AULA 5
PROBLEMAS DIVERSOS II

Nesta última aula de Técnicas de Contagem, vamos resolver problemas mais específicos, que necessitam de mais Criatividade e mais delicadeza. Depois de você ter visto todas essas questões resolvidas e ter feito os Problemas de Fixação, você será capaz de resolver QUALQUER problema sobre contagem que venha a ser cobrado em uma Escola Mlilitar.

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 5

1.Encontre o número de soluções inteiras da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

De modo que: $x_1 \geq -5, x_2 \geq -1, x_3 \geq 1 \; e \; x_4 \geq 2.$

2. (1º LEMA DE KAPLANSKY) Prove que o número de subconjuntos com p elementos de $\{1,2,3, \dots, n\}$ nos quais não há dois elementos consecutivos é

$$\binom{n-p+1}{p}$$

3.Uma fila tem 15 cadeiras nos quais devem sentar 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito?

4.(2º LEMA DE KAPLANSKY) Prove que o número de subconjuntos com p elementos de $\{1,2,3, \dots, n\}$ nos quais não há dois números consecutivos, considerando $1 \; e \; n$ como consecutivos é:

$$\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$$

5.(IME 1985/1986) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

6.(TITU ANDREESCU) Quantos são os múltiplos de 3, com cinco algarismos que possuem pelo menos um dígito 6 em sua representação decimal?

7.(RADAN KUCERA) Determine a quantidade de números de quatro algarismos, formados por exatamente dois algarismos distintos.

8.(CHINA) Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, .., a_{100}\} \; e \; B = \{b_1, b_2, \dots, b_{50}\}$. Determine o número de funções sobrejetoras $f: A \to B$ de modo que: $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \cdots . \leq f(a_{100})$?

9.(AIME) Um inteiro $\overline{abcd}$ de quatro dígitos é chamado balanceado quando $a + b = c + d$. Determine quantos números de quatro dígitos são balanceados.

10.(HAVARD-MIT) Quantas são as permutações $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ de {1,2,3...,8} tais que:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 = 0$$

11.(HAVARD-MIT/2006) Determine o número de subconjuntos $\{1,2,3, \dots, 12\}$ de modo que a soma do maior elemento com o menor elemento seja 13.

12.(POLÔNIA/1998) Seja $A = \{1,2,3, \dots, 2018\}$. Determine o número de subconjuntos $B \subset A$, tal que se $x.y \in B \Rightarrow x + y \neq 2019$.

13.(OBM/2008) Um país tem 8 cidades, A_1, A_2, ..., A_6, B, C, ligadas por rodovias de mão dupla satisfazendo as seguintes condições: B e C são ambas ligadas às cidades A_1, A_2, ..., A_6, mas não são ligadas uma à outra; A_1, A_2, ..., A_6 são ligadas duas a duas. Calcule o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C, sem passar duas vezes por uma mesma cidade.

14.Determine o número de pares ordenados de inteiros (x, y) de modo que: $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$.

15.Para cada conjunto não vazio $X, denotamos \; por \; por \; S(X)$ a soma dos elementos do conjunto X. Considere o conjunto $A = \{1,2 \dots, 23\}$, sabe-se que existem 61 subconjuntos X de A com três elementos de modo que $S(X) = 36$. Determine a quantidade de subconjuntos X de A que possuem três elementos de modo que $S(X) < 36$.

16.(AIME) Um número com k algarismo $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}$ é chamado show quando:

- Nenhum dígito é zero e
- $a_i < a_{i+1}, quando\ i\ \ for\ ímpar\ e\ a_i > a_{i+1}, quando\ i\ for\ par$

Quantos inteiros entre 1000 e 9999 são show e possuem todos os algarismos distintos?

17.(OBM/2007) Um quadrado 4 × 4 é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.

18.Seja D_n o número de permutações caóticas de $(1,2,3,\dots,n)$. Mostremos que:

a) $n! = \sum_k \binom{n}{k} \cdot D_k$

b) $D_n = (n-1)\cdot(D_{n-2} + D_{n-1}), \forall\, n \geq 1.$

19.Determine o número de triplas de subconjuntos (A, B, C) do conjunto U = {1, 2, ..., n} satisfazendo

$$A \cap B \cap C = \varnothing, A \cap B \neq \varnothing\, e\, A \cap C \neq \varnothing.$$

20.(OBM/2008) Determine a quantidade de funções $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ tais que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 5

1.As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possível escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

2.Luís deve ter aulas de Golf três vezes por semana, durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Luís não deseja ter aulas em dias consecutivos?

