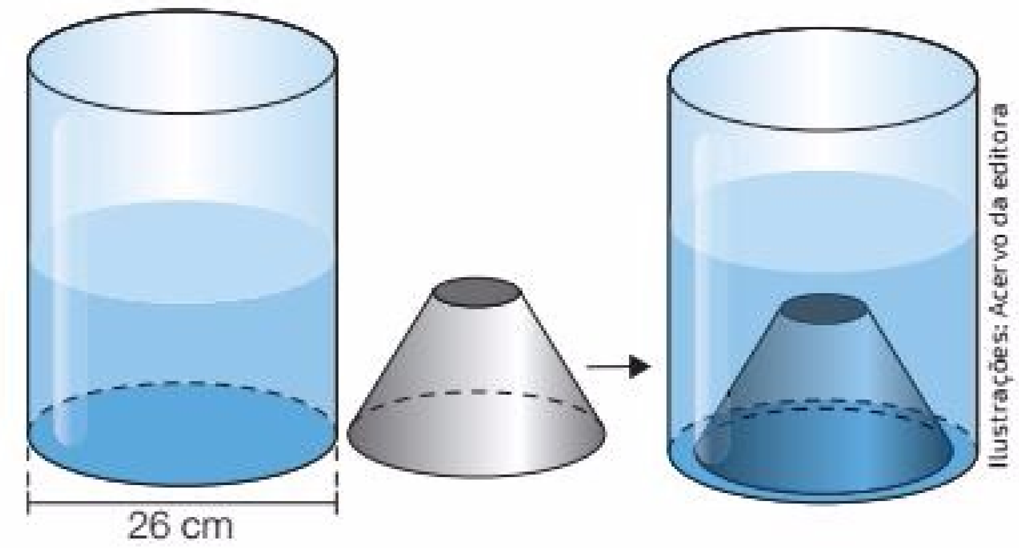
151. Qual é o volume do sólido obtido ao se rotacionar o trapézio a seguir em torno do lado $\overline{DC}$? $715{,}92\ cm^3$



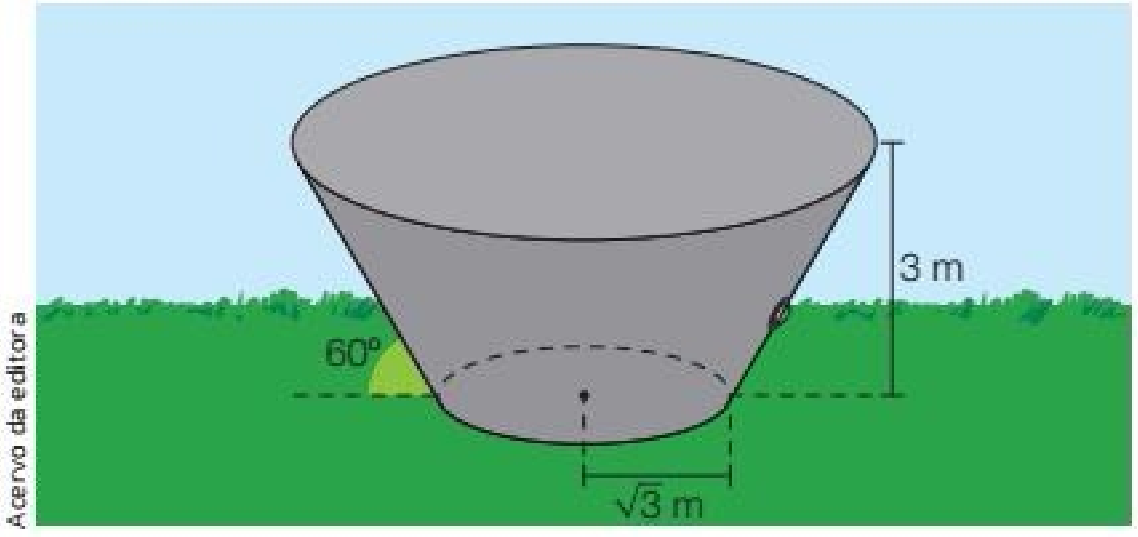
152. O copo representado ao lado tem a forma de um tronco de cone reto e sua capacidade é de 464,72 mL. Quantos centímetros de altura tem esse copo? 12 cm



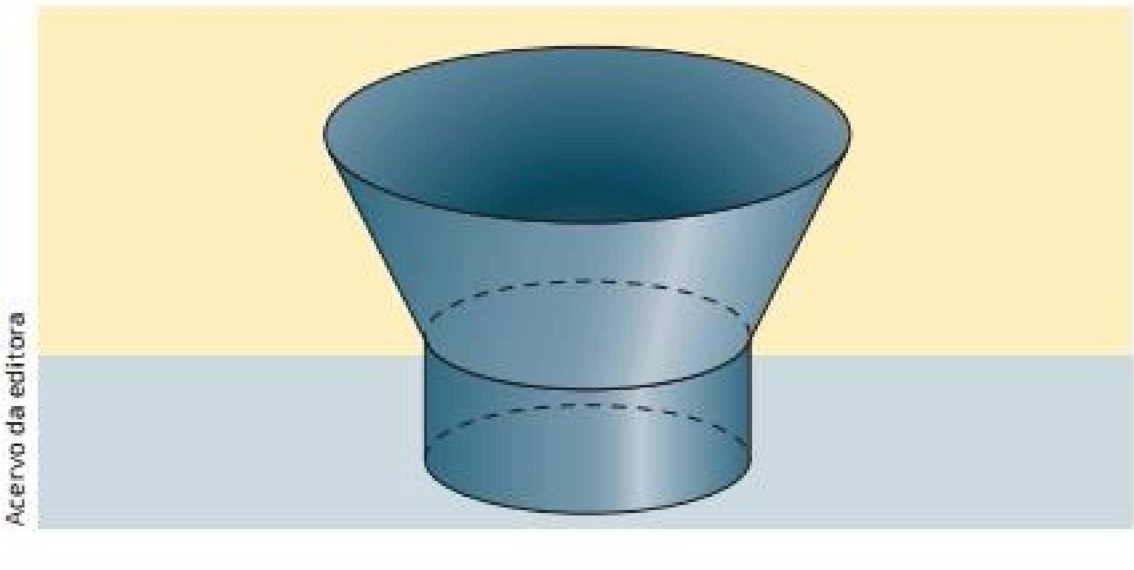
153. Ao submergir totalmente a peça maciça com forma de tronco de cone reto indicada a seguir no recipiente cilíndrico, o nível da água aumenta 4 cm. Determine a altura dessa peça, sabendo que os raios das bases medem $\sqrt{13}$ cm e $3\sqrt{13}$ cm. 12 cm



154. Um reservatório tem o formato de tronco de cone reto, cuja superfície lateral forma um ângulo de 60° em relação à horizontal. Sabendo que esse reservatório tem 3 m de altura e $\sqrt{3}$ m de raio da base menor, qual é sua capacidade em litros? 65 940 L



155. A partir da imagem a seguir, elabore uma questão relacionada ao volume do tronco de cone. Depois, troque a questão com um colega e, ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.



Capítulo 8

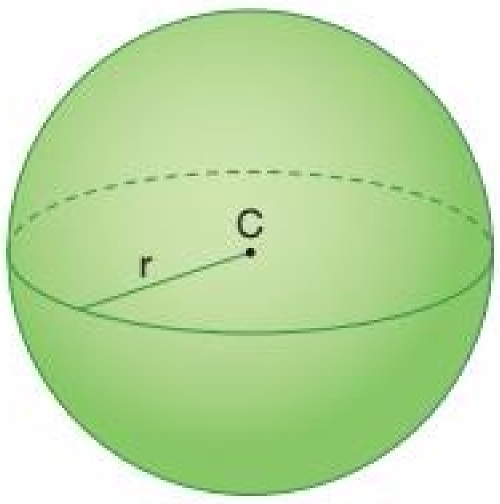
Esfera

Assim como em outros esportes, no vôlei a bola oficial tem medidas específicas. De acordo com as normas da Confederação Brasileira de Vôlei, essa bola, que tem forma de esfera, deve ter raio de aproximadamente 10,5 cm.

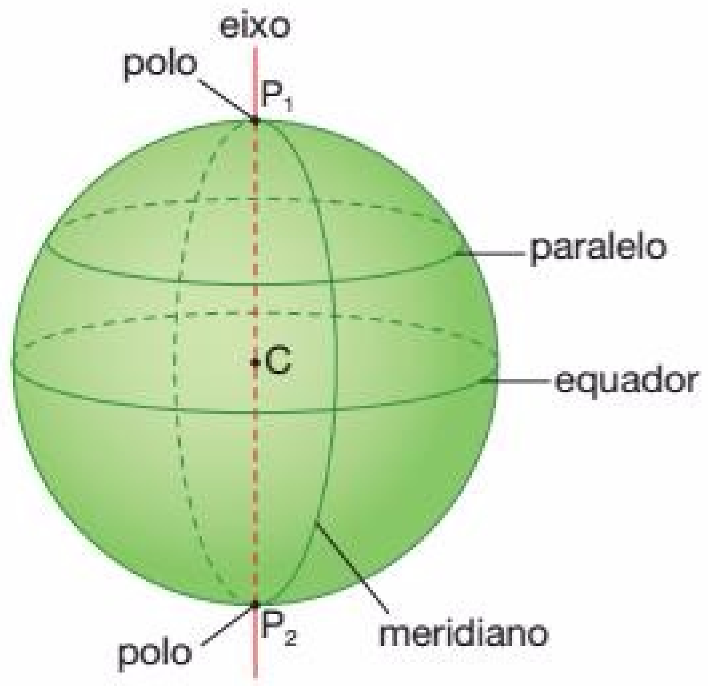

Photodisc/Getty Images

bola de vôlei

Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo *r* e um ponto *C*. Denomina-se **esfera** o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a *r* a partir do ponto *C*. Nesse caso, temos uma esfera de centro *C* e raio *r*.

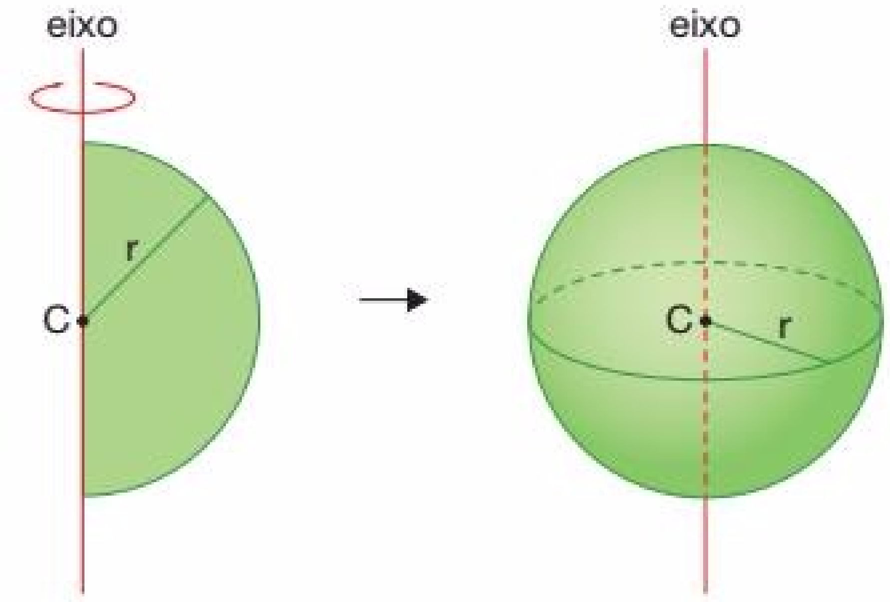


Em uma esfera, podemos destacar os seguintes elementos:



- O **centro** é o ponto *C*.
- O **eixo** é a reta que contém o centro da esfera.
- Os **polos** são os pontos de interseção da superfície da esfera com o eixo. Nessa esfera, os polos são P_1 e P_2.
- O **equador** é a circunferência obtida ao se secionar a esfera por um plano perpendicular ao eixo e que passe pelo centro *C*.
- Os **paralelos** são as circunferências obtidas ao se secionar a esfera por planos paralelos ao equador.
- Os **meridianos** são as circunferências obtidas ao se secionar a esfera por planos que contêm o eixo.

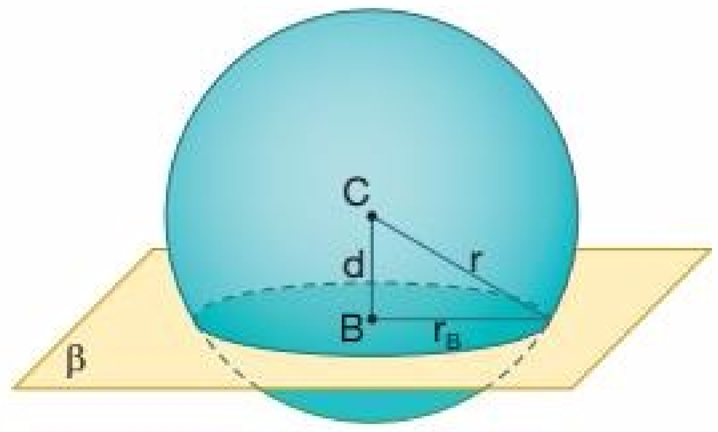
Assim como o cilindro e o cone retos, a esfera também é um sólido de revolução, que pode ser obtida ao se rotacionar um semicírculo em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro.



Ilustrações: Acervo da editora

Volume da esfera

Considere uma esfera de centro C e raio r secionada por um plano β.




Photodisc/Getty Images

O planeta Terra tem a forma aproximada de uma esfera, com volume de cerca de 1 100 bilhões de quilômetros cúbicos.

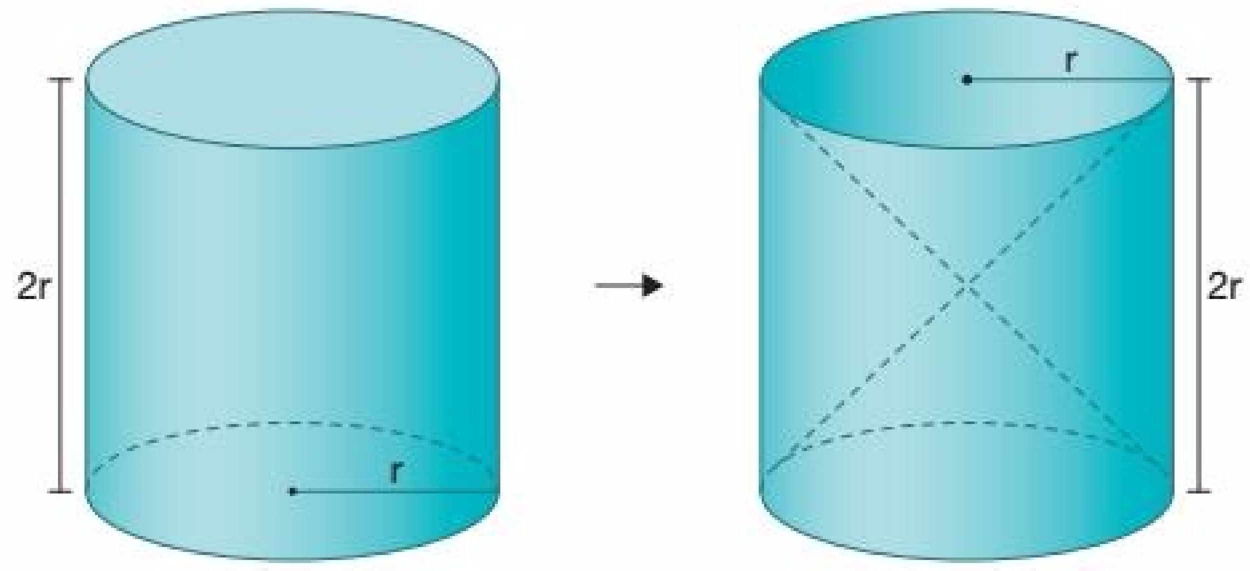
A partir do círculo de centro B e raio r_B, obtido na seção, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$r^2 = r_B{}^2 + d^2 \Rightarrow r_B{}^2 = r^2 - d^2$$

Escrevendo a área do círculo de centro B em função de r e d, temos:

$$S_B = \pi r_B{}^2 \Rightarrow S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

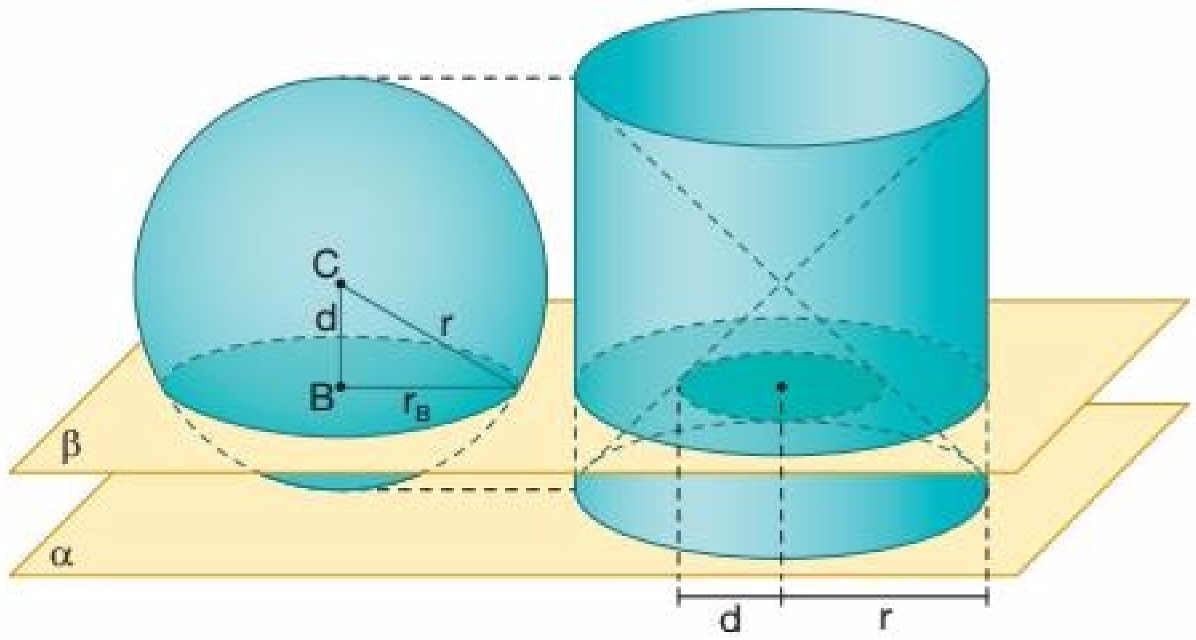
Considere agora um sólido **X**, obtido ao retirarmos de um cilindro reto de raio r e altura $2r$ (cilindro equilátero) dois cones retos de raio e altura r, conforme as figuras a seguir.



O volume V desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retirados:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

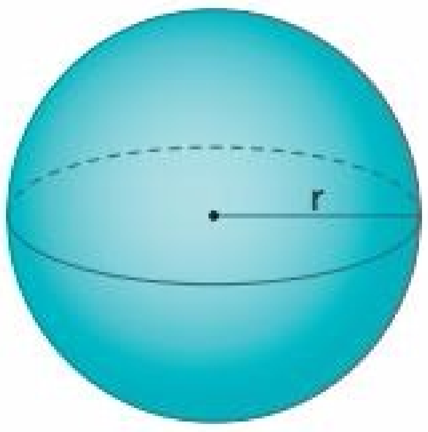
Para obtermos o volume da esfera, vamos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, considerando a esfera e o sólido **X**, obtidos anteriormente, apoiados em um plano α e secionados por um plano β, paralelo a α.



A área S_C da seção obtida no sólido **X** é dada pela área da coroa definida pelos círculos de raio r e d:

$$S_C = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

Como a área da seção determinada na esfera é dada por $S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$, conforme visto anteriormente, temos que as áreas das duas seções obtidas são iguais $\left(S_B = S_C\right)$. Dessa maneira, pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera e o do sólido **X** são iguais.



Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, o volume da esfera de raio r é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Capítulo 8

Atividades resolvidas

R20. Um plano α seciona uma esfera a 8 cm de seu centro, obtendo-se um círculo de raio 6 cm. Em relação à esfera, calcule:

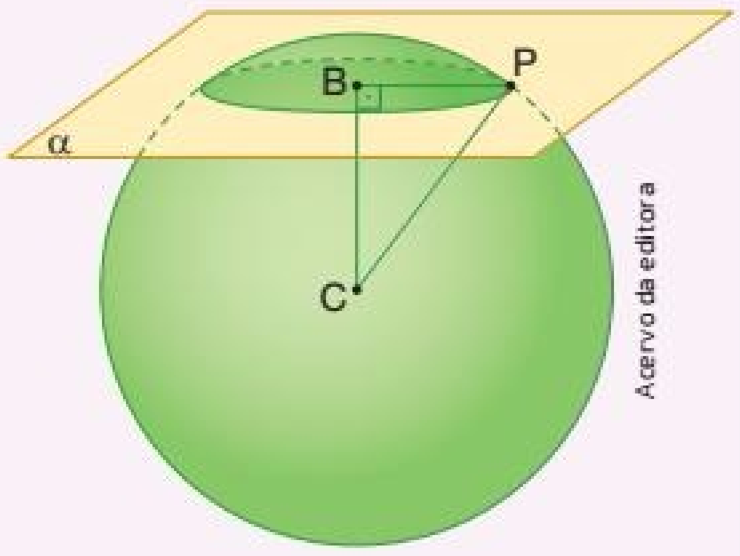
a) a medida do raio

b) o comprimento do equador

c) o volume

Resolução

a) A distância do centro da esfera ao plano α $(\overline{BC})$, o raio do círculo da seção $(\overline{BP})$ e o raio da esfera $(\overline{CP})$ formam, nesta ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo CBP, indicado na figura ao lado.



Como BC = 8 cm e BP = 6 cm, calculamos a medida do raio da esfera por meio do Teorema de Pitágoras.

$$(CP)^2 = (BC)^2 + (BP)^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow r = 10 \rightarrow \boxed{10\text{ cm}}$$

b) O comprimento do equador da esfera é dado por:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8 \rightarrow \boxed{62{,}8\text{ cm}}$$

c) Calculando o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} \simeq 4\,186{,}7 \rightarrow \text{aproximadamente } \boxed{4\,186{,}7\text{ cm}^3}$$

R21. A densidade de um corpo é a razão entre sua massa e seu volume. Um objeto é mais denso do que outro se, tendo uma massa igual, ocupar menor volume, ou, analogamente, com o mesmo volume, tiver maior massa. Por exemplo, ao comparar 1 kg de chumbo com 1 kg de algodão, apesar de as massas serem iguais, o volume ocupado pelo algodão é maior, pois sua densidade é menor.

Os valores da densidade do ouro e da prata são, respectivamente, 19,3 g/cm³ e 10,5 g/cm³, em condições ideais de pressão e temperatura. Considere duas esferas nessas condições: uma de ouro com raio 1,05 cm e uma de prata com raio 1,20 cm. Determine qual esfera possui maior massa.

Resolução

Note que a esfera de prata possui maior volume, pois possui maior raio. No entanto, não podemos dizer o mesmo da massa, pois as esferas são compostas por materiais que possuem diferentes densidades.

Para calcular a massa de cada esfera, inicialmente calculamos o volume de cada uma delas:

- $V_{ouro} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}05)^3}{3} = \dfrac{14{,}53977}{3} = 4{,}84659 \rightarrow 4{,}84659\text{ cm}^3$

- $V_{prata} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}20)^3}{3} = \dfrac{21{,}70368}{3} = 7{,}23456 \rightarrow 7{,}23456\text{ cm}^3$

Calculamos a massa de cada esfera:

- $d_{ouro} = \dfrac{m_{ouro}}{V_{ouro}} \Rightarrow 19{,}3 = \dfrac{m_{ouro}}{4{,}84659} \Rightarrow m_{ouro} \simeq 93{,}54 \rightarrow 93{,}54\text{ g}$

- $d_{prata} = \dfrac{m_{prata}}{V_{prata}} \Rightarrow 10{,}5 = \dfrac{m_{prata}}{7{,}23456} \Rightarrow m_{prata} \simeq 75{,}96 \rightarrow 75{,}96\text{ g}$

Portanto, a esfera de ouro possui maior massa.

156. Calcule o volume de uma esfera cujo raio mede 6 cm. 904,32 cm³

157. Qual é o volume de uma esfera cujo equador tem 9,42 cm de comprimento? 14,13 cm³

158. A bola de basquete, que pode ser de couro animal, couro sintético ou borracha, não deve ter sua circunferência máxima menor que 749 mm e maior que 780 mm, em qualquer categoria masculina.

