INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
PROVA DE MATEMÁTICA - 1973

01) Sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução vale 4. Quanto valerá a relação do volume para a área total deste cilindro?
a) 1. **b)** 2. **c)** 2,5. **d)** 3. **e)** n.d.a.

02) O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$, onde X(t) é o número de bactérias no tempo $t \geq 0$; C e k são constantes positivas, (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando-se que o número inicial de bactérias X(0), duplica em 4 horas, quantas bactérias se pode esperar no fim de 6 horas?
a) 3 vezes o número inicial.
b) 2,5 vezes o número inicial.
c) $2\sqrt{2}$ vezes o número inicial.
d) $2\sqrt[3]{2}$ vezes o número inicial.
e) n.d.a.

03) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol em L, e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30^\circ$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75^\circ$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?
a) 4. **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 8/3. **d)** $\sqrt{3}/2$. **e)** n.d.a.

04) Consideremos um cone de revolução de altura h, e um cilindro nele inscrito. Seja d a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura H de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:
a) $H = \dfrac{h - \sqrt{h-d}}{3}$
b) $H = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2 - d^2}}{3}$
c) $H = \dfrac{h - d + h\sqrt{h^2 - d^2}}{2}$
d) $H = \dfrac{h + d - \sqrt{(h-d)(h+3d)}}{2}$
e) n.d.a.

05) O coeficiente de $a^{n-1-p}b^p$ no produto de:

$$a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$$

por (a + b), se k = n, vale:

a) $\binom{n}{p}$. **b)** $\binom{n+1}{p}$. **c)** $\binom{n-1}{p}$. **d)** $\binom{n+1}{p+1}$. **e)** n.d.a.

06) A desigualdade $\sqrt[x-3]{x}.\sqrt{x} \leq 1/x$ é válida para:
a) qualquer x positivo. **b)** $1 \leq x \leq 3$.
c) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$. **d)** $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x < 3$.
e) n.d.a.

07) Suponhamos que p e q são os catetos de um triângulo retângulo e h a altura relativa à hipotenusa do mesmo. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

a) não admite soluções reais.
b) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, onde $m \in \Re$, m > 0.
c) admite sempre raízes reais.
d) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, onde $m \in \Re$, m > 0
e) n.d.a.

08) A respeito da equação:

$$3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$$

podemos dizer:
a) $\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ são raízes.
b) a única raiz real é x = 3.
c) a única raiz real é $x = 2 + \sqrt{10}$.
d) tem duas raízes reais e imaginárias.
e) n.d.a.

09) A base AB, de uma folha de papel triangular que está sobre uma mesa, mede 12 cm. O papel é dobrado levantando-se sua base, de modo que a dobra fique paralela à mesma. A área da parte do triângulo que fica visível após o papel ter sido dobrado, vale 0,30 da área do triângulo ABC. O comprimento da dobra vale:
a) 9,6 cm. **b)** 9,4 cm. **c)** 10 cm. **d)** 8 cm. **e)** n.d.a.

10) Os valores de x que verificam a desigualdade:

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1$$

a) x > 1. **b)** x > e. **c)** 0 < x < e. **d)** 1 < x < e. **e)** n.d.a.

11) Sejam $n \in^* \text{IN}$, $p \in \text{IN}$, onde IN={0, 1, 2, 3, …}e IN*={1, 2, 3, …}. Então $\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p-n}(-1)^{p}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

a) –1. **b)** 0. **c)** 1. **d)** 2. **e)** n.d.a.

$$a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$$

12) A desigualdade $a^3 + 1/a^3 > a^2 + 1/a^2$ é verdadeira se:

a) $|a| > 1$. **b)** $a \neq 1$, $a \neq 0$. **c)** $a > 0$ e $a \neq 1$.
d) $|a| < 1$, $a \neq 0$. **e)** n.d.a.

13) Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

a) $4h5\frac{2}{11}\min$ e $4h38\frac{5}{11}\min$

b) $4h5\frac{5}{11}\min$ e $4h38\frac{2}{11}\min$

c) $4h5\frac{5}{11}\min$ e $4h38\frac{2}{12}\min$

d) $4h5\frac{5}{11}\min$ e $4h38\frac{2}{11}\min$

e) n.d.a.

14) Seja a equação do 4ºgrau

$$x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

onde q, r, s e t são números racionais não nulos tais que: L, M, N e P são raízes reais dessa equação.

O valor de $\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}$ é:

a) $\frac{(q^2 - 2r)}{t}$. **b)** $\frac{(q^2 - r + s)}{t}$. **c)** $\frac{(q^2 - r)}{t}$

d) $\frac{q}{r} + \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{q}$. **e)** n.d.a.

15) Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrita num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

a) $\sqrt{\frac{2}{27}}$. **b)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **c)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **d)** $\frac{1}{6}$. **e)** n.d.a.

