Moderna PLUS

MATEMÁTICA

SUPLEMENTO DE REVISÃO

Conceitos fundamentais da Álgebra

Neste tema, faremos um estudo de conceitos fundamentais da Álgebra.

Potenciação e radiciação

Potência de expoente inteiro

Sendo a um número real e n um número inteiro, definimos:

$$a^0 = 1, \text{ se } a \neq 0$$
$$a^1 = a$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ se } n > 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ se } a \neq 0$$

Na potência a^n, o número a é chamado de **base** da potência e o número n é chamado de **expoente**.

Propriedades

- Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n, obedecidas as condições para que existam as potências, temos:

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

P3. $(a^m)^n = a^{mn}$

P4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

P5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- Um número real não nulo está representado em **notação científica** se está na forma $\boldsymbol{k \cdot 10^m}$, em que m é um número inteiro e k é um número real tal que $1 \leq |k| < 10$.

Radiciação em $\mathbb{R}$

- Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, com n par, e $a \in \mathbb{R}_+$, definimos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \text{ com } b \in \mathbb{R}_+$$

- Sendo $n \in \mathbb{N}$, com n ímpar, e $a \in \mathbb{R}^*_-$, definimos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- Sendo a um número real qualquer e n um número natural ímpar, temos a propriedade:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

No radical $\sqrt[n]{a}$, o número n é chamado de **índice do radical** e o número a é chamado de **radicando**.

- Sendo $\{n, k, p\} \subset \mathbb{N}^*$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+$, valem as seguintes propriedades:

P1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

P2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, com $b \neq 0$

P3. $\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$

P4. $(\sqrt[n]{a})^q = \sqrt[n]{a^q}$, com $q \in \mathbb{R}$

P5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Potência de expoente racional

- Sendo n e k números inteiros, com $n \geq 1$, e a um número real positivo, definimos:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$
$$0^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{0^k}, \text{ para } k > 0$$

- As propriedades das potências para expoente inteiro continuam válidas para expoentes racionais.

Fatoração

Fatorar um polinômio significa representá-lo na forma de uma multiplicação de fatores. Os principais casos de fatoração são:

- Fator comum:

$ax + bx = x(a + b)$

- Agrupamento:

$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$

- Diferença de quadrados:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- Quadrado perfeito:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

- Cubo perfeito:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

- Soma e diferença de cubos:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Razão e proporção

- Seja $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}^*$ e consideremos que as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sejam iguais. Assim, a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.
- Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, b e c são chamados de meios e a e d são chamados de extremos.
- Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos; ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

- Dadas as sucessões de números reais $(a, b, c, ...)$ e $(x, y, z, ...)$, dizemos que os elementos de uma são **diretamente proporcionais** (ou apenas proporcionais) aos elementos correspondentes da outra se:

$$\boxed{\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = ... = k}$$

- Dadas as sucessões de números reais $(a, b, c, ...)$ e $(x, y, z, ...)$, dizemos que os elementos de uma são **inversamente proporcionais** aos elementos correspondentes da outra se:

$$\boxed{\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{y}} = ... = k \Leftrightarrow ax = by = cz = ... = k}$$

Porcentagem

- As frações com denominadores 100 são chamadas **frações centesimais** e podem ser representadas pela **porcentagem** (%) do seguinte modo:

$$\boxed{\frac{x}{100} = x\%, \text{ em que } x \text{ é um número real}}$$

Médias

- A **média aritmética** dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, representada por $\bar{x}$, é dada por:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}}$$

- A **média aritmética ponderada** dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente, é dada por:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}}$$

Divisão e divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$

Dados os números inteiros a e b, com $b \neq 0$, existe uma única maneira de expressar a em função de b na forma $a = b \cdot q + r$, com $\{q, r\} \subset \mathbb{Z}$, e $0 \leq r < |b|$. Os números q e r são chamados, respectivamente, de **quociente** e **resto** da divisão de a por b. Quando $r = 0$, dizemos que a divisão é exata e que a é **divisível** por b.

Múltiplos e divisores em $\mathbb{Z}$

- Dados os números inteiros a e b, se, na divisão de a por b, o resto é zero, ou seja, se existe um inteiro k tal que $a = kb$, dizemos que a é **múltiplo** de b. Também dizemos que b é **divisor** de a.
- Um número inteiro n é **primo** se, e somente se, possui exatamente quatro divisores distintos, que são:

$$1, -1, n \text{ e } -n$$

- Os números inteiros não nulos que possuem mais de quatro divisores são chamados de números **compostos**.

Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número inteiro composto c pode ser expresso na forma:

$$c = \pm p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n$$

em que $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ são números primos positivos.

Mmc e mdc

- O **máximo divisor comum** (mdc) entre os números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, não todos nulos, que indicamos por $\text{mdc}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, é o maior divisor que esses números têm em comum.
- O **mínimo múltiplo comum** (mmc) entre os números inteiros não nulos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, que indicamos por $\text{mmc}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, é o menor múltiplo positivo que esses números têm em comum.

  Se pelo menos um dos números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ é igual a zero, definimos: $\text{mmc}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = 0$
- Dois ou mais números inteiros são **primos entre si** se, e somente se, o máximo divisor comum entre eles é o número 1.

Número par e número ímpar

- Um número $a \in \mathbb{Z}$ é **par** se, e somente se, existe um número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.
- Um número $a \in \mathbb{Z}$ é **ímpar** se, e somente se, existe um número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$.

Equações do 1º grau

Uma equação na variável x é do 1º grau se pode ser representada como:

$$\boxed{ax + b = 0, \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

- Resolver essa equação em um universo U significa determinar o número α, com $\alpha \in U$, tal que $a\alpha + b = 0$.
- Dizemos que o número α é **raiz** da equação ou que α é solução da equação ou, ainda, que α satisfaz a equação.
- O conjunto $S = \{\alpha\}$ é o conjunto solução da equação.

Resolução de uma equação do 1º grau

Para resolver uma equação do 1º grau $ax + b = 0$, isolamos a variável x, usando uma ou mais das seguintes propriedades da igualdade de números reais:

P1. Propriedade reflexiva:

$$a = a$$

P2. Propriedade simétrica:

$$a = b \Rightarrow b = a$$

P3. Propriedade transitiva:

$$a = b \text{ e } b = c \Rightarrow a = c$$

P4. Propriedade aditiva:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

P5. Propriedade multiplicativa

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \text{ para } c \neq 0$$

P6. Propriedade do produto nulo

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Equações do 2º grau

Uma equação na variável x é do 2º grau se pode ser representada como:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

Resolução de uma equação do 2º grau

Para resolver uma equação do 2º grau, empregamos a seguinte fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Note que:
- quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais;
- quando $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais;
- quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas.

Soma e produto das raízes

Sendo x_1 e x_2 as raízes de uma equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c$, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Fatoração do trinômio do 2º grau

Se r_1 e r_2 são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, podemos escrever:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)}$$

Inequações do 1º grau

Sejam a e b números reais, com $a \neq 0$. Inequações do 1º grau são aquelas que podem ser representadas na forma:

$$\boxed{\begin{aligned} &ax + b > 0 \\ &ax + b \geqslant 0 \\ &ax + b < 0 \\ &ax + b \leqslant 0 \\ &ax + b \neq 0 \end{aligned}}$$

Resolução de uma inequação do 1º grau

As inequações com as relações $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$ são resolvidas aplicando-se uma ou mais das seguintes propriedades:

P1. Vale a propriedade transitiva para as desigualdades:

$$a < b \text{ e } b < c \Rightarrow a < c$$

P2. Adicionando-se ou subtraindo-se um mesmo número de ambos os membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade se mantém.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

P3. Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma desigualdade por um **número positivo**, o sentido da desigualdade **se mantém**.

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \text{ com } c > 0$$

P4. Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma desigualdade por um **número negativo**, o sentido da desigualdade fica **invertido**.

$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ com } c < 0$$

Equações irracionais

Equações que apresentam a incógnita sob um radical são chamadas de **equações irracionais**.

Resolução de equações irracionais

A resolução desse tipo de equação fundamenta-se nas propriedades:
- $a = b \Rightarrow a^n = b^n$, para quaisquer números reais a, b e n, desde que existam as potências a^n e b^n.
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\forall$ a e n, com $a \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Propriedade do produto nulo na resolução de equações

> O produto de dois ou mais números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero.

Essa propriedade é muito útil na resolução de equações que podem ser representadas na forma de uma expressão fatorada igualada a zero.

No Vestibular

1. **(Unifal)** No conjunto dos números reais, em que estão definidas as operações usuais de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, definem-se as operações ∇ e $\otimes$, como segue:

$$x \nabla y = x + y$$
$$x \otimes y = y^2 - x^2$$

Nessas condições, o valor de $(3 \nabla 4) \otimes 5$ é:

a) 24
b) −24
c) 35
d) −35
e) 0

2. **(Unifesp)** Dia 20 de julho de 2008 caiu num domingo. Três mil dias após essa data, cairá:

a) numa quinta-feira.
b) numa sexta-feira.
c) num sábado.
d) num domingo.
e) numa segunda-feira.

3. **(Unifesp)** O 2.007º dígito da sequência 123454321234543... é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

4. **(UPF-RS)** Simplificando a expressão $\sqrt[5]{\dfrac{3^{17} - 3^{16}}{6}}$, obtém-se o valor:

a) 27
b) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}$
c) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$
d) $\dfrac{3^{\frac{17}{5}} - 3^{\frac{16}{5}}}{6}$
e) $\dfrac{3}{2}$

5. **(Insper)** O valor de $\dfrac{2.009^2 - 4}{2.009^2 + 2.009 - 2}$ é igual a:

a) $\dfrac{2.007}{2.008}$
b) $\dfrac{2.008}{2.009}$
c) $\dfrac{2.007}{2.009}$
d) $\dfrac{2.009}{2.008}$
e) $\dfrac{2.009}{2.007}$

6. **(UFV-MG)** Seja $R = \left[\dfrac{2^{n+1} \cdot 5^{n+1} - 2^n \cdot 5^n}{2^3 \cdot 5^n + 5^n}\right]^{\frac{1}{n}}$. Após simplificar a expressão, o valor de R é:

a) 3
b) 5
c) 2
d) 4

7. **(Unioeste-PR)** O número 4^3 pode ser escrito como uma soma de quatro números ímpares consecutivos representados por x, y, z e w, nesta ordem. A respeito desses números é correto afirmar que:

a) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{17}{19}$
b) $x + y + z = 54$
c) $xy = 221$
d) $z + w = x + y$
e) $x + w = 32$

8. **(Udesc)** Resolva a equação: $\dfrac{2}{x^2 - 1} = 1 + \dfrac{x}{x - 1}$

9. **(UFV-MG)** Seja A o conjunto de números reais que são soluções da equação $\sqrt{x - 1} = x - 3$. O número total de subconjuntos de A é:

a) 2
b) 1
c) 8
d) 4

Exercício 1

Segundo as definições, temos:
$(3 \nabla 4) \otimes 5 = (3 + 4) \otimes 5 = 7 \otimes 5 = 5^2 - 7^2 = -24$
Alternativa **b**.

Exercício 2

Dividindo 3.000 por 7, obtemos quociente 428 e resto 4.
Ou seja, o dia cairá em uma quinta-feira.
Alternativa **a**.

Exercício 3

Na sequência, os números se repetem de 8 em 8 algarismos. Efetuando a divisão de 2.007 por 8, encontramos quociente 250 e resto 7, ou seja, o dígito pedido é igual a 3.
Alternativa **c**.

Exercício 4

$\sqrt[5]{\dfrac{3^{17} - 3^{16}}{6}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^{16}(3 - 1)}{6}} = \sqrt[5]{3^{15}} = 27$

Alternativa **a**.

Exercício 5

Seja $x = 2.009$. Assim, a expressão é equivalente a:

$\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 1)} = \dfrac{x - 2}{x - 1} = \dfrac{2.007}{2.008}$

Alternativa **a**.

Exercício 6

$R = \left[\dfrac{2^{n+1} \cdot 5^{n+1} - 2^n \cdot 5^n}{2^3 \cdot 5^n + 5^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\dfrac{5^n \cdot 2^n (2 \cdot 5 - 1)}{5^n \left(2^3 + 1\right)}\right]^{\frac{1}{n}} =$

$= \left[\dfrac{2^n \cdot 9}{9}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[2^n\right]^{\frac{1}{n}} = 2$

Alternativa **c**.

Exercício 7

Sejam $x = 2p - 3$, $y = 2p - 1$, $z = 2p + 1$ e $w = 2p + 3$, com $p \in \mathbb{Z}$. Assim:
$(2p - 3) + (2p - 1) + (2p + 1) + (2p + 3) = 4^3 \Rightarrow p = 8$
Logo, os números são $x = 13$, $y = 15$, $z = 17$ e $w = 19$.
Alternativa **e**.

Exercício 8

Para $x \neq 1$ e $x \neq -1$, temos:

$\dfrac{2}{x^2 - 1} = 1 + \dfrac{x}{x - 1} \Rightarrow 2 = x^2 - 1 + x(x + 1)$

$\therefore x = -\dfrac{3}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

Exercício 9

Condição de existência: $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 3$

$\sqrt{x - 1} = x - 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 = (x - 3)^2$
$\therefore x - 1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$
$\therefore x = 2$ ou $x = 5$
Como somente $x = 5$ satisfaz a condição de existência, concluímos que $A = \{1\}$ e, portanto, A tem 2 subconjuntos.
Alternativa **a**.

10. **(Unifesp)** Se $0 < a < b$, racionalizando o denominador, tem-se que $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$. Assim, o valor da soma

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1.000}} \quad \text{é:}$$

a) $10\sqrt{10} - 1$
b) $10\sqrt{10}$
c) 99
d) 100
e) 101

11. **(UFV-MG)** A equação $\frac{12x^2}{7-4x^2} = \frac{x^2}{1+x}$ possui:

a) duas raízes racionais.
b) três raízes racionais.
c) duas raízes irracionais.
d) três raízes irracionais.

12. **(Unifesp)** Se $\frac{1}{x^3+x+1} = \frac{27}{37}$, então $\frac{1}{x^3+x+2}$ é igual a:

a) $\frac{27}{84}$
b) $\frac{27}{64}$
c) $\frac{27}{38}$
d) $\frac{28}{37}$
e) $\frac{64}{27}$

13. **(UFTM-MG)** A história do número π tem mais de 2.000 anos, já a história do número e cobre apenas 4 séculos. O número π originou-se de um problema de Geometria: como encontrar a circunferência e a área de um círculo. As origens do número e, porém, não são tão claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia para um certo limite – cerca de 2,71828 – à medida que n aumentava. [...] Apesar disso, foi aproximadamente na mesma época que os matemáticos desvendavam a natureza dos dois números, com pequena vantagem para o e: Euler, em 1737, provou que tanto e quanto e^2 eram irracionais; e Johann Lambert, em 1768, provou que o mesmo acontecia com π.

(Eli Maor. *e: a história de um número*, 2003. Adaptado)

A partir das informações sobre a natureza dos números π e e contidas no texto, é correto afirmar que:

a) $\left(\pi \cdot \frac{1}{\pi} + 2\right) \cdot e$ é um número irracional.
b) π^2 é um número racional.
c) $(\pi + e)(\pi + e)^{-1}$ é um número irracional.
d) $\pi \cdot e$ é um número racional.
e) $\left[(e+2)^2 - (2-e)^2\right]$ é um número racional.

14. **(Unifesp)** Certo dia um professor de Matemática desafiou seus alunos a descobrirem as idades x, y, z, em ano, de seus três filhos, dizendo ser o produto delas igual a 40.

De pronto, os alunos protestaram: a informação "$x \cdot y \cdot z = 40$" era insuficiente para uma resposta correta, em vista de terem encontrado 6 ternas de fatores do número 40 cujo produto é 40. O professor concordou e disse, apontando para um dos alunos, que a soma $x + y + z$ das idades (em ano) era igual ao número que se podia ver estampado na camisa que ele estava usando. Minutos depois os alunos disseram continuar impossível responder com segurança, mesmo sabendo que a soma era um número conhecido, o que levou o professor a perceber que eles raciocinavam corretamente (chegando a um impasse, provocado por duas ternas).

Satisfeito, o professor acrescentou então duas informações definitivas: seus três filhos haviam nascido no mesmo mês e, naquele exato dia, o caçula estava fazendo aniversário. Neste caso, a resposta correta é:

a) 1, 5, 8
b) 1, 2, 20
c) 1, 4, 10
d) 1, 1, 40
e) 2, 4, 5

15. **(Unir-RO)** Segundo o Instituto Akatu pelo Consumo Consciente: "uma torneira pingando uma gota de água a cada segundo desperdiça 16.500 litros de água por ano. [...] O uso da vassoura hidráulica gasta, em 15 minutos, 36 litros de água limpa". Admita que a Organização das Nações Unidas (ONU) recomende um consumo médio diário *per capita* de 110 litros de água. A partir dessas informações, marque V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.

( ) O volume de água desperdiçada por uma torneira pingando durante um ano daria para atender o consumo, segundo a ONU, de 150 pessoas durante um dia.
( ) O volume de água utilizada por uma vassoura hidráulica para lavar uma calçada, em 15 minutos, 4 vezes por mês, durante um ano, seria suficiente para atender o consumo, segundo a ONU, de 1 pessoa por 15 dias.
( ) O volume de água desperdiçada por uma torneira pingando durante 1 mês seria suficiente para atender o consumo, segundo a ONU, de 20 pessoas durante um dia.

Assinale a sequência correta.

a) F, F, V
b) V, F, V
c) V, V, V
d) V, V, F
e) F, F, F

16. **(Fuvest-SP)** Um automóvel, modelo *flex*, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259 km. Suponha que o litro de gasolina custe R$ 2,20. Qual deve ser o preço do litro de álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?

a) R$ 1,00
b) R$ 1,10
c) R$ 1,20
d) R$ 1,30
e) R$ 1,40

17. **(Unioeste-PR)** Três sócios (aqui denominados A, B e C) montaram um negócio, sendo que A investiu R$ 8.000,00, B investiu R$ 6.000,00 e C investiu R$ 4.000,00. Eles combinaram que o lucro obtido seria dividido proporcionalmente aos capitais investidos. Após algum tempo, verificou-se um lucro de R$ 7.200,00 a ser distribuído. Pode-se afirmar que os valores a serem atribuídos a A, B e C são, respectivamente:

a) R$ 3.500,00, R$ 2.600,00 e R$ 1.100,00
b) R$ 3.300,00, R$ 2.100,00 e R$ 1.900,00
c) R$ 2.900,00, R$ 2.500,00 e R$ 1.800,00
d) R$ 3.200,00, R$ 2.400,00 e R$ 1.600,00
e) R$ 3.100,00, R$ 2.300,00 e R$ 1.800,00

Exercício 10

Como $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$, o valor da soma é equivalente a:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1.000}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + ... + \frac{\sqrt{1.000}-\sqrt{999}}{1.000-999} =$$

$$= \sqrt{1.000} - 1 = 10\sqrt{10} - 1$$

Alternativa **a.**

Exercício 11

Para $x \neq -1$, $x \neq \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ e $x \neq -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, temos:

$$\frac{12x^2}{7-4x^2} = \frac{x^2}{1+x} \Rightarrow x = 0 \text{ (I) ou } \frac{12}{7-4x^2} = \frac{1}{1+x} \quad \text{(II)}$$

Resolvendo a equação (II), temos:

$12(1 + x) = 7 - 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64$

$$\therefore x = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8}$$

$$\therefore x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

De (I) e (II), temos: $x = 0$, $x = -\dfrac{5}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

Alternativa **b.**

Exercício 12

$$\frac{1}{x^3+x+1} = \frac{27}{37} \Rightarrow x^3 + x + 1 = \frac{37}{27}$$

$$\therefore x^3 + x + 1 + 1 = \frac{37}{27} + 1$$

$$\therefore \frac{1}{x^3+x+1} = \frac{27}{64}$$

Alternativa **b.**

Exercício 13

$$\left(\pi \cdot \frac{1}{\pi} + 2\right) \cdot e = (1 + 2) \cdot e = 3e$$

Pelo texto, $3e$ é um número irracional.

Alternativa **a.**

Exercício 14

As ternas possíveis para o produto 40 são:
(1, 1, 40); (1, 2, 20); (1, 4, 10); (1, 5, 8); (2; 2; 10) e (2, 4, 5).
As somas dos números dessas ternas são, respectivamente: 42, 23, 15, 14, 14 e 11.
Mesmo sabendo a soma das idades, os alunos ainda não conseguiram responder. Isso significa que a soma era 14 (a única soma repetida); portanto, eles ficaram com as ternas: (1, 5, 8) e (2, 2, 10)
Porém, como existe um filho caçula, a única possibilidade é (1, 5, 8).

Alternativa **a.**

Exercício 15

I. V
II. V
III. F, pois o volume, em litro, de água desperdiçada por uma torneira pingando durante um mês é $\dfrac{16.500}{12} = 1.375$, enquanto o consumo diário, em litro, de 20 pessoas é:

$$110 \cdot 20 = 2.200$$

Alternativa **d.**

Exercício 16

O automóvel percorre 11 quilômetros por litro de gasolina, pois $\dfrac{374}{34} = 11$, e gasta 0,2 real por quilômetro, pois $\dfrac{2,20}{11} = 0,2$. Assim, para que o custo por quilômetro rodado, em real, seja o mesmo, o valor do litro do álcool é:

$$\frac{259}{37} \cdot 0,20 = 1,40$$

Alternativa **e.**

Exercício 17

O total, em real, investido pelos sócios é:

$$8.000 + 6.000 + 4.000 = 18.000$$

Assim, o lucro, em real, a ser distribuído proporcionalmente para A, B e C é:

A: $\dfrac{8.000}{18.000} \cdot 7.200 = 3.200$

B: $\dfrac{6.000}{18.000} \cdot 7.200 = 2.400$

C: $\dfrac{8.000}{18.000} \cdot 4.000 = 1.600$

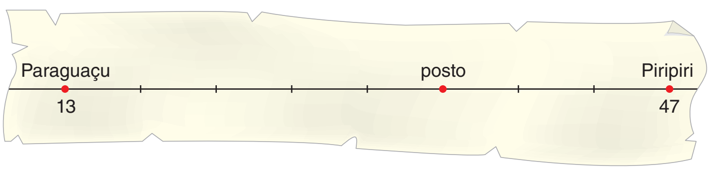
Alternativa **d.**

18. **(Unioeste-PR)** Uma máquina de fabricar suco possui três torneiras que despejam 5 litros de suco por minuto cada uma. As três torneiras (A, B e C) estão sendo utilizadas para encher embalagens com capacidades de 30 litros, 40 litros e 90 litros, respectivamente. O processo de enchimento é feito de forma automática e sem interrupções. Num dado instante, as três torneiras terminam de encher as embalagens simultaneamente.

Com base nestas informações, é correto afirmar que as três torneiras vão outra vez completar as embalagens simultaneamente, após:

a) 1,2 hora
b) 2 horas
c) 40 minutos
d) 1,4 hora
e) 50 minutos

19. **(Unicamp-SP)** A figura a seguir mostra um fragmento de mapa, em que se vê o trecho reto da estrada que liga as cidades de Paraguaçu e Piripiri. Os números apresentados no mapa representam as distâncias, em quilômetro, entre cada cidade e o ponto de início da estrada (que não aparece na figura). Os traços perpendiculares à estrada estão uniformemente espaçados de 1 cm.



a) Para representar a escala de um mapa, usamos a notação 1 : *x*, onde *x* é a distância real correspondente à distância de 1 unidade do mapa. Usando essa notação, indique a escala do mapa dado acima.
b) Repare que há um posto exatamente sobre um traço perpendicular à estrada. Em que quilômetro (medido a partir do ponto de início da estrada) encontra-se tal posto?
c) Imagine que você tenha que reproduzir o mapa dado usando a escala 1: 500.000. Se você fizer a figura em uma folha de papel, qual será a distância, em centímetro, entre as cidades de Paraguaçu e Piripiri?

20. **(Unicamp-SP)** Dois atletas largaram lado a lado em uma corrida disputada em uma pista de atletismo com 400 m de comprimento.

Os dois atletas correram a velocidades constantes, porém diferentes. O atleta mais rápido completou cada volta em exatos 66 segundos. Depois de correr 17 voltas e meia, o atleta mais rápido ultrapassou o atleta mais lento pela primeira vez. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quanto tempo gastou o atleta mais lento para percorrer cada volta?
b) Em quanto tempo o atleta mais rápido completou a prova, que era de 10.000 metros? No momento em que o atleta mais rápido cruzou a linha de chegada, que distância o atleta mais lento havia percorrido?

21. **(Fuvest-SP)** O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos respectivamente em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que:

(I) os valores sejam proporcionais às idades;
(II) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.

O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é:

a) 1/1/2013
b) 1/1/2014
c) 1/1/2015
d) 1/1/2016
e) 1/1/2017

22. **(UFSCar-SP)** Em uma pesquisa, foram consultados 600 consumidores sobre a satisfação em relação a uma certa marca de sabão em pó. Cada consumidor deu uma nota de 0 a 10 para o produto, e a média final das notas foi 8,5. O número mínimo de consumidores que devem ser consultados, além dos que já foram, para que essa média passe para 9, é igual a:

a) 250
b) 300
c) 350
d) 400
e) 450

23. **(Fuvest-SP)** Os estudantes de uma classe organizaram sua festa de final de ano, devendo cada um contribuir com R$ 135,00 para as despesas. Como 7 alunos deixaram a escola antes da arrecadação e as despesas permaneceram as mesmas, cada um dos estudantes restantes teria de pagar R$ 27,00 a mais. No entanto, o diretor, para ajudar, colaborou com R$ 630,00. Quanto pagou cada aluno participante da festa?

a) R$ 136,00
b) R$ 138,00
c) R$ 140,00
d) R$ 142,00
e) R$ 144,00

24. **(UFTM-MG)** A tabela mostra os preços praticados por duas empresas de telefonia celular, A e B, para um plano mensal de 150 minutos. Nesse plano, o cliente tem direito a falar por até 150 minutos no mês, pagando um valor fixo. Se esse tempo for ultrapassado, é acrescido ao valor fixo uma taxa por minuto adicional.

Empresa	Valor fixo (reais)	Valor do tempo excedente (reais por minuto)
A	x	$\frac{y}{60}$
B	y	$\frac{x}{90}$

Sabe-se que, se uma pessoa usar o celular por 180 minutos no mês, o valor total de sua conta será o mesmo, independente de essa pessoa ser cliente da operadora A ou da operadora B. Nessas condições, conclui-se que, necessariamente,

a) $x = \frac{1}{2}y$
b) $x = \frac{3}{5}y$
c) $x = \frac{2}{3}y$
d) $x = \frac{3}{4}$
e) $x = \frac{4}{5}y$

25. **(UFSCar-SP)** Uma família é composta de *x* irmãos e *y* irmãs. Cada irmão tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada irmã tem o dobro do número de irmãs igual ao número de irmãos. O valor de $x + y$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Exercício 18

O tempo, em minuto, gasto pelas torneiras para encher as embalagens é:

A: $\frac{30}{5} = 6$

B: $\frac{40}{5} = 8$

C: $\frac{90}{5} = 18$

Assim, o tempo, em minuto, para que as três torneiras voltem a completar simultaneamente as embalagens é o mmc entre 6, 8 e 18, ou seja:

$$\text{mmc}(6, 8, 18) = 72$$

Logo, o tempo é 72 minutos ou 1,2 hora.
Alternativa **a.**

Exercício 19

a) Seja x a escala do mapa. Assim, temos:

$$x = \frac{8 \text{ cm}}{34 \text{ km}} = \frac{8 \text{ cm}}{340.000 \text{ cm}} = \frac{1}{425.000}$$

b) Seja y a distância entre o posto e a cidade de Paraguaçu. Assim, temos:

$$\frac{1}{425.000} = \frac{5}{y} \Rightarrow y = 2.125.000$$

2.125.000 cm = 21,25 km
Logo, o posto está no quilômetro 13 + 21,25 = 34,25.

c) Seja z a distância, em centímetro, no mapa, entre as cidades. Temos:

$$\frac{z}{34} = \frac{1}{500.000} \Rightarrow \frac{z}{3.400.000} = \frac{1}{500.000}$$

$\therefore z = 6,8$

Exercício 20

a) Sejam A e B os atletas mais rápido e mais lento, respectivamente. O atleta mais rápido, A, em 17 voltas e meia gastou:

$$17,5 \cdot 66 \text{ s} = 1.155 \text{ s}$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, o atleta mais lento percorreu 16,5 voltas. Assim, para percorrer cada volta, o atleta B gastou:

$$\frac{1.155}{16,5} \text{ s} = 70 \text{ s}$$

b) Seja x o tempo, em segundo, gasto pelo atleta A para completar 10.000 metros. Assim:

$$x = \frac{1.000 \cdot 66}{400} = 1.650$$

Seja y a distância, em metro, percorrida pelo atleta B no instante em que o atleta A passou pela linha de chegada. Assim:

$$y = \frac{1.650 \cdot 400}{70} = 9.428,57$$

Exercício 21

Seja x a idade do filho mais velho e, portanto, $x - 4$ a idade do filho mais novo. Como os valores são proporcionais às idades e o filho mais novo deve receber pelo menos 75% do valor que o mais velho irá receber, temos:

$$\frac{x-4}{75} \geqslant \frac{x}{100} \Rightarrow x \geqslant 16$$

Logo, como o filho mais velho nasceu em 1/1/2000, o primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é 1/1/2016.
Alternativa **d.**

Exercício 22

Seja x o número mínimo de consumidores que devem ser consultados, devendo cada um atribuir a nota máxima. Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{600}}{600} = 8.5 \\ \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{600} + 10x}{600 + x} = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{600} = 5.100 \text{ (I)} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{600} + x = 5.400 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos: $x = 300$
Alternativa **b.**

Exercício 23

Seja x o número total de alunos que iriam participar inicialmente da festa de fim de ano. Assim, como cada aluno deveria contribuir com R$ 135,00, o total D, em real, de despesas é:

$$D = 135x \text{ (I)}$$

Posteriormente, como 7 alunos desistiram da festa, o número de alunos que efetivamente participaram é $x - 7$, e, como o valor para cada um aumentou R$ 27,00 para cobrir as mesmas despesas, temos:

$$D = (x - 7)(135 + 27) \Rightarrow D = 162x - 1.134 \text{ (II)}$$

De (I) e (II), obtemos:

$$162x - 1.134 = 135x \Rightarrow x = 42$$

$\therefore D = 5.670$

Com a colaboração de R$ 630,00 do diretor, o valor efetivamente gasto, em real, por aluno participante da festa foi:

$$\frac{5.670 - 630}{35} = 144$$

Alternativa **e.**

Exercício 24

Na empresa A, o total pago por 180 minutos é:

$$x + (180 - 150) \cdot \frac{y}{60} = x + \frac{y}{2}$$

Na empresa B, o total pago por 180 minutos é:

$$y + (180 - 150) \cdot \frac{y}{90} = y + \frac{x}{3}$$

Como os valores são iguais para 180 minutos, temos:

$$x + \frac{y}{2} = y + \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

Alternativa **d.**

Exercício 25

Sejam x e y as quantidades de irmãos e irmãs, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ 2(y - 1) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Logo: $x + y = 7$
Alternativa **c.**

26. **(UFTM-MG)** Um instituto oferece um curso de 80 horas de duração em dois modelos, dependendo da disponibilidade dos participantes.

- Modelo I: são ministradas x aulas, cada uma com y horas de duração.
- Modelo II: são ministradas $(x - 24)$ aulas, cada uma com $(y + 3)$ horas de duração.

Nessas condições, se for criado um modelo especial desse curso em que cada aula tenha $(y + 6)$ horas de duração, deverão ser dadas, no total:

a) 5 aulas **c)** 10 aulas **e)** 20 aulas
b) 8 aulas **d)** 16 aulas

27. **(Unioeste-PR)** Um produtor rural possui dois açudes, A e B, de igual capacidade, utilizados para armazenagem de água para irrigação. Durante o período de estiagem, o açude A estava com $\frac{1}{4}$ de sua capacidade e o açude B com apenas $\frac{1}{5}$. Para reduzir custos de manutenção, o produtor resolveu passar $\frac{3}{4}$ da água do açude B para o açude A e trabalhar apenas com este último. Após essa operação, sendo V litros as capacidades destes açudes quando estão cheios, então, para que o açude A ficasse completo, faltam:

a) $\frac{3}{4}$V litros **c)** $\frac{2}{3}$V litros **e)** $\frac{4}{3}$V litros
b) $\frac{2}{5}$V litros **d)** $\frac{3}{5}$V litros

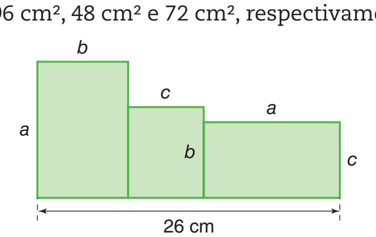
28. **(Unir-TO)** Uma indústria fabrica quatro tipos de óleo (I, II, III e IV). Os dois últimos tipos são obtidos da mistura dos dois primeiros da seguinte forma:

- 5 L do tipo III = 2 L do tipo I + 3 L do tipo II
- 5 L do tipo IV = 3 L do tipo I + 2 L do tipo II

O preço do litro do tipo III é R$ 2,00 e do litro tipo IV é R$ 2,20. Com base nessas informações, qual o preço do litro do óleo tipo I?

a) R$ 1,60
b) R$ 3,20
c) R$ 2,60
d) R$ 2,20
e) R$ 2,00

29. **(Unioeste-PR)** Três retângulos de dimensões a por b, b por c e a por c, sendo a, b e c medidas em centímetros, possuem áreas de 96 cm², 48 cm² e 72 cm², respectivamente.



Sabendo-se que $a + b + c = 26$ cm, pode-se concluir que $a^2 + b^2 + c^2$ (soma das áreas de três quadrados de lados a, b e c) é igual a:

a) 226 cm²
b) 244 cm²
c) 172 cm²
d) 148 cm²
e) 232 cm²

30. **(Fuvest-SP)** Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é:

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

31. **(Unicamp-SP)** O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e dutovias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados da tabela, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhão de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferroviário	18%	24%	6,8	8,8
Rodoviário	77%		29,1	
Dutoviário				

a) Determine a carga total (em milhão de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

32. **(Fuvest-SP)** Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30%, respectivamente.

O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia.

Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de x?

b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

33. **(Insper)** Uma loja fez uma grande liquidação de fim de semana, dando um determinado percentual de desconto em todos os seus produtos no sábado e o dobro desse percentual no domingo. No domingo, os cartazes que foram colocados na loja continham a seguinte frase:

"Mais vantagem para você, hoje tudo está pela metade do preço de ontem."

Em relação ao preço dos produtos antes da liquidação, o preço praticado no domingo era igual a:

a) um décimo **c)** um quinto **e)** um terço
b) um oitavo **d)** um quarto

Exercício 26

Como a duração total do curso é 80 horas, temos:

$\begin{cases} xy = 80 \\ (x - 24)(y + 3) = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 2 \end{cases}$

Assim, com $2 + 6 = 8$ horas de duração deverão ser dadas $\frac{80}{8} = 10$ aulas no total.

Alternativa **c**.

Exercício 27

Seja V o volume total em litro dos dois açudes.

O total, em litro, após a operação indicada no açude A é:

$\frac{1}{4}V + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}V = \frac{2}{5}V$

Logo, para que o açude A fique completo, falta:

$V - \frac{2}{5}V = \frac{3}{5}V$

Alternativa **d**.

Exercício 28

Sejam x e y, respectivamente, os preços, em real, por litro do óleo tipo I e do tipo II. Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{2x + 3y}{5} = 2 \\ \dfrac{3x + 2y}{5} = 2{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}6 \\ y = 1{,}6 \end{cases}$$

Alternativa **c**.

Exercício 29

$a + b + c = 26 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 26^2$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 676 - 2(96 + 48 + 72) = 244$

Alternativa **b**.

Exercício 30

Seja x o algarismo das centenas, y o das dezenas e z o das unidades do número natural N, ou seja: $N = 100x + 10y + z$

Ao fazer $N - 396$, obtemos um número que é formado pelos algarismos de N com a ordem invertida. Então:

$100x + 10y + z - 396 = 100z + 10y + x \Rightarrow$

$\Rightarrow x - z = 4$ (I)

Como a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, temos:

$$\begin{cases} x - z = 4 \\ x + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ z = 8 \end{cases}$$

Alternativa **c**.

Exercício 31

a) Seja x a carga total em milhão de toneladas. Temos:

$$0{,}18x = 6{,}8 \Rightarrow x = 37{,}8$$

A porcentagem do transporte por dutos é $1 - 0{,}18 - 0{,}77 = 0{,}05$, ou seja, o total em milhão de toneladas transportado por dutos é $0{,}05 \cdot 37{,}8 = 1{,}9$.

b) O total, em milhão de toneladas, é $29{,}1 - 2{,}7 = 26{,}4$.

Assim, a participação percentual do transporte rodoviário é:

$$\frac{26{,}4 \cdot 0{,}24}{8{,}8} = 0{,}72 = 72\%$$

Exercício 32

a) Seja x o preço de custo de uma calça. Assim, o preço de custo de uma camisa é $\frac{x}{3}$ e o de uma saia é $\frac{x}{2}$.

Os preços de venda de uma calça, uma camisa e uma saia são, respectivamente:

$1{,}2x$, $1{,}4 \cdot \frac{x}{3}$ e $1{,}3 \cdot \frac{x}{2}$

Assim, com um desconto de 10% na compra de 2 calças, 2 camisas e 2 saias, o cliente pagou:

$$0{,}9\left(2 \cdot 1{,}2 \cdot x + 2 \cdot 1{,}4 \cdot \frac{x}{3} + 2 \cdot 1{,}3 \cdot \frac{x}{2}\right) = 4{,}17\,x$$

b) O preço de custo foi:

$$2 \cdot x + 2 \cdot \frac{x}{3} + 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{11x}{3}$$

Assim, o percentual de lucro é dado por:

$$\frac{4{,}17x - \dfrac{11x}{3}}{\dfrac{11x}{3}} \approx 0{,}137$$

Ou seja, aproximadamente 13,7%.

Exercício 33

Sejam P, P_S e P_D os preços, respectivamente, dos produtos antes dos descontos, no sábado e no domingo. Assim, temos:

$P_S = P(1 - x)$

$P_D = P(1 - 2x)$

Como $P_S = 2 \cdot P_D$, temos:

$P(1 - x) = 2P(1 - 2x) \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\therefore P_D = P\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{P}{3}$

Alternativa **e**.

Conjuntos

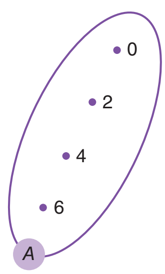
A teoria dos conjuntos unificou a linguagem em todos os ramos da Matemática.

Representação de um conjunto

- Na representação **tabular**, os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.

$$A = \{0, 2, 4, 6\}$$

- Na representação por um **diagrama de Venn** os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.



- Os elementos de um conjunto também podem ser descritos por meio de uma **propriedade** que os determina.

$$A = \{x \mid x \text{ é um número par menor que } 8\}$$

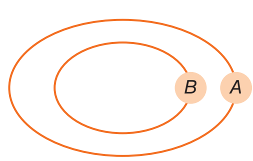
Alguns conjuntos fundamentais

- Conjunto **unitário** é aquele formado por um único elemento.
- Conjunto **vazio** é aquele que não possui elemento algum. Representa-se o conjunto vazio por $\varnothing$ ou { }.
- Um conjunto é **finito** se for vazio ou se, ao contar seus elementos um a um, chega-se ao fim da contagem.
- Conjunto **infinito** é todo conjunto que não é finito.
- Conjunto **universo** de um estudo, representado por ***U***, é aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados a esse estudo.

Conceitos fundamentais

Subconjunto

Um conjunto B é **subconjunto** de um conjunto A se todos os elementos de B também são elementos de A. Indicamos esse fato por: $B \subset A$ (lemos: "B está contido em A").



$B \subset A$

Conjunto das partes

- O **conjunto das partes de um conjunto** A, que indicamos por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.
- Se um conjunto A possui n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

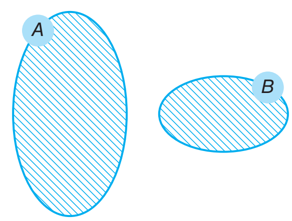
Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, A e B, são **iguais** se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

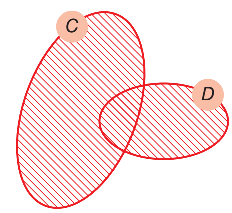
Operações com conjuntos

- A **união** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **ou** a B.

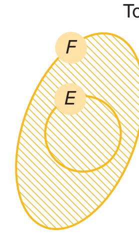
$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$



Toda a região hachurada representa $A \cup B$.



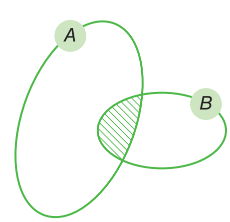
Toda a região hachurada representa $C \cup D$.



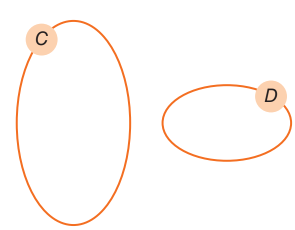
Toda a região hachurada representa $E \cup F$.

- A **intersecção** de dois conjuntos, A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **e** a B.

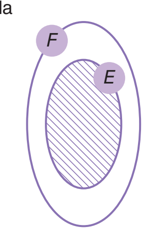
$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$



Toda a região hachurada representa $A \cap B$.



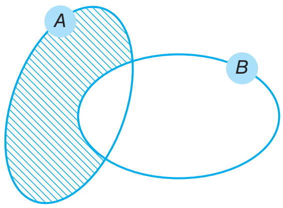
Os conjuntos C e D são disjuntos, isto é, $C \cap D = \varnothing$.



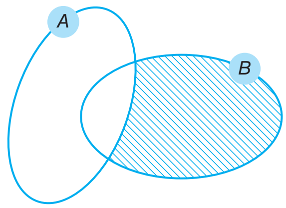
Toda a região hachurada representa $E \cap F$.

- A **diferença** de dois conjuntos, A e B, nessa ordem, que indicamos por $A - B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.

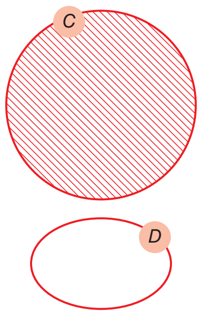
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



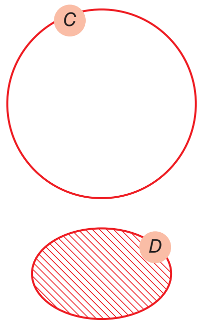
Toda a região hachurada representa $A - B$.



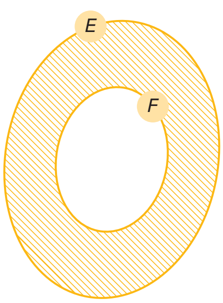
Toda a região hachurada representa $B - A$.



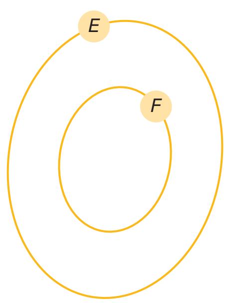
Toda a região hachurada representa $C - D$.



Toda a região hachurada representa $D - C$.



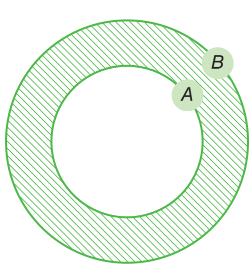
Toda a região hachurada representa $E - F$.



Como $F \subset E$, então $F - E = \varnothing$, pois todo elemento de F pertence a E.

- Sendo A e B dois conjuntos tais que $A \subset B$, o **complementar** de A em relação a B, que indicamos por $\complement_B A$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a B e não pertencem a A, ou seja, é o conjunto $B - A$.

$$\complement_B A = B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}, \text{ para } A \subset B$$



Toda a região hachurada representa $\complement_B A$.

Classificação dos números

Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Conjunto dos números racionais

Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Conjunto dos números irracionais

Número irracional é todo número que, em sua forma decimal, é uma dízima não periódica, assim:

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é dízima não periódica}\}$$

Conjunto dos números reais

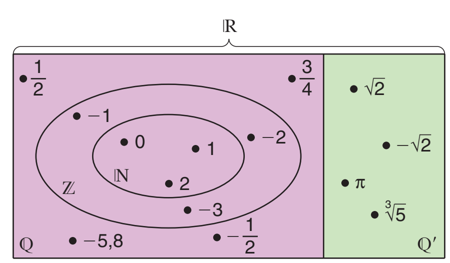
- Qualquer número racional ou irracional é chamado **número real**.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número racional ou irracional}\}$$

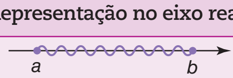
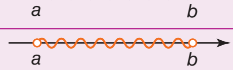
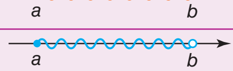
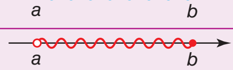
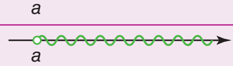
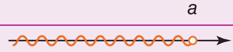
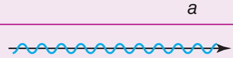
ou

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

- Relação de **inclusão** entre os conjuntos numéricos



Intervalos reais

Representação algébrica	Representação no eixo real
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$	 a
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$	 a
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$	 a
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$	 a
$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	

No Vestibular

1. **(Udesc)** Uma editora estuda a possibilidade de relançar a publicação das obras *Helena* e *Iracema*, de Machado de Assis e de José de Alencar, respectivamente. Para isso, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que, em cada 1.000 pessoas consultadas, 395 leram *Helena*, 379 leram *Iracema* e 321 não tinham lido nenhuma dessas obras. Calcule o número de pessoas que leu as duas obras.

2. **(Udesc)** Se $A = \{x \mid x$ é número par e $3 < x < 10\}$, $B = \{x \mid x$ é divisor natural de $15\}$ e $C = \{x \mid x$ é múltiplo natural de 5 e $x < 20\}$, determine $(A \cup B) \cap C$.

3. **(UFSCar-SP)** Nas eleições do dia 1º de outubro passado, dos eleitores que compareceram às urnas em uma determinada cidade, 29% deles votaram, para prefeito, no candidato U, 36% no candidato V, 25% no candidato W e os 20.000 eleitores restantes votaram em branco ou anularam seus votos. Com base nesses dados, pode-se afirmar que o número de eleitores que votou no candidato V foi:

   a) 50.000
   b) 58.000
   c) 72.000
   d) 180.000
   e) 200.000

4. **(Udesc)** O que os brasileiros andam lendo?

   O brasileiro lê, em média, 4,7 livros por ano. Este é um dos principais resultados da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil, encomendada pelo Instituto Pró-Livro ao Ibope Inteligência, que também pesquisou o comportamento do leitor brasileiro, as preferências e as motivações dos leitores, bem como os canais e a forma de acesso aos livros.

(Fonte: Associação Brasileira de Encadernação e Restauro, adapt.)

   Supõe-se que, em uma pesquisa envolvendo 660 pessoas, cujo objetivo era verificar o que elas estão lendo, obtiveram-se os seguintes resultados: 100 pessoas leem somente revistas, 300 pessoas leem somente livros e 150 pessoas leem somente jornais. Supõe-se ainda que, dessas 660 pessoas, 80 leem livros e revistas, 50 leem jornais e revistas, 60 leem livros e jornais e 40 leem revistas, jornais e livros.

   Em relação ao resultado dessa pesquisa, são feitas as seguintes afirmações:

   I. Apenas 40 pessoas leem pelo menos um dos três meios de comunicação citados.
   II. Quarenta pessoas leem somente revistas e livros, e não leem jornais.
   III. Apenas 440 pessoas leem revistas ou livros.

   Assinale a alternativa **correta**.

   a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
   b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
   c) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
   d) Somente a afirmativa II é verdadeira.
   e) Somente a afirmativa I é verdadeira.

5. **(UFF-RJ)** Os muçulmanos sequer se limitam aos países de etnia árabe, como muitos imaginam. Por exemplo, a maior concentração de muçulmanos do mundo encontra-se na Indonésia, que não é um país de etnia árabe.

EDITORA ABRIL

Adaptado da *Superinteressante*, ed. 169, out. 2001.

   Considere T o conjunto de todas as pessoas do mundo; M o conjunto de todas aquelas que são muçulmanas e A o conjunto de todas aquelas que são árabes. Sabendo que nem toda pessoa que é muçulmana é árabe, pode-se representar o conjunto de pessoas do mundo que não são muçulmanas nem árabes por:

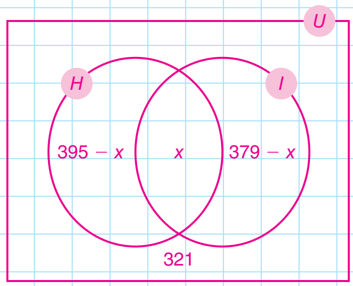
   a) $T - (A \cap M)$
   b) $T - A$
   c) $T - (A \cup M)$
   d) $(A - M) \cap (M - A)$
   e) $M - A$

6. **(Udesc)** No final do primeiro semestre deste ano, 40 acadêmicos participaram de uma pesquisa que objetivou analisar a frequência com que estes utilizaram o atendimento extraclasse do professor e/ou do monitor de uma determinada disciplina. Obteve-se o seguinte resultado: 20% dos acadêmicos procuraram atendimento tanto do professor quanto do monitor; 30% dos acadêmicos procuraram somente o atendimento do monitor; 15% dos acadêmicos não opinaram e 4 acadêmicos não procuraram atendimento do professor nem do monitor. Então, o número de acadêmicos que procurou o atendimento somente do professor é igual a:

   a) 24
   b) 18
   c) 8
   d) 10
   e) 20

Exercício 1

Seja x o número de pessoas que leram as duas obras. Representando em um diagrama de Venn as informações do enunciado, em que H e I são, respectivamente, os conjuntos das pessoas que leram Helena e Iracema e U o conjunto formado pelas pessoas consultadas, temos:



$395 - x + x + 379 - x + 321 = 1.000 \Rightarrow x = 95$

Exercício 2

Representando os conjuntos A, B e C na forma tabular, temos:

$A = \{4, 6, 8\}$

$B = \{1, 3, 5, 15\}$

$C = \{0, 5, 10, 15\}$

Assim: $(A \cup B) \cap C = \{5, 15\}$

Exercício 3

O percentual de votos nulos ou brancos é:

$$100\% - 29\% - 36\% - 25\% = 10\%$$

Sendo x o total de eleitores, temos:

$$10\,\% \cdot x = 20.000 \Rightarrow x = 200.000$$

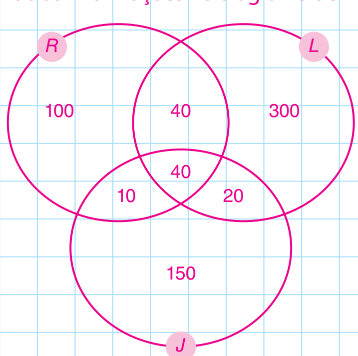
Logo, o número de eleitores que votaram no candidato U é:

$$\frac{36}{100} \cdot 200.000 = 72.000$$

Alternativa **c**.

Exercício 4

Sendo R, L e J, respectivamente, os conjuntos das pessoas que leem, nessa ordem, revistas, livros e jornais e representando as informações no diagrama de Venn, temos:



Logo:

I. F, pois o número de pessoas que leem pelo menos um dos três meios de comunicação citados é dado por:
$100 + 10 + 40 + 40 + 300 + 20 + 150 = 660$

II. V, pelo diagrama.

III. F, pois o número de pessoas que leem revistas ou livros é dado por:
$100 + 10 + 40 + 40 + 300 + 20 = 510$

Alternativa **d**.

Exercício 5

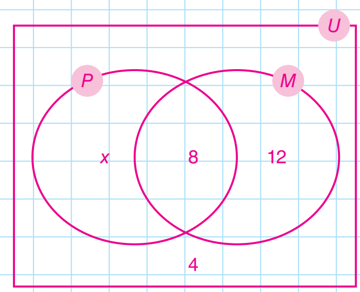
O conjunto das pessoas que são muçulmanas ou árabes é $A \cup M$. Assim, o conjunto das pessoas que não são muçulmanas nem árabes é $T - (A \cup M)$.

Alternativa **c**.

Exercício 6

Do total, $\frac{15}{100} \cdot 40 = 6$, ou seja, 6 alunos não opinaram, $\frac{20}{100} \cdot 40 = 8$, ou seja, 8 alunos procuraram atendimento tanto do professor quanto do monitor, $\frac{30}{100} \cdot 40 = 12$ procuraram somente o atendimento do monitor e 4 acadêmicos não procuraram atendimento do professor nem do monitor.

Sendo P e M, respectivamente, os conjuntos dos acadêmicos que procuraram o atendimento do professor e do monitor, U o conjunto dos acadêmicos que opinaram e x o número de acadêmicos que procuraram o atendimento somente do professor, temos:



$$40 - 6 = x + 8 + 12 + 4 \Rightarrow x = 10$$

Alternativa **d**.

7. **(Unifor-CE)** Considerando o universo das pessoas que responderam a uma pesquisa, sejam: V o conjunto das pessoas que têm mais de 20 anos, A o conjunto das pessoas que têm automóveis e M o conjunto das pessoas que têm motos. Admitindo que $A \subset V$, $M \subset V$ e $A \cap M \neq \varnothing$, é correto afirmar que:

a) Todas as pessoas que não têm automóvel têm menos de 20 anos.
b) Toda pessoa que não tem moto não tem mais de 20 anos.
c) As pessoas que não têm mais de 20 anos não podem ter automóveis.
d) As pessoas que não têm automóveis não podem ter motos.
e) Algumas pessoas que têm menos de 20 anos podem ter automóveis.