3.5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

4.Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

5.(IME/2010) Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um deste passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é?

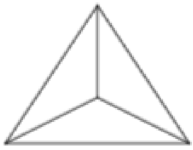
6.(AFA/2018) No ano de 2017, 22 alunos da EPCAR foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Desses alunos, 14 ganharam medalhas, sendo 3 alunos do 3° esquadrão, 9 do 2° esquadrão e 2 do 1° esquadrão. Os demais receberam menção honrosa, sendo 2 alunos do 3° esquadrão, 4 do 2° esquadrão e 2 do 1° esquadrão. Para homenagear os alunos premiados, fez-se uma fotografia para ser publicada pela Nascentv em uma rede social. Admitindo-se que, na fotografia, os alunos que receberam menção honrosa ficaram agachados, sempre numa única ordem, sem alteração de posição entre eles, à frente de uma fila na qual se posicionaram os alunos medalhistas, de modo que, nesta fila:

- As duas extremidades foram ocupadas somente por alunos do 2° esquadrão que receberam medalha;
- Os alunos do 1° esquadrão, que receberam medalha, ficaram um ao lado do outro; e
- Os alunos do 3° esquadrão, que receberam medalha, ficaram, também, um ao lado do outro.

Determine o número de fotografias distintas possíveis

7.(BULGARIA) Considere o conjunto $A = \{1,2,3,\dots,48,49\}$. Determine o número de subconjutos de A com seis elementos, de modo que existam pelo menos dois números consecutivos.

8.(OLIMPÍADA DE MAIO) Com 6 varetas se constrói uma peça como mostra a figura abaixo. As três varetas exteriores são iguais entre si. As três varetas interiores são iguais entre si. Deseja-se pintar cada vareta de uma só cor de modo que em cada ponto de união, as varetas que chegam tenham cores diferentes. As varetas podem ser pintadas de azul, branco, vermelho ou verde. De quantas maneiras pode-se pintar a peça?



9.A partir de um conjunto de *a* atletas formam-se *t* times de *k* atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

a)De quantos times cada atleta participa;

b)Em quantos times cada par de atletas fica junto.

10.Em uma escola, *x* professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a)Calcule *x*

b)Determine quantos professores há em cada banca.

11.Quantos pares (A, B) de subconjuntos não vazios do conjunto {1, 2, ..., 10} são tais que n($A \cup B$) = 10 e n($A \cap B$) = 1?

12.Sejam *A* e *B* subconjuntos de Ω = {1, 2, 3, 4, 5}. Determine o número de pares de subconjuntos (*A*, *B*) tais que $A \subset B$ e $A \neq B$.

13.(OBM/2015) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos tais que $n(A) = 5$ e $n(B) = 7$, em que $n(X)$ é a quantidade de elementos do conjunto X. Quantos subconjuntos não-vazios C de $A \cup B$ são tais que $n(A \cap C) = n(B \cap C)$?

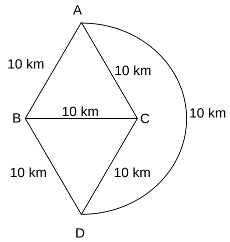
14.(OBM/2010) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

15.(OBM-2004) Um polígono com 20 lados é chamado *icoságono*. Unindo-se três dos vértices de um icoságono regular obtemos triângulos. Quantos são triângulos retângulos?

16.(OBM/2004) Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

17.(IME/2001) Quatro cidades, *A*, *B*, *C* e *D*, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade *A*, e possuem:

a) exatamente 50 km? b) nx10km:



18.O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f : A \to B$ sobrejetoras para:

a) $p = n$;
b) $p = n + 1$;
c) $p = n + 2$

19.(ESCOLA NAVAL) A partir de um conjunto de 19 atletas, formam-se 57 times de quatro atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número X de vezes. Determine o valor numérico de X.