16) Certa liga contém 20% de cobre e 5% de estanho. Quantos quilos de cobre e quantos quilos de estanho devem ser adicionados a 100 quilos dessa liga para a obtenção de uma outra com 30% de cobre e 10% de estanho? (Todas as percentagens em kg).

a) 8 kg de cobre e 6 kg de estanho.
b) 17,50 kg de cobre e 7,5 kg e estanho.
c) 18 kg de cobre e 7,5 kg de estanho.
d) 17,50 kg de cobre e 7,8 kg de estanho.
e) n.d.a.

17) A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t)=Ce^{-kt}$, onde M(t) é a quantidade de radium no tempo t, C e k são constantes positivas e *e* é a base do logaritmo neperiano. Se a metade da quantidade primitiva M(0), desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

a) $1 - 100^{-1}$ da quantidade inicial.
b) $1 - 2^{-6}$ da quantidade inicial.
c) $1 - 2^{-16}$ da quantidade inicial.
d) $1 - 2^{-1/16}$ da quantidade inicial.
e) n.d.a.

18) Seja a equação:

$$(\log_e m)\,\text{sen}\, x \pm \cos x = \log_e m$$

Quais as condições sobre m para que a equação dada admita solução?

a) m > 0 se x = (2k + ½)π; m > 0 e m ≠ 1 se x ≠ (2k+½)π.
b) m ≠ 0 se x = (2k + ½)π; m ≥ 0 e m≠ e se x ≠ (2k + ½)π.
c) m > e se x = (2k + ½)π, m ≥ 1 se x ≠ (2k + ½)π.
d) m > -1/e e m ≠0 se x = (2k+½)π, m ≠0 se x ≠ (2k+½)π.
e) n.d.a.

19) Eliminando θ no sistema de equações (a > 0), temos:

$$\begin{cases} x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta = 2a\,\text{sen}\,\theta \\ x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta = a\cos\theta \end{cases}$$

a) $(x + y)^{\frac{2}{3}} - (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a(x + y)^2$

b) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)a$.

c) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

d) impossível eliminar θ.

e) n.d.a.

20) Um cliente deposita num fundo de investimento Cr$ 1.000,00 anualmente, durante 5 anos. Seu capital, no final de cada ano, é acrescido de 10%. No final de 5 anos seu capital acumulado será Cr$:
a) 6.715,00. **b)** 6.715,62. **c)** 6.715,60.
d) 6.715,61. **e)** n.d.a.

21) Durante o eclipse total do sol de 07 de março de 1970 a largura da faixa da escuridão total foi de 100 km. Em cada ponto do eixo central desta faixa, a duração do período de escuridão total foi de 3 minutos. Qual foi a duração deste período num ponto situado a 10 km do limite da faixa de escuridão total?
a) 1 min. 36 seg. **b)** 1 min. 48 seg. **c)** 1 min. 30 seg.
d) 0 min. 36 seg. **e)** n.d.a.

22) Seja a equação:

$$3\tan 3x = [3(\log_e t)^2 - 4\log_e t + 2]\tan x,\ x \neq n\pi$$

Quais as condições sobre t para que a equação acima admita solução?
a) $0 < t < 1/e$ ou $e^{1/3} < t < e$ ou $t > e^{7/3}$.
b) $e^{1/3} \leq t \leq e^{3/2}$ ou $0 < t < e$.
c) $e^{1/3} < t \leq e^{2/3}$ ou $1/e > t$.
d) $t > 0$ e $t \neq 1$.
e) n.d.a.

23) Seja L o comprimento do eixo de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas. Sabe-se que a área da superfície total da caldeira é $4\pi k^2$, com $0 < k < L/2$. As dimensões da parte cilíndrica da caldeira valem:
a) k^2/L e $L + 3k^2/L$. **b)** k^2/L e $k + (3/4)L$.
c) $2k^2/L$ e $L - 4k^2/L$. **d)** $k^2/2L$ e $L + (4/2)k^2$.
e) n.d.a.

24) Seja S uma semi-esfera de raio R dado. Sejam p e q dois planos paralelos e distantes entre si R/2 e tais que interceptem S paralelamente à sua base. Seja T o tronco de cone com bases b e c, onde b e são as interseções de p e q com S. Seja x o valor da menor das distâncias d e D, onde d é a distância entre p e a base de S, e D é a distância entre q e a base de S. Seja k descrito abaixo. Então o volume de T, como função de x, 2 / R x 0 ≤ ≤ vale:

$$k = \left\{\left(R^2 - x^2\right)\left[R^2 - \left(x + \frac{R}{2}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

a) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + k\right)$
b) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + k\right)$
c) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - k\right)$
d) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - k\right)$
e) n.d.a.

25) A solução da equação $\log_u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2(k+1)!}\right)\right].x = 1$, com $u = 1/(n+2)!$, é
a) $\frac{2}{[(n+1)!-1]}$ **b)** $\frac{2}{[n(n+1)!-1]}$
c) $\frac{2}{[(n+2)!-(n+2)]}$ **d)** $\frac{[(n+1)!-1]}{2n}$
e) n.d.a.