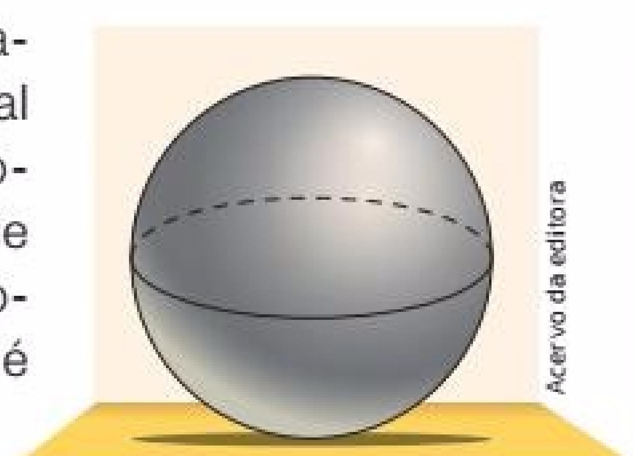

Photo Objects/Keydisc
bola de basquete

Quais são os volumes mínimo e máximo, aproximados, que uma bola de basquete masculino deve ter? 7 108 692,3 mm³; 8 021 086 mm³

159. O planeta Terra tem a forma aproximada de uma esfera com volume de 1 100 bilhões de quilômetros cúbicos. Dessa maneira, qual é o raio aproximado da Terra?
6 400 km

160. Calcule o volume de uma esfera cujo círculo máximo tem 706,5 cm² de área. 14 130 cm³

161. Uma indústria que fabrica esferas de metal para rolamentos produz certo modelo de esfera em aço-carbono, cuja densidade é de 8 g/cm³.


Acervo da editora

a) Qual é a massa aproximada de uma dessas esferas cujo raio mede 0,6 cm? 7,232 g

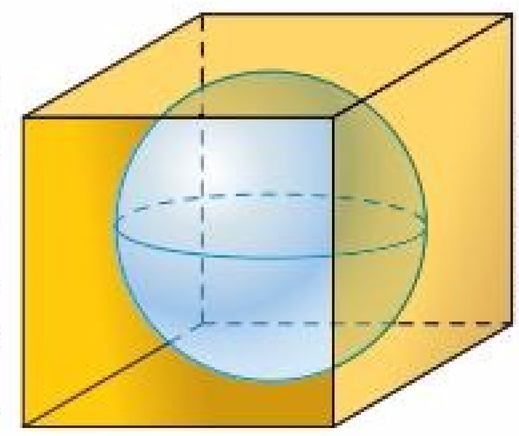
b) Determine o diâmetro de uma esfera desse tipo, cuja massa é de 200,96 g. $2\sqrt[3]{6}$ cm

162. Uma das maneiras de se armazenar gás a elevadas pressões é colocá-lo em um reservatório esférico, pois, com essa forma, a pressão do gás exercida internamente nas paredes do recipiente é a mesma em todas as direções.

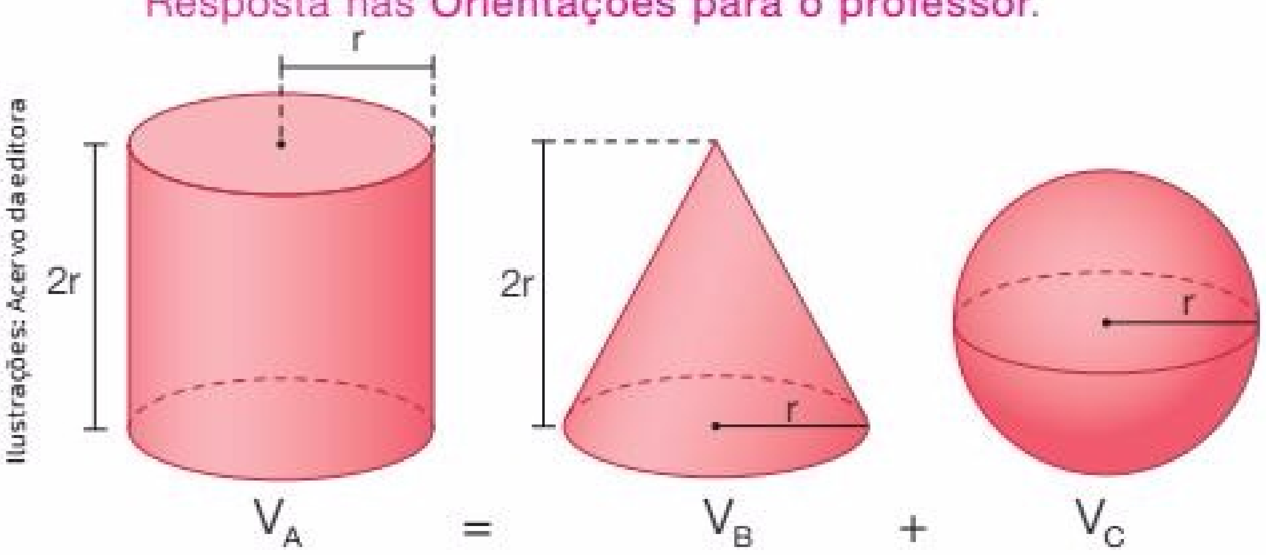
Certo reservatório esférico tem volume aproximado de 900 m³. Determine o número inteiro mais próximo, por excesso ou por falta, do verdadeiro valor, em metros, do raio desse reservatório. 6


Digital Vision/Getty Images
Tanques de armazenamento de produtos químicos.

163. Uma esfera de vidro utilizada como objeto decorativo é embalada em uma caixa cúbica cuja medida da aresta corresponde ao diâmetro da esfera. A fim de proteger essa esfera durante o transporte, o fabricante ocupa as partes vazias da caixa com espuma. Sabendo que a aresta da caixa mede 24 cm, qual é o volume aproximado de espuma utilizado em cada embalagem?
aproximadamente 6 589 cm³


Acervo da editora

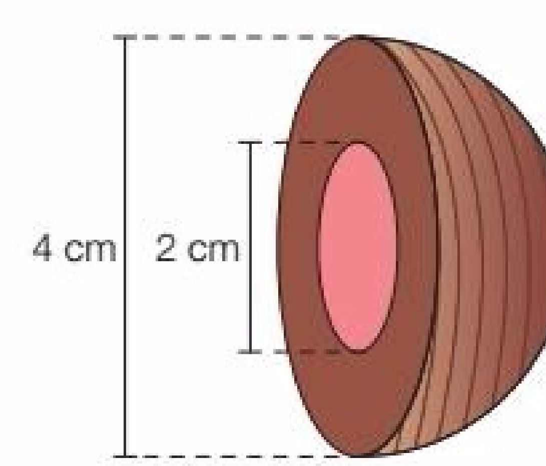
164. Considere um cilindro *A* com raio *r* e altura 2*r*, um cone *B* com raio *r* e altura 2*r*, e uma esfera *C* de raio *r*. Mostre que o volume de *A* é igual à soma dos volumes de *B* e *C*, ou seja, $V_A = V_B + V_C$.
Resposta nas **Orientações para o professor**.



Ilustrações: Acervo da editora

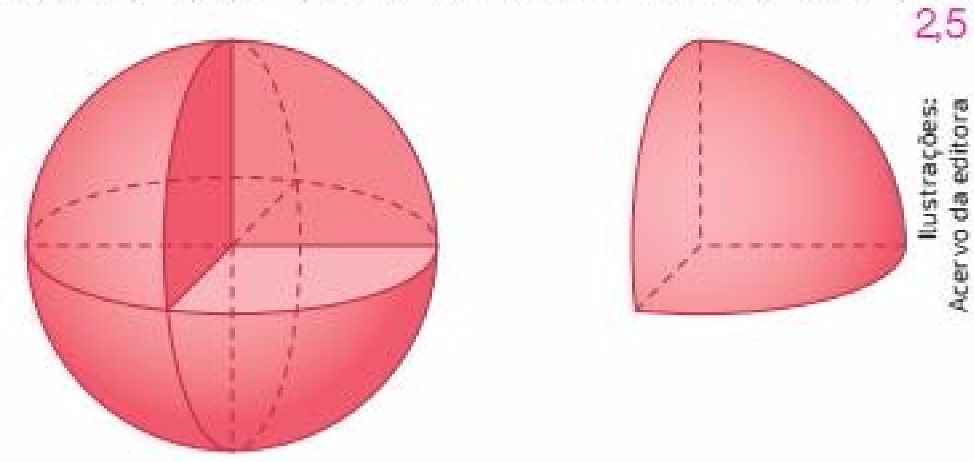
165. Uma esfera com volume igual a 36π cm³ está inscrita em um cilindro equilátero. Qual é o volume desse cilindro? 54π cm³

166. Os bombons de chocolate esféricos, fabricados por uma indústria, têm em seu interior um recheio que também possui forma esférica. Na imagem ao lado está representado um corte meridional nesse bombom. Qual é o volume de chocolate utilizado na produção de cada um desses bombons? 29,3 cm³



Acervo da editora

167. Considere, em uma esfera, o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas com $\frac{785}{96}$ cm³ de volume. Qual é a medida do raio dessa esfera?
2,5 cm

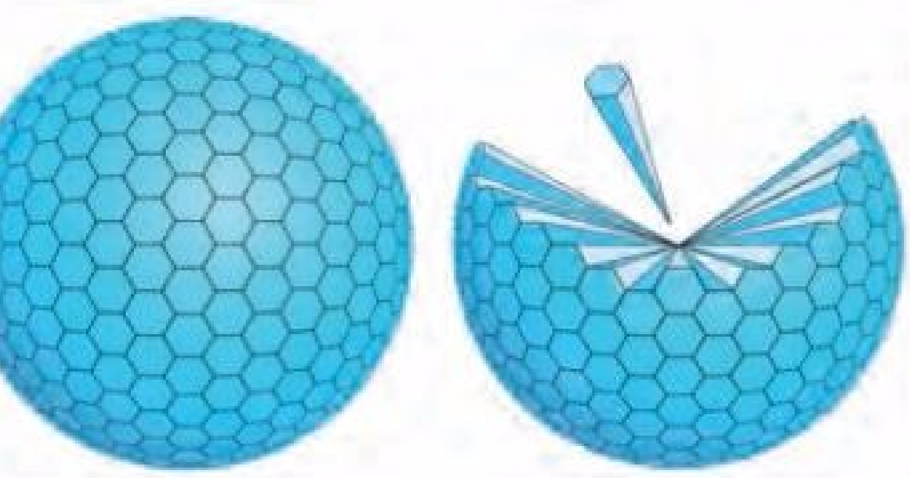

Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 8

Área da superfície da esfera

Admita que uma esfera de centro *C* seja dividida em *n* sólidos congruentes de maneira que, à medida que *n* aumenta, esses sólidos assemelham-se a pirâmides com vértice em *C* e altura igual ao raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $V_i = \frac{1}{3}A_i r$, em que A_i corresponde à área da base da pirâmide.

Explique aos alunos que o desenvolvimento apresentado nesta página não é uma demonstração, mas um auxílio na compreensão da fórmula da área da superfície de uma esfera.



Ilustrações: Acervo da editora

Temos que o volume da esfera é igual à soma dos volumes dos sólidos obtidos:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \ldots + \frac{1}{3}A_n r \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right)$$

Como, quando *n* tende ao infinito, a soma das áreas das bases dos sólidos é igual à área *A* da superfície da esfera e a soma dos volumes desses sólidos é igual ao volume da esfera, temos:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\underbrace{\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right)}_{A} \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow \mathbf{A} = 4\pi r^2$$

Portanto, a área da superfície da esfera é dada por: $A = 4\pi r^2$

Atividades resolvidas

R22. Desde o tempo de Pitágoras, acredita-se que o planeta Terra tem forma esférica. Porém, em função do seu movimento de rotação, ela possui um ligeiro achatamento nos polos, sendo que o eixo equatorial do planeta tem 12 756 km, ao passo que o eixo polar tem 12 712 km, aproximadamente. Devido a essa pequena diferença, para efeitos didáticos, é comum desprezar o achatamento e considerar o planeta Terra como uma esfera. O raio equatorial terrestre (aproximadamente 6 400 km) é muitas vezes empregado como unidade de medida para avaliar distâncias no Sistema Solar.

a) Calcule a medida da linha do equador terrestre.

b) Determine a área da superfície da Terra.

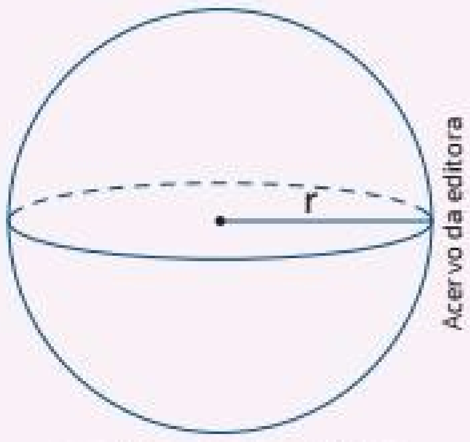
c) Calcule a área da superfície terrestre coberta por água, sabendo que ela corresponde aproximadamente a 70% do total.

Resolução

a) Considerando o raio da Terra com 6 400 km, obtemos o comprimento do equador calculando o comprimento de uma circunferência de mesmo raio:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400 = 40\,192$$

Portanto, a medida da linha do equador terrestre é, aproximadamente, 40 192 km.



Acervo da editora

modelo matemático

b) Calculando a área da superfície, temos:

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400^2 = 514\,457\,600$$

Portanto, a área da superfície terrestre é, aproximadamente, 514 457 600 km².

c) Calculando 70% da área da superfície terrestre, temos:

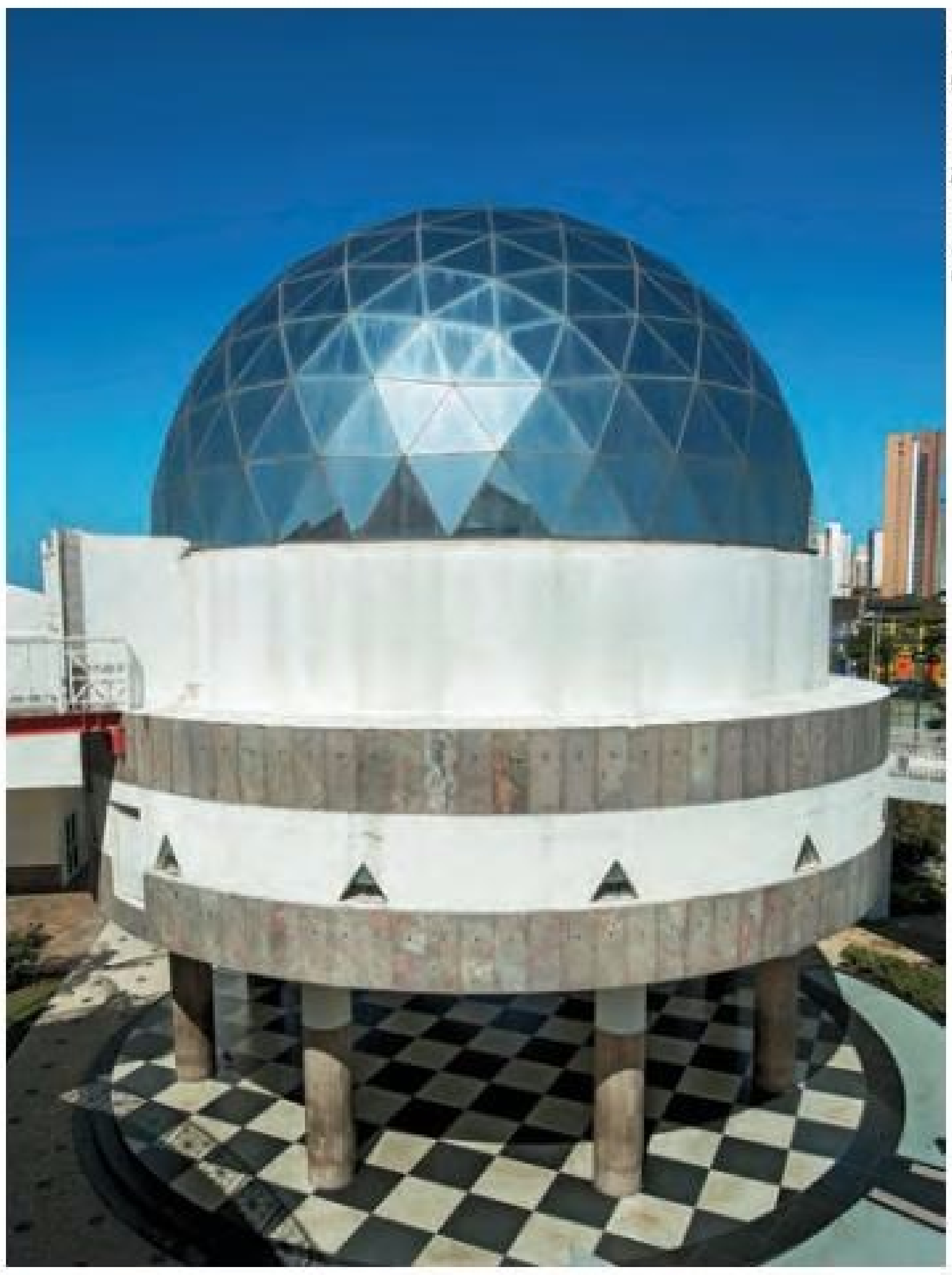
$$A \cdot 0{,}7 = 514\,457\,600 \cdot 0{,}7 = 360\,120\,320$$

Portanto, aproximadamente 360 120 320 km² da superfície do planeta Terra são cobertos por água.

168. Qual é a área da superfície de uma esfera cujo raio mede 2,5 cm? 78,5 cm²

169. Calcule a área da superfície de uma esfera cujo volume é de $\frac{1570}{3}$ dm³. 314 dm²

170. Os planetários são equipamentos que projetam imagens simulando o céu e seus astros em uma noite sem nuvens. Essa projeção, em geral, é realizada na superfície interna de uma cúpula com forma semiesférica. Se em certo planetário a circunferência interna da cúpula semiesférica mede 69,08 m, qual é a área da superfície em que ocorre a projeção? 759,88 m²

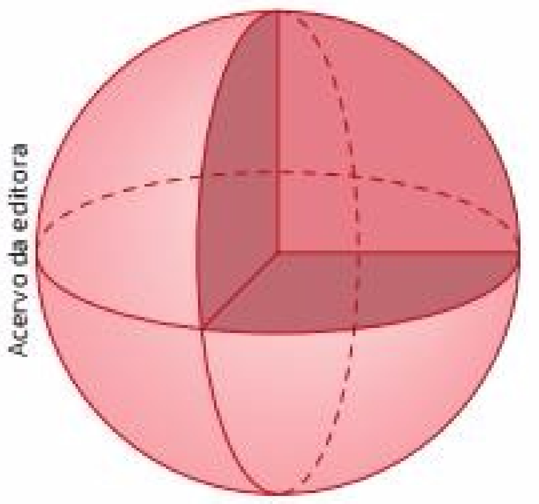

Rubens Chaves/Pulsar

Edifício do planetário no Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura, em Fortaleza (CE), em 2013.

171. Uma fábrica de enfeites natalinos produz bolas decorativas para árvores de Natal, cujo custo de produção de cada modelo é diretamente proporcional à área da superfície da bola. Se um modelo **A** dessas bolas tem custo unitário de R$ 0,08, quantos reais custará a produção de cada bola de um modelo **B**, cujo raio é o triplo do raio de **A**? R$ 0,72

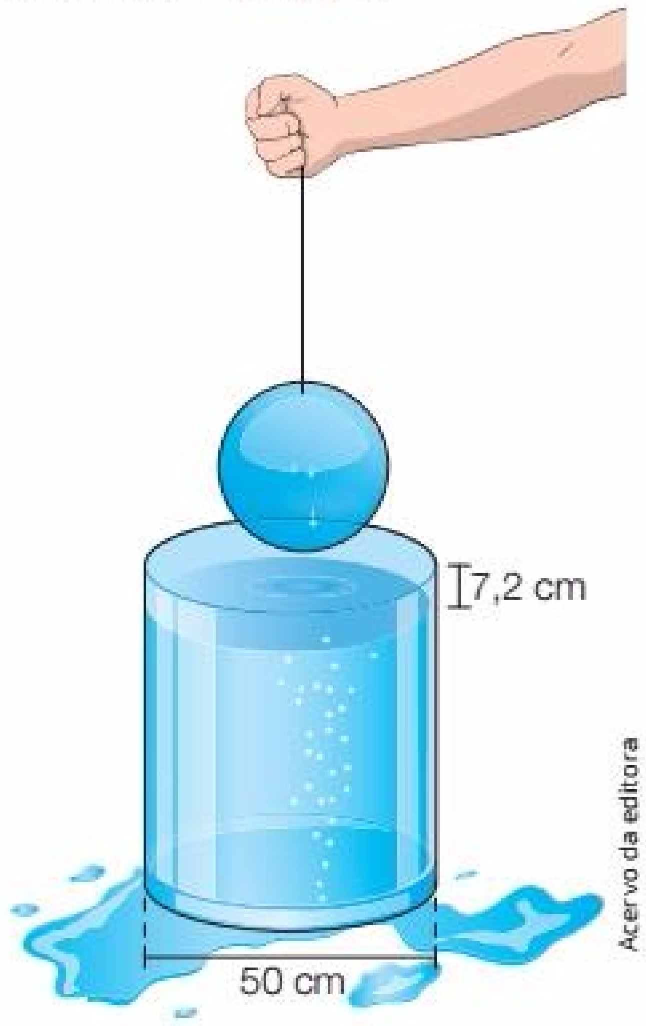
172. Em um recipiente cilíndrico com 10 cm de raio e 15 cm de altura, contendo 1212π cm³ de água, uma esfera de aço maciça é colocada de maneira a ficar totalmente submersa e não transbordando líquido do recipiente. Dessa maneira, qual é, no máximo, a área da superfície dessa esfera? 144π cm²

173. Considere, em uma esfera de raio *r*, o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas.


Acervo da editora

Escreva uma expressão, dada em função de *r*, que represente a área total da superfície do sólido obtido ao ser retirada uma dessas partes da esfera. $\frac{17}{4}\pi r^2$

174. Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base é de 25 cm, estava inicialmente cheio de água. Uma esfera de vidro foi totalmente mergulhada dentro desse recipiente, fazendo transbordar parte da água. Após a esfera ser cuidadosamente retirada, verificou-se que o nível da água no recipiente estava 7,2 cm mais baixo. Qual a área da superfície dessa esfera? 900π cm²



Acervo da editora

175. O sistema de fuso horário utilizado mundialmente consiste em dividir o planeta Terra por meio de meridianos, determinando 24 partes de mesma área, denominadas fusos. Tomando como referência o Meridiano de Greenwich, a cada fuso a leste adiciona-se 1 h, e a oeste subtrai-se 1 h.

Fonte de pesquisa: <www.aneel.gov.br/area.cfm?id_area=65>. Acesso em: 23 fev. 2016.

Considerando a Terra como uma esfera com raio medindo 6 400 km, responda.

a) Qual é o ângulo formado em cada fuso? 15°

b) Que área aproximada do planeta corresponde a cada fuso horário? 21 435 733 km²

Ser consciente

Adulteração de combustíveis

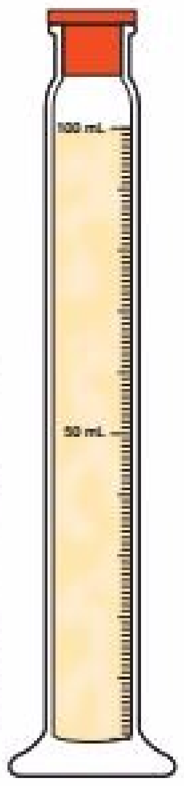
A manutenção do automóvel está em dia, porém percebe-se um consumo superior ao habitual, além de falhas repentinas no motor. Cuidado! Este veículo pode ter sido abastecido com combustível adulterado.

Para a verificação da qualidade dos combustíveis são realizados testes específicos com base em normas estabelecidas pela Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP). A gasolina utilizada nos automóveis, por exemplo, na verdade, é resultante da mistura de gasolina com etanol anidro. A ANP é quem estabelece qual deve ser a proporção entre estes dois componentes.

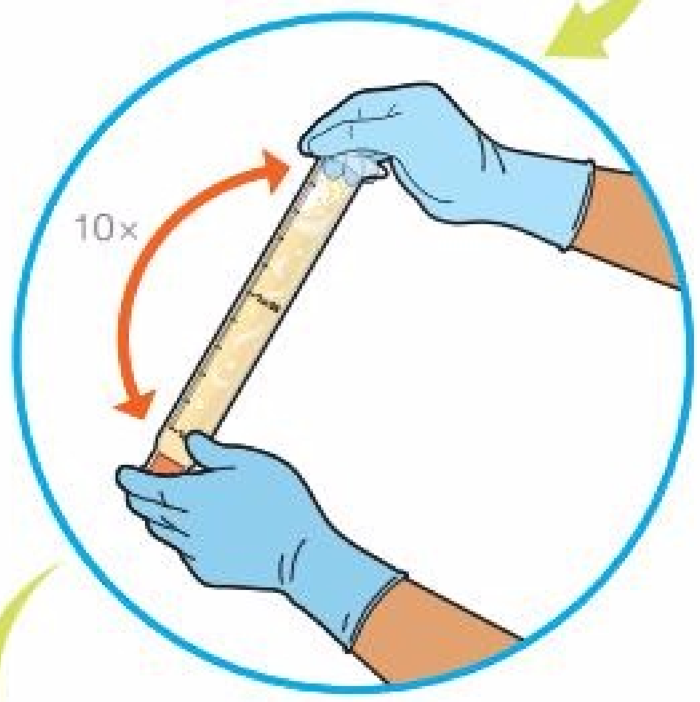
Enquanto consumidores, uma maneira de nos precavermos legalmente em caso de defeitos no veículo por combustível adulterado é exigir a nota fiscal a cada abastecimento. No caso da gasolina, também podemos exigir o "teste de proveta" (veja no esquema), que avalia se a porcentagem de etanol anidro está dentro dos limites estabelecidos. Em março de 2015, por exemplo, este valor era de 27%, com tolerância de até 1% para mais ou para menos.