20.Quantos são os números de quatro algarismos formados pelos dígitos do número 123124?

21.Considere o conjunto $S = \{1,2,3,..,2013\}$. Determine o número de triplas ordenadas (A, B, C) de subconjuntos de S tais que: $A \subseteq B, A \cup B \cup C = S$.

22.Determine quantos são os números de cinco dígitos $\overline{abcde}, com: b = a + c\ e\ d = c + e$?

23.Quantos são os números de cinco dígitos, de modo que o proutos de seus algarismos é 180?

24.Quantas são as funções $f: \{1,2,3,..,2019\} \to \{2015,2016,2017,2018\}$ de modo que a soma $f(1) + f(2) + \cdots + f(2019)$ é par?

25.Determine quantas são as permutações de (1,2,3..,8) de modo que três sempre divide a soma de três números consecutivos?

26.(AIME) Um número com k algarismo $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$ é chamado show quando:

$$a_i < a_{i+1}, quando\ a_i\ \ for\ ímpar\ e\ a_i > a_{i+1}, quando\ a_i\ for\ par.$$

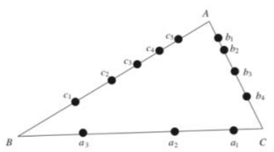
Determine a quantidade de números de quatro algarismos que são show.

27.Quantos são os triângulos com os três vértices pertencentes ao conjunto $A = \{(x, y)\ com\ 1 \le x \le 4\ e\ 1 \le y \le 4\}$

28.Quantas são as quádruplas ordenadas (a, b, c, d) de números distintos, pertencentas ao conjunto $\{1,2,..,9\}$, de modo que: $b < a, b < c\ e\ d < c$?

29.Na figura abaixo, temos doze pontos distintos $a_1, a_2, a_3, b_1, .., b_4, c_1, .., c_5$ sobre os lados do triângulo ABC.

a) Quantas são as retas formadas por dois desses pontos?
b) Quantos são os triângulos formados por esses pontos?
c) Quantos são os quadriláteros formados por esses pontos?



30.Sete objetos distintos serão colocados em três caixas distintas. Determine o número de distribuições possíveis:

a) Não Havendo restrições.
b) Nehuma caixa fica vazia.

31.Quantas são as permutações de (1,2,3..,9) de modo que os números 2,3 e 4 sempre fiquem entre 1 e 9. (Exemplos de permutações: 814736259, 569324178, 793548216).

32.Em um tabuleiro 3x3 vamos escrever os números 1,2,3,..,8,9 satisfazendo as seguintes regras:

I)Nas quinas só podem ser colocados números primos.

II)O centro do tabuleiro não pode ser colocado quadrado perfeito.

De quantos modo podemos preencher esse tabuleiro.

33.Quantos são os números menores que 1000000, que são formados usando somente os dígitos 0,2 e 7 e são divisíveis por 3?

34.Para cada subconjunto de sete elementos do conjunto {1,2,3..,10} é selecionado seu maior elemento. Calcule a soma de todos esses maiores elementos.

35.(OBM/2005) No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas seqüências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por *V*, empate por *E* e derrota por *D*, duas possibilidades, por exemplo, são (*V*, *E*, *E*, *V*, *E*, *V*, *V*, *V*, *E*, *E*) e (*E*, *V*, *V*, *V*, *V*, *V*, *E*, *V*).

36.(OBM/2013) Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

37.(OBM/2016) De quantas maneiras podemos escolher n casas de um tabuleiro $n \times n$, $n > 3$, sem escolher duas casas na mesma linha ou na mesma coluna, sabendo que os quatro cantos do tabuleiro não podem ser escolhidos?

38.(OBM/2009) Determine a quantidade de números $n = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, de seis algarismos distintos, que podemos formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

I) $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$;
II) n é divisível por 9.

39.a) Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.
b) Determine o número máximo de regiões em que n planos podem dividir o espaço.

40.(IME/2012) “Dois pontos P e Q, de coordenadas inteiras (x_p, y_p) e (x_q, y_q), respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se,

$x_p = x_q$ ou $y_p = y_q$”.

Dado o conjunto
$S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$
Determine quantas funções bijetoras $f: S \to S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum.

