Sumário

Unidade 1

Revisão de Tópicos Fundamentais do Ensino Médio

1.1 Apresentação

Esta é a primeira unidade da disciplina Matemática 1 dos cursos da área de Informática da Universidade Estácio de Sá.

Devido à flagrante heterogeneidade dos alunos, e já tendo tido várias turmas anteriores de experiência, optamos por apresentar, mesmo que de forma sucinta, alguns assuntos básicos que entendemos como sendo absolutamente fundamentais para o restante do curso, e esperamos que os estudantes que estejam fora do "bom combate" há algum tempo, ou há muito tempo, possam colocar suas idéias de novo em ordem, e os conceitos fundamentais nos seus devidos lugares.

1.2 Simbologia Matemática mais usual

Esperamos que o estudante conheça a seguinte simbologia:

a) $=$ (igual à)

b) $\neq$ (diferente de)

c) ϕ ou $\{\ \}$ (conjunto vazio)

d) $\in$ (pertence à)

e) $\notin$ (não pertence à)

f) $\subset$ (está contido)

g) $\not\subset$ (não está contido)

h) $\supset$ (contém)

i) $\not\supset$ (não contém)

j) $\exists$ (existe pelo menos um)

k) $\nexists$ (não existe)

l) $\exists|$ (existe e é único)

m) $|$ (tal que / tais que)

n) $\vee$ (ou)

o) $\wedge$ (e)

p) $A \cap B$ (interseção dos conjuntos A e B)

q) $A \cup B$ (união dos conjuntos A e B)

r) $\forall$ (para todo e qualquer, qualquer que seja)

s) $\Rightarrow$ (implica)

t) $\Leftrightarrow$ (implica e a recíproca é equivalente)

u) $\therefore$ (donde se conclui)

1.3 Conjuntos Numéricos

É lógico que, para a Matemática, os conjuntos de maior importância são aqueles formados por números, e certos conjuntos numéricos são especialmente importantes devido às propriedades das operações entre seus elementos e, portanto, recebem nomes especiais, quais sejam:

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

é o conjunto dos números inteiros não-negativos.

b) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

é o conjunto dos números inteiros.

c) $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \dfrac{p}{q} \right\}$ sendo $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e q $\neq 0$.

É o conjunto dos números racionais.

São exemplos de números racionais: $-\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{9}{2}$, $+\dfrac{8}{3}$, etc.

São exemplos de números irracionais: $\pi = 3{,}14159\ldots$ (pi), $e = 2{,}71828\ldots$ (base dos logaritmos neperianos), $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$, etc.

d) $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, formados por todos os números racionais e irracionais, e costumamos associar tais números aos pontos de uma reta que, por definição, é infinita em ambos os sentidos.

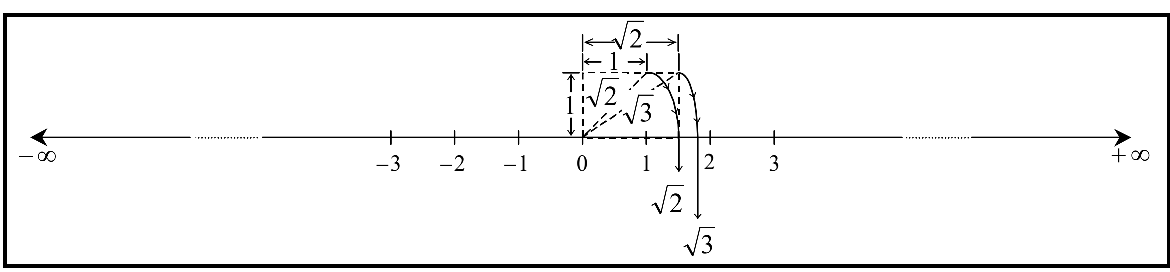


Fig. 1.1 Representação gráfica de alguns elementos do conjunto $\mathbb{R}$.

e) $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + \boldsymbol{j}y\}$, sendo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$, é o conjuntos dos números complexos (voltaremos a tal assunto na seção 1.14).

