Quarta Lista de Preparação para a XLI IMO
e XV Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

No triângulo acutângulo ABC, $\angle B < \angle C$. O ponto D está sobre BC e é tal que $\angle ADB$ é obtuso. Seja H o ortocentro do triângulo ABD. Suponha que o ponto F é interior a ABC e está no circuncírculo de ABD. Prove que F é o ortocentro de ABC se, e somente se, HD é paralelo a CF e H está sobre o circuncírculo do ABC.

▸ PROBLEMA 2

Para um número real dado a, suponha que a seqüência de polinômios de coeficientes reais $\{f_n(x)\}$ satisfaz

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_{n+1}(x) &= xf_n(x) + f_n(ax), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(a) Prove que $f_n(x) = x^n f_n(1/x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Dê fórmulas explícitas para $f_n(x)$.

▸ PROBLEMA 3

A cidade espacial *MO* consiste de 99 estações espaciais. Todo par de estações é conectado através de uma passagem tubular. De todos estes tubos, 99 têm mão dupla e os demais são de mão única. Para quaisquer 4 estações, elas formam uma *quádrupla fortemente conexa* se, de cada uma das 4 estações, pode-se chegar às outras três através dos tubos que conectam estas 4 estações. Projete um esquema para a cidade espacial MO tal que ela tenha o maior número de quádruplas fortemente conexas.

▸ PROBLEMA 4

Seja m um inteiro dado. Prove que existem inteiros a, b e k tais que a e b são ímpares, $k \geqslant 0$ e $2m = a^{19} + b^{99} + k \cdot 2^{1999}$.

▸ PROBLEMA 5

Encontre o maior número real λ tal que, sempre que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ for um polinômio real e todas suas raízes forem números reais não negativos, temos $f(x) \geqslant \lambda(x - a)^3$, para todo $x \geqslant 0$. Quando vale a igualdade?

▸ PROBLEMA 6

Um grande cubo de $4 \times 4 \times 4$ consiste de 64 cubos de aresta 1. Pinte 16 dos cubos de vermelho de tal maneira que, em cada paralelepípedo de dimensões $1 \times 1 \times 4$, $1 \times 4 \times 1$ ou $4 \times 1 \times 1$ do cubo grande, existe exatamente um cubo vermelho. Qual é o número total de tais pinturas?

▸ PROBLEMA 7

Se cada aresta e cada diagonal de um 25-ágono for pintada de vermelho ou branco, mostre que existem pelo menos 500 triângulos monocromáticos com vértices neste 25-ágono.

▸ PROBLEMA 8

O incírculo do triângulo ABC toca os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ nos pontos D e E, respectivamente. K é um ponto sobre $\overline{BC}$ com $CK = BD$ e L é um ponto sobre $\overline{AC}$ com $AE = CL$. Seja P o ponto de intersecção das retas $\overleftrightarrow{AK}$ e $\overleftrightarrow{BL}$. Se Q é o ponto médio de $\overline{BC}$, I é o incentro e G é o baricentro de ABC, mostre que

(a) $\overleftrightarrow{IQ} \parallel \overleftrightarrow{AK}$;

(b) $(AIG) = (QPG)$.

▸ PROBLEMA 9

São dados um triângulo ABC e um número real $t > 1$. O ponto P se move sobre o arco BAC do circuncírculo. Estenda $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ até U, V, respectivamente, tais que $BU = tBA$, $CV = tCA$. Estenda $\overline{UV}$ até Q, tal que $UQ = tUV$. Determine o local geométrico percorrido pelo ponto Q.

▸ PROBLEMA 10

Um polinômio é chamado de *positivamente redutível* se ele pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes reais positivos. Seja $f(x)$ um polinômio com $f(0) \neq 0$ e tal que $f(x^n)$ é positivamente redutível para algum natural n. Prove que $f(x)$ é positivamente redutível.

▸ **PROBLEMA 11**

Sejam n e k naturais e A um conjunto com

$$|A| \leqslant \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n+1$, sejam A_i conjuntos de tamanho n tais que

$$|A_i \cap A_j| \leqslant k \qquad (i \neq j),$$

$$A = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n+1} A_i.$$

Determine o número de elementos de A.

▸ **PROBLEMA 12**

Mostre que

$$\prod_{1 \leqslant x < y \leqslant \frac{p-1}{2}} (x^2 + y^2) \equiv (-1)^{\lfloor \frac{p+1}{8} \rfloor} \pmod{p}$$

para todo primo $p \equiv 3 \pmod{4}$.

▸ **PROBLEMA 13**

Para um real $x \in (0,1)$ com representação decimal $x = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, denotamos $n(x)$ o menor inteiro não negativo tal que

$$\overline{a_{n(x)+1}\, a_{n(x)+2}\, a_{n(x)+3}\, a_{n(x)+4}} = 2000$$

($\overline{abcd}$ denota o número na notação decimal com dígitos a, b, c, d).

Determine o valor médio de $n(x)$, isto é,

$$\sum_{k \geqslant 0} k \cdot P_{n(x)=k}$$

($P_{n(x)=k}$ é a probabilidade de $n(x) = k$.)

Atenção! Esta é a última lista de preparação. Devido ao prazo de inscrição para a IMO e às ordens expressas do Bicho Papão, as resoluções devem chegar até 25 de maio, impreterivelmente, caso contrário não serão consideradas.