8. **(Unir-RO)** O regulamento das inscrições para a participação nas olimpíadas internas de determinada escola permitia que cada aluno se inscrevesse em uma ou duas modalidades esportivas. Caso o aluno optasse por duas modalidades, uma deveria ser de esporte coletivo (ou vôlei ou basquete) e a outra de esporte individual (ou atletismo ou natação). Após o encerramento das inscrições, foram obtidos os seguintes resultados:

Modalidade	Número de inscritos
Vôlei	65
Basquete	90
Atletismo	130
Natação	40
Vôlei e atletismo	50
Vôlei e natação	5
Basquete e atletismo	60
Basquete e natação	10

Admitindo-se que a escola tem 500 alunos e que nem todos participaram das olimpíadas, marque V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.

( ) 300 alunos se inscreveram nas olimpíadas.
( ) 75 alunos se inscreveram em somente uma das modalidades.
( ) 20 alunos se inscreveram somente em basquete.
( ) 20 alunos se inscreveram somente em vôlei.

Assinale a sequência correta.

a) V; F; V; F
b) F; V; F; V
c) F; V; V; F
d) V; V; V; V
e) F; F; F; F

9. **(UFPel-RS)** Um levantamento epidemiológico foi realizado em cinco praias paulistas frequentadas por grande número de famílias com crianças menores de 10 anos. Os principais aspectos do estudo foram relacionar a incidência de doenças gastrintestinais em banhistas com os índices de contaminação fecal das praias do litoral paulista. A pesquisa, feita com 2.100 pessoas, teve por objetivo detectar o número de pessoas com sintomas de vômitos (V), diarreia (D) e febre (F), conforme o quadro abaixo.

Revista Discutindo Ciência, ano 1, n. 1 [adapt.].

D	F	V	D e V	D e F	F e V	D, V e F
127	136	137	46	52	51	22

Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o número de pessoas entrevistadas que não apresentaram nenhum dos sintomas pesquisados é:

a) 1.529
b) 2.078
c) 1.827
d) 1.951
e) 1.929
f) I.R.

10. **(UFT-TO)** Em uma população de 400 pessoas foram realizados exames para detectar a anemia e exames para detectar a verminose. Dos resultados obtidos observou-se que:

- 80% das pessoas que possuem anemia possuem também verminose.
- 50% das pessoas que possuem verminose possuem também anemia.
- 220 pessoas não possuem nem verminose nem anemia.

Das 400 pessoas, a porcentagem correspondente ao número de pessoas que possuem anemia é:

a) 30%
b) 27%
c) 25%
d) 32%
e) 35%

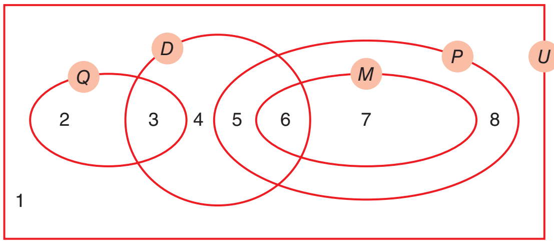
11. **(Insper)** No diagrama abaixo, U representa o conjunto de todos os alunos de uma escola. Estão também representados os seguintes subconjuntos de U:

Q: alunos da escola que gostam de quiabo;

D: alunos da escola com mais de dezesseis anos de idade;

P: alunos da escola que gostam do professor Pedro;

M: alunos da escola que gostam de Matemática.

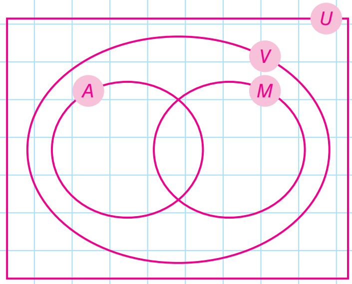


Em todas as regiões do diagrama, identificadas com um número de 1 a 8, há pelo menos um aluno representado. Então, é correto concluir que:

a) Se um aluno gosta de quiabo, então ele não tem mais do que dezesseis anos.
b) Pelo menos um aluno que gosta de Matemática tem mais do que dezesseis anos e gosta de quiabo.
c) Se um aluno gosta do professor Pedro, então ele gosta de Matemática.
d) Todo aluno que gosta de Matemática e tem mais do que dezesseis anos gosta do professor Pedro.
e) Se um aluno com mais de dezesseis anos não gosta do professor Pedro, então ele não gosta de quiabo.

Exercício 7

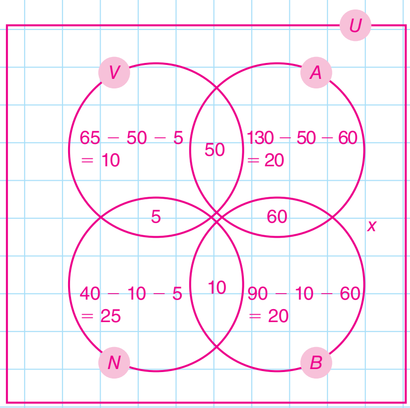
Considere o diagrama de Venn a seguir, em que U, V, A e M representam, respectivamente, o conjunto universo das pessoas que responderam à pesquisa, o conjunto das pessoas que têm mais de 20 anos, o conjunto das pessoas que têm automóveis e o conjunto das pessoas que têm motos.



Como $A \subset V$, as pessoas que não têm mais de 20 anos não podem ter automóveis.
Alternativa **c**.

Exercício 8

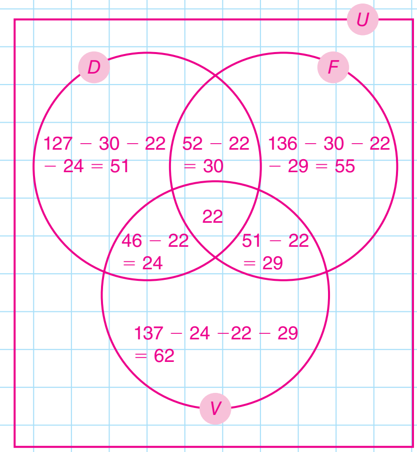
Sejam V, B, A e N, respectivamente, os conjuntos dos alunos que praticam vôlei, basquete, atletismo e natação, U o conjunto universo de todos os alunos da escola e x o número de alunos que não participaram das olimpíadas. Representando as informações da tabela num diagrama de Venn, temos:



Assim:
$10 + 50 + 5 + 20 + 60 + 20 + 10 + 25 + x = 500 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 300$
Portanto:
I. F, pois 200 alunos se inscreveram nas olimpíadas.
II. V, conforme mostra o diagrama.
III. V, conforme mostra o diagrama.
IV. F, pois apenas 10 alunos se inscreveram em vôlei.
Alternativa **c**.

Exercício 9

Sejam V, D e F, respectivamente, os conjuntos das pessoas com sintomas de vômitos, diarreia e febre e U o conjunto das pessoas pesquisadas. Representando em um diagrama as informações obtidas pela tabela, temos:



Assim, o número x de pessoas que não apresentam nenhum dos sintomas é:
$x = 2.100 - 51 - 30 - 22 - 24 - 62 - 29 - 55 = 1.827$
Alternativa **c**.

Exercício 10

Sejam x e y, respectivamente, o número de pessoas que têm verminose e anemia.
Do total de 400 pessoas, apenas $400 - 220 = 180$ estão infectadas.
Por outro lado, como 80% das pessoas que têm anemia também têm verminose, concluímos que 20% têm apenas anemia, enquanto 50% das pessoas têm apenas verminose. Assim:

$$\begin{cases} x + 0{,}2y = 180 \\ y + 0{,}5 = 180 \end{cases} \Rightarrow x = 160 \text{ e } y = 100$$

Logo, a porcentagem de pessoas que têm anemia em relação ao total de pessoas é:

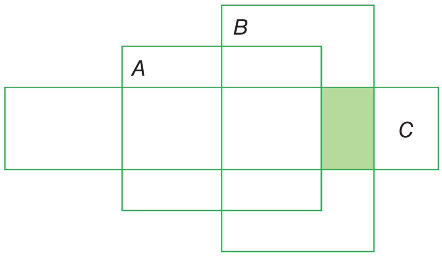
$$\frac{100}{400} = 25\%$$

Alternativa **c**.

Exercício 11

Considerando as afirmações, temos:
a) F, pois Q e D não são disjuntos e, portanto, $Q \cap D \neq \varnothing$.
b) F, pois $(Q \cap D) \cap M = \varnothing$
c) F, pois $\complement_P M \neq \varnothing$
d) V
e) F, pois $(D - P) \cap Q \neq \varnothing$
Alternativa **d**.

12. **(UPF-RS)** No diagrama abaixo, a parte colorida representa:



a) $B \cap C$
b) $(A \cup B) - C$
c) $(B \cap C) - A$
d) $(A \cup C) - B$
e) $A \cap C$

13. **(Insper)** Considere as duas afirmações seguintes, feitas a respeito de três conjuntos de números inteiros A, B e C:

(1) Se x é elemento de A, então x é elemento de B.

(2) x é um número par pertencente a B se, e somente se, x é elemento de C.

Para que as duas afirmações sejam verdadeiras para todo x inteiro, os conjuntos A, B e C podem ser dados por:

a) $A = \{3, 4, 5, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10\}$ e $C = \{3, 4, 5, 10\}$
b) $A = \{3, 4, 5, 10\}$, $B = \{3, 4, 10\}$ e $C = \{4, 10\}$
c) $A = \{3, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10\}$ e $C = \{4, 10\}$
d) $A = \{3, 10\}$, $B = \{4, 10\}$ e $C = \{4, 10\}$
e) $A = \{3, 10\}$, $B = \{3, 4, 10\}$ e $C = \{4, 5, 10\}$

14. **(UFBA)** Assinale as proposições verdadeiras e some os números a elas associados. Sobre números reais, é correto afirmar:

(01) O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
(02) O produto de qualquer número inteiro não nulo por um número irracional qualquer é um número irracional.
(04) O quadrado de qualquer número irracional é um número irracional.
(08) Se o quadrado de um número natural é par, então esse número também é par.
(16) Todo múltiplo de 17 é um número ímpar ou múltiplo de 34.
(32) A soma de dois números primos quaisquer é um número primo.
(64) Se o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos é igual a 1, então esses números são primos.

• Qual é a soma obtida?

15. **(UFF-RJ)** Considere $\{p, q\} \subset \mathbb{Z}$ tal que p e q são números pares. Pode-se afirmar que:

a) $(pq + 1)$ é múltiplo de 4
b) $p - q$ é ímpar
c) $p + q$ é primo
d) $p^2 - q^2$ é par
e) $p(q + 1)$ é ímpar

16. **(PUC-SP)** O valor de $\sqrt{0{,}444\ldots}$ é:

a) 0,222...
b) 0,333...
c) 0,444...
d) 0,555...
e) 0,666...

17. **(Unir-RO)** Sejam $A = [2{,}9]$ e $B =]7, +\infty[$. Se um número real x não pertence ao conjunto $A \cup B$, então pode-se afirmar que x pertence ao conjunto:

a) $]-\infty, 2]$
b) $]-\infty, 2[$
c) $[2, +\infty]$
d) $]2, +\infty[$
e) $]7, 9]$

Exercício 12

A parte colorida no diagrama de Venn corresponde aos elementos que pertencem aos conjuntos B e C, mas não pertencem ao conjunto A, ou seja, $(B \cap C) - A$.
Alternativa **c**.

Exercício 13

As duas afirmações podem ser representadas da seguinte maneira:
(1) $A \subset B$ (I)
(2) x é par e $x \in B \Leftrightarrow x \in C$, ou seja:
x é par e $x \in B \Rightarrow x \in C$ (II)
$x \in C \Rightarrow x$ é par e $x \in B$ (III)
Assim, os conjuntos que satisfazem as afirmações (I), (II) e (III) são:
$A = \{3, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10\}$ e $C = \{4, 10\}$
Alternativa **c**.

Exercício 14

Considerando as afirmações, temos:
(01) V
(02) V
(04) F, pois, por exemplo, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ e $2 \notin \mathbb{Q}'$
(08) V
(16) V
(32) F, pois, por exemplo, $5 + 7 = 12$
(64) F, pois, por exemplo, $\text{mdc}(4, 9) = 1$, e 4 e 9 não são primos.
• A soma é: $1 + 2 + 8 + 16 = 27$

Exercício 15

Os números p e q são pares; logo, podemos representá-los sob as formas: $p = 2n$ e $q = 2m$, com $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}$.
Assim, temos:

$$p^2 - q^2 = (2n)^2 - (2m)^2 = 4n^2 - 4m^2 = $$
$$= 2\underbrace{(2n^2 - 2m^2)}_{\text{número inteiro}}$$

Como $(2n^2 - 2m^2)$ é um número inteiro, concluímos que $2(2n^2 - 2m^2)$ é um número par.
Alternativa **d**.

Exercício 16

Indicando por g a dízima periódica 0,444..., temos:

$$\begin{cases} g = 0{,}444\ldots \\ 10g = 4{,}444\ldots \end{cases}$$

Logo: $10g - g = 4 \Rightarrow g = \dfrac{4}{9}$

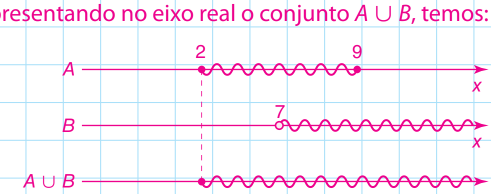
Assim, concluímos:

$$\sqrt{0{,}444\ldots} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

Alternativa **e**.

Exercício 17

Representando no eixo real o conjunto $A \cup B$, temos:



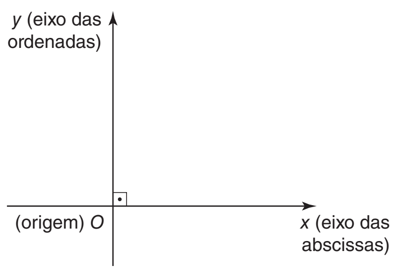
Logo: $A \cup B = [2, +\infty[$
Como x é um número real que não pertence a $[2, +\infty[$, concluímos que x pertence ao conjunto $]-\infty, 2[$.
Alternativa **b**.

Introdução ao estudo das funções

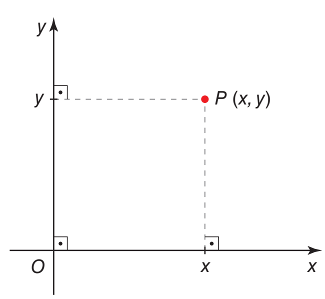
A importância do estudo de funções não é específica da Matemática, fazendo parte também do universo de outras ciências, como a Física e a Química. Quando lemos um jornal ou uma revista, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação entre duas grandezas representada geometricamente.

Sistema de coordenadas

O sistema cartesiano ortogonal de coordenadas é formado por dois eixos, Ox (eixo das abscissas) e Oy (eixo das ordenadas), perpendiculares entre si no ponto O (origem).



Para localizar um ponto P no plano, traçamos por P as perpendiculares a Ox e Oy, obtendo nos eixos as **coordenadas** de P, que são dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente.



Se x é a abscissa de P e y é a ordenada de P, o **par ordenado** (x, y) representa P. Indicamos:

$$P(\underbrace{x}_{\text{abscissa}}, \underbrace{y}_{\text{ordenada}})$$

O conceito de função

- Dados dois conjuntos não vazios, A e B, chama-se **relação** de A em B qualquer conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.
- Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A estiver associado, através de f, a um único elemento de B. Para indicar que f é uma função de A em B, adotamos a notação:

$$\boxed{f: A \to B}$$

Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Dada uma função $f: A \to B$:

- O **domínio** da função é o conjunto $D(f) = A$.
- O **contradomínio** da função é o conjunto $CD(f) = B$.
- O **conjunto imagem** da função é o conjunto formado pelos elementos de B que têm correspondente em A, ou seja: $Im(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$.

Imagem de *x* pela função *f*

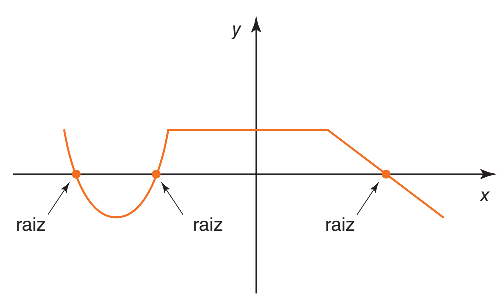
Se (x, y) pertence a uma função f, dizemos que y é a **imagem de x pela função f**. Indicamos esse fato por: $\boldsymbol{y = f(x)}$

Gráfico de uma função

O **gráfico** de uma função é a reunião de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano que pertencem à função.

Raiz de uma função

- Chama-se **raiz** (ou **zero**) de uma função real de variável real, $y = f(x)$, todo número r do domínio de f tal que $f(r) = 0$.
- Graficamente, a raiz de uma função é a abscissa do ponto em que o gráfico cruza o eixo Ox.



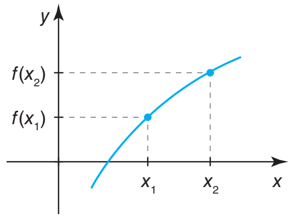
Estudo do sinal de uma função

- Uma função f é **positiva** para um elemento x de seu domínio se, e somente se, $\boldsymbol{f(x) > 0}$.
- Uma função f é **negativa** para um elemento x de seu domínio se, e somente se, $\boldsymbol{f(x) < 0}$.
- Uma função f se **anula** para um elemento x de seu domínio se, e somente se, $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Nesse caso, x é raiz da função.

Variação de uma função

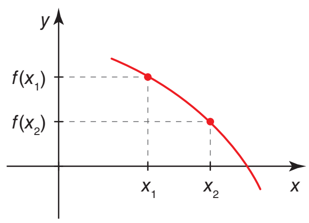
- Uma função f é **crescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, tivermos:

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$



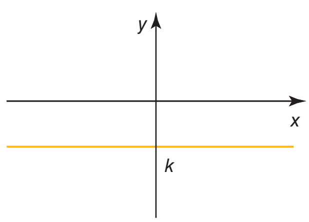
- Uma função f é **decrescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, tivermos:

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$$



- Uma função f é **constante** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para qualquer número x de A, tivermos:

$$\boxed{f(x) = k\text{, sendo } k \text{ uma constante real}}$$



Função par e função ímpar

- Uma função f de domínio D é **par** se, e somente se:

$$\boxed{f(x) = f(-x)\text{, para qualquer } x \in D}$$

Assim, as partes do gráfico de f para $x \geqslant 0$ e para $x \leqslant 0$ são simétricas em relação ao eixo Oy.

- Uma função f de domínio D é **ímpar** se, e somente se:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)\text{, para qualquer } x \in D}$$

Assim, as partes do gráfico de f para $x \geqslant 0$ e para $x \leqslant 0$ são simétricas em relação à origem O do sistema de eixos.

Função injetora, sobrejetora e bijetora

- Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, for obedecida a condição:

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

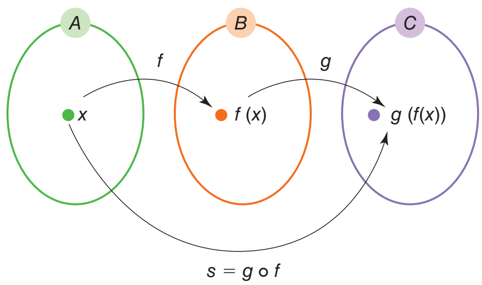
Ou seja, f é injetora se não existirem elementos distintos do domínio de f com a mesma imagem.

- Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** se, e somente se, para todo elemento y do conjunto B existir x no conjunto A tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetora se o seu contradomínio coincidir com o seu conjunto imagem.
- Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.

Função composta

Sejam A, B e C conjuntos não vazios e sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$. A **função composta** de g com f é a função $s: A \to C$ tal que:

$$\boxed{s(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

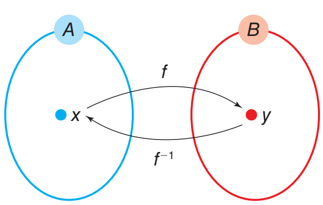


Função inversa

- A **inversa** de uma função bijetora $f: A \to B$ é a função $f^{-1}: B \to A$ tal que:

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

para quaisquer x e y, com $x \in A$ e $y \in B$.



$D(f) = Im(f^{-1})$

$D(f^{-1}) = Im(f)$

Se uma função admite inversa, dizemos que ela é **invertível.**

Obtenção da função inversa

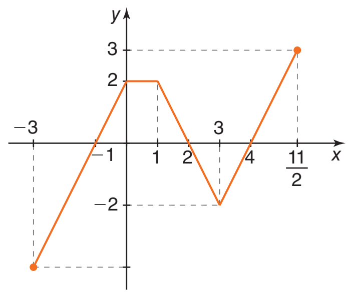
Se uma função real de variável real $y = f(x)$ é invertível, sua inversa é obtida do seguinte modo:

I. Trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$.

II. Isolamos a variável y, após a mudança de variáveis efetuada em (I), obtendo $y = f^{-1}(x)$.

No Vestibular

1. **(Mackenzie-SP)** Considere as sentenças abaixo, relativas à função $y = f(x)$, definida no intervalo $\left[-3, \dfrac{11}{2}\right]$ e representada, graficamente, na figura.

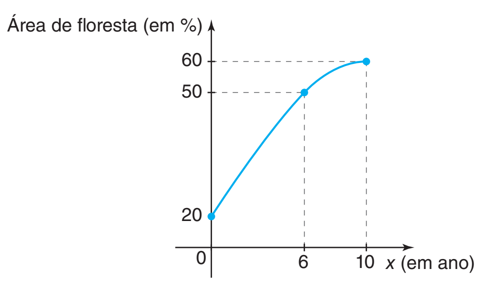


I. Se $x < 0$, então $f(x) < 0$.
II. $f(1) + f(3) = f(4)$
III. A imagem de f é o intervalo $[-4, 3]$.

É correto afirmar que:

a) Apenas III é verdadeira.
b) Apenas I e II são verdadeiras.
c) Apenas I e III são verdadeiras.
d) Apenas II e III são verdadeiras.
e) Todas as sentenças são verdadeiras.

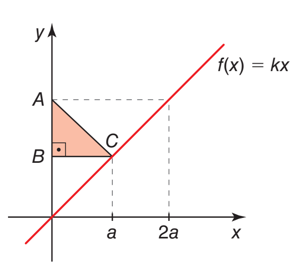
2. **(Vunesp)** Numa fazenda havia 20% de área de floresta. Para aumentar essa área, o dono da fazenda decidiu iniciar um processo de reflorestamento. No planejamento do reflorestamento, foi elaborado um gráfico fornecendo a previsão da porcentagem de área de floresta na fazenda a cada ano, num período de dez anos.



(gráfico fora de escala)

Esse gráfico foi modelado pela função $f(x) = \dfrac{ax + 200}{bx + c}$, que fornece a porcentagem de área de floresta na fazenda a cada ano x, onde a, b e c são constantes reais. Com base no gráfico, determine as constantes a, b e c e reescreva a função $f(x)$ com as constantes determinadas.

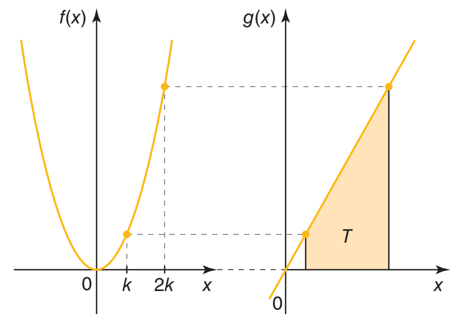
3. **(Ufal)** O triângulo retângulo ABC, região colorida na figura abaixo, tem área igual a $3a$.



Então, o valor de $f(a)$ é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

4. **(UFSCar-SP)** A figura representa, em sistemas coordenados com a mesma escala, os gráficos das funções reais f e g, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.



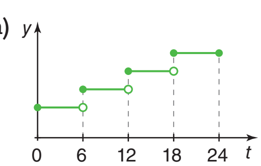
Sabendo que a região poligonal T demarca um trapézio de área igual a 120, o numero real k é:

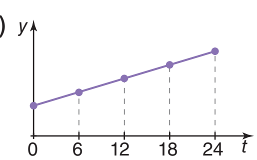
a) 0,5
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) 1,5
e) 2

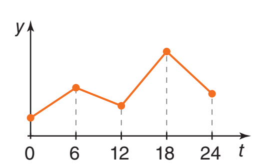
5. **(Unifor-CE)** O conjunto imagem da função real de variável real dada por $f(x) = 3x - 2 + \sqrt{-(x^2 - 4x + 4)}$ é:

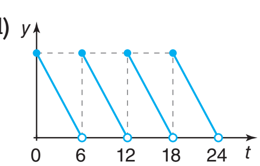
a) $\mathbb{R}_+$
b) $\mathbb{R}_-$
c) $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \dfrac{2}{3}\right\}$
d) $\left\{y \in \mathbb{R}\ \dfrac{2}{3} \leq y \leq 4\right\}$
e) $\{4\}$

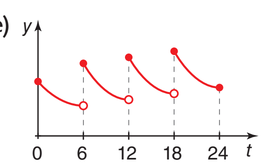
6. **(Unifesp)** Uma forma experimental de insulina está sendo injetada a cada 6 horas em um paciente com diabetes. O organismo usa ou elimina a cada 6 horas 50% da droga presente no corpo. O gráfico que melhor representa a quantidade y da droga no organismo como função do tempo t, em um período de 24 horas, é:

a)


b)


c)


d)


e)


Exercício 1

Com base na análise do gráfico, temos:

I. F, pois para $-1 < x < 0$ temos $f(x) > 0$

II. V, pois $f(1) = 2$, $f(3) = -2$ e $f(4) = 0$

III. V, pois $f(-3) = -4$

Alternativa **d**.

Exercício 2

Da análise do gráfico, podemos concluir que $f(0) = 20$, $f(6) = 50$ e $f(10) = 60$. Assim, substituindo esses valores na função, temos:

$$\begin{cases} 20 = \dfrac{a \cdot 0 + 200}{b \cdot 0 + c} \\ 50 = \dfrac{a \cdot 6 + 200}{b \cdot 6 + c} \\ 60 = \dfrac{a \cdot 10 + 200}{b \cdot 10 + c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 = \dfrac{200}{c} \\ 50 = \dfrac{6a + 200}{6b + c} \\ 60 = \dfrac{10a + 200}{10b + c} \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 100$, $b = 1$ e $c = 10$.

Logo: $f(x) = \dfrac{100x + 200}{x + 10}$

Exercício 3

Os pontos A e B têm, respectivamente, coordenadas $(2a, f(2a)) = (2a, 2ka)$ e $(a, f(a)) = (a, ka)$. Assim, como a área do triângulo retângulo ABC é igual a $3a$, temos:

$$3a = \frac{(2ka - ka)a}{2} \Rightarrow a = \frac{6}{k}$$

$\therefore f(a) = 6$

Alternativa **c**.

Exercício 4

Como os sistemas coordenados estão na mesma escala, as imagens dos elementos k e $2k$, respectivamente, pela função $f(x)$ são k^2 e $4k^2$. Sendo a área do trapézio T igual a 120, temos:

$$120 = \frac{(k^2 + 4k^2)3k^2}{2} \Rightarrow k = 2$$

Alternativa **e**.

Exercício 5

Como f é uma função real de variável real, o domínio de f é tal que:

$-(x^2 - 4x + 4) \geqslant 0 \Rightarrow (x - 2)^2 \leqslant 0$

$\therefore x = 2$

Logo, $D(f) = \{2\}$ e o conjunto imagem de f é formado apenas pela imagem do elemento 2, ou seja, $f(2) = 4$.

Alternativa **e**.

Exercício 6

De 6 em 6 horas, a função é decrescente, pois o organismo usa ou elimina a insulina injetada. Além disso, na 6ª hora após a insulina ser injetada, ainda resta 50% da droga no corpo. Sabemos também que de 6 em 6 horas a insulina é injetada novamente. Logo, o gráfico que melhor representa a quantidade da droga no organismo é o da alternativa **e**.

7. **(Insper)** Sendo a e b números reais positivos, sabe-se que a função $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, definida para $x > 0$, assume seu valor mínimo quando $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

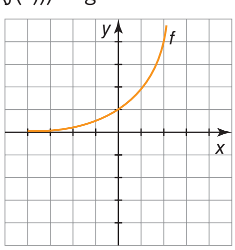
Um grupo de amigos alugou por R$ 6.000,00 um salão para fazer uma festa. Este valor será dividido por todos que estiverem presentes na festa. Como o dia do aniversário de José Carlos, um dos integrantes deste grupo, coincide com o dia da festa, ele decidiu que a comida será por conta dele. A empresa que prestará este serviço irá lhe cobrar R$ 15,00 por pessoa presente na festa. Então, o número de integrantes do grupo de amigos que minimiza o gasto de José Carlos somando o custo total da comida com a parte dele no aluguel do salão é de:

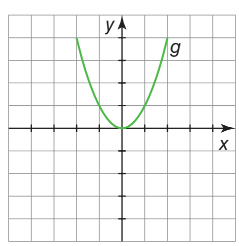
a) 5 pessoas
b) 10 pessoas
c) 15 pessoas
d) 20 pessoas
e) 25 pessoas

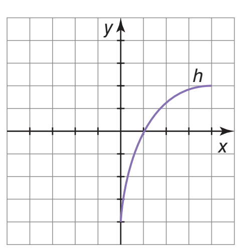
8. **(FGV)** Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2 - x$. Então, o gráfico cartesiano da função $f(g(x)) + g(f(x))$:

a) Passa pela origem.
b) Corta o eixo x no ponto $(-4, 0)$.
c) Corta o eixo y no ponto $(6, 0)$.
d) Tem declividade positiva.
e) Passa pelo ponto $(1, 2)$.

9. **(Insper)** Suponha que os três gráficos abaixo estejam na mesma escala, em que a distância entre duas marcas consecutivas sobre os eixos seja igual a 1. Se f, g e h são as funções nestes três gráficos, respectivamente, então $h(g(f(1)))$ é igual a:







a) 4
b) 2
c) 1
d) –2
e) –4

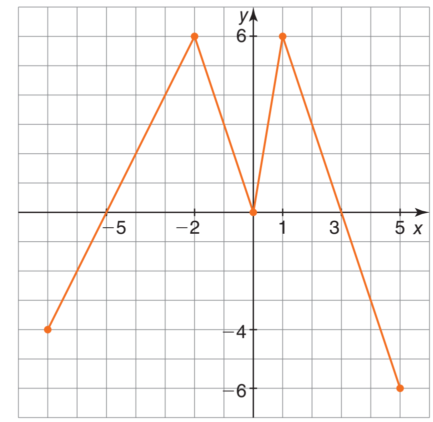
10. **(Mackenzie-SP)** Dada a função $f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, se $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f \circ f$, $f^{(4)} = f \circ f \circ f \circ f$ e assim por diante, então o valor de $f^{(102)}(1)$ é:

a) 103
b) 205
c) 307
d) 199
e) 249

11. **(UFMA)** Sendo f uma função par e g uma função ímpar, e sabendo-se que $f(\pi) = \sqrt{2}$ e $g(-\sqrt{2}) = \pi$, pode-se concluir que $(f \circ g)(\sqrt{2})$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $-\pi$
c) $-\sqrt{2}$
d) π
e) $\pi\sqrt{2}$

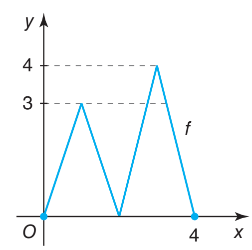
12. **(FGV)** A figura indica o gráfico da função f, de domínio $[-7, 5]$, no plano cartesiano ortogonal.

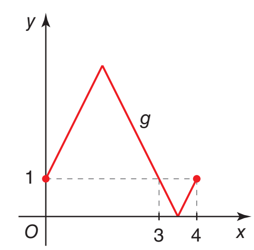


O número de soluções da equação $f(f(x)) = 6$ é:

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

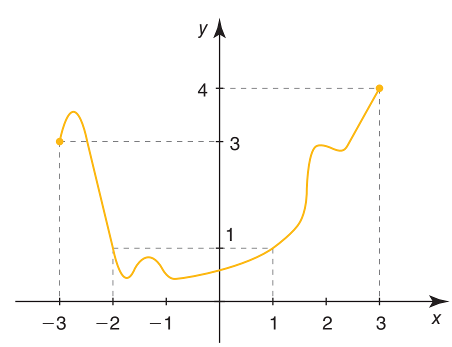
13. **(Mackenzie-SP)** As funções f e g, ambas de domínio $[0, 4]$, estão representadas graficamente abaixo. O número de elementos do conjunto solução da equação $g(f(x)) = 1$ é:





a) 6
b) 7
c) 4
d) 2
e) 3

14. **(UFU-MG)** Seja $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está esboçado abaixo.



Se $g: \mathbb{R} \to [0, 3]$ é tal que $(f \circ g)(-2) = 1$, então $g(-2)$ é igual a:

a) 2
b) -2
c) 1
d) -1

15. **(Unifesp)** Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função crescente e sobrejetora, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Sabendo-se que $f(2) = -4$, uma das possibilidades para $f(n)$ é:

a) $f(n) = 2(n - 4)$
b) $f(n) = n - 6$
c) $f(n) = -n - 2$
d) $f(n) = n$
e) $f(n) = -n^2$

Exercício 7

Seja f a função que representa o gasto total de José Carlos e x o número de pessoas.

O total gasto por pessoa para o aluguel do salão é $\frac{6.000}{x}$, e o total gasto com a refeição é $15x$.

Assim, $f(x) = 15x + \frac{6.000}{x}$, para $x > 0$, em que, pelo enunciado, seu valor mínimo é obtido para $x = \sqrt{\frac{6.000}{15}} = 20$.

Alternativa **d.**

Exercício 8

$f(g(x)) = f(2 - x) = 2(2 - x) = 4 - 2x$

$g(f(x)) = g(2x) = 2 - 2x$

Assim: $f(g(x)) + g(f(x)) = 4 - 2x + 2 - 2x = -4x + 6$

O gráfico dessa função passa pelo ponto (1, 2).

Alternativa **e.**

Exercício 9

Como os três gráficos estão na mesma escala e as distâncias entre duas marcas consecutivas é igual a 1, podemos afirmar, pela análise dos gráficos, que:

$f(1) = 2$; $g(f(1)) = g(2) = 4$ e $h(g(f(1)) = h(4) = 2$

Alternativa **b.**

Exercício 10

Do enunciado, temos:

$f^{(2)} = f \circ f = x + 2 + 2 = x + 2 \cdot 2 = x + 4$

$f^{(3)} = f \circ f \circ f = x + 2 + 4 = x + 2 \cdot 3 = x + 6$

$f^{(4)} = f \circ f \circ f \circ f = x + 2 + 6 = x + 2 \cdot 4 = x + 8$

Assim, o estudo de casos particulares leva-nos a concluir que, para todo n natural, $f^{(n)} = x + 2n$.

Portanto: $f^{(102)}(x) = x + 2 \cdot 102 = x + 204$

Logo: $f^{(102)}(1) = 1 + 204 = 205$

Alternativa **b.**

Exercício 11

Como g é uma função ímpar, temos $g(-x) = -g(x)$.

Assim: $g(-\sqrt{2}) = -g(\sqrt{2}) = -\pi$

Por outro lado, como f é uma função par, temos

$f(x) = f(-x)$

Assim: $f(-\pi) = f(\pi) = \sqrt{2}$

Alternativa **a.**

Exercício 12

Temos, pelo gráfico: $f(a) = 6 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -2$

Assim: $f(f(x)) = 6 \Rightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = -2$

Pela análise do gráfico, $f(x) = 1$ tem 4 soluções e $f(x) = -2$ tem 2 soluções.

Logo, concluímos que o número de soluções da equação dada é 6.

Alternativa **d.**

Exercício 13

Seja $f(x) = a$. Assim, $g(a) = 1 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 3$ ou $a = 4$.

Logo, pela análise do gráfico, as equações $f(x) = 0$, $f(x) = 3$ e $f(x) = 4$ têm, respectivamente, 3, 3 e 1 soluções, totalizando, portanto, 7 soluções.

Alternativa **b.**

Exercício 14

Seja $g(-2) = a$, em que $g: \mathbb{R} \to [0, 3]$. Assim:

$(f \circ g)(-2) = 1 \Rightarrow f(a) = 1$

$\therefore a = 1$

Alternativa **c.**

Exercício 15

a) F, pois f é sobrejetora e, nesse caso, f teria apenas como imagens o conjunto dos inteiros pares.

b) V

c) F, pois f é crescente.

d) F, pois $f(2) = -4$

e) F, pois f é sobrejetora.

Alternativa **b.**

16. **(UFPA)** O custo c de produção de uma peça em função do número n de produtos é dado pela fórmula $c(n) = \dfrac{1}{1 + n^2}$. A função inversa desta fórmula é:

a) $n = \dfrac{1}{1 + c^2}$

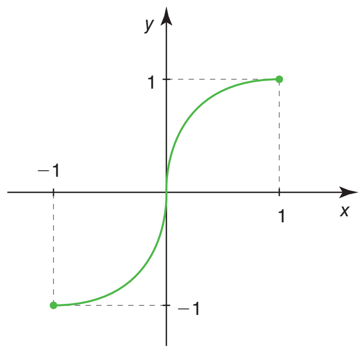
b) $n = \dfrac{1}{1 - c^2}$

c) $n = \sqrt{\dfrac{1 - c}{c}}$

d) $n = \sqrt{\dfrac{1 + c}{c}}$

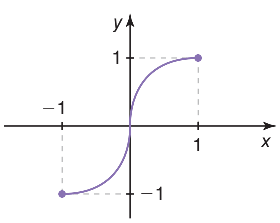
e) $n = \sqrt{\dfrac{1 + c^2}{c}}$

17. **(UFU-MG)** Considere f a função ímpar real de variável real definida no intervalo $[-1, 1]$, cujo gráfico está desenhado na figura abaixo.

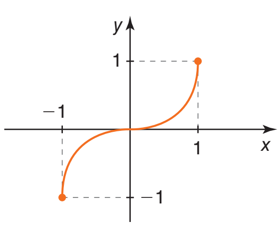


Assinale a alternativa que corresponde ao gráfico da função $y = f^{-1}(-x)$, em que f^{-1} é a inversa da função f.

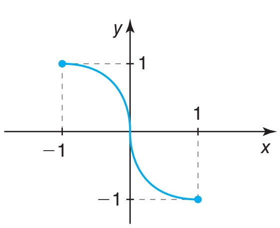
a)



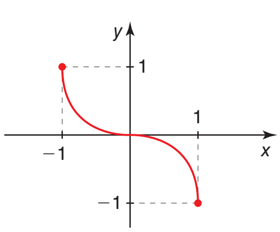
b)



c)

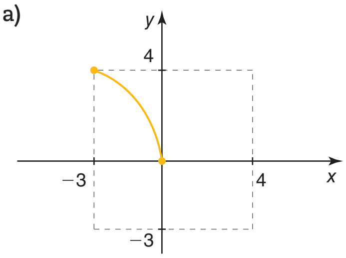


d)

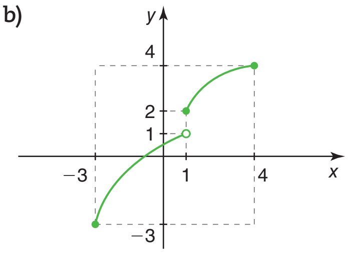


18. **(UFT-TO)** Cada um dos gráficos abaixo representa uma função $y = f(x)$ tal que f: $D_f \to [-3, 4]$; $D_f \subset [-3, 4]$. Qual deles representa uma função bijetora no seu domínio?

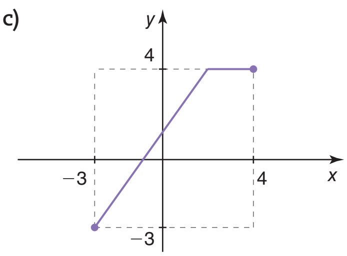
a)



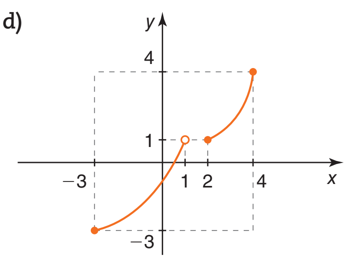
b)



c)



d)



19. **(ITA-SP)** Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f \cdot g$ é ímpar.

II. $f \circ g$ é par.

III. $g \circ f$ é ímpar.

é (são) verdadeira(s):

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) Todas.

20. **(UFT-TO)** Seja f: $]-\infty, 2] \to [-1, +\infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Então a função inversa f^{-1} é:

a) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{2}}$

c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$

d) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 1}$

21. **(Unifor-CE)** Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = -2x + 3$ e $g(f(x)) = 4x$. Nessas condições, a função inversa de g é dada por:

a) $g^{-1}(x) = \dfrac{6 + x}{2}$

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{6 - x}{2}$

c) $g^{-1}(x) = \dfrac{6 + x}{4}$

d) $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{6 - 2x}$

e) $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{6 + 2x}$

Exercício 16

Para $n \geqslant 0$, e supondo a função bijetora, temos:

$1 + n^2 = \frac{1}{c} \Rightarrow n^2 = \frac{1-c}{c}$

$\therefore n = \sqrt{\frac{1-c}{c}}$

Alternativa **c.**

Exercício 17

Como f é uma função ímpar, temos $-f(x) = f(-x)$, ou seja, o gráfico de $f(-x)$ é obtido a partir de $f(x)$, por meio de uma reflexão em relação ao eixo Oy.
Por outro lado, os gráficos de $f(-x)$ e $f^{-1}(-x)$ são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).
Alternativa **c**.

Exercício 18

a) A função não é bijetora, pois não é sobrejetora.
b) A função não é bijetora, pois não é sobrejetora.
c) A função não é bijetora, pois não é injetora.
d) A função é bijetora.
Alternativa **d**.

Exercício 19

I. V, pois $f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot (-g(-x)) = -f(x) \cdot g(x)$
II. V, pois $f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$
III. F, pois $g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ e, portanto, par
Alternativa **d**.

Exercício 20

Como f é bijetora, substituindo x por y temos:
$x = y^2 - 4y + 3 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{x+1}$
Porém, como $Im(f^{-1}) =]-\infty, 2]$, temos: $f^{-1} = 2 - \sqrt{x+1}$
Alternativa **a**.

Exercício 21

Como f e g são funções reais de variáveis reais, temos:
$g(f(x)) = 4x \Rightarrow g(-2x + 3) = 4x$

$\therefore g\left(-2 \cdot \frac{-x}{2} + 3\right) = -2x \Rightarrow g(x - 3 + 3) = -2(x - 3)$

$\therefore g(x) = -2x + 6$

Assim: $g^{-1}(x) = \frac{6-x}{2}$

Alternativa **b**.

Função afim

Algumas funções relacionam duas grandezas em que a variação de uma é proporcional à variação da outra. Quando isso ocorre, dizemos que a função é afim.

A função afim

- **Função afim** ou **função polinomial do 1º grau** é toda função do tipo:

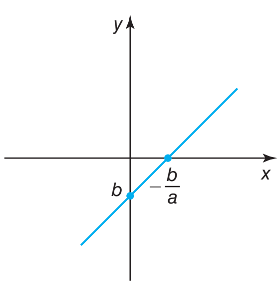
$$y = ax + b\text{, em que } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

- O gráfico de toda função afim é uma **reta**. Para construí-lo, basta representar dois pontos distintos da função no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles.

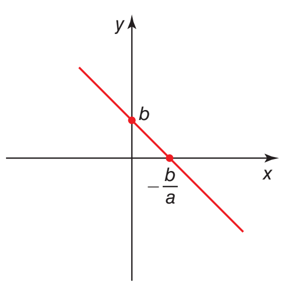
Pontos de intersecção do gráfico da função afim com os eixos coordenados

- O gráfico da função afim intercepta o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
- O gráfico da função afim intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$.

$a > 0$



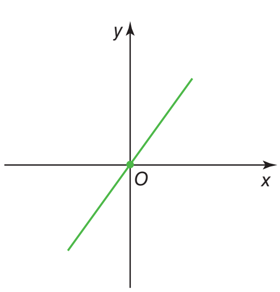
$a < 0$



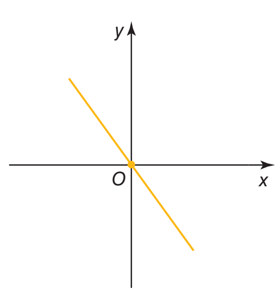
Função linear

- Toda função da forma $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$, é chamada **função linear.**
- O gráfico de uma função linear $y = ax$ é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas.

$a > 0$



$a < 0$



- Em toda função linear $y = ax$, os valores correspondentes das variáveis x e y são diretamente proporcionais.

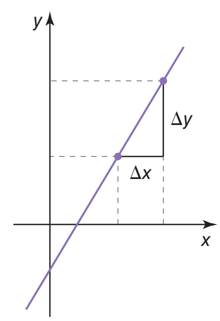
Análise da função afim

Taxa de variação

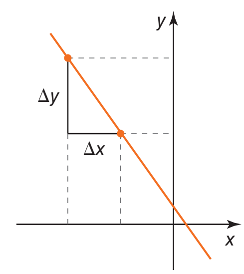
- A **taxa de variação** da função afim $y = ax + b$ é a constante a, não nula, obtida da seguinte maneira:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$a > 0$



$a < 0$



- Se duas funções afins têm a mesma taxa de variação, então as retas que as representam são **paralelas**.

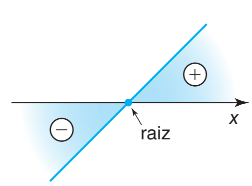
Crescimento e decrescimento

Dada a função $f(x) = ax + b$, temos:

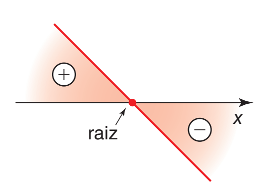
- f é **crescente** $\Leftrightarrow$ $a > 0$
- f é **decrescente** $\Leftrightarrow$ $a < 0$

Estudo do sinal da função afim

$a > 0$



$a < 0$



Inequação-produto e Inequação-quociente

Para resolver inequações-produto ou inequações-quociente, estudamos o sinal de cada função e construímos um quadro de sinais, no qual os sinais da última linha são obtidos pela regra de sinais da multiplicação ou da divisão.

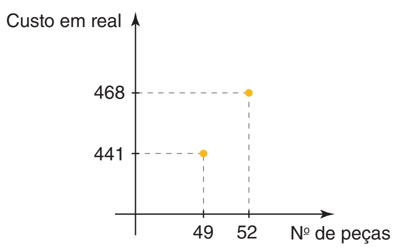
No Vestibular

1. **(Mackenzie-SP)** Os gráficos das funções $y = x + 2$ e $y = -x + 6$ definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um quadrilátero de área:

a) 12
b) 16
c) 10
d) 8
e) 14

2. **(Udesc)** Sabemos que a receita total R_T de certo produto produzido por uma família de agricultores é dada pela função $R_T(q) = q + 2$, em que q é a quantidade de unidades do produto. Determine a função do primeiro grau, custo total $C_T(q)$ deste produto; sabendo que, quando a quantidade do produto é de 3 unidades, o custo total é de R$ 4,00; e que, quando a quantidade do produto é de 4 unidades, a receita total é igual ao custo total. Faça o esboço do gráfico das funções $R_T(q)$ e $C_T(q)$.

3. **(UFPel-RS)** Muitos brasileiros sonham com empregos formais. Na falta destes, cada vez mais as pessoas precisam buscar formas alternativas de conseguir uma renda. Para isso, uma família decidiu montar uma malharia. O gráfico abaixo mostra o custo mensal de produção dessa empresa.

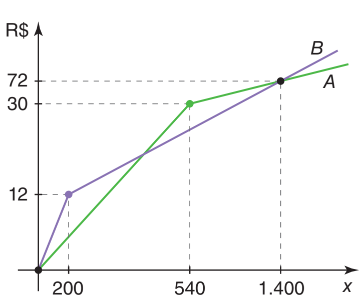


Sabendo que as peças são vendidas por R$ 19,50 e que a família almeja um lucro mensal de R$ 4.200,00, o número de peças produzidas e vendidas, para atingir esse fim, deverá ser:

a) 215
b) 400
c) 467
d) 525
e) 494
f) I.R.

(*Nota*: Admita que o custo C para x peças produzidas é uma função afim.)

4. **(Mackenzie-SP)** A figura mostra os esboços dos gráficos das funções $A(x)$ e $B(x)$, que fornecem os preços que as copiadoras, A e B, cobram para fazer x cópias de uma folha. Para fazer 360 cópias, a copiadora A cobra:

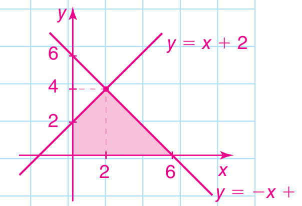


a) R$ 7,00 a menos que B.
b) R$ 5,00 a mais que B.
c) R$ 10,00 a menos que B.
d) $\frac{3}{2}$ do que cobra B.
e) O mesmo preço cobrado por B.

Exercício 1

Inicialmente, vamos determinar o ponto de intersecção dos gráficos que representam as duas funções dadas. Para isso, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 4$$



Assim, obtemos o gráfico ao lado.

A área do quadrilátero em destaque é igual à soma da área de um trapézio de base maior 4, base menor 2 e altura 2 com a área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 4. Ou seja, a área é dada por:

$$\frac{(4 + 2) \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 14$$

Alternativa **e**.

Exercício 2

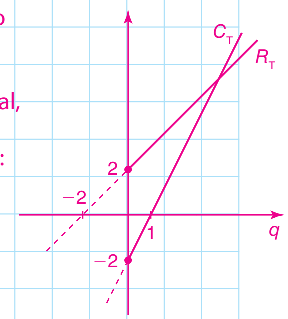
Como a receita total é igual ao custo total, para 4 unidades temos que:

$R_T(4) = C_T(4) = 4 + 2 = 6$

Assim, o gráfico da função custo total, $C_T(q) = aq + b$, passa pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(4, 6)$. Substituindo, temos:

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 3 + b \\ 6 = a \cdot 4 + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -2$$

Assim, a função custo total é $C_T(q) = 2q - 2$.



Exercício 3

Admitindo que a função custo C seja afim, temos: $C(x) = ax + b$, com $C(x)$ em real e x representando o número de peças. Como o gráfico de C passa pelos pontos (49, 441) e (52, 468), temos:

$$\begin{cases} 441 = a \cdot 49 + b \\ 468 = a \cdot 52 + b \end{cases} \Rightarrow a = 9 \text{ e } b = 0$$

Logo, $C(x) = 9x$, $C(1) = 9$ e, portanto, o lucro em real por cada camiseta é $19{,}5 - 9 = 10{,}5$.

Para que a família tenha um lucro de R$ 4.200,00, o número de camisetas produzidas e vendidas deverá ser: $\frac{4.200}{10{,}5} = 400$

Alternativa **b**.

Exercício 4

Sejam $A(x)$ e $B(x)$, respectivamente, as funções que fornecem os preços, em real, das copiadoras A e B em função do número x de cópias.

Para $x \in [0, 540]$ a função $A(x)$ é representada por uma função linear com taxa de variação igual a

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 0}{540 - 0} = \frac{1}{18}$. Assim, para esse domínio, temos

$A(x) = \frac{x}{18}$ e, portanto, $A(360) = \frac{360}{18} = 20$.

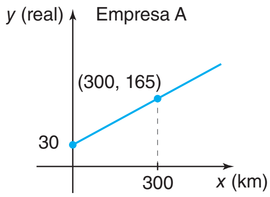
Para $x \in [200, 1.400]$, a função $B(x) = ax + b$ é representada por uma função afim cujo gráfico passa pelos pontos $P(200, 12)$ e $Q(1.400, 72)$. Assim, temos:

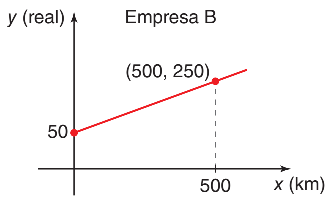
$$\begin{cases} 12 = a \cdot 200 + b \\ 72 = a \cdot 1.400 + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{20} \text{ e } b = 2$$

Logo, para esse domínio, temos $B(x) = \frac{x}{20} + 2$ e, portanto, $B(360) = 20$.

Alternativa **e**.

5. **(Unir-RO)** Duas empresas (A e B), locadoras de veículos de passeio, apresentaram o valor da locação de um mesmo carro pelos gráficos abaixo.

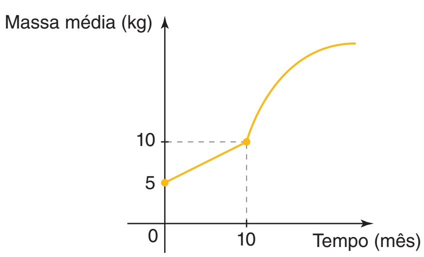




Considere y o valor pago, em real, pela locação desse veículo e x a quantidade de quilômetros rodados. A partir dessas informações, é correto afirmar:

a) A empresa A cobra 0,50 centavos por quilômetro rodado acrescido de uma taxa fixa de 50 reais.
b) A empresa B cobra somente a quilometragem rodada.
c) Para rodar 400 km, o valor cobrado pela empresa A é igual ao cobrado pela B.
d) Para rodar uma distância de 300 km é mais vantajoso alugar o carro da empresa B.
e) Para rodar uma distância de 500 km é mais vantajoso alugar o carro da empresa A.

6. **(UFSCar-SP)** O gráfico esboçado representa a massa média, em quilograma, de um animal de determinada espécie em função do tempo *t* de vida, em mês.



Para $0 \leqslant t \leqslant 10$ o gráfico é um segmento de reta.

a) Determine a expressão da função cujo gráfico é esse segmento de reta e calcule a massa média do animal com 6 meses de vida.
b) Para $t \geqslant 10$ meses, a expressão da função que representa a massa média do animal, em quilogramas, é $P(t) = \dfrac{120t - 1.000}{t + 10}$. Determine o intervalo de tempo *t* para o qual $10 < P(t) \leqslant 70$.

7. **(PUC-SP)** Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\dfrac{1}{x - 20} \leqslant \dfrac{1}{12 - x}$?

a) dezesseis **c)** quatorze **e)** menos de treze
b) quinze **d)** treze

8. **(Unesp)** Um laboratório farmacêutico tem dois depósitos, D_1 e D_2. Para atender a uma encomenda, deve enviar 30 caixas iguais contendo um determinado medicamento à drogaria A e 40 caixas do mesmo tipo e do mesmo medicamento à drogaria B. Os gastos com transporte, por cada caixa de medicamento, de cada depósito para cada uma das drogarias, estão indicados na tabela.