Quando incluímos o **símbolo *** (asterisco), estamos indicando que **o zero foi excluído do conjunto**. Assim, temos:

f) $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0\}$

é o conjunto dos números naturais.

g) $\mathbb{Z}^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq 0\}$

h) $\mathbb{Q}^* = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \neq 0\}$

i) $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}$

j) $\mathbb{C}^* = \{x \mid x \in \mathbb{C} \text{ e } x \neq 0\}$

Quando incluímos o **símbolo +** (mais), estamos indicando que **foram excluídos todos os números negativos dos conjunto**.

k) $\mathbb{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0\} = \mathbb{N}$

é o conjunto dos números inteiros não negativos.

l) $\mathbb{Q}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \geq 0\}$

é o conjunto dos números racionais não negativos

m) $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 0\}$

é o conjunto dos números reais não negativos.

Quando acrescentamos o **símbolo –** (menos) estamos indicando que **foram excluídos todos os números positivos do conjunto**. Assim, temos:

n) $\mathbb{Z}_- = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjunto dos números inteiros não positivos.

o) $\mathbb{Q}_- = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjuntos dos números racionais não positivos.

p) $\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjunto dos números reais não positivos.

Devemos notar que o zero é elemento dos conjuntos $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$. Se excluímos o zero destes conjuntos, teremos:

q) $\mathbb{Z}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 0\}$

r) $\mathbb{Z}_-^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x < 0\}$

s) $\mathbb{Q}_{+}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x > 0\}$

t) $\mathbb{Q}_{-}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x < 0\}$

u) $\mathbb{R}_{+}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$

v) $\mathbb{R}_{-}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 0\}$

O conjunto $\mathbb{R}_{+}^{*}$ é chamado conjunto dos **números reais estritamente positivos e** $\mathbb{R}_{-}^{*}$ é o conjunto dos **números reais estritamente negativos**. Os outros têm nomes semelhantes.

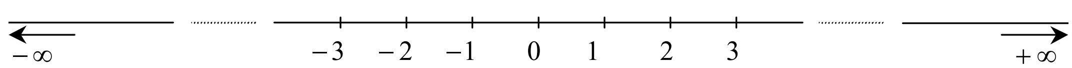
Notemos a propriedade:

$\mathbb{N}^{*} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

isto é, todo número natural é inteiro, todo número inteiro é racional, todo número racional é real e todo número real é também complexo.

1.4 Operações com Números Relativos

• Ilustração 1.1: Números relativos



1.4.1 Soma ou Adição

Quando os números têm o mesmo sinal basta conservá-lo e adicionar os números; quando os sinais são contrários subtraímos o menor do maior, e o sinal que prevalece é o deste último. É bom lembrar também que o sinal mais (+) antes de um parêntese não vai alterar o sinal do número que está entre parênteses, ocorrendo o oposto quando o sinal antes do parêntese for o de (–). Se não houver nenhum sinal antes do parêntese estará implícito que o sinal será o de mais (+).

• ILUSTRAÇÃO 1.2

a) $(+10) + (+2) = +10 + 2 = +12$

b) $(+10) + (-2) = +10 - 2 = +8$

c) $(-10) + (+2) = -10 + 2 = -8$

d) $(-10) + (-2) = -10 - 2 = -12$

Quando devemos somar mais de dois números relativos o resultado é obtido somando o primeiro com o segundo, o resultado obtido com o terceiro, e assim por diante até a última parcela.

• **ILUSTRAÇÃO 1.3**

$$\underbrace{(+5)+(-3)}+(-7)+(+3)+(+4)=$$

$$=\underbrace{(+2)+(-7)}+(+3)+(+4)=$$

$$=\underbrace{(-5)+(+3)}+(+4)=$$

$$=(-2)+(+4)=2$$

Podemos também adicionar separadamente todas as parcelas positivas e todas as negativas e, em seguida, somar os dois números de sinais contrários obtidos.