Como é realizado o teste de teor de etanol (proveta)

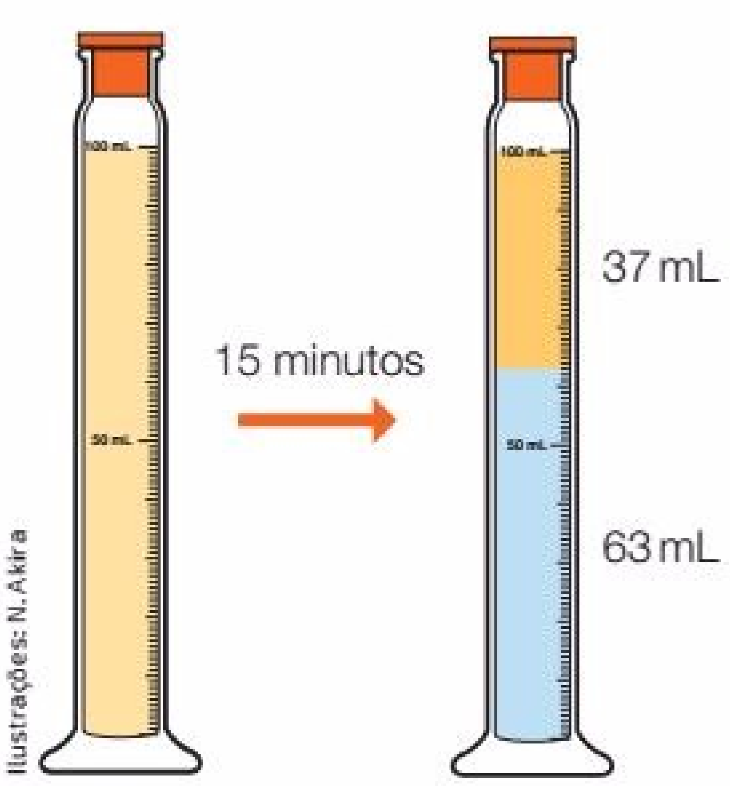
Para realizar o teste de teor de etanol na gasolina é necessária uma solução de 100 g de cloreto de sódio (sal de cozinha) para cada 1 litro de água.



Em uma proveta de vidro transparente com tampa e capacidade para 100 mL, graduada em subdivisões de 1 mL, despejam-se 50 mL de amostra de gasolina e 50 mL da mistura de água e sal.



Realizando 10 inversões sucessivas da proveta, a água e a gasolina são misturadas.



Em seguida, deixa-se a solução em repouso por 15 min, a fim de que ocorra a separação em duas camadas. Após esse tempo, a gasolina (de cor amarelada) estacionará na parte superior da proveta, e a solução aquosa (água e etanol) na parte inferior.

Ilustrações: N. Akira

Verifica-se o volume *V* de aumento na parte aquosa. Ao final, por meio da fórmula $T = 2V + 1$, obtém-se, em porcentagem, o teor *T* de etanol na gasolina.

Abasteça sem ser enganado

Alguns cuidados básicos podem evitar o abastecimento do veículo com combustível adulterado. Desconfie, fiscalize e, se necessário, denuncie!

Os preços dos combustíveis devem estar expostos de forma bem visível. Desconfie de preços muito inferiores à média da região. Procure abastecer sempre no mesmo posto de combustível. Caso desconfie da qualidade do produto, saberá sua origem.

Analisando com cidadania

a) Por que é importante pedir a nota fiscal ao abastecer um veículo?

b) Se você pedisse o teste de proveta em um posto de combustível e o responsável se recusasse a realizar, que atitude você deveria tomar?

Analisando com Matemática

c) No teste de proveta, se ao final forem obtidos 63 mL de solução aquosa, qual terá sido a porcentagem de etanol na gasolina testada? 27%

d) Considere que uma pessoa, por curiosidade, faça o teste de proveta utilizando um tubo cilíndrico transparente e não graduado, com raio da base igual a 1,5 cm e altura 20 cm. Inicialmente, a pessoa realizará duas marcações, indicando as medidas de 50 mL e 100 mL. Aproximadamente, em quais alturas do tubo, a partir da base, ela deve fazer as marcações? 50 mL: 7 cm; 100 mL: 14 cm

e) Em relação ao item anterior, se ao final do experimento a parte ocupada pela solução aquosa corresponder a 9 cm de altura, qual terá sido o teor aproximado de etanol na gasolina testada? Em relação à proporção de etanol, essa gasolina está de acordo com o percentual em vigor em março de 2015, que correspondia a 27%? 29%; não

a) Possível resposta: porque, além de servir como prova de consumo naquele estabelecimento, garante o recolhimento dos devidos impostos, evitando a sonegação fiscal.

b) Resposta esperada: denunciar o posto ao PROCON do estado ou à ANP.

Veja mais informações sobre adulteração de combustíveis nos *sites*:

- <http://tub.im/t2fgkp>
- <http://tub.im/rkgtvq>

(acesso em: 5 mar. 2016)

Fontes de pesquisa:
<www.anp.gov.br/?pg=71854>. Acesso em: 23 fev. 2016.
<www.procon.sc.gov.br/index.php/orientacoes-ao-consumidor/233-combustivel-adulterado>. Acesso em: 23 fev. 2016.
<www.anp.gov.br/site/extras/defesaConsumidor/10dicas.asp>. Acesso em: 23 fev. 2016.
<www.brasil.gov.br/cidadania-e-justica/2009/10/acesse-lista-com-as-entidades-de-protecao-ao-consumidor>. Acesso em: 23 fev. 2016.

Capítulo 8

Confira a origem do combustível. Os postos devem informar as suas distribuidoras e, no caso de não haver uma exclusiva (bandeira branca), em cada bomba deve ser informada a distribuidora que forneceu o combustível.

Diga aos alunos que o PROCON é o Programa de Orientação e Proteção ao Consumidor, órgão que defende os direitos dos cidadãos brasileiros nos municípios e estados.

Caso desconfie da qualidade do combustível, é possível denunciar o posto ao PROCON do estado ou à ANP.

Acessando tecnologias

Nesta seção, indicamos algumas dentre as diversas possibilidades de utilização do computador na abordagem de temas matemáticos. Nesse sentido, sugerimos o trabalho com programas computacionais especializados que contribuem para a visualização e verificação de propriedades e auxiliam na resolução de problemas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis ou impossíveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos de medição e desenho.

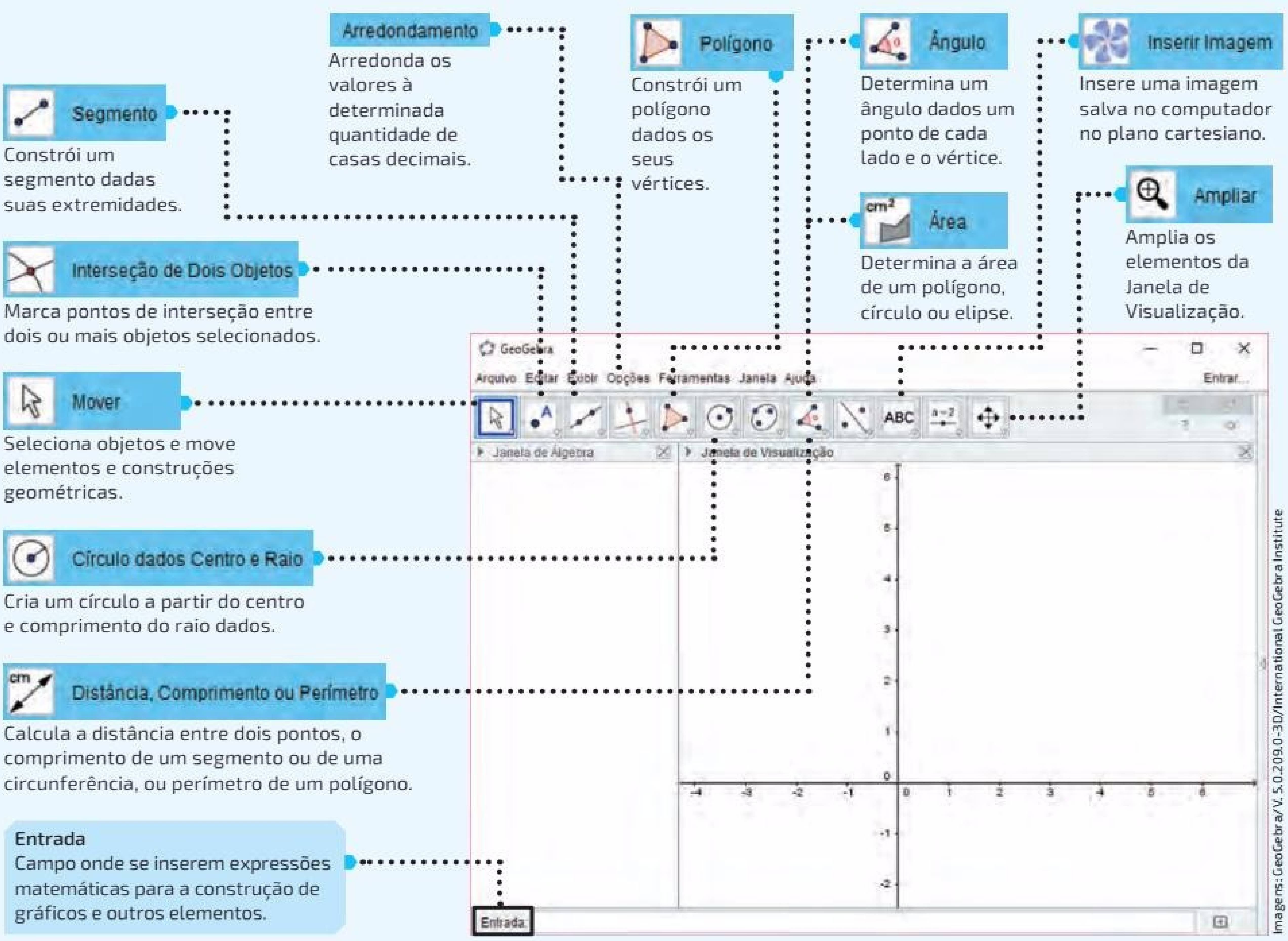
Convidamos você para conhecer e explorar o uso desses recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, procurando tornar o estudo mais interessante e dinâmico.

Geogebra

O *Geogebra* é um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de geometria e álgebra. Nesse programa, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferências e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Na **Janela de Álgebra**, podemos visualizar a expressão algébrica associada a cada elemento apresentado na **Janela de Visualização**.

Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em português. Você pode fazer o *download* no *site* <http://tub.im/99tt4j>.

Observe a representação do *Geogebra* e algumas de suas funções.



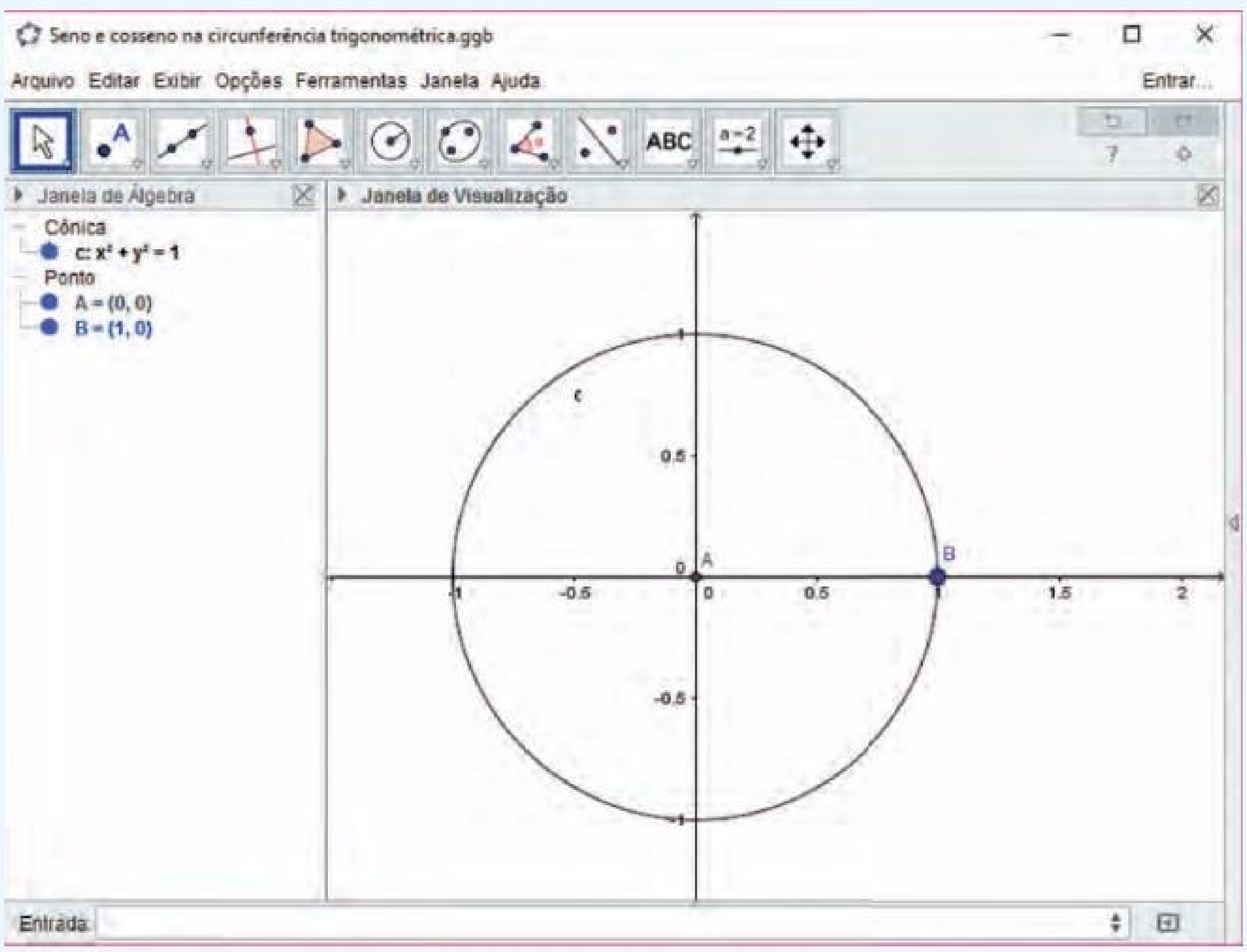
Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Seno e cosseno na circunferência trigonométrica

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 1.

Neste exemplo, estudaremos como construir no *Geogebra* uma circunferência trigonométrica para obter os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos.

1. Clique no canto inferior direito do botão  e selecione a opção **Círculo dados Centro e Raio** no botão . Para desenhar a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1, clique sobre a origem do plano cartesiano, digite 1 no campo **Raio** e pressione **Enter**. Marque o ponto $B(1, 0)$, digitando no campo **Entrada** $B = (1, 0)$ e pressionando a tecla **Enter**.

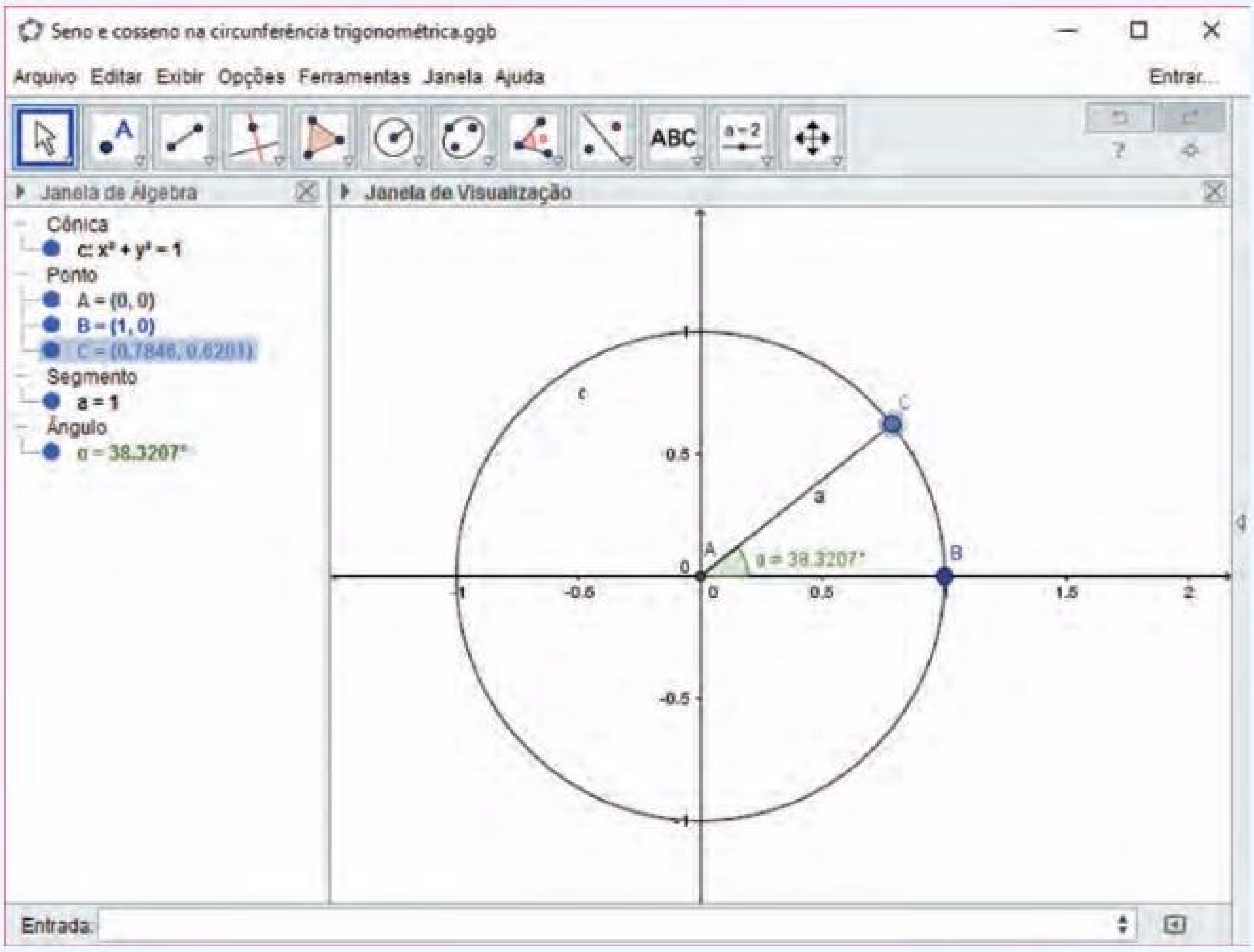


Para ampliar a visualização do gráfico utilize o *scroll* do *mouse* ou clique no canto inferior direito do botão , selecione a opção **Ampliar** e clique sobre a circunferência.

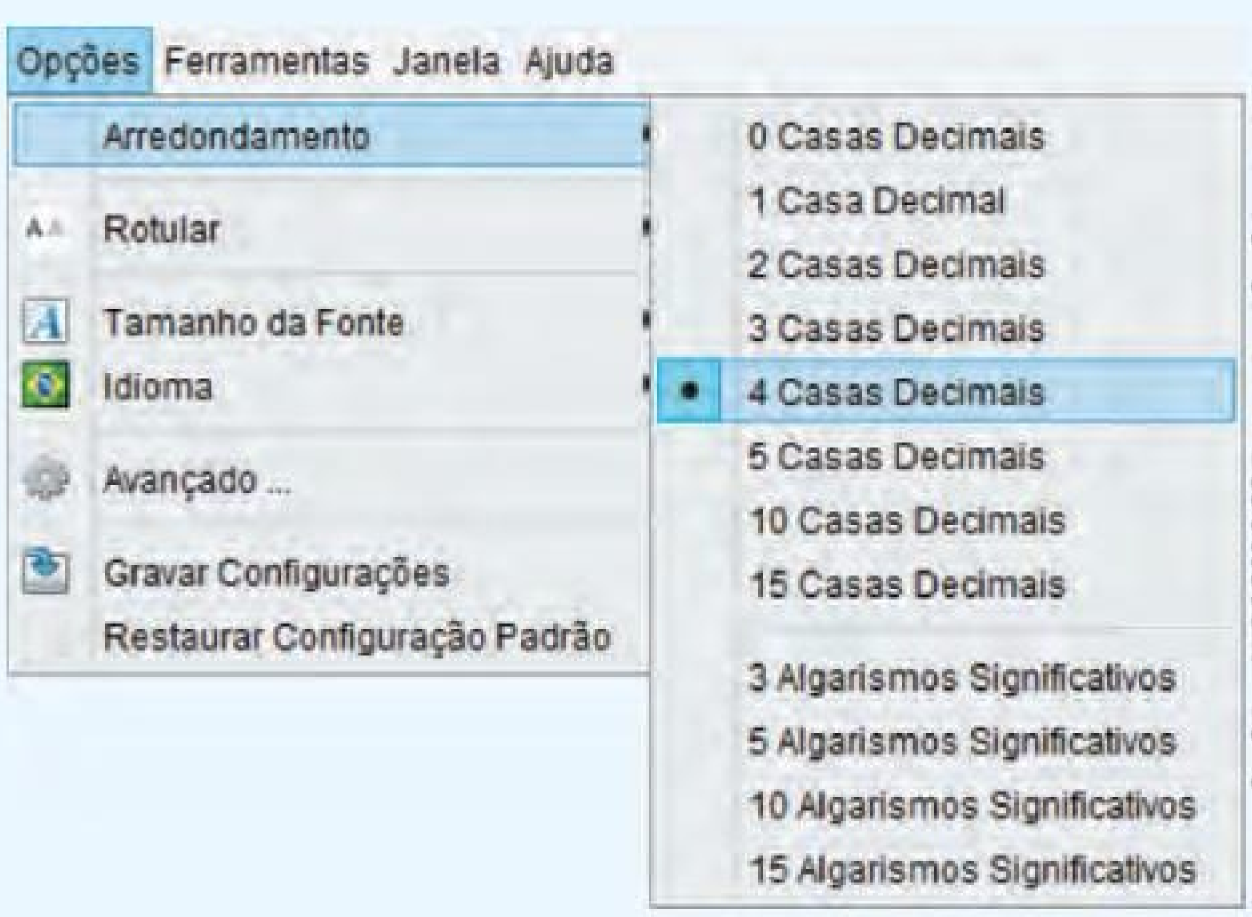
2. Crie um segmento de reta, selecionando a opção **Segmento** no canto inferior direito do botão , clicando sobre o ponto *A* e sobre qualquer ponto pertencente à circunferência. Em seguida, selecione a ferramenta **Ângulo** no botão  e clique nos pontos *B*, *A* e *C*, nessa ordem, para indicar o ângulo $B\hat{A}C$.

Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/ International GeoGebra Institute

As coordenadas *x* e *y* do ponto *C* correspondem, respectivamente, ao cosseno e ao seno de BÂC.



Para ajustar a quantidade de casas decimais dos valores, acesse o menu **Opções**, abra o item **Arredondamento** e escolha a opção com a quantidade de casas decimais desejada.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Utilizando a circunferência trigonométrica construída, responda às questões.