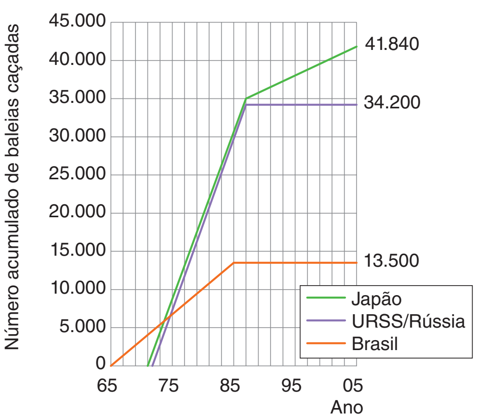
	A	B
D1	R$ 10, 00	R$ 14, 00
D2	R$ 12, 00	R$ 15, 00

Seja *x* a quantidade de caixas do medicamento, do depósito D_1, que deverá ser enviada à drogaria A e *y* a quantidade de caixas do mesmo depósito que deverá ser enviada à drogaria B.

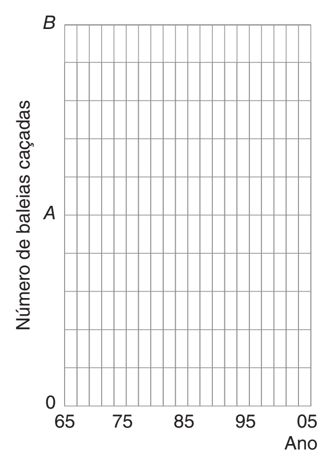
a) Expressar:
- em função de *x*, o gasto G_A com transporte para enviar os medicamentos à drogaria A;
- em função de *y*, o gasto G_B com transporte para enviar os medicamentos à drogaria B;
- em função de *x* e *y*, o gasto total G para atender as duas drogarias.

b) Sabe-se que no depósito D_1 existem exatamente 40 caixas do medicamento solicitado e que o gasto total G para se atender a encomenda deverá ser de R$ 890,00, que é o gasto mínimo nas condições dadas. Com base nisso, determine, separadamente, as quantidades de caixas de medicamentos que sairão de cada depósito, D_1 e D_2, para cada drogaria, A e B, e os gastos G_A e G_B.

9. **(Unicamp-SP)** Na década de 1960, com a redução do número de baleias de grande porte, como a baleia-azul, as baleias minke antárticas passaram a ser o alvo preferencial dos navios baleeiros que navegam no hemisfério sul. O gráfico abaixo mostra o número **acumulado** aproximado de baleias minke antárticas capturadas por barcos japoneses, soviéticos/russos e brasileiros, entre o final de 1965 e o final de 2005.



a) A seguir, trace a curva que fornece o número aproximado de baleias caçadas anualmente por barcos soviéticos/russos entre o final de 1965 e o final de 2005. Indique também os valores numéricos associados às letras *A* e *B* para que seja possível identificar a escala adotada para o eixo vertical.



b) Calcule o número aproximado de baleias caçadas pelo grupo de países indicado no gráfico entre o final de 1965 e o final de 1990.

Exercício 5

A taxa de variação da função na empresa A é
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{165 - 30}{300 - 0} = 0{,}45$, e seu coeficiente linear é 30.
Assim, a função $A(x)$, que representa o valor pago, em real, em função da quilometragem x, é $A(x) = 30 + 0{,}45x$.
A taxa de variação da função na empresa B é
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{250 - 50}{500 - 0} = 0{,}4$, e seu coeficiente linear é 50.
Assim, a função $B(x)$, que representa o valor pago, em real, em função da quilometragem x, é $B(x) = 50 + 0{,}4x$.
Logo, para rodar 400 km, a empresa A cobra, em real, $A(400) = 30 + 180 = 210$, e a empresa B cobra, em real, $B(400) = 50 + 160 = 210$.
Alternativa **c**.

Exercício 6

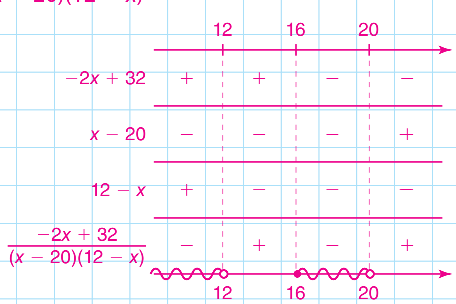
a) Como para $0 \leqslant t \leqslant 10$ o gráfico é um segmento de reta, o gráfico da função $P(t) = at + b$ passa pelos pontos $A(0, 5)$ e $B(10, 10)$. Substituindo, temos:
$\begin{cases} 5 = a \cdot 0 + b \\ 10 = a \cdot 10 + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ e $b = 5$
Assim, a expressão da função para esse intervalo de tempo t é:

$$P(t) = \frac{1}{2} \cdot t + 5 \text{ e } P(6) = 8 \text{ kg}$$

b) Como $t > 0$, temos que $t + 10 > 0$. Assim:
$10 < \frac{120t - 1.000}{t + 10} \leqslant 70 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10t + 100 < 120t - 1.000 \leqslant 70t + 700$
$\therefore 100 < 110t - 1.000$ e $50t \leqslant 1.700 \Rightarrow$
$\Rightarrow t > 10$ e $t \leqslant 34$
$\therefore 10 < t \leqslant 34$

Exercício 7

$\frac{1}{x - 20} \leqslant \frac{1}{12 - x} \Rightarrow \frac{1}{x - 20} - \frac{1}{12 - x} \leqslant 0$
$\therefore \frac{-2x + 32}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0$



Portanto: $x < 12$ ou $16 \leqslant x < 20$
Alternativa **b**.

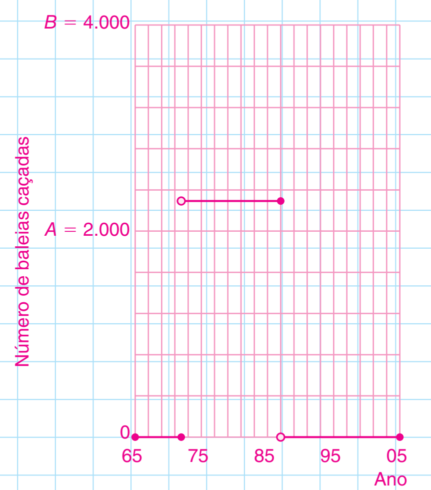
Exercício 8

a) Para a drogaria A, serão enviadas x caixas do depósito D_1 e, portanto, $30 - x$ caixas do depósito D_2. Assim, o gasto G_A com transporte será:
$G_A = 10x + 12(30 - x) = -2x + 360$
Para a drogaria B, serão enviadas y caixas do depósito D_1 e, portanto, $40 - y$ caixas do depósito D_2. Assim, o gasto G_B com transporte será:
$G_B = 14y + 15(40 - y) = -y + 600$
Assim, o gasto total é:
$G_A + G_B = -2x - y + 960$

b) Para o gasto ser mínimo, devemos encomendar todas as caixas possíveis do depósito D_1, ou seja, $x + y = 40$ (I).
Por outro lado, como o gasto total é 890 reais, temos $2x - y + 960 = 890$ (II).
Resolvendo o sistema formado pelas equações I e II, temos:
$\begin{cases} x + y = 40 \\ -2x - y = -70 \end{cases} \Rightarrow x = 30$ e $y = 10$
Logo, serão enviadas 30 caixas de D_1 e 0 caixa de D_2 para a drogaria A; 10 caixas de D_1 e 30 caixas de D_2 para a drogaria B; e os gastos serão, respectivamente, $G_A = 300$ reais e $G_B = 590$ reais.

Exercício 9

a) Podemos admitir que, entre os anos de 1965 e 1972 e entre 1987 e 2005, o número de baleias caçadas anualmente é nulo.
Entre 1972 e 1987, o gráfico representa um segmento de reta; assim, sua taxa de variação é:
$\frac{34.200 - 0}{1.987 - 1.972} = 2.280$



b) Entre o final de 1987 e o final de 2005, o número de baleias caçadas por ano pelos barcos japoneses foi:
$$\frac{(41.840 - 35.000)}{(2.005 - 1.987)} = \frac{6.840}{18} = 380$$
Desse modo, entre o final de 1987 e o final de 1990, o número de baleias capturadas foi aproximadamente:
$380 \cdot (90 - 87) = 380 \cdot 3 = 1.140$
Somando esse valor ao que o Japão caçou entre 1965 e 1987, obtemos:
$35.000 + 1.140 = 36.140$
Entre 1965 e 2005, os barcos brasileiros caçaram 13.500 baleias, enquanto os barcos soviéticos abateram 34.200 baleias.
Assim, concluímos que, entre 1965 e 2005, o número de baleias caçadas foi aproximadamente:
$13.500 + 34.200 + 36.140 = 83.840$

Função quadrática

Diversos fenômenos na natureza podem ser modelados por uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola.

A função quadrática

- **Função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** é toda função do tipo:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ em que } \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

- A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são r_1 e r_2, pode ser escrita na **forma fatorada**:

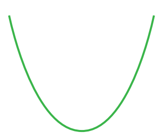
$$y = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Gráfico da função quadrática

O gráfico de toda função quadrática é uma **parábola** com eixo de simetria vertical.

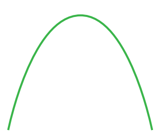
Concavidade da parábola

$a > 0$



concavidade voltada para cima

$a < 0$



concavidade voltada para baixo

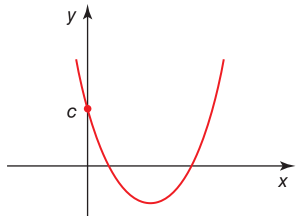
Intersecção com o eixo *Ox*

Os pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox*, quando existirem, são os pontos cujas abscissas são as raízes da função. Para encontrá-los, basta atribuir o valor zero à variável *y* na equação $y = ax^2 + bx + c$. Assim:

- existem 2 pontos de intersecção $\Leftrightarrow \Delta > 0$
- existe 1 ponto de intersecção $\Leftrightarrow \Delta = 0$
- não existe ponto de intersecção $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Intersecção com o eixo *Oy*

Para obter o ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*, atribuímos o valor zero à variável *x* da função $y = ax^2 + bx + c$. Assim, o ponto de intersecção com o eixo *Oy* é $(0, c)$.



Vértice da parábola

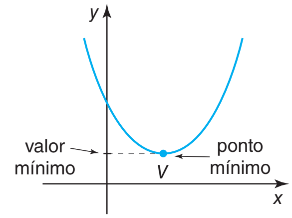
- O vértice *V* da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, é:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

A abscissa do vértice é a média aritmética entre as duas raízes da função, caso existam.

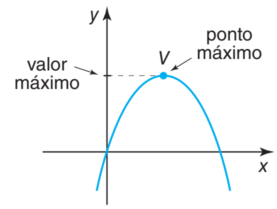
- O vértice *V* de uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é ponto mínimo ou ponto máximo.

$a > 0$



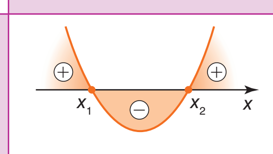
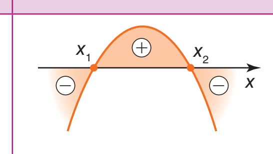
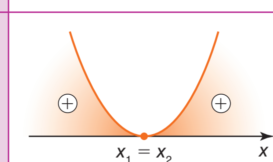
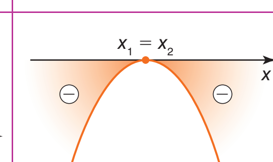
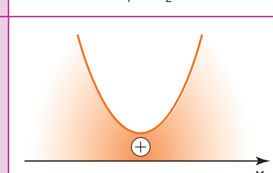
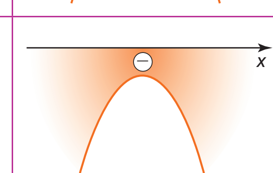
Nesse caso, *V* é **ponto mínimo** e a ordenada de *V* é o **valor mínimo** de *f*.

$a < 0$



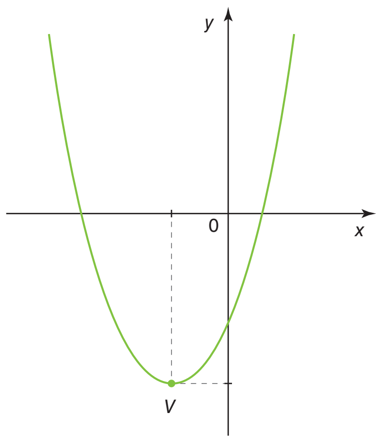
Nesse caso, *V* é **ponto máximo** e a ordenada de *V* é o **valor máximo** de *f*.

Estudo do sinal da função quadrática

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

No Vestibular

1. **(Insper)** O gráfico da função dada pela lei $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é a parábola esboçada abaixo, que tem vértice no ponto V.



A partir do esboço, pode-se concluir que:

a) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$
b) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
c) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$
d) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$
e) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$

2. **(Unifor-CE)** Seja f uma função quadrática cujas raízes são -4 e 3. Se o gráfico de f intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -2)$, então:

a) O conjunto imagem de f é o intervalo $\left[-\frac{49}{24}, +\infty\right[$.
b) f é crescente para todo $x > -2$.
c) f é decrescente para todo $x < 0$.
d) f é positiva para todo $x > 0$.
e) O valor máximo de f é $\frac{7}{8}$.

3. **(Unicamp-SP)** Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (y) do peso em função de sua distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela a seguir. Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

a) Determine os valores de a, b e c.
b) Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.

Exercício 1

A parábola possui concavidade voltada para cima; assim, $a > 0$. Além disso, o termo independente c é negativo, pois a parábola corta o eixo Oy abaixo do ponto O.

Como $x_V = -\frac{b}{2a} < 0$ e $a > 0$, temos: $b > 0$

Alternativa **b**.

Exercício 2

Seja $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ a função quadrática em que r_1 e r_2 são as raízes. Assim:

$f(x) = a(x + 4)(x - 3)$. Como $(0, -2)$ pertence a f, temos:

$-2 = a(0 + 4)(0 - 3) \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

Logo, $f(x) = \frac{1}{6}(x + 4)(x - 3)$. Assim, o gráfico de f possui concavidade voltada para cima, e seu vértice é $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{24}\right)$.

Alternativa **a**.

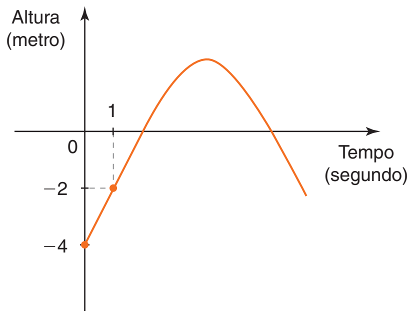
Exercício 3

a) Da tabela, podemos afirmar que os pontos (1; 2), (2; 2,7) e (3; 3,2) pertencem à função $y(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 2{,}7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 3{,}2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}1 \\ b = 1 \\ c = 1{,}1 \end{cases}$$

b) A função que representa a trajetória parabólica é $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}1$, cujas raizes são $x = -1$ ou $x = 11$. Assim, a distância total alcançada pelo peso é 11 m.

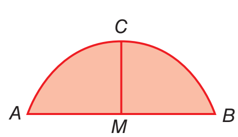
4. **(Vunesp)** O gráfico representa uma função f que descreve, aproximadamente, o movimento (em função do tempo t em segundo), por um certo período, de um golfinho que salta e retorna à água, tendo o eixo das abscissas coincidente com a superfície da água.



a) Sabendo que a parte negativa do gráfico de f é constituída por segmentos de retas, determine a expressão matemática de f nos instantes anteriores à saída do golfinho da água. Em que instante o golfinho saiu da água?

b) A parte positiva do gráfico de f é formada por parte de uma parábola, dada por $f(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t - 9$. Determine quantos segundos o golfinho ficou fora da água e a altura máxima, em metro, atingida no salto.

5. **(Unifesp)** A figura mostra um arco parabólico ACB de altura $CM = 16$ cm, sobre uma base AB de 40 cm. M é o ponto médio de AB.



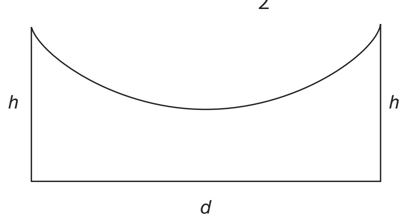
A altura do arco em centímetro, em um ponto da base que dista 5 cm de M, é:

a) 15
b) 14
c) 13
d) 12
e) 10

6. **(Fuvest-SP)** Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola. Suponha também que:

i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;

ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.



Se $h = 3\frac{d}{8}$, então d vale:

a) 14
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

7. **(UFPel-RS)** Na gravura abaixo, é possível observar trajetórias parabólicas descritas pela água jogada por meio de duas bombas.
Considere que as bombas e os pontos de alcance atingidos pela água sejam colineares, que a primeira bomba esteja localizada na origem de um sistema cartesiano e que o ponto mais alto da curva formada pelo jato dessa bomba tenha coordenadas (1, 2).

MARCOS HIRAKAWA/TURBORF/IMAGEPLUS

Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar que a função que determina a parábola representada no jato-d´água e o ponto no qual esse jato chega ao solo são, respectivamente:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$; $P(2, 0)$
b) $f(x) = -2x^2 - 4x$; $P(2, 0)$
c) $f(x) = +2x^2 + 4x$; $P(-2, 0)$
d) $f(x) = -2x^2 - 4x$; $P(-2, 0)$
e) $f(x) = -2x^2 + 4x$; $P(2, 0)$
f) I.R.

8. **(UFT-TO)** Uma empresa do ramo de confecções produz e comercializa calças jeans. Se x representa a quantidade produzida e comercializada (em milhares de unidades) e $L(x) = -x^2 + 48x - 10$ representa o lucro (em milhares de reais) da empresa para x unidades, então o lucro máximo que a empresa poderá obter é:

a) R$ 566.000,00
b) R$ 423.000,00
c) R$ 653.000,00
d) R$ 745.000,00
e) R$ 358.000,00

9. **(UFBA)** Em um terreno plano e horizontal, está fixado um mastro vertical com 13,5 metros de altura. Do topo do mastro, é lançado um projétil, descrevendo uma trajetória de modo que sua altura, em relação ao terreno, é uma função quadrática de sua distância à reta que contém o mastro. O projétil alcança a altura de 16 metros, quando essa distância é de 3 metros, e atinge o solo, quando a distância é de 27 metros. Determine, em metro, a altura máxima alcançada pelo projétil.

10. **(Mackenzie-SP)** Se $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$ é o máximo de uma função quadrática f e se $(-1, 0)$ é um ponto do gráfico de f, então $f(0)$ é igual a:

a) 5
b) 4
c) 3
d) -1
e) -2

Exercício 4

a) A reta de equação $f(x) = ax + b$ passa pelos pontos $(0, -4)$ e $(1, -2)$. Substituindo, temos:

$$\begin{cases} -4 = a \cdot 0 = b \\ -2 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Assim, a expressão matemática que representa os instantes anteriores à saída do golfinho é $f(x) = 2x - 4$.
O golfinho sai da água no instante em que $f(x) = 0$:
$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
Ou seja, o golfinho sai da água no instante 2 segundos.

b) O tempo, em segundo, que o golfinho ficou fora da água é dado pelo módulo da diferença entre as raízes da função $f(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t - 9$. Assim:

$f(t) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{4}t^2 + 6t - 9 = 0$

$\therefore t = 6$ ou $t = 2$

Portanto, o golfinho ficou $6 - 2 = 4$, ou seja, 4 segundos fora d'água.
Por outro lado, a altura máxima, em metro, atingida é:

$f(4) = -\frac{3}{4} \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - 9 = 3$

Exercício 5

Associando o arco parabólico com um sistema cartesiano ortogonal, em que M seja a origem desse sistema, a função quadrática que representa tal curva é $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, em que $r_1 = 20$ e $r_2 = -20$.
Como o ponto C (0,16) pertence ao gráfico de f, temos:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - 20)(x + 20) \\ f(0) = 16 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$$

Logo: $f(x) = -\frac{1}{25}(x - 20)(x + 20)$ e $f(5) = 15$

Alternativa **a.**

Exercício 6

Vamos associar um sistema de eixos cartesianos ortogonais, em que o eixo y coincida com o eixo de simetria da parábola. Assim, os pontos de coordenadas

$(0, 2)$, $\left(\frac{d}{2}, h\right)$ e $\left(\frac{d}{4}, \frac{h}{2}\right)$ pertencem à função

$f(x) = ax^2 + bx + c$. Substituindo, temos:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ h = a \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{d}{2}\right) + c \\ \frac{h}{2} = a \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{d}{4}\right) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = a \cdot \frac{d^2}{4} + 2 \\ h = 2a \cdot \frac{d^2}{16} + 4 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Como $h = 3 \cdot \frac{d}{8}$, temos $h = 6$ e $d = 16$.

Alternativa **b.**

Exercício 7

Como o esboço do gráfico representa uma parábola com concavidade para baixo, temos $a < 0$. Além disso, o ponto máximo é $(1, 2)$ e a outra raiz é $(2, 0)$. Assim, a função que representa a função descrita pela água é $f(x) = -2x^2 + 4x$.
Alternativa **e.**

Exercício 8

A abscissa do ponto máximo da função L é:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{48}{-2} = 24$

Assim, o lucro máximo, em milhar de reais, é:
$L(24) = -(24)^2 + 48 \cdot 24 - 10 = 566$
Alternativa **a.**

Exercício 9

Associando um par de eixos cartesianos ortogonais, podemos afirmar que os pontos (0; 13,5), (3; 16) e (27; 0) pertencem à função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos, então:

$$\begin{cases} 13{,}5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 16 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 0 = a \cdot 27^2 + b \cdot 27 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{18} \\ b = 1 \\ c = 13{,}5 \end{cases}$$

Logo: $f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + x + 13{,}5$, $x_v = 9$ e $f(9) = 18$

Assim, a altura máxima, em relação ao solo, é 18 m.

Exercício 10

Como $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ e -1 é uma de suas raízes, a outra raiz é $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$.

Assim, pela forma fatorada, temos:

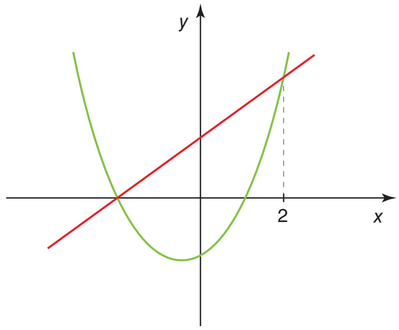
$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \Rightarrow \frac{25}{4} = a\left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(\frac{3}{2} - 4\right)$

$\therefore a = -1$

Logo: $f(x) = -1(x + 1)(x - 4) \Rightarrow f(0) = 4$

Alternativa **b.**

11. (Unifal) Na figura abaixo, têm-se os esboços dos gráficos de $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = ax + b$.



É correto afirmar que as constantes a e b são números inteiros tais que:

a) a e b são pares.
b) a e b são ímpares.
c) a é impar e b é par.
d) a é par e b é ímpar.

12. (Udesc) A taxa de evaporação de água em um reservatório depende da condição climática. Em um modelo simplificado, essa taxa, E, pode ser descrita por:

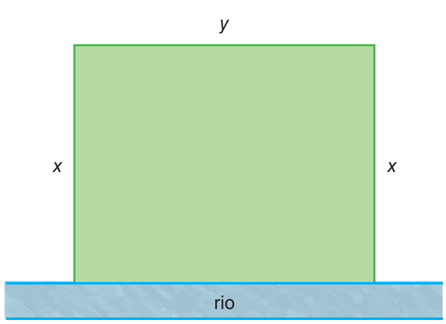
$E = v(2 - (U(x))^2) + v(U(x))$.

Sendo v a velocidade constante do vento, e para este problema vale 10 m/s; e $U(x)$ a umidade relativa do ar sendo dependente da diferença entre concentração de ar e vapor de água por volume (variável x) definida por $U(x) = x + 1$.

Determine:

a) Para que valor de x a taxa de evaporação é zero?
b) Qual o valor de x em que a taxa de evaporação é máxima?
c) Qual o valor máximo da taxa de evaporação?
d) Se $x = 0$, qual a taxa de evaporação?

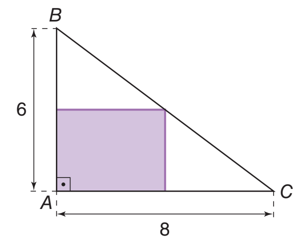
13. (UFG-GO) Para a construção de uma pousada, deseja-se cercar três lados de um terreno situado às margens de um rio, de modo que ele fique com a forma retangular, conforme a figura abaixo.



Sabe-se que o metro linear da cerca paralela ao rio custa R$ 12,00, das cercas perpendiculares ao rio custam R$ 8,00 e que o proprietário irá gastar R$ 3.840,00 com a construção total da cerca.

Nessas condições, construa o gráfico da função que representa a área do terreno, em função da dimensão x, e determine as dimensões do terreno para que a sua área seja máxima.

14. (Mackenzie-SP) O retângulo assinalado na figura possui área máxima.



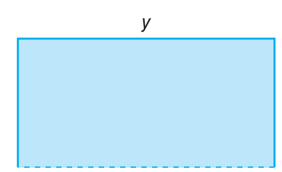
Essa área é igual a:

a) 12 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 8 **e)** 14

15. (Unioeste-PR) Uma fábrica de calçados vende 200 pares por semana se o preço for mantido em R$ 20,00 o par. Ela constatou que, em média, para cada real de aumento no preço de venda dos sapatos há uma redução semanal de quatro pares no total das vendas. Com base nestas informações pode-se concluir que, para que a empresa tenha a maior receita semanal possível, ela deverá elevar o preço dos calçados para:

a) R$ 25,00
b) R$ 31,00
c) R$ 30,00
d) R$ 28,00
e) R$ 35,00

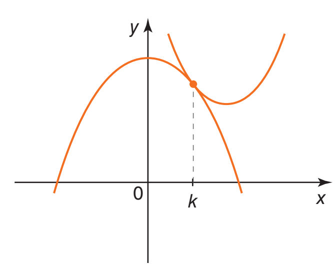
16. (Unesp) Em um acidente automobilístico, foi isolada uma região retangular, como mostrado na figura.



Se 17 m de corda (esticada e sem sobras) foram suficientes para cercar 3 lados da região, a saber, os dois lados menores de medida x e um lado maior de medida y, dados em metro, determine:

a) A área (em m²) da região isolada, em função do lado menor.
b) A medida dos lados x e y da região retangular, sabendo que a área da região era de 36 m² e a medida do lado menor era um número inteiro.

17. (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 4x + m$, que se interceptam em um único ponto de abscissa k.



O valor de $k + m$ é:

a) 8
b) 6,5
c) 5,5
d) 7
e) 6

Exercício 11

Como o ponto de abscissa 2 pertence aos gráficos de f e g, temos: $f(2) = g(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4$.
Por outro lado, a menor raiz de f é raiz também de g.
Assim:
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$
$\therefore x = -2$ ou $x = 1$
Logo: $g(-2) = 0$
Substituindo os valores em $g(x) = ax + b$, temos:

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 2 + b \\ 0 = a \cdot (-2) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Portanto: $g(x) = x + 2$
Alternativa **c**.

Exercício 12

Para $v = 10$ m/s e $U(x) = x + 1$, a taxa E de evaporação é:
$E(x) = 10(2 - (x + 1)^2) + 10(x + 1) = -10x^2 - 10x + 20$

a) Para $E(x) = 0$, temos $x = -2$ ou $x = 1$.

b) $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$

c) $f(x_V) = -10\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 10\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 20 = 22{,}5$

d) $E(0) = 20$

Exercício 13

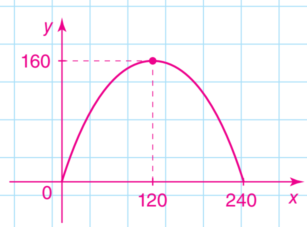
O custo C, em real, é dado por $C = 2x \cdot 8 + y \cdot 12$.
Como o custo é R$ 3.840,00, temos:

$$16x + 12y = 3.840 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 320$$

Assim, a função área é:

$$A(x) = y \cdot x = \left(-\frac{4}{3}x + 320\right)x = -\frac{4}{3}x^2 + 320x,$$

cujo gráfico está esboçado abaixo.



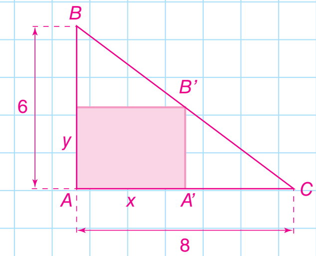
Para a área ser máxima, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{320}{-\frac{8}{3}} = 120 \text{ e } y_V = 160$$

Logo, o terreno medirá 160 m paralelamente ao rio e 120 m perpendicularmente ao rio.

Exercício 14

Sejam x e y as dimensões do retângulo.



Como $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ (caso AA), temos:

$$\frac{6}{8} = \frac{y}{8 - x} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6$$

Logo, a área $A(x)$ do retângulo assinalado é:

$$A(x) = x \cdot y = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$

e, assim, possui área máxima:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{-3} = 12$$

Alternativa **a**.

Exercício 15

Seja x o valor numérico em real do aumento no preço do par de sapatos. Assim, cada par custará $(20 + x)$ e, consequentemente, a fábrica venderá, por semana, $(200 - 4x)$. Logo, a função receita semanal $R(x)$ é:
$R(x) = (200 - 4x)(20 + x) = -4x^2 + 120x + 4.000$,
cujo valor máximo é obtido quando x assume o valor

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-8} = 25$$

Alternativa **a**.

Exercício 16

a) O comprimento C de corda necessário para isolar a região é $C = 2x + y$, com x e y em metro.
Como $C = 17$, temos: $2x + y = 17 \Rightarrow y = 17 - 2x$.
Sendo $A(x)$ a área, em metro quadrado, da região em função do menor lado, temos:
$A(x) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x(17 - 2x) = -2x^2 + 17x$

b) Para $A(x) = 36$, temos:
$-2x^2 + 17x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 4{,}5$.
Porém, como x é inteiro, $x = 4$ m e, consequentemente, $y = 9$ m.

Exercício 17

Como os gráficos de f e g têm um único ponto de intersecção, o sistema formado por $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 4x + m$ deverá ter apenas uma solução. Assim, temos:

$$\begin{cases} f(x) = 4 - x^2 \\ g(x) = x^2 - 4x + m \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x + m - 4 = 0 \text{ (I)}$$

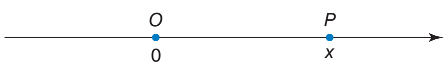
Para que o sistema tenha uma única solução, a equação (I) deverá ter uma única raiz, ou seja:
$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 8m + 32 = 0$
$\therefore m = 6$
Substituindo em (I), temos $x = k = 1$.
Portanto: $k + m = 1 + 6 = 7$
Alternativa **d**.

Função modular

Em pesquisas de opinião, é comum informar a margem de erro; por exemplo, dois pontos percentuais, para mais ou para menos. Essa informação pode ser associada ao conceito de módulo de um número real.

Módulo de um número real

- Considere, no eixo real de origem O, um ponto P de abscissa x.



Chama-se **módulo** ou **valor absoluto** de x, que indicamos por $|x|$, a distância entre os pontos P e O.

- Para qualquer número real x, temos:

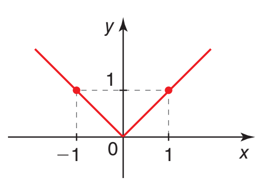
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A função modular

- Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que associa cada número real x ao seu módulo. Assim:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

- Para esboçar o gráfico da função modular, estudamos cada uma das sentenças separadamente. A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função modular.



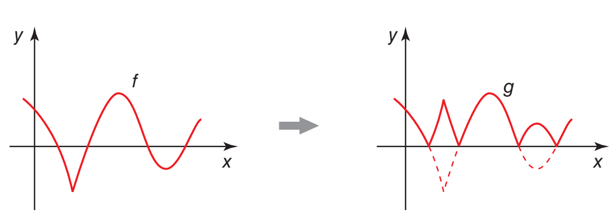
Esboço do gráfico por reflexão

Outro recurso para a construção de gráficos de funções modulares é utilizar a ideia de reflexão.

Seja uma função f representada pelo gráfico abaixo. Vamos construir o gráfico de $g(x) = |f(x)|$ a partir do gráfico de f.

- Quando $f(x) \geqslant 0$, o gráfico de g é o próprio gráfico de f.
- Quando $f(x) < 0$, o gráfico de g é o gráfico de f refletido em relação ao eixo Ox, ou seja, $g(x) = -f(x)$.

Assim:



Esboço do gráfico por translação

- Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = k + |g(x)|$, em que $k \neq 0$ é uma constante real e $h(x) = |g(x)|$, procedemos da seguinte maneira:
  - se $k > 0$, transladamos verticalmente para cima, em k unidades, o gráfico de h.
  - se $k < 0$, transladamos verticalmente para baixo, em k unidades, o gráfico de h.
- Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = |g(x + k)|$, em que $k \neq 0$ é uma constante real e $h(x) = |g(x)|$, procedemos da seguinte maneira:
  - se $k > 0$, transladamos horizontalmente para a esquerda, em k unidades, o gráfico de h.
  - se $k < 0$, transladamos horizontalmente para a direita, em k unidades, o gráfico de h.

Esboço do gráfico pelo estudo do sinal da função

Para esboçar o gráfico de uma função do tipo $f(x) = |g_1(x)| \pm |g_2(x)| \pm |g_3(x)| \pm ... \pm |g_n(x)|$, podemos eliminar os módulos por meio do estudo de sinal das funções g_1, g_2, g_3, ... e g_n, obtendo, assim, uma função definida por mais de uma sentença.

Propriedades do módulo

Para quaisquer números reais x e y e para uma constante real positiva d, temos:

- $|x| \geqslant 0$
- $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$
- $|x| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant x \leqslant d$
- $|x| \geqslant d \Leftrightarrow x \leqslant -d$ ou $x \geqslant d$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Usando essas propriedades resolvemos equações e inequações modulares.

No Vestibular

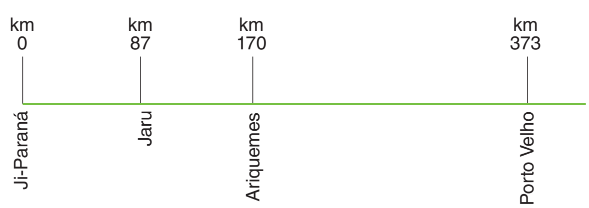
1. **(Unifal)** Na resolução da equação modular $|2x - 3| = 5$ obtém-se dois números reais cuja média aritmética é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{3}{2}$

2. **(Mackenzie-SP)** O número de soluções reais da equação $x^2 = 1 - |x|$ é:

a) 2
b) 0
c) 1
d) 4
e) 3

3. **(Unir-RO)** A figura abaixo apresenta a rota percorrida por um representante comercial durante uma viagem de negócios no trecho Ji-Paraná-Porto Velho. Ao ser indagado sobre a posição em que se encontrava num determinado momento da viagem, respondeu: "Estou num ponto da rodovia que liga Ji-Paraná a Porto Velho, cuja distância em relação à cidade de Jaru é maior que a metade da distância de Ji-Paraná a Ariquemes."



Sendo x a posição em que se encontrava o representante comercial, qual a sentença matemática que representa essa situação?

a) $|2x - 174| > 170$
b) $|x - 174| < 170$
c) $2x - 174 > 170$
d) $|174 - x| > 170$
e) $x - 174 < 170$

4. **(FGV)** A soma dos valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades: $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geqslant 1$ é:

a) 25
b) 13
c) 16
d) 18
e) 21

5. **(Mackenzie-SP)** A soma dos valores de x que satisfaz a igualdade $|x^2 - x - 2| = 2x + 2$ é:

a) 1
b) 3
c) -2
d) 2
e) -3

6. **(UFCE)** O valor mínimo da função

$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2
e) 3

Exercício 1

$|2x - 3| = 5 \iff 2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5$

$\therefore x = 4$ ou $x = -1$

Assim: $\bar{x} = \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{3}{2}$

Alternativa **d**.

Exercício 2

Como $x^2 = |x^2|$, a equação proposta é equivalente a:

$|x|^2 = 1 - |x|$, ou seja, $|x|^2 + |x| - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, obtemos:

$y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Retornando à variável original, temos:

I. $|x| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

II. $|x| = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (não convém)

Assim, concluímos que a equação proposta tem duas soluções reais.

Alternativa **a**.

Exercício 3

Seja x o quilômetro em que o representante está. Assim, sua distância até a cidade de Jaru é $|x - 87|$.

Como a metade da distância de Ji-Paraná a Arquimedes é de 85 km, temos: $|x - 87| > 85 \iff |2x - 174| > 170$

Alternativa **a**.

Exercício 4

No universo $\mathbb{Z}$, sejam S_1 e S_2 os conjuntos soluções, respectivamente, das inequações modulares $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geqslant 1$. Assim, temos:

$|x - 5| < 3 \iff -3 < x - 5 < 3$

$\therefore 2 < x < 8$

Logo: $S_1 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$|x - 4| \geqslant 1 \iff x - 4 \leqslant -1$ ou $x - 4 \geqslant 1$

$\therefore x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 5$

Logo: $S_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

Portanto, $S_1 \cap S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$, cuja soma dos elementos é 21.

Alternativa **e**.

Exercício 5

Condição de existência: $2x + 2 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -1$

Temos:

$|x^2 - x - 2| = 2x + 2 \iff$

$\iff \underbrace{x^2 - x - 2 = 2x + 2}_{(I)}$ ou $\underbrace{x^2 - x - 2 = -2x - 2}_{(II)}$

Da equação (I), obtemos:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -1$

Da equação (II), obtemos:

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1$

Logo, o conjunto solução da equação proposta é:

$S = \{4, -1, 0\}$

Alternativa **b**.

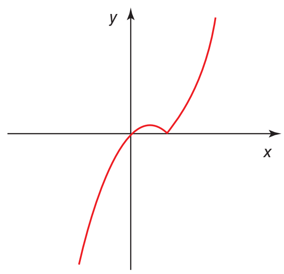
Exercício 6

Como $|x| \geqslant 0$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$, temos que o menor valor da função ocorre para $x = 2$. Assim:

$f(2) = |2 - 1| + |2 - 2| + |2 - 3| = 1 + 0 + 1 = 2$

Alternativa **d**.

7. (UFU-MG) Na figura abaixo, tem-se um esboço do gráfico da função $f(x) = x|x - 2|$.



Dentre as sentenças abaixo, a única incorreta é:

a) A função f é crescente no intervalo $[-1, 1]$.

b) As raízes de $f(x) = 0$ são 0 e 2.

c) $f(x + 1) \geqslant 0$ para todo x no intervalo $[-1, 1]$.

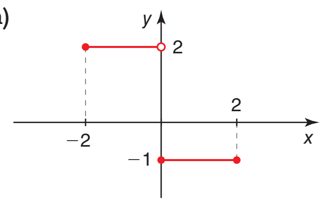
d) $f(-1) = -f(1)$

8. (Unifesp) Considere a função

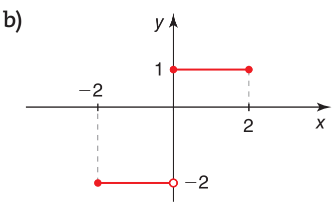
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x) = |f(x)| - 1$ terá o seguinte gráfico:

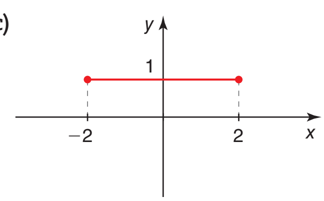
a)



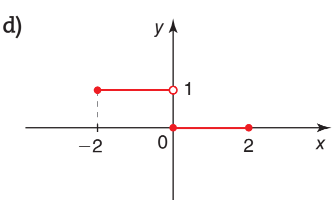
b)



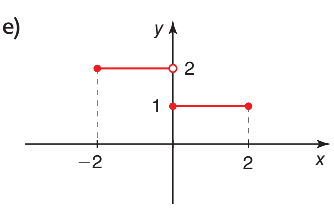
c)



d)

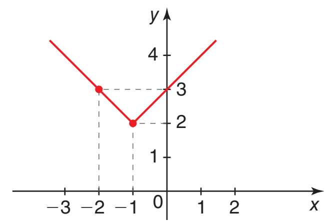


e)

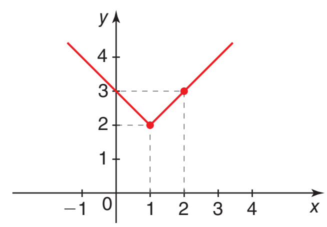


9. (Udesc) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + 2$ é:

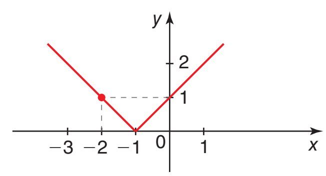
a)



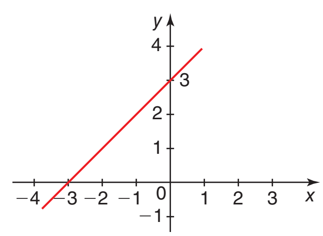
b)



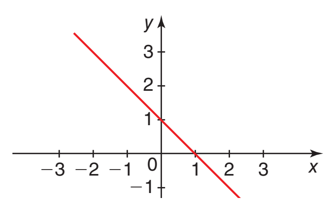
c)



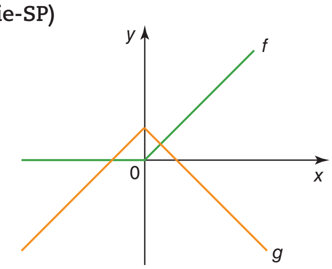
d)



e)



10. (Mackenzie-SP)



Observando, na figura, os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$, considere as afirmações:

I. Não existe $x < 0$ tal que $g(x) > f(x)$.

II. As soluções de $f(x) \geqslant g(x)$ são todas positivas.

III. A soma das raízes da equação $f(x) = g(x)$ é $\frac{1}{2}$.

Então:

a) todas são falsas.

b) todas são verdadeiras.

c) somente I e II são verdadeiras.

d) somente I e III são verdadeiras.

e) somente II e III são verdadeiras.

Exercício 7

$f(-1) = (-1) \cdot |(-1) - 2| = -3$

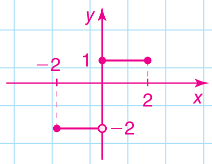
$-f(1) = (1) \cdot |(1) - 2| = -1$

Portanto, $f(-1) \neq -f(1)$.

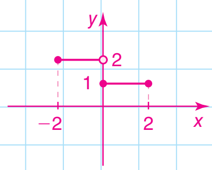
Alternativa **d.**

Exercício 8

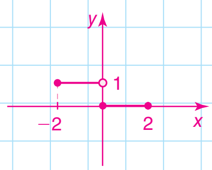
O gráfico de f é:



O gráfico de $h(x) = |f(x)|$ é obtido refletindo-se a parte negativa do gráfico de f em torno do eixo Ox, ou seja, o gráfico de h é:



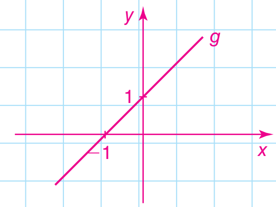
O gráfico de $g(x) = |f(x)| - 1$ é obtido deslocando-se verticalmente uma unidade para baixo o gráfico de h, ou seja, o gráfico de g é:



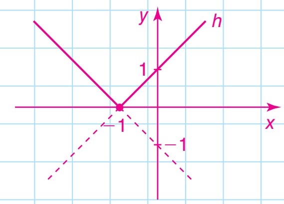
Alternativa **d.**

Exercício 9

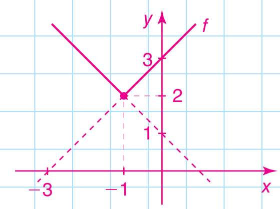
O gráfico de $g(x) = x + 1$ é:



O gráfico de $h(x) = |x + 1|$ é obtido refletindo-se a parte negativa do gráfico de g em torno do eixo Ox, ou seja, o gráfico h é:



O gráfico de $f(x) = |x + 1| + 2$ é obtido deslocando-se verticalmente 2 unidades para cima o gráfico de h, ou seja, o gráfico de f é:



Alternativa **a.**

Exercício 10

I. F, pois $g(x) > f(x)$ para $-1 < x < \frac{1}{2}$.

II. F, pois $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant \frac{1}{2}$.

III. F, pois as raízes da equação $f(x) = g(x)$ são -1 e $\frac{1}{2}$.

Alternativa **a.**

11. **(Udesc)** Determine o conjunto solução da equação:
$|x + 1| + 3|x - 2| = 8$.

12. **(ESPM-SP)** A soma das raízes reais da equação $x - |x - 2| = x \cdot |x - 1|$ é igual a;

a) -1
b) 0
c) 3
d) 2
e) 1

13. **(FGV)**

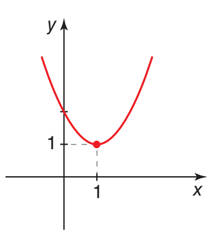
a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$.
b) Represente os pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a relação $|3x - 2y| = 6$.

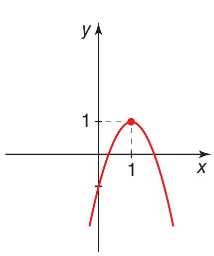
14. **(ITA-SP)** Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto:

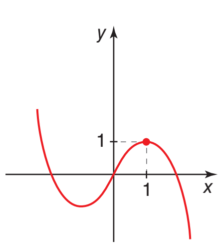
a) $[0, 1]$
b) $[-5, 6]$
c) $[-5, 0] \cup [1, \infty)$
d) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$
e) $[-5, 0] \cup [1, 6]$

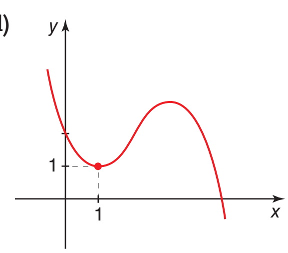
15. **(FGV)** Resolva a inequação $\sqrt{(x + 1)^2} + \sqrt{x^2} \leqslant x + 2$.

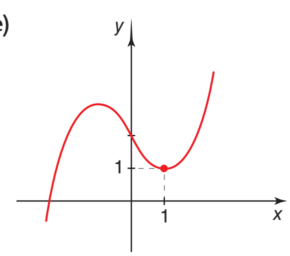
16. **(Fuvest)** O módulo $|x|$ de um número real x é definido por $|x| = x$, se $x \geqslant 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Das alternativas abaixo, a que melhor representa o gráfico da função $f(x) = x|x| - 2x + 2$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


17. **(Vunesp)** Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a < b$ e $a + b = 4$. Se o gráfico da função $y = |x - a| + |x - b|$ coincide com a função $y = 2$ no intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, calcule os valores de a e b.

Exercício 11

$$|x + 1| + 3|x - 2| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 - 3x + 6 = 8, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x + 1 - 3x + 6 = 8, \text{ se } -1 < x < 2 \\ x + 1 + 3x - 6 = 8, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x = -\dfrac{1}{2}, \text{ se } -1 < x < 2 \\ x = \dfrac{13}{4}, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases} \qquad \text{Logo: } S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right\}$$

Exercício 12

$x - |x - 2| = x \cdot |x - 1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x - 2 = x(-x + 1), \text{ se } x < 1 \\ x + x - 2 = x(x - 1), \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - x + 2 = x(x - 1), \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -1, \text{ se } x < 1 \\ x = 2 \text{ ou } x = 1, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x = 2 \text{ ou } x = -1, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

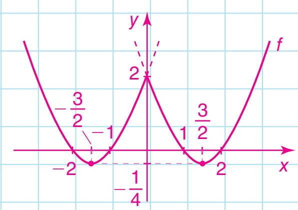
$\therefore x = 1$ ou $x = 2$

$S = \{1, 2\}$

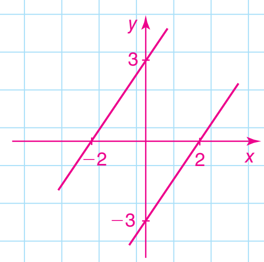
Alternativa **c**.

Exercício 13

a) $f(x) = x^2 - 3|x| + 2 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x^2 + 3x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$



b) $|3x - 2y| = 6 \Leftrightarrow 3x - 2y = 6$ ou $3x - 2y = -6$



Exercício 14

O domínio de f é o conjunto solução da inequação:
$5 - ||2x - 1| - 6| \geqslant 0$
Resolvendo essa inequação, temos:
$5 - ||2x - 1| - 6| \geqslant 0 \Leftrightarrow ||2x - 1| - 6| \leqslant 5$
$\therefore -5 \leqslant |2x - 1| - 6 \leqslant 5 \Leftrightarrow 1 \leqslant |2x - 1| \leqslant 11$

$$\therefore \begin{cases} |2x - 1| \leqslant 11 \\ |2x - 1| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -11 \leqslant 2x - 1 \leqslant 11 \\ 2x - 1 \geqslant 1 \text{ ou } 2x - 1 \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 6 \\ x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$\therefore -5 \leqslant x \leqslant 0$ ou $1 \leqslant x \leqslant 6$

Alternativa **e**.

Exercício 15

$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2} \leqslant x + 2 \Leftrightarrow |x+1| + |x| \leqslant x + 2$

$\therefore \begin{cases} -x - 1 - x \leqslant x + 2, \text{ se } x < -1 \\ x + 1 - x \leqslant x + 2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x + 1 + x \leqslant x + 2, \text{ se } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \text{ se } x < -1; \\ x \geqslant -1, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ x \leqslant 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

$\therefore -1 \leqslant x \leqslant 1$

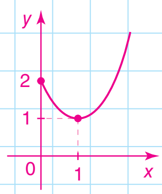
$V = [-1,1]$

Exercício 16

$f(x) = x|x| - 2x + 2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 2x + 2, \text{ se } x < 0 \end{array} \right.$

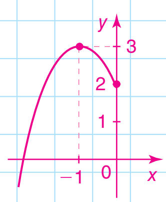
I. $f(x) = x^2 - 2x + 2$, se $x \geqslant 0$

Como $\Delta < 0$, a função não apresenta raízes reais, possui concavidade voltada para cima, intercepta o eixo y no ponto (0, 2) e possui vértice com coordenadas $V = (1,1)$. Assim, o esboço do gráfico é:



II. $f(x) = -x^2 - 2x + 2$, se $x < 0$

A função apresenta uma única raiz para $x < 0$, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo, intercepta o eixo y no ponto (0, 2) e possui vértice com coordenadas $V = (-1, 3)$. Assim, o esboço do gráfico é:



A reunião dos gráficos obtidos em I e II é o gráfico da função *f*.

Alternativa **e**.

Exercício 17

$y = |x - a| + |x - b| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ y = \begin{cases} -x + a - x + b, \text{ se } x < a \\ x - a - x + b, \text{ se } a \leqslant x \leqslant b \text{ (I)} \\ x - a + x - b, \text{ se } x > b \end{cases}$

Como o gráfico dessa função coincide com a função $y = 2$, para $a \leqslant x \leqslant b$, temos de (I):

$\begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$

Função exponencial e função logarítmica

A variação de inúmeras grandezas pode ser representada por uma sequência numérica em que o produto de um termo por uma taxa constante é o termo seguinte; por exemplo: crescimento populacional, decaimento radioativo e os montantes acumulados em uma aplicação financeira. Essas variações podem ser estudadas pela função exponencial. A inversa da função exponencial é a função logarítmica.

A função exponencial

- Chama-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que:

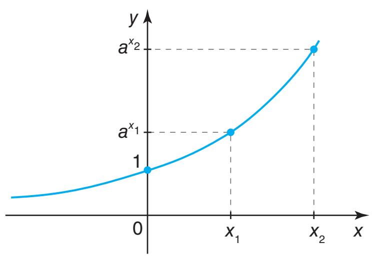
$$\boxed{f(x) = a^x, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } a \neq 1}$$

- A função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora, isto é, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

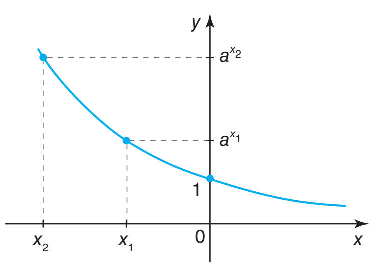
  Note que essa função também é sobrejetora, pois para qualquer y, com $y \in \mathbb{R}^*_+$, existe x, com $x \in \mathbb{R}$, tal que $y = a^x$.
- A função exponencial $f(x) = a^x$, com $\boldsymbol{a > 1}$, é **crescente**. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

$$\boldsymbol{a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1}$$



- A função exponencial $f(x) = a^x$, com $\boldsymbol{0 < a < 1}$, é **decrescente**. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

$$\boldsymbol{a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1}$$



Equação exponencial

- **Equação exponencial** é toda equação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.
- A resolução de uma equação exponencial baseia-se na equivalência:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Inequação exponencial

- **Inequação exponencial** é toda inequação que apresenta a variável no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.
- As resoluções de uma inequação exponencial baseiam-se nas equivalências:
  - Para $a > 1$: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$
  - Para $0 < a < 1$: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$

Logaritmo

- Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

$$\boxed{\log_b = a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

- Na sentença $\log_b a = x$:
  - a é o **logaritmando**;
  - b é a **base do logaritmo**;
  - x é o **logaritmo de a na base b.**
- Chama-se **logaritmo decimal** aquele cuja base é 10. Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por $\log a$ (a base 10 fica subentendida).
- Dado um número real a positivo, chama-se **logaritmo natural** do número a aquele cuja base é o número de Neper (e). Indicamos esse logaritmo natural simplesmente por $\ln a$:

$$\boxed{\ln a = \log_e a}$$

  Também chamamos o logaritmo natural de logaritmo neperiano.