GABARITO

1)	11) 5120	21) 5^{2013}	31) $\binom{9}{5} \cdot 2 \cdot 3! \cdot 4!$
2)	12) 211	22) 330	32) 1152
3)	13) 791	23) 360	33) 242
4)	14) 144	24) $2 \cdot 4^{2018}$	34) 1155
5) 58212	15) 180	25) 144	35) 1278
6) 864.9!	16) 132	26) 640	36) 2977
7) $\binom{49}{6} - \binom{44}{6}$	17) *	27) 516	37) $(n-2)(n-3)(n-3)!$
8) 32	18) *	28) 630	38) 240
9) *	19) x=2	29) a) 47 b) 205 c) 378	39) *
10) a) 28 b) 10	20) 102	30) a) 3^7 b) 1.806	40) 72

9) a) $\frac{tk}{a}$. b) $\frac{tk(k-1)}{a(a-1)}$.

17) a) 60 b) $\frac{3^n - 3(-1)^{n-1}}{4}$

18) a) $n!$. b) $\binom{n+1}{2} \cdot n \cdot (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$

c) $\frac{n(n+2)!}{6} + \frac{n(n-1)(n+2)!}{8} = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$

39) a) $\frac{n^2+n}{2} + 1$ b) $\frac{n^3+5n+6}{6}$

SUGESTÕES E/OU SOLUÇOES

5)

O número de maneiras de homens e o número de maneiras mulheres desembarcarem são dados, respectivamente, pelo número de soluções inteiras não negativas das equações:

(I) homens: $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = 4 \Rightarrow C_9^4$
(II) mulheres: $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = 6 \Rightarrow C_{11}^6$

Logo, o total é: $C_9^4 \cdot C_{11}^6 = \boxed{58.212}$

6)

Devemos contar o número de posições possíveis para os 8 alunos medalhistas.
1°) O número de maneiras de posicionar os dois alunos do 1° esquadrão que ficarão nas duas extremidades é $9 \cdot 8$.
2°) Como os alunos do 1° e 3° esquadrões devem ficar juntos, então o número de maneiras de posicionar esses dois esquadrões e os 7 alunos restantes do 2° esquadrão é $(1+1+7)! = 9!$ (note que o 1° esquadrão e o 3° esquadrão foi cada um considerado um grupo único).
3°) Os 2 alunos do 1° esquadrão devem ser permutados entre si (2! possibilidades), assim como os 3 alunos do 3° esquadrão (3! possibilidades).
Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de fotografias distintas possíveis é $(9 \cdot 8) \cdot (9!) \cdot (2! \cdot 3!) = 864 \cdot 9!$.

8)

Solução. Temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras de pintar o triângulo externo. Note que a quarta cor (a que não foi usada no triângulo) deve aparecer nenhuma ou uma vez nos três segmentos internos. Se ela aparecer mais de uma vez teremos dois segmentos vizinhos com a mesma cor. Temos, portanto, dois casos:

Se o quarta cor não aparece nenhuma vez, então só há uma maneira de se pintar os segmentos internos. Com cada segmento tendo a mesma cor que o lado oposto do triângulo maior.

Se a quarta cor aparece uma vez, ela pode aparecer em qualquer um dos três segmentos internos. Veja que, uma vez escolhido o segmento que terá a quarta cor, as outras cores ficam definidas. Temos assim, 3 pinturas diferentes.

O número de maneiras de pintar a figura é $24 \cdot (1+3) = 96$.
Se considerarmos as rotações da figura temos apenas $\frac{96}{3} = 32$ pinturas diferentes.

9)a) Imagine um quadro em que cada linha é a relação dos atletas de um time. O número de elementos do quadro é o número de times, t, multiplicado pelo tamanho da cada time, k, e é também igual ao número de atletas, a, multiplicado pelo número de times de que cada atleta participa x.

Logo, $ax = tk \quad e \quad x = \frac{tk}{a}$.

b) No mesmo quadro, o número de pares de atletas na mesma linha é igual ao número de linhas, t, multiplicado pelo número de pares de atletas de uma linha, C_k^2 e é também igual ao número de pares de atletas, C_a^2, multiplicado pelo número de times em que cada par de atletas fica junto, y.