1. Em qual quadrante os valores do seno e do cosseno são ambos positivos? E ambos negativos? 1º quadrante; 3º quadrante

2. Para quantos valores diferentes de α, com $0° \leq \alpha \leq 360°$, tem-se $\operatorname{sen}\alpha = 0,8$? Quais são esses valores? 2; aproximadamente 53° e 127°

3. Se $\operatorname{sen}\alpha = -0,4$, quais são os possíveis valores de $\cos\alpha$? aproximadamente $0,92$ e $-0,92$

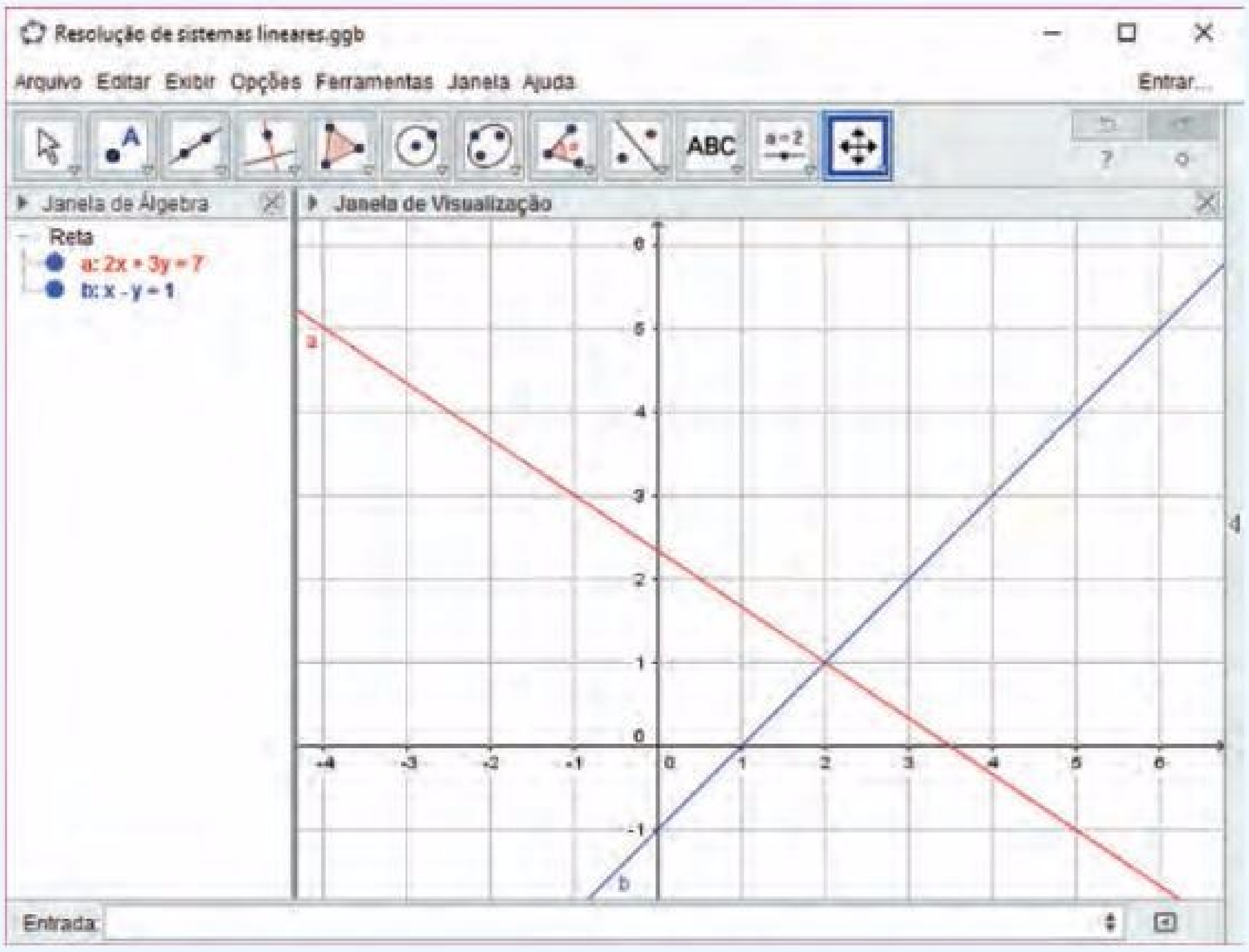
Resolução de sistemas lineares

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 3.

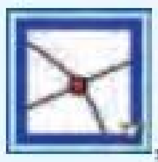
Podemos resolver geometricamente sistemas lineares utilizando o programa *Geogebra*.

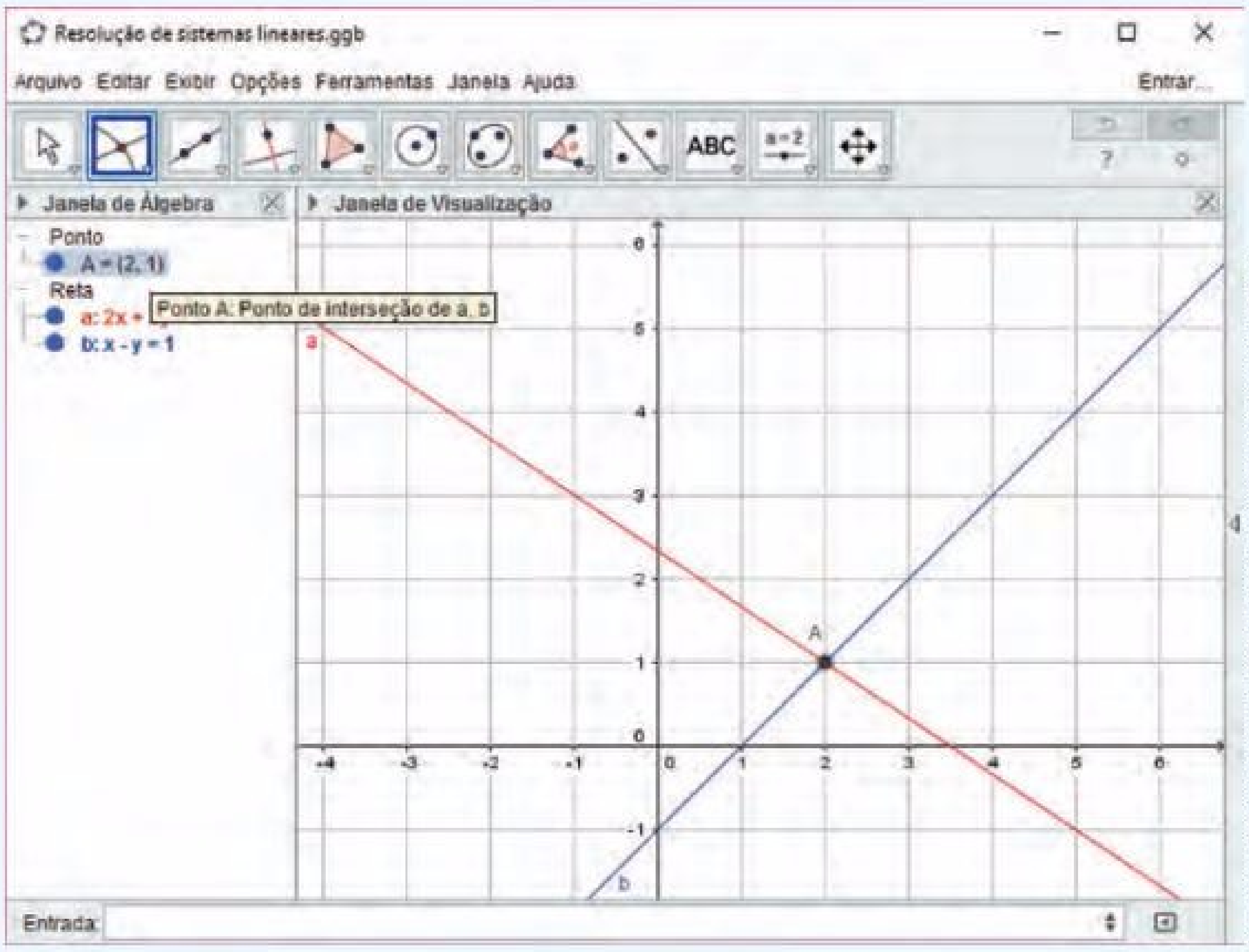
Como exemplo, vamos resolver o sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

1. Clique no campo **Entrada**, digite $2x + 3y = 7$ e pressione a tecla **Enter** para visualizar o gráfico da equação na **Janela de Visualização**. Repita o procedimento para a equação $x - y = 1$.



Para exibir a malha quadriculada, clique com o botão direito do *mouse* sobre a área do plano cartesiano e selecione a opção **Malha**.

2. Clique no canto inferior direito do botão , selecione a opção **Interseção de Dois Objetos** no botão , clique sobre uma reta e, depois, sobre a outra. O ponto $A(2, 1)$ que aparecerá na interseção das duas retas representa a solução do sistema: $x = 2$ e $y = 1$.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Diga aos alunos que, para representar frações no *Geogebra*, utiliza-se a barra (/). Elas devem estar, preferencialmente, entre parênteses. A equação $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{6}{5}$, por exemplo, será inserida como $(2/5)x + (1/2)y = (6/5)$.

1. Resolva no *Geogebra* o sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 20 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{6}{5} \end{cases}$.

$(8, -4)$ ou $x = 8$ e $y = -4$

2. Quantas soluções possui o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 10x + 5y = -20 \end{cases}$?

infinitas soluções *

3. O que é possível observar ao tentar obter o ponto de interseção entre as retas que representam as equações do sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 15 \\ -x + \frac{1}{2}y = -7 \end{cases}$?

Resposta esperada: o programa não reconhece o ponto, pois o sistema é SI, ou seja, geometricamente é representado por duas retas paralelas e, por isso, não há o ponto de interseção entre essas retas.

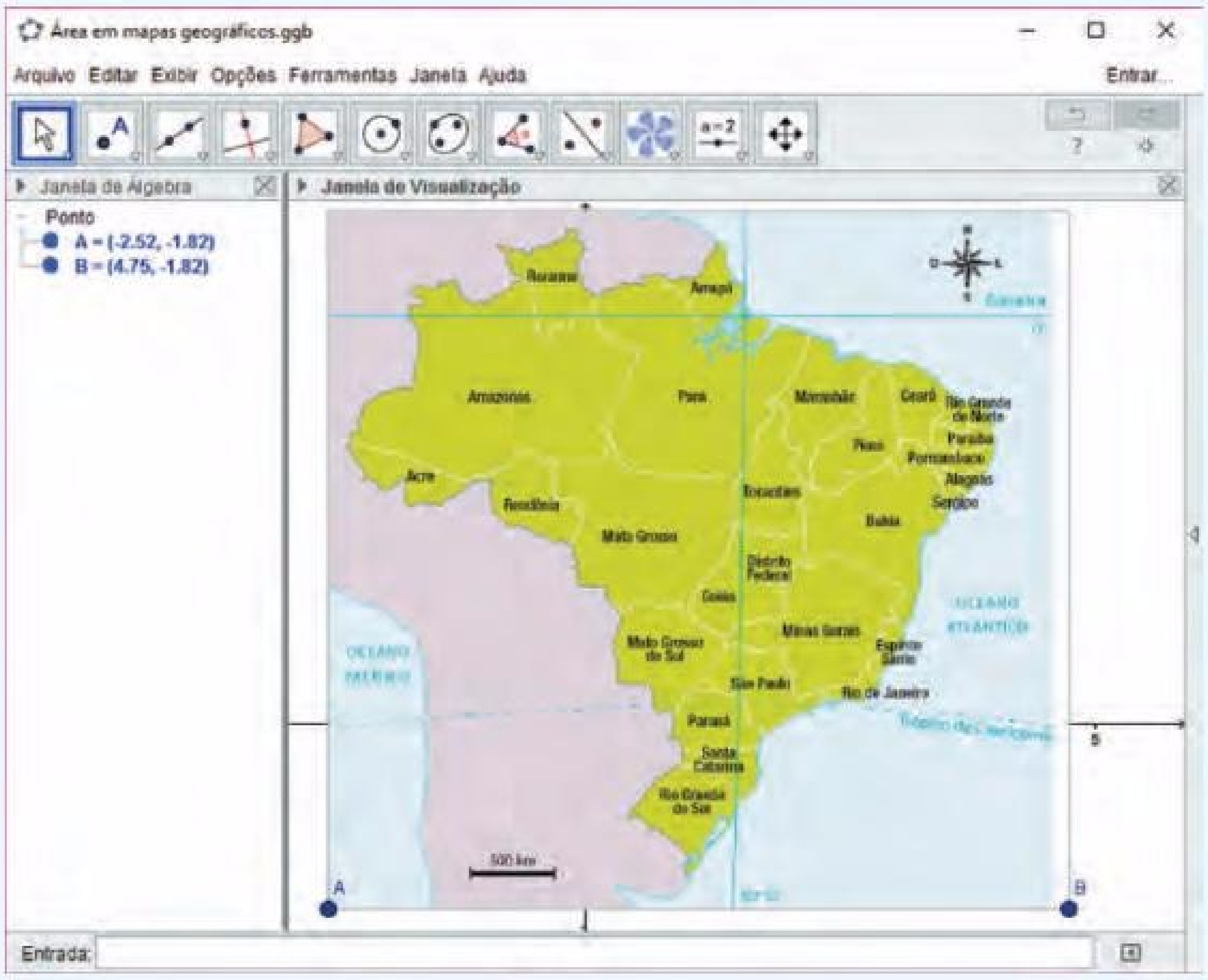
*Como este sistema é um SPI, as retas serão coincidentes. Observe que, ao inserir a segunda equação, o programa a simplifica (dividindo seus coeficientes por 5) e obtém uma equação igual à primeira na **Janela de Álgebra**.

Área em mapas geográficos

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 6.

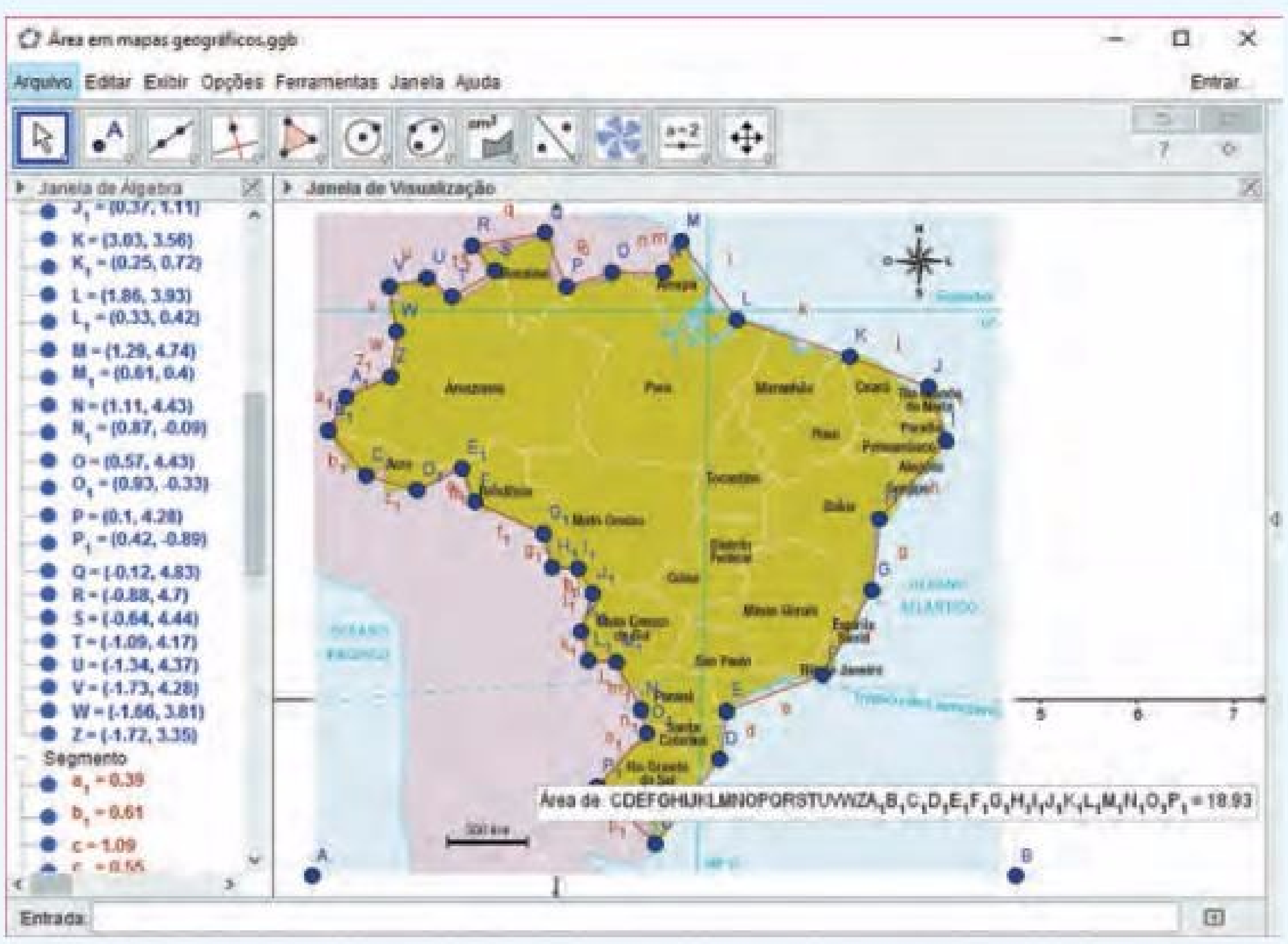
Utilizando a ferramenta de cálculo de área do *Geogebra*, iremos, nesse exemplo, obter uma aproximação da área territorial do Brasil com o auxílio de um mapa geográfico.

Para proceder com o exemplo, é necessário um mapa geográfico em formato digital com a indicação de escala. Se possível, providencie com antecedência os mapas a serem utilizados no exemplo e na atividade. Eles podem ser obtidos na internet ou digitalizados com um escâner.



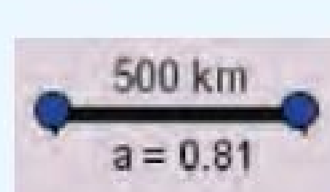
1 No canto inferior direito do botão , selecione a opção **Inserir Imagem** e clique dentro da **Janela de Visualização**. Na janela que abrirá, acesse a pasta onde está salva a imagem do mapa, selecione o arquivo e clique em **Abrir**. Com isso, a imagem será inserida na **Janela de Visualização**.

Caso o mapa não esteja totalmente visível, mova-o pela tela utilizando a ferramenta **Mover**, selecionada no botão .



2 Selecione a opção **Polígono** no botão  e construa um polígono de maneira que seu contorno se assemelhe ao contorno do mapa. Em seguida, clique no canto inferior direito do botão , selecione a ferramenta **Área** no botão  e clique no polígono construído.

3 Construa um segmento sobre a escala gráfica do mapa. Para isso, clique no canto inferior direito do botão , selecione a ferramenta **Segmento** no botão  e clique sobre as extremidades da escala. Em seguida, clique no canto inferior direito do botão , selecione a opção **Distância, Comprimento ou Perímetro** no botão  e clique sobre o segmento para visualizar seu comprimento.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/ International GeoGebra Institute

4 Como $0,81$ unidade de comprimento no *Geogebra* corresponde a uma distância de 500 km, então $0,81^2 = 0,6561$ unidades de área correspondem a $(500\text{ km})^2 = 250\ 000\text{ km}^2$. Logo, a área do polígono, que corresponde à área territorial aproximada do Brasil, é dada por:

$$A = \frac{250\ 000}{0,6561} \cdot 18,93 = 7\ 213\ 077,275\text{ km}^2$$

Atividades Anote as respostas no caderno.

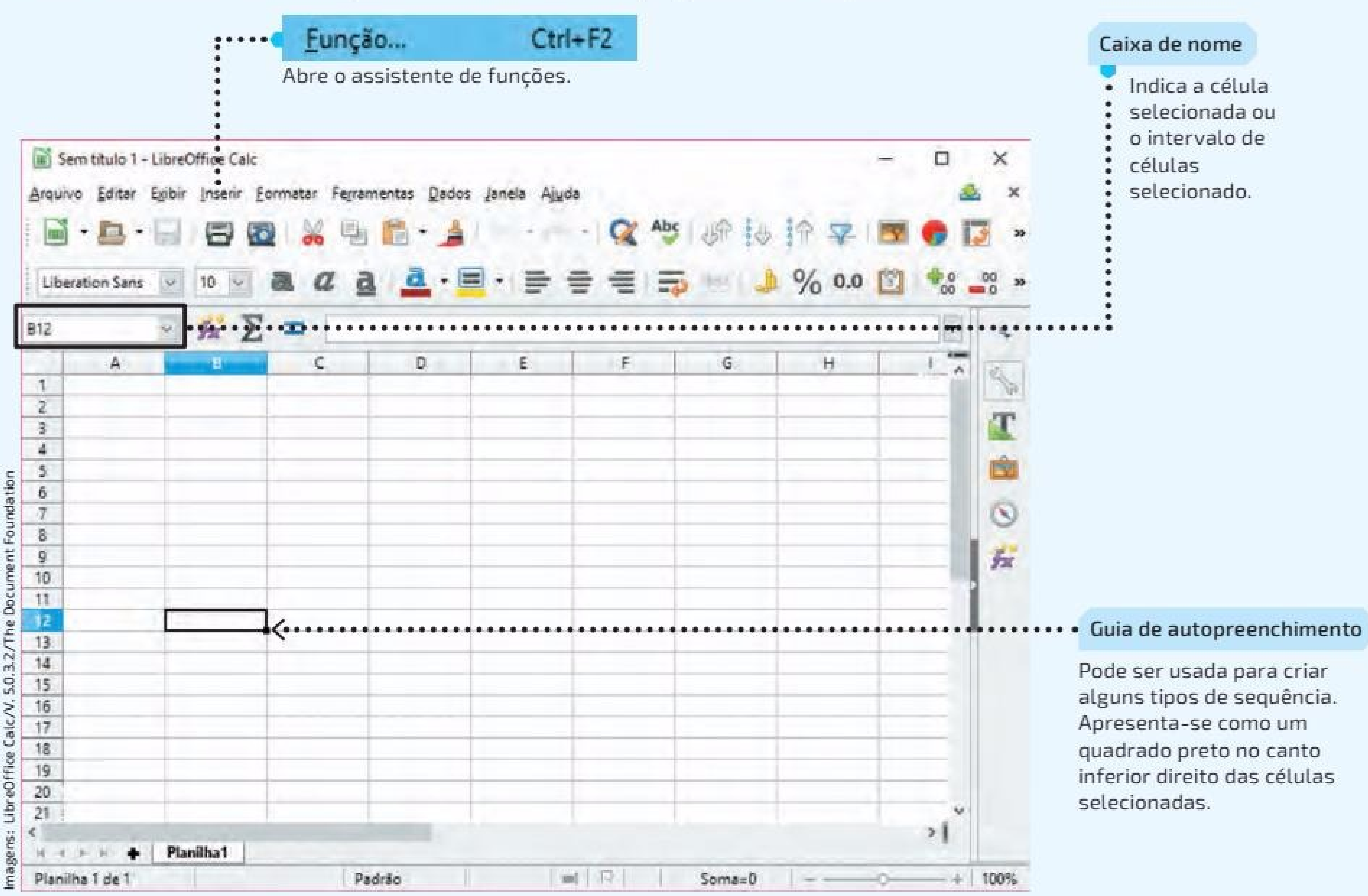
1. De acordo com o IBGE, a área territorial do Brasil é $8\ 515\ 767,049\text{ km}^2$. Em sua opinião, o que pode ser realizado para obter uma melhor aproximação utilizando o processo apresentado? Resposta esperada: construir um polígono com um número maior de lados, de maneira a sobrepor melhor o mapa.
2. Calcule a área do estado em que você nasceu de maneira semelhante ao exemplo apresentado. Em seguida, pesquise no *site* do IBGE <http://tub.im/ooz5nb> a área desse estado e a compare com o resultado obtido. Resposta pessoal.

LibreOffice Calc

O programa *Calc* é uma planilha eletrônica do pacote *LibreOffice*, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-la, basta acessar o *site* <http://tub.im/bixzay>.

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e possuem recursos para realizar cálculos, construir gráficos, restringir dados, preencher automaticamente, entre outras funções. É importante destacar que uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra).

No esquema a seguir, são apresentados alguns recursos da planilha eletrônica *Calc*, que serão utilizados nos exemplos e nas atividades propostas na seção.



Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Multiplicação e determinantes de matrizes

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 2.

A planilha eletrônica *Calc* disponibiliza algumas ferramentas para facilitar os cálculos com matrizes. Nos exemplos a seguir, mostraremos como adicionar, subtrair e multiplicar matrizes, e também como calcular o determinante de uma matriz.

Exemplo 1: Adição e subtração de matrizes.

1. Inicialmente, abra uma planilha e digite as matrizes $A = \begin{bmatrix} 20 & -3 & -9 \\ 18 & 22 & 61 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 35 \\ 13 & -7 & 1 \\ 8 & 15 & 17 \end{bmatrix}$, conforme indicado.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz A				Matriz B		
2	20	-3	-9		-5	-2	35
3	18	22	61		13	-7	1
4	10	0	2		8	15	17

2. Para obter a soma das duas matrizes no intervalo **I2:K4**, inicialmente, digite =A2+E2 na célula **I2** e pressione a tecla **Enter**, para obter o resultado de $a_{11} + b_{11}$ (sendo $a_{11} = 20$ e $b_{11} = -5$). Em seguida, selecione a célula **I2**, clique na **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **I4**. Com o intervalo **I2:I4** selecionado, clique novamente na **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **K4**.