Propriedades dos logaritmos

Para quaisquer números reais positivos a, b e c, com $b \neq 1$, temos:

P1. $\log_b b = 1$

P2. $\log_b 1 = 0$

P3. $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$

P4. $\log_b b^x = x$

P5. $b^{\log_b a} = a$

P6. $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$

P7. $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$

P8. $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$ (com $k \in \mathbb{R}_+^*$ e $k \neq 1$)

A função logarítmica

- Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\boxed{f(x) = \log_b x, \text{ com } b \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1}$$

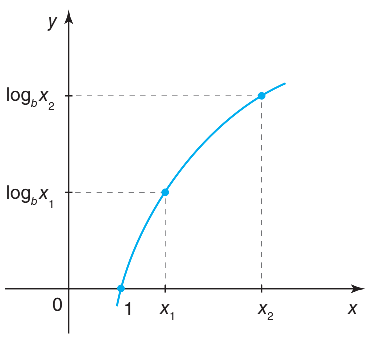
- A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é injetora, isto é, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

$$\log_b x_1 = \log_b x_2 \iff x_1 = x_2$$

Note que essa função também é sobrejetora, pois para qualquer y, com $y \in \mathbb{R}$, existe x, com $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $y = \log_b x$.

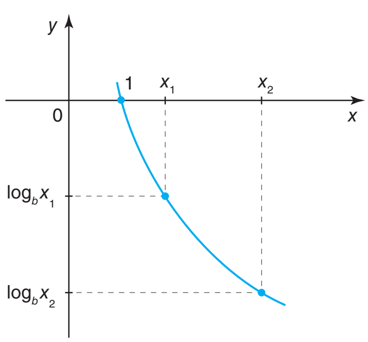
- A função logarítmica $f(x) = \log_b x$, com $\boldsymbol{b > 1}$, é **crescente**. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

$$\boldsymbol{\log_b x_2 > \log_b x_1 \iff x_2 > x_1}$$



- A função logarítmica $f(x) = \log_b x$, com $\boldsymbol{0 < b < 1}$, é **decrescente**. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência:

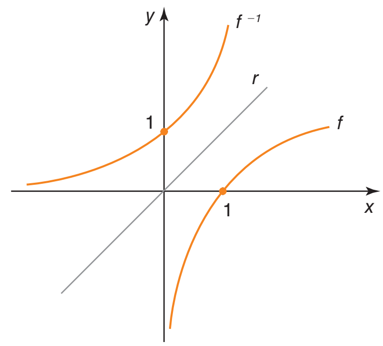
$$\boldsymbol{\log_b x_2 < \log_b x_1 \iff x_2 > x_1}$$



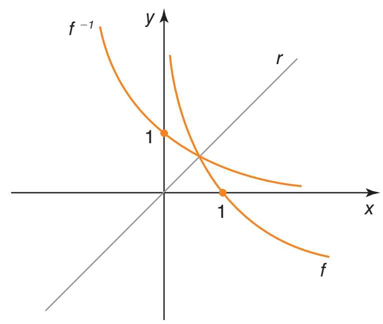
A inversa da função logarítmica

A inversa da função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é a função exponencial $f^{-1}(x) = b^x$.

$\boldsymbol{b > 1}$



$\boldsymbol{0 < b < 1}$



Note, em cada figura, que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares.

Equação logarítmica

- **Equação logarítmica** é toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.
- A resolução de uma equação logarítmica baseia-se na equivalência:

$$\log_b x_1 = \log_b x_2 \iff x_1 = x_2$$

Inequação logarítmica

- **Inequação logarítmica** é toda inequação que apresenta a variável no logaritmando ou na base de um logaritmo.
- As resoluções de uma inequação logarítmica baseiam-se nas equivalências:
  - Para $b > 1$: $\log_b x_2 > \log_b x_1 \iff x_2 > x_1$
  - Para $0 < b < 1$: $\log_b x_2 < \log_b x_1 \iff x_2 > x_1$

No Vestibular

1. **(Unifesp)** Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada hora. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo t, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de:
   a) 12 horas e meia
   b) 12 horas
   c) 10 horas e meia
   d) 8 horas
   e) 6 horas

2. **(Unioeste-PR)** Sendo a função c expressa pela lei $c(t) = -2^{2t} + 2^{t+2} + 32$, e sendo t um número real, é correto afirmar que:
   a) $c(t) > 0$ se $t \geqslant 0$
   b) c é uma função crescente.
   c) c possui uma única raiz real.
   d) o domínio de c é o conjunto dos números reais positivos.
   e) a função c pode ser escrita como $c(t) = -4^t + 2(2^{t+1}) + 32$, que pode ser simplificada para $c(t) = -2^t + 2^{t+1} + 16$, representando a mesma função.

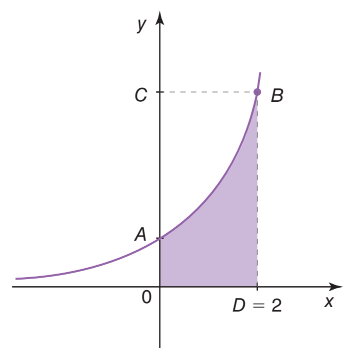
3. **(Insper)** Se $a > 1$, então a equação $a^x + ax^2 - a = 0$ tem:
   a) nenhuma solução.
   b) nenhuma ou apenas uma solução, dependendo do valor de a.
   c) nenhuma, apenas uma ou apenas duas soluções, dependendo do valor de a.
   d) apenas uma solução, independente do valor de a.
   e) apenas duas soluções, independente do valor de a.

4. **(Unioeste-PR)** Uma colônia A de bactérias cresce segundo a função $A(t) = 2 \cdot (4^t)$ e uma colônia B cresce segundo a função $B(t) = 32 \cdot (2^t)$, sendo t o tempo em hora. De acordo com estas funções, imediatamente após o instante t', o número de bactérias da colônia A é maior que o número de bactérias da colônia B. Pode-se afirmar que:
   a) t' é um número ímpar.
   b) t' é divisível por 3.
   c) o dobro de t' é maior que 7.
   d) t' é maior que 15.
   e) t' é múltiplo de 5.

5. **(Udesc)** O conjunto solução da inequação $\left(\sqrt[3]{2^{(x-2)}}\right)^{x+3} > (4)^x$ é:
   a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$
   b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 1\}$
   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$
   d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 1\}$
   e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}\}$

6. **(Ufac)** Se a e b são números reais e a função f definida por $f(x) = a \cdot 2^x + b$, para todo x real, satisfaz $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, então a imagem de f é o intervalo:
   a) $]1, +\infty[$
   b) $]0, +\infty[$
   c) $]-\infty, 1[$
   d) $[-1, 1]$
   e) $]-1, +\infty[$

7. **(UFSCar-SP)** Para estimar a área da figura $ABDO$ (colorida no desenho), onde a curva AB é parte da representação gráfica da função $f(x) = 2^x$, João demarcou o retângulo $OCBD$ e, em seguida, usou um programa de computador que "plota" pontos aleatoriamente no interior desse retângulo. Sabendo-se que dos 1.000 pontos "plotados", apenas 540 ficaram no interior da figura $ABDO$, a área estimada dessa figura, em unidades de área, é igual a:



   a) 4,32
   b) 4,26
   c) 3,92
   d) 3,84
   e) 3,52

8. **(Unioeste-PR)** Sejam x, y e z números reais positivos. A expressão $5\log x + \frac{1}{3}\log y - 2\log z$ é igual a:
   a) $\dfrac{\log x^5 \log y^3}{\log z^2}$
   b) $\log \dfrac{5xy}{6z}$
   c) $\log \dfrac{x^5 + \sqrt{y}}{z^2}$
   d) $\log \dfrac{x^5 \sqrt[3]{y}}{z^2}$
   e) $\log\left(5x + \dfrac{y}{3} - 2\right)$

9. **(UFPel-RS)** Considerando o sistema de equações $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 1 \\ 4^{y-1} = 128 \end{cases}$, o produto xy é:
   a) $3\sqrt{2}$
   b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
   c) $\dfrac{9}{2}$
   d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
   e) 3
   f) I.R.

10. **(Insper)** Quando aumentamos em 60% um número real positivo b, seu logaritmo decimal aumenta em 20%. Considerando $\log 2 = 0{,}30$, podemos concluir que:
   a) $b = 1$
   b) $b = 2$
   c) $b = 4$
   d) $b = 8$
   e) $b = 10$

11. **(UFSCar-SP)** Um paciente de um hospital está recebendo soro por via intravenosa. O equipamento foi regulado para gotejar x gotas a cada 30 segundos. Sabendo-se que esse número x é solução da equação $\log_4 x = \log_2 3$, e que cada gota tem volume de 0,3 mL, pode-se afirmar que o volume de soro que este paciente recebe em uma hora é de:
   a) 800 mL
   b) 750 mL
   c) 724 mL
   d) 500 mL
   e) 324 mL

Exercício 1

Como a massa é diretamente proporcional ao volume, para $f(t) = 2$ e $K = 128$, temos:

$f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$

$\therefore t = 12$

Alternativa **b**.

Exercício 2

Fazendo $c(t) = 0$, temos:

$-2^{2t} + 2^{t+2} + 32 = 0 \Rightarrow -(2^t)^2 + 2 \cdot (2^t) + 32 = 0$

$\therefore 2^t = \frac{-2 \pm 6}{-2} \Rightarrow \begin{cases} 2^t = 4 \\ 2^t = -2 \end{cases}$

$\therefore t = 2$

Alternativa **c**.

Exercício 3

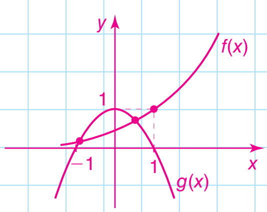
Para $a > 1$, temos:

$a^x + ax^2 - a = 0 \Rightarrow -ax^2 + a$

$\therefore a^{x-1} = -x^2 + 1$

Assim, o número de soluções da equação acima é determinado pelo número de intersecções dos gráficos de $f(x) = a^{x-1}$ e de $g(x) = -x^2 + 1$.

Logo, representando os dois gráficos num mesmo sistema cartesiano ortogonal, temos:



Alternativa **e**.

Exercício 4

Sendo t' o instante procurado, devemos ter:

$2 \cdot 4^{t'} > 32 \cdot 2^{t'} \Rightarrow 2^{t'} > 16$

$\therefore t' > 4$

Alternativa c.

Exercício 5

$\left(\sqrt[3]{2^{(x-2)}}\right)^{x+3} > (4)^x \Rightarrow 2^{\frac{(x-2)(x+3)}{3}} > 2^{2x}$

$\therefore x^2 - 5x - 6 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 6$

Alternativa **c**.

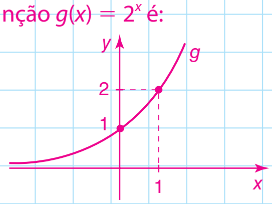
Exercício 6

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^0 + b = 0 \\ a \cdot 2^1 + b = 1 \end{cases}$

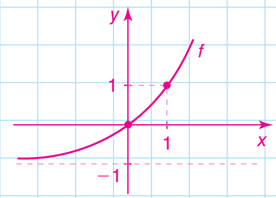
$\therefore a = 1$ e $b = -1$

Assim, temos: $f(x) = 2^x - 1$

O gráfico da função $g(x) = 2^x$ é:



O gráfico de f é uma translação vertical do gráfico de g em uma unidade para baixo; isto é:



Logo, o conjunto imagem de f é o intervalo $]-1, +\infty[$.

Alternativa **e**.

Exercício 7

A área do retângulo é dada por $2 \cdot f(2) = 8$. Assim, admitindo-se uma "plotagem" equiprovável, a área estimada será proporcional ao número de pontos plotados. Logo: $A = \frac{8 \cdot 540}{1.000} = 4{,}32$

Alternativa **a**.

Exercício 8

$5\log x + \frac{1}{3}\log y - 2\log z = \log \frac{x^5\sqrt[3]{y}}{z^2}$

Alternativa **d**.

Exercício 9

Para $x > 0$ e $y > 0$, temos:

$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 1 \\ 4^{y-1} = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4 x^2 y = 1 \\ 2^{2y-2} = 2^7 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$

$\therefore x \cdot y = 3\sqrt{2}$

Alternativa **a**.

Exercício 10

$\log(1{,}6b) = (1{,}2)\log b \Rightarrow \log 1{,}6 + \log b = 1{,}2\log b$

$\therefore 0{,}2\log b = \log 16 - 1 \Rightarrow \log b = \frac{0{,}2}{0{,}2}$

$\therefore b = 10$

Alternativa **e**.

Exercício 11

Para $x > 0$, temos:

$\log_4 x = \log_2 3 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 3$

$\therefore \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = 2\log_2 3$

$\therefore \log_2 x = \log_2 3^2 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 9$

$\therefore x = 9$

Assim, o volume, em mililitro, que o paciente recebe em uma hora é: $\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot 3.600}{30} = 324$

Alternativa **e**.

12. **(UFPel-RS)** A natureza dotou a espécie humana de uma sensibilidade auditiva que diminui com o aumento do nível da pressão sonora.

O nível de pressão sonora (*NPS*) pode ser definido pela expressão: $NPS = 20\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$, em que P é o valor da pressão medida e P_0 é a pressão de referência, isto é, a menor pressão percebida pelo ouvido humano ($P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$), medidas em Pascal.

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que, considerando $\log 2 = 0{,}3$, a expressão *NPS* pode ser escrita como:

a) $20 \cdot \log P + 1{,}5$
b) $20 \cdot \log P - 1{,}5$
c) $20 \cdot \log P + 94$
d) $\log P + 9{,}4$
e) $5 \cdot \log P + 20$
f) I.R.

13. **(UFSCar-SP)** Em notação científica, um número é escrito na forma $p \cdot 10^q$, sendo p um número real tal que $1 \leqslant p < 10$, e q é um número inteiro. Considerando $\log 2 = 0{,}3$, o número 2^{255}, escrito em notação científica, terá p igual a:

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}$
d) 1,2
e) 1,1

14. **(Udesc)** Resolva a equação:

$$\log_4\left[15 + \log_2\left(3x^2 - 4x + 3\right)\right] = 2$$

15. **(Unifesp)** Uma das raízes da equação $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$ é $x = 1$. A outra raiz é:

a) $1 + \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$
b) $1 + \frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$
c) $\log_{10} 3$
d) $\frac{\log_{10}6}{2}$
e) $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$

16. **(UFV-MG)** Seja x a solução da equação:
$\log_2 x^3 - \log_2 \frac{8}{x} + \log_2 4x = -16$. Então x é igual a:

a) 0,5
b) 0,25
c) 0,125
d) 0,0625

17. **(Udesc)** Devido à degradação microbiana, o valor Y_0 de um composto orgânico é reduzido a um valor Y em n anos. Os dois volumes estão relacionados pela fórmula $\log_3 Y = \log_3 Y_0 - \frac{n}{250}$. Em quantos anos 18 m³ do composto serão reduzidos a 2 m³?

18. **(UFSCar)** A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$, com $h(t)$ em metro e t em ano. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em ano) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9
b) 8
c) 5
d) 4
e) 2

19. **(Uepa)** Um produtor do interior do estado do Pará decidiu investir no plantio de uma nova variedade de banana, a BRS Conquista, em função das vantagens apresentadas, entre elas, a resistência às doenças como mal-do-panamá, sigatoka amarela e negra. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou x mudas de bananas. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes a quantidade inicial? ($\log 2 = 0{,}3$)

a) 4 anos e 8 meses
b) 4 anos e 4 meses
c) 4 anos e 3 meses
d) 4 anos e 2 meses
e) 4 anos e 1 mês

20. **(Unifesp)** A relação $P(t) = P_0(1 + r)^t$, onde $r > 0$ é constante, representa a quantidade P que cresce exponencialmente em função do tempo $t > 0$. P_0 é a quantidade inicial e r é a taxa de crescimento num dado período de tempo. Neste caso, *o tempo de dobra* da quantidade é o período necessário para ela dobrar. O tempo de dobra T pode ser calculado pela fórmula:

a) $T = \log_{(1+r)} 2$
b) $T = \log_r 2$
c) $T = \log_2 r$
d) $T = \log_2 (1+r)$
e) $T = \log_{(1+r)} (2r)$

21. **(Unifesp)** A tabela representa valores de uma escala logarítmica decimal das populações de grupos A, B, C, ... de pessoas.

Grupo	População (p)	$\log_{10} p$
A	5	0,69897
B	35	1,54407
C	1.800	3,25527
D	60.000	4,77815
E	------	5,54407
F	10.009.000	7,00039

Por algum motivo, a população do grupo E está ilegível. A partir dos valores da tabela, pode-se deduzir que a população do grupo E é:

a) 170.000
b) 180.000
c) 250.000
d) 300.000
e) 350.000

22. **(Unifor-CE)** Em 1987, uma indústria farmacêutica iniciou a fabricação de certo medicamento e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 8% ao ano. Assim sendo, em que ano a produção de tal medicamento quadruplicou a quantidade fabricada em 1987?

São dadas as aproximações: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$

a) 2002
b) 2003
c) 2004
d) 2005
e) 2006

Exercício 12

Para $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$, temos:

$NPS = 20 \log \left(\dfrac{P}{2 \cdot 10^{-5}}\right) \Rightarrow NPS = 20 (\log P - \log 2 \cdot 10^{-5})$

$\therefore NPS = 20 \log P + 94$

Alternativa **c**.

Exercício 13

Para $x = 2^{255}$, temos:

$x = 2^{255} \Rightarrow \log x = 255 \log 2$

$\therefore x = 10^{76,5} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{76}$

Como $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ e $1 \leqslant \sqrt{10} < 10$, concluímos que:

$p = \sqrt{10}$

Alternativa **a**.

Exercício 14

Como $3x^2 - 4x + 3 > 0$ para $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$, temos:

$\log_4 [15 + \log_2 (3x^2 - 4x + 3)] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15 + \log_2 (3x^2 - 4x + 3) = 16$

$\therefore 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

Exercício 15

$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$

Efetuando a mudança de variável $2^x = t$, temos:

$t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = 6$

$\therefore 2^x = 2$ ou $2^x = 6$

$\therefore x = 1$ ou $x = \log_2 6 = 1 + \log_2 3 = 1 + \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

Alternativa **b**.

Exercício 16

Para $x > 0$, temos:

$\log_2 x^3 - \log_2 \dfrac{8}{x} + \log_2 4x = -16 \Rightarrow \log_2 \dfrac{x^5}{2} = -16$

$\therefore x^5 = 2^{-15}$

$\therefore x = 0,125$

Alternativa **c**.

Exercício 17

Sendo n, em ano, e substituindo Y_0 por 18 e Y por 2, temos:

$\log_3 Y = \log_3 Y_0 - \dfrac{n}{250} \Rightarrow \log_3 2 = \log_3 18 - \dfrac{n}{250}$

$\therefore \dfrac{n}{250} = 2$

$\therefore n = 500$

Exercício 18

Para $h(t) = 3,5$, temos:

$3,5 = 1,5 + \log_3 (t + 1) \Rightarrow t = 8$

Alternativa **b**.

Exercício 19

A função f que representa o número de mudas no tempo t, em ano, é $f(t) = x \cdot 2^t$. Assim, o tempo t para o número de mudas ser $20x$ é:

$20x = x \cdot 2^t \Rightarrow \log 20 = t \log 2$

$\therefore t = \dfrac{\log 2 + 1}{\log 2} \approx 4,33$

Alternativa **b**.

Exercício 20

$P(t) = P_0 (1 + r)^t \Rightarrow 2P_0 = P_0 (1 + r)^T$

$\therefore T = \log_{(1 + r)} 2$

Alternativa **a**.

Exercício 21

$\log_{10} p = 5,54407 \Rightarrow p = 10^{5,54407}$

$\therefore p = 10^{1,54407} \cdot 10^4$

Pela tabela, $\log 35 = 1,54407$, então: $10^{1,54407} = 35$

Assim:

$p = 35 \cdot 10^4 = 350.000$

Alternativa **e**.

Exercício 22

A função que indica a quantidade fabricada é dada por $Q(n) = Q_0(1+0,08)^n$, em que n indica o período de fabricação, em ano, e Q_0 a fabricação inicial. Assim, temos:

$Q(n) = Q_0 (1,08)^n \Rightarrow 4Q_0 = Q_0 (1,08)^n$

$\therefore n \log \left(\dfrac{108}{100}\right) = 2\log 2 \Rightarrow n = \dfrac{2\log 2}{2\log 2 + 3\log 3 - 2}$

$\therefore n = 15$

Alternativa **a**.

23. **(Unifor-CE)** Em 1995, em uma cooperativa de artesanato, os artefatos manufaturados geraram um lucro de R$ 16.000,00 e, a partir de então, observou-se que o lucro cresceu a uma taxa de 20% ao ano. Nessas condições, o lucro anual dessa cooperativa chegou a R$ 81.000,00 no ano de:

a) 2002 c) 2004 e) 2006
b) 2003 d) 2005

São dadas as aproximações: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$

24. **(Udesc)** Determine o conjunto solução do sistema de equações: $\begin{cases} 2y - 9x^2 + 4 = 0 \\ 2^{\log_4(y)} = x^2 \end{cases}$

25. **(Unifor-CE)** Considere que o número de bactérias de uma cultura, t minutos após o início de uma observação, pode ser calculado pela expressão $N(t) = 900 \cdot 3^{0{,}01t}$. Assim sendo, decorrido quanto tempo do início da observação o número de bactérias será com certeza superior a 36.000 unidades? (Use: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

a) 5 horas e 40 minutos
b) 5 horas e 20 minutos
c) 5 horas e 15 minutos
d) 4 horas e 45 minutos
e) 4 horas e 14 minutos

26. **(UFPel-RS)** A lei que mede o ruído é definida pela expressão $R = 120 + 10 \log I$, em que I é a intensidade sonora, medida em W/m², e R é a medida do ruído, em decibel (dB).

O quadro abaixo mostra o ruído de algumas fontes de som:

Fonte de som	Ruído
Proximidade de um jato	150 dB
Britadeira	130 dB
Limiar da dor	120 dB
Mosquito	40 dB
Limiar da audição	0 dB

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que a intensidade sonora, percebida e suportada sem dor pelo ser humano, varia entre:

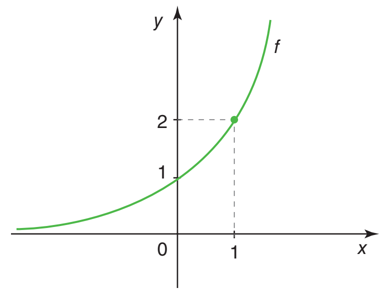
a) 10^{-12} e 1 W/m²
b) 10^{-12} e 10 W/m²
c) 10^{12} e 1 W/m²
d) 10^{-3} e 1 W/m²
e) 101^{2} e 10 W/m²
f) I.R.

27. **(Unifor-CE)** No universo $]1, +\infty[$ o conjunto solução da inequação $\log_x (-x^2 + 4x + 12) > 2$ é:

a) $]1, \sqrt{7}[$
b) $]1{,}1 + \sqrt{7}[$
c) $]1 + \sqrt{7}, 2[$
d) $]1 + \sqrt{7}, 6[$
e) $]2, 6[$

28. **(Udesc)** Para quais valores reais de x a função logarítmica $f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 + x - 6)$ está definida?

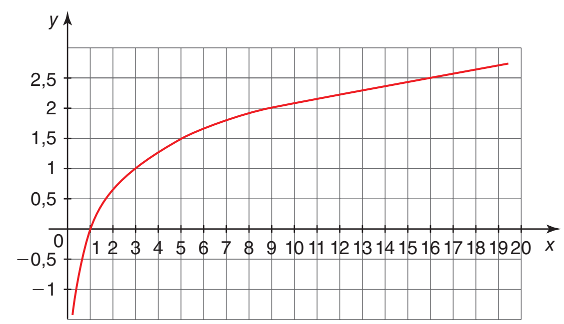
29. **(Unifor-CE)** O gráfico abaixo representa uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = a^{\frac{x}{2}}$, em que a é um número real positivo.



Considere $\log 2 = 0{,}30$, é correto afirmar que $\log f(-4)$ é um número compreendido entre:

a) -5 e -2 c) 0 e 2 e) 5 e 10
b) -2 e 0 d) 2 e 5

30. **(Insper)** Na figura abaixo, está representada, fora de escala, uma parte do gráfico $y = \log_3 x$.



A partir do gráfico, pode-se concluir que a solução da equação $9^x = 15$ vale, aproximadamente:

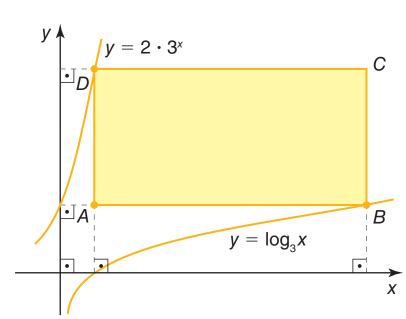
a) 2,50 c) 1,45 e) 1,10
b) 1,65 d) 1,25

31. **(Udesc)** Sabendo que os gráficos das funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = \log_b x$ se interceptam no ponto $P\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, então o produto $a \cdot b$ é igual a:

a) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{-5\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

32. **(Unifesp)** Com base na figura:



O comprimento da diagonal AC do quadrilátero $ABCD$, de lados paralelos aos eixos coordenados, é:

a) $2\sqrt{2}$ c) 8 e) $6\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{5}$

Exercício 23

A função lucro é dada por $L(n) = C_0(1+0{,}2)^n$, em que n indica o período de aplicação, em ano, e C_0 o capital inicial, em real. Assim, temos:

$81.00 = 16.000\,(1{,}2)^n \Rightarrow 4\log\left(\frac{3}{2}\right) = n\log\left(\frac{12}{10}\right)$

$\therefore n = 4\dfrac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 + \log 3 - 1} = 9$

Alternativa **c**.

Exercício 24

Para $y > 0$, temos:

$\begin{cases} 2y - 9x^2 + 4 = 0 \\ 2^{\log_4 (y)} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 9\sqrt{y} + 4 = 0 \\ \sqrt{y} = x^2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \sqrt{y} = 2 \text{ ou } \sqrt{y} = \frac{1}{4} \\ \sqrt{y} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ e } y = 2 \\ x = -\sqrt{2} \text{ e } y = 2 \\ x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Exercício 25

Para t, em minuto, temos:

$900 \cdot 3^{0{,}01t} > 36.000 \Rightarrow 3^{0{,}01t} > 40$

$\therefore 0{,}01 \cdot t \cdot \log 3 > \log 40 \Rightarrow t > 100 \cdot \dfrac{2\log 2 + 1}{\log 3}$

$\therefore t > 333{,}333...$

Alternativa **a**.

Exercício 26

A medida do ruído suportada sem dor pelo ser humano, segundo a tabela, varia entre 0 dB e 120 dB. Assim, temos:

$R = 120 + 10\log I \Rightarrow 0 < 120 + 10\log I < 120$

$\therefore -120 < 10\log I < 0 \Rightarrow -12 < \log I < 0$

$\therefore 10^{-12} < I < 1$

Alternativa **a**.

Exercício 27

Para $x > 1$, temos:

$\log_x(-x^2 + 4x + 12) > 2 \Rightarrow -x^2 + 4x + 12 > x^2$

$\therefore 1 < x < 1 + \sqrt{7}$

Alternativa **b**.

Exercício 28

$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0 \\ x - 5 > 0 \\ x - 5 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ ou } x > 2 \\ x > 5 \\ x \neq 6 \end{cases}$

$\therefore x > 5 \text{ e } x \neq 6$

Exercício 29

Como o ponto de coordenadas (1, 2) pertence ao gráfico de f, temos:

$2 = a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

Assim: $\log[f(-4)] = \log\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{-4}{2}}\right] = \log\left(\frac{1}{16}\right) = -1{,}2$

Alternativa **b**.

Exercício 30

A partir da análise do gráfico, temos:

$9^x = 15 \Rightarrow x = \log_9 15$

$\therefore x = \frac{1}{2}\log_3(15) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 = 1{,}25$

Alternativa **d**.

Exercício 31

Como o ponto $P\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de $g(x)$, temos:

$\frac{1}{2} = \log_b \sqrt{3} \Rightarrow b = 3$

Assim, substituindo $b = 3$ e $P\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ em f:

$\frac{1}{2} = a\sqrt{3} + 3 \Rightarrow a = \dfrac{-5\sqrt{3}}{2}$

Logo: $a \cdot b = \dfrac{-5\sqrt{3}}{6} \cdot 3 = \dfrac{-5\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **c**.

Exercício 32

A ordenada do ponto B é o ponto em que a função $y = 2 \cdot 3^x$ intercepta o eixo Oy, ou seja, $y = 2$. Assim, sua abscissa x é dada por:

$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$

Portanto, $B(9, 2)$.

A abscissa do ponto D é o ponto em que a função intercepta o eixo Ox, ou seja, $x = 1$. Assim, ordenada y é:

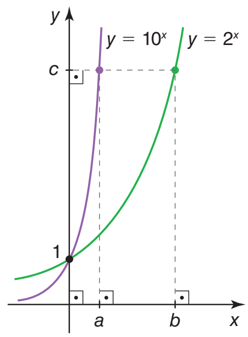
$y = 2 \cdot 3^1 \Rightarrow y = 6$ e, portanto, $D(1, 6)$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(BD)^2 = (9 - 1)^2 + (2 - 6)^2 \Rightarrow BD = 4\sqrt{5}$

Alternativa **d**.

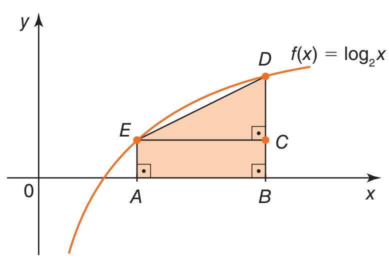
33. **(Unifesp)** A figura refere-se a um sistema cartesiano ortogonal em que os pontos de coordenadas (a, c) e (b, c), com $a = \dfrac{1}{\log_5 10}$, pertencem aos gráficos de $y = 10^x$ e $y = 2^x$, respectivamente.



A abscissa b vale:

a) 1
b) $\dfrac{1}{\log_3 2}$
c) 2
d) $\dfrac{1}{\log_5 2}$
e) 3

34. **(UFSCar-SP)** A curva a seguir indica a representação gráfica da função $f(x) = \log_2 x$, sendo D e E dois dos seus pontos.



Se os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a $(k, 0)$ e $(4, 0)$, com k real e $k > 1$, a área do triângulo CDE será igual a 20% da área do trapézio $ABDE$ quando k for igual a:

a) $\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt{2}$
c) $2\sqrt[3]{2}$
d) $2\sqrt{2}$
e) $3\sqrt[4]{2}$

35. **(Insper)** Sejam a, b, K e R números maiores do que 1, sendo $a \neq b$ e $K \neq R$. O ponto de encontro dos gráficos das funções $f(x) = K \cdot a^x$ e $g(x) = R \cdot b^x$ tem abscissa igual a:

a) $\log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{K}{R}\right)$
b) $\sqrt[\frac{b}{a}]{\dfrac{K}{R}}$
c) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{K}{R}}$
d) $\dfrac{K - R}{b - a}$
e) $\dfrac{a \cdot K + b \cdot R}{a + b}$

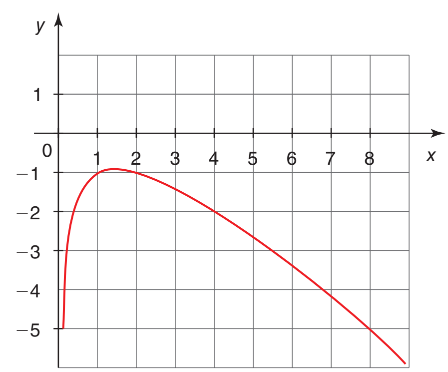
36. **(UFBA)** A temperatura $Y(t)$ de um corpo – em função do tempo $t \geqslant 0$, dado em minutos – varia de acordo com a expressão: $Y(t) = Y_a + Be^{kt}$, sendo Y_a a temperatura do meio em que se encontra o corpo e B e k constantes.

Suponha que no instante $t = 0$, um corpo, com temperatura de 75 °C, é imerso em água, que é mantida a uma temperatura de 25 °C. Sabendo que, depois de 1 minuto, a temperatura do corpo é de 50 °C, calcule o tempo para que, depois de imerso na água, a temperatura do corpo seja igual a 37,5 °C.

37. **(Insper)** Considere as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_4 (x)$, em que $b > 0$ e $b \neq 1$. Sabendo que $f(g(x)) = \sqrt[4]{x^3}$ para todo $x > 0$, pode-se concluir que:

a) $b = 2\sqrt{2}$
b) $b = 2\sqrt[3]{2}$
c) $b = 2\sqrt[3]{4}$
d) $b = 2$
e) $b = 4$

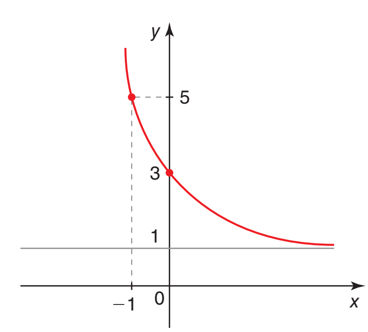
38. **(Insper)** A figura abaixo mostra uma parte do gráfico da função $y = \log_2 (x) - x$.



A partir do gráfico, pode-se concluir que uma das soluções reais da equação $x \cdot 2^{-x} = \dfrac{1}{8}$ vale aproximadamente:

a) 6,2
b) 5,4
c) 4,6
d) 3,8
e) 3,0

39. **(UFBA)** O gráfico representa a função $f\colon \mathbb{R} \to]1, +\infty[$, $f(x) = a + b \cdot 2^{kx}$, sendo a, b e k constantes reais.



A partir dessas informações, calcule $f^{-1}(x)$.

Exercício 33

Substituindo $a = \frac{1}{\log_5 10}$ em $y = 10^x$, temos:

$y = 10^{\frac{1}{\log_5 10}}$. Assim, a abscissa b é dada pela função

$y = 2^x$, ou seja: $2^b = 5 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\log_5 2}$

Alternativa **d**.

Exercício 34

A ordenada do ponto E é $\log_2 k$, e a ordenada do ponto D é $\log_2 4 = 2$. Assim, o triângulo retângulo CDE tem catetos medindo $(4 - k)$ e $(2 - \log_2 k)$, enquanto o trapézio retângulo $ABDE$ tem base maior igual a 2, base menor igual a $\log_2 k$ e altura $(4 - k)$. Logo, temos:

$$\frac{(4-k)(2-\log_2 k)}{2} = 0{,}2\,\frac{(2+\log_2 k)(4-k)}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 - \log_2 k = 0{,}4 + 0{,}2\log_2 k$

$\therefore k = 2\sqrt[3]{2}$

Alternativa **c**.

Exercício 35

A abscissa do ponto de encontro dos gráficos de f e g é solução da equação:

$R \cdot b^x = K \cdot a^x \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{R}{K}$

$\therefore x = \log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{K}{R}\right)$

Alternativa **a**.

Exercício 36

Substituindo os dados para $t = 0$, temos:

$Y(t) = Y_a + Be^{kt} \Rightarrow 75 = 25 + 50e^{k \cdot 0}$

$\therefore B = 50$

Substituindo os dados para $t = 1$, temos:

$Y(t) = Y_a + Be^{kt} \Rightarrow 50 = 25 + 50e^{k \cdot 1}$

$\therefore t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Assim, a função é: $Y(t) = 25 + 50e^{t \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Para $Y(t) = 37{,}5$, temos:

$37{,}5 = 25 + 50e^{t \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

$\therefore t = 2$

Exercício 37

Para $x > 0$, temos:

$f(g(x)) = b^{g(x)} = b^{\log_4(x)} = \sqrt[4]{x^3} \Rightarrow b^{\log_4(x)} = x^{\frac{3}{4}}$

$\therefore b^{\log 4(x)} = b^{\log_b x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \log_4(x) = \log_b(x)^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \log_4(x) = \log_{b^{\frac{4}{3}}}(x) \Rightarrow b^{\frac{4}{3}} = 4$

$\therefore b = 2\sqrt{2}$

Alternativa **a**.

Exercício 38

Para $x > 0$, temos:

$x \cdot 2^{-x} = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_2(x) - x = -3$

Da análise do gráfico, concluímos que $0 < x < 1$ ou $5 < x < 6$.

Alternativa **b**.

Exercício 39

O gráfico de f é assintótico em relação à reta $y = 1$; assim, $a = 1$.

Por outro lado, da análise gráfica, temos $f(0) = 3$ e $f(-1) = 5$. Substituindo, temos:

$\begin{cases} 3 = 1 - b \cdot 2^{k \cdot 0} \\ 5 = 1 + b^{k \cdot (-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ k = -2 \end{cases}$

Assim:

$f(x) = 1 + 2 \cdot 2^{(-2)x} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^y$

$\therefore y = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Progressão aritmética e progressão geométrica

Qualquer conjunto cujos elementos obedecem a uma ordem é uma sequência. No cotidiano, encontramos várias sequências: a lista de chamada de uma turma, as palavras em um dicionário, a classificação dos alunos aprovados no vestibular etc.

O conceito de sequência

- **Sequência finita** é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ com $A \subset \mathbb{N}^*$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.
- **Sequência infinita** é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.
- Cada elemento de uma sequência é também chamado de **termo da sequência**. O termo que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo $\boldsymbol{a_n}$.
- Em uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, ...\ a_n)$, os termos a_1 e a_n são os **extremos** da sequência.

$$(a_1, a_2, a_3, ...\ a_n)$$

extremos

- Dois termos, a_i e a_j, são **equidistantes dos extremos** se, e somente se, a quantidade de termos que precedem a_i é igual à quantidade de termos que sucedem a_j.
- Um termo a_m é chamado de **termo médio** de uma sequência com número ímpar de termos se, e somente se, a quantidade de termos que antecedem a_m é igual à quantidade de termos que o sucedem.
- **Lei de formação** da sequência é um conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que são apresentados.

Progressão aritmética (PA)

Progressão aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r. O número r é chamado de **razão** da progressão aritmética.

$$(a_1, \underbrace{\ a_2,}_{+r}\ \underbrace{a_3,}_{+r} ...\ a_n, ...)$$

Classificação

Crescente	Cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior.	razão positiva
Decrescente	Cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior.	razão negativa
Constante	Todos os termos são iguais.	razão nula

Representação genérica

Dados x e r números reais, podemos usar as seguintes representações:

	Razão	Representação
PA de 3 termos	r	$(x, x + r, x + 2r)$
PA de 3 termos	r	$(x - r, x, x + r)$
PA de 4 termos	r	$(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$
PA de 4 termos	$2r$	$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

Fórmula do termo geral

- Numa PA $(a_1, a_2, a_3, ...\ a_n, ...)$ de razão r, temos:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

- De maneira geral, temos:

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k) \cdot r}$$

Representação gráfica

A representação gráfica da PA $(a_1, a_2, a_3, ...\ a_n, ...)$ é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano. Esses pontos pertencem à reta de equação $y = a_1 + (x - 1)r$.

Propriedades

- Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

$$(a_1, a_2, ..., a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_{n-1}, a_n)$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_{k+1} + a_{n-k}$$

- Uma sequência de três termos é uma PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois:

$$\boxed{(a, b, c) \text{ é PA } \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}}$$

- Em uma PA com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos.

Soma dos *n* primeiros termos

A soma S_n dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progressão geométrica (PG)

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

$$(a_1, \ a_2, \ a_3, ... \ a_n, ...)$$

$$\cdot q \quad \cdot q$$

Classificação

Crescente	Cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior.	$a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$
Decrescente	Cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior.	$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$
Constante	Todos os termos são iguais.	$q = 1$ ou $a_n = 0, \forall n$
Oscilante	Todos os termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos.	$a_1 \neq 0$ e $q < 0$
Quase nula	O primeiro termo é diferente de zero e os demais são iguais a zero.	$a_1 \neq 0$ e $q = 0$

Representação genérica

Dados x e q números reais, podemos usar as seguintes representações:

	Razão	Representação
PG de 3 termos	q	(x, xq, xq^2)
PG de 3 termos	q, com $q \neq 0$	$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$
PG de 4 termos	q	(x, xq, xq^2, xq^3)
PG de 4 termos	q^2, com $q \neq 0$	$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, x, xq^3\right)$

Fórmula do termo geral

- Numa PG $(a_1, a_2, a_3, ... \ a_n, ...)$ de razão q, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- De maneira geral, temos:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

Representação gráfica

- A representação gráfica da PG $(a_1, a_2, a_3, ... \ a_n, ...)$ é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano tais que:
  - se a razão q da PG é positiva e diferente de 1, essa representação gráfica é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.
  - se a razão da PG é negativa ou igual a 1, essa representação gráfica é formada por pontos que não pertencem ao gráfico de uma função exponencial.

Propriedades

- Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

$$(a_1, a_2, ..., a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_{n-1}, a_n)$$

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_{k+1} \cdot a_{n-k}$$

- Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois. Assim, sendo $a \neq 0$:

$$(a, b, c) \text{ é PG } \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$$

- Em uma PG com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Soma dos *n* primeiros termos

A soma S_n dos n primeiros termos da PG não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Produto dos *n* primeiros termos

O produto P_n dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dado por:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

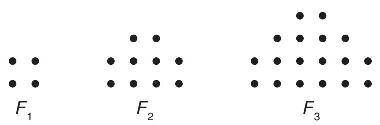
Soma dos infinitos termos

A soma dos infinitos termos de uma PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

No Vestibular

1. (Unioeste-PR) A figura F_1 é representada por 4 pontos formando um quadrado. Para obtermos a figura F_2, marcamos mais 6 pontos ao redor da figura F_1, formando 4 quadrados. A figura F_3 foi obtida marcando mais 8 pontos ao redor da figura F_2, formando 9 quadrados e assim sucessivamente.



Continuando esse processo e considerando-se quadrados formados por apenas 4 pontos, pode-se afirmar que a figura F_{16} terá:

a) 256 quadrados.
b) 428 quadrados.
c) 760 quadrados.
d) 248 quadrados.
e) 128 quadrados.

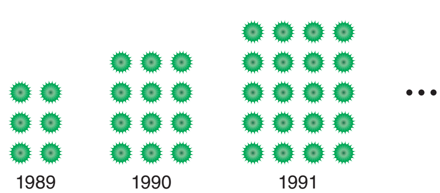
2. (FGV) Observe atentamente o padrão indicado na tabela a seguir:

COLUNAS

LINHAS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	1	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	→	↘	...
	2	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	...
	3	↓	↙	←	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	...
	4	←	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	...
	5	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	→	↘	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

a) Desenhe qual será a seta localizada no cruzamento da linha 975 com a coluna 1.238, justificando o raciocínio usado.
b) Admitindo-se que a tabela tenha 23 linhas por 500 colunas, calcule o total de símbolos iguais a ↑ nas três últimas linhas dessa tabela.

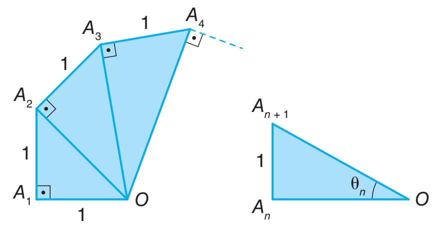
3. (Unifor-CE) A sucessão de figuras abaixo apresenta a disposição das árvores frutíferas plantadas no pomar do sítio de Dona Zefa, observada nos meses de dezembro dos anos indicados.



Se foi mantido o padrão na disposição do plantio das árvores, então Dona Zefa atingiu a meta de ter 272 árvores plantadas no seu pomar em dezembro de:

a) 2006 **b)** 2005 **c)** 2004 **d)** 2003 **e)** 2002

4. (Unifesp) Os triângulos que aparecem na figura da esquerda são retângulos, e os catetos OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, ... A_9A_{10} têm comprimento igual a 1.



a) Calcule os comprimentos das hipotenusas OA_2, OA_3, OA_4 e OA_{10}.
b) Denotando por θ_n o ângulo $(A_n\hat{O}A_{n+1})$, conforme a figura da direita, descreva os elementos a_1, a_2, a_3 e a_9 da sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_8, a_9)$, sendo $a_n = \text{sen}(\theta_n)$.

5. (UFV-MG) Os lados, em cm, de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética de razão 2. A área do triângulo, em cm^2, é igual a:

a) 20 **b)** 24 **c)** 28 **d)** 32

6. (Unir-RO) Foi distribuída entre três pessoas (A, B e C) uma certa quantia de dinheiro da seguinte forma: 1 real para A, 2 reais para B, 3 reais para C, 4 reais para A, 5 reais para B, 6 reais para C e assim por diante até o dinheiro acabar. Sabendo-se que o último valor recebido por C foram 300 reais, é correto afirmar que o total, em reais, recebido por A, B e C é, respectivamente:

a) 16.750, 14.750, 18.750
b) 17.500, 18.500, 19.500
c) 14.950, 15.050, 15.150
d) 12.850, 13.850, 14.850
e) 14.950, 15.000, 15.050

7. (Udesc) Calcule a soma dos quarenta primeiros termos de uma progressão aritmética em que:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_4 = -21 \\ a_6 - a_2 = 2a_7 \end{cases}$$

8. (Udesc) Determine a soma dos números naturais múltiplos de 3 que estão compreendidos entre 20 e 142.

9. (FGV) Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ tal que $a_n = \log 10^{n-1}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. O valor de $\sum_{n=1}^{100} a_n$ é:

a) 4.950 **b)** 4.850 **c)** 5.050 **d)** 4.750 **e)** 4.650

10. (Udesc) Os termos (a, b, c) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente, cuja soma é igual a 21. Então os termos $\left(\frac{a+c}{2b}, c-a, b+c\right)$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão igual a:

a) -2 **b)** 2 **c)** 16 **d)** 4 **e)** -4

Exercício 1

Com base no estudo de casos particulares, podemos deduzir que a lei de formação é dada por $F_n = n^2$, em que F_n representa o número de quadrados na n-ésima figura. Assim, temos: $F_{16} = 16^2 = 256$

Alternativa **a**.

Exercício 2

a) Analisando a tabela, podemos verificar que o padrão de repetição das linhas acontece a cada grupo de 4 linhas. Efetuando a divisão de 975 por 4, encontramos quociente 243 e resto 3. Isso significa que a linha 975 terá o mesmo padrão que a linha 3. Analogamente, as colunas se repetem a cada grupo de oito colunas. Dessa forma, efetuando a divisão de 1.238 por 8, encontramos quociente 154 e resto 6. Isso significa que a coluna 1.238 terá o mesmo padrão que a coluna 6.

Logo, na posição pedida estará desenhada a seta da linha 3 e coluna 6, ou seja, a seta $\nearrow$.

b) Na linha 21, a seta $\uparrow$ aparece nas seguintes colunas: (1, 9, 17, ..., 497), ou seja, temos uma PA de primeiro termo 1, último termo 497 e razão $r = 8$. Assim:

$$497 = 1 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 63$$

Portanto, temos 63 setas $\uparrow$ na primeira linha.

Na linha 22, a seta $\uparrow$ aparece nas seguintes colunas: (7, 15, 23, ..., 495), ou seja, temos uma PA de primeiro termo 7, último termo 495 e razão $r = 8$. Assim:

$$495 = 7 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 62$$

Portanto, temos 62 setas $\uparrow$ nessa linha.

Na linha 23, a seta $\uparrow$ aparece nas seguintes colunas: (5, 13, 21, ..., 493), ou seja, temos uma PA de primeiro termo 5, último termo 493 e razão $r = 8$. Assim:

$$493 = 5 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 62$$

Portanto, temos 62 setas $\uparrow$ nessa linha.

Logo, o total de setas $\uparrow$ nas três últimas linhas é:

$$63 + 2 \cdot 62 = 187$$

Exercício 3

Pelo padrão apresentado, a lei de formação é:

$$a_n = (n + 1) \cdot (n + 2), \text{ para } n \geqslant 1$$

Assim, para $a_n = 272$, temos:

$272 = (n + 1) \cdot (n + 2) \Rightarrow n = 15$

Portanto, a meta foi atingida no 15º termo dessa sequência, ou seja, em 2003.

Alternativa **d**.

Exercício 4

a) Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$OA_4 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Assim, o estudo de casos particulares nos induz a concluir que $OA_n = \sqrt{n}$.

Portanto: $OA_{10} = \sqrt{10}$

b) $a_n = \text{sen}\,(\theta_n) = \dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Logo:

$a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $a_3 = \dfrac{1}{2}$; $a_9 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Exercício 5

Considere a PA de razão 2, na qual as medidas dos lados do triângulo retângulo são: $(x - 2, x, x + 2)$, em que $x > 2$. Como a medida do maior lado é $x + 2$, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 \Rightarrow x = 8$$

Logo, a área, em centímetro quadrado, do triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10 é: $\dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Alternativa **b**.

Exercício 6

Os totais recebidos por C, B e A são representados, respectivamente, pelas sequências (3, 6, 9, ..., 297, 300), (2, 5, 8, ..., 296, 299) e (1, 4, 7, ..., 295, 298). Assim, cada sequência é uma PA de razão 3, cada uma com 100 termos. Logo, o total recebido por A, B e C é:

$$S_A = \frac{(1 + 298) \cdot 100}{2} = 14.950$$

$$S_B = \frac{(2 + 299) \cdot 100}{2} = 15.050$$

$$S_C = \frac{(3 + 300) \cdot 100}{2} = 15.150$$

Alternativa **c**.

Exercício 7

$$\begin{cases} a_1 + 3a_4 = -21 \\ a_6 - a_2 = 2a_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 9r = -21 \\ 2a_1 + 8r = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $r = 3$ e $a_1 = -12$.

Assim, $a_{40} = -12 + (40 - 1) \cdot 3 = 105$ e a soma pedida é:

$$S_{40} = \frac{(-12 + 105) \cdot 40}{2} = 1.860$$

Exercício 8

Os múltiplos de 3 compreendidos entre 20 e 142 formam uma PA de primeiro termo igual a 21, último termo igual a 141 e número n de termos dado por:

$$141 = 21 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 41$$

Logo: $S_{41} = \dfrac{(21 + 141) \cdot 41}{2} = 3.321$

Exercício 9

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=1}^{100} \log 10^{n-1} = \log 10^{1-1} + \log 10^{2-1} + ... +$$

$$+ \log 10^{100-1} = 0 + 1 + ... + 99 = \frac{(0 + 99) \cdot 100}{2} = 4.950$$

Alternativa **a**.

Exercício 10

Como (a, b, c) é uma PA de razão $r > 0$, temos:

$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

Assim: $b - r + b + b + r = 21 \Rightarrow b = 7$

Por outro lado, a sequência abaixo é uma PG:

$$\left(\frac{a + c}{2b}, c - a, b + c\right) =$$

$$= \left(\frac{7 - r + 7 + r}{2 \cdot 7}, 7 + r - 7 + r, 7 + 7 + r\right) =$$

$= (1, 2r, 14 + r)$

Assim:

$(2r)^2 = 1 \cdot (14 + r) \Rightarrow r = 2$

Logo, a PG é (1, 4, 16) e sua razão, 4.

Alternativa **d**.

11. (UFSCar-SP) Observe o padrão de formação das figuras numeradas.

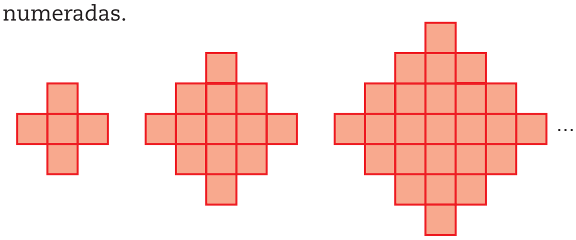
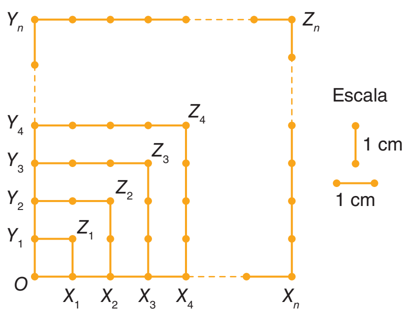


figura 1 figura 2 figura 3

a) Sabendo que as figuras 1, 2 e 3 são formadas, respectivamente, por 5, 13, 25 quadrados de área 1 cm², calcule a área da figura 10 da sequência indicada.

b) Seja x o número da figura x, e $f(x)$ o número de quadrados de 1 cm² que compõem essa mesma figura. Em relação à função f, determine sua lei de formação e seus conjuntos domínio e imagem.

12. (Vunesp) Considere a figura onde estão sobrepostos os quadrados $OX_1Z_1Y_1$, $OX_2Z_2Y_2$, $OX_3Z_3Y_3$, $OX_4Z_4Y_4$, ..., $OX_nZ_nY_n$, ..., $n \geqslant 1$, formados por pequenos segmentos medindo 1 cm cada um. Sejam A_n e P_n a área e o perímetro, respectivamente, do n-ésimo quadrado.



a) Mostre que a sequência (P_1, P_2, ..., P_n,...) é uma progressão aritmética, determinando seu termo geral, em função de n, e sua razão.

b) Considere a sequência (B_1, B_2, ..., B_n, ...), definida por $B_n = \dfrac{A_n}{P_n}$. Calcule B_1, B_2 e B_3. Calcule, também, a soma dos 40 primeiros termos dessa sequência, isto é, $B_1 + B_2 + ... + B_{40}$.

13. (Udesc) Se os números reais positivos x, y e z formarem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão 10^x, pode-se afirmar que log (xyz) é igual a:

a) $\log(3x) + 3\log(x)$

b) $3x + \log(3x)$

c) $3x + 3\log(x)$

d) $x^3 + \log(x^3)$

e) $x^3 + \log(3x)$

14. (Fuvest-SP) Uma sequência de números reais a_1, a_2, a_3, ... satisfaz à lei de formação:

- $a_{n+1} = 6a_n$, se n é ímpar;
- $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$, se n é par.

Sabendo que $a_1 = \sqrt{2}$:

a) escreva os oito primeiros termos da sequência.

b) determine a_{37} e a_{38}.