Logo, $yC_a^2 = tC_k^2 \quad e \quad y = \frac{tC_k^2}{C_a^2} = \frac{tk(k-1)}{a(a-1)}$

10) a) Cada professor fica caracterizado pelas duas bancas a que pertence. O número de professores é igual ao número de modos de escolher duas das oito bancas.

A resposta é $C_8^2 = 28$.

b)O número de professores pertencentes a uma banca é igual ao número de modos de escolher a outra banca a que ele pertence. A resposta é 7

11)Veja que $A \cup B = \{1, 2, ..., 10\}$, pois tem $n(A \cup B) = 10$. Logo, temos 10 modos de escolhermos o elemento que ficará na interseção de A e B e, para cada um dos nove elementos restantes, temos duas possibilidades: ou ele figura somente em A ou somente em B. Portanto, podemos formar $10 \cdot 2^9 = 5120$ pares de conjuntos.

12)Para cada $k = 0, 1, 2, ...5$, se A tem k elementos, para escolhermos os elementos de B, basta decidirmos sobre os $5 - k$ elementos restantes de Ω. Assim, teremos todas as possibilidades para $A \subset B$.

Temos $\binom{5}{k}$ modos de escolhermos o conjunto A e 2^{5-k} modos de escolhermos B. Portanto, o número de pares (A, B) com $A \subset B$ é dado por

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} = (2+1)^5 = 3^5 = 243.$$

Em seguida, devemos subtrair os casos em que $A = B$. Há $2^5 = 32$ tais pares. Então, o total de pares em que $A \subset B$ e $A \neq B$ é igual a $243 - 32 = 211$.

13)Seja $n(A \cap C) = n(B \cap C) = k$, $1 \leq k \leq 5$. Há $\binom{5}{k}$ maneiras de escolher os elementos de C provenientes de A e $\binom{7}{k}$ maneiras de escolher os elementos de C provenientes de B. Desta forma, há $\binom{5}{k} \cdot \binom{7}{k}$ maneiras de formar o conjunto C.

Queremos calcular então $\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} \cdot \binom{7}{k} = 35 + 210 + 350 + 175 + 21 = 791$.

14)Note que Diamantino pode jogar futebol no máximo 5 vezes; caso contrário ele necessariamente joga dois dias seguidos. Suponha que ele joga k dias. Então os k dias em que ele joga devem ser imediatamente seguidos por dias em que ele não joga. Assim, acrescentando um dia ao período, podemos dividir os 11 dias em k blocos de dois dias e $11 - 2k$ blocos de um dia. Podemos permutar os $k + 11 - 2k = 11 - k$ blocos de $\frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} = \binom{11-k}{k}$ maneiras. Assim, o total de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar é

$$\binom{11-0}{0} + \binom{11-1}{1} + \binom{11-2}{2} + \binom{11-3}{3} + \binom{11-4}{4} + \binom{11-5}{5} = 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144$$

.

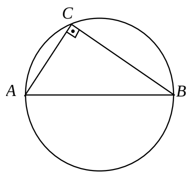
Outra solução:

Seja a_n o número de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar entre n dias. Se ele jogar no dia n ele não pode ter jogado no dia $n - 1$, mas não há restrições aos demais $n - 2$ dias; assim, nesse caso há a_{n-2} maneiras de escolher os dias em que vai jogar; se ele não jogar no dia n não há restrições aos demais $n - 1$ dias, então nesse caso há a_{n-1} maneiras de escolher os dias. Assim, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ (a única opção é não jogar) e $a_1 = 2$ (ele joga ou não no único dia). Dessa forma, podemos encontrar os valores de a_n a partir dos anteriores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Logo Diamantino pode escolher os dias de 144 maneiras.

15)O icoságono regular é inscritível em uma circunferência. Sejam A e B dois vértices diametralmente opostos do icoságono. Qualquer ponto C da circunferência, distinto de A e de B, unido com A e B formará um triângulo retângulo, conforme a figura.



Para todo diâmetro cujas extremidades são dois vértices do icoságono há 18 vértices que não são extremidades do referido diâmetro, possibilitando a formação de 18 triângulos retângulos. Como há $\frac{20}{2} = 10$ diâmetros distintos cujas extremidades são dois vértices do icoságono, há $18 \times 10 = 180$ triângulos retângulos.