I	J	K
Soma		
15		
31		
18		

I	J	K
Soma		
15	-5	26
31	15	62
18	15	19

3. Para subtrair a matriz *B* da matriz *A*, digite =A2–E2 na célula **I7** e pressione a tecla **Enter**. Utilize a **Guia de autopreenchimento**, como realizado no exemplo da adição, e obtenha a matriz da diferença $A - B$ no intervalo **I7:K9**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Matriz A				Matriz B				Soma		
2	20	-3	-9		-5	-2	35		15	-5	26
3	18	22	61		13	-7	1		31	15	62
4	10	0	2		8	15	17		18	15	19
5											
6									Diferença		
7									25	-1	-44
8									5	29	60
9									2	-15	-15

Exemplo 2: Multiplicação de matrizes.

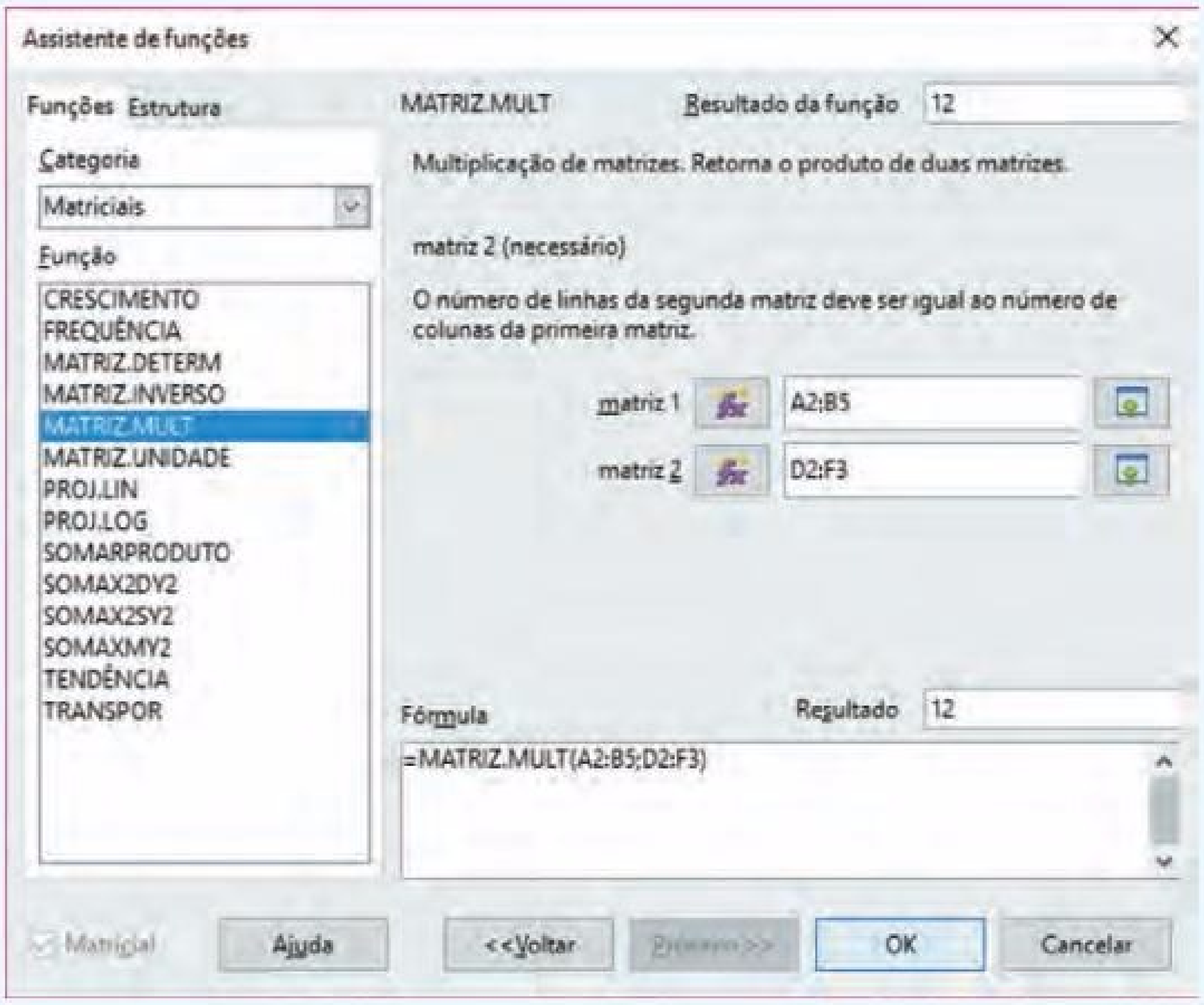
1. O produto entre as matrizes $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ pode ser calculado abrindo outra guia da planilha e digitando os dados da seguinte maneira:

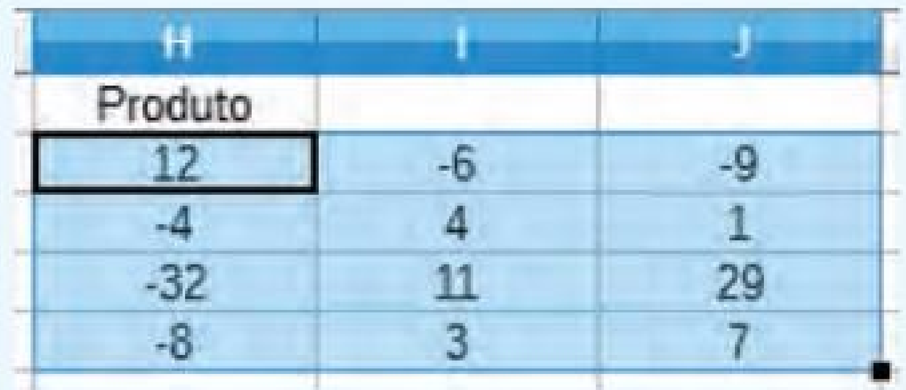
	A	B	C	D	E	F
1	Matriz C			Matriz D		
2	0	-3		0	-1	1
3	-2	1		-4	2	3
4	5	8				
5	1	2				

Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

2. Como a matriz *C* é de ordem 4×2 e a matriz *D* de ordem 2×3, o produto das duas será uma matriz de ordem 4×3. Para obtê-la, selecione o intervalo **H2:J5** (que possui 4 linhas e 3 colunas), clicando em **H2**, segurando e arrastando até **J5**.

Em seguida, clique em **Inserir** e selecione a opção **Função...** para abrir a janela a seguir. No campo **Categoria**, escolha **Matriciais** e, com um duplo clique, selecione a opção MATRIZ.MULT. Em **matriz 1** digite A2:B5, que corresponde à matriz *C*; em **matriz 2** digite D2:F3, correspondente à matriz *D*, e clique em **OK** para obter a matriz produto $C \times D$.





H	I	J
Produto		
12	-6	-9
-4	4	1
-32	11	29
-8	3	7

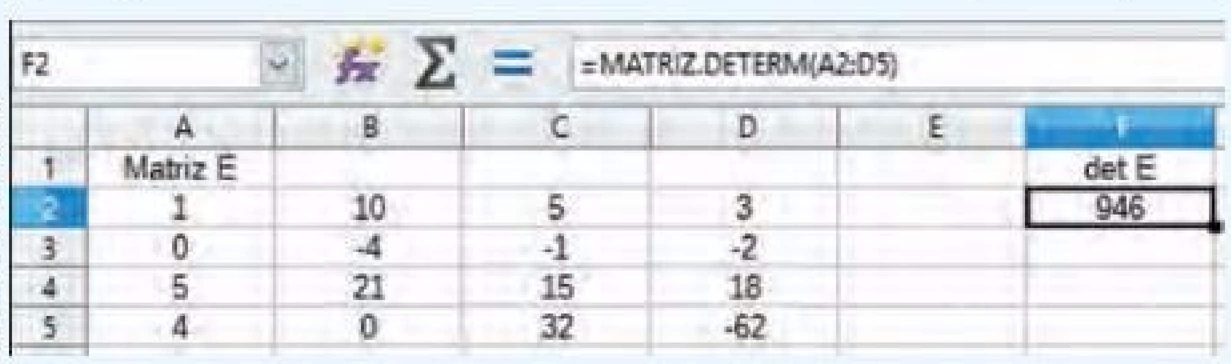
4. Resposta esperada: calcular $A \cdot B = \begin{bmatrix} -211 & -154 & 544 \\ 684 & 725 & 1\,689 \\ -34 & 10 & 384 \end{bmatrix}$ e o determinante desta matriz, que é igual a 11 244 578. Em seguida, calcular $\det A = 1\,138$ e $\det B = 9\,881$ e verificar que o produto $\det A \cdot \det B = 11\,244\,578$, ou seja, $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

5. Resposta esperada: determinar $J' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 8 & 10 \\ 12 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, calcular seu determinante $\det J' = -250$ e verificar que $\det J = \det J'$.

Exemplo 3: Determinante de uma matriz.

Abra uma nova guia na planilha e digite os valores da matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 5 & 21 & 15 & 18 \\ 4 & 0 & 32 & -62 \end{bmatrix}$, como apresentado a seguir.

Para calcular $\det E$, digite na célula **F2** = MATRIZ.DETERM(A2:D5) e pressione a tecla **Enter**.



F2 =MATRIZ.DETERM(A2:D5)

	A	B	C	D	E	F
1	Matriz E					det E
2	1	10	5	3		946
3	0	-4	-1	-2		
4	5	21	15	18		
5	4	0	32	-62		

Imagens: LibreOffice Calc/ V. 5.0.3.2/ The Document Foundation

1. $F + G = \begin{bmatrix} 748 & 6\,279 \\ 10\,009 & -91 \\ 1\,593 & 5\,227 \\ -1\,328 & 8\,613 \end{bmatrix}$; $G - F = \begin{bmatrix} -2\,730 & 10\,355 \\ 4\,667 & -887 \\ 409 & -3\,771 \\ 5\,474 & -2\,825 \end{bmatrix}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Calcule $F + G$ e $G - F$, sendo $F = \begin{bmatrix} 1\,739 & -2\,038 \\ 2\,671 & 398 \\ 592 & 4\,499 \\ -3\,401 & 5\,719 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} -991 & 8\,317 \\ 7\,338 & -489 \\ 1\,001 & 728 \\ 2\,073 & 2\,894 \end{bmatrix}$.

2. Dadas as matrizes $H = \begin{bmatrix} 3 & -0{,}5 \\ -0{,}8 & 0 \\ 10 & 0{,}3 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} -1 & 2{,}9 & -6 & 0 \\ -0{,}2 & 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$, calcule $H \cdot I$. Qual a ordem desta matriz?

$H \cdot I = \begin{bmatrix} -2{,}9 & 6{,}2 & -21{,}5 & 2 \\ 0{,}8 & -2{,}32 & 4{,}8 & 0 \\ -10{,}06 & 30{,}5 & -57{,}9 & -1{,}2 \end{bmatrix}$; ordem 3×4

3. Calcule o determinante da matriz $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 8 & 10 \\ 12 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.
-250

4. Tendo como base as matrizes *A* e *B* do exemplo **1** apresentado, verifique o teorema de Binet.

5. Obtenha uma matriz J' adicionando a 1ª linha à 4ª linha da matriz *J*, apresentada na atividade **3**. Em seguida, calcule $\det J'$ para verificar o teorema de Jacobi.

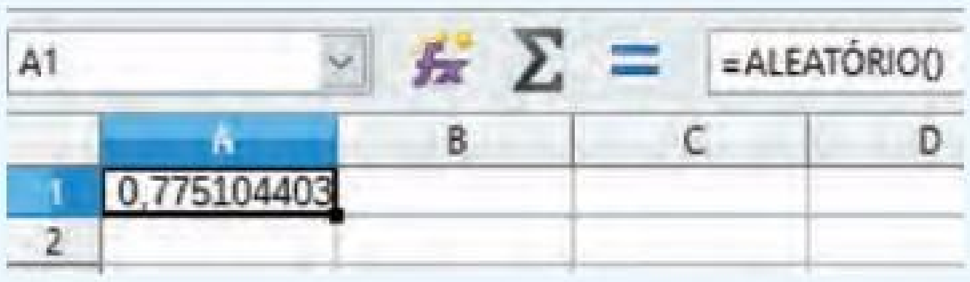
Experimento aleatório

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 5.

A planilha eletrônica *Calc* possui algumas funções para obter números aleatórios. A seguir apresentaremos algumas dessas funções e realizaremos um exemplo de experimento aleatório.

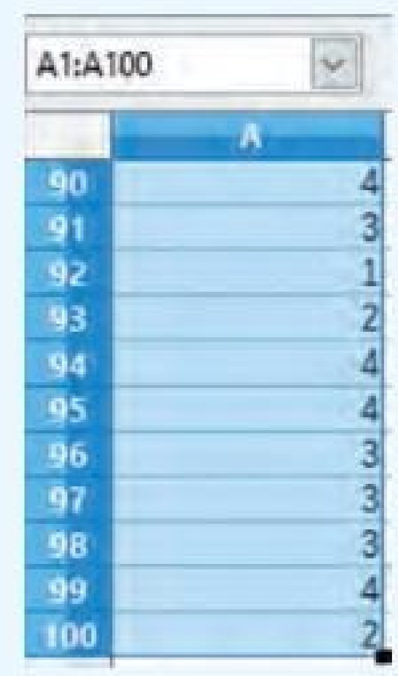
1 Para obter um número decimal aleatório de 0 a 1, basta selecionar uma célula qualquer, digitar =ALEATÓRIO() e pressionar a tecla **Enter**.

Para determinar um número decimal aleatório entre 0 e 10, basta digitar =ALEATÓRIO()*10; entre 0 e 100, =ALEATÓRIO()*100; e assim por diante. Ao final, é necessário pressionar **Enter**.

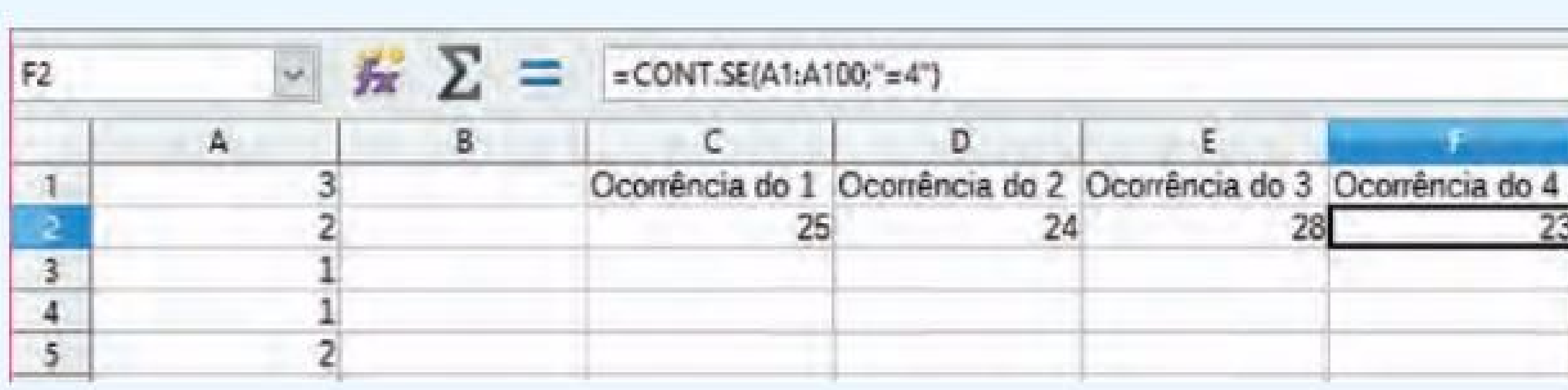


2 Outra função do *Calc* consiste em obter um número inteiro, dado um intervalo. Sugerimos um experimento aleatório, no qual simularemos o sorteio de um número natural de 1 a 4 por 100 vezes, e verificaremos as ocorrências.

Digite na célula **A1** a função =ALEATÓRIOENTRE(1;4) e pressione a tecla **Enter**. Clique no quadrado do canto inferior direito dessa célula, na **Guia de autopreenchimento**, e arraste até a célula **A100**.



3 Preencha os campos apresentados a seguir, inserindo na célula **C2** a função =CONT.SE(A1:A100;"=1"); na célula **D2**, a função =CONT.SE(A1:A100;"=2"); na célula **E2**, a função =CONT.SE(A1:A100;"=3"); e na célula **F2**, a função =CONT.SE(A1:A100;"=4"). Nessas células aparecerão a quantidade de ocorrências dos números inteiros de 1 a 4 sorteados no intervalo **A1:A100**.



Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Se no exemplo do sorteio de números inteiros de 1 a 4 fosse considerado o intervalo de células **A1:A1000**, qual a previsão para a quantidade de ocorrências do número 1? Justifique. Resposta esperada: uma quantidade próxima a 250, pois sem realizar experimentos, calculando a probabilidade de ocorrência do número 1, obteríamos 25%, ou o correspondente a 250 das ocorrências.

2. Realize um novo experimento aleatório no *Calc*, o qual simule 160 sorteios de um número inteiro de 1 a 8.*

a) Calcule a probabilidade da ocorrência de cada um dos números, em porcentagem, e a previsão de ocorrências nos 160 sorteios de acordo com essa probabilidade. 12,5%; 20 ocorrências para cada número

b) Compare as quantidades de ocorrências obtidas no experimento com aquelas que você estimou. Converse com um colega sobre isso. Resposta pessoal.

*Oriente os alunos quanto ao preenchimento das células. Inicialmente, eles deverão inserir a função =ALEATÓRIOENTRE (1;8) na célula **A1** e arrastar a **Guia de autopreenchimento** da célula **A1** até a **A160**. No passo **3**, deverão calcular as ocorrências do 1 ao 8, substituindo o intervalo **A1:A100** por **A1:A160**.

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros que propiciam melhor compreensão acerca dos conteúdos tratados nesta coleção, que de maneira geral abordam a Matemática de forma lúdica, curiosa e interessante. São apresentadas também sugestões de *sites* que trazem tópicos matemáticos e programas de computador relacionados à Matemática.

Para ler

- **A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos**

  SMULLYAN, Raymond. **A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos**. Tradução Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

  O livro narra a história fictícia de uma princesa que deve escolher o destino de seu enamorado, tendo de solucionar diferentes problemas lógicos matemáticos que vão se tornando cada vez mais complexos com o decorrer da história.

- **A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço.**

  MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução Enézio E. de Almeida Filho. 6. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

  Com esse livro, o leitor poderá conhecer melhor a história da Geometria, contada pelo autor de maneira clara e divertida.

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. **A Matemática das coisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento, como a Arte.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Orgs.). **A Matemática nas profissões**. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da História da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos**

  SZPIRO, George. **A vida secreta dos números**: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Tradução J. R. Souza. Rio de Janeiro: DIFEL, 2008.

  Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos de nossas vidas. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- **Cartas a uma jovem matemática.**

  STEWART, Ian. **Cartas a uma jovem matemática**. Tradução Pedro Ferreira. Lisboa: Relógio D'Água, 2006.

  O livro apresenta um conjunto de cartas trocadas entre a jovem Meg e um matemático, por meio das quais discutem sobre o que é Matemática, o que faz um matemático e a comunidade científica, abordando questões e curiosidades desde o filosófico ao prático.

- **O homem que calculava**

  TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

  O livro expõe alguns problemas, quebra-cabeças e curiosidades matemáticas, por meio das aventuras fictícias de um sábio calculista persa e de suas soluções para problemas aparentemente sem solução.

- **O instinto matemático**

  DEVLIN, Keith. **O instinto matemático**. Tradução Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do homem; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas a sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- **O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática**

  BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

  O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença em nossas vidas, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- **O teorema do papagaio**

  GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  O livro narra a história fictícia de uma família parisiense que se vê obrigada a estudar, entender e organizar fatos históricos e pensamentos da história da Matemática, desde a Antiguidade até os dias atuais, para explicar diversos acontecimentos. O livro apresenta passagens da vida de vários estudiosos, como Tales, Pitágoras e Pierre de Fermat.

- **O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**

  SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Tradução Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.

O livro faz um apanhado histórico, desde a origem até os dias atuais, sobre o enigma que confundiu as mentes de estudiosos por 358 anos, o Teorema de Fermat. Relatando a busca épica por sua demonstração, o livro enfoca a importância do teorema para o desenvolvimento da Matemática durante mais de três séculos.

- O universo e a xícara de chá

COLE, K. C. **O universo e a xícara de chá**. Tradução Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

- Os números governam o mundo: folclore da Matemática

TAHAN, Malba. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

"Os números governam o mundo" é uma citação de Pitágoras que o autor deste livro trouxe à tona para narrar mais detalhes sobre o assunto. O livro traz histórias dos números, mistérios, simbologia e origem mística que os envolvem.

- Pitágoras e seu teorema em 90 minutos

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Cientistas em 90 minutos).

Por meio de textos informativos, o livro apresenta um panorama da vida e da obra de Pitágoras, comentando suas descobertas.

- Qual o problema?

MORICONI, Marco. **Qual o problema?** Alicia Ivanissevich (Org.). Rio de Janeiro: Instituto Ciência Hoje, 2009.

O livro apresenta 40 enigmas que desafiam e instigam o leitor a explorar, de maneira lúdica, conceitos e ideias matemáticas frequentemente utilizadas por profissionais de diferentes áreas.

Para navegar

- Arte & Matemática

<http://tub.im/hwz85d>

Um *site* interativo que apresenta temas variados, de diferentes épocas, que relacionam Arte e Matemática.

- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem da Matemática e Estatística

<http://tub.im/7au5uc>

Desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense, este *site* contém diferentes aplicativos educacionais interativos que abordam diferentes conteúdos matemáticos, como geometria, matrizes e funções trigonométricas.

- Domínio Público

<http://tub.im/ebgwue>

Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- EDUMATEC

<http://tub.im/xt9vnq>

Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- Enem

<http://tub.im/fjoj8r>

Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- IBGE

<http://tub.im/9cqokk>

Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- Khan Academy

<http://tub.im/s5odbu>

Plataforma educacional, de acesso livre, que disponibiliza recursos como exercícios e vídeos de aulas sobre diversos conteúdos.

- Laboratório de Matemática – UNESP

<http://tub.im/qeoihf>

Este *site* divulga as atividades que são desenvolvidas no laboratório de Matemática da Universidade Estadual de São Paulo. Na seção História da Matemática são apresentadas informações sobre a vida e a obra de alguns matemáticos.

- Matemática essencial

<http://tub.im/evze5y>

Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, sendo que, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções detalhadas.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

<http://tub.im/roe3dx>

Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, por exemplo, a maneira de se efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Trigonometria

1. a) comprimento de $\widehat{AB}$: aproximadamente 5,76 cm e $med(\widehat{AB})=110°$

b) comprimento de $\widehat{AB}$: 3,14 cm e $med(\widehat{AB})=90°$

c) comprimento de $\widehat{AB}$: 7,85 cm e $med(\widehat{AB})=180°$

d) comprimento de $\widehat{AB}$: aproximadamente 2,75 cm e $med(\widehat{AB})=45°$

2. a) $med(\widehat{AB})=\frac{11\pi}{18}$ rad

b) $med(\widehat{AB})=\frac{\pi}{2}$ rad

c) $med(\widehat{AB})=\pi$ rad

d) $med(\widehat{AB})=\frac{\pi}{4}$ rad

3. a) $med(\widehat{AB})=50°$

b) $med(\widehat{CD})=140°$

c) $med(\widehat{EF})=260°$

d) $med(\widehat{GH})=320°$

4. a) 25 voltas

b) 6 min

5. 471 m

6. a) $r_1=15$ cm; $r_2=12$ cm

b) 31,4 cm

c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

7. 82,5° ou 82°30'

8. 45°

9. a) vôlei; 16 alunos

b) 32 alunos

c) 12 alunos

10. 51,81 unidades de comprimento

11. a) 20 torres

b) 5 024 m

c) 251,2 m

12. a) 20°

b) 210°

c) 180°

d) 90°

e) $\frac{3\pi}{4}$

f) $\frac{3\pi}{2}$

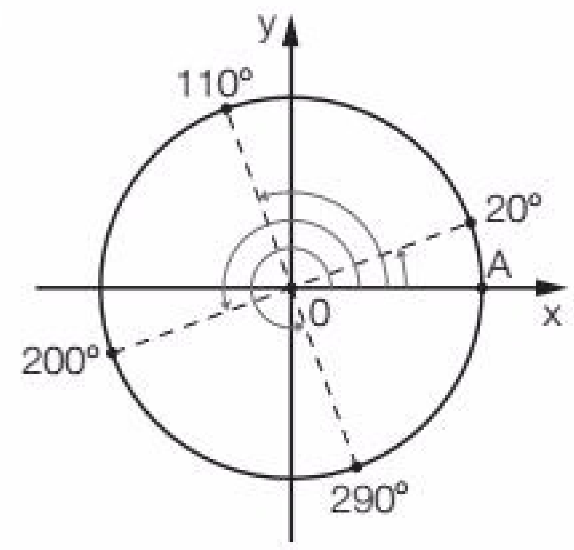
13. a) $45°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

b) $210°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

c) $\frac{5\pi}{3}+k\cdot2\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

d) $\frac{2\pi}{3}+k\cdot2\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

14.