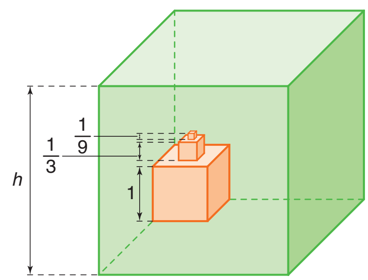
15. (Fuvest-SP) Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

16. (Vunesp) Desejo ter para minha aposentadoria 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira que rende 1% ao mês, já descontados o imposto de renda e as taxas bancárias recorrentes. Se desejo me aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em reais, que devo disponibilizar mensalmente é:
(Dado: $1{,}01^{361} \approx 36$)

a) 290 b) 286 c) 282 d) 278 e) 274

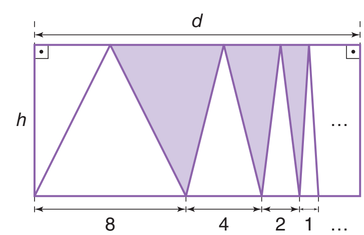
17. (Unifesp) No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, e assim por diante, conforme mostra a figura.



O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é:

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{3}$ d) 2 e) $\frac{3}{2}$

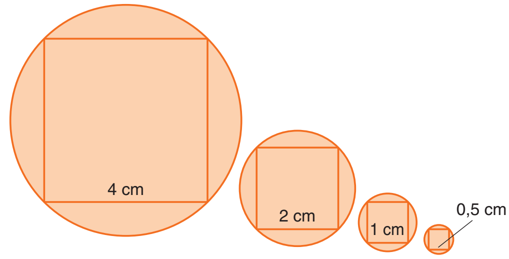
18. (FGV) A figura indica infinitos triângulos isósceles cujas bases medem, em centímetros, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a:

a) 68 b) 102 c) 136 d) 153 e) 192

19. (UFPel-RS) A figura abaixo mostra quadrados inscritos em circunferências cuja medida dos lados são termos de uma sequência infinita, em que $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 2$ cm, $a_3 = 1$ cm, $a_4 = 0{,}5$ cm, ...



Com base nos textos, é correto afirmar que a soma de todas as áreas dos círculos delimitados por essas circunferências converge para:

a) $\dfrac{128\pi}{3}$ cm²

b) $\dfrac{32\pi}{3}$ cm²

c) $\dfrac{64\pi}{3}$ cm²

d) 16π cm²

e) 32π cm²

f) I.R.

Exercício 11

a) As quantidades de quadradinhos na coluna central das figuras formam uma PA de primeiro termo 3 e razão $r = 2$. À esquerda e à direita da coluna central, a quantidade de quadradinhos é a soma $1 + 3 + 5 + ...$, ou seja, a soma dos números ímpares. Assim, sendo x o número da figura x, a função que nos fornece a quantidade de quadradinhos é:

$$f(x) = a_x + 2 \cdot S_x = 3 + (x - 1) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{(1 + (2x - 1))\,x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

Portanto, $f(10) = 221$.
Assim, concluímos que a figura 10 tem 221 cm² de área.

b) Do item anterior, temos: $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$
$D(f) = \mathbb{N}^*$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2x^2 + 2x + 1; x \in \mathbb{N}^*\}$

Exercício 12

a) $P_1 = 4, P_2 = 8, P_3 = 12, ...$
Assim, $P_n = 4n$ e $r = 8 - 4 = 4$.

b) Pela lei de formação $B_n = \frac{A_n}{P_n}$, temos:

$$B_1 = \frac{A_1}{P_1} = \frac{1}{4}$$

$$B_2 = \frac{A_2}{P_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B_3 = \frac{A_3}{P_3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Assim, a sequência (B_n) é uma PA de razão: $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Logo:

$$B_{40} = B_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow B_{40} = \frac{1}{4} + \frac{39}{4} = 10 \text{ e}$$

$$S_{40} = \frac{\left(\frac{1}{4} + 10\right) 40}{2} = 205$$

Exercício 13

Temos: $y = x \cdot 10^x$ e $z = x \cdot 10^{2x}$. Portanto:
$\log(xyz) = \log(x \cdot x \cdot 10^x \cdot x \cdot 10^{2x}) = 3\log(x) + 3x$
Alternativa **c**.

Exercício 14

a) Pela lei de formação, temos:

$a_1 = \sqrt{2}$	$a_5 = \frac{1}{3}a_4 = 4\sqrt{2}$
$a_2 = 6a_1 = 6\sqrt{2}$	$a_6 = 6a_5 = 24\sqrt{2}$
$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = 2\sqrt{2}$	$a_7 = \frac{1}{3}a_6 = 8\sqrt{2}$
$a_4 = 6a_3 = 12\sqrt{2}$	$a_8 = 6a_7 = 48\sqrt{2}$

b) Pelo item anterior, os termos de ordem ímpar formam uma PG de primeiro termo igual a $\sqrt{2}$ e razão 2.
Assim:

$$a_{37} = 2^{18} \cdot \sqrt{2} \text{ e } a_{38} = 6 \cdot 2^{18} \cdot \sqrt{2}$$

Exercício 15

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow 2^{39} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\therefore \left(\sqrt{2}\right)^{78} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow 78 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\therefore n = 13$
Alternativa **b**.

Exercício 16

Seja x a quantia depositada, em real, mensalmente. A sequência que representa esses valores durante os 30 anos, ou seja, 360 meses, é:

$$(x;\ 1{,}01x;\ (1{,}01)^2x, ...,\ (1{,}01)^{360}\,x)$$

Assim, para chegar a 1 milhão de reais após os 30 anos, calculamos:

$$S_{361} = 1.000.000 \Rightarrow x \cdot \frac{(1{,}01)^{361} - 1}{1{,}01 - 1} = 1.000.000$$

$\therefore x \approx 286$
Alternativa **b**.

Exercício 17

O valor da altura h é representado pela soma dos infinitos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$, na qual a razão é $q = \frac{1}{3}$ e o primeiro termo é 1, ou seja:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Alternativa **e**.

Exercício 18

A base do retângulo, em centímetro, é dada pela soma $8 + 4 + 2 + 1 + ...$, que é a soma dos infinitos termos de uma PG de primeiro termo igual a 8 e razão $\frac{1}{2}$, ou seja:

$$S_\infty = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$

Como o triângulo de base 8 cm é isósceles, a soma das medidas das infinitas bases dos triângulos hachurados é 12 cm, pois $16 - 4 = 12$. Logo, a altura h, em centímetro, é:

$$51 = \frac{12 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{51}{6}$$

Portanto, a área do retângulo, em centímetro quadrado, é:

$$16 \cdot \frac{51}{6} = 136$$

Alternativa **c**.

Exercício 19

O raio r da primeira circunferência é dado por:
$(2r)^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow 4r^2 = 32$
$\therefore r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

A sequência formada pelas áreas dos círculos é uma PG de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo dado por:
$a_1 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi$
Assim, sendo a_1 a área do primeiro círculo, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{8\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32\pi}{3}$$

Alternativa **b**.

Matemática financeira e Estatística

A Matemática financeira tem o objetivo de estabelecer métodos para quantificar a variação de capitais, calcular fluxos de caixa etc., em regime de juro simples ou composto. A Estatística trabalha com a coleta, classificação, análise, interpretação e representação de dados.

Porcentagem

A expressão $x\%$, que lemos "x por cento", é chamada de **taxa percentual** e representa a fração $\frac{x}{100}$, isto é:

$$x\% = \frac{x}{100}, \text{ em que } x \text{ é um número real qualquer}$$

Transações comerciais

- **Preço de custo C** (ou preço de compra) é o valor monetário pago pelo comerciante ao fornecedor do objeto comercializado.
- **Preço de venda V** é o valor monetário pelo qual o objeto é vendido.
  - Se $V > C$, então a diferença $V - C$ é positiva e é chamada de **lucro**.
  - Se $V < C$, então a diferença $V - C$ é negativa e $|V - C|$ é chamado de **prejuízo**.
- **Receita** é o valor obtido pela venda de determinado produto.

Juro simples

- Quando um capital C é aplicado durante t unidades de tempo, e uma taxa i de juro, por unidade de tempo, incide apenas sobre o capital inicial, o juro J é chamado de **juro simples**. Esse juro, no fim da aplicação, é calculado por:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

- O montante M é a soma do capital inicial com o juro:

$$M = C + J$$

- Quando duas taxas percentuais i_1 e i_2, em unidades de tempos diferentes, são aplicadas ao mesmo capital inicial, durante um mesmo período, e produzem juros iguais, dizemos que essas taxas são **equivalentes**. Por exemplo, em um regime de juro simples:
  - uma taxa i ao mês é equivalente à taxa $12i$ ao ano;
  - uma taxa i ao ano é equivalente à taxa $\frac{i}{12}$ ao mês;
  - uma taxa i ao dia é equivalente à taxa $30i$ ao mês;
  - uma taxa i ao mês é equivalente à taxa $\frac{i}{30}$ ao dia.

Juro composto

- O cálculo do juro composto é efetuado do seguinte modo:
  - No fim da primeira unidade de tempo considerada na aplicação, a taxa i de juro incide sobre o capital inicial.
  - A partir da segunda unidade de tempo, a taxa i de juro incide sobre o montante acumulado na unidade de tempo anterior.
- Se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto, durante t unidades de tempo, à taxa constante i por unidade de tempo, então o montante M acumulado nesse período é:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Noções de Estatística

Universo estatístico

Na coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se **universo estatístico** ou **população estatística** o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados relativos ao assunto em questão.

Amostra

- Quando o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os elementos desse universo, seleciona-se um subconjunto dele, chamado **amostra**, no qual os dados para a pesquisa são coletados.
- Sendo a e b, respectivamente, o menor e o maior elemento de uma amostra de dados numéricos, chama-se **amplitude da amostra** o número $b - a$.
- Os dados coletados em uma amostra podem ser organizados em tabelas ou gráficos. Quando esses dados são numéricos, podemos ainda organizá-los em uma sequência chamada **rol**, de modo que cada elemento, a partir do segundo:
  - é maior ou igual ao seu antecessor; ou
  - é menor ou igual ao seu sucessor.

Distribuição de frequências

A análise dos dados numéricos de uma amostra é facilitada pela organização desses dados em uma tabela ou em um gráfico. Para isso, os elementos da amostra são separados por **classes**.

Classes unitárias

- Quando uma classe é representada por um único número, é chamada de classe unitária.
- A distribuição de frequências em classes unitárias é feita por uma **tabela de distribuição de frequências**, construída obedecendo-se aos seguintes critérios:
  - A amostra é separada em classes unitárias;
  - A quantidade total de elementos de uma mesma classe é chamada de **frequência** (F) dessa classe;
  - A soma das frequências de todas as classes é chamada de **frequência total** (F_t) da amostra;
  - Dividindo a frequência F de uma classe pela frequência total F_t, obtém-se um número chamado de **frequência relativa** ($F\%$) da classe.
- Quando a amostra está dividida em classes unitárias, a representação da distribuição de frequências em um sistema de eixos pode ser feita em um gráfico de linhas, em um gráfico de barras verticais, em um gráfico de barras horizontais ou em um gráfico de setores.

Classes representadas por intervalos reais

- A distribuição de frequências em classes representadas por intervalos reais é feita por uma **tabela de distribuição de frequências**, com classes não unitárias, obedecendo-se aos seguintes procedimentos usuais:
  - Calcula-se a amplitude da amostra, que é a diferença entre o maior e o menor elemento da amostra;
  - Escolhe-se um intervalo fechado, de comprimento maior ou igual à amplitude da amostra, que contenha a amostra (isto é, todos os elementos da amostra devem pertencer ao intervalo escolhido);
  - Divide-se o intervalo escolhido no item anterior em subintervalos de mesmo comprimento, fechados à esquerda e abertos à direita, exceto o subintervalo de extremos maiores, que deve ser fechado;
  - Agrupam-se os elementos da amostra de modo que cada agrupamento seja formado por elementos que pertençam a uma mesma classe.
- O total de elementos da amostra que pertencem a uma mesma classe é a frequência F dessa classe.
- A soma das frequências de todas as classes é a frequência total F_t da amostra.
- A frequência relativa $F\%$ de uma classe é dada por $\dfrac{F}{F_t}$.
- Quando as classes são intervalos reais, a representação da distribuição de frequências em um sistema de eixos é feita por um tipo de gráfico chamado **histograma**.

Medidas de posição

- A **média aritmética** ($\bar{x}$) dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

- A **média aritmética ponderada** dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente, é o número $\bar{x}$ tal que:

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

- Para calcular a média aritmética de números que estão agrupados em intervalos reais, seguimos os passos:
  - calculamos o ponto médio x_m de cada classe;
  - calculamos a média aritmética ponderada entre os valores x_m, atribuindo a cada x_m peso igual à frequência da respectiva classe.
- **Moda** (Mo) é todo elemento de maior frequência de uma amostra cujas frequências dos elementos não são todas iguais.
- Dados n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, dispostos em rol, a **mediana** (Md) é:
  - o termo central do rol, se n é ímpar; ou seja, a mediana é o termo x_i com $i = \dfrac{n+1}{2}$;
  - a média aritmética entre os termos centrais, se n é par; ou seja, a mediana é a média aritmética entre os termos x_i e x_{i+1}, com $i = \dfrac{n}{2}$.

Medidas de dispersão

- Sendo $\bar{x}$ a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, chama-se **desvio absoluto médio** (Dam) o número:

$$Dam = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + ... + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

- **Variância** (σ^2) é a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- O **desvio padrão** (σ) é a raiz quadrada da variância.

No Vestibular

1. **(Unifesp)** Num determinado local, o litro de combustível, composto de 75% de gasolina e 25% de álcool, é comercializado ao preço de R$ 2,05, sendo o litro de álcool comercializado ao preço de R$ 1,00. Se os preços são mantidos proporcionais, o preço do litro de gasolina é:

   a) R$ 2,15
   b) R$ 2,20
   c) R$ 2,30
   d) R$ 2,40
   e) R$ 3,05

2. **(Unir-RO)** Dois descontos sucessivos de 20% numa mercadoria equivalem a um desconto único de:

   a) 40%
   b) 36%
   c) 22%
   d) 30%
   e) 28%

3. **(UFSCar-SP)** Com o reajuste de 10% no preço da mercadoria A, seu novo preço ultrapassará o da mercadoria B em R$ 9,99. Dando um desconto de 5% no preço da mercadoria B, o novo preço dessa mercadoria se igualará ao preço da mercadoria A antes do reajuste de 10%. Assim, o preço da mercadoria B, sem o desconto de 5%, em real, é:

   a) 222,00
   b) 233,00
   c) 299,00
   d) 333,00
   e) 466,00

4. **(Unifesp)** Um comerciante comprou um produto com 25% de desconto sobre o preço de catálogo. Ele deseja marcar o preço de venda de modo que, dando um desconto de 25% sobre esse preço, ainda consiga um lucro de 30% sobre o custo. A porcentagem sobre o preço do catálogo que ele deve usar para marcar o preço de venda é:

   a) 110%
   b) 120%
   c) 130%
   d) 135%
   e) 140%

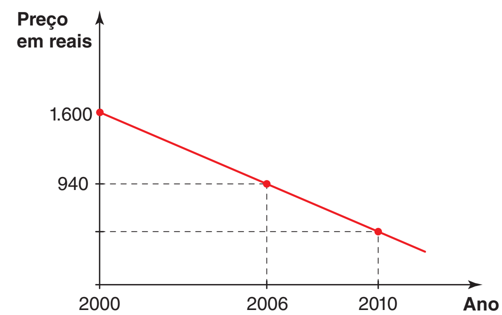
5. **(Insper)** Uma mercadoria sofreu um aumento de $(2x)\%$, sendo x um número positivo. Algum tempo depois, em uma promoção, ela foi vendida com desconto de $x\%$. Se o total pago pelo cliente nessa ocasião foi igual ao preço da mercadoria antes do aumento, o valor de x é aproximadamente:

   a) 33,3
   b) 41,4
   c) 50,0
   d) 66,7
   e) 100,00

6. **(Unifal)** Duas lojas, Pague Menos e Lucre Mais, comercializam o mesmo produto ao preço de p reais. A loja Pague Menos decidiu aplicar um desconto de 20% sobre o preço p, vendendo-o ao preço de p_1 reais, e, no mesmo dia, a loja Lucre Mais aumentou o preço desse produto em 30%, vendendo-o por p_2 reais. Sabendo desse fato, a loja Pague Menos aumentou 25% sobre p_1 o preço do produto, vendendo-o ao preço de q reais. Supondo que as duas lojas tenham feito um acordo, em vender esse produto por q reais, a loja Lucre Mais deverá oferecer um desconto sobre o preço p_2. Nessas condições, determine, aproximadamente, qual deve ser o desconto percentual.

7. **(UFPel-RS)** Depreciação é o processo de perda de valor que um bem sofre devido ao desgaste, à obsolescência e a outros fatores.

   O gráfico abaixo representa uma função que descreve os valores de uma máquina em função do tempo.



   Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar que, em 2010, o percentual de depreciação estará entre:

   a) 68% e 70%
   b) 65% e 68%
   c) 62% e 65%
   d) 58% e 62%
   e) 70% e 73%
   f) I.R.

8. **(Unifesp)** André aplicou parte de seus R$ 10.000,00 a 1,6% ao mês, e o restante a 2% ao mês. No final de um mês, recebeu um total de R$ 194,00 de juros das duas aplicações. O valor absoluto da diferença entre os valores aplicados a 1,6% e a 2% é:

   a) R$ 4.000,00
   b) R$ 5.000,00
   c) R$ 6.000,00
   d) R$ 7.000,00
   e) R$ 8.000,00

9. **(Unioeste-PR)** Um investidor aplicou um capital C em ações de uma empresa durante três períodos. Por causa de uma crise na economia, ao final do primeiro período, verificou-se uma perda de 20% sobre C (taxa de -20%), gerando um montante C_1. Este montante continuou aplicado e, ao final do segundo período, observou-se um ganho de 10% sobre C_1, produzindo outro montante C_2. De modo similar, a aplicação de C_2 obteve um rendimento de 10% ao final do terceiro período.

   Com base nestas afirmações, pode-se afirmar que:

   a) Ao final do segundo período, ainda havia um prejuízo de 10% sobre o capital C.
   b) Ao final do segundo período, o investidor verificou ganho de 0,5% sobre C.
   c) Ao final do terceiro período, o investidor recuperou exatamente seu capital original C.
   d) Ao final do terceiro período, o investidor ainda verificava um prejuízo superior a 1%.
   e) Ao final do terceiro período, o capital inicial foi recuperado e com ganho de 1%.

Exercício 1

Seja x o preço do litro da gasolina, em real. Como o litro do combustível é composto de 75% de gasolina e 25% de álcool, temos:
$0,25 \cdot 1,00 + 0,75 \cdot x = 2,05 \Rightarrow x = 2,40$
Alternativa **d**.

Exercício 2

Seja x o valor inicial da mercadoria. O preço após os descontos é dado por:
$$x \cdot (1 - 0,2)(1 - 0,2) = 0,64 \cdot x$$
Ou seja, os dois descontos equivalem a um desconto único de 36%.
Alternativa **b**.

Exercício 3

Sendo x e y os valores, em real, das mercadorias A e B, respectivamente, temos:
$\begin{cases} x \cdot (1 + 0,1) = y + 9,99 \\ (1 - 0,05) \cdot y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 210,9 \\ y = 222 \end{cases}$
Alternativa **a**.

Exercício 4

Sendo x, y e z os preços, respectivamente, de compra, de catálogo e de venda, temos:
$\begin{cases} x = (1 - 0,25) \cdot y \\ z \cdot (1 - 0,25) = (1 + 0,3) \cdot x \end{cases} \Rightarrow z = 1,3 \cdot y$
Alternativa **c**.

Exercício 5

Seja y o valor original da mercadoria. Assim, temos:
$y \cdot \left(1 + \dfrac{2x}{100}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{x}{100}\right) = y \Rightarrow x = 50$
Alternativa **c**.

Exercício 6

Após o desconto de 20% sobre o preço p aplicado pela loja Pague Menos, o preço p_1 é:
$$p_1 = (1 - 0,2) \cdot p = 0,8 \cdot p$$
Com o aumento de 25% sobre p_1, o preço q comercializado pela loja Pague Menos é:
$$q = 0,8 \cdot p \cdot (1 + 0,25) = p$$
Por outro lado, com o aumento de 30% a loja Lucre Mais comercializou o produto pelo preço p_2 igual a:
$p_2 = (1 + 0,3) \cdot p = 1,3 \cdot p$.
Logo, o desconto a ser aplicado em p_2 para que o preço comercializado seja p é:
$$\frac{1,3 - 1}{1,3} \approx 0,23 = 23\%$$

Exercício 7

Pela análise do gráfico, a depreciação é linear e em 6 anos houve depreciação de:
$\dfrac{1.600 - 940}{1.600} = 0,4125 = 41,25\%$
Logo, em 10 anos, ou seja, em 2010, a depreciação é:
$\dfrac{41,25\%}{6} \cdot 10 = 68,75\%$
Alternativa **a**.

Exercício 8

Seja x, em real, a parte dos R$ 10.000,00 que foi aplicada a 1,6 % ao mês. Assim, temos:
$x \cdot (1 + 0,016) + (1.000 - x) \cdot (1 + 0,02) = 10.194 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1.500$
Logo, o valor absoluto, em real, dos valores aplicados é:
$8.500 - 1.500 = 7.000$
Alternativa **d**.

Exercício 9

Após o primeiro período, o montante C_1 é:
$C_1 = C \cdot (1 - 0,2) = 0,8 \cdot C$
Após o segundo período, o montante C_2 é:
$C_2 = 0,8 \cdot C \cdot (1 + 0,1) = 0,88 \cdot C$
Após o terceiro período, o montante final é:
$0,88 \cdot C \cdot (1 + 0,1) = 0,968 \cdot C$
Assim, o montante final representa um prejuízo de 3,2%.
Alternativa **d**.

10. **(Unifor-CE)** Um capital de R$ 250.000,00 foi aplicado em um regime de capitalização composta e ao final de 2 anos foi retirado o montante de R$ 518.400,00. A taxa anual dessa aplicação foi de:

a) 44%
b) 42,5%
c) 42%
d) 40,5%
e) 40%

11. **(Unifor-CE)** Uma pessoa aplicou um capital de R$ 2.400,00 por 2 meses, à taxa mensal de 3%. Se $\frac{2}{3}$ do total foi aplicado a juros compostos e o restante a juro simples, o juro total arrecadado ao fim do prazo foi:

a) R$ 144,72
b) R$ 144,98
c) R$ 145,20
d) R$ 145,33
e) R$ 145,44

12. **(Unifor-CE)** A expressão $M = A(1 + i)^n$ permite o cálculo do montante produzido por um capital A, aplicado a juros compostos à taxa unitária i, ao final de n períodos. Assim, se o capital de R$ 1.370,00 for aplicado à taxa anual de 25%, ao final de quantos anos ele produzirá o montante de R$ 5.480,00? (Dado: log 2 = 0,30)

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

13. **(UFBA)** Uma pessoa contraiu um empréstimo no valor de R$ 1.000,00 para ser quitado, no prazo de dois meses, com pagamento de R$ 1.300,00.

Com base nessa informação, é correto afirmar:

(01) A taxa bimestral de juros é de 30%.
(02) A taxa mensal de juros simples é de 13%.
(04) A taxa mensal de juros compostos é de 15%.
(08) Em caso de atraso do pagamento, considerando-se a taxa mensal de juros simples de 16,2% incidindo sobre o valor da dívida na data de vencimento, o valor da dívida, no 10º dia de atraso, será igual a R$ 1.370,20.
(16) Em caso de a dívida ser quitada 15 dias antes do vencimento, aplicando-se a taxa de desconto simples de 7% ao mês, o valor pago será de R$ 1.209,00.

- Qual é a soma dos valores correspondentes às afirmativas corretas?

14. **(UFBA)** Uma pessoa tomou um empréstimo de R$ 6.000,00 a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano e saldou a dívida da seguinte maneira:

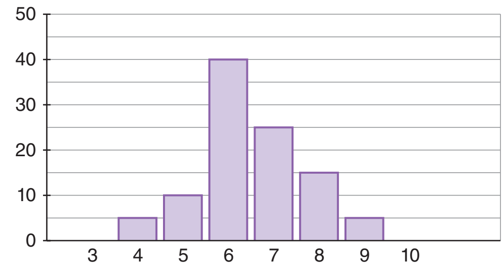
- 2 anos após ter contraído a dívida, pagou R$ 2.260,00;
- 2 anos após o primeiro pagamento, pagou mais R$ 3.050,00;
- 1 ano após o segundo pagamento, quitou a dívida.

Nessas condições, pode-se afirmar:

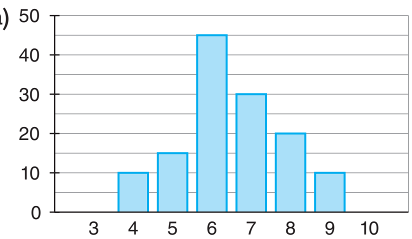
(01) Depois do primeiro pagamento, a pessoa ficou devendo R$ 4.340,00.
(02) Após o segundo pagamento, a dívida correspondia a 50% do valor do empréstimo.
(04) No momento em que a pessoa quitou o empréstimo, a dívida correspondia a R$ 3.300,00.
(08) O montante pago pelo empréstimo foi igual a R$ 9.000,00.
(16) O valor pago pelos juros da dívida correspondeu a 43,5% do valor do empréstimo.

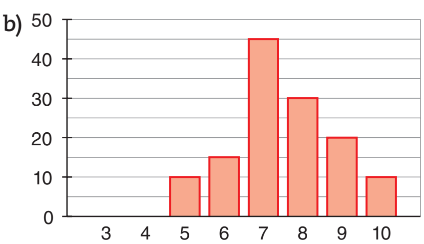
- Qual é a soma dos valores correspondentes às afirmativas corretas?

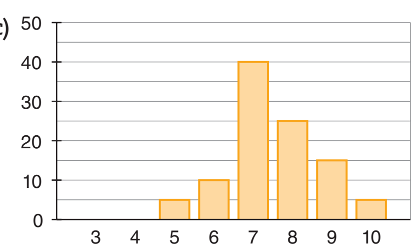
15. **(Insper)** O gráfico abaixo representa as notas de um grupo de alunos em uma prova de matemática. A altura de cada barra corresponde à quantidade de alunos que obteve a nota indicada na base da respectiva barra.

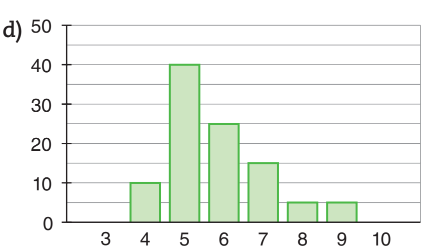


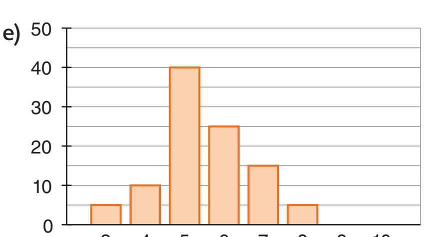
Numa prova de português, a média dos mesmos alunos foi um ponto maior do que a média nessa prova de matemática. Dos gráficos a seguir, aquele que pode representar as notas de português é:

a)


b)


c)


d)


e)


Exercício 10

Sendo i a taxa anual dessa aplicação no regime de capitalização composta, temos:
$518.400 = 250.000 \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow i = 0,44 = 44\%$
Alternativa **a**.

Exercício 11

O valor inicial, em real, aplicado no regime de juro composto é: $2.400 \cdot \frac{2}{3} = 1.600$. Assim, o montante acumulado por essa aplicação é:
$M = 1.600 \cdot (1 + 0,03)^2 = 1.697,44$
Assim, o juro arrecadado, em real, foi:
$1.697,44 - 1.600 = 97,44$
O valor inicial, em real, aplicado no regime de juro simples é: $2.400 - 1.600 = 800$. Assim, o juro arrecadado, em real, foi:
$0,03 \cdot 2 \cdot 800 = 48$
Logo, o total, em real, ao fim do prazo foi:
$97,44 + 48 = 145,44$
Alternativa **e**.

Exercício 12

Seja n o tempo de aplicação em anos. Assim, temos:
$5.480 = 1.370 \cdot (1 + 0,25)^n \Rightarrow 4 = 1,25^n$
$\therefore n = \dfrac{\log 4}{\log 10 - \log 8} = 6$
Alternativa **a**.

Exercício 13

(01) V
(02) F, pois a taxa mensal de juro simples é:

$$\dfrac{\dfrac{1.300 - 1.000}{2}}{1.000} = 0,15 = 15\%$$

(04) F, pois 15% é a taxa de juro simples.
(08) V
(16) F, pois, para antecipar 15 dias da data do vencimento, a taxa de desconto simples é 3,5%, ou seja, o valor a ser pago, em real, é:
$1.300 \cdot (1 - 0,035) = 1.254,5$

- A soma é: 01 + 08 = 9

Exercício 14

(01) F, pois, depois do primeiro pagamento, o saldo devedor é:
$6.000 \cdot (1 + 0,1)^2 - 2.260 = 7.260 - 2.260 = 5.000$
(02) V
(04) V
(16) V

- A soma é: 02 + 04 + 16 = 22

Exercício 15

A média na prova de matemática é:

$$\bar{x} = \dfrac{5 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + 5 \cdot 9}{100} = 6,5$$

Logo, a média na prova de português será 7,5.
Os gráficos dos itens **a** e **b** não podem representar as notas desses 100 alunos, pois ambos representam as notas de 130 alunos. No item **c**, temos:

$$\dfrac{5 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 40 \cdot 7 + 25 \cdot 8 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 10}{100} = 7,5$$

Nos itens **d** e **e** as médias são 5,8 e 5,5, respectivamente; logo, esses gráficos não podem representar as notas de português.
Alternativa **c**.

16. **(UFPel-RS)** Na busca de solução para o problema da gravidez na adolescência, uma equipe de orientadores educacionais de uma instituição de ensino pesquisou um grupo de adolescentes de uma comunidade próxima a essa escola e obteve os seguintes dados:

Idade (em anos)	Frequência absoluta de adolescentes grávidas
13	4
14	3
15	2
16	5
17	6

Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar, em relação às idades das adolescentes grávidas, que:

a) a média é 15 anos.
b) a mediana é 15,3 anos.
c) a mediana é 16,1 anos.
d) a moda é 16 anos.
e) a média é 15,3 anos.
f) I.R.

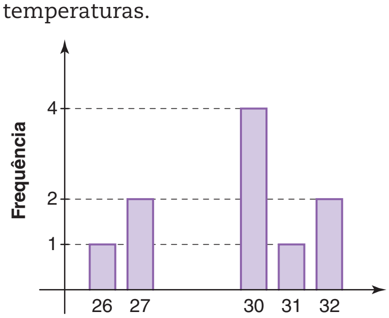
17. **(UFBA)** De acordo com o Boletim do Serviço de Meteorologia de 07 de junho de 2000, o quadro abaixo apresenta a temperatura máxima, em grau Celsius, registrada em Fernando de Noronha e nas capitais da Região Nordeste do Brasil.

Aracaju	Fernando de Noronha	Fortaleza	João Pessoa	Maceió
27 °C	30 °C	31 °C	30 °C	27 °C

Natal	Recife	Salvador	São Luís	Teresina
30 °C	30 °C	26 °C	32 °C	32 °C

Com base nessas informações, pode-se afirmar:

(01) O gráfico abaixo representa a distribuição de frequência das temperaturas.



(02) A frequência relativa da temperatura de 31 °C é igual a 10%.

(04) Representando-se a frequência relativa por meio de um gráfico de setores, a região correspondente à temperatura de 27 °C tem ângulo de 36°.

(08) A média aritmética das temperaturas indicadas no quadro corresponde a 29,5 °C.

(16) A mediana das temperaturas registradas é igual à temperatura modal.

(32) A amplitude das temperaturas é de 32 °C.

- Qual é a soma dos valores correspondentes às afirmativas corretas?

18. **(Unir-RO)** A tabela abaixo apresenta a distribuição de frequência relativa dos salários de uma empresa com 40 funcionários.

Salários (em reais)	Frequência relativa (%)
500	35
1.000	20
1.500	5
2.000	25
4.000	15

A partir dessas informações, é correto afirmar:

a) A mediana dos salários é igual a R$ 1.650,00.
b) A moda dos salários é igual a R$ 4.000,00.
c) Um quinto dos trabalhadores dessa empresa recebe salário de R$ 500,00.
d) A média salarial é igual a R$ 1.550,00.
e) Mais da metade dos trabalhadores dessa empresa recebem salário superior a R$ 1.500,00.

19. **(UFPel-RS)** Em um concurso, as notas finais dos candidatos foram as seguintes:

Número de candidatos	Nota final
7	6,0
2	7,0
1	9,0

Com base na tabela acima, é correto afirmar que a variância das notas finais dos candidatos foi de:

a) 0,75
b) 0,65
c) $\sqrt{0,65}$
d) $\sqrt{0,85}$
e) 0,85
f) I.R.

20. **(Unifor-CE)** A tabela abaixo apresenta a distribuição de frequência do número de microcomputadores vendidos em uma promoção feita por certa loja e o número de prestações do parcelamento do preço desses micros.

Classes (número de prestações)	Frequência
$0 \dashv 6$	10
$6 \dashv 12$	25
$12 \dashv 18$	20
$18 \dashv 24$	20

Satisfeito com o sucesso da promoção, o proprietário da loja resolveu sortear um brinde entre as pessoas que adquiriram tais micros. Considerando que foi vendido um único micro para cada pessoa, a probabilidade de que o sorteado tenha optado por um parcelamento cujo número de prestações era menor que o número médio de prestações é:

a) $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{7}{15}$ **d)** $\frac{8}{15}$ **e)** $\frac{11}{15}$

Nota: O símbolo $a \dashv b$ representa o intervalo $]a, b]$.

Exercício 16

A média das idades é:

$$\bar{x} = \frac{13 \cdot 4 + 14 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 16 \cdot 5 + 17 \cdot 6}{4 + 3 + 2 + 5 + 6} = 15,3$$

Alternativa **e.**

Exercício 17

(01) V

(02) V

(04) F, pois a frequência relativa é de $\frac{2}{10} = 20\%$, que, no gráfico de setores, tem ângulo central de $20\% \cdot 360° = 72°$.

(08) V

(16) V

(32) F, pois a amplitude da amostra de temperaturas é: $32\ °C - 26\ °C = 6\ °C$

• A soma é: $01 + 02 + 08 + 16 = 27$

Exercício 18

A média salarial, em real, é:

$\bar{x} = 0,35 \cdot 500 + 0,2 \cdot 1.000 + 0,15 \cdot 1.500 + 0,25 \cdot 2.000 + 0,15 \cdot 4.000 = 1.550$

Alternativa **d.**

Exercício 19

A média das notas finais é:

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9}{10} = 6,5$$

Assim, a variância das notas finais é:

$$\sigma^2 = \frac{7 \cdot (6 - 6,5)^2 + 2 \cdot (7 - 6,5)^2 + (9 - 6,5)^2}{10} = 0,85$$

Alternativa **e.**

Exercício 20

A média do número de prestações é:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot \left(\frac{0 + 6}{2}\right) + 25 \cdot \left(\frac{6 + 12}{2}\right) + 20 \cdot \left(\frac{12 + 18}{2}\right) + 20 \cdot \left(\frac{18 + 24}{2}\right)}{75}$$

$\therefore\ \bar{x} = 13$

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{10 + 25}{75} = \frac{7}{15}$

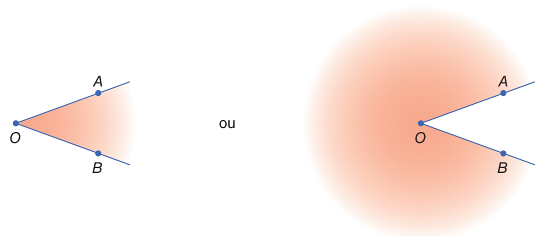
Alternativa **c.**

Geometria plana

A Geometria estuda as figuras quanto às formas e medidas. Neste tema, estudaremos a Geometria plana, formalizada no século III a.C. pelo matemático grego Euclides de Alexandria.

Ângulos

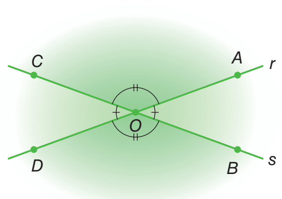
Duas semirretas de mesma origem separam em duas regiões o plano que as contém. A reunião dessas duas semirretas com uma dessas regiões é chamada de **ângulo**.



- Um ângulo de uma volta completa mede 360°.
- Um ângulo reto é um ângulo de medida 90°.
- Um ângulo agudo é um ângulo de medida maior que 0° e menor que 90°.
- Um ângulo obtuso é um ângulo de medida maior que 90° e menor que 180°.
- Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.
- Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.
- Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°.

Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas concorrentes, r e s, determinam pares de ângulos congruentes chamados de opostos pelo vértice.

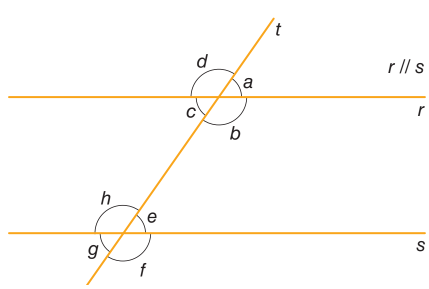


$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Considere duas retas paralelas, r e s, cortadas por uma transversal t:



- Dois ângulos alternos ou correspondentes têm medidas iguais.

ângulos alternos: $\begin{cases} \text{internos: } b = h;\ c = e \\ \text{externos: } a = g;\ d = f \end{cases}$

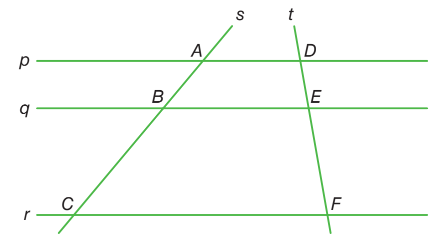
ângulos correspondentes: $\begin{cases} a = e;\ b = f \\ c = g;\ d = h \end{cases}$

- Dois ângulos colaterais são suplementares.

ângulos colaterais: $\begin{cases} \text{internos: } b + e = 180°;\ c + h = 180° \\ \text{externos: } a + f = 180°;\ d + g = 180° \end{cases}$

Teorema de Tales

Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF};\ \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF};\ \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

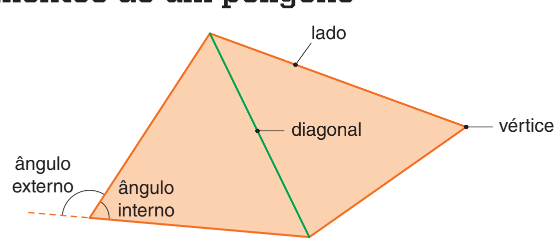
Polígonos

Considere, em um plano, uma linha L formada por segmentos de retas tais que:

- cada extremidade de qualquer um deles é extremidade de dois e apenas dois deles;
- dois segmentos consecutivos quaisquer, entre eles, não são colineares;
- dois segmentos não consecutivos quaisquer, entre eles, não têm ponto comum.

Essa linha L separa o plano em duas regiões, das quais uma é limitada. A reunião da linha L com essa região limitada é chamada de **polígono**.

Elementos de um polígono



Nomenclatura

- Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados (ou ângulos).

Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono ou octágono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono

Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta *r* que contém qualquer um de seus lados deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem *r*.

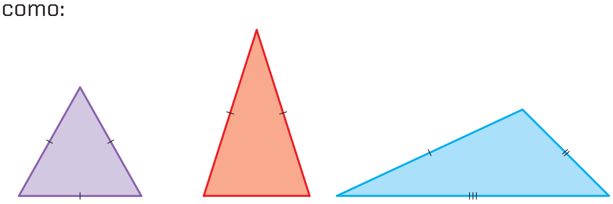
- Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de **polígono regular**.

Triângulos

Em todo triângulo, a soma das medidas de dois lados é maior que a medida do terceiro lado.

Classificação dos triângulos

- Quanto aos lados, um triângulo pode ser classificado como:

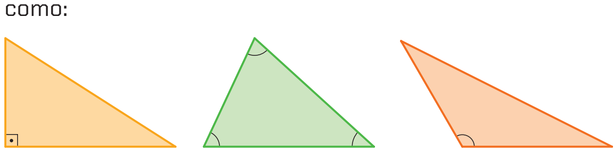


Triângulo equilátero: tem os três lados congruentes entre si.

Triângulo isósceles: tem dois lados congruentes entre si.

Triângulo escaleno: tem os três lados com medidas diferentes entre si.

- Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser classificado como:



Triângulo retângulo: tem um ângulo interno reto.

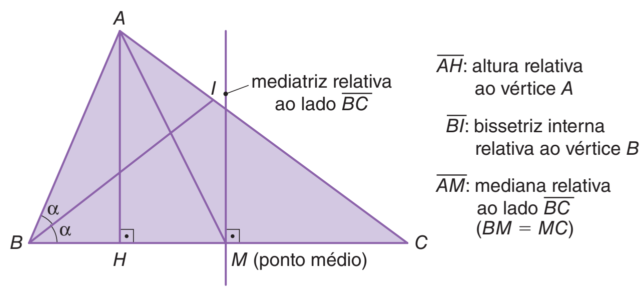
Triângulo acutângulo: tem os três ângulos internos agudos.

Triângulo obtusângulo: tem um ângulo interno obtuso.

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros, de catetos.

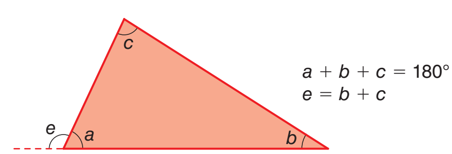
Elementos de um triângulo

- **Altura** de um triângulo é o segmento de reta que liga perpendicularmente um vértice à reta que contém o lado oposto a esse vértice. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é chamado de **ortocentro**.
- **Bissetriz interna** de um triângulo é o segmento de reta contido na bissetriz de um ângulo interno, ligando um vértice ao lado oposto. O ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo é chamado de **incentro**.
- **Mediana** de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. O ponto de encontro das medianas de um triângulo é chamado de **baricentro**.
- **Mediatriz** em um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados que passa pelo ponto médio desse lado. O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de **circuncentro**.



Ângulos nos triângulos

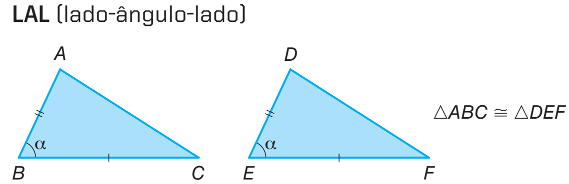
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.
- A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.



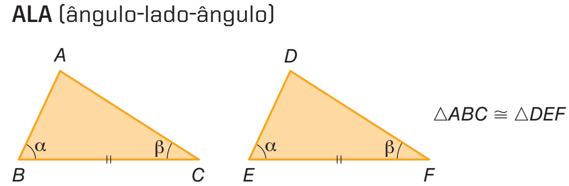
Congruência de triângulos

- Dois triângulos são **congruentes** se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um triângulo aos três vértices do outro, de modo que:
  - ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
  - lados opostos a vértices correspondentes são congruentes.
- Casos de congruência:

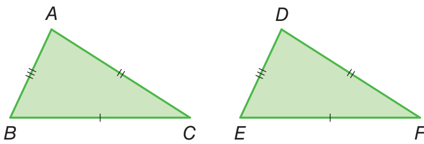
LAL (lado-ângulo-lado)



ALA (ângulo-lado-ângulo)

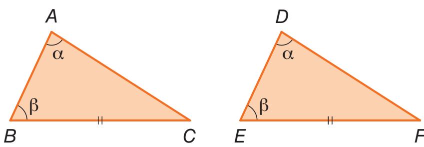


LLL (lado-lado-lado)



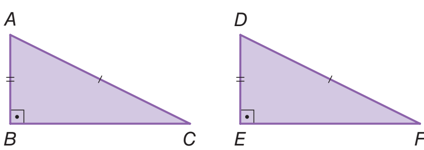
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

LAA$_o$ (lado-ângulo-ângulo oposto)



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

RHC (ângulo reto-hipotenusa-cateto)



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Propriedades dos triângulos isósceles

P1. Dois lados de um triângulo são congruentes se, e somente se, os ângulos internos opostos a esses lados são congruentes.

P2. Um triângulo é isósceles se, e somente se, uma bissetriz interna coincide com uma mediana ou uma altura do triângulo.

P3. Um triângulo é isósceles se, e somente se, a mediatriz relativa a um lado contém a mediana, a bissetriz interna ou a altura relativa a esse lado.

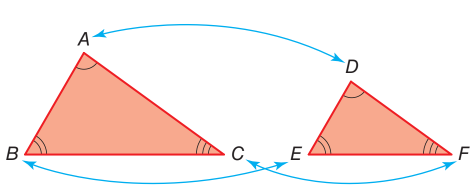
Propriedades dos triângulos retângulos

P1. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

P2. Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da medida da hipotenusa.

Semelhança de triângulos

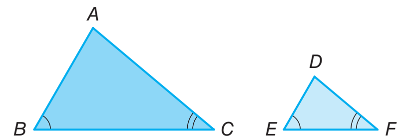
- Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro, de modo que:
  - Ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
  - Lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases}$$

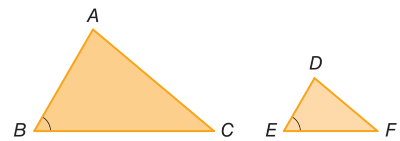
- Casos de semelhança:

AA (ângulo-ângulo)



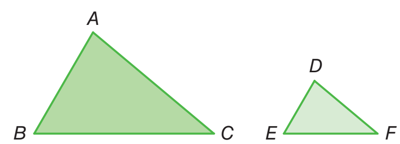
$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

LAL (lado-ângulo-lado)



$$\left.\begin{matrix} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

LLL (lado-lado-lado)



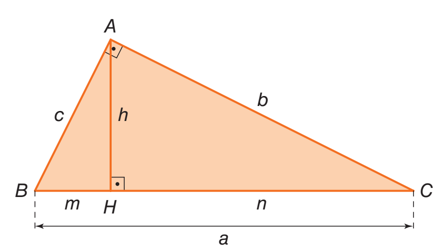
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

- O número k, tal que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = k$, é chamado de **razão de semelhança** do triângulo ABC para o triângulo DEF.

Nota: O conceito de semelhança de triângulos pode ser estendido para quaisquer figuras geométricas.

Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo ABC abaixo.



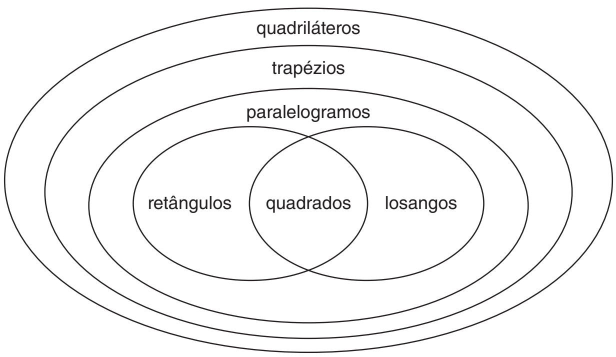
- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Temos as seguintes relações:

$$\boxed{\begin{matrix} a^2 = b^2 + c^2 & a \cdot h = b \cdot c \\ h^2 = m \cdot n & b \cdot h = c \cdot n \\ c^2 = a \cdot m & c \cdot h = b \cdot m \\ b^2 = a \cdot n & \end{matrix}}$$

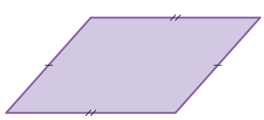
Quadriláteros

- **Trapézio** é todo quadrilátero que possui pelo menos um par de lados paralelos.
- **Paralelogramo** é todo trapézio que apresenta dois pares de lados paralelos.
- **Retângulo** é todo paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.
- **Losango** é todo paralelogramo que possui os lados congruentes entre si.
- **Quadrado** é todo paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes entre si.

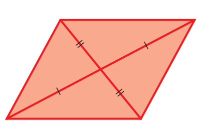


Propriedades dos quadriláteros notáveis

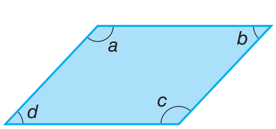
P1. Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.



P2. O ponto de intersecção das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

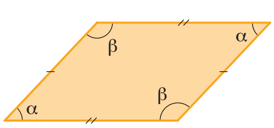


P3. Em todo paralelogramo, dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares.

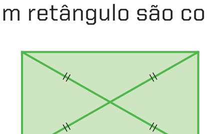


$a + b = 180°$
$b + c = 180°$
$c + d = 180°$
$d + a = 180°$

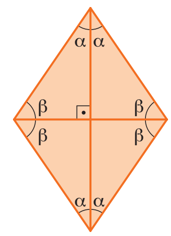
P4. Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.



P5. As diagonais de um retângulo são congruentes.

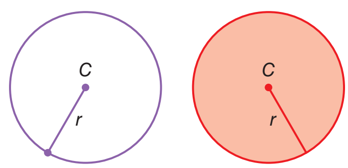


P6. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.



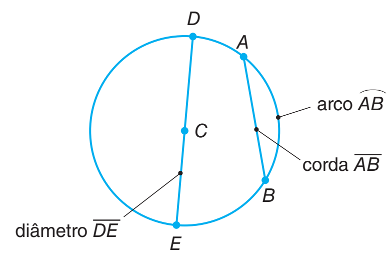
Circunferência e círculo

- Sendo *C* um ponto do plano e *r* uma medida positiva, chama-se **circunferência** de centro *C* e raio *r* o conjunto dos pontos desse plano que distam de *C* a medida *r*.
- A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.



circunferência círculo

- Dois pontos, *A* e *B*, de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas de **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro *C* da circunferência é chamada de **diâmetro**.

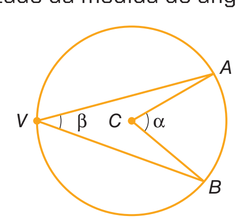


Propriedade das cordas

Em uma circunferência de centro *C*, sejam dois pontos distintos, *A* e *B*, e *M* um ponto da corda $\overline{AB}$. O segmento $\overline{CM}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$ se, e somente se, *M* é ponto médio dessa corda.

Ângulos em uma circunferência

- Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência. A medida, em grau, de um arco de circunferência é a medida do ângulo central que o determina.
- Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central correspondente.



C é o centro da circunferência
$A\hat{C}B$ é ângulo central
$m(A\hat{C}B) = \alpha$
$A\hat{V}B$ é ângulo inscrito
$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$

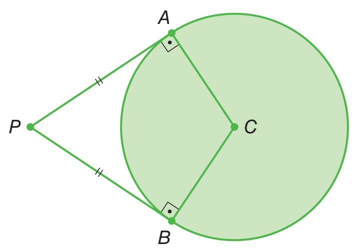
Reta tangente a uma circunferência

Uma reta r e uma circunferência de um mesmo plano são tangentes entre si quando têm um único ponto T em comum.

Propriedades das retas tangentes

P1. Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

P2. Se P é um ponto exterior a uma circunferência e os pontos A e B pertencem a ela, de modo que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência, então $PA = PB$.



O comprimento da circunferência

- Em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento c e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante. Indicamos essa constante por π.

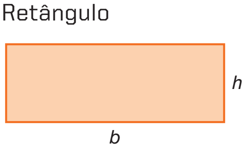
$$\frac{c}{2r} = \pi$$

- O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado por:

$$c = 2\pi r$$

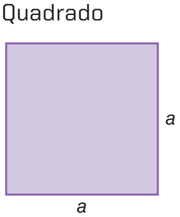
Cálculo da área de alguns polígonos e do círculo

- Retângulo



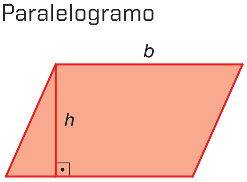
$$A = b \cdot h$$

- Quadrado



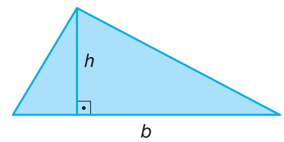
$$A = a^2$$

- Paralelogramo



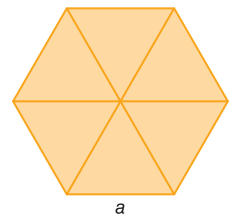
$$A = b \cdot h$$

- Triângulo



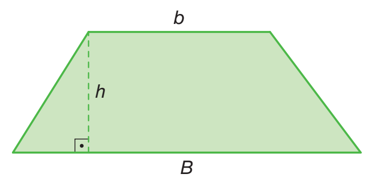
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Hexágono regular



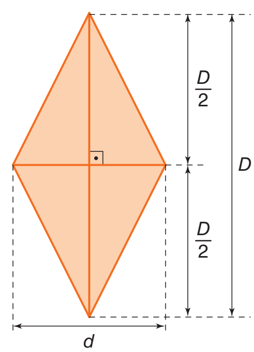
$$A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

- Trapézio



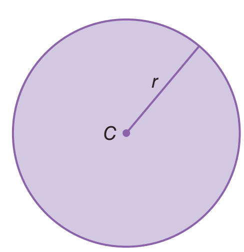
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- Losango



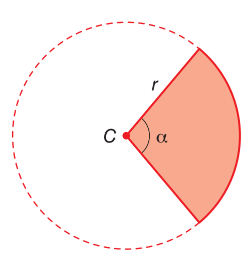
$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

- Círculo



$$A = \pi r^2$$

- Setor circular



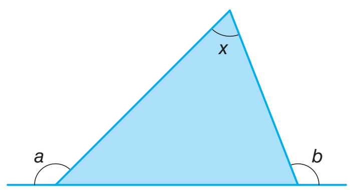
$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Áreas de figuras semelhantes

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas.

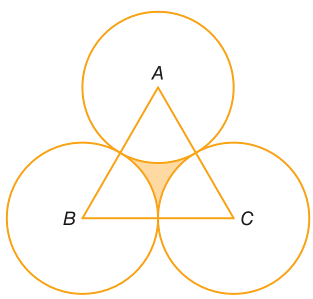
No Vestibular

1. **(UPF-RS)** No triângulo abaixo, x é um ângulo interno e a e b são ângulos externos. Sabendo que $a + b = 210°$ e $3a - 2b = 130°$, sobre o ângulo x pode-se afirmar que:

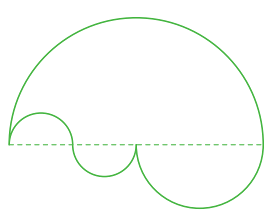


a) seu suplemento é 110°.
b) seu complemento é 60°.
c) seu complemento é 20°.
d) seu suplemento é 100°.
e) seu suplemento mais seu complemento é 180°.