• **ILUSTRAÇÃO 1.4**

Efetuando a soma do exemplo anterior, temos:

— soma das parcelas positivas:

— $(+5)+(+3)+(+4)=+12$

— soma das parcelas negativas:

— $(-3)+(-7)=-10$

— soma de ambos os resultados:

— $(+12)+(-10)=+2$

1.4.2 Subtração ou Diferença

Cumpre observar que o sinal de menos (–) antes de um parêntese troca o sinal do número que está entre parênteses e, no mais, procedemos como na operação anterior.

• Ilustração 1.5

a) $(+10)-(+2)=+10-2=+8$

b) $(+10)-(-2)=+10+2=+12$

c) $(-10)-(+2)=-10-2=-12$

d) $(-10)-(-2)=-10+2=-8$

Para as operações de multiplicação e divisão que virão logo a seguir vale a seguinte regra: "Números de mesmo sinal dão sempre resultado positivo, enquanto que os de sinais contrários conduzem sempre à resultados negativos".

1.4.3 Multiplicação

• Ilustração 1.6

a) $(+10)\times(+2)=+20$

b) $(+10)\times(-2)=-20$

c) $(-10)\times(+2)=-20$

d) $(-10)\times(-2)=+20$

1.4.4 Divisão

• Ilustração 1.7

a) $(+10)\div(+2)=+5$

b) $(+10)\div(-2)=-5$

c) $(-10)\div(+2)=-5$

d) $(-10)\div(-2)=+5$

1.4.5 Potenciação

Quando, em uma multiplicação, os fatores são todos iguais, em módulo e em sinal, esta operação recebe o nome de potenciação. Assim sendo, a potência de um número é o produto de fatores iguais a este número, sendo representada por:

a^p $p \rightarrow$ expoente (n.º de repetições dos fatores iguais)
$a \rightarrow$ base (é o número ou fator em questão)

Conforme veremos a seguir, toda potência de expoente par é positiva, qualquer que seja o sinal da base, porém, toda potência de expoente ímpar tem o sinal de base.

• Ilustração 1.8

a) $(+2)^4 = (+2)\times(+2)\times(+2)\times(+2) = 16$

b) $(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$

c) $(+2)^3 = (+2)\times(+2)\times(+2) = 8$

d) $(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8$

Para executar a potenciação de um número relativo em uma minicalculadora, a seqüência de operações é simples:

(a) Determinar 2^4:

1.º) Digitamos a base (2)

2.º) Pressionamos a tecla exponencial $\left\{ \begin{array}{c} \boxed{y^x} \text{ (CASIO modelo fx-82LB)} \\ \text{ou} \\ \boxed{x^y} \text{ (CASIO modelo fx-6300 G)} \end{array} \right\}$,

que depende do modelo da minicalculadora.

3.º) Digitamos o expoente (4)

4.º) Pressionamos a tecla exponencial $\left\{ \begin{array}{c} \boxed{=} \text{ (CASIO modelo fx – 82LB)} \\ \text{ou} \\ \boxed{\text{EXE}} \text{ (CASIO modelo fx – 6300G)} \end{array} \right\}$,

que depende do modelo da minicalculadora.

5.º) Vai aparecer o número 16 no visor da calculadora.

(b) Determinar $(-2)^4$:

Primeiramente digitamos a base (–2). Em algumas calculadoras (CASIO fx 82 – LB, por exemplo) digitamos o número 2 e depois apertamos a tecla $\boxed{+\!\diagdown\!-}$ para trocar o sinal para menos. Em outras (CASIO fx – 6300G) apertamos a tecla $\boxed{-}$ e depois digitamos o número 2. O restante da seqüência de operações é igual a do item a: tecla exponencial, expoente...

A esta altura é interessante notar a diferença entre a **potenciação seqüencial** e a **potenciação escalonada**, que serão analisadas logo a seguir.