Acervo da editora

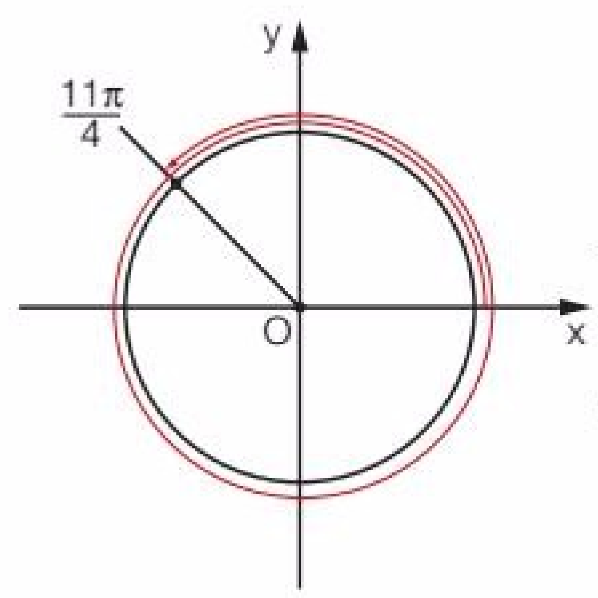
15. $45°+k\cdot60°$, com $k\in\mathbb{Z}$

16. a) 80° ou $\frac{4\pi}{9}$

b) $k\cdot40°$ ou $\frac{k\cdot2\pi}{9}$, com $k\in\mathbb{Z}$

17. a) Não, pois o arco representado por ele é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$ e não ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. A resposta correta seria um arco da expressão geral $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$.

b) Uma possível resposta:



Acervo da editora

19. a) 2º ou 3º

b) 1º ou 2º

c) 1º ou 3º

d) 3º ou 4º

e) 2º ou 4º

f) 1º ou 4º

20. a) negativo

b) positivo

c) negativo

d) positivo

21. a) 2º

b) 2º

c) 1º

d) 4º

e) 3º

22. a) $A=sen40°\cdot cos40°$; $A>0$

b) $A=-cos\frac{\pi}{3}\cdot\left(-tg\frac{\pi}{6}\right)$; $A>0$

c) $A=tg85°\cdot(-sen5°)$; $A<0$

d) $A=-cos\frac{2\pi}{5}\cdot sen80°$; $A<0$

23. a) I: −225°; II: 90°; III: 180°; IV: −135°

b) 270°

c) $sen270°=-1$ e $cos270°=0$

24. a) 1 125°

b) 45°

c) $sen45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) 4 voltas

25. a) 150°

b) $sen150°=\frac{1}{2}$; $cos150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

26. a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27. a) $sen\alpha=-\frac{12}{13}$; $tg\alpha=-\frac{12}{5}$

b) $sen\alpha=-\frac{8}{17}$; $tg\alpha=\frac{8}{15}$

28. $2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq2\pi+2k\pi$, ambos com $k\in\mathbb{Z}$

30. Sim, pois para qualquer valor de *k* os arcos serão 150°, 300° e 225°, ou arcos côngruos a eles; portanto, a igualdade será sempre verdadeira:

$$\frac{sen(150°+2k\pi)+cos(300°+2k\pi)}{tg(225°+2k\pi)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1}=1,$$

com $k\in\mathbb{Z}$

31. a) $x=\frac{7\pi}{4}$ ou $x=\frac{9\pi}{4}$

b) $x=\frac{19\pi}{6}$

c) $x=150°$ ou $x=210°$ ou $x=510°$

d) $x=\frac{17\pi}{4}$

e) $x=600°$ ou $x=660°$

f) $x=420°$

32. a) $2<m<3$

b) $-1<m<-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$

d) $3<m<4$

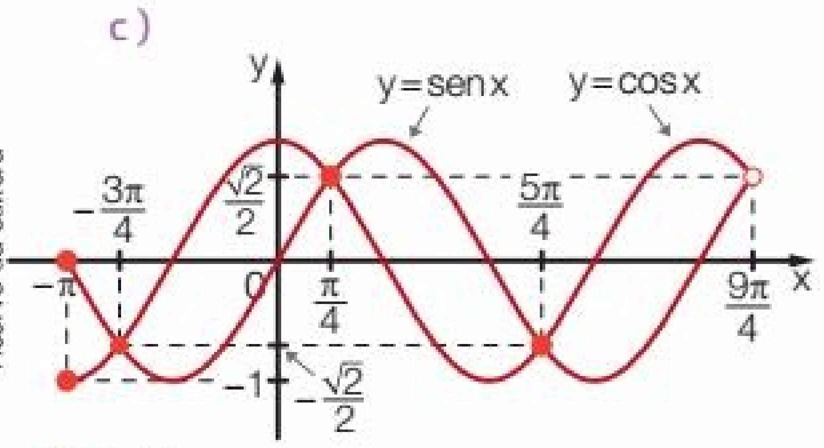
33. a) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, ambos com $k\in\mathbb{Z}$

b) $\frac{1}{4}$

34. a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

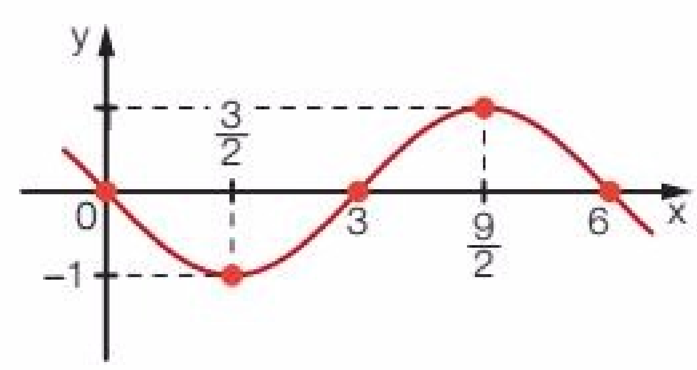
c)



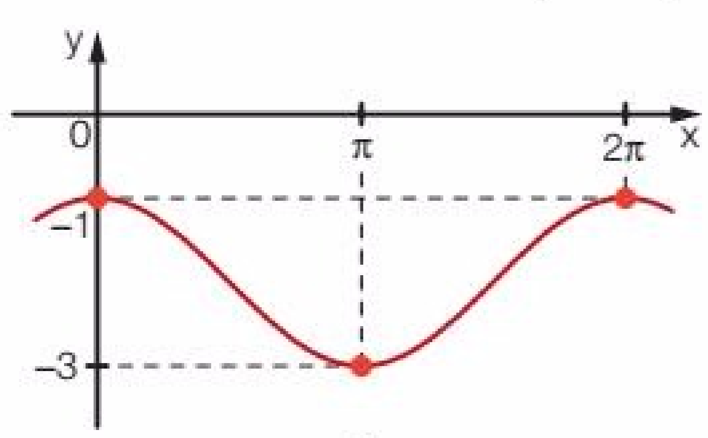
Acervo da editora

35. • III
• I
• II

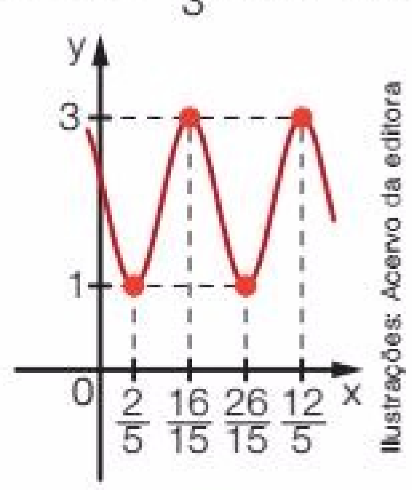
36. a) período: $p = 6$; $Im(f) = [-1, 1]$



b) período: $p = 2\pi$; $Im(g) = [-3, -1]$



c) período: $p = \frac{4}{3}$; $Im(h) = [1, 3]$



Ilustrações: Acervo da editora

37. a) Uma possível resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = \pi$ e $g(x) = 2 + 3sen(2x + \pi)$.

b) $p_g = \frac{p_f}{|2|}$; $p_g = \pi$; $p_f = 2\pi$; $c = |2|$

c) $Im(f) = [-1, 1]$ e $Im(g) = [-1, 5]$; A constante *a* desloca o gráfico 2 unidades para cima, e a constante *b* amplia o gráfico verticalmente.

38. a) 4
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) 2

39. a) *g* e *h*; Resposta esperada: pois, se considerarmos as funções na forma $m(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, temos que os coeficientes *b* em *g* e *h* são opostos e os demais coeficientes iguais, ou seja, $g(x) = -h(x)$.

b) $Im(f) = [-1, 1]$, $Im(g) = [-2, 2]$ e $Im(h) = [-2, 2]$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

40. a) $m = 8$

b) $h(t) = 8 \cdot sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

c) $\frac{62}{5}$

d) maré subindo: $0 < t < 3{,}1$ ou $9{,}3 < t < 12{,}4$; maré baixando: $3{,}1 < t < 9{,}3$

41. a) 40 m

b) 45°

c) Não, pois a distância percorrida é diretamente proporcional a $sen 2\phi_0$ e a tacada já foi realizada com $\phi_0 = 45°$.

42. a) 20 clientes

b) 12 horas; 35 clientes

c) 24 horas; 5 clientes

43. a) • 2,4 L
• 2,65 L
• 2,9 L
• 2,65 L
• 2,4 L

b) 2,4 L

c) 2,9 L

44. a) $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

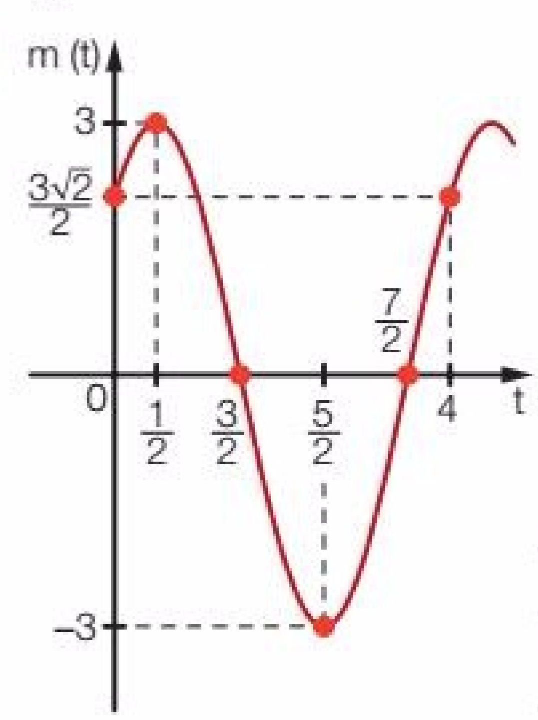
b) $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

c) 2,22 s

45. a) $m = 3$; $t = \frac{1}{2} + 4k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

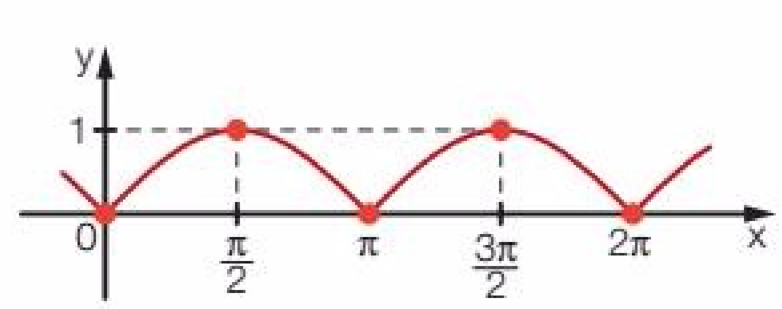
b) $t = \frac{3}{2} + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

c)

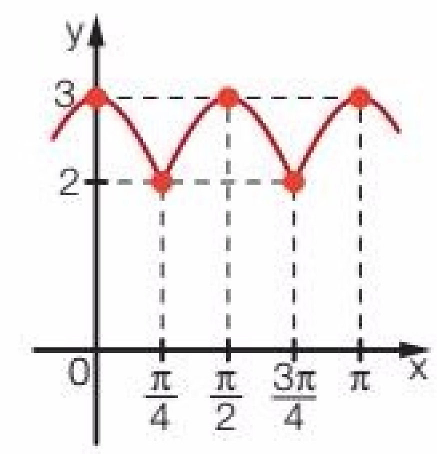


Acervo da editora

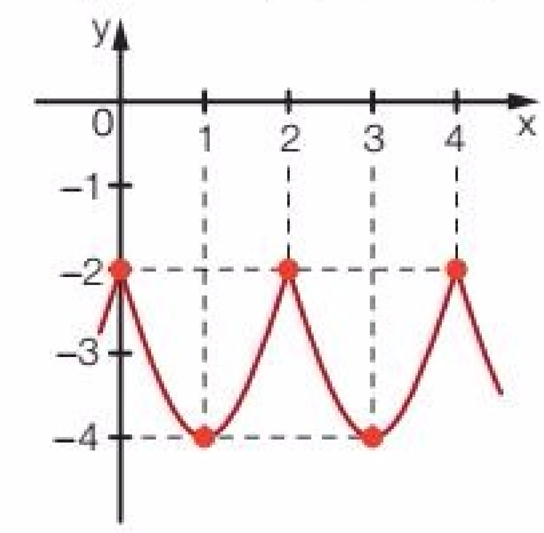
46. a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, 1]$



b) $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = [2, 3]$



c) $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = [-4, -2]$



Ilustrações: Acervo da editora

47. a) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: economia de energia, redução de acidentes nos horários de pico de trânsito (porque durante esse período há mais iluminação natural), redução de assaltos e crimes. No caso do Brasil, possibilidade de armazenar mais água nos reservatórios das hidrelétricas durante o verão, pois menos energia terá de ser gerada, aumentando as reservas que serão utilizadas durante os meses mais secos do inverno.

b) 21/6/2017

c) Decrescente nos períodos de 1/1/2017 a 21/6/2017 e de 21/12/2017 a 31/12/2017. Crescente no período de 21/6/2017 a 21/12/2017.

d) Duração do dia em 16/10/2016: 12,96 h; duração do dia em 19/2/2017: 13,14 h. O período compreendido entre essas datas corresponde àquele em que há maior incidência de luz natural, além de o pôr do sol ser mais tardio, por causa do adiantamento do horário em uma hora.

48. a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $2 + \sqrt{3}$

49. não; Uma possível resposta: nessas condições, a escada chega aproximadamente à altura de 5,14 m.

50. b

51. aproximadamente 0,65 m

52. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

53. aproximadamente 62 km

54. $\frac{\sqrt{39}}{8}$

55. $x = 30°$

56. $\text{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$

57. a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

58. $357\ m^2$

59. $\frac{3}{2}$

60. a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

61. a

62. aproximadamente 38 m

63. b

65. a) 10,8 m

b) 3 andares

66. a) 11 800 pés

b) aproximadamente 9 476 m

67. aproximadamente 13,7 m

68. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{3} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

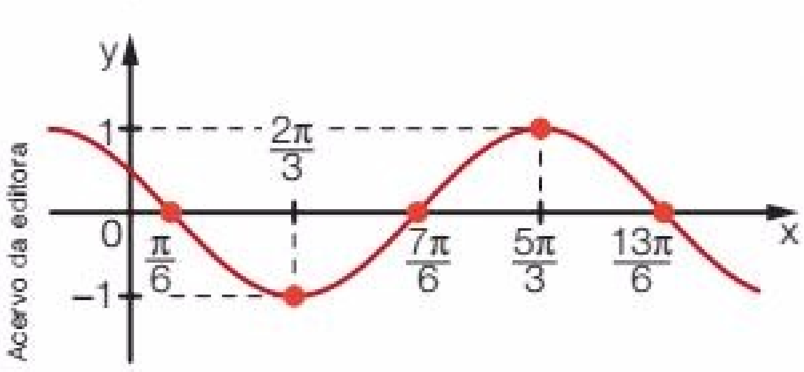
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$

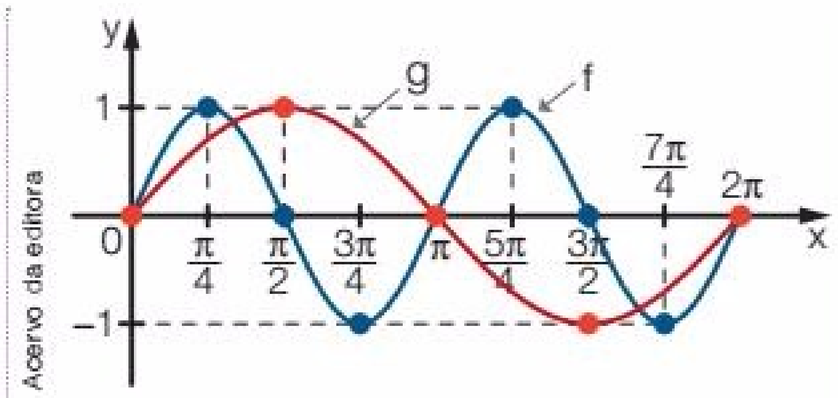
69. $\alpha = 15°$

70. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b)



71. Abscissas dos pontos de interseção: $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ e 2π.



72. $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{15}$

73. a) 2,55 m; 2,90 m

b) 1h2min

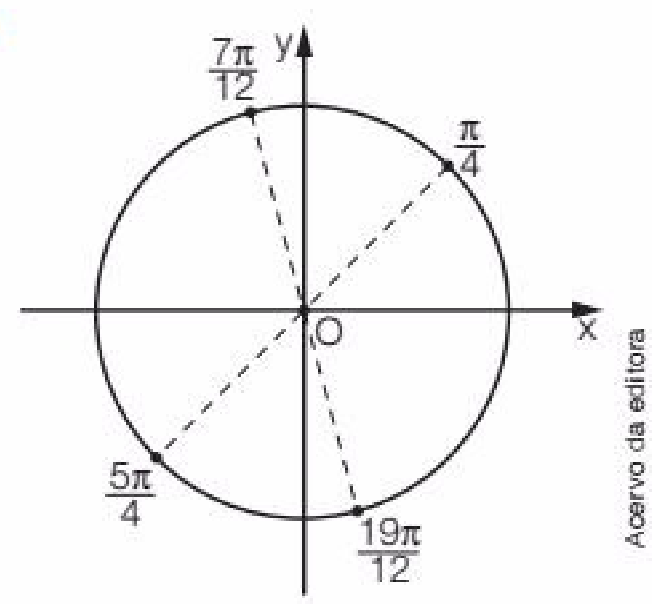
74. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

75.



capítulo 2 Matrizes e determinantes

1. a) 2×2

b) 5×3

c) 1×4

d) 2×4

2. a) 0

b) 5,7

c) π

d) $\sqrt{7}$

3. a) $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 36 & 5 \\ 74 & 250 \\ 114 & 273 \end{bmatrix}$

b) • O total de títulos do cinema estrangeiro ou brasileiro lançados em 2014.

• Os títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2014 e o seu total.

• A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2014.

4. a) 7 períodos; 18 grupos

b) 8 elementos; 18 elementos

c) • C

• Au

• I

d) • período 4, grupo 12

• período 3, grupo 17

• período 7, grupo 5

5. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6. a) Possíveis respostas: 1×7 ou 7×1.

b) Possíveis respostas: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

7. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. 0

9. a) linha

b) nula

c) quadrada

d) quadrada e triangular

e) quadrada, triangular, diagonal e identidade

f) coluna

10. • −4

• 7

11. Uma possível resposta:

$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

12. a) V

b) V

c) F

d) F

e) V

13. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) R$ 1 050,00

c) não; não

14. a) $x=-3$; $y=7$

b) $x=2$; $y=1$

15. matriz C; Resposta esperada: uma matriz quadrada tem a quantidade de linhas e colunas iguais, ou seja, é do tipo $n \times n$. Assim, a quantidade de elementos de uma matriz quadrada é dada por n^2, que é um número quadrado perfeito. Dentre as opções, apenas a matriz C tem um número quadrado perfeito correspondente à quantidade de elementos.

16. a) $\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 2\pi \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 6 & 1 & -8 \\ -16 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

17. *A* e *C*

18. a) $\begin{bmatrix} 13 & 7 & 15 \\ 6 & 4 & 5 \\ 24 & 12 & 20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 13 & 6 & 24 \\ 7 & 4 & 12 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

c) o número de alunos matriculados em cada turno, segundo o idioma; o número de alunos matriculados em cada idioma, segundo o turno

19. a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

c) sim

d) 10 possibilidades em 36

20. a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

21. a) $\begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$

b) bairro B; bairro A

22. a) $-A=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $-B=\begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $-C=\begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $-D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. a) $\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

24. a) $M=\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 21 & 22 \\ 22 & 22 & 23 & 22 & 21 \\ 24 & 23 & 23 & 24 & 23 \\ 22 & 21 & 22 & 22 & 23 \end{bmatrix}$;

$N=\begin{bmatrix} 33 & 29 & 28 & 31 & 30 \\ 32 & 23 & 29 & 28 & 26 \\ 35 & 34 & 30 & 32 & 35 \\ 32 & 34 & 33 & 35 & 36 \end{bmatrix}$

b) *B*

c) $B=\begin{bmatrix} 13 & 9 & 8 & 10 & 8 \\ 10 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 11 & 11 & 7 & 8 & 12 \\ 10 & 13 & 11 & 13 & 13 \end{bmatrix}$

d) Goiânia; Campo Grande

e) dia 26

25. $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

27. a) $\begin{bmatrix} 3 & -3\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 2x \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 6x^2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

29. $x=\frac{7}{4}$; $y=4$; $z=-3$

30. $\begin{bmatrix} 16{,}2 & 14{,}4 & 19{,}8 \\ 90 & 126 & 144 \end{bmatrix}$

31. a) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$

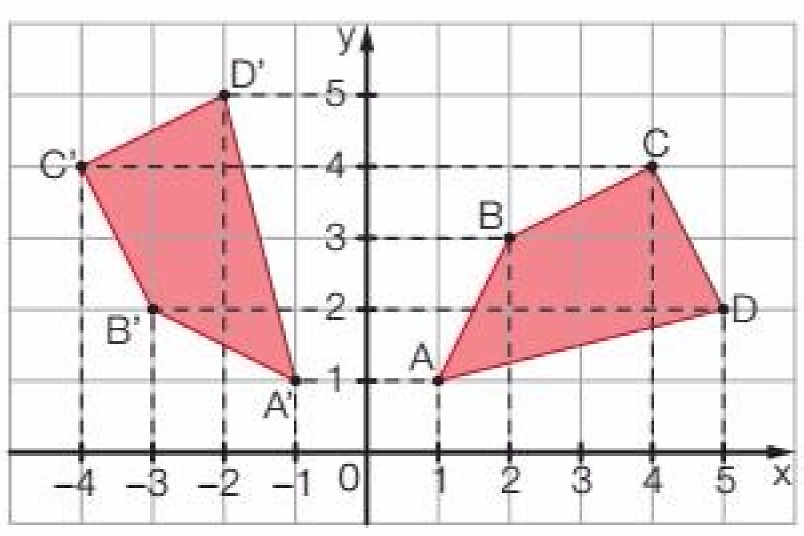
d) $[9]$

e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

32. a) $m=2$

b) 3×4

33.



Acervo da editora

34. $A \cdot B=\begin{bmatrix} 22 & -29 \\ 7 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$; $B \cdot A=\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$

36. a) $C=\begin{bmatrix} 80 \\ 66 \\ 62 \\ 56 \\ 56 \end{bmatrix}$

b) 66 pontos; 80 pontos

37. a) -12

b) 19

c) 8

38. a) $\begin{bmatrix} 10 & 9 & 45 \\ 18 & -19 & -18 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -8 & 12 & 18 \\ 20 & -14 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 21 & 63 \\ 38 & -33 & -18 \end{bmatrix}$

39. $x=-3$; $y=\dfrac{1}{2}$

40. $p=5$; $q=3$; $r=4$; $s=3$

41. a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) não existe C^{-1}

d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

42. 7

43. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

44. a)

$\begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$

c) Números primos são os números naturais que têm somente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

d) missão fracassada

45. a) $\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{19}{5} & 3 \end{bmatrix}$

47. a) $X=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$; $Y=\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $X=\begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$; $Y=\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

48. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

49. a) trabalho 1: peso 20%; trabalho 2: peso 30%; prova: peso 50%

b) 8,1

c) Algumas possíveis respostas: no trabalho 1: 8, no trabalho 2: 8 e na prova: 10; no trabalho 1: 9, no trabalho 2: 9 e na prova: 9.