2. **(Udesc)** O perímetro do triângulo equilátero ABC é 12 cm, onde A, B e C são os centros das circunferências ilustradas na figura. Calcule a área da região hachurada, delimitada pelas circunferências.

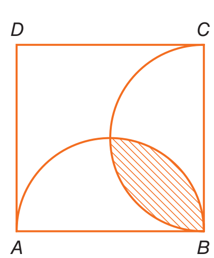


3. **(UPF-RS)** Na figura, composta por 4 semicircunferências, as duas menores são iguais e o raio mede 1,5 cm, a semicircunferência intermediária tem diâmetro igual ao raio da circunferência maior. O perímetro em π cm e a área em π cm² da figura são, respectivamente:



a) 24 e 27
b) 12 e 22,5
c) 24 e 22,5
d) 12 e 27
e) 24 e 12

4. **(UFT-TO)** Considere o quadrado $ABCD$ de lado 12 cm e as semicircunferências de arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$, conforme figura abaixo:



O valor da área da região hachurada é:

a) $12(\pi - 3)$ cm²
b) $10(\pi + 2)$ cm²
c) $18(\pi - 2)$ cm²
d) $(\pi + 36)$ cm²

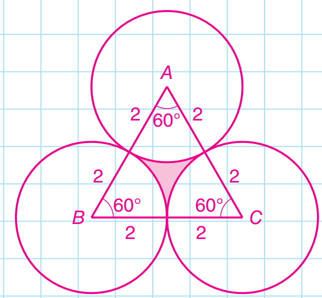
Exercício 1

Temos: $\begin{cases} a + b = 210° \\ 3a - 2b = 130° \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos:
$a = 68°$ e $b = 142°$
Assim:
$x + (180° - 68°) + (180° - 142°) = 180° \Rightarrow x = 30°$
Logo, o complemento de x é 60°.
Alternativa **b.**

Exercício 2

Temos a figura ao lado.



A área do triângulo equilátero ABC, de lado de medida 4 cm, é:

$\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

A área dos setores circulares interiores ao triângulo é equivalente à área de um setor circular de raio 2 cm e ângulo central de: $3 \cdot 60° = 180°$. Ou seja, é equivalente à área de um semicírculo de raio 2 cm:

$\dfrac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$

Assim, a área procurada é:
$A = 4\sqrt{3} - 2\pi = 2(2\sqrt{3} - \pi)$

Exercício 3

O perímetro C da figura é igual à soma dos perímetros das semicircunferências:

$C = 2 \cdot \dfrac{2\pi \cdot 1{,}5}{2} + \dfrac{2\pi \cdot 3}{2} + \dfrac{2\pi \cdot 6}{2} = 12\pi$

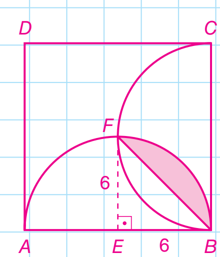
A área A da figura é igual à área do semicírculo de raio 6 somada à área do semicírculo de raio 3, ou seja:

$A = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{2} + \dfrac{\pi \cdot 3^2}{2} = 22{,}5\pi$

Alternativa **b.**

Exercício 4

Considere a seguinte figura:

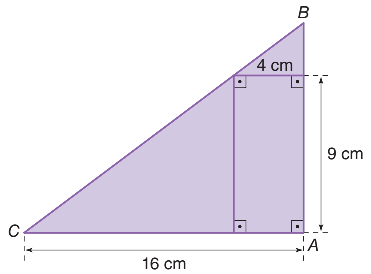


Para calcular a área A da região hachurada, basta subtrair a área do triângulo BEF da área do setor circular BEF:

$A = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 - \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 9(\pi - 2)$

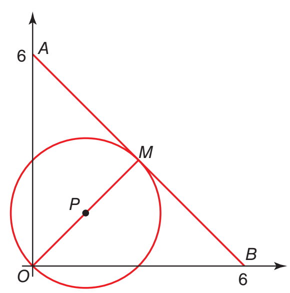
A área pedida no enunciado é o dobro da área A:
$2A = 18(\pi - 2)$
Alternativa **c.**

5. **(UFPel-RS)** A geometria métrica, através de suas relações, proporciona que possamos descobrir medidas desconhecidas. Usando as relações convenientes, é correto afirmar que o perímetro do triângulo *ABC*, abaixo, equivale a:



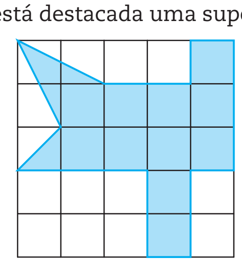
a) 24 cm
b) 34 cm
c) 35 cm
d) 48 cm
e) 45 cm
f) I.R.

6. **(Unifor-CE)** Se *M* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e *P* é o ponto médio do segmento $\overline{OM}$, determine o comprimento da circunferência de centro *P* e raio $\overline{OP}$, mostrado na figura abaixo:



a) $2\pi\sqrt{2}$
b) $3\pi\sqrt{2}$
c) $5\pi\sqrt{2}$
d) $3\pi\sqrt{3}$
e) $4\pi\sqrt{2}$

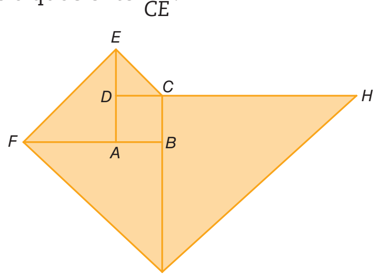
7. **(Unifor-CE)** A figura abaixo apresenta uma malha quadriculada na qual está destacada uma superfície colorida.



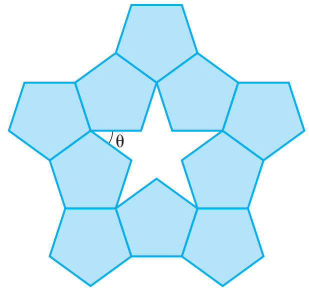
Se o lado de cada quadradinho da malha mede 1 cm, a área da superfície da região colorida, em centímetros quadrados, é:

a) 9 b) 12,5 c) 15,5 d) 16,75 e) 18,25

8. **(UFBA)** Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e *ABCD* é um quadrado. Nessas condições, determine o quociente $\frac{GH}{CE}$.



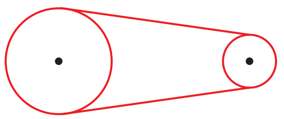
9. **(Unifesp)** Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



Nestas condições, o ângulo θ mede:

a) 108°
b) 72°
c) 54°
d) 36°
e) 18°

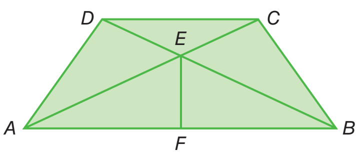
10. **(Unifesp)** A figura mostra duas roldanas circulares ligadas por uma correia. A roldana maior, com raio 12 cm, gira fazendo 100 rotações por minuto, e a função da correia é fazer a roldana menor girar. Admita que a correia não escorregue.



Para que a roldana menor faça 150 rotações por minuto, o seu raio, em centímetros, deve ser:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

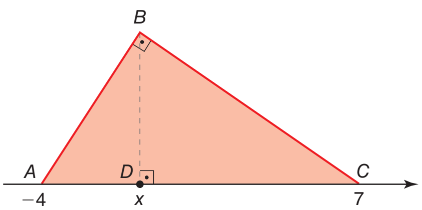
11. **(Unioeste-PR)** A figura a seguir representa um trapézio isósceles em que a base $\overline{DC}$ mede 20 cm, a base $\overline{AB}$ mede 60 cm e a altura mede 12 cm. O segmento $\overline{EF}$ é perpendicular à base $\overline{AB}$ e é bissetriz do ângulo $A\hat{E}B$.



A partir destas informações, pode-se concluir que a medida do segmento $\overline{EF}$ é de:

a) 10 cm
b) 6,8 cm
c) 7,5 cm
d) 9 cm
e) 9,3 cm

12. **(UFSCar-SP)** A hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.

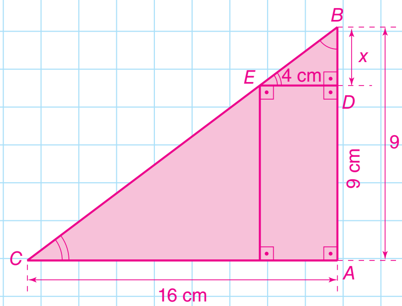


Se $x > 0$ e a medida da altura $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo *ABC* é $2\sqrt{6}$, então *x* é o número real:

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $3\sqrt{3}$

Exercício 5

Considere a figura a seguir.



Os triângulos *ABC* e *DBE* são semelhantes pelo caso AA; assim, sendo $BD = x$, em centímetro, temos:

$$\frac{4}{16} = \frac{x}{9 + x} \Rightarrow x = 3$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo *BAC*, temos:

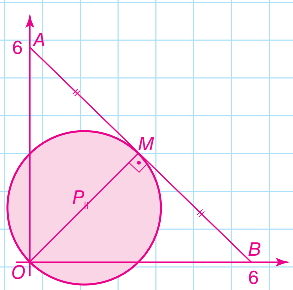
$(BC)^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow BC = 20$

Logo, o perímetro é dado por: $(20 + 16 + 12)$ cm $= 48$ cm

Alternativa **d**.

Exercício 6

Considere a figura a seguir.



Como os triângulos *BMO* e *AMO* são congruentes pelo caso LAL, $OM = BM = AM$.

Assim, temos:

$$6 = 2r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o comprimento *C* da circunferência é:

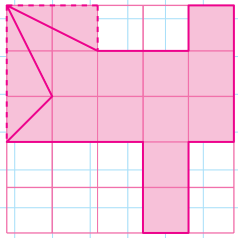
$$C = 2\pi r = 2\pi\frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\pi\sqrt{2}$$

Alternativa **b**.

Exercício 7

A área *A* da região colorida, em centímetro quadrado, é igual à área de um retângulo de lados 3 cm e 5 cm menos a área de dois triângulos, um de base 3 cm e altura 1 cm e o outro de catetos 2 cm e 1 cm, ou seja:

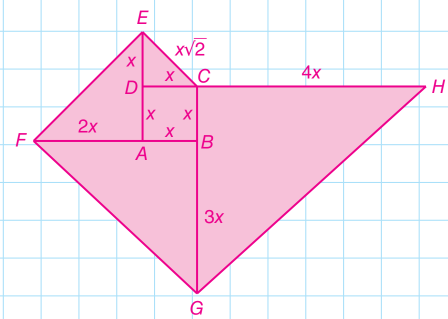
$$A = 3 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 12{,}5$$



Alternativa **b**.

Exercício 8

Considere a figura a seguir.



Sendo *x* a medida do lado do quadrado menor e sabendo que todos os triângulos acima são retângulos isósceles, temos:

$AB = BC = CD = DA = x$

Assim, $AE = 2x$, $BF = 3x$, $CG = 4x$ e $GH = 4\sqrt{2}x$.

Logo: $\frac{GH}{CE} = \frac{4\sqrt{2}x}{x\sqrt{2}} = 4$

Exercício 9

A medida, em grau, do ângulo interno de um pentágono regular é: $\frac{(5 - 2) \cdot 180°}{5} = 108°$

Assim: $\theta = 360° - 3 \cdot 108° = 36°$

Alternativa **e**.

Exercício 10

Supondo que a correia não escorregue e sendo *r*, em centímetro, o raio da roldana menor, temos:

$2\pi \cdot r \cdot 150 = 2\pi \cdot 12 \cdot 100 \Rightarrow r = 8$

Alternativa **a**.

Exercício 11

Os triângulos *AEB* e *CED* são semelhantes pelo caso AA, de razão de semelhança $k = 3$. Assim, sendo *h* a altura do triângulo *CDE*, temos:

$h + 3h = 12 \Rightarrow h = 3$

Logo: $EF = 3h = 9$

Alternativa **d**.

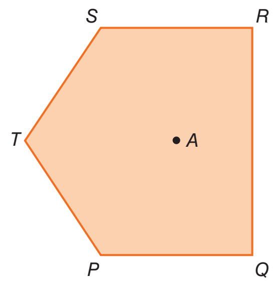
Exercício 12

Sendo $x > 0$ a abscissa procurada, temos, pelas relações métricas nos triângulos retângulos:

$\left(2\sqrt{6}\right)^2 = (x + 4)(7 - x) \Rightarrow x = 4$

Alternativa **b**.

13. (UFG-GO) Uma empresa de vigilância irá instalar um sistema de segurança em um condomínio fechado, representado pelo polígono da figura abaixo.



A empresa pretende colocar uma torre de comunicação, localizada no ponto A, indicado na figura, que seja equidistante dos vértices do polígono, indicados por P, Q, R, S e T, onde serão instalados os equipamentos de segurança.

Sabe-se que o lado $\overline{RQ}$ desse polígono mede 3.000 m e as medidas dos outros lados são iguais à distância do ponto A aos vértices do polígono.

Calcule a distância do ponto A, onde será instalada a torre, aos vértices do polígono.

14. (UFSCar-SP) A sequência de figuras mostra um único giro do ponto A, marcado em uma roda circular, quando ela roda, no plano, sobre a rampa formada pelos segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{QP}$.

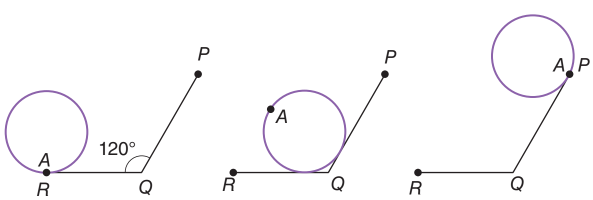
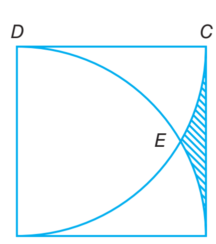


figura 1 figura 2 figura 3

Além do que indicam as figuras, sabe-se que o raio da roda mede 3 cm, e que ela gira sobre a rampa sem deslizar em falso. Sendo assim, o comprimento $RQ + QP$ da rampa, em cm, é igual a:

a) $5\pi + 2\sqrt{3}$
b) $4\pi + 3\sqrt{5}$
c) $6\pi + \sqrt{3}$
d) $7\pi + \sqrt{3}$
e) $8\pi + 3\sqrt{5}$

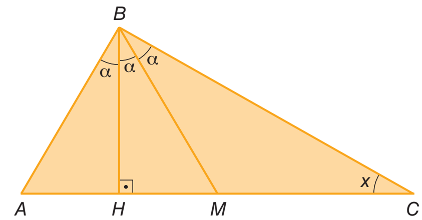
15. (Fuvest-SP) Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1.



Logo, a área da região hachurada é:

a) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
b) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

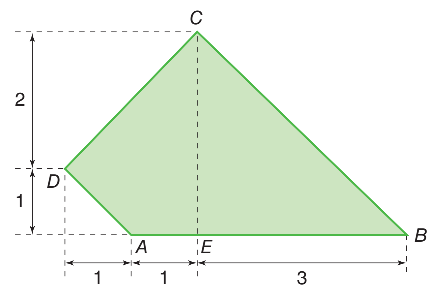
16. (UFV-MG) Considere o triângulo ABC, sendo $\overline{BH}$ a altura do triângulo ABC e $\overline{BM}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.



Com base na figura acima, a medida, em grau, do ângulo x é:

a) 60
b) 20
c) 45
d) 30

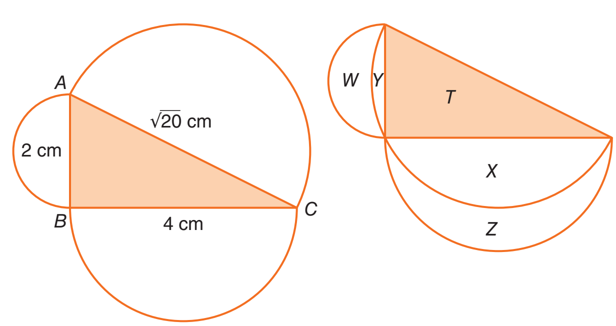
17. (UFV-MG) José deseja dividir igualmente entre seus dois filhos um terreno com um formato de um quadrilátero $ABCD$, conforme indica a figura abaixo.



Para dividir o terreno em dois lotes de mesma área, ele irá construir uma cerca reta que ficará perpendicular ao lado $\overline{AB}$ e paralela ao segmento $\overline{EC}$. O perímetro do lote que está à direita é:

a) $2 - 4\sqrt{2}$
b) $4 - 4\sqrt{2}$
c) $2 + 4\sqrt{2}$
d) $4 + 4\sqrt{2}$

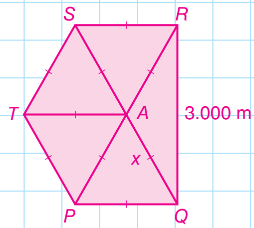
18. (Unioeste-PR) Sobre cada um dos lados de um triângulo retângulo ABC são construídos semicírculos tais que, para cada um deles, seu diâmetro tem a mesma medida do lado do triângulo sobre o qual está construído (ver figura 1). Sabe-se que $\overline{AB}$ mede 2 cm, $\overline{BC}$ mede 4 cm e $\overline{AC}$ mede $\sqrt{20}$ cm. Rebatendo-se o semicírculo sobre a hipotenusa, $\overline{AC}$, obtém-se a figura 2, que é formada por cinco regiões distintas, cujas áreas, em cm², são representadas por X, Y, T, Z e W. Levando-se em conta estas afirmações, é correto afirmar que a área do triângulo, denominada T, é dada por:



a) $T = X + Y$
b) $T = W - X + Z - Y$
c) $T = X + Y + Z + W$
d) $T = W + X$
e) $T = Z + W$

Exercício 13

Considere a figura abaixo.

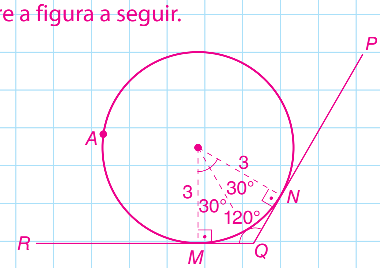


Seja x a distância, em metro, do ponto A aos vértices do pentágono.
Como os triângulos PAT, TAS, SAR e PAQ são equiláteros, temos que os ângulos $R\hat{A}Q$, $A\hat{R}Q$ e $A\hat{Q}R$ medem 120°, 30° e 30°, respectivamente; assim, a medida RQ é o dobro da altura de um triângulo equilátero de lado x, ou seja:

$$3.000 = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 1.000\sqrt{3}$$

Exercício 14

Considere a figura a seguir.



A soma das medidas dos segmentos $\overline{RM}$ e $\overline{NQ}$, em centímetro, é igual ao comprimento da circunferência de raio 3 menos o arco $\overset{\frown}{MN}$ da mesma circunferência, ou seja:

$$RM + NQ = 2\pi \cdot 3 - \frac{\pi}{3} \cdot 3 = 5\pi$$

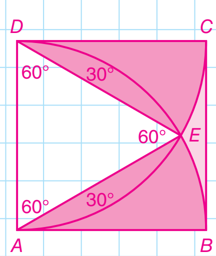
Como cada um dos segmentos $\overline{MQ}$ e $\overline{QN}$ mede metade da medida de um lado de um triângulo equilátero de altura 3 cm, temos:
$MQ = QN = \sqrt{3}$ cm. Logo:

$$RQ + QP = \left(5\pi + 2\sqrt{3}\right) \text{ cm}$$

Alternativa **a**.

Exercício 15

Considere a figura a seguir.



Os setores circulares CDE e BAE, com centros respectivamente em D e A, são congruentes com ângulo central de 30°. Assim, a área destacada é igual à área do quadrado $ABCD$ de lado unitário menos a soma das áreas do setor de ângulo central $2 \cdot 30° = 60°$ e raio unitário com o triângulo equilátero de lado unitário, ou seja:

$$A = 1 - \frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 - \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

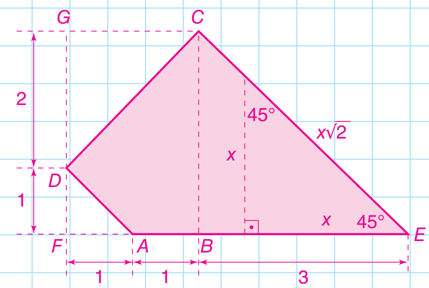
Alternativa **c**.

Exercício 16

Os triângulos BHA e BHM são congruentes pelo caso ALA. Assim, o triângulo AMB é isósceles de base $\overline{AB}$ e, portanto, $m(B\hat{A}M) = 2\alpha$.
Logo, no triângulo AHB, temos:
$2\alpha + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$
Logo, $x = 30°$.
Alternativa **d**.

Exercício 17

Considere a figura a seguir.



A área do trapézio $FGCB$ é $\frac{(2 + 5) \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$ e a área do terreno é igual à área do trapézio $FGCB$ menos a área de dois triângulos retângulos isósceles de catetos 2 e 1.
Assim, temos:

$$A = \frac{21}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 8.$$

Logo, a área da região onde será construída a cerca forma um triângulo retângulo isósceles de área igual a 4.
Sendo x a medida de um dos catetos, temos:

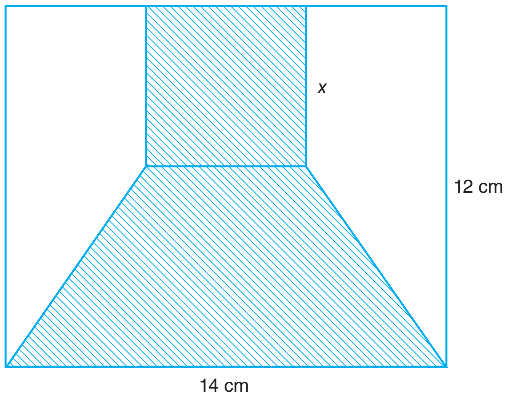
$$\frac{x^2}{2} = 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Logo, seu perímetro é: $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4 + 4\sqrt{2}$
Alternativa **d**.

Exercício 18

O semicírculo de raio $\frac{\sqrt{20}}{2}$ é equivalente à soma das áreas dos semicírculos de raios 1 e 2. Assim, pela figura 2, temos:
$T + Y + X = W + Y + X + Z \Rightarrow T = W + Z$
Alternativa **e**.

19. **(Unifesp)** De um cartão retangular de base 14 cm e altura 12 cm, deseja-se recortar um quadrado de lado x e um trapézio isósceles, conforme a figura, onde a parte hachurada será retirada.



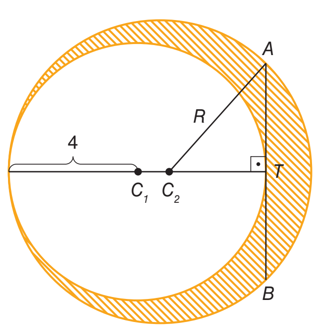
O valor de x, em centímetro, para que a área total removida seja mínima, é:

a) 3
b) 2
c) 1,5
d) 1
e) 0,5

20. **(Unifesp)** Em um triângulo com lados de comprimentos a, b, c, tem-se $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$. A medida do ângulo oposto ao lado de comprimento c é:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 120°

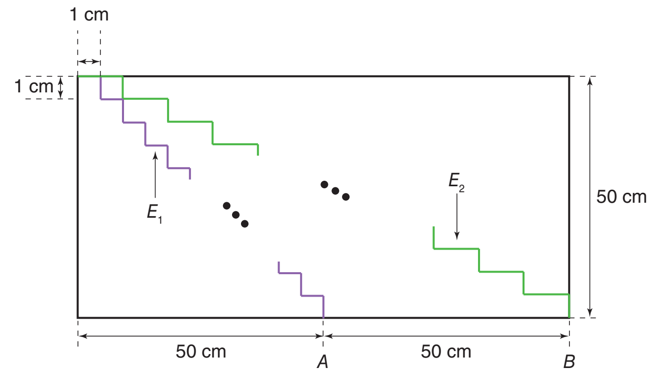
21. **(Unifesp)** A figura mostra uma circunferência, de raio 4 e centro C_1, que tangencia internamente a circunferência maior, de raio R e centro C_2. Sabe-se que A e B são pontos da circunferência maior, $\overline{AB}$ mede 8 e tangencia a circunferência menor em T, sendo perpendicular à reta que passa por C_1 e C_2.

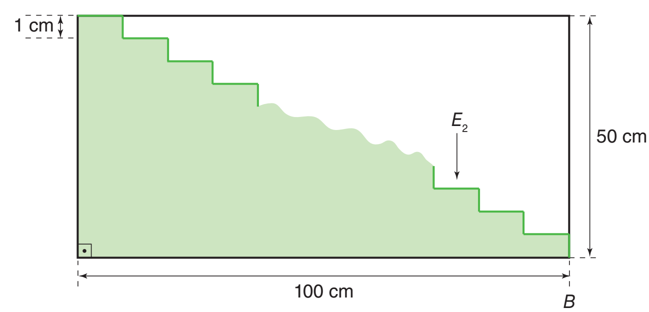


A área da região hachurada é:

a) 9π
b) 12π
c) 15π
d) 18π
e) 21π

22. **(Unifesp)** A primeira figura representa um retângulo de 100 cm por 50 cm, com uma escada E_1 contendo 50 degraus de 1 cm de largura por 1 cm de altura. O ponto A indica a extremidade inferior da escada E_1. Pretende-se ampliar a largura dos degraus de E_1, de forma a obter uma nova escada, E_2, contendo também 50 degraus, todos de mesma largura e tendo como extremidade inferior o ponto B, conforme figura. Na nova escada, E_2, a altura dos degraus será mantida, igual a 1 cm.

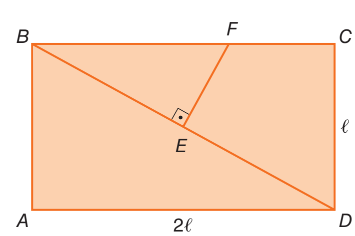




A área da região sombreada, sob a escada E_2, conforme a segunda figura, será:

a) 2.050 cm^2
b) 2.500 cm^2
c) 2.550 cm^2
d) 2.750 cm^2
e) 5.000 cm^2

23. **(Fuvest-SP)** No retângulo $ABCD$ da figura, tem-se $CD = \ell$ e $AD = 2\ell$. Além disso, o ponto E pertence à diagonal $\overline{BD}$, o ponto F pertence ao lado $\overline{BC}$, e $\overline{EF}$ é perpendicular a $\overline{BD}$. Sabendo que a área do retângulo $ABCD$ é cinco vezes a área do triângulo BEF, então $\overline{BF}$ mede:



a) $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{8}$

b) $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{4}$

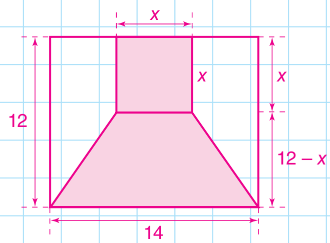
c) $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{3\ell\sqrt{2}}{4}$

e) $\ell\sqrt{2}$

Exercício 19

Considere a figura a seguir.



A área a ser removida é equivalente à área de um quadrado de lado x somada com a área de um trapézio isósceles de base maior 14, base menor x e altura $12 - x$, ou seja:

$A(x) = x^2 + \dfrac{(14 + x)(12 - x)}{2} \Rightarrow A(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 84$

Portanto, a área será mínima para:

$x_v = \dfrac{-(-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

Alternativa **d**.

Exercício 20

$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab$

Sendo α o ângulo oposto ao lado de medida c, temos, pela lei dos cossenos:

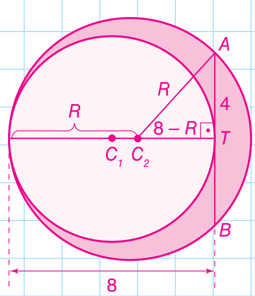
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 60°$

Alternativa **c**.

Exercício 21

Considere a figura a seguir:



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo TAC_2, temos:

$R^2 = 4^2 + (8 - R)^2 \Rightarrow R = 5$

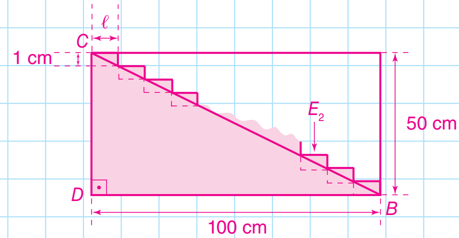
Assim, a área hachurada é equivalente à coroa circular de raio maior 5 e raio menor 4, ou seja:

$A = \pi(5^2 - 4^2) = 9\pi$

Alternativa **a**.

Exercício 22

Considere a figura a seguir.



Seja ℓ, em centímetro, a largura de cada um dos 50 degraus. Assim:

$\ell = \dfrac{100}{50} = 2$

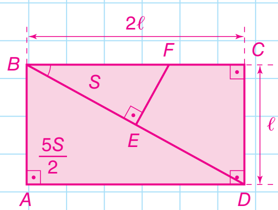
Portanto, a área sombreada, em centímetro quadrado, é equivalente à área de um triângulo retângulo de catetos 100 cm e 50 cm mais 50 triângulos retângulos de catetos 1 cm e 2 cm, ou seja:

$A = \dfrac{100 \cdot 50}{2} + 50 \cdot \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 2.550$

Alternativa **c**.

Exercício 23

Considere a figura a seguir.



$BD = \sqrt{4\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{5}$

Seja A a área do triângulo retângulo BEF.

A diagonal divide o retângulo em dois triângulos congruentes de área $\dfrac{5A}{2}$. Assim, os triângulos BEF e BCD são semelhantes, pelo caso AA, com razão de semelhança k tal que:

$k^2 = \dfrac{A}{\frac{5A}{2}} \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Logo, temos:

$\dfrac{BF}{BD} = k \Rightarrow \dfrac{BF}{\ell\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore BF = \ell\sqrt{2}$

Alternativa **e**.

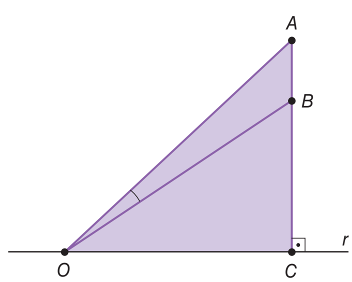
24. **(Unifesp)** Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura I, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura II.

Figura I   Figura II

Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por:

a) $S = 3s$
b) $S = 4s$
c) $S = 6s$
d) $S = 8s$
e) $S = 9s$

25. **(Unifesp)** Na figura, o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular à reta r. Sabe-se que o ângulo $A\hat{O}B$, com O sendo um ponto da reta r, será máximo quando O for o ponto onde r tangencia uma circunferência que passa por A e B.



Se $\overline{AB}$ representa uma estátua de 3,6 m sobre um pedestal $\overline{BC}$ de 6,4 m, a distância OC, para que o ângulo $A\hat{O}B$ de visão da estátua seja máximo, é:

a) 10 m
b) 8,2 m
c) 8 m
d) 7,8 m
e) 4,6 m

26. **(Fuvest-SP)** No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$. Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

Exercício 24

Seja x o comprimento do arame. O raio R do círculo da figura 1 é:

$x = 2\pi \cdot R \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$

Portanto, sua área é: $S = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2}$

O raio r de cada círculo da figura 2 é dado por:

$\frac{x}{3} = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{x}{6\pi}$

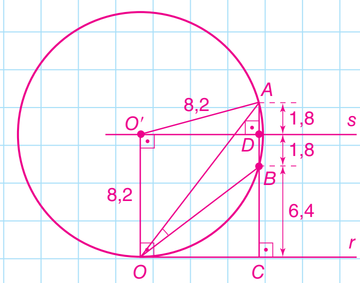
Portanto, sua área é: $s = \pi \cdot \frac{x^2}{36\pi^2}$

Logo: $\frac{S}{s} = 9 \Rightarrow S = 9s$

Alternativa **e**.

Exercício 25

Considere a figura a seguir.



O centro da circunferência circunscrita ao triângulo AOB é determinado pela reta s, mediatriz de $\overline{AB}$ e pela perpendicular traçada pelo ponto O em relação à reta r. Assim, o quadrilátero $DO'OC$ é retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

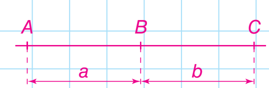
$(8{,}2)^2 = (1{,}8)^2 + (O'D)^2 \Rightarrow (OC)^2 = 64$

$\therefore OC = 8$

Alternativa **c**.

Exercício 26

Considere a figura a seguir. Seja $AB = a$ e $BC = b$. Do enunciado, temos:



$\frac{AB}{BC} = 2\frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{2b}{a}$

$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$

$\begin{cases} \frac{b}{a} = t \\ \frac{1}{2t} = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = t & \text{(I)} \\ 2t^2 + 2t - 1 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação II, obtemos: $t = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Substituindo t na equação I: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

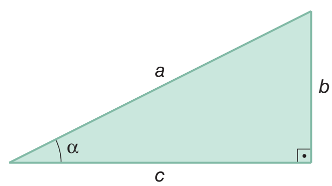
Alternativa **b**.

Trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica

A **Trigonometria** (do grego *trigōnon*, "triângulo", e *metron*, "medida") estuda as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos internos de triângulos, particularmente triângulos retângulos. Sua origem é incerta, porém sua sistematização iniciou-se na antiga Grécia, com o estudo das relações entre ângulo central, arco e corda de uma circunferência.

Trigonometria no triângulo retângulo

- Sendo α a medida de um ângulo agudo em um triângulo retângulo qualquer, temos:



- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha} = \dfrac{b}{c}$

- Dado um ângulo agudo de medida α, temos:

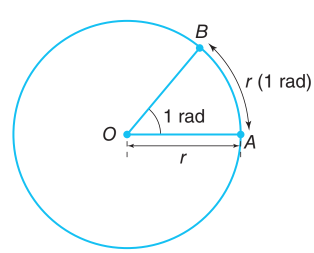
$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

- Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, ou seja, se α é a medida em grau de um ângulo agudo, então:

- $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$

O radiano

- Um radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.
  $m(\overset{\frown}{AB}) = m(A\hat{O}B) = 1 \text{ rad}$

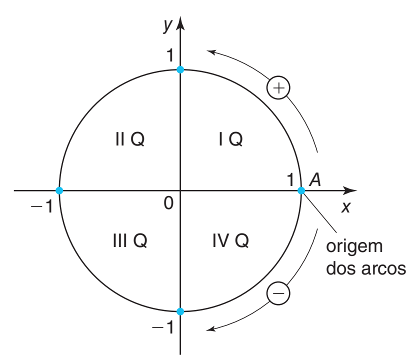


- A medida de uma circunferência é 2π rad.
- Temos a seguinte equivalência:

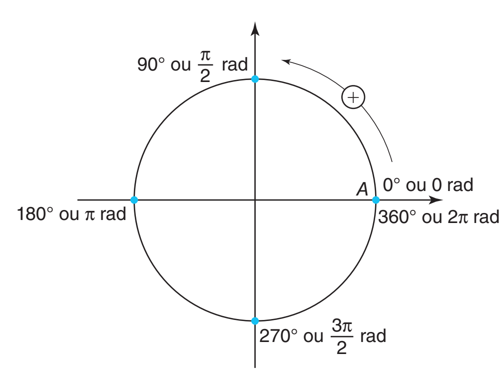
$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

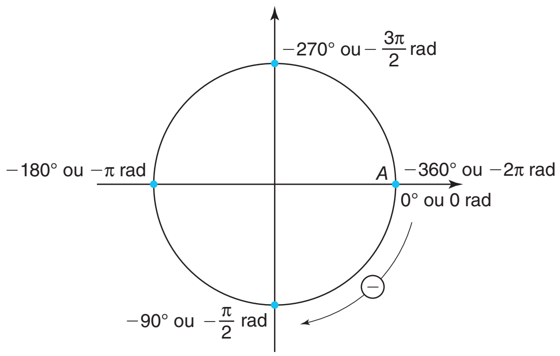
Circunferência trigonométrica

- Em um plano, considere uma circunferência de raio r unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Essa estrutura, com as convenções a seguir, é chamada de **circunferência trigonométrica**.
  - O ponto $A(1, 0)$ é a **origem dos arcos** a serem medidos na circunferência.
  - Se um arco for medido no sentido **horário**, então ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal **negativo** $(-)$.
  - Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal **positivo** $(+)$.
  - Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (Q); esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, conforme a figura.
  - Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.



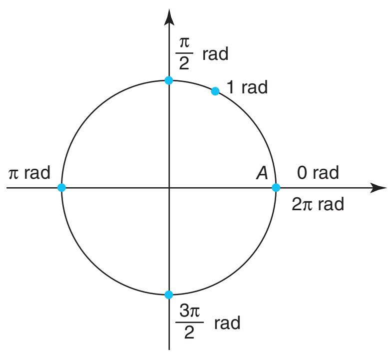
- Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto M indica a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$.



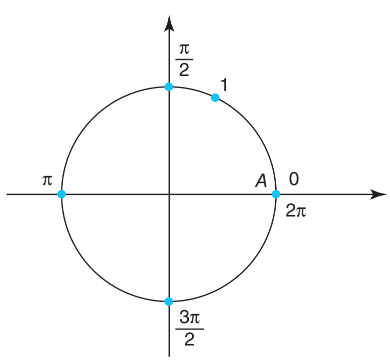


- Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de **arcos côngruos**.
- A cada número real α associamos a extremidade M de um arco trigonométrico de medida α rad. Isto é:

Medidas em radiano associadas a pontos da circunferência trigonométrica

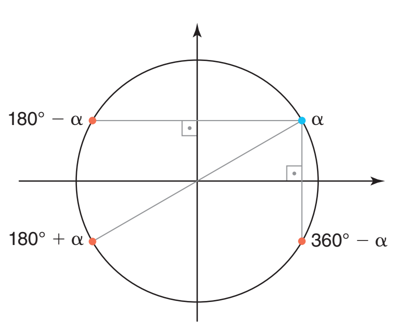


Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

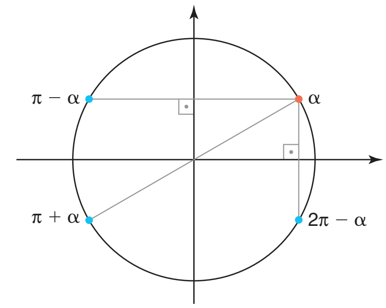


Simetrias

- Sendo α uma medida em grau:

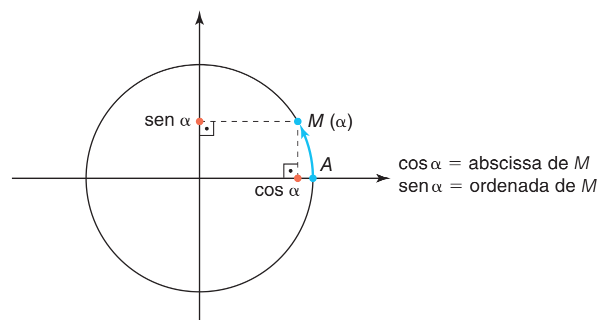


- Sendo α uma medida em radiano:



Seno e cosseno de um arco trigonométrico

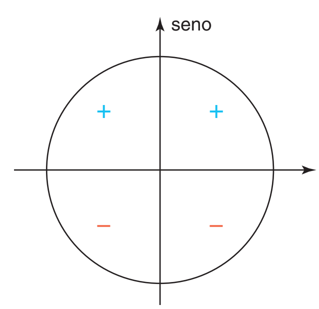
- Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$, chamam-se **cosseno** e **seno** de α a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente.



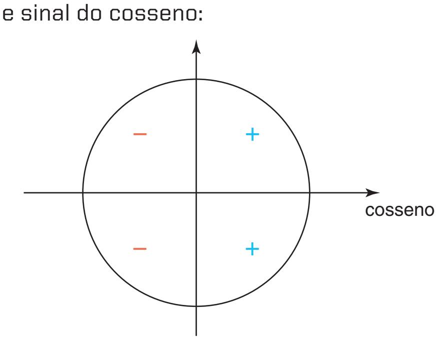
- Como qualquer coordenada de um ponto da circunferência trigonométrica é no máximo 1 e no mínimo -1, concluímos que:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$

- Variação de sinal do seno:

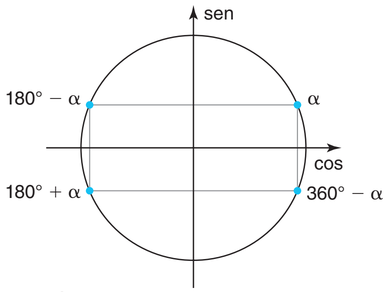


- Variação de sinal do cosseno:



Redução ao primeiro quadrante

Se α é uma medida em grau:



$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(360° - \alpha) = \cos\alpha$

Essas relações também valem quando α é uma medida fora do primeiro quadrante, em grau ou radiano.

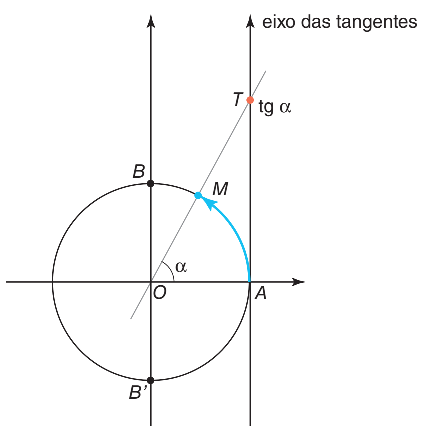
Relação fundamental da trigonometria

Para qualquer arco trigonométrico de medida α, temos:

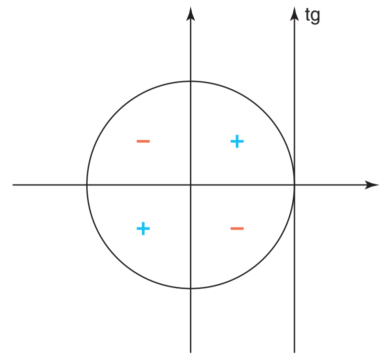
$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Tangente de um arco trigonométrico

- Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto T, que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das tangentes.



- Variação de sinal da tangente:



- Se um arco trigonométrico tem medida α, com $\cos\alpha \neq 0$, então:

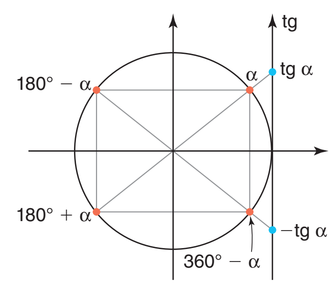
$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

- Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis:

	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Redução ao 1º quadrante

Se α é uma medida, em grau, do primeiro quadrante:

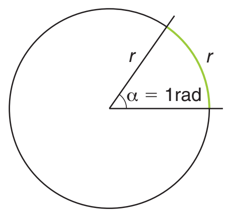


$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\text{tg}\,(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$
$\text{tg}\,(360° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Essas relações também valem quando α é uma medida fora do primeiro quadrante, em grau ou radiano.

No Vestibular

1. **(UEMS)** Define-se radiano como a medida de um ângulo com vértice no centro de uma circunferência e que enxerga um arco de comprimento igual à medida do raio da circunferência. Na figura a seguir, o ângulo $\alpha = 1$ rad.



Se o perímetro da circunferência vale $2\pi r$, então 1 radiano corresponde a:

I. Um ângulo maior que 60°.

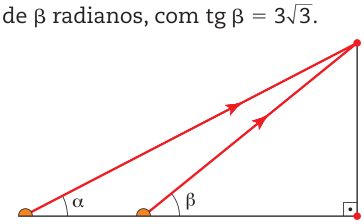
II. Um ângulo entre 50° e 60°.

III. $\frac{\pi}{4}$ radianos.

É verdadeiro o que se afirma apenas em:

a) I
b) I e II
c) I e III
d) II
e) III

2. **(Fuvest-SP)** Para se calcular a altura de uma torre, utilizou-se o seguinte procedimento ilustrado na figura: um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, a uma certa distância da torre, e emitiu um raio em direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado entre o raio e o solo foi de $\frac{\pi}{3}$ radianos. A seguir, o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o ângulo então obtido foi de β radianos, com $\text{tg}\,\beta = 3\sqrt{3}$.



É correto afirmar que a altura da torre, em metro, é:

a) $4\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $7\sqrt{3}$
e) $8\sqrt{3}$

3. **(UFPel-RS)** Considerando a circunferência trigonométrica, identifique as sentenças abaixo como verdadeiras ou falsas.

I. No quadrante onde se localiza o arco (−4.330°), a função seno é crescente.

II. No quadrante onde se localiza o arco $\frac{34\pi}{5}$ rad, a função cosseno é decrescente.

III. O valor da tangente do arco de 1.000° é positivo.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I e II tão somente.
b) II e III tão somente.
c) I, II e III.
d) III tão somente.
e) II tão somente.
f) I.R.

Exercício 1

Montando uma regra de três, temos:

comprimento do arco	medida do arco (em grau)
$2\pi r$	360
r	x

$$\Rightarrow x = \frac{360 \cdot r}{2\pi r} = \frac{360}{2\pi}$$

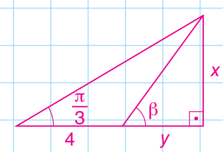
Como $\pi \approx 3{,}14$, temos: $x \approx 57°$

Logo, 1 rad $\approx$ 57°.

Alternativa **d**.

Exercício 2

Considere a figura abaixo, em que x representa a altura da torre.



$$\begin{cases} \text{tg}\,\beta = \dfrac{x}{y} \\ \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{x}{4+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \\ \sqrt{3} = \dfrac{x}{4+y} \end{cases}$$

$\therefore\ x = 6\sqrt{3}$ e $y = 6$

Alternativa **c**.

Exercício 3

I. V, pois $-4.330° \equiv -10°$, ou seja, pertence ao 4º quadrante.

II. V, pois $\frac{34\pi}{5} \equiv \frac{4\pi}{5}$, ou seja, pertence ao 2º quadrante.

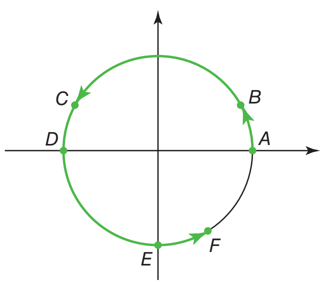
III. F, pois $1.000° \equiv 280°$, ou seja, pertence ao 4º quadrante.

Alternativa **a**.

4. **(UFSCar-SP)** O conjunto das soluções em r e θ do sistema de equações $\begin{cases} r \cdot \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3} \\ r \cdot \cos\theta = 1 \end{cases}$ para $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$ é:

a) $\left\{2, \frac{\pi}{6}\right\}$
b) $\left\{1, \frac{\pi}{3}\right\}$
c) $\{2, 1\}$
d) $\{1, 0\}$
e) $\left\{2, \frac{\pi}{3}\right\}$

5. **(Insper)** A figura abaixo representa a circunferência trigonométrica (cujo raio mede 1). As medidas dos arcos menores $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{EF}$ são todas iguais a $\frac{\pi}{6}$. Se x, y e z são números reais positivos e representam, respectivamente, as medidas dos arcos trigonométricos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AF}$, então $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z + \cos x + \cos y + \cos z$ é igual a:

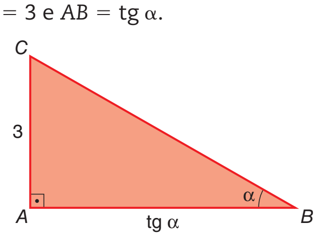


a) $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

6. **(Fuvest-SP)** A soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 6π
e) 7π

7. **(Insper)** No triângulo ABC da figura, retângulo em A, $A\hat{B}C = \alpha$, $AC = 3$ e $AB = \operatorname{tg}\alpha$.



Então, o perímetro do triângulo vale:

a) $\sqrt{3} + 4$
b) $2\sqrt{3} + 4$
c) $3\sqrt{3} + 3$
d) $2\sqrt{2} + 3$
e) $3\sqrt{2} + 4$

8. **(ESPM-SP)** O valor da soma:

$S = \log(\operatorname{tg} 1°) + \log(\operatorname{tg} 2°) + \log(\operatorname{tg} 3°) + ... + \log(\operatorname{tg} 89°)$ é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) $\sqrt{3}$
e) $\log\sqrt{3}$

9. **(Mackenzie-SP)** Sejam $f(x) = 2 - \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, M o valor máximo de f e m o seu valor mínimo. O valor de $\frac{M}{2m}$ é:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{6}$
e) 3

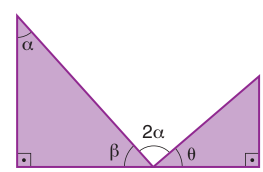
10. **(Mackenzie-SP)** Sejam as funções $f(x) = \log_4 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, com $0 < x < \pi$. Um possível valor de x tal que $f(g(x)) = -\frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) 1

11. **(Insper)** Considere o conjunto $A = \{0, 1, \sqrt{2}, \pi, 4\}$. Uma expressão que define uma função de A em A é:

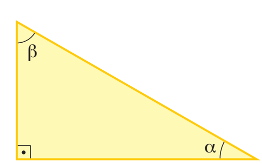
a) $(x^2 - 2) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$
b) $(x^2 - 4) \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(\pi x)$
c) $(x^2 - 2) \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(\pi x)$
d) $(x^2 - 4) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$
e) $(x^2 - 2) \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$

12. **(Mackenzie-SP)** Na figura, quaisquer que sejam α e β, $\operatorname{sen}\theta$ é sempre igual a:



a) $\cos\beta$
b) $\operatorname{sen} 2\alpha$
c) $\operatorname{sen} 2\beta$
d) $\cos\alpha$
e) $\cos 2\beta$

13. **(Mackenzie-SP)** Se, no triângulo retângulo da figura, tem-se $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, então o valor de $\operatorname{sen}(2\alpha + 3\beta)$ é:



a) $\frac{3}{4}$
b) $-\frac{3}{4}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $-\frac{2}{3}$
e) $-\frac{1}{2}$

14. **(Fuvest-SP)** Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$
b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$
d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$
e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

Exercício 4

$\begin{cases} r \cdot \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3} \text{ (I)} \\ r \cdot \cos\theta = 1 \text{ (II)} \end{cases}$

Dividindo (I) por (II), obtemos:

$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3} \\ r \cdot \cos\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \\ r\cos\theta = 1 \end{cases}$

Logo, para $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$, temos:

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ e $r = 2$

Alternativa **e.**

Exercício 5

Como os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{EF}$ medem $\dfrac{\pi}{6}$ rad, as extremidades dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AF}$ são, respectivamente, $\dfrac{\pi}{6}$ rad, $\dfrac{5\pi}{6}$ rad e $\dfrac{10\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad. Assim, temos:

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z + \cos x + \cos y + \cos z =$

$= \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) +$

$+ \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

Alternativa **c.**

Exercício 6

$\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0$

Fazendo $\cos^2 x = t$, temos:

$-2t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ ou $t = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolvendo essas equações para $x \in [0, 2\pi]$, obtemos:

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Logo, a soma das soluções é:

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{4} = 4\pi$

Alternativa **c.**

Exercício 7

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(BC)^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$

Portanto, o perímetro mede: $3\sqrt{3} + 3$

Alternativa **c.**

Exercício 8

$S = \log(\operatorname{tg} 1°) + \log(\operatorname{tg} 2°) + \log(\operatorname{tg} 3°) + ... + \log(\operatorname{tg} 89°)$

$\therefore S = \log(\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot ... \cdot \operatorname{tg} 89°) = \log 1$

$\therefore S = 0$

Alternativa **b.**

Exercício 9

Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, temos:

$\cos x = -1 \Rightarrow f(x) = 2 - (-1) = 3$

$\cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 2 - (1) = 1$

Logo, $M = 3$ e $n = 1$. Portanto:

$$\frac{M}{2m} = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Alternativa **a.**

Exercício 10

$f(\operatorname{sen} x) = \log_4(\operatorname{sen} x) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

Assim, um possível valor de x é $\dfrac{5\pi}{6}$.

Alternativa **c.**

Exercício 11

Das alternativas apresentadas, a única que define uma função é a alternativa **e.** De fato:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 0$
- $f(\sqrt{2}) = 0$
- $f(\pi) = 0$
- $f(4) = 0$

Alternativa **e.**

Exercício 12

$\alpha + 90° = 2\alpha + \theta \Rightarrow \theta = 90° - \alpha$

$\therefore \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$

Alternativa **d.**

Exercício 13

Temos: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180°$

Assim:

$\operatorname{sen}(2\alpha + 3\beta) = \operatorname{sen}(2\alpha + 2\beta + \beta) = \operatorname{sen}(180° + \beta) =$

$= -\operatorname{sen}\beta = -\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Alternativa **b.**

Exercício 14

Para $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, temos:

$\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) \cdot (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore 1 \cdot (\operatorname{sen}^2\alpha - 1 + \operatorname{sen}^2\alpha) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{5}{8}$

Assim: $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$

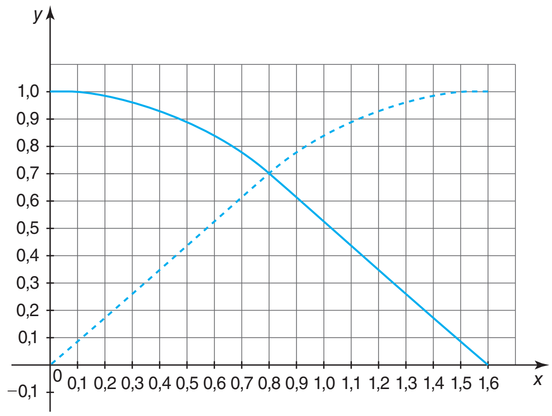
Logo:

$\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}}$

$\therefore \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Alternativa **b.**

15. (Insper) Na figura a seguir, estão representadas partes dos gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = \cos x$.