16) $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792$ times para cada 5 alunos escolhidos. Por outro lado, em cada time de 6 jogadores, temos $\binom{6}{5} = 6$ modos de escolhermos cinco jogadores, ou seja, existem 6 grupos de 5 jogadores que geram o mesmo time na nossa primeira contagem. Logo, o total de times formados é igual a $\frac{792}{6} = 132$.

17)

Seja $A_i = n^{\underline{0}}$ de caminhos de comprimento $i \cdot 10km$.

a) Para fazer um caminho com comprimento $(i+1)\cdot 10km$ devemos fazer um caminho com $(i \cdot 10)km$ e, em seguida unir esta última cidade ao ponto A. Claro que este caminho com $(i \cdot 10)km$ não pode terminar em A. Portanto, serve qualquer caminho com i movimentos, desde que não seja um dos contados no A_i.

Total de caminhos com i movimentos sem restrição: 3^i. Pois de cada cidade sempre haverá três possibilidades para a escolha da próxima.

Total de caminhos com i movimentos que terminam em A_i. Daí temos:

$A_{i+1} = 3^i - A_i$

$A_5 = 3^4 - A_4$
$A_4 = 3^3 - A_3$
$A_3 = 3^2 - A_2$
$A_2 = 3^1 - A_1$
$A_1 = 0$

Logo, $A_2 = 3$, $A_3 = 6$, $A_4 = 21$ e $A_5 = 60$

b) $A_n = 3^{n-1} - A_{n-1}$

$A_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + A_{n-2}$

$A_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - A_{n-3}$

....

$A_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - 3^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-2}\cdot 3 - \underbrace{(-1)^{n-1}\cdot A_1}_{0}$

Temos, portanto a soma de uma PG com $(n-1)$ termos e razão $q = -\frac{1}{3}$

Logo $A_n = \dfrac{3^{n-1}\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1\right]}{\left(-\frac{1}{3}\right) - 1}$

$A_n = \dfrac{3^n - 3\cdot(-1)^{n-1}}{4}$

18) a)Neste caso f é bijetiva e, se $\#A = \#B = n$, o número de funções $f: A \to B$ bijetiva é $n!$.

b)Neste caso dois elementos de A terão uma mesma imagem em B correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B será bijetiva.

Há $\binom{n+1}{2}$ modos de escolher os dois elementos de A, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.

A resposta é $\binom{n+1}{2}\cdot n\cdot(n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

c)Neste caso temos as alternativas:

i)Três elementos de A têm a mesma imagem em B e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B é bijetora.

Há $\binom{n+2}{3}$ modos de escolher os três elementos de A, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.

Há $\binom{n+2}{3}\cdot n\cdot(n-1)! = \dfrac{n(n+2)!}{6}$ funções desse tipo.

ii)Há dois pares de elementos de A com imagens idênticas em B e a correspondência entre os demais $n-2$ elementos de A e os demais $n-2$ elementos de B é bijetiva.

Há $\binom{n}{2}$ modos de escolher os dois elementos de B, $\binom{n+2}{2}\times\binom{n}{2}$ modos de escolher suas imagens inversas em A e $(n-2)!$ modos de estabelecer a correspondência entre os elementos restantes.

Há $\binom{n+2}{2}\times\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}\times(n-2)! = \dfrac{n(n-1)(n+2)!}{8}$ funções desse tipo.

A resposta é $\dfrac{n(n+2)!}{6} + \dfrac{n(n-1)(n+2)!}{8} = \dfrac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$.

19)

i) 19 atletas | 4 pessoas por time | 57 times.

ii) número de times: $\dfrac{57\times 4}{19} = 12$ times por pessoa

iii) Cada pessoa participa de 12 times diferentes com 3 pessoas por time em um grupo de 18 pessoas.