50. a) pão francês: 100 g; leite: 255 g

b) 1 220 mg

51. a) -12 c) -30

b) 36 d) 144

52. $x=2$; $y=9$

54. a) 125

b) 250

c) 1 000

d) 1 000

55. $x=0$ ou $x=\dfrac{9}{4}$

56. 5

57. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

58. Uma possível resposta: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix}$

59. a) 1

60. a) -4

b) 51

c) 918

d) -72

61. a) -90

b) 18

c) $\dfrac{1}{2}$

d) 90

62. $x=-2$

63. *A*; *D*; *E*

64. a) sim; Resposta esperada: de acordo com a regra de Chió, essa igualdade é verdadeira.

b) 1

c) 1; Resposta esperada: pois a igualdade $\det I_n = \det I_{n-1}$ vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n>1$; logo, $\det I_n = \det I_{n-1} = \ldots = \det I_1 = \det[1] = 1$

65. $x=0$ ou $x=-2$

66. -912

capítulo

3 Sistemas lineares

1. a) coeficientes: 4 e -12; termo independente: 17

b) coeficientes: 1 e $-\sqrt{3}$; termo independente: 0

c) coeficientes: -1 e -5; termo independente: 2

2. a) linear

b) não linear

c) linear

d) não linear

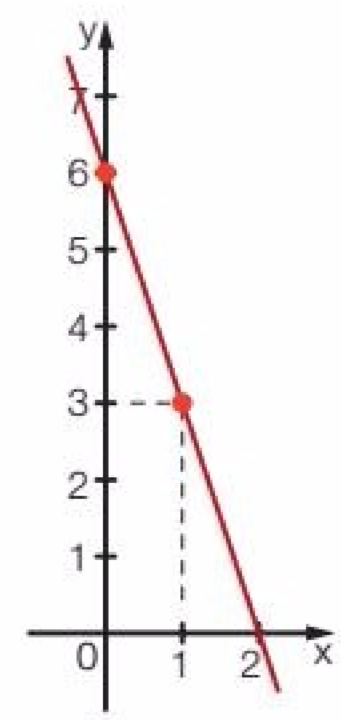
3. b

4. a) Uma possível resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \dfrac{19}{6}\right)$.

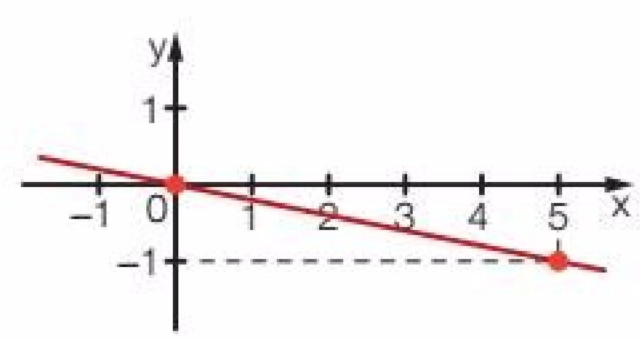
b) Uma possível resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

5. $\alpha=-2$

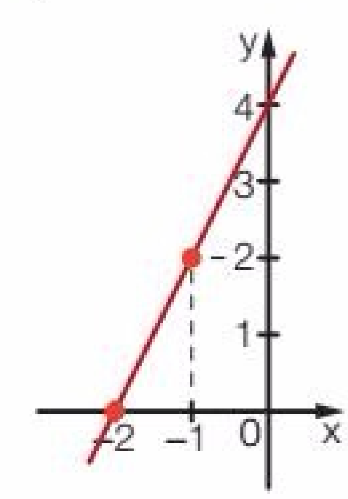
6. a) Uma possível resposta: $(0, 6)$ e $(1, 3)$



b) Uma possível resposta: $(0, 0)$ e $(5, -1)$



c) Uma possível resposta: $(-2, 0)$ e $(-1, 2)$



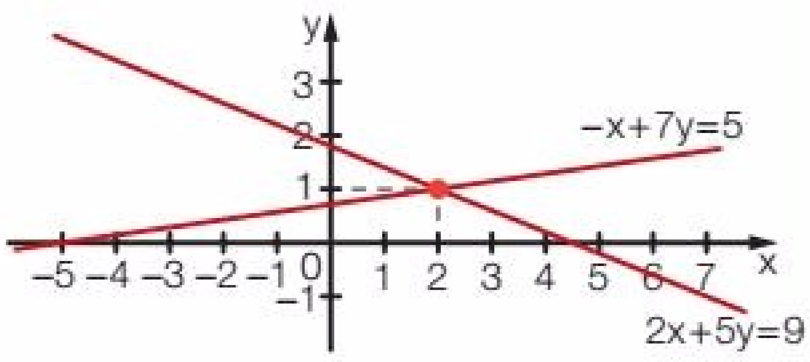
Ilustrações: Acervo da editora

7. a) II e III; homogêneo

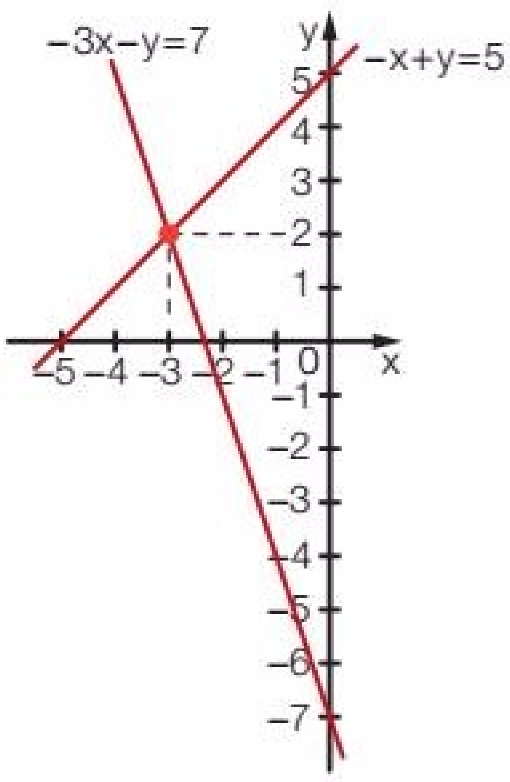
b) II; não homogêneo

Respostas

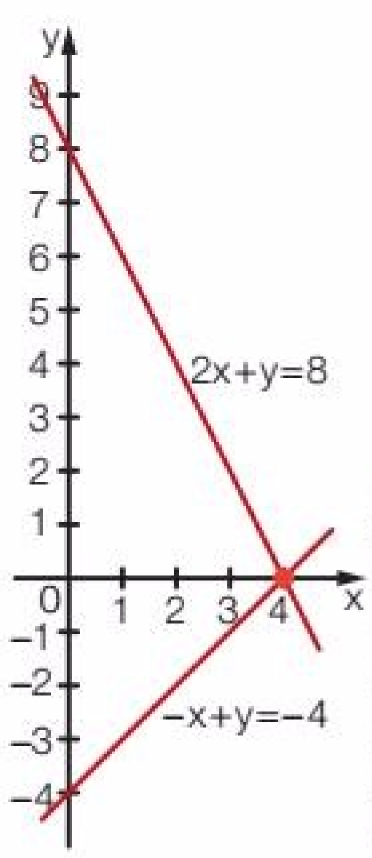
8. a) $x=2;\ y=1$



b) $x=-3;\ y=2$



c) $x=4;\ y=0$



Ilustrações: Acervo da editora

9. $\begin{cases} 20x+50y=240 \\ x+y=9 \end{cases}$; 7 cédulas de 20 reais e 2 cédulas de 50 reais.

10. d

11. a) II

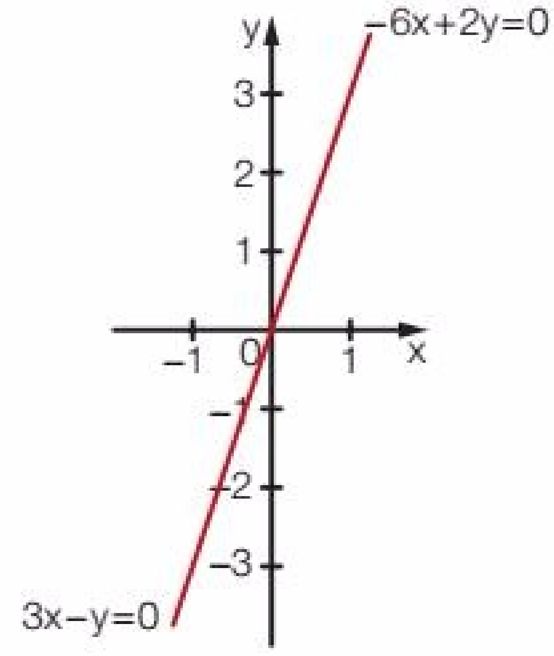
b) 150 mL de leite de soja e 200 g de salada de frutas

c) A solução de cada sistema é representada, no plano cartesiano, pelo ponto de interseção das retas que representam as equações que o compõem.

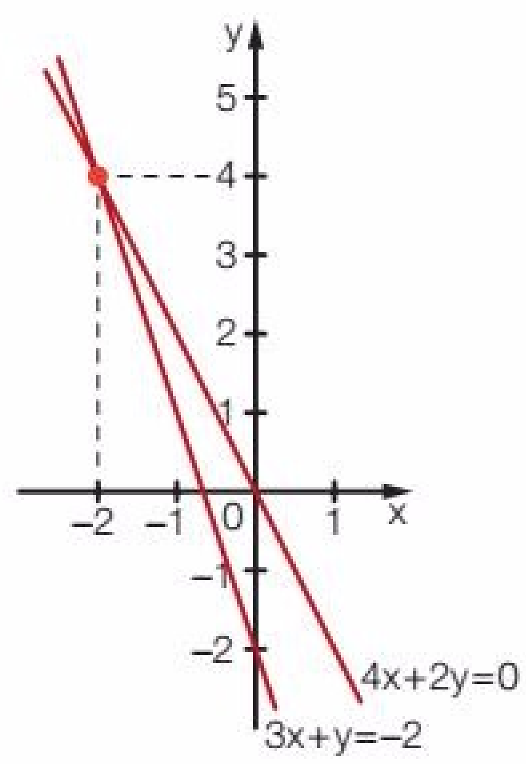
12. a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

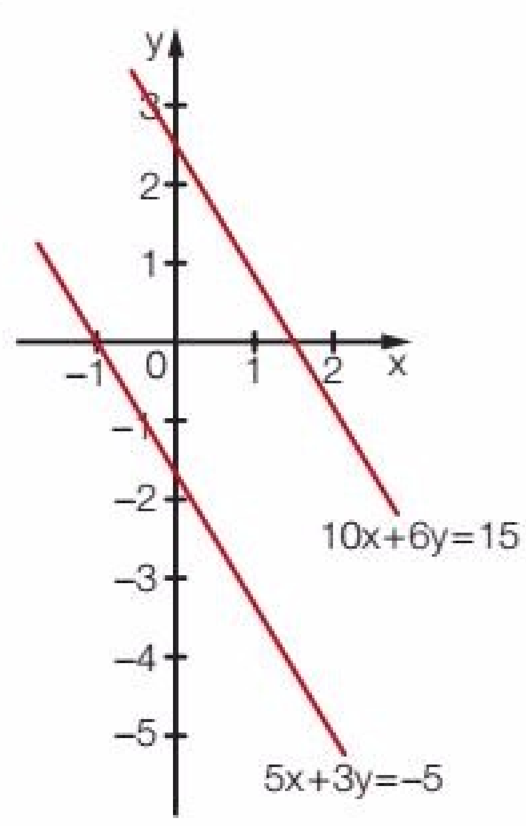
13. a) SPI



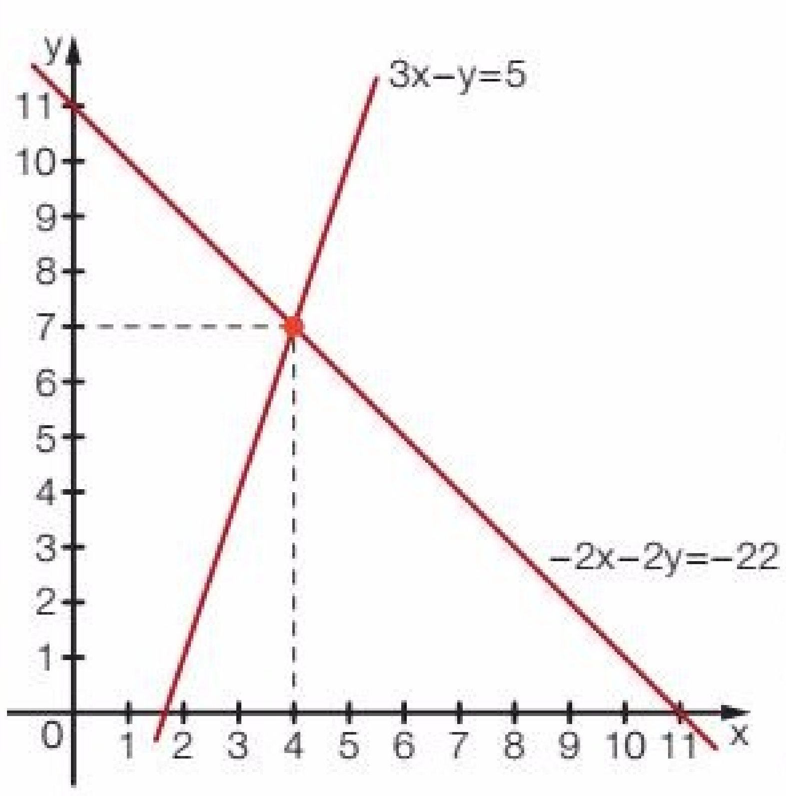
b) SPD



c) SI



d) SPD



Ilustrações: Acervo da editora

14. 8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas

15. $\alpha=-2$

16. a) uma solução; $(-2, 5)$

b) não possui solução

c) uma solução; $(2, 1)$

d) infinitas soluções; Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$

e) uma solução; $(-2, 5)$

17. etanol: 30 L; gasolina: 10 L

18. a–IV; b–I; c–III; d–II

19. adubo: 240 sacas; sementes: 300 sacas

20. $x=3;\ y=-2;\ z=-1$

21. $\begin{cases} 2{,}5L+1{,}6P=26{,}70 \\ 4L+3{,}5P=54{,}00 \end{cases}$; L = R\$ 3,00; P = R\$ 12,00

22. a) carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u

b) não; Resposta esperada: pois se obtivermos um sistema de equações a partir dessas informações, ele será possível e indeterminado.

23. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) III

c) Algumas possíveis respostas: fontes de energia elétrica: pilhas, baterias e usinas; condutores: cobre e ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas e motores.

24. a–d; b–f; c–e

25. b; d

26. a) $A\neq 1;\ B=0;\ C\neq 0;\ D=0;\ E=-1$

b) $A\neq 1;\ B=1;\ C\neq 0;\ D=0;\ E=0$

27. a) SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2}-k, 3-k, k\right)$, $k\in\mathbb{R}$

b) SPD; $(1, -2, 4)$

c) SPI; solução geral: $(4{,}5+2k, -5-k, k)$, $k\in\mathbb{R}$

28. Paulo: 19 anos; Camila: 9 anos

29. a) $x=2;\ y=3;\ z=1$

b) $x=3;\ y=-1;\ z=2$

30. 1ª prova: 5; 2ª prova: 2; 3ª prova: 3

32. 50 s

33. a) SPD: $a\neq 2$; SPI: $a=2$

b) SPD: $\forall a\in\mathbb{R}$

c) SPD: $a\neq 0$; SI: $a=0$

d) SPD: $a\neq 0$ e $a\neq -1$; SI: $a=0$ e $a=-1$

34. $k_2\neq -2k_1$

35. $a \neq 0$; Uma possível resposta: $a=1$ e (21, 4, 16).

36. SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a=-\frac{1}{2}$ e $b=4$; SI: $a=-\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$

37. $a \neq \frac{10}{3}$

38. SPD

39. $p=-1$

capítulo 4 Análise combinatória

1. 24 maneiras
2. 49 maneiras; 42 maneiras
3. 258 336 000 senhas
4. 5 trajetos
5. 12 pessoas
6. 24 maneiras
7. d
8. a) 36 maneiras
   b) 12 maneiras
9. a) 9 000 números
   b) 27 216 números
   c) 450 números
   d) 180 000 números
10. 15 120 maneiras
11. 235 min ou 3h55min
12. a) Não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.
    b) 20 000 números
    c) 20 000 números
13. 256 maneiras
14. a) Uma possível resposta: ele melhora a precisão de classificação dos produtos, identificando-os de forma rápida.
    b) Suíça; dígito verificador igual a 1
    c) sim; Uma possível resposta: suponha que o código 7 891221 021133 seja digitado erroneamente como 7 892121 021133. O erro seria detectado, pois o número verificador seria 1 em vez de 3. Mas se digitado como 7 891221 021331, o erro não seria verificado.
    d) Não, pois, caso a sequência fosse formada por dois dígitos, ela abrangeria apenas 100 países e não os 193 países reconhecidos pela ONU.
    e) 100 000 produtos
15. a) 720
    b) 8
    c) 25
    d) 96
    e) 120
    f) 195
    g) $\frac{1}{455}$
    h) 10
16. a) n
    b) $n+3$
    c) $\frac{1}{n}$
17. a) $n=3$
    b) $n=-4$
    c) $n=1$ ou $n=0$
18. a) 30
    b) 504
    c) 840
    d) 20 160
    e) 48
    f) 6 880
19. a) $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$
    b) $n+1$
    c) $\frac{1}{2n^2+2n}$
20. 1 320 maneiras
21. 665 280 maneiras
22. 24 165 120 maneiras
23. 19 656 000 livros
24. a) 27 907 200
    b) 3 113 510 400
    c) 78 960 961
    d) 19 958 399
    e) 6 652 800
    f) 3 160 080
25. a) 625 números
    b) 120 números
    c) 36 números
    d) 48 números
26. 1 440 números
27. a) 3 senadores
    b) $\frac{81!}{74!}$
28. $n=4$
29. 480 maneiras
30. a) 27 907 200 maneiras
    b) 2 203 200 maneiras
31. a) 16 equipes
    b) 30 partidas
32. a) 420 min
    b) Não, pois, nessas condições, o número máximo de senhas a serem digitadas é 672, o que equivale a 56 min.
33. a) 5 040
    b) 4 920
    c) 4 320
    d) 132
    e) 1 120
    f) 24
34. a) 24 anagramas
    b) 120 anagramas
    c) 5 040 anagramas
    d) 362 880 anagramas
35. 720 maneiras
36. 719 maneiras
37. a) 120 palavras
    b) 24 palavras
    c) 48 palavras
38. 24 meses
39. a) 479 001 600
    b) 6 226 657 920
    c) 72 576 000
40. a) 875 431; 134 578
    b) 389 números; 310 números
41. 2 340ª
42. 384 maneiras
43. a) 15
    b) 126
    c) 3 003
    d) 952
    e) 14
    f) 1
44. a) $p!$
    b) $n(n-2)$
    c) $\frac{p(p+1)}{n}$
    d) $\frac{n-1}{p-1}$
45. a) 12 650
    b) 2 042 975
    c) 3 365 856
    d) 10 015 005
    e) 24 040 016
    f) 3 921 225
46. 15
47. 18 564 maneiras
48. 3 268 760 maneiras
49. 7 315 maneiras
50. 91 390 maneiras
51. a
52. 2 042 975 maneiras
53. 56 subconjuntos; 56 subconjuntos
54. 4 números
55. a) 15 segmentos
    b) 20 triângulos
56. 36 pessoas
57. 38 760 maneiras

58. 250 800 maneiras

59. a) R$ 175 223 510,00; Uma possível resposta: o procedimento seria vantajoso apenas se o prêmio oferecido fosse maior que esse valor e não existissem outros ganhadores.

b) 3 176 716 400 possibilidades

60. 27 alunos

61. 33 264 000 maneiras

62. 35 maneiras

63. 140 maneiras

64. a

65. a) 2 520 anagramas

b) 60 480 anagramas

c) 1 814 400 anagramas

d) 1 663 200 anagramas

e) 119 750 400 anagramas

66. 84 soluções

67. a) 180 números

b) 90 números

c) 120 números

68. 45 maneiras

69. UACÉLL

70. d

71. a) 112

b) 267

c) 32 768

d) 808

72. a) $S=\{9\}$

b) $S=\{11, 13\}$

c) $S=\{100\}$

d) $S=\{0, 10\}$

73. 8 elementos; 256

74. d

75. $S=\{x \in \mathbb{N} \mid x<9\}$

76. 1 023 comissões

77. 12

78. a) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

b) $16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$

c) $64x^6-48x^5y+15x^4y^2-\dfrac{5x^3y^3}{2}+$ $+\dfrac{15x^2y^4}{64}-\dfrac{3xy^5}{256}+\dfrac{y^6}{4\,096}$

d) $x^2+4x\sqrt{x}\sqrt{y}+6xy+4y\sqrt{x}\sqrt{y}+y^2$

e) $\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{a\sqrt{a}\sqrt{b}}{6}+\dfrac{ab}{6}-\dfrac{2b\sqrt{a}\sqrt{b}}{27}+\dfrac{b^2}{81}$

f) $x^6y^6+2x^5y^5z+\dfrac{5}{3}x^4y^4z^2+\dfrac{20}{27}x^3y^3z^3+$ $+\dfrac{5}{27}x^2y^2z^4+\dfrac{2}{81}xyz^5+\dfrac{z^6}{729}$

79. a) 1

b) −1

c) 0

d) 256

80. a) $220\sqrt{5}-284\sqrt{3}$

b) $3\,964+624\sqrt{35}$

c) $3\,363-2\,378\sqrt{2}$

d) $2\,403+981\sqrt{6}$

81. 8

82. a) $T_{p+1}=\dbinom{7}{p}\cdot 9^{7-p}(-a)^p$

b) $T_{p+1}=\dbinom{5}{p}\cdot 3^{5-p}\left(\dfrac{x}{3}\right)^p$

c) $T_{p+1}=\dbinom{9}{p}(5ab)^{9-p}\left(-\dfrac{c}{7}\right)^p$

d) $T_{p+1}=\dbinom{6}{p}\left(\dfrac{7}{x}\right)^{6-p}\left(\dfrac{8y}{3}\right)^p$

83. $-\dfrac{320x^3}{729}$

84. $77\,520x^4y^{16}$

85. a) $540y^6$

b) $70a^4b^4$

c) $\dfrac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

86. a) 729

b) 1 024

c) não possui termo independente de *x*

d) 5 670

87. $\dfrac{760x^{18}}{y^2}$

88. a) $\dfrac{55x^3}{2y^9}$ b) $\dfrac{231x^6}{16y^6}$ c) $\dfrac{495x^8}{256y^4}$

capítulo 5 Probabilidade

1. $\Omega=\{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2. a) $\Omega=\{(A, A, V), (A, V, A), (A, V, V), (V, V, A), (V, A, V), (V, A, A)\}$

b) $E=\varnothing$

3. a) $\Omega=\{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$

b) $\Omega=\{213, 268, 305, 313\}$

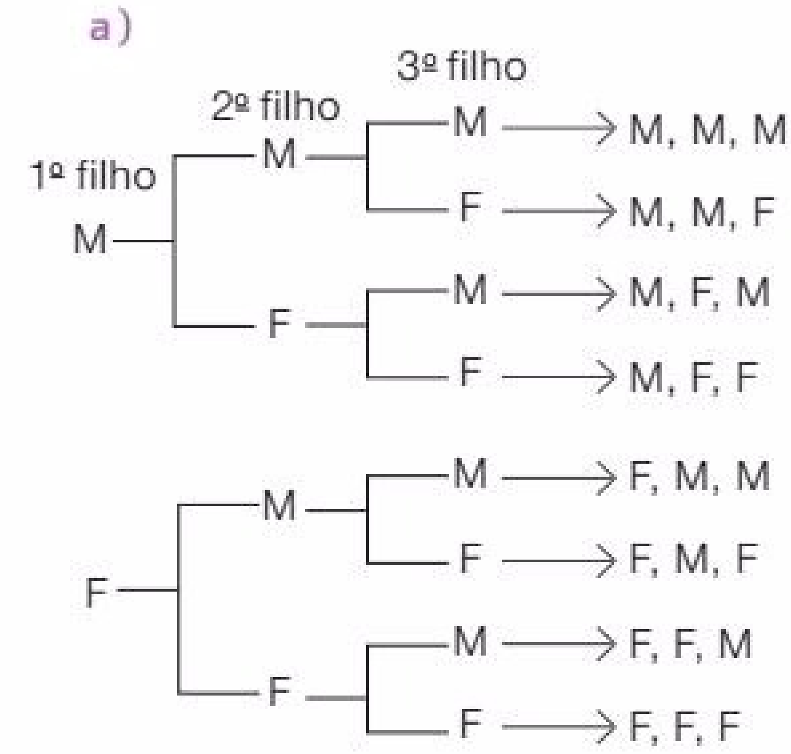
4. a) $A=\{(C,C),(E,E),(O,O),(P,P)\}$

b) $B=\{(O,O),(O,C),(O,E),(O,P)\}$

c) $C=\{(E, E), (E, O), (E, P), (O, O), (O, P), (P, P)\}$

5. Em 1991, as mulheres tinham, em média, 3 filhos.

a)



b) • $A=\{(M,M,M),(F,F,F)\}$

• $B=\{(M,M,F),(M,F,M),(F,M,M)\}$

• $C=\{(M,M,F),(M,F,M),(M,F,F),(F,M,M),(F,M,F),(F,F,M),(F,F,F)\}$

6. a)