A partir dos gráficos, é correto concluir que a menor solução positiva da equação $\cos(2\,\text{sen}\,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vale aproximadamente:

a) 0,2
b) 0,3
c) 0,4
d) 0,5
e) 0,6

16. (Insper) Se a sequência $(3, x, \cos\theta)$ é uma progressão aritmética, sendo x e θ números reais, então:

a) $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 0$
b) $-1 \leqslant x \leqslant 1$
c) $0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$
d) $1 \leqslant x \leqslant 2$
e) $2 \leqslant x \leqslant 4$

17. (Udesc) Calcule os valores de x no intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfazem a equação $2\,\text{sen}^3 x - \cos^2 x = 2\,\text{sen}\,x$.
(*Nota*: A notação $[0, 2\pi)$ é outra forma de representar o intervalo $[0, 2\pi[$.)

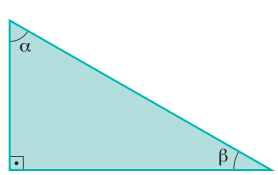
18. (UFSCar-SP) O conjunto solução da equação

$\text{sen}\left(\frac{8\pi}{9} + \frac{8\pi}{27} + \frac{8\pi}{81} \ldots\right) = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi[$, é:

a) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
b) $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$
c) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
d) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
e) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

19. (Fuvest-SP) Sabe-se que $x = 1$ é raiz da equação

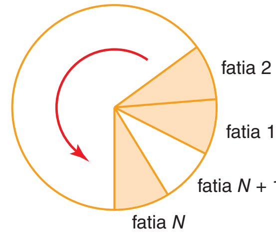
$(\cos^2\alpha)x^2 - (4\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta)x + \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\beta = 0$, sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo.



Pode-se então afirmar que as medidas de α e β são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{3\pi}{8}$
b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{8}$

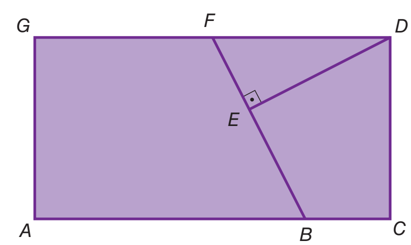
20. (UFSCar-SP) Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando no final uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia $N + 1$.



Considerando $\pi = 3{,}14$, o arco da fatia $N + 1$, em radiano, é:

a) 0,74
b) 0,72
c) 0,68
d) 0,56
e) 0,34

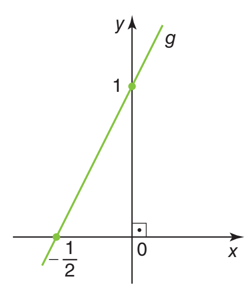
21. (Unioeste-PR) Na figura a seguir, $ACDG$ é um retângulo, sendo F o ponto médio do segmento $\overline{DG}$ e $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{BF}$. O segmento $\overline{DE}$ mede $4\sqrt{3}$ cm, $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{3}$ cm e o ângulo $E\hat{F}D$ mede 60°.



Com base nestas informações, pode-se afirmar que o perímetro do retângulo $ACDG$ vale:

a) $22 + \sqrt{3}$ cm
b) 32 cm
c) $20 + 16\sqrt{3}$ cm
d) $33\sqrt{3}$ cm
e) 40 cm

22. (Unifesp) Considere as funções dadas por $f(x) = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$ e $g(x) = ax + b$, sendo o gráfico de g fornecido na figura.



O valor de $f(g^{-1}(2))$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) 1

23. (Insper) Dados dois números reais positivos a e b, sejam $A(a, b) = \frac{a + b}{2}$ e $G(a, b) = \sqrt{ab}$ suas médias aritmética e geométrica, respectivamente. Nessas condições, sendo x um número real tal que $A(\text{sen}\,x, \cos x) = G(\text{sen}\,x, \cos x)$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, podemos concluir que:

a) $x = \frac{\pi}{8}$
b) $x = \frac{\pi}{6}$
c) $x = \frac{\pi}{5}$
d) $x = \frac{\pi}{4}$
e) $x = \frac{\pi}{3}$

Exercício 15

Seja $a = 2 \operatorname{sen} x$. Assim, a equação dada é equivalente a:

$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$

Logo, temos:

$2 \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{8}$

Adotando $\pi \approx 3{,}14$, temos:

$\operatorname{sen} x = 0{,}3925 \approx 0{,}4$

Portanto, pela análise do gráfico: $x \approx 0{,}4$

Alternativa **c**.

Exercício 16

Se $(3, x, \cos\theta)$ é PA, então:

$x = \frac{3 + \cos\theta}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = 2x - 3$

$\therefore -1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$

Alternativa **d**.

Exercício 17

Para $[0, 2\pi)$, temos:

$2 \operatorname{sen}^3 x - \cos^2 x = 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen}^3 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x$

$\therefore 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \cdot (2 \operatorname{sen} x + 1) - (2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$

$\therefore (2 \operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen}^2 x - 1) = 0$

$\therefore \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x = -1$

Logo: $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Exercício 18

Para $[0, 2\pi[$, temos:

$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9} + \frac{8\pi}{27} + \frac{8\pi}{81} ...\right) = \cos x \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{8\pi}{9}}{1 - \frac{1}{3}}\right) = \cos x$

$\therefore \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos x$

$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

Alternativa **b**.

Exercício 19

Como $x = 1$ é raiz da equação, temos:

$(\cos^2\alpha)1^2 - (4\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta)1 + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - 4\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0$ (I)

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e α e β são ângulos complementares, temos: $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$

Substituindo $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$ em (I), obtemos:

$\operatorname{sen}^2\beta - 4\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\beta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\operatorname{sen}^2\beta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0$

$\therefore -3\operatorname{sen}\beta \cdot \left(\operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore \beta = \frac{\pi}{6}$

Assim: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Alternativa **d**.

Exercício 20

Seja $n \in \mathbb{N}$ o número de fatias de medida 0,8 radiano.

Como 2π rad é a medida da circunferência, temos:

$0{,}8 \cdot n < 2 \cdot 3{,}14 \Rightarrow n < 7{,}85$

$\therefore n = 7$

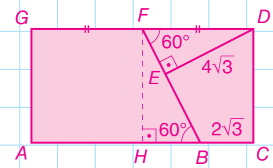
Logo, sendo x a medida, em radiano, da fatia de número $n + 1$, temos:

$0{,}8 \cdot 7 + x = 2 \cdot 3{,}14 \Rightarrow x = 0{,}68$

Alternativa **c**.

Exercício 21

Considere a figura a seguir.



Seja x, em centímetro, a medida do segmento $\overline{FD}$. Assim, no triângulo FED, temos:

$\operatorname{sen} 60° = \frac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{x}$

$\therefore x = 8$

Portanto: $GD = AC = 16$ cm

Por outro lado, $m(F\hat{B}H) = m(D\hat{F}E) = 60°$ (alternos internos).

Assim, sendo $y = FH = GA = DC$, temos, no triângulo FHB:

$\operatorname{tg} 60° = \frac{y}{8 - 2\sqrt{3}} \Rightarrow y = 8\sqrt{3} - 6$

Logo, o perímetro, em centímetro, do retângulo é:

$2 \cdot 16 + 2(8\sqrt{3} - 6) = 20 + 16\sqrt{3}$

Alternativa **c**.

Exercício 22

Pelo gráfico, temos:

$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}a + b \\ 1 = 0a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$

Assim, $g(x) = 2x + 1$.

Portanto, $g^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$.

Logo, temos:

$f(g^{-1}(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alternativa **c**.

Exercício 23

Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos:

$A(\operatorname{sen} x, \cos x) = G(\operatorname{sen} x, \cos x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} = \sqrt{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

$\therefore \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x}{4} = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

$\therefore (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$

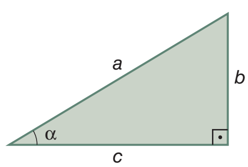
$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

Alternativa **d**.

Razões trigonométricas inversas, adição de arcos e resolução de triângulos

As razões trigonométricas inversas de um ângulo agudo

- A razão trigonométrica inversa do cosseno é chamada de **secante** (sec): $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}}$
- A razão trigonométrica inversa do seno é chamada de **cossecante** (cossec): $\boxed{\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}$
- A razão trigonométrica inversa da tangente é chamada de **cotangente** (cotg): $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}$
- Sendo α a medida de um ângulo agudo em um triângulo retângulo qualquer, temos:



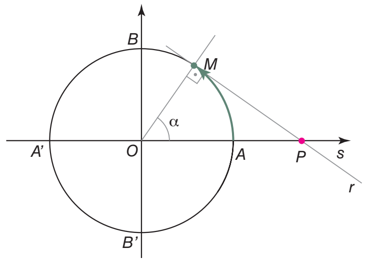
$$\sec\alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a }\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha}{\text{medida do cateto oposto a }\alpha} = \frac{c}{b}$$

Secante de um arco trigonométrico

- Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, define-se a **secante de α** por: $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}}$
- Geometricamente, a secante de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das abscissas com a reta tangente à circunferência em M.



$\sec\alpha = x_P$

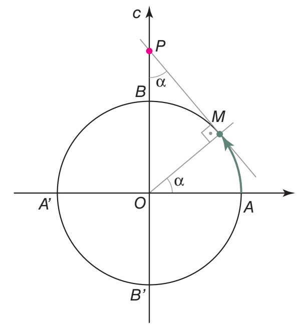
- A secante tem o mesmo sinal que o cosseno e assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Cossecante de um arco trigonométrico

- Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cossecante de α** por:

$$\boxed{\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}}$$

- Geometricamente, a cossecante de α é a ordenada do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das ordenadas com a reta tangente à circunferência em M.



$\text{cossec}\,\alpha = y_P$

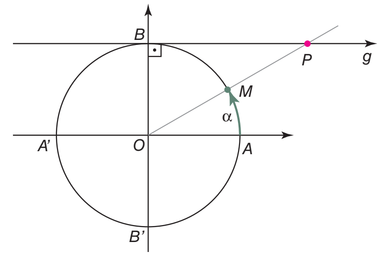
- A secante tem o mesmo sinal que o seno e assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Cotangente de um arco trigonométrico

- Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cotangente de α** por:

$$\boxed{\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}$$

- Geometricamente, a cotangente de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo g das cotangentes.



$\text{cotg}\,\alpha = x_P$

- A cotangente assume qualquer valor real e tem o mesmo sinal que a tangente.

Identidades trigonométricas

- Sendo *f* e *g* duas funções na variável *x*, dizemos que a igualdade $f(x) = g(x)$ é uma **identidade** num conjunto universo *U* se, e somente se, $f(\alpha) = g(\alpha)$ para qualquer $\boldsymbol{\alpha}$ pertencente a *U*.
- Para demonstrar uma identidade em um universo *U*, podemos usar uma das técnicas:

  1ª técnica: primeiro, provamos que *f* e *g* estão definidas em *U*. Depois, escolhemos um dos membros da igualdade e, por meio de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, obtemos o outro membro.

  2ª técnica: transformamos a igualdade $f(x) = g(x)$ na igualdade $f(x) - g(x) = 0$ e, a seguir, aplicamos a 1ª técnica.

  3ª técnica: consideramos outra identidade válida em *U* e, por meio de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, transformamos essa identidade na identidade inicial.

Adição de arcos

Para calcular o seno, o cosseno ou a tangente da soma ou da subtração de dois arcos, podemos aplicar as seguintes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$, obedecidas as condições de existência
$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$, obedecidas as condições de existência

Arco duplo

- Para calcular o seno, o cosseno ou a tangente de um arco duplo, podemos aplicar as seguintes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$, obedecidas as condições de existência

- Observe que, usando a relação fundamental $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, podemos substituir $\cos^2 a$ por $1 - \operatorname{sen}^2 a$ na segunda fórmula, $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$, obtendo:

$$\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

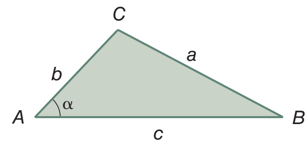
- Substituindo $\operatorname{sen}^2 a$ por $1 - \cos^2 a$ na segunda fórmula, $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$, obtemos:

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

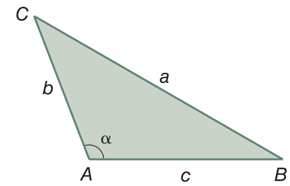
Lei dos cossenos

Sendo *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo qualquer e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida *a*, temos a **lei dos cossenos**:

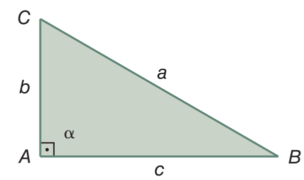
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$



$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$

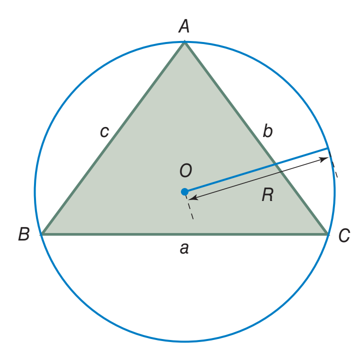


$\alpha = 90°$

Lei dos senos

Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ as medidas dos lados de um triângulo *ABC* e *R* o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, temos **a lei dos senos**:

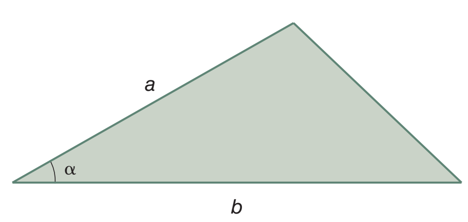
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$



Área de um triângulo

Se dois lados de um triângulo têm medidas *a* e *b* e o ângulo determinado por esses lados tem medida α, então a área *A* do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha$$



No Vestibular

1. **(Udesc)** O ângulo x é tal que $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{m}}{2}$ e $\cos x = \dfrac{\sqrt{m-2}}{2}$.

Obtenha o valor de m e, a partir deste, obtenha os valores numéricos de tg x, sec x, cossec x e cotg x.

2. **(Unifor-CE)** Sejam x e y números reais tais que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$. Se $\cos x = \dfrac{3}{4}$ e $\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4}$, o valor de sen 2x + cos 2y é:

a) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{8}$

b) $\dfrac{12\sqrt{2}-1}{16}$

c) $\dfrac{8+3\sqrt{7}}{8}$

d) $\dfrac{7+3\sqrt{7}}{8}$

e) $\dfrac{59+6\sqrt{7}}{16}$

3. **(Unifesp)** Se x é a medida de um arco do primeiro quadrante e se $\operatorname{sen} x = 3\cos x$, então sen (2$x$) é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{3}{5}$

c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$

d) $\dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. **(UFSCar-SP)** Se os lados de um triângulo medem x, x + 1 e x + 2, então, para qualquer x real e maior que 1, o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é igual a:

a) $\dfrac{x}{x+1}$

b) $\dfrac{x}{x+2}$

c) $\dfrac{x+1}{x+2}$

d) $\dfrac{x-2}{3x}$

e) $\dfrac{x-3}{2x}$

5. **(Insper)** Se $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, então $\dfrac{\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta+1} - \dfrac{1-\cos^2\theta}{\operatorname{cotg}^2\theta+1}}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$ é igual a:

a) 0

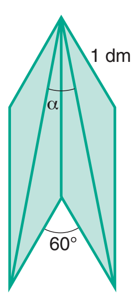
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) 1

6. **(Fuvest-SP)** As páginas de um livro medem 1 dm de base e $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dm de altura. Se este livro for parcialmente aberto, de tal forma que o ângulo entre duas páginas seja 60°, a medida do ângulo α, formado pelas diagonais das páginas, será:



a) 15°

b) 30°

c) 45°

d) 60°

e) 75°

7. **(UFSCar-SP)** O valor de x, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, tal que $4 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cdot (\sec^2 x - 1) = 3$ é:

a) $\dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{6}$

e) 0

Exercício 1

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{m}{4} + \dfrac{m-2}{4} = 1$

$\therefore m = 3$

Logo:

$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

$\sec x = 2$

$\operatorname{cossec} x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercício 2

Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$\begin{cases} \cos x = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} \\ \cos y = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$

Logo:

$\operatorname{sen} 2x + \cos 2y = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y =$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{4} \cdot \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{3\sqrt{7}+7}{8}$

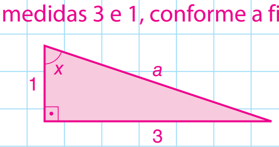
Alternativa **d.**

Exercício 3

Para $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, temos:

$\operatorname{sen} x = 3\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 3$

Logo, existe um triângulo retângulo de catetos de medidas 3 e 1, conforme a figura:



$a^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{10}$

Assim: $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Logo:

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2\operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{3} =$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{3}{5}$

Alternativa **b.**

Exercício 4

O maior lado do triângulo é o lado de medida $x + 2$.
Sendo α o ângulo oposto a esse lado, temos, pela lei dos cossenos:

$(x + 2)^2 = (x)^2 + (x + 1)^2 - 2 \cdot (x) \cdot (x + 1) \cdot \cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{x - 3}{2x}$

Alternativa **e**.

Exercício 5

Simplificando a expressão, temos:

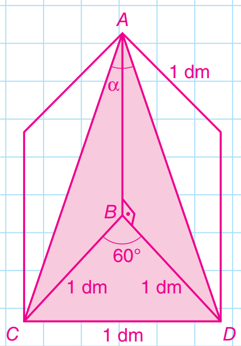
$$\frac{\dfrac{1 - \text{sen}^2\,\theta}{\text{tg}^2\,\theta + 1} - \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\text{cotg}^2\,\theta + 1}}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta} = \frac{\dfrac{\cos^2\theta}{\sec^2\theta} - \dfrac{\text{sen}^2\,\theta}{\text{cossec}^2\,\theta}}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta} =$$

$$= \frac{\cos^4\theta - \text{sen}^4\,\theta}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta} = \frac{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) \cdot (\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta)}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta} = 1$$

Alternativa **e**.

Exercício 6

Considere a figura a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos: $(AD)^2 = 1^2 + \left(\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 2 + \sqrt{3}$

Como $AD = AC$, pela lei dos cossenos, no triângulo ACD, temos:

$1^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 4 + 2\sqrt{3} - 2\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)} \cdot \dfrac{\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\left(2 - \sqrt{3}\right)}$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = 30°$

Alternativa **b**.

Exercício 7

Para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$4 \cdot (1 - \text{sen}^2\,x) \cdot (\sec^2 x - 1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\cos^2 x) \cdot (\text{tg}^2\,x) = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \text{sen}^2\,x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$

Alternativa **b**.

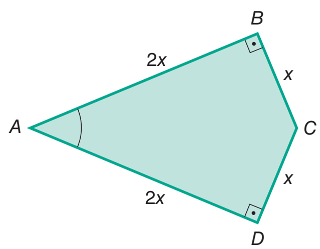
8. (Mackenzie-SP) Se a sequência $\left(\operatorname{sen} 2x,\ -\cos x,\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{6}\right)$, $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, é uma progressão geométrica, então x é igual a:

a) $\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\dfrac{7\pi}{6}$ c) $\dfrac{4\pi}{3}$ d) $-\dfrac{2\pi}{3}$ e) $\dfrac{5\pi}{4}$

9. (Fuvest-SP) Sejam x e y dois números reais, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$, satisfazendo $\operatorname{sen} y = \dfrac{4}{5}$ e $11 \operatorname{sen} x + 5 \cos (y - x) = 3$. Nessas condições, determine:

a) $\cos y$ b) $\operatorname{sen} 2x$

10. (Fuvest-SP) No quadrilátero $ABCD$ onde os ângulos B e D são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de $\operatorname{sen} \hat{A}$ é:

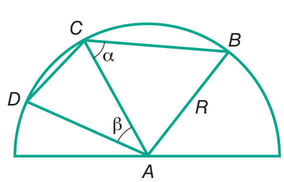


a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2}{5}$ e) $\dfrac{1}{2}$

11. (Unifesp) A expressão $\operatorname{sen}(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot \operatorname{sen} y$ é equivalente a:

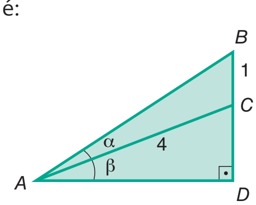
a) $\operatorname{sen}(2x + y)$
b) $\cos(2x)$
c) $\operatorname{sen}(x)$
d) $\operatorname{sen}(2x)$
e) $\cos(2x + 2y)$

12. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa semicircunferência de centro A e raio $AB = AC = AD = R$. A diagonal $\overline{AC}$ forma com os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ ângulos α e β, respectivamente. Logo, a área do quadrilátero $ABCD$ é:



a) $\dfrac{R^2}{2}(\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \beta)$
b) $\dfrac{R^2}{2}(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\beta)$
c) $\dfrac{R^2}{2}(\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta)$
d) $\dfrac{R^2}{2}(\operatorname{sen} \alpha + \cos \beta)$
e) $\dfrac{R^2}{2}(\operatorname{sen} 2\alpha + \cos \beta)$

13. (UFSCar-SP) Na figura, $A\hat{D}B$ é reto, $B\hat{A}C = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$, $AC = 4$ dm e $BC = 1$ dm. Sabendo que $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5}$, o valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$ é:



a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{6}$

Exercício 8

Para $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ e sendo a sequência $\left(\operatorname{sen} 2x, -\cos x, \dfrac{\operatorname{tg} x}{6}\right)$ uma PG, temos:

$(-\cos x)^2 = \operatorname{sen} 2x \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x}{6} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{3}$

$\therefore \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$

Alternativa **c**.

Exercício 9

a) Para $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$, temos:

$\cos y = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$

b) Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$, temos:

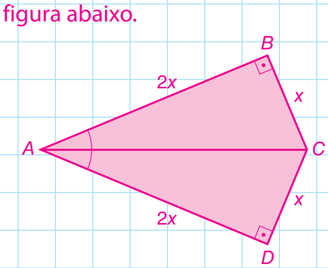
$11 \operatorname{sen} x + 5 \cos(y - x) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11 \operatorname{sen} x + 5(\cos y \cdot \cos x + \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x) = 3$
$\therefore 11 \operatorname{sen} x - 3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = 3 \Rightarrow \cos x = 5 \operatorname{sen} x - 1$
$\therefore (5 \operatorname{sen} x)^2 + \operatorname{sen}^2 x = 1$
$\therefore \operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$

Logo:

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \dfrac{5}{13} \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{120}{169}$

Exercício 10

Considere a figura abaixo.



Pelo caso LAA_o: $\triangle CAB \cong \triangle CAD$

Assim: $m(C\hat{A}B) = m(C\hat{A}D) = \dfrac{\hat{A}}{2}$; $0 < \hat{A} < 90°$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = x\sqrt{5}$. Assim:

$\operatorname{sen} \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{x}{x\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{2x}{x\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Concluímos, então, que:

$\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen}\left(2 \cdot \dfrac{\hat{A}}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \dfrac{\hat{A}}{2} = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$

Alternativa **c**.

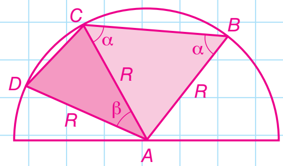
Exercício 11

$\operatorname{sen}(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot \operatorname{sen} y =$
$= \operatorname{sen}(x - y + y) = \operatorname{sen} x$

Alternativa **c**.

Exercício 12

Considere a figura a seguir.



Os triângulos ADC e ACB são isósceles de lados côngruos iguais a R.
Pela figura, a área do quadrilátero $ABCD$ é equivalente à soma das áreas dos triângulos ADC e ACB.
Lembrando que a área A de um triângulo é $A = \dfrac{ab \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$ e que $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, temos:

$$A_{ABCD} = A_{ADC} + A_{ACB}$$

$$A_{ABCD} = \frac{R \cdot R\,\text{sen}\,\beta}{2} + \frac{R \cdot R\,\text{sen}\,(180° - 2\alpha)}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{R^2 \cdot \text{sen}\,\beta}{2} + \frac{R^2 \cdot \text{sen}\,2\alpha}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{R^2}{2}(\text{sen}\,2\alpha + \text{sen}\,\beta)$$

Alternativa **a**.

Exercício 13

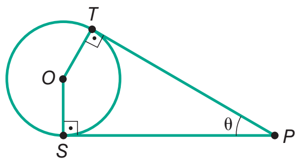
Temos: $\text{sen}\,\hat{B} = \cos(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5}$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{4}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$$

Alternativa **d**.

14. (Unifesp) Um observador, em P, enxerga uma circunferência de centro O e raio 1 sob um ângulo θ, conforme mostra a figura.



a) Prove que o ponto O se encontra na bissetriz do ângulo θ.

b) Calcule tg θ, dado que a distância de P a O vale 3 metros.

15. (Mackenzie-SP) A soma das soluções da equação $2\cos^2 x - 2\cos 2x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, é:

a) π b) 2π c) 3π d) 4π e) 5π

16. (Mackenzie-SP) Se $4\cos^2 x - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, então um possível valor para tg $2x$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{5}$

17. (UPF-RS) Considerando que sen $x = \dfrac{2}{3}$ e x pertence ao segundo quadrante, o valor de $\dfrac{\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x}{\sec x + \text{cossec}\,x}$ é:

a) $-\text{sen}\,x$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\cos^2 x$

d) $-3(2 + \sqrt{5})$

e) $-6 + \sqrt{5}$

18. (Mackenzie-SP) A soma das soluções da equação $\sec^2 2x - 2\text{tg}^2\, 2x - 1 = 0$, no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, é:

a) π b) $\dfrac{3\pi}{2}$ c) 3π d) $\dfrac{5\pi}{2}$ e) 2π

19. (Mackenzie-SP) Em $[0, 2\pi]$, as soluções da equação $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 2x - 1} = \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,x}$ são em número de:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

20. (UFT-TO) Dado sen $\theta = \dfrac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$. O valor de sen (4θ) é:

a) $-\dfrac{\sqrt{7}}{16}$ b) $\dfrac{3\sqrt{7}}{32}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ d) $-\dfrac{3\sqrt{7}}{32}$

21. (Fuvest-SP) Seja x no intervalo $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ satisfazendo a equação tg $x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sec x = \dfrac{3}{2}$. Assim, calcule o valor de:

a) sec x

b) sen $\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

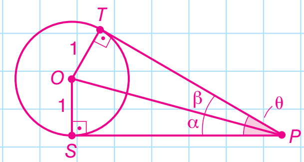
22. (Fuvest-SP) A medida x, em radiano, de um ângulo satisfaz $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e verifica a equação sen x + sen $2x$ + sen $3x = 0$. Assim:

a) Determine x.

b) Calcule $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Exercício 14

a) Considere a figura abaixo.



Temos $PT = PS$, pois a hipotenusa $\overline{PO}$ é comum aos dois triângulos e o raio é unitário. Assim, os triângulos PTO e PSO são congruentes pelo caso RHC e, portanto, $\alpha = \beta = \dfrac{\theta}{2}$. Assim, O pertence à bissetriz do ângulo θ.

b) $(PS)^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow PS = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$

Logo:

$$\text{tg}\,(\theta) = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{7}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Exercício 15

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:

$2\cos^2 x - 2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 2(2\cos^2 x - 1) - 1 = 0$

$\therefore \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo: $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Alternativa **d.**

Exercício 16

$4\cos^2 x - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(2\cos^2 x - 1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos 2x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sec 2x = 2\sqrt{2}$

Por outro lado, temos:

$\text{tg}^2\, 2x = \sec^2 2x - 1 \Rightarrow \text{tg}\, 2x = \pm\sqrt{7}$

Alternativa **d.**

Exercício 17

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x}{\sec x + \text{cossec}\,x} = \frac{\frac{\text{tg}^2 x + 1}{\text{tg}\,x}}{\frac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x}} =$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\text{tg}\,x} \cdot \frac{\text{sen}\,x \cdot \cos x}{\text{sen}\,x + \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \cdot \frac{\text{sen}\,x \cdot \cos x}{\text{sen}\,x + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,x + \cos x}$$

Como x pertence ao segundo quadrante:

$\text{sen}\,x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Portanto:

$$\frac{1}{\text{sen}\,x + \cos x} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} = -3(2 + \sqrt{5})$$

Alternativa **d.**

Exercício 18

Para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, temos:

$\sec^2 2x - 2\,\text{tg}^2\, 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 2x} - 2 \cdot \frac{\text{sen}^2\, 2x}{\cos^2 2x} - 1 = 0$

$\therefore \frac{1 - 2\,\text{sen}^2\, 2x}{\cos^2 2x} - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\,\text{sen}^2\, 2x = \cos^2 2x$

$\therefore 1 - 2\,\text{sen}^2 2x = 1 - \text{sen}^2 2x$

$\therefore \text{sen}^2\, 2x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, para $k = 1$ e $k = 2$, temos $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

Alternativa **e.**

Exercício 19

Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$\frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 2x - 1} = \frac{1}{1 + \text{sen}\,x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x - 1$

$\therefore 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = 0$ ou $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

Alternativa **e.**

Exercício 20

Para $0° < \theta < 90°$, temos:

$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Assim, temos:

$\text{sen}\,(4\theta) = 2\,\text{sen}\,(2\theta) \cdot \cos\,(2\theta) =$

$= 2 \cdot 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta\,(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) =$

$= 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}\,(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) = \frac{3\sqrt{7}}{4}\left(1 - 2 \cdot \frac{9}{16}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{32}$

Alternativa **d.**

Exercício 21

a) Para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$\text{tg}^2 x = \frac{9}{4} - \frac{6}{\sqrt{5}}\sec x + \frac{4}{5}\sec^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sec^2 x - 1 = \frac{9}{4} - \frac{6}{\sqrt{5}}\sec x + \frac{4}{5}\sec^2 x$

$\therefore \sec x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\sec x = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Portanto: $\text{sen}\,x = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Assim:

$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}\,x + \cos x) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Exercício 22

a) Para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos:

$\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \text{sen}\,3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}\,2x \cdot \cos x + \text{sen}\,2x = 0$

$\therefore \text{sen}\,2x\,(2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,2x = 0$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{2\pi}{3}$

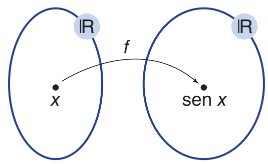
b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x =$

$= \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos 2\pi = 0$

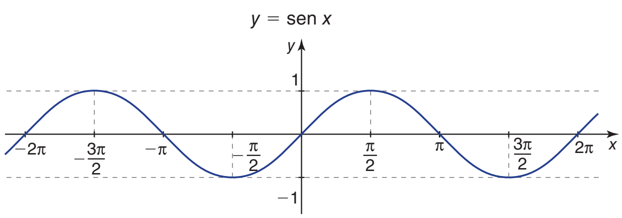
Funções trigonométricas

Todos os fenômenos periódicos podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas. Daí a extensa aplicação do estudo desse conteúdo em campos da ciência como acústica, astronomia, economia, engenharia e medicina.

A função seno



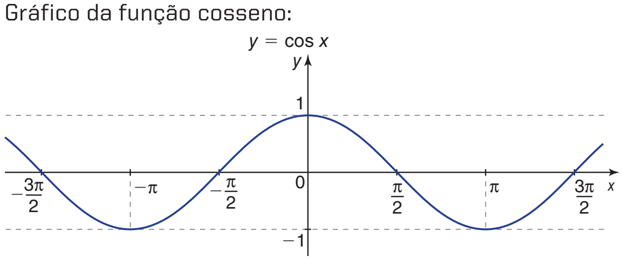
- A **função seno** é a função que associa a cada número real x um único número real y tal que $y = \text{sen } x$.
- Considerando os infinitos pontos das infinitas voltas da circunferência trigonométrica, obtemos o gráfico da função seno:



- Domínio: $D = \mathbb{R}$
- Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
- O **período** de uma função periódica é o menor número positivo p que satisfaz a igualdade $f(x + p) = f(x)$, para qualquer número real x. Por isso, o período da função seno é 2π.
- A função $f(x) = \text{sen } x$ é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ para qualquer número real x.

A função cosseno

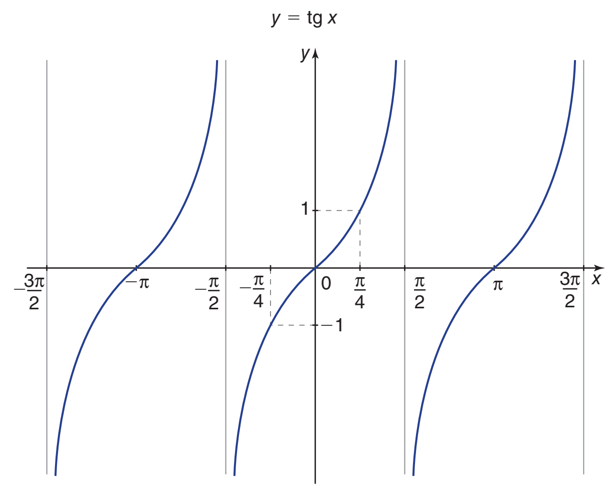
- A **função cosseno** é a função que associa a cada número real x um único número real y tal que $y = \cos x$.
- Gráfico da função cosseno:



- Domínio: $D = \mathbb{R}$
- Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
- Período: $p = 2\pi$
- A função $f(x) = \cos x$ é **par**, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é, $\cos(-x) = \cos(x)$ para qualquer número real x.

A função tangente

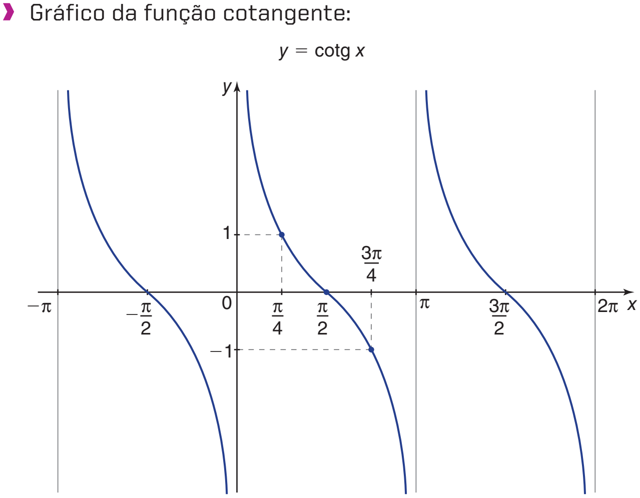
- A **função tangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que $y = \text{tg } x$.
- Gráfico da função tangente:



- Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Imagem: $Im = \mathbb{R}$
- Período: $p = \pi$
- A função $y = \text{tg } x$ é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$ para qualquer x do domínio D.
- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa $..., -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...$ são chamadas de **assíntotas verticais** do gráfico.

A função cotangente

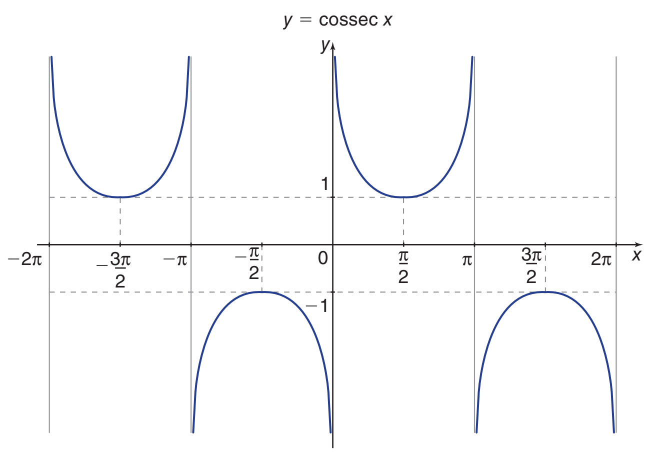
- A **função cotangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que $y = \text{cotg } x$.
- Gráfico da função cotangente:



- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
- Imagem: $Im = \mathbb{R}$
- Período: $p = \pi$
- A função $y = \text{cotg}\, x$ é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{cotg}\,(-x) = -\text{cotg}\, x$ para qualquer x do domínio D.
- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $-\pi$, 0, π, ... são as **assíntotas verticais** do gráfico.

A função cossecante

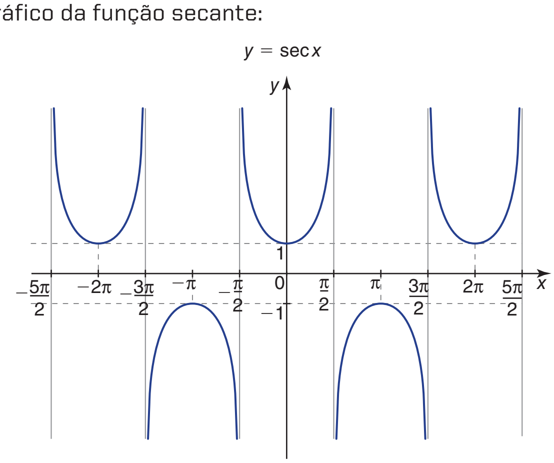
- A **função cossecante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que $y = \text{cossec}\, x$.
- Gráfico da função cossecante:



- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
- Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$
- Período: $p = 2\pi$
- A função $y = \text{cossec}\, x$ é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{cossec}\,(-x) = -\text{cossec}\, x$ para qualquer x do domínio D.
- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $-\pi$, 0, π, ... são as **assíntotas verticais** do gráfico.

A função secante

- A **função secante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que $y = \sec x$.
- Gráfico da função secante:



- Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$
- Período: $p = 2\pi$
- A função $y = \sec x$ é **par**, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é, $\sec\,(-x) = \sec x$ para qualquer x do domínio D.
- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $-\pi$, 0, π, ... são as **assíntotas verticais** do gráfico.

Tabelas comparativas das funções trigonométricas

Função	$y = \text{sen}\, x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg}\, x$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Período	2π	2π	π
Paridade	ímpar	par	ímpar

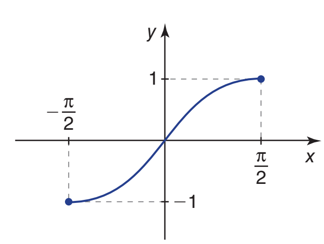
Função	$y = \text{cossec}\, x$	$y = \sec x$	$y = \text{cotg}\, x$
Domínio	$x \neq k\pi$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq k\pi$
Imagem	$\mathbb{R} -]-1, 1[$	$\mathbb{R} -]-1, 1[$	$\mathbb{R}$
Período	2π	2π	π
Paridade	ímpar	par	ímpar

As funções trigonométricas inversas

As funções seno, cosseno e tangente não admitem inversas, pois nenhuma delas, como definidas anteriormente, é bijetora. Porém, restringindo convenientemente o domínio e o contradomínio de cada uma, podemos obter novas funções que sejam bijetoras e, por isso, admitem inversas.

A função arco-seno

- Consideremos a restrição da função $y = \text{sen}\, x$, de domínio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$, cujo gráfico é:

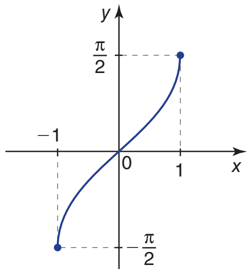


- A inversa dessa restrição da função seno será indicada por:

$$\boxed{y = \text{arcsen}\, x}$$

A igualdade $y = \text{arcsen } x$ deve ser entendida da seguinte maneira: y é o arco cujo seno vale x.

- Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, o gráfico de $y = \text{arcsen } x$ é:

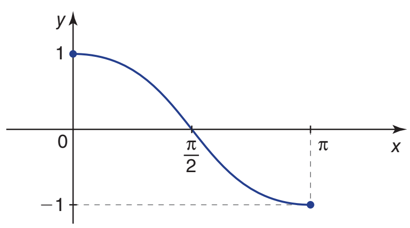


$D = [-1, 1]$

$Im = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

A função arco-cosseno

- Consideremos a restrição da função $y = \cos x$, de domínio $D = [0, \pi]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$, cujo gráfico é:

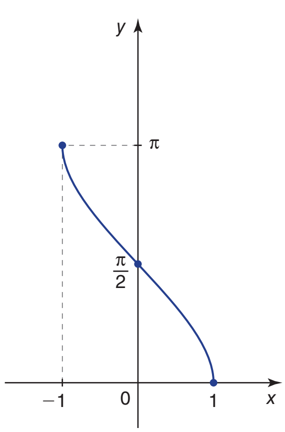


- A inversa dessa restrição da função cosseno será indicada por:

$$\boxed{y = \arccos x}$$

A igualdade $y = \arccos x$ deve ser entendida da seguinte maneira: y é o arco cujo cosseno vale x.

- Gráfico de $y = \arccos x$:

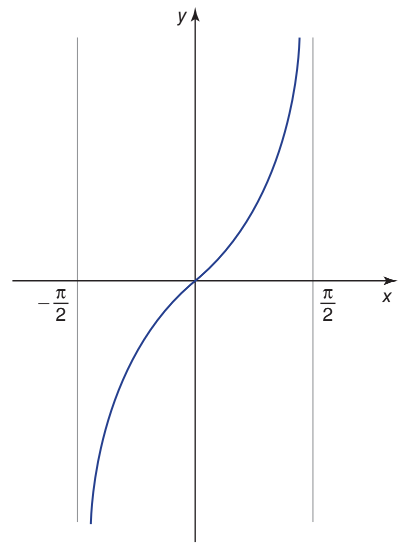


$D = [-1, 1]$

$Im = [0, \pi]$

A função arco-tangente

- Consideremos a restrição da função $y = \text{tg } x$, de domínio $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e contradomínio $CD = \mathbb{R}$, cujo gráfico é:

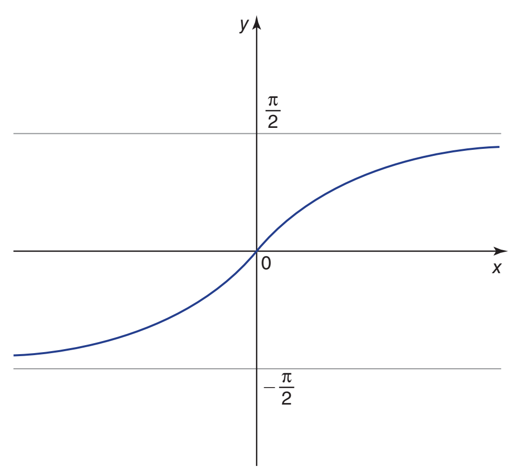


- A inversa dessa restrição da função tangente será indicada por:

$$\boxed{y = \text{arctg } x}$$

A igualdade $y = \text{arctg } x$ deve ser entendida da seguinte maneira: y é o arco cuja tangente vale x.

- Gráfico de $y = \text{arctg } x$:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

No Vestibular

1. **(Unifesp)** Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Considere as afirmações seguintes.

1. A função $f(x)$ é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$, para todo x real.
2. A função $f(x)$ é periódica de período 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo x real.
3. A função $f(x)$ é sobrejetora.
4. $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

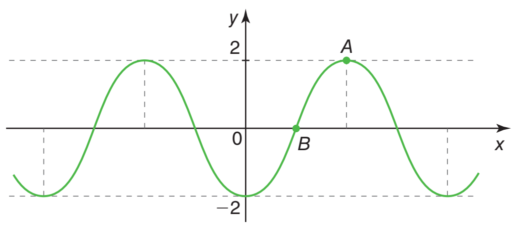
São verdadeiras as afirmações:

a) 1 e 3, apenas. **b)** 3 e 4, apenas. **c)** 2 e 4, apenas. **d)** 1, 2 e 3, apenas. **e)** 1, 2, 3 e 4.

2. **(FGV)** Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3 \cdot \cos^4 x}{4}$. Os valores máximo e mínimo de f são, respectivamente:

a) 1 e -1 **b)** 1 e 0 **c)** 2 e $-\frac{3}{4}$ **d)** 2 e 0 **e)** 2 e $\frac{5}{4}$

3. **(Unifor-CE)** Na figura abaixo, tem-se o gráfico de uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k \cdot \cos tx$, em que k e t são constantes reais.



Se o período de f é 4π, então $f\left(\frac{16\pi}{3}\right)$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ **b)** 1 **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** -1 **e)** $-\sqrt{3}$

4. **(Vunesp)** Podemos supor que um atleta, enquanto corre, balança cada um de seus braços ritmicamente (para a frente e para trás) segundo a equação:

$y = f(t) = \frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right]$, onde y é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical $\left(-\frac{\pi}{9} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{9}\right)$ e t é o tempo medido em segundos, $t \geqslant 0$.

Com base nessa equação, determine quantas oscilações completas (para a frente e para trás) o atleta faz com o braço em 6 segundos.

5. **(Vunesp)** Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h, em metro, de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão

$h(t) = 11{,}5 + 10 \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, onde o tempo t é dado em segundo e a medida angular em radiano.

a) Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$).

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

Exercício 1

1. F. A função f é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$.
2. V.
3. F, pois o conjunto imagem de f é $[-1, 1]$.
4. V.

Alternativa **c**.

Exercício 2

Temos: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \cos^4 x \leqslant 1$

Logo, os valores máximo e mínimo ocorrem, respectivamente, quando $\cos x = 0$ e $\cos x = \pm 1$:

$\cos x = 0 \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{3 \cdot \cos^4 x}{4} = 2 - 0 = 2$

$\cos x = \pm 1 \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{3 \cdot \cos^4 x}{4} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Alternativa **e**.

Exercício 3

Como o período de f é 4π, temos:

$4\pi = \frac{2\pi}{|t|} \Rightarrow |t| = \frac{1}{2}$

Como a imagem de f é $[-2, 2]$, temos: $|k| = 2$.

O ponto $(0, -2)$ pertence a f. Assim:

$-2 = k \cdot \cos 0 \Rightarrow k = -2$

Portanto:

$f(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = -2 \cos \frac{8\pi}{3} = 1$

Alternativa **b**.

Exercício 4

O período, em segundo, de oscilações completas é:

$T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{4}$

Assim, em 6 segundos, teremos $\frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$ oscilações completas.

Exercício 5

a) Para $t = 0$, a altura em metro é:

$h(0) = 11{,}5 + 10 \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{-26\pi}{12}\right] =$

$= 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6{,}5$

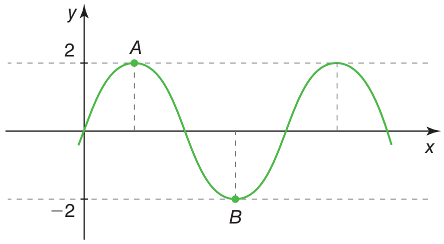
b) Os valores máximos e mínimos ocorrem, respectivamente, quando $\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right] = 1$ e $\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right] = -1$.

Logo, o valor máximo é 21,5 metros e o mínimo é 1,5 metro.

O período é dado por: $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = 24$

Portanto, o tempo para uma volta é 24 segundos.

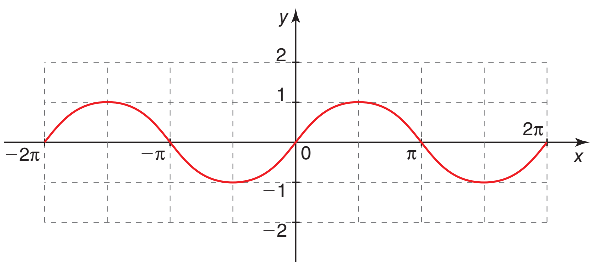
6. **(PUC-SP)** Na figura a seguir tem-se o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k \cdot \text{sen}\,(mx)$, em que k e m são reais, e cujo período é $\frac{8\pi}{3}$.



O valor de $f\left(\frac{29\pi}{3}\right)$ é:

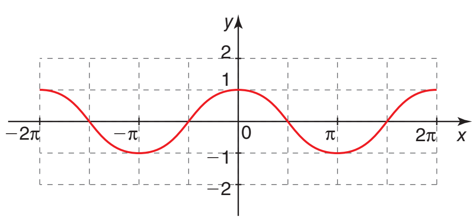
a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

7. **(UEMS)** Seja f a função dada pelo gráfico a seguir e seja a função $g(x) = \frac{x}{2}$.

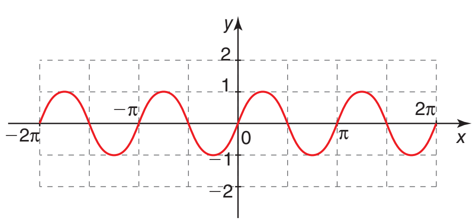


Define-se a função composta $f(g(x))$ como aquela que associa a cada número real b o valor $y = f(g(b))$. O gráfico que representa $f(g(x))$ é:

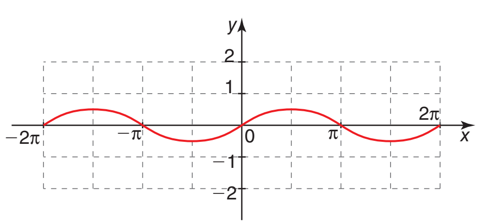
a)



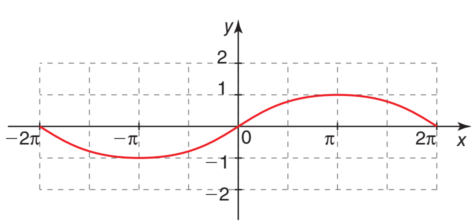
b)



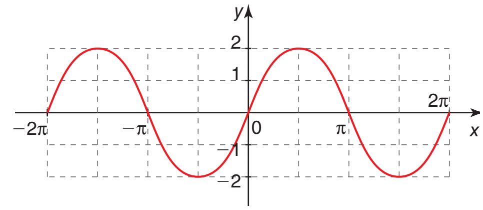
c)



d)



e)



8. **(PUC-SP)** Estando as determinações dos arcos compreendidas entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, então o valor da expressão $y = \text{sen}\left(\text{arcsen}\,\frac{1}{1 + a^2} + \text{arccos}\,\frac{1}{1 + a^2}\right)$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 3 d) $\frac{2}{3}$ e) 0

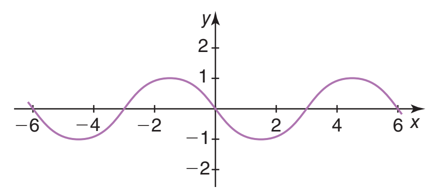
9. **(UFJF-MG)** Considere as funções f, g e h definidas a seguir e os 3 gráficos apresentados.

I. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}\,(2x)$

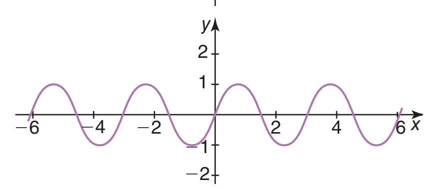
II. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \text{sen}\,(|x|)$

III. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \text{sen}\,(-x)$

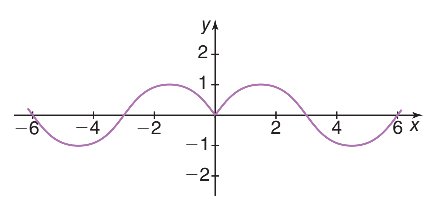
a)



b)



c)



A associação que melhor corresponde cada função ao seu respectivo gráfico é:

a) I - a, II - b e III - c.

b) I - a, II - c e III - b.

c) I - b, II - a e III - c.

d) I - b, II - c e III - a.

e) I - c, II - a e III - b.

10. **(Vunesp)** Considere a representação gráfica da função definida por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cdot \left(-1 + \sqrt{x - 1}\right)$.

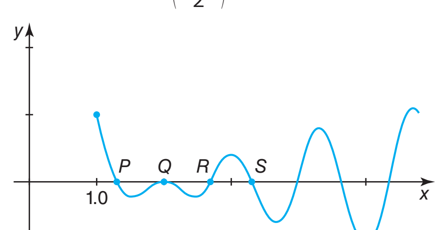


gráfico da função f, sem escala

Os pontos P, Q, R e S denotam os quatro primeiros pontos de intersecção do gráfico da função f com o eixo das abscissas. Determine as coordenadas dos pontos P, Q, R e S, nessa ordem.

Exercício 6

Como o conjunto imagem de f é o intervalo $[-2, 2]$, temos $|k| = 2$.

Por outro lado, como o período é $\frac{8\pi}{3}$, temos:

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = \frac{3}{4}$$

Assim, como a função seno é ímpar, observando o gráfico concluímos que $f(x) = 2 \text{ sen}\left(\frac{3}{4} \cdot x\right) =$

$= -2 \text{ sen}\left(-\frac{3}{4} \cdot x\right)$ e, portanto:

$$f\left(\frac{29\pi}{3}\right) = 2 \text{ sen}\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{29\pi}{3}\right) = 2 \text{ sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

Alternativa **b**.

Exercício 7

Admitindo-se que a função dada pelo gráfico é $f(x) = \text{sen } x$, temos:

$f(g(x)) = \text{sen } \frac{x}{2}$. Logo:

- período: $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
- imagem: $[-1, 1]$

Alternativa **d**.

Exercício 8

$$\text{arcsen}\frac{1}{1 + a^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arccos}\frac{1}{1 + a^2}$$

Logo:

$$y = \text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{1}{1 + a^2} + \text{arccos}\frac{1}{1 + a^2}\right) =$$

$$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arccos}\frac{1}{1 + a^2} + \text{arccos}\frac{1}{1 + a^2}\right) =$$

$$= \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Alternativa **b**.

Exercício 9

I. O gráfico de $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ tem período $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ou seja, está representado pelo gráfico do item **b**.

II. O gráfico de $g(x) = \text{sen}\,(|x|)$ é simétrico ao gráfico de $y = \text{sen}\,(x)$ em relação ao eixo y, ou seja, está representado pelo gráfico do item **c**.

III. O gráfico de $h(x) = \text{sen}\,(-x)$ é simétrico ao gráfico de $y = \text{sen}\,(x)$ em relação ao eixo x, ou seja, está representado pelo gráfico do item **a**.

Alternativa **d**.

Exercício 10

Observando graficamente que as abscissas dos pontos P, Q, R e S são maiores que 1, temos:

$$0 = \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cdot \left(-1 + \sqrt{x - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi x}{2} = k\pi \text{ ou } \sqrt{x - 1} = 1$$

$$\therefore x = \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = 2$$

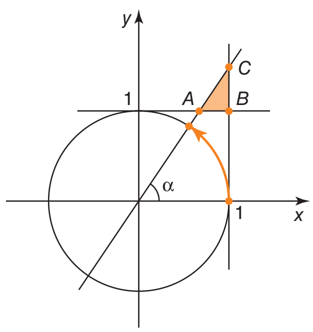
Assim, para $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ e $k = 5$, as coordenadas dos pontos P, Q, R e S são, respectivamente, $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$, $(2; 0)$, $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$ e $\left(\frac{10}{3}; 0\right)$.