$\Rightarrow x = \dfrac{12\times 3}{18} = 2$

34)

Solução

Veja que o 7 é o maior elemento para $\binom{6}{6}$ conjuntos, escolhemos os outros 6 elementos entre os números de 1 até 6. O 8 é o maior elemento para $\binom{7}{6}$ conjuntos, escolhemos os outros 6 elementos no conjunto de 1 até 7. Fazendo o mesmo para 9 e 10, temos a soma:

$$7\cdot\binom{6}{6} + 8\cdot\binom{7}{6} + 9\cdot\binom{8}{6} + 10\cdot\binom{9}{6} = 7 + 56 + 252 + 840 = 1155.$$

35)Seja a_n o número de ordenadas de resultados (sem derrotas), cujo total de pontos seja n. A pergunta do problema é: quanto vale a_{20}? Para responder a tal pergunta, iremos determinar uma relação recursiva entre os termos dessa seqüência. Pensando no último resultado de uma ordenada de resultados totalizando n pontos, ele pode ser E ou V. Se for E, então retirando o último termo da ordenada, ela passa a totalizar $n - 1$ pontos. Se for V, então ao retiramos o último resultado, a ordenada passa a totalizar $n - 3$ pontos. Disto, concluímos que:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.

Calculando os valores da seqüência, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 6$, $a_7 = 9$,

$a_8 = 13$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 28$, $a_{11} = 41$, $a_{12} = 60$, $a_{13} = 88$, $a_{14} = 129$, $a_{15} = 189$, $a_{16} = 277$, $a_{17} = 406$, $a_{18} = 595$, $a_{19} = 872$ e $a_{20} = 1278$.

Logo existem 1278 possíveis seqüências ordenadas de resultados que o Flameiras pode ter obtido.

36)Sejam A o conjunto dos números de quatro algarimos distintos que possuem 4 nos milhares, B o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 3 nas centenas, C o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 2 nas dezenas e D o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 1 nas unidades. A quantidade descrita no problema é $9\cdot 9\cdot 8.7 - n\left(A\bigcup B\bigcup C\bigcup D\right)$, lembrado que para um número ter 4 algarismos não pode ter dígito dos milhares 0. Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos que

$$n(A\cup B\cup C\cup D)=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)-n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)+n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+n(B\cap C\cap D)-n(A\cap B\cap C\cap D)$$

Contando os números, tem-se $n(A)=9\cdot 8\cdot 7=504$ e $n(B)=n(C)=n(D)=8\cdot 8\cdot 7=448$. Também temos $n(A\cap B)=n(A\cap C)=n(A\cap D)=8\cdot 7=56$ e $n(B\cap C)=n(B\cap D)=n(C\cap D)=7\cdot 7=49$.

Ainda,

$n(A\cap B\cap C)=n(A\cap B\cap D)=n(A\cap C\cap D)=7$ e $n(B\cap C\cap D)=6$.

Por fim, $n(A\cap B\cap C\cap D)=1$, apenas o número 4321.

Logo, $n(A\cup B\cup C\cup D)=(504+3.448)-(3.56+3.49)+(3.7+6)-1=1559$.

Daí, a quantidade é $4536-1559=2977$.

37)Iniciaremos escolhendo as casas da primeira e da última linha, o que pode ser feito de $(n-2)(n-3)$ maneiras, uma vez que os quatro cantos do tabuleiro são proibidos. Feito isto, as $n-2$ casas restantes podem ser escolhidas de $(n-2)!$ maneiras, pois podemos pensar nesta escolha como uma permutação de $n-2$ elementos. Desta maneira, pelo princípio multiplicativo, há $(n-2)(n-3)(n-3)!$ maneiras de escolhermos as casas com as condições impostas.

38)Seja $k = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Temos $3k = a_1 + a_2 + ... + a_6$ é múltiplo de 9, uma vez que n é múltiplo de 9. Daí, segue que k é múltiplo de 3. Mas, como os algarismos são distintos, perceba que $1 + 2 + ... + 6 \le a_1 + a_2 + ... + a_6 \le 4 + 5 + ... + 9 \Leftrightarrow 21 \le 3k \le 39 \Leftrightarrow 7 \le k \le 13$. Como k é múltiplo de 3, temos dois casos: $k = 9$ e $k = 12$. **1º caso:** $k = 9$. Veja que é suficiente escolhermos a_1, a_2 e a_3, pois $a_4 = 9 - a_3$, $a_5 = 9 - a_2$ e $a_6 = 9 - a_1$. Como os dígitos devem ser distintos, devemos escolher a_1, a_2 e a_3 de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5}. Esta escolha pode ser feita da seguinte forma:

- Escolhemos três dos quatro conjuntos: 4 maneiras;
- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $4\times8\times6 = 192$.