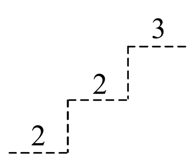
• Ilustração 1.9

a) Potenciação Seqüencial:

$\left[(2)^2\right]^3 = [4]^3 = 64$, que também pode ser efetuada diretamente mantendo-se a base e multiplicando-se os expoentes:

$2^{2\times 3} = 2^6 = 64$

b) Potenciação Escalonada:

2^{2^3} que pode ser entendida como 

, ou seja:

$2^{2^3} = 2^8 = 256$

1.4.6 Radiciação

a) Raiz *n*-ésima de um número:

Dizemos que um número “*b*” é a raiz *n*-ésima exata de um número “*a*” quando

$$a = b^n$$

e ela é representada por

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Denomina-se **radiciação** a operação pela qual se obtém a raiz *n*-ésima de um número. Nas operações exatas, a **radiciação** é a operação inversa da **potenciação**.

$$\text{Temos então: } \begin{cases} \text{O sinal } \sqrt{} \text{ é o radical} \\ \text{O número "}a\text{" é o radicando} \\ \text{O número "}n\text{" é o índice do radical} \end{cases}$$

Assim sendo

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

No caso de $n = 2$ a raiz se diz **quadrada** e não é usual escrever este índice no radical.

No caso de $n = 3$ a raiz se diz **cúbica**, mas este índice aparece no radical.

b) Valor algébrico dos radicais:

Se o radicando é considerado em valor absoluto (módulo), a radiciação é uma operação unívoca. No entanto, se este radicando é um **número relativo** a unicidade, em alguns casos, não estará mais garantida e por isso vamos considerar três casos:

1.º) Índice par e radicando positivo.

Neste caso o radical admitirá duas raízes reais e simétricas no conjunto dos números reais, bem como um par complexo conjugado (vide exercício proposto 39, item j da seção 1.15).

2.º) Índice ímpar.

Sendo o índice do radical um número ímpar, temos uma raiz no conjunto dos números reais, tendo o mesmo sinal que o radicando, e $(n - 1)$ raízes no conjunto dos números complexos (vide exercício proposto 38, item f, da seção 1.15).

3.º) Índice par e radicando negativo.

Neste caso não existe nenhum valor do conjunto dos números reais que elevado ao índice par seja igual ao radicando. Este assunto será abordado na seção 1.14.

• Ilustração 1.10

$$
1.^{\text{o}}\text{ caso}\begin{cases}\sqrt{+64}=\pm 8\text{ pois}\begin{cases}(+8)^2=+64\\(-8)=+64\end{cases}\\[2ex] \sqrt[4]{+625}=\pm 5\text{ pois}\begin{cases}(+5)^4=+625\\(-5)^4=+625\end{cases}\end{cases}
$$

$$
2.^{\text{o}}\text{ caso}\begin{cases}\sqrt[5]{+32}=+2\text{ pois }(+2)^5=+32\\ \sqrt[5]{-32}=-2\text{ pois }(-2)^5=-32\end{cases}
$$

$$
3.^{\text{o}}\text{ caso}\begin{cases}\sqrt{-4}=\pm \boldsymbol{j}\text{ e, conforme já mencionado}\\ \text{tal assunto será abordado na seção 1.14}\end{cases}
$$

Observação: pelo que foi exposto, se alguém lhe perguntar qual é o valor de $\sqrt{9}$, a resposta e simplesmente 3. Agora se for pedido o valor algébrico do $\sqrt{9}$ teremos então ± 3.

A determinação de raízes através de minicalculadoras é simples:

a) Determinar $\sqrt[4]{625}$:

a.1) Utilizando uma CASIO fx-82 LB:

1.º) Digitamos o radicando 625

2.º) Pressionamos as teclas $\boxed{\text{2nd F}}$ e $\boxed{y^x}$ a fim de convocar a operação $\sqrt[x]{y}$

3.º) Digitamos o expoente 4

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{=}$

5.º) O número 5 aparece no visor de calculadora, e devemos ter em mente que se desejamos o valor algébrico da raiz a resposta completa é ± 5.

a.2) Utilizando uma CASIO fx-6300 G

1.º) Digitamos o índice 4

2.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\sqrt[x]{}}$

3.º) Digitamos o radicando 625

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\text{EXE}}$

5.º) O número 5 aparece no visor

b) Determinar $\sqrt[5]{-32}$:

a.1) Utilizando um CASIO fx-82 LB

1.º) Digitamos o valor 32 e pressionamos a tecla $\boxed{+\!\diagdown\!-}$ para trocar o seu sinal