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) • $A=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

• $B=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

• $C=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

• $D=\varnothing$

• $E=\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

7. a) 6 maneiras

b) $\Omega=\{$R$ 120,00; R$ 130,00; R$ 140,00; R$ 150,00; R$ 160,00; R$ 180,00$\}$

8. a) $A=\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

b) $B=\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3)\}$

c) $C=\varnothing$

d) $D=\Omega$

9. a) $\dfrac{1}{2}$ ou 50%

b) $\dfrac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%

c) $\dfrac{1}{4}$ ou 25%

d) $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%

e) $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%

10. $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%

11. a) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

b) $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

c) 1 ou 100%

d) $\frac{1}{2}$ ou 50%

e) 0 ou 0%

12. c

13. c

14. a) Na faixa horária das 6 h às 12 h, pois é nessa faixa horária que ocorre o maior número de enfartes.

b) • $\frac{1}{5}$ ou 20%

• $\frac{7}{10}$ ou 70%

15. a) $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%

b) $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%

c) $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%

16. a) • $\frac{1}{8}$ ou 12,5%

• $\frac{1}{16}$ ou 6,25%

• $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

c) $\frac{1}{4}$ ou 25%

17. $\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%

18. $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$

19. a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$

$= 1 - \frac{31 \cdot (31-1) \cdot (31-2) \cdot \ldots \cdot (31-n+1)}{31^n}$

b) aproximadamente 29%; aproximadamente 80%

20. a) Mulheres, pois a estimativa do número de mulheres será maior que a do número de homens.

b) maior

c) aproximadamente 43,89%

21. $\frac{19}{39}$ ou aproximadamente 48,72%; $\frac{20}{39}$ ou aproximadamente 51,28%

22. a) $\frac{1}{120}$ ou $0,8\overline{3}\%$

b) $\frac{3}{5}$ ou 60%

c) $\frac{2}{5}$ ou 40%

23. a) $\frac{1}{11}$ ou $9,\overline{09}\%$

b) $\frac{10}{11}$ ou $90,\overline{90}\%$

24. 9 balas de cereja; 18 balas de hortelã; 6 balas de uva

25. a) $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) $\frac{11}{12}$ ou $91,\overline{6}\%$

c) $\frac{1}{6}$ ou $16,\overline{6}\%$

26. a) $\frac{1}{52}$ ou aproximadamente 1,92%

b) $\frac{1}{13}$ ou aproximadamente 7,69%

c) $\frac{4}{13}$ ou aproximadamente 30,77%

d) $\frac{2}{13}$ ou aproximadamente 15,38%

e) $\frac{5}{26}$ ou aproximadamente 19,23%

27. a) 31% b) 24% c) 69%

28. a) Natália; $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) Marcos e Otávio; $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

29. 60%

30. a) $\frac{19}{20}$ ou 95%

b) $\frac{17}{20}$ ou 85%

c) $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$

31. $\frac{3}{4}$ ou 75%

32. a) $\frac{1}{4}$ ou 25%

b) $\frac{1}{5}$ ou 20%

c) $\frac{2}{5}$ ou 40%

d) $\frac{3}{5}$ ou 60%

33. a) $\frac{7}{11}$ ou $63,\overline{63}\%$

b) $\frac{2}{5}$ ou 40%

c) $\frac{8}{17}$ ou aproximadamente 47,06%

d) $\frac{4}{7}$ ou aproximadamente 57,14%

e) $\frac{9}{17}$ ou aproximadamente 52,94%

f) $\frac{16}{31}$ ou aproximadamente 51,61%

34. a) $\frac{12}{19}$ ou aproximadamente 63,16%

b) $\frac{32}{95}$ ou aproximadamente 33,68%

c) $\frac{3}{95}$ ou aproximadamente 3,16%

35. a) • $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%

• $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%

b) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

36. d

37. $\frac{3}{10}$ ou 30%

38. $\frac{9}{100}$ ou 9%

39. $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%

40. a) sim; Resposta esperada: caso ela tenha um filho com uma pessoa que tenha o traço, o filho terá 25% de chance de ter a doença. Caso ela tenha um filho com uma pessoa que tem a doença, terá 50% de chance de ter um filho com anemia falciforme.

b) ASxSS ou ASxAS

c) • $\frac{9}{16}$

• $\frac{3}{16}$

• $\frac{1}{4}$

d) 50%

41. aproximadamente 23,62%

42. a) aproximadamente 26,37%

b) aproximadamente 0,1%

c) aproximadamente 39,55%

d) aproximadamente 23,73%

43. $\frac{3}{32}$ ou aproximadamente 9,38%

44. 38,4%

45. a) aproximadamente 25,41%

b) aproximadamente 0,007%

c) aproximadamente 25,53%

46. aproximadamente 99,88%

47. aproximadamente 0,16%

48. a) $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,012%

b) Resposta esperada: qualquer combinação de sexo de 13 filhos tem a mesma probabilidade de ocorrer, pois a probabilidade de uma criança nascer com o sexo masculino ou feminino é de 50%, e os eventos são independentes.

49. a) aproximadamente 63%

b) aproximadamente 34%

c) 2013

50. 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas

51. sim; Resposta esperada: a probabilidade de se obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica ($16{,}\overline{6}\%$). Existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 (25%) e 5 ($22{,}\overline{4}\%$).

52. $\frac{9}{25}$ ou 36%

53. Aumentou em cerca de 3 pontos percentuais.

capítulo 6 Área de figuras planas

1. $608\ cm^2$

2. a

3. $52\ dm^2$

4. a) $714\ m^2$ b) $1\,870\ m^2$

5. a) $623{,}7\ cm^2$

b) estilo paisagem

c) $3\,021{,}2\ cm^2$

6. $700\ cm^2$

7. a) $20\ m^2$; $23{,}1\ m^2$

b) 15,5%

8. 1 619 722 campos de futebol

9. a) $16\ u^2$ b) $88\,128\ km^2$

10. a) A necessidade de realizar medições de terrenos destinados à agricultura, sobretudo aqueles cujas demarcações eram perdidas nas cheias do rio Nilo.

b) aproximadamente 3,9%

c) $200\,000\ m^2$; $250\,000\ m^2$

11. a) aproximadamente $136{,}8\ dm^2$

b) $96\ dm^2$

c) $150\ dm^2$

12. a) $4\sqrt{6}\ m^2$

b) $54\ dm^2$

c) $\frac{3\sqrt{15}}{4}\ km^2$

d) $40\sqrt{3}\ cm^2$

13. $\sqrt{5}\ cm$; $\frac{\sqrt{15}}{2}\ cm^2$

14. a) $84{,}8\ m^2$

b) $167{,}3\ m^2$

15. $16\ m^2$

16. verdadeira; Possível resposta: os triângulos ABC e AFC possuem a mesma área, pois têm base $\overline{AC}$ comum e altura com mesma medida. O mesmo ocorre com os triângulos AED e AGD. Já o triângulo ACD é comum ao triângulo AFG e ao pentágono ABCDE. Dessa maneira, como o triângulo AFG e o pentágono ABCDE são formados por triângulos com áreas equivalentes, eles possuem a mesma área.

17. $3\sqrt{3}\ cm$

18. $80\ cm^2$

19. a) $8\,435\ cm^2$

b) $12\,222{,}6\ cm^2$

c) $5\,408\ cm^2$

20. hexágonos regulares: $2\,250\ m^2$; triângulos equiláteros: $750\ m^2$

21. razão de semelhança: $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7

22. $R = 117{,}9$

23. c

24. 9

25. d

26. a) $196{,}5\ m^2$

b) $160{,}7\ m^2$

27. $1\,285\ cm^2$

28. a

29. 50 m

30. a) $31\,400\ cm^2$

b) $n=3$: $12\,990\ cm^2$; $n=4$: $19\,994\ cm^2$; $n=5$: $23\,777\ cm^2$; $n=10$: $29\,405\ cm^2$

c) Resposta esperada: a área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

31. a) $\frac{200\pi}{3}\ cm^2$

b) $175\pi\ cm^2$

32. a) $50\pi\ m^2$

b) $100(\pi-2)\ m^2$

c) $\frac{64}{3}(4\pi-3\sqrt{3})\ m^2$

33. $64\pi\ cm^2$

34. a) faixa 1: $81{,}6714\ cm^2$; faixa 2: $87{,}135\ cm^2$

b) Faixa 2, pois sua área é maior que a da faixa 1.

35. a) $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$

b) $\ell = \frac{8}{9}d$

capítulo 7 Geometria espacial de posição

1. b) Uma possível resposta: existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem a um plano.

c) Uma possível resposta: três pontos colineares determinam uma única reta.

e) Uma possível resposta: quando dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

2. a) 10 retas

b) 3 retas

c) 4 planos

3. a) 5 planos

b) Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* em três planos, e *E* em quatro planos.

4. e

5. Resposta esperada: porque três pontos não colineares, que correspondem aos pontos de apoio dos pés desses objetos, determinam um único plano. No caso de um piso irregular, por exemplo, os três pontos de apoio determinam um plano imaginário que intersecta esse piso nesses pontos.

6. a) Falsa, pois as retas concorrentes necessariamente são coplanares, e as retas ortogonais, não coplanares.

b) verdadeira

c) verdadeira

d) Falsa, pois retas concorrentes também podem ser oblíquas.

7. Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre *A*, *B*, *C* e *D*, são coplanares.

8. a)
- perpendiculares
- reversas

b) Não, pois se $r \perp t$ o triângulo formado por *r*, *t* e *s* possuiria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

9. Não, pois se $r \perp s$ e $s \perp t$, as três retas seriam coplanares apenas no caso de $t // r$, o que não ocorre.

10. a) $\overleftrightarrow{FG}$

b) $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{EJ}$

c) $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EJ}$

d) $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{EJ}$

e) $\overleftrightarrow{IJ}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{IH}$; $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{FG}$

11. a) Uma possível resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.

b) $\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$

c) $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$

d) ortogonal

12. c

13. a) verdadeira

b) verdadeira

c) falsa; Uma possível resposta: se uma reta *r* e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a *r* que são perpendiculares a α.

14. a) $\overleftrightarrow{AG}$; $\overleftrightarrow{BH}$; $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DJ}$; $\overleftrightarrow{EK}$; $\overleftrightarrow{FL}$

b) nenhuma

c) $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{DE}$; $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{AF}$

d) concorrente

e) $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$

15. Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

16. a) • contida no plano
- paralela

b) $\overleftrightarrow{DG}$; $\overleftrightarrow{CH}$

c) $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{GJ}$

d) $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$

17. Não, pois para ser perpendicular a α, a reta *s* tem de ser perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas em α.

18. α; γ

19. a) Falsa, pois dois planos secantes possuem uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.

b) verdadeira

c) Falsa, pois, se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.

d) verdadeira

e) Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando possuem apenas uma reta em comum.

20. a) Sim, pois eles possuem apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.

b) não

c) Os planos que contêm as faces ABFE, BCGF, CDHG e ADHE.

21.
- concorrentes
- paralelos
- concorrentes
- concorrentes

22. a) • Os planos que contêm as faces KLMN, BCPO, ADEF, GHIJ, CDEHILMP e ABONKJGF.
- Os planos que contêm as faces IJKL, MNOP e ABCD.

b) • 8 planos
- O plano que contém a face ABONKJGF.

23. a) verdadeira

b) Falsa, pois uma reta não contida em α pode ser paralela a esse plano e estar contida em γ.

c) verdadeira

d) Falsa, pois pode ser um plano coincidente a δ.

e) verdadeira

24. a) • Os planos que contêm as faces BCFG e ADEH.
- Os planos que contêm as faces CDEF, BCFG, ABGH e ADEH.
- O plano que contém a face ADEH.

b) Sim, pois as retas são coplanares concorrentes e $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular a um plano que contém $\overleftrightarrow{BF}$.

c) Nos planos que contêm as faces CDEF e BCFG.

25. um plano

26. a) Resposta esperada: perpendicular, pois α e θ sempre são paralelos.

b) Resposta esperada: perpendicular. Resposta esperada: não.

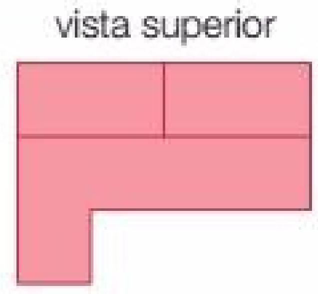
c) Resposta esperada: perpendicular.

27. perpendicular

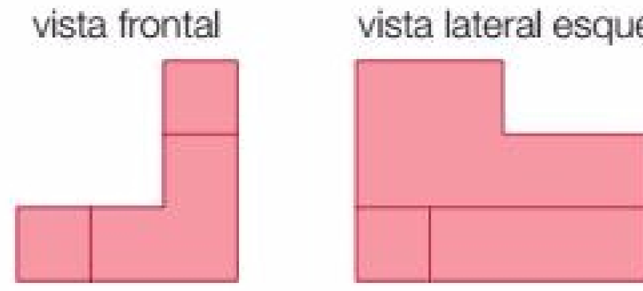
28.
- triângulo
- segmento de reta
- triângulo

29. a) • Os planos que contêm as faces ABCD, IJKL e MNOP.
- Os planos que contêm as faces ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, BCFGJKON e ADEHILPM.

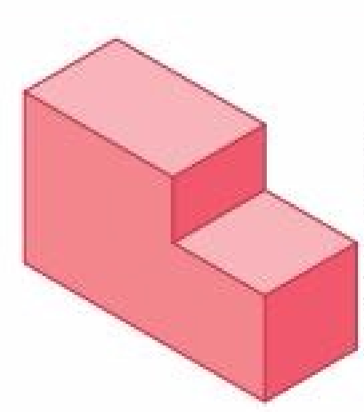
b) vista superior



vista frontal vista lateral esquerda



c)



Ilustrações: Acervo da editora

d) • I: Uma possível resposta: vistas superior e lateral esquerda ou direita.
- II: Uma possível resposta: vistas lateral e superior.
- III: Uma possível resposta: vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

30. a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, como, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.

b) verdadeira

c) Falsa, pois *r* e *s* podem ser retas reversas.

d) Falsa, pois a projeção ortogonal de qualquer polígono sobre um plano pode ser dada por um segmento de reta (quando o plano que contém o polígono é perpendicular ao plano de projeção).

e) verdadeira

31. b

32. c

33. a) Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.

b) verdadeira

c) verdadeira

d) Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

34. a) $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$

b) $\overline{EO}$

c) $\overline{BO}$

d) $\overline{CO}$; $\overline{KL}$

35. b) três

c) • α e δ
- α e β; β e δ

d) $\overline{DH}$; $\overline{EF}$

capítulo 8 Figuras geométricas espaciais

1. a) poliedro

b) não poliedro

c) não poliedro

d) poliedro

e) não poliedro

f) poliedro

2. a) 6 faces, 10 arestas e 6 vértices

b) 8 faces, 18 arestas e 12 vértices

c) 11 faces, 20 arestas e 11 vértices

d) 8 faces, 12 arestas e 6 vértices

e) 7 faces, 15 arestas e 10 vértices

f) 9 faces, 21 arestas e 14 vértices

3. a) convexo

b) não convexo

c) não convexo

d) convexo

4. a) quadriláteros
b) triângulos e quadriláteros
c) quadriláteros e hexágonos
d) pentágonos

5. c

7. 7 faces

8. a) Não convexo, pois é possível traçar um segmento de reta ligando quaisquer dois de seus pontos e que não está inteiramente contido no poliedro.
b) 9 vértices, 16 arestas e 9 faces
c) Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \underbrace{9}_{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

10. 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares

11. 6 vértices, 12 arestas e 8 faces

12. 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

13. 16 vértices e 24 arestas

14. 20 faces e 30 arestas

15. a) 4 faces, 4 vértices e 6 arestas
b) tetraedro regular
c) Todas são triangulares equiláteras.

16. Não, pois o fato de esse poliedro ser de Platão não garante que ele seja regular. Para que isso ocorra, é necessário que suas faces tenham forma triangular equilátera e sejam congruentes entre si.

17. 720°

18. 60 vértices e 90 arestas

19. a) 30 arestas e 20 faces
b) icosaedro regular
c) Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

20. poliedro A: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas; poliedro B: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas

21. 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

22. a) prisma regular hexagonal
b) prisma regular octogonal
c) prisma regular decagonal

23. a) $AD = 10$ cm; $AK = 5\sqrt{13}$ cm
b) área: 75 cm²; perímetro: $5 \cdot (5 + \sqrt{13})$ cm

24. $\ell = 3$ cm; $c = 4$ cm; $h = 12$ cm

25. comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm

26. 7 cm, 8 cm e 9 cm

27. 15 cm

28. aproximadamente 8,5 cm

29. a) 4 cm
b) $8\sqrt{2}$ cm
c) $4\sqrt{6}$ cm

30. a) $2\sqrt{3}$ cm b) 6 cm

31. 24 cm

32. a) 96 cm²
b) $375\sqrt{3}$ cm²
c) 108 cm²
d) $162\sqrt{3}$ cm²

33. a) 3 cm
b) $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$ cm

34. a) 27 000 cubinhos
b) 344 cubinhos
c) $\frac{1}{900}$

35. a) $225\sqrt{3}$ cm²
b) $A_\ell = 2\,700$ cm²;
$A_t = 450 \cdot (6 + \sqrt{3})$ cm²

36. 3,46 cm

37. a) $x = 2$ cm
b) área da base: 496 cm²; área lateral: 188 cm²

38. a) aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m²
b) R$ 67,75

39. a) 24 cm b) 3 120 cm²

40. a) padrão 1: 38,49 m³;
padrão 2: 77 m³
b) padrão 1: 73,9 m²;
padrão 2: 135,27 m²

41. 4 cm

42. c

43. a) 1 680 cm³
b) 960 cm³
c) 6 cm

44. 36 m³

45. a) aproximadamente 124,7 m³
b) 798,08 m³

46. 27 000 L

47. a) $\frac{1}{8}$ b) 12,5 cm

48. A medida de *c* deve ser aumentada em 25%.

49. a) 8 cm b) $768\sqrt{3}$ cm³

50. 7,5 L

51. a

52. Resposta esperada: de acordo com o Princípio de Cavalieri, os prismas têm volumes iguais, pois têm a mesma altura; quando apoiados em um mesmo plano α e cortados por um plano β, paralelo a α, são determinadas nesses prismas regiões planas de mesma área.

53. aproximadamente 16,46 m³

54. b

55. a) 20 cm
b) aproximadamente 610,27 cm²

56. a) 210 blocos b) 12,6 m³

57. a) 2,5 m, 15 m e 15 m
b) 562,5 m³

58. aproximadamente 10 dias

59. • O número total de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono que compõe a base.
• O número de faces da pirâmide é igual ao número de lados do polígono que compõe a base, mais 1.

60. a) 4 cm
b) $4\sqrt{10}$ cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $2\sqrt{39}$ cm

61. menor aresta: 3 cm; maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm

62. 4 cm

63. a) $3\sqrt{3}$ cm²
b) $4\sqrt{3}$ cm²

64. a) 10 dm
b) $5\sqrt{2}$ dm
c) 100 dm²
d) $100 \cdot (1 + \sqrt{5})$ dm²

65. 8 cm

66. $12\sqrt{55}$ cm²

67. $2\sqrt{3}$ cm²

68. faltará; 9 cm²

69. 2 000 telhas

70. 3,16 m²

71. 11,9 m²

72. a) 3 cm
b) $3\sqrt{10}$ cm
c) $36\sqrt{11}$ cm²
d) $36 \cdot (5 + \sqrt{11})$ cm²

73. 6 m³

74. 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm

75. a) • 3 cm
• $\sqrt{3}$ cm
b) • $6\sqrt{3}$ cm²
• $6 \cdot (3 + \sqrt{3})$ cm²
c) $6\sqrt{2}$ cm³

76. $\frac{1}{2}$

77. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³

78. 8 anos e 4 meses

79. 243,18 g

80. a) $400\sqrt{3}$ cm^2

b) $\frac{20}{3}$ L

81. $4\sqrt{6}$ cm

82. $250\sqrt{6}$ dm^3

83. $9 \cdot \left(8+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m^2

84. a) 4 cm

b) $128\sqrt{2}$ cm^2

c) $32 \cdot (4\sqrt{2}+5)$ cm^2

85. $24\sqrt{3}$ dm^2; $34\sqrt{3}$ dm^2

86. 16 cm, 10 cm e $4\sqrt{3}$ cm

87. $4 \cdot (25+14\sqrt{2})$ m^2

88. $\frac{637}{3}$ mm^3

89. 24 500 cm^3

90. $2\sqrt{10}$ cm

91. a) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

92. a) 9 m

b) 4,632 m^3

93. a) 63 cm^2

b) $36 \cdot (\sqrt{5}+6)$ cm^3

c) $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+3\right)$ cm^3

94. $114\sqrt{3}$ cm^3

95. 2 975 L

96. $\frac{12\,800}{7}$ cm^3

97. a) $A_b = 12{,}56$ cm^2; $A_\ell = 62{,}8$ cm^2; $A_t = 87{,}92$ cm^2

b) $A_b = 28{,}26$ cm^2; $A_\ell = 169{,}56$ cm^2; $A_t = 226{,}08$ cm^2

98. 4 121,25 dm^2

99. 10 cm

100. 5 m

101. a) aproximadamente 6,94 m^2

b) 346,97 m^2

102. a) 150,72 u.a. (unidades de área)

b) 251,2 u.a.

103. aproximadamente 942 m^2

104. 19,625 cm^2

105. aproximadamente 0,7 g

106. a) 56,52 m^3

b) 169,56 m^3

107. 251,2 cm^3

108. $\sqrt{5}$ cm

109. 113 040 L

110. 8 cm

111. a) 6 798,1 cm^3

b) 53 201,9 cm^3

112. c

113. 663,325 cm^3

114. 12 cm

115. d

116. 5 pontos

117. a

118. 80 mm

119. a) Método geométrico, pois este, ao contrário do método de Francon, considera as partes da tora que não serão aproveitadas nas serrarias.

b) prisma reto de base quadrada; cilindro reto

c) método geométrico: aproximadamente 3,18 m^3; método de Francon: aproximadamente 2,5 m^3

d) aproximadamente 7,4 m^3

120. a) 63,585 cm^2

b) 7,5 cm

c) 105,975 cm^2

d) 169,56 cm^2

121. 122,46 cm^2

122. a) 40 cm

b) 48 cm

123. aproximadamente 9 161 m^2

124. a) 3 768 cm^2 b) 1 130,4 cm^2

125. $8\sqrt{13}$ cm

127. c

128. 854,08 cm^2

129. c

130. a) 401,92 cm^3

b) 127,17 cm^3

c) 39,25 cm^3

d) 37,68 cm^3

131. 15 cm

132. 200 mL

133. a

134. a) 28,26 cm^3

b) 9,42 cm^3

135. aproximadamente 134 cm^3

136. 3,2 L

137. aproximadamente 3 165 sacas

138. aproximadamente 1 929,2 cm^3

139. a) aproximadamente 2,49 g

b) aproximadamente 8,2 cm

140. a) A: 1 130,4 cm^2; V: 2 110,08 cm^3

b) A: 2 135,2 cm^2; V: 7 108,96 cm^3

141. a) 18 cm; 9 cm

b) 12 cm

c) 810π cm^2

142. a) 8 cm; 24 cm

b) 628 cm^2; 5 425,92 cm^2

143. 2 813,44 u.a.

144. aproximadamente 3 948,55 cm^2

145. aproximadamente 5 416 cm^2

146. 8 cm

147. 4 latas

148. 602,88 cm^2

149. 60 dm

150. a) 2 505,72 cm^3

b) 1 879,28 mL

151. 715,92 cm^3

152. 12 cm

153. 12 cm

154. 65 940 L

156. 904,32 cm^3

157. 14,13 cm^3

158. 7 108 692,3 mm^3; 8 021 086 mm^3

159. 6 400 km

160. 14 130 cm^3

161. a) 7,232 g

b) $2\sqrt[3]{6}$ cm

162. 6

163. aproximadamente 6 589 cm^3

165. 54π cm^3

166. 29,3 cm^3

167. 2,5 cm

168. 78,5 cm^2

169. 314 dm^2

170. 759,88 m^2

171. R$ 0,72

172. 144π cm^2

173. $\frac{17}{4}\pi r^2$

174. 900π cm^2

175. a) 15°

b) 21 435 733 km^2

Bibliografia consultada

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Unesp.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Tendências em educação matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, [s.d.].

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, 2000.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística básica**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

COLEÇÃO do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 22 v.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Perspectivas em educação matemática).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. São Paulo: SBEM.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento et al. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2007. (Coleção Acadêmica).

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2014. v. 1.

TÓPICOS de história da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual. 6 v.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

Lista de siglas

Enem-MEC ▸ Exame Nacional do Ensino Médio

ENCE-RJ ▸ Escola Nacional de Ciências Estatísticas