2º caso: $k = 12$. Neste caso, os dígitos a_1, a_2 e a_3 devem ser escolhidos do conjunto {3, 4, 5, 7, 8, 9} de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {3, 9}, {4, 8} e {5, 7}. Esta escolha pode ser feita da seguinte maneira:

- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $8\times6 = 48$.

O total de números é, portanto, $192 + 48 = 240$.

39)

a)Observe inicialmente os casos abaixo:

i)Uma reta divide o plano em duas regiões: 1 + 1.

ii)Uma segunda reta é dividida pela anterior no máximo em duas partes e mais duas regiões são acrescentadas, ou seja: com 2 retas temos: (1 + 1 + 2) regiões (no máximo.)

iii)Uma terceira reta é dividida pelas duas retas anteriores no máximo em três partes e acrescentando então mais três regiões, ou seja: com 3 retas temos: (1 +1 +2 +3) regiões (no máximo.)

iv)Suponha agora que tenhamos n retas; a n-ésima reta é dividida pelas $(n - 1)$ outras retas no máximo em n partes e evidentemente acrescentando n regiões, o que nos dará: (1 + 1 + 2 + 3 +…+ n) regiões ou $\frac{n^2+n}{2}+1$ regiões.

Obs: Se as retas estão em posição geral todas as desigualdades acima são igualdades.

b)Observe que:

i)Quando temos dois planos, o segundo plano intersecta o primeiro plano no máximo através de uma reta e o segundo plano é dividido em duas partes.

ii)Um terceiro plano intersecta os planos anteriores em no máximo duas retas e o terceiro plano é dividido em 4 partes.

iii)Um quarto plano intersecta os planos anteriores em no máximo 3 retas e o quarto plano é dividido em 7 partes.

Em geral, o k-ésimo plano intersecta os anteriores em no máximo $k - 1$ retas, que o dividem em no máximo

$\dfrac{(k-1)^2+(k-1)}{2}+1=\dfrac{k^2-k+2}{2}$ regiões (pelo ítem *a*), ou seja, ao ser acrescentado o *k*-ésimo plano são criadas no máximo $\dfrac{k^2-k+2}{2}$ novas regiões do espaço.

Como um plano divide o espaço em duas regiões temos no máximo

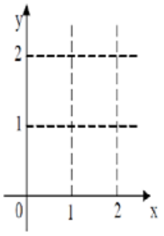
$2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+2}{2}$ regiões em que *k* planos dividem o espaço.

Sabendo que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, temos um total de $\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ regiões (no máximo).

Obs: Se os planos estão em posição geral todas as desigualdades acima são igualdades.

40)

Solução Ideal:



Sabe-se que uma função f: (A, B, C) → (D, E, F) admite 3! = 6 bijeções.
Se P e Q possuem coordenadas em comum então estes pontos pertences à mesma reta. Da mesma forma, se f(P) e f(Q) possuem coordenadas em comum então f(P) e f(Q) pertences à mesma reta. Como isto deve ocorrer para todos os pares de pontos P ∈ S e Q ∈ S, com P ≠ Q, existem duas possibilidades:

i) P e Q pertencem a uma reta paralela à reta definida por f(P) e f(Q);
ii) P e Q pertencem a uma reta perpendicular à reta definida por f(P) e f(Q).

Suponha que A, B e C são retas horizontais e D, E e F são retas verticais. Assim, pela aplicação de f pode-se levar retas horizontais em retas horizontais e levar retas verticais em retas verticais ou levar retas horizontais em retas verticais e levar retas verticais em retas horizontais.
Deste modo, existem bijeções de dois tipos:

i) (A, B, C) → (A, B, C) e (D, E, F) → (D, E, F): Neste caso tem-se 6 × 6 = 36 funções bijetoras
ii) (A, B, C) → (D, E, F) e (D, E, F) → (A, B, C): Neste caso tem-se 6 × 6 = 36 funções bijetoras
Portanto, o número total de funções bijetoras é 36 + 36 = 72.