2.º) Pressionamos as teclas $\boxed{\text{2nd F}}$ e $\boxed{y^x}$ a fim de convocar a operação $\sqrt[x]{y}$

3.º) Digitamos o índice 5

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{=}$

5.º) O valor – 2 aparece no visor.

a.2) Utilizando uma CASIO fx-6300 G

1.º) Digitamos o índice 5

2.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$

3.º) Pressionamos a tecla $\boxed{-}$ e depois o valor 32

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\text{EXE}}$

5.º) O valor – 2 aparece no visor.

Observação: Devemos notar que as rotinas para calculadoras do mesmo fabricante (CASIO), mas de modelos diferentes, são totalmente diferentes. O que não esperar de modelos de outros fabricantes?

Por isso insistimos que cada estudante deve adquirir logo sua própria calculadora, a fim de se familiarizar com o uso da mesma.

1.4.7 Produto e Divisão de Potências de Mesma Base

a) Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

b) Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos o expoente do denominador do expoente do numerador.

• Ilustração 1.11

a) $a^3 \times a^2 \times a^{-4} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{3+2-4+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

b) $\dfrac{b^8}{b^5} = b^{8-5} = b^3$

c) $\dfrac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$

d) $\dfrac{I^3}{I^{-4}} = I^{3-(-4)} = I^7$

1.4.8. Expoente Nulo

Toda potência de expoente nulo é igual à unidade.

Ilustração 1.12

$$a^0 = 1$$

Observação:

São exceções 0^0 e ∞^0, que não têm qualquer significado numérico, sendo símbolos de indeterminação, e são abordados em Análise Matemática na parte de Limites.

1.4.9 Expoente Negativo

Toda potência de expoente negativo equivale a uma fração cujo numerador é a unidade e o denominador é a potência com o expoente positivo ou seja: $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$. **(1)**

• Ilustração 1.13

a) $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

b) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

Observações:

1ª) Em conseqüência do exposto anteriormente temos:

$$\boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}}} \quad \textbf{(2)}$$

2ª) Agora podemos obter o mesmo resultado do item (d) da ilustração 11 por outro caminho:

$$\frac{I^3}{I^{-4}} = I^3 \times I^4 = I^7$$

1.4.10 Expoente Fracionário

Toda potência de expoente fracionário equivale a uma raiz cujo índice é o denominador da fração e cujo radicando é a base elevada a um expoente igual ao numerador, ou seja:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}} \quad \textbf{(3)}$$

• Ilustração 1.14

Determinar os **valores algébricos** das seguintes operações:

a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4$

c) $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \pm\dfrac{1}{2}$

1.4.11 Emprego de Potências de Dez para simplificar a representação de certos Números

• Ilustração 1.15

No Brasil:		**Nos E.U.A.:**
a) $2\,000 = 2 \times 10^3$ *	$\longrightarrow$	$2{,}000 = 2 \times 10^3$
b) $4\,000\,000 = 4 \times 10^6$ *	$\longrightarrow$	$4{,}000{,}000 = 4 \times 10^6$
c) $0{,}0003 = 3 \times 10^{-4}$	$\longrightarrow$	$0.0003 = 3 \times 10^{-4}$
d) $0{,}025 = 25 \times 10^{-3}$	$\longrightarrow$	$0.025 = 25 \times 10^{-3}$

(*) Antigamente representava-se 2 e 4 milhões, respectivamente por 2.000 e 4.000.000. Já há alguns anos aboliram-se os pontos separatrizes de classes, mantendo-se agora um espaço entre as mesmas.

1.5 Produtos Notáveis

1.5.1 Quadrado de um binômio

a) $(a+b)^2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\begin{array}{r} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{ + ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \textbf{(4)}$$

b) $(a-b)^2$:

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ou

$$\begin{array}{r} a - b \\ \underline{a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{ - ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad \textbf{(5)}$$

1.5.2 Produto da soma de dois termos pela diferença entre eles

$(a+b)\,(a-b)$:

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

ou

$$\begin{array}{ccccc}
a & + & b & & \\
a & - & b & & \\
\hline
a^2 & + & ab & & \\
 & - & ab & - & b^2 \\
\hline
a^2 & & & - & b^2
\end{array}$$

$$\boxed{(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2} \quad \textbf{(6)}$$

1.5.3 Cubo de um binômio

a) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ou

$$\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad \textbf{(7)}$$

b) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ou

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{\quad a - \ \ b \qquad\qquad} \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \underline{\quad - a^2b + 2ab^2 - b^3} \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad \textbf{(8)}$$

• Ilustração 1.16

a) $(a+5x)^2 = a^2 + 2(a)(5x) + (5x)^2 =$
$= a^2 + 10ax + 25x^2$

b) $(5x^2 - 3y)^2 = (5x^2)^2 - 2(5x^2)(3y) + (3y)^2 =$
$= 25x^4 - 30x^2y + 9y^2$

c) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$

d) $(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 =$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

e) $(x-2y)^3 = x^3 - 3(x^2)(2y) + 3(x)(2y)^2 - (2y)^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

1.6 Equações

1.6.1 Equação do 1º Grau com uma Incógnita

Toda equação do 1º grau com uma incógnita pode ser reduzida a forma

$$\boxed{az + b = 0} \quad \textbf{(9)}$$

em que $a \neq 0$.

Sua solução é:

$az + b = 0 \Rightarrow az = -b \Rightarrow$

$$\boxed{z = -\frac{b}{a}} \quad \textbf{(10)}$$

EXEMPLO 1.1

Resolver as seguintes equações do 1º grau:

a) $3z+1=7z-3$

b) $\dfrac{5}{2x}=\dfrac{15}{12}$

c) $\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{6}{4}$

d) $pz+q=0$ (sendo $p\neq 0$)

Solução:

a) $3z+1=7z-3\ \therefore$

$3z-7z=-1-3\therefore$

$-4z=-4\therefore$

$z=\dfrac{-4}{-4}\ \therefore\qquad z=1$

b) $\dfrac{5}{2x}=\dfrac{15}{12}\therefore$

$(2x)15=5\times 12\therefore$

$30x=60\therefore$

$x=\dfrac{60}{30}\therefore x=2$

c) $\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{6}{4}\therefore$

$6(y-2)=3\times 4\therefore$

$6y-12=12\therefore$

$6y=24\therefore$

$y=\dfrac{24}{6}\therefore y=4$

d) $pz+q=0\therefore$

$pz=-q\therefore$

$z=-\dfrac{q}{p}$

1.6.2 Equação do 2º Grau com uma Incógnita

A forma geral da equação do 2º grau com uma incógnita é:

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0} \quad \textbf{(11)}$$

onde $a \neq 0$.

Vamos então transformar a equação em outra equivalente, de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito do tipo indicado na equação **(4)**.

a) Transpondo a constante para o segundo membro, vem:

$$az^2 + bz = -c$$

b) Multiplicando por $4a$, teremos:

$$4a^2z^2 + 4abz = -4ac$$

c) Somando b^2 aos dois membros, resulta:

$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = b^2 - 4ac$$

d) Verificando que o 1º membro é um quadrado perfeito, teremos:

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e) Extraindo as raízes quadradas de ambos os membros, obtemos:

$$2az + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \;\therefore$$

$$2az = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \;\therefore$$

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \textbf{(12)}$$

que é a conhecida fórmula da Bhaskara, onde

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} \quad \textbf{(13)}$$

é o discriminante da equação, e três casos podem ocorrer:

1º) $\Delta > 0 \Rightarrow$ teremos duas raízes reais e desiguais.

2º) $\Delta = 0 \Rightarrow$ teremos duas raízes reais e iguais.

3º) $\Delta < 0 \Rightarrow$ não teremos raízes no conjunto dos números reais, e este caso será abordado na seção 1.14.

Exemplo 1.2

Resolver as seguintes equações do 2º grau:

a) $2z^2 + 5z - 3 = 0$

b) $4z^2 - 4z + 1 = 0$

c) $z^2 + 4z + 13 = 0$

Solução:

a) $2z^2 + 5z - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$z_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

b) $4z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm 0}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{4+0}{8} = \frac{1}{2} \\ z_2 &= \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{raiz dupla}$$

c) $z^2 + 4z + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 13 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

e esta equação não admite raízes no campo real. Sua solução será apresentada na subseção **1.14.1** ($z_1 = -2 + \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = -2 - \boldsymbol{j}3$ são as suas raízes).

1.7 Progressão Aritmética (P.A.)

1.7.1 Definição

É uma sucessão de termos

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots,)$$

finita ou infinita, sendo que, a partir do 2º termo inclusive, a diferença entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante ***r***, denominada razão da progressão, ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = r$$

As seguintes seqüências são exemplos de P.A.:

a) $(2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 2$ e $r = 5$

b) $(x,\ x+2t,\ x+4t,\ x+6t\ \ldots) \Rightarrow a_1 = x$ e $r = 2t$

c) $(5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 5$ e $r = 0$

d) $\left(7,\ \frac{15}{2},\ 8,\ \frac{17}{2},\ 9\ \ldots\right) \Rightarrow a_1 = 7$ e $r = \frac{1}{2}$

e) $(8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 8$ e $r = -3$

1.7.2 Classificação

As progressões aritméticas podem ser classificadas de acordo com o valor da razão ***r***:

$r > 0 \Rightarrow$ P.A. crescente

$r = 0 \Rightarrow$ P.A. constante ou estacionária

$r < 0 \Rightarrow$ P.A. decrescente

1.7.3 Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.A. da seguinte forma:

$$\begin{array}{lclcl}
a_2 - a_1 = r & \Rightarrow & a_2 = a_1 + r & & \\
a_3 - a_2 = r & \Rightarrow & a_3 = a_2 + r & = & (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\
a_4 - a_3 = r & \Rightarrow & a_4 = a_3 + r & = & (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \\
\hdashline
a_n - a_{n-1} = r & \Rightarrow & a_n = a_{n-1} + r & = & \cdots = a_1 + (n-1)r
\end{array}$$

Observe que cada termo é obtido adicionando-se ao primeiro um número de razões ***r*** igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$\begin{array}{lclcl}
a_2 & = & a_1 + r & = & a_1 + (2-1)r \\
a_3 & = & a_1 + 2r & = & a_1 + (3-1)r \\
a_4 & = & a_1 + 3r & = & a_1 + (4-1)r \\
\hdashline
a_n & = & \cdots & = & a_1 + (n-1)r
\end{array}$$

O termo de ordem ***n*** da P.A. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad \textbf{(14)}$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{ll} a_2 - a_1 & = r \\ a_3 - a_2 & = r \\ a_4 - a_3 & = r \\ \cdots\cdots & \\ a_n - a_{n-1} & = r \end{array}\right\}$$

Somando membro a membro estas ***n* – 1** igualdades obtemos a expressão do termo de ordem ***n***.

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$

e

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad \textbf{(14)}$$

que é a mesma equação anteriormente encontrada.

1.7.4 Propriedades

I) Numa P.A. cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo precedente e o termo seguinte.

Com efeito, se

$$\ldots\ a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ \ldots$$

são termos consecutivos de uma P.A., então podemos escrever:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

ou seja,

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

e

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} \qquad \textbf{(15)}$$

II) Em qualquer P.A. limitada, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é constante e igual à soma dos próprios extremos.

Seja pois a P.A. limitada, com ***n*** termos, razão ***r***, e ***A*** e ***B*** os termos eqüidistantes dos extremos, conforme ilustrado a seguir:

$$(\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\ldots,\ A}_{p\text{ termos}},\ldots,\ \underbrace{B\ ,\ldots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\text{ termos}})$$