11. **(Unifesp)** Considere a função $y = f(x) = 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para todo x real.

a) Dê o período e o conjunto imagem da função f.

b) Obtenha todos os valores de x no intervalo $[0, 1]$ tais que $y = 1$.

12. **(Unifesp)** Com base na figura que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente,

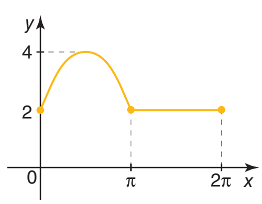


a) calcule a área do triângulo ABC, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

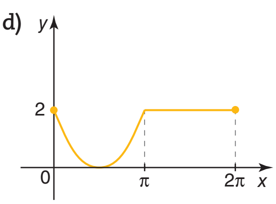
b) determine a área do triângulo ABC, em função de α, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

13. **(Mackenzie-SP)** O gráfico que melhor representa a função $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $y = 2 + \text{sen}\, x + |\text{sen}\, x|$, é:

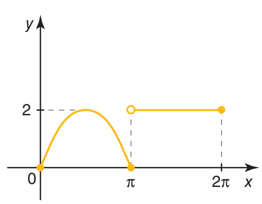
a)



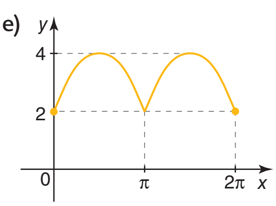
d)



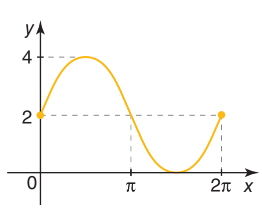
b)



e)



c)



14. **(ITA-SP)** Considerando as funções

$\text{arcsen}: [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\text{arccos}: [-1, +1] \to [0, \pi]$,

assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{5}{12}$

15. **(UFBA)** Dadas as funções $f(x) = \text{sen}\, 2x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$, determine para quais valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

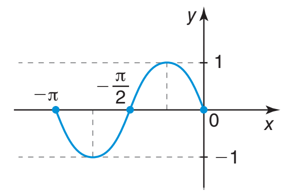
16. **(PUC-SP)** Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$f(x) = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x - \text{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \text{sen}\, 2x$. Determine:

a) O período de f.

b) As soluções da equação $f(x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

17. **(Unitau-SP)** Indique a função trigonométrica $f(x)$ de domínio $\mathbb{R}$; $Im = [-1, 1]$ e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:



a) $y = 1 + \cos x$

b) $y = 1 - \text{sen}\, x$

c) $y = \text{sen}(-2x)$

d) $y = \cos(-2x)$

e) $y = -\cos x$

18. **(Vunesp)** A temperatura, em grau Celsius (°C), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, da 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant 24$, com t em horas.

Determine:

a) A temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$).

b) Em quais horários do dia a temperatura atingiu 0 °C.

19. **(Vunesp)** Há famílias que sobrevivem trabalhando na coleta de material para reciclagem, principalmente em cidades turísticas. Numa tal cidade, uma família trabalha diariamente na coleta de latas de alumínio. A quantidade (em quilogramas) que essa família coleta por dia varia, aumentando em finais de semana e feriados. Um matemático observou a quantidade de alumínio coletada por essa família durante dez dias consecutivos e modelou essa situação através da seguinte função:

$f(x) = 10 + (x + 1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{2\pi}{3}\right)$, onde f indica a quantidade de alumínio em quilogramas, coletada pela família no dia x, com $1 \leqslant x \leqslant 10$, x inteiro positivo. Sabendo que f, nesse período, atinge seu valor máximo em um dos valores de x no qual a função $\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{2\pi}{3}\right)$ atinge seu máximo, determine o valor de x, para o qual a quantidade coletada nesse período foi máxima, e quantos quilos de alumínio foram coletados pela família nesse dia.

20. **(Unifesp)** Sabe-se que, se $b > 1$, o valor máximo da expressão $y - y^b$, para y no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, ocorre quando $y = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$. O valor máximo que a função $f(x) = \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x$ assume, para x variando em $\mathbb{R}$, é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

e) 1

21. **(Mackenzie-SP)** O conjunto solução da equação $\text{arcsen}\, 2x - 3\, \text{arcsen}\, x = 0$ tem:

a) 0 elemento.

b) 1 elemento.

c) 2 elementos.

d) 3 elementos.

e) 4 elementos.

Exercício 11

a) O período da função é: $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Como $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1$, o conjunto imagem é o intervalo [0, 2].

b) Para $x \in [0, 1]$, temos:

$1 = 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, para $k = 0$ e $k = 1$, temos $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$.

Exercício 12

a) A ordenada do ponto C é igual à tangente de $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

A ordenada do ponto A é igual à cotangente de $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Assim, a área do triângulo retângulo ABC, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

é: $\dfrac{\left(\text{tg}\,\frac{\pi}{3} - 1\right)\left(1 - \text{cotg}\,\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}$

b) Para $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a área do triângulo ABC é:

$\dfrac{(\text{tg}\,\alpha - 1)(1 - \text{cotg}\,\alpha)}{2} = \dfrac{(\text{tg}\,\alpha - 1)^2}{2\,\text{tg}\,\alpha}$

Exercício 13

Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$y = 2 + \text{sen}\, x + |\text{sen}\, x| \Rightarrow y = \begin{cases} 2 + 2\,\text{sen}\, x, \text{ se sen}\, x \geqslant 0 \\ 2, \text{ se sen}\, x < 0 \end{cases}$

Assim, o gráfico que melhor representa a função f é o gráfico da letra **a**.

Alternativa **a**.

Exercício 14

$\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5} + \text{arccos}\,\frac{4}{5}\right) =$

$= \cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right) \cdot \cos\left(\text{arccos}\,\frac{4}{5}\right) - \text{sen}\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right) \cdot \text{sen}\left(\text{arccos}\,\frac{4}{5}\right) =$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$

Alternativa **b**.

Exercício 15

Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x \geqslant \text{sen}\, x$

$\therefore \text{sen}\, x \cdot (2\cos x - 1) \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x \geqslant 0 \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \text{sen}\, x \leqslant 0 \\ \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup [\pi; 2\pi]$

Exercício 16

a) $f(x) = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x - \text{sen}\,\frac{\pi}{6} \cdot \text{sen}\, 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$

Logo, o período de $f(x)$ é: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$

$\therefore \frac{\pi}{6} + 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$, temos:

$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

Exercício 17

O gráfico do enunciado representa uma função ímpar. Lembrando que a função $y = \text{sen}\, x$ é ímpar, temos $\text{sen}(-2x) = -\text{sen}(2x)$, ou seja, o gráfico de $y = \text{sen}(-2x)$ é simétrico ao gráfico de $y = \text{sen}(2x)$ em relação à origem.

Alternativa **c**.

Exercício 18

a) Para $t = 2$ e $t = 9$, temos:

$f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1{,}7}{2} - 0{,}5 = 0{,}35$

$f(9) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -0{,}7$

Logo, a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas era 0,35 °C e, às 9 horas, −0,7 °C.

b) Para $f(t) = 0$, temos:

$0 = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

$\therefore \frac{\pi}{12} \cdot t = \pm\frac{\pi}{6} \cdot t + k2\pi$

$\therefore t = 8k, k \in \mathbb{Z}$

Assim, fazendo $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$, obtemos:

$t = 0$ h, $t = 8$ h, $t = 16$ h e $t = 24$ h

Logo, a temperatura atingiu 0 °C nos seguintes horários: 0 h, 8 h, 16 h e 24 h.

Exercício 19

Para $1 \leqslant x \leqslant 10$, com $x \in \mathbb{Z}_+^*$, o valor máximo atingido pela função $\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é:

$\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3} = k2\pi \Rightarrow$

$x = 6k + 2, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$ e $k = 1$, temos $x = 2$ e $x = 8$.

Logo, a quantidade coletada, em quilograma, é máxima para $x = 8$ e, portanto:

$f(8) = 10 + (8 + 1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 8 - \frac{2\pi}{3}\right) = 19$

Exercício 20

$f(x) = \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x \Rightarrow f(x) = 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

$\therefore \frac{f(x)}{2} = \cos x - \cos^2 x$

Assim, a função $g(x) = \frac{f(x)}{2} = \cos x - \cos^3 x$ assume seu valor máximo quando:

$\cos x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ou seja, o valor máximo de f é:

$2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

Alternativa **d**.

Exercício 21

$\text{arcsen}\, 2x - 3\,\text{arcsen}\, x = 0 \Rightarrow \text{arcsen}\, 2x = 3\,\text{arcsen}\, x$

Sendo $\alpha = \text{arcsen}\, 2x$ e $\beta = \text{arcsen}\, x$, temos:

$\alpha = 3\beta \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\, 3\beta$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = 3\,\text{sen}\,\beta - 4\,\text{sen}^3\beta \Rightarrow 2x = 3x - 4x^3$

$\therefore 4x^3 - x = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Alternativa **d**.

Matrizes, determinantes e sistemas lineares

No estudo de fenômenos que relacionam valores desconhecidos, representados por incógnitas, necessitamos de equações, organizadas em um sistema, para determinar essas incógnitas, caso isso seja possível. Neste tema, estudaremos os sistemas de equações do 1º grau e as tabelas, chamadas de matrizes, que representam seus coeficientes e/ou termos independentes.

Matrizes

- **Matriz do tipo $m \times n$** (lemos "m por n") é toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Essa tabela deve ser representada entre parênteses ou entre colchetes.
- Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A. Assim, uma matriz A do tipo $m \times n$ é representada genericamente da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz quadrada** é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Toda matriz quadrada tem uma **diagonal principal** e uma **diagonal secundária**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

- **Matriz identidade** é a matriz unitária [1] e qualquer matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a zero.
- **Matriz nula** é toda matriz cujos elementos são iguais a zero.
- **Transposta** de uma matriz A é a matriz A^t tal que os números que formam cada coluna i da matriz A^t são, ordenadamente, iguais aos números que formam a linha i de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Duas matrizes do mesmo tipo são **iguais** quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Operações entre matrizes

- A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em A e em B.
- A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, nessa ordem, é a soma de A com a **oposta** de B.
- O **produto** de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ d & e & f & \cdots \\ g & h & i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc & \cdots \\ kd & ke & kf & \cdots \\ kg & kh & ki & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times k}$ e $B = (b_{ij})_{k \times n}$, considere a linha i de A e a coluna j de B, isto é:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

O **produto da linha i pela coluna j** é definido por:

$$\boxed{a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i pelos elementos da coluna j e somamos os resultados obtidos.

- O **produto** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que cada elemento c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B.
- Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz B tal que:

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si** e são indicadas por: $B = A^{-1}$ ou $A = B^{-1}$.

Determinantes

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada, obtido por operações entre seus elementos, que definiremos a seguir.

Representamos o determinante de uma matriz A por det A.

Se a matriz quadrada tiver ordem n, o determinante dessa matriz também terá ordem n.

- **Determinante de ordem 1:** é o próprio elemento da matriz.

$$A = [m] \Rightarrow \det A = m$$

- **Determinante de ordem 2:** é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária de uma matriz de ordem 2.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

Também podemos indicar o determinante por barras:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- **Determinante de ordem 3:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

- Para calcular o determinante de ordem 3, usamos a regra prática apresentada a seguir, conhecida como **regra de Sarrus**.
  - Repetimos, à direita do determinante, as duas primeiras colunas e desenhamos as seguintes setas:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

  - Multiplicamos os três números alinhados em cada seta, conservando o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal principal e invertendo o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal secundária.

$$\begin{matrix} & & & -gec & -hfa & -idb \\ \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} & & & aei & bfg & cdh \end{matrix}$$

  - Adicionamos os seis resultados calculados, ou seja:
  $D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Determinante de ordem *n*

- Seja a matriz A, representada abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Considere a submatriz obtida com a eliminação da linha e da coluna que contêm o elemento a_{ij}, isto é, a linha i e a coluna j. Indicamos por D_{ij} o determinante dessa submatriz.

Chama-se **cofator** do elemento a_{ij} o número que indicaremos por A_{ij}, definido por:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}}$$

- **Teorema de Laplace:** O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geqslant 2$, é obtido multiplicando-se cada elemento de uma fila qualquer por seu cofator e adicionando-se os resultados.

Propriedades dos determinantes

- O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, ou seja: $\det A = \det A^t$
- Se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada A são todos nulos, então: $\det A = 0$
- Permutando entre si duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtemos uma nova matriz B tal que: $\det B = -\det A$
- Multiplicando uma fila de uma matriz quadrada A por um número real k, obtemos uma nova matriz B tal que: $\det B = k \cdot \det A$
- Se uma matriz quadrada A tem duas filas paralelas iguais ou se uma fila é múltipla de outra fila paralela, então: $\det A = 0$
- Se uma fila de uma matriz quadrada A é combinação linear de outras duas ou mais filas paralelas, então: $\det A = 0$
- **Teorema de Jacobi:** Se a uma fila de uma matriz quadrada A for adicionada uma múltipla de outra fila paralela, obtemos uma matriz B tal que: $\det A = \det B$
- **Teorema de Binet:** Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

A inversa de uma matriz

- Dada a matriz quadrada de ordem n, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, considere a matriz $\text{cof } A = (A_{ij})_{n \times n}$, em que cada A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij}. A transposta da matriz cof A é chamada de **matriz adjunta de *A***, que indicamos por $\overline{A}$:

$$\boxed{\overline{A} = (\text{cof } A)^t}$$

Em resumo, a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofatores de A.

- Se A é uma matriz quadrada de ordem n, temos:

$$\boxed{A \cdot \overline{A} = (\det A) \cdot I_n}$$

- Se A é uma matriz quadrada com $\det A \neq 0$, então

$A \cdot \left(\dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}\right) = I_n$ e, portanto:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}}$$

- Existe a inversa de uma matriz quadrada A se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Sistemas lineares

- **Equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é toda equação que pode ser representada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são constantes reais chamadas de **coeficientes** das incógnitas e b é uma constante real chamada de **termo independente** da equação.

- **Solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ é toda ênupla (sequência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira. Caso não exista ênupla nessas condições, dizemos que a equação é **impossível**.
- Toda equação linear cujo termo independente é zero é chamada de **equação linear homogênea** e admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), denominada **solução trivial** da equação homogênea.
- **Sistema linear** é todo sistema de equações formado exclusivamente por equações lineares.
- **Solução** de um sistema linear é qualquer solução comum a todas as equações do sistema. O conjunto S formado por todas as soluções de um sistema linear é chamado de **conjunto solução** do sistema.
- Dois sistemas lineares, A e A', são **equivalentes** se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução.

Classificação de um sistema linear

- Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tem:

  - **Sistema possível e determinado** (SPD) é todo sistema linear que admite uma única solução.
  - **Sistema possível e indeterminado** (SPI) é todo sistema linear que admite mais de uma solução.
  - **Sistema impossível** (SI) é todo sistema linear que não admite solução alguma.

  Se um sistema linear admite mais de uma solução, então admite infinitas soluções.

- Todo sistema linear homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial.

Interpretação geométrica

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é:

- SPD se, e somente se, as retas representadas por suas equações são **concorrentes**.
- SPI se, e somente se, as retas representadas por suas equações são **coincidentes**.
- SI se, e somente se, as retas representadas por suas equações são **paralelas distintas**.

Sistema linear escalonado

Um sistema linear é **escalonado** se, e somente se:

- todas as equações apresentam as incógnitas em uma mesma ordem;
- em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo;
- existe uma ordem para as equações tal que, de uma equação para a outra, aumenta o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo.

Resolução de um sistema linear

A resolução de um sistema linear escalonado é muito simples. Por isso, para resolver um sistema linear A não escalonado, usaremos o **método do escalonamento**, que permite obter um sistema escalonado A', equivalente ao sistema inicial, por meio das seguintes operações elementares:

- permutar entre si duas ou mais equações de A;
- multiplicar (ou dividir) ambos os membros de uma equação de A por uma constante k, com $k \neq 0$;
- substituir uma equação de A pela soma, membro a membro, dessa equação com outra desse sistema.

Discussão de um sistema linear

- Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, demonstra-se que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$
$$D = 0 \Leftrightarrow \text{SPI ou SI}$$

  Se obtivermos $D = 0$, deveremos escalonar o sistema para descobrir se ele é SPI ou SI.

- Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear **homogêneo** com número de equações igual ao número de incógnitas, demonstra-se que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD (apenas a solução trivial)}$$
$$D = 0 \Leftrightarrow \text{SPI (solução trivial e soluções próprias)}$$

- Se o sistema apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, não existe o determinante da matriz dos coeficientes; logo, sua discussão deverá ser feita com o auxílio do escalonamento.

No Vestibular

1. **(UPF-RS)** A empresa Brinque Muito realizou uma grande doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu 535 brinquedos, entre bolas e bonecas, 370 brinquedos, entre bonecas e carrinhos, e o total da doação entre bolas e carrinhos foi de 455 brinquedos. É possível afirmar que, para realizar a doação, a empresa produziu:

a) 320 bolas.
b) 145 carrinhos
c) 235 bonecas.
d) 780 brinquedos.
e) 1.350 brinquedos.

2. **(Unir-RO)** Considere o sistema de equações lineares abaixo.

$$\begin{cases} 4x - 6y - 2z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - az = 0 \end{cases}$$

Qual deve ser o valor de a para que o sistema tenha infinitas soluções?

a) -2 **c)** 1 **e)** 2
b) 0 **d)** -1

3. **(Unir-RO)** Para codificar palavras de 4 letras, por meio de matrizes, pode-se utilizar o seguinte método:

I. Associa-se cada letra da palavra a um número da tabela:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

II. Escreve-se, com os números obtidos, uma matriz M de ordem 2×2.
Exemplo: A matriz correspondente à palavra BOTA é $M = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$.

III. Multiplica-se M pela matriz-codificadora (**C**), inversível de ordem 2, obtendo-se, assim, a matriz-codificada $N = C \cdot M$;

IV. Para obter a matriz M, calcula-se o produto $C^{-1} \cdot N$.

Uma palavra com quatro letras fora codificada pelo método acima, obtendo-se a matriz $N = \begin{bmatrix} 27 & 42 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que a matriz-codificadora utilizada foi $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, pode-se afirmar que essa palavra é:

a) AMOR
b) VIDA
c) UNIR
d) ROSA
e) FLOR

Exercício 1

Sejam x, y e z os números, respectivamente, de bolas, bonecas e carrinhos. Do enunciado, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 535 \\ y + z = 370 \\ x + z = 455 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 310 \\ y = 225 \\ z = 145 \end{cases}$$

Alternativa **b**.

Exercício 2

O sistema linear dado é homogêneo e, portanto, será SPI se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema for nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -1$$

Alternativa **d**.

Exercício 3

Seja $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ a matriz que representa a palavra procurada. Temos:

$$N = C \cdot M \Rightarrow \begin{bmatrix} 27 & 42 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 27 \\ -x + z = 9 \\ 2y + w = 42 \\ -y + w = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \\ z = 15 \\ w = 18 \end{cases}$$

Logo, pela tabela, a palavra procurada é FLOR.
Alternativa **e**.

4. **(IME-RJ)** Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando sua transposta é igual a sua inversa. Considerando essa definição, determine se a matriz $[R]$ a seguir é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\operatorname{sen}(n\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. **(Fuvest-SP)** Diz-se que a matriz quadrada A tem posto 1 se uma de suas linhas é não nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de a, b e c para os quais a matriz 3×3 abaixo tem posto 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

6. **(UFBA)** Determine os valores de k para que o sistema de equações $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k - 1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ seja:

a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.

7. **(UFV-MG)** Considere as matrizes quadradas de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Seja $M = A \cdot B^t$, onde B^t é a matriz transposta de B. O determinante da matriz inversa de M é:

a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2}$

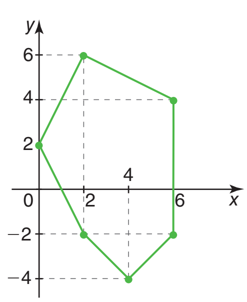
8. **(Unicamp-SP)** Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 11 \\ x + 2y + z + w = 12 \\ x + y + 2z + w = 13 \\ x + y + z + 2w = 14 \end{cases}$$

9. **(Udesc)** Considere a equação $\det \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 1 \\ \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & \cos x & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$.

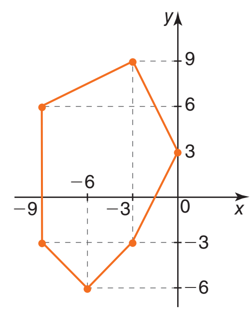
Determine o valor de $\cos x$, para $x \in [0; \pi]$.

10. **(UFG-GO)** Um polígono pode ser representado por uma matriz $F_{2 \times n}$, onde n é o número de vértices e as coordenadas dos seus vértices são as colunas dessa matriz. Assim, a matriz $F_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ representa o polígono da figura abaixo.

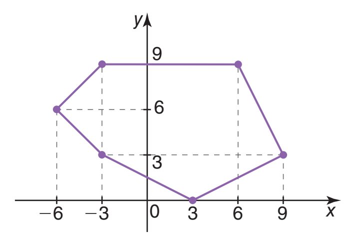


Em computação gráfica, utilizam-se transformações geométricas para realizar movimentos de figuras e objetos na tela do computador. Essas transformações geométricas podem ser representadas por uma matriz $T_{2 \times 2}$. Fazendo-se o produto das matrizes $T_{2 \times 2} \times F_{2 \times n}$, obtém-se uma matriz que representa a figura transformada, que pode ser uma simetria, translação, rotação ou dilatação da figura original. Considerando a transformação geométrica representada pela matriz $T_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, qual é a figura transformada do polígono representado pela matriz $F_{2 \times 6}$ dada anteriormente?

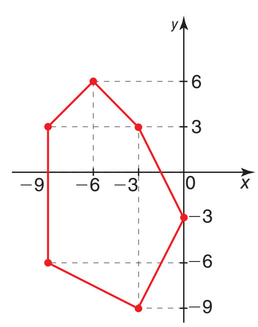
a)



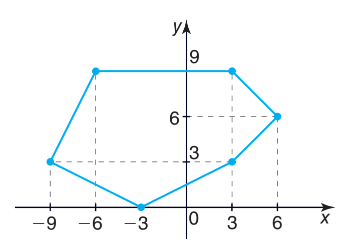
b)



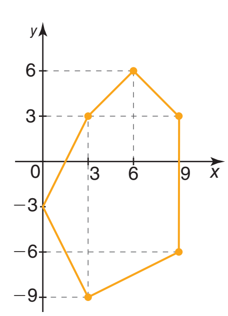
c)



d)



e)



Exercício 4

Para que $[R]$ seja ortogonal, devemos ter $[R] \cdot [R]^t = I_3$.
De fato:

$$\begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & \text{sen}(n\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2(n\alpha) + \text{sen}^2(n\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2(n\alpha) + \cos^2(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz R é ortogonal.

Exercício 5

A matriz dada tem posto 1 se, e somente se:

$$\begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ b + c - 3a = 2 \\ c - 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Exercício 6

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & k-1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = -2k^2 - 2k + 12$$

a) O sistema será SPD se, e somente se:
$D \neq 0 \Rightarrow -2k^2 - 2k + 12 \neq 0$
$\therefore k \neq -3$ e $k \neq 2$

Para responder aos itens **b** e **c**, devemos substituir k pelos valores que anulam o determinante D e escalonar o sistema assim obtido.

- Para $k = 2$, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + y + 4z = 1 \end{cases} \text{(SPI)}$$

- Para $k = -3$, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y - 4z = 4 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases} \text{(SI)}$$

Assim, concluímos:

b) O sistema é possível e indeterminado para $k = 2$.
c) O sistema é impossível para $k = -3$.

Exercício 7

Temos:

$$M = A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, $\det M = 4$ e, portanto, $\det M^{-1} = \frac{1}{4}$.

Alternativa **c**.

Exercício 8

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 11 \\ x + 2y + z + w = 12 \\ x + y + 2z + w = 13 \\ x + y + z + 2w = 14 \end{cases}$$

Adicionando as equações, membro a membro, obtemos:
$5(x + y + z + w) = 50$
$\therefore x + y + z + w = 10$
Subtraindo essa equação, membro a membro, de cada equação do sistema, concluímos:
$x = 1, y = 2, z = 3$ e $w = 4$

Exercício 9

Para $x \in [0; \pi]$, temos:

$$\det \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen}\, x & 1 \\ \text{sen}\, x & \text{sen}\, x & 1 \\ 1 & \cos x & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$\therefore \text{sen}\, 2x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

Logo:

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ e $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercício 10

Multiplicando a matriz $T_{2 \times 2}$ por $F_{2 \times 6}$, temos:

$$T_{2 \times 2} \cdot F_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ -3 & -9 & -6 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Alternativa **e**.

11. **(Fuvest-SP)** A tabela a seguir fornece os valores unitários do peso, volume e preço de três tipos de produtos A, B e C.

	A	B	C
Peso (kg)	2	3	5
Volume (L)	2	5	4
Preço (US$)	4	8	10

a) Calcule o valor total do peso, volume e preço do seguinte pedido de mercadorias:
A – 100 unidades
B – 200 unidades
C – 50 unidades

b) Calcule o número de unidades de cada um dos produtos A, B e C num despacho com os seguintes valores totais:

Peso	4.500 kg
Volume	5.300 L
Preço	10.000 US$

12. **(Unifor-CE)** Seja A uma matriz 2×2 tal que $3 \cdot A = A^2$. Se A é inversível, então o determinante de A é igual a:

a) 12
b) 9
c) 6
d) 3
e) $\frac{1}{3}$

13. **(Unioeste-PR)** Considere o sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas a seguir.

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{3} \\ x + 2y - z = \frac{2}{3} \\ 6x + 3y - \frac{3}{2}z = 1 \end{cases}$$

Podemos afirmar que tal sistema:

a) Não possui solução.
b) Possui uma única solução.
c) Tem como solução geral o conjunto $\{(a, b, a - b)$ com a e b pertencentes a $\mathbb{R}\}$.
d) É possível, mas possui número infinito de soluções.
e) Possui um número finito n de soluções, onde $n > 2$.

14. **(Unifesp)** Se $|A|$ denota o determinante da matriz A, e se $A = \begin{pmatrix} |A| & 1 \\ 2 & |A| \end{pmatrix}$, então:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, se $|A| < 0$.
c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, se $|A| > 0$.
d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. **(Unicamp-SP)** Seja dado o sistema linear:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique.
b) Para determinar uma solução aproximada de um sistema linear $Ax = b$ impossível, utiliza-se o método dos quadrados mínimos, que consiste em resolver o sistema $A^TAx = A^Tb$. Usando esse método, encontre uma solução aproximada para o sistema dado anteriormente. Lembre-se de que as linhas de M^T (a transposta da matriz M) são iguais às colunas de M.

16. **(Unicamp-SP)** Uma matriz real quadrada P é dita ortogonal se $P^T = P^{-1}$, ou seja, se sua transposta é igual à sua inversa.

a) Considere a matriz P a seguir. Determine os valores de a e b para que P seja ortogonal. (*Dica*: você pode usar o fato de que $P^{-1} \cdot P = I$, em que I é a matriz identidade.)

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

b) Certa matriz A pode ser escrita na forma $A = QR$, sendo Q e R as matrizes a seguir. Sabendo-se que Q é ortogonal, determine a solução do sistema $Ax = b$, para o vetor b dado, sem obter explicitamente a matriz A. (*Dica*: Lembre-se de que $x = A^{-1}b$.)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 11

a) Associando uma matriz 3 × 3 à primeira tabela e uma matriz 3 × 1 aos pedidos feitos, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.050 \\ 1.400 \\ 2.500 \end{bmatrix}$$

Assim, os valores totais são: 1.050 kg, 1.400 L e US$ 2.500.

b) Sendo x, y e z, respectivamente, os números de unidades de cada um dos produtos A, B e C, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.050 \\ 5.300 \\ 10.000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1.000 \\ y = 500 \\ z = 200 \end{cases}$$

Exercício 12

Como A é invertível, temos que $\det A \neq 0$; logo:

$\det(3 \cdot A) = \det(A^2) \Rightarrow 3^2 \cdot \det A = \det^2 A$

$\therefore \det A = 9$

Alternativa **b.**

Exercício 13

Permutando as duas primeiras equações e reduzindo os membros ao mesmo denominador, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 2 \\ 12x + 6y - 3z = 2 \\ 12x + 6y - 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 6y - 3z = 2 \\ 0x - 18y + 9z = -6 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Alternativa **d.**

Exercício 14

$$A = \begin{pmatrix} |A| & 1 \\ 2 & |A| \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} |A| & 1 \\ 2 & |A| \end{pmatrix}$$

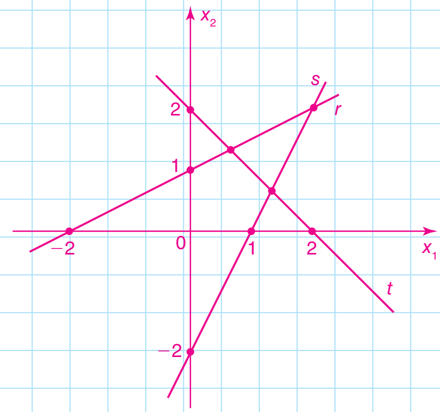
$\therefore |A| = |A|^2 - 2$

$\therefore |A| = 2$ ou $|A| = -1$

Alternativa **d.**

Exercício 15

a) Representando graficamente as três retas num mesmo plano cartesiano, temos:



Assim, não existe ponto comum às três retas; logo, o sistema não tem solução.

b) Como a solução aproximada desse sistema impossível é dada por $A^TAx = A^Tb$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$$

Exercício 16

a) A matriz P é ortogonal se, e somente se, $P \cdot P^t = I$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & b \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 - 3a - 3b = 0 \\ 4 + 9a^2 + 9b^2 = 9 \\ 4 - 3a + 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Como Q é ortogonal e $x = A^{-1}b = (QR)^{-1}b = R^{-1}Q^{-1}b = R^{-1}Q^tb$, temos:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Análise combinatória e Binômio de Newton

A Análise combinatória estuda métodos de contagem. Embora não se possa precisar a época em que surgiu nem seus idealizadores, é certo que a primeira obra impressa que apresenta problemas de Análise combinatória foi a *Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalita*, de Luca Pacioli, publicada em Veneza, no ano de 1494.

Princípio fundamental da contagem

Se os experimentos A e B podem apresentar m e n resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que o experimento composto de A e B pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto:

$$m \cdot n$$

Esse princípio pode ser generalizado para qualquer número finito de experimentos.

Princípio aditivo da contagem

- Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- Se A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, se $n(A \cap B) = 0$, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Fatorial de *n*

- Seja n um número natural, com $n \geqslant 2$. **Fatorial de *n***, que é representado por ***n*!**, é o produto dos números naturais consecutivos: $n, n-1, n-2, ..., 1$. Isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$$

- Define-se: $0! = 1$ e $1! = 1$
- Propriedade fundamental dos fatoriais:

$$n! = n \cdot (n-1)!, \forall n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Arranjo simples

- Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **arranjo simples** de p elementos de I toda sequência formada por p elementos **distintos** de I, com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação simples

- Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **permutação simples** dos n elementos de I todo arranjo simples desses n elementos, tomados n a n.

$$P_n = A_{n,n} = n!$$

- Considere n elementos, entre os quais o elemento a_1 comparece n_1 vezes, o elemento a_2 comparece n_2 vezes, ..., o elemento a_k comparece n_k vezes. O **número de permutações com elementos repetidos**, que indicamos por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, ..., n_k)}$, é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_k!}$$

Combinação simples

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **combinação simples** de p elementos de I todo subconjunto de I formado por p elementos, com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Binômio de Newton

- Para quaisquer números reais x e a e qualquer número natural n, temos:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p =$$

$$= \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p +$$

$$+ ... + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

- O **termo geral** do binômio de Newton é dado por:
  - $T = \binom{n}{p}x^p a^{n-p}$, segundo a ordem crescente dos expoentes de x;
  - $T = \binom{n}{p}x^{n-p} a^p$, segundo a ordem decrescente dos expoentes de x.

No Vestibular

1. **(Unioeste-PR)** Na intenção de formar números naturais compostos de três algarismos nos deparamos com a possibilidade de que os algarismos que compõem esse número podem ser ou não distintos. Se optarmos pela alternativa de compor esses números com algarismos que podem ser repetidos, teremos uma quantidade de números que chamaremos de A. Se optarmos pela formação de número de três algarismos, porém sem repeti-los, teremos uma quantidade de números que chamaremos de B. Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) $A + B = 1.500$
b) $A = 1.000$ e $B = 504$
c) $A - B = 252$
d) A é superior a B em 250 números.
e) $A = B$

2. **(PUC-SP)** Com a palavra ALUNO:

a) quantos anagramas podemos formar apresentando as consoantes em ordem alfabética, não necessariamente juntas?
b) quantos anagramas podemos formar apresentando as vogais em ordem alfabética, não necessariamente juntas?

3. **(UFV-MG)** O número de combinações de n objetos tomados 3 a 3 é igual ao número de arranjos dos mesmos objetos tomados 2 a 2. O valor de $n^2 - n$ é:

a) 30 b) 42 c) 56 d) 70

4. **(IME-RJ)** O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^{12}$ é:

a) 1.260
b) 630
c) 315
d) 230
e) 115

5. **(Vunesp)** Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1), e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001, 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

a) 120
b) 62
c) 78
d) 20
e) 10

6. **(Unifesp)** O corpo clínico de pediatria de certo hospital é composto por 12 profissionais, dos quais 3 são capacitados para atuação junto a crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de 3 profissionais, de tal maneira que 1 deles, pelo menos, tenha a capacitação referida. Quantas comissões distintas podem ser formadas nestas condições?

a) 792
b) 494
c) 369
d) 136
e) 108

Exercício 1

O total de números com três algarismos é:
$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
O total de números com três algarismos distintos é:
$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$
Alternativa **c.**

Exercício 2

a) O número de anagramas que apresentam o L antes do N é igual ao número de anagramas que apresentam o N antes do L; assim, o total t de anagramas que apresentam as consoantes em ordem alfabética é dado por: $t = \frac{5!}{2} = 60$

b) Há seis ordens possíveis para as vogais: AUO, AOU, OAU, OUA, UAO e UOA, não necessariamente juntas. O total de anagramas da palavra ALUNO se distribui igualmente entre essas 6 ordens. Logo, o número k de anagramas que apresentam as vogais em ordem alfabética é dado por: $k = \frac{5!}{6} = 20$

Exercício 3

Para $n \in \mathbb{N}$, temos:
$C_{n,3} = A_{n,2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-2)!}$
$\therefore 6 \cdot (n-3)! = (n-2) \cdot (n-3)! \Rightarrow n = 8$
$\therefore n^2 - n = 56$
Alternativa **c.**

Exercício 4

Observando que:
$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^{12} = [(x+1)^3]^{12} = (x+1)^{36}$, temos:
$T = \binom{36}{k} x^{36-k}$
Assim: $36 - k = 2 \Rightarrow k = 34$
Logo, o coeficiente de x^2 é: $T = \binom{36}{34} = 630$
Alternativa **b.**

Exercício 5

O total de palavras formadas por uma letra é 2.
O total de palavras formadas por duas letras é: $2 \cdot 2 = 4$
O total de palavras formadas por três letras é: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
O total de palavras formadas por quatro letras é:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
O total de palavras formadas por cinco letras é:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
Logo, o número máximo de palavras com cinco letras ou menos é: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$
Alternativa **b.**

Exercício 6

O total de comissões formadas por três profissionais escolhidos entre 12 é: $C_{12,3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = 220$
O total de comissões formadas por três profissionais NÃO QUALIFICADOS, entre os nove restantes, é:
$C_{9,3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 84$
Assim, o total de comissões distintas que podem ser formadas de tal maneira que pelo menos um deles seja qualificado é: $220 - 84 = 136$
Alternativa **d.**

7. **(Vunesp)** Uma rede de supermercados fornece a seus clientes um cartão de crédito cuja identificação é formada por 3 letras distintas (dentre 26), seguidas de 4 algarismos distintos. Uma determinada cidade receberá os cartões que têm L como a terceira letra, o último algarismo zero e o penúltimo é 1. A quantidade de cartões distintos oferecidos por tal rede de supermercados para essa cidade é:

a) 33.600
b) 37.800
c) 43.200
d) 58.500
e) 67.600

8. **(Fuvest-SP)** Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Andreia, que vive brigando com Manoel e Alberto.

Nessa classe, será constituída uma comissão de cinco alunos, com exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros.

Quantas comissões podem ser formadas?

a) 71
b) 75
c) 80
d) 83
e) 87

9. **(Fuvest-SP)** Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Souza, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso,

- A família Souza quer ocupar um mesmo banco;
- Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros na lotação é igual a:

a) 928
b) 1.152
c) 1.828
d) 2.412
e) 3.456

10. **(Mackenzie-SP)** O termo independente de x em $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^{16}$ é:

a) 20
b) -15
c) -20
d) 15
e) 200

11. **(UFRRJ)** Deseja-se formar comissões de 5 pessoas de um grupo de 5 homens e 6 mulheres. Quantas comissões poderão ser formadas se em cada uma haverá, no máximo, uma mulher?

12. **(Mackenzie-SP)** No desenvolvimento de $(2x-y)^5(2x+y)^5$, a soma dos coeficientes numéricos vale:

a) 3
b) 9
c) 27
d) 81
e) 243

13. **(Vunesp)** Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 24

14. **(Fatec-SP)** A expressão $\frac{k! \cdot 2-(k-1)!\,(k-1)}{(k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$, é igual a:

a) $k-1$
b) $\frac{k-1}{k}$
c) $\frac{1}{k}$
d) k
e) $2k$

15. **(Unir-RO)** Uma solução da equação $x+y+z+t=10$ é uma quádrupla de números (x_0, y_0, z_0, t_0) tal que $x_0+y_0+z_0+t_0=10$. Por exemplo, (2, 3, 1, 4) é uma solução. Considerando apenas as soluções em que x_0, y_0, z_0, t_0 são inteiros não negativos, o número de soluções dessa equação é:

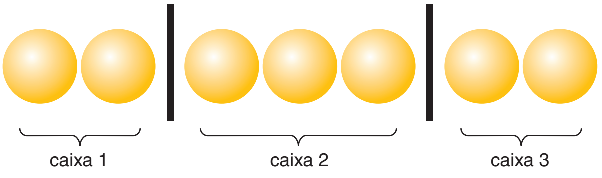
a) 628
b) 286
c) 420
d) 144
e) 980

16. **(Fuvest-SP)** Participam de um torneio de voleibol 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada. Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª fase. Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é:

a) 39
b) 41
c) 43
d) 45
e) 47

17. **(Ufla-MG)** Um problema clássico em combinatória é calcular o número de maneiras de se colocar bolas iguais em caixas diferentes. Calcule o número de maneiras de se colocar 7 bolas iguais em 3 caixas diferentes, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Sugestão:



Cada possibilidade das duas barras na figura determina uma distribuição das bolas nas caixas. No desenho, caixa 1 com duas bolas, caixa 2 com três bolas e caixa 3 com duas bolas.

Exercício 7

O total de trincas formadas por três letras distintas sendo a última fixa e igual a L é: $25 \cdot 24 \cdot 1 = 600$
O total de ternas formadas por quatro algarismos distintos sendo os dois últimos fixos e iguais a 1 e 0 é:
$8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 56$
Assim, o total de cartões distintos oferecidos é:
$600 \cdot 56 = 33.600$
Alternativa **a.**

Exercício 8

O total de comissões formadas com a participação de Andreia, respeitando-se as exigências do exercício, ou seja, sem a presença de Manoel e Alberto, é dado por:

$$1 \cdot C_{6,4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = 15$$

O total de comissões formadas sem a participação de Andreia é: $C_{8,5} = \dfrac{8!}{5!\,(8-5)!} = 56$

Logo, o total de comissões, respeitando-se a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros, é: $15 + 56 = 71$
Alternativa **a.**

Exercício 9

Para acomodar a família Sousa, temos $(3 \cdot 3!)$ possibilidades. E nos dois bancos restantes temos $(2 \cdot 2 \cdot 2!)$ modos de colocar Lúcia e Mauro.
Podemos dispor as quatro pessoas restantes de 4! maneiras. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o número de maneiras distintas é dado por:
$3 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 4! = 3.456$
Alternativa **e.**

Exercício 10

Como $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right]^6 = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$, temos:

$T = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}(-x^{-2})^k = \binom{6}{k}(-1)^k x^{12-4k}$

Assim: $12 - 4k = 0 \Rightarrow k = 3$
Logo, o termo independente é: $T = \binom{6}{3}(-1)^3 = -20$
Alternativa **c.**

Exercício 11

As comissões deverão ser formadas por cinco homens ou por quatro homens e uma mulher; assim temos:

$$C_{5,5} + C_{5,4} \cdot C_{6,1} = 1 + 5 \cdot 6 = 31$$

Portanto, poderão ser formadas 31 comissões.

Exercício 12

Para obter a soma dos coeficientes, substituímos x e y por 1:
$(2 \cdot 1 - 1)^5 \cdot (2 \cdot 1 + 1)^5 = 3^5 = 243$
Alternativa **e.**

Exercício 13

Identificando Pedro e Luísa como um único bloco e João e Rita também, temos $P_2 = 2! = 2$. Dentro de cada um dos blocos, Pedro e Luísa podem permutar-se entre si e João e Rita também. Assim, o número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos segundo as condições do enunciado é: $P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Alternativa **c.**

Exercício 14

Para $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{k! \cdot 2 - (k-1)!\,(k-1)}{(k+1)!} = \frac{2 \cdot k \cdot (k-1)! - (k-1)!\,(k-1)}{(k+1)k\,(k-1)!} =$$

$$= \frac{2k - k + 1}{(k+1)\,k} = \frac{1}{k}$$

Alternativa **c.**

Exercício 15

Cada sequência formada pelos símbolos $\underbrace{||||||||||}_{\text{dez barras}}\underbrace{+\ +\ +}_{\text{três sinais +}}$

representa uma solução da equação $x + y + z + t = 10$; por exemplo:
- A sequência $|||+||||+||+|$ representa a solução (3, 4, 2, 1)
- A sequência $|||++||||||+|$ representa a solução (3, 0, 6, 1)
- A sequência $++||||||||+||$ representa a solução (0, 0, 8, 2)

Assim, o número de soluções da equação, nas condições enunciadas, é dado pelo número de permutações dos elementos $||||||||||+++$, ou seja:

$$P_{13}^{(10,3)} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286$$

Alternativa **b.**

Exercício 16

Como temos quatro chaves, o número total de jogos na 1ª fase é: $4 \cdot C_{5,2} = 4 \cdot \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 40$

Na 2ª fase do torneio, no estilo "mata-mata", temos apenas 8 times participantes (2 em cada chave).
Para definir os primeiros colocados de cada chave, precisamos, portanto, de quatro jogos, restando, assim, quatro times para a semifinal. Na semifinal, realizam-se dois jogos definindo os finalistas, e em um único jogo determina-se o campeão. Logo, o total de jogos no torneio é: $40 + 4 + 2 + 1 = 47$
Alternativa **e.**

Exercício 17

O resultado pedido é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 7$, em que x, y e z representam o número de bolas em cada caixa.
Como $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, façamos $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$. Desse modo, $a + b + c = 4$.
O número de soluções dessa equação é igual ao número de permutações dos símbolos $||||++$, ou seja:

$$P_6^{(4,2)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

18. **(Uerj)** Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
- um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
- de um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

a) quantos sanduíches distintos podem ser montados;

b) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

19. **(UFC-CE)** Considere o conjunto de dígitos $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Dentre todos os números naturais com quatro dígitos que se pode formar utilizando somente elementos de C, calcule quantos são múltiplos de 4.

b) Dentre todos os números naturais com três dígitos distintos que se pode formar utilizando somente elementos de C, calcule quantos são múltiplos de 3.

20. **(Fuvest-SP)** Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16 **b)** 17 **c)** 18 **d)** 19 **e)** 20

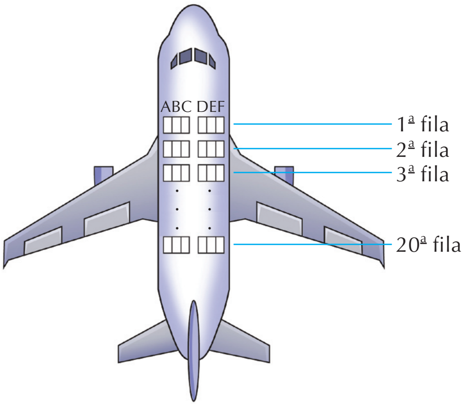
21. **(UFBA)** Numa disputa entre três times, estabeleceu-se que:

- cada time jogaria duas vezes contra cada um dos outros dois, sendo uma partida no seu próprio estádio e outra no estádio do adversário;
- cada time ganharia dois pontos por vitória e um ponto por empate, não marcando ponto em caso de derrota;
- ao final das seis partidas, em que estará em disputa um total de 12 pontos, o campeão seria o time que acumulasse o maior número de pontos.

Um dos times somou três pontos nas partidas realizadas no próprio estádio, e outro empatou todas as partidas que disputou.

Sabendo que, ao final de todas as partidas, os times ficaram com pontuações distintas e que a pontuação do campeão foi um número par, determine o produto das pontuações finais dos três times.

22. **(Ufes)** Um avião possui 120 poltronas de passageiros distribuídas em 20 filas. Cada fila tem 3 poltronas do lado esquerdo (denotadas por A, B, C) e 3 do lado direito (denotadas por D, E, F), separadas pelo corredor do avião.



Considere que duas poltronas são vizinhas quando elas estão numa mesma fila e não há poltronas entre elas, exceto as de letras C e D, que não são consideradas vizinhas.

a) De quantas maneiras distintas dois passageiros podem sentar-se nesse avião, numa mesma fila?

b) De quantas maneiras distintas um casal pode sentar-se em poltronas vizinhas?

c) De quantas maneiras distintas dois casais podem sentar-se nesse avião, de modo que cada casal fique em poltronas vizinhas?

Obs.: A inversão de posição de um casal em poltronas vizinhas caracteriza maneiras disitintas.

23. **(UFRJ)** Seja P o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$ e $z \in \{0, 1, 2\}$.

a) Quantos pontos possui o conjunto P?

b) Considere os subconjuntos de P formados por exatamente três pontos colineares. Determine, entre esses subconjuntos, quantos são formados apenas por pontos em que $z = 1$. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir).

24. **(Unifesp)** As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

a) PROVA.

b) VAPOR.

c) RAPOV.

d) ROVAP.

e) RAOPV.

Exercício 18

a) $3 \cdot 2 \cdot (C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}) =$
$= 6 \cdot (5 + 10 + 10 + 5 + 1) = 6 \cdot 31 = 186$
Podem ser montados 186 sanduíches distintos.

b) $2 \cdot 1 \cdot C_{5,2} = 2 \cdot 10 = 20$
Podem ser montados 20 sanduíches distintos nas condições do enunciado.

Exercício 19

De acordo com as regras de divisibilidade, um número é divisível por 4 se os dois últimos algarismos configuram um número divisível por 4: é divisível por 3 se a soma dos valores absolutos de seus algarismos resulta em um número divisível por 3.

a) Com os algarismos de C formamos 9 pares, que são divisíveis por 4: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64. Os números que procuramos são da forma *abcd*, em que os algarismos a e b são elementos de C e cd é um dos nove pares acima. Agora: $6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$
Portanto, nas condições impostas, existem 324 naturais múltiplos de 4.

b) Calculando as combinações desses 6 elementos que formam números de 3 dígitos, temos: $C_{6,3} = 20$
Listando essas combinações e a soma de seus algarismos, obtemos:

123: soma = 6	236: soma = 11
135: soma = 9	346: soma = 13
234: soma = 9	126: soma = 9
256: soma = 13	146: soma = 11
124: soma = 7	245: soma = 11
136: soma = 10	356: soma = 14
235: soma = 10	134: soma = 8
345: soma = 12	156: soma = 12
125: soma = 8	246: soma = 12
145: soma = 10	456: soma = 15

Portanto, nas 8 combinações destacadas, a soma dos valores absolutos dos algarismos é um múltiplo de 3. Assim, calculando a permutação entre os algarismos de cada uma dessas 8 combinações, obtemos o número total de múltiplos de 3:
$8 \cdot 3! = 8 \cdot 6 = 48$

Exercício 20

Seja h o número de homens e, portanto, $37 - h$ o número de mulheres. Como cada homem se cumprimenta e se despede de outro homem com apertos de mão, o número total de apertos de mão entre homens é:

$$2 \cdot \binom{h}{2} = 2 \cdot \frac{h!}{(h-2)! \cdot 2!} = h(h-1)$$

Cada homem cumprimenta cada mulher com um aperto de mão; assim, o total de apertos de mão entre homens e mulheres é:
$h \cdot (37 - h)$
Logo, sendo 720 o total de apertos de mão, temos:
$h(h - 1) + h(37 - h) = 720 \Rightarrow h = 20$
Ou seja, havia 20 homens e 17 mulheres.
Alternativa **b**.

Exercício 21

Sejam A, B e C os times em questão. Assim, o time A somou 3 pontos em duas partidas realizadas no próprio estádio; logo, ganhou uma e empatou outra. O time C empatou todas as partidas que disputou (duas com A e duas com B); logo, somou 4 pontos. O time B perdeu para A a partida que disputou no estádio deste. Não ganhou nem empatou a outra, pois nesses casos haveria empates de pontuação; logo, perdeu e somou apenas 2 pontos nos empates com C.
Portanto: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

Exercício 22

a) $20 \cdot (6 \cdot 5) = 600$

b) Cada fileira possui 8 maneiras de um casal sentar-se em poltronas vizinhas (4 do lado esquerdo e 4 do lado direito); portanto, o número de maneiras distintas é:
$20 \cdot 8 = 160$

c) Designando por "bloco" cada grupo de três poltronas juntas, por A um dos casais; por B o outro casal; e por m o número de maneiras de os casais se sentarem de modo que cada um fique em duas poltronas vizinhas, temos:

bloco escolhido pelo casal A	par de poltronas vizinhas no bloco escolhido pelo casal A	maneiras possíveis de o casal A ocupar as poltronas escolhidas
40	2	2

bloco escolhido pelo casal B	par de poltronas vizinhas no bloco escolhido pelo casal B	maneiras possíveis de o casal B ocupar as poltronas escolhidas
39	2	2

$m = 40 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 \cdot 2 \cdot 2 = 24.960$

Exercício 23

a) O número de pontos do conjunto P é: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) Fixando-se $z = 1$, temos 9 pontos . Esses pontos pertencem a um quadrado de lado 2 paralelo ao plano xOy, de acordo com a figura 1. Na figura 2 temos as oito retas que passam exatamente por três desses pontos.

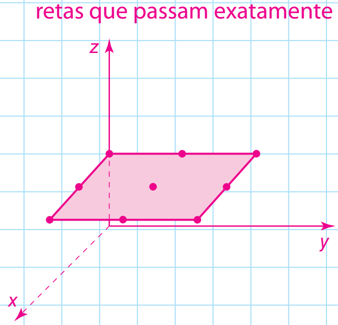


Figura 1

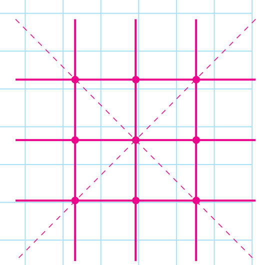


Figura 2

Assim, são 8 os subconjuntos procurados.

Exercício 24

O total de anagramas da palavra PROVA que começa com a letra A é: $1 \cdot 4! = 24$
O total de anagramas da palavra PROVA que começa com a letra O é: $1 \cdot 4! = 24$
O total de anagramas da palavra PROVA que começa com a letra P é: $1 \cdot 4! = 24$
Até agora, temos um total de 72 anagramas. Ou seja, a 73ª palavra inicia-se com a letra R e é o anagrama RAOPV.
Alternativa **e**.

Probabilidade

A probabilidade é um número relacionado à possibilidade de ocorrência de determinado evento.

Conceitos fundamentais

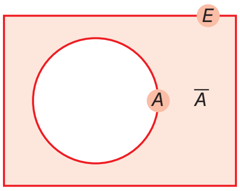
- Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente de acaso é chamado de **experimento aleatório**.
- O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.
- Um espaço amostral é **equiprovável** se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor, quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.
- Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$P(A) = \frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(E)}$$

em que $\mathrm{n}(A)$ e $\mathrm{n}(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

Eventos complementares

Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. Chama-se **evento complementar de** $\boldsymbol{A}$, que se indica por $\overline{A}$, o evento formado pelos elementos que pertencem a E e não pertencem a A.



$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

O círculo representa o evento A, e a região pintada representa o complementar de A.

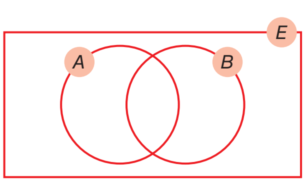
Propriedades

Sendo E um espaço amostral finito e não vazio e sendo A um evento de E, temos as seguintes propriedades:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(E) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Teorema da adição de probabilidades

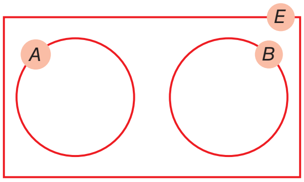
- Considere dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio.



A probabilidade de ocorrência de A **ou** B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

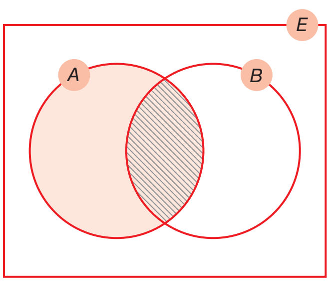
- Dois eventos, A e B, são **mutuamente exclusivos** se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso, temos:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional

- Considere um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, A um evento não vazio de E e B um evento de E.



A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A, que indicamos por $P(B/A)$, é calculada por:

$$P(B/A) = \frac{\mathrm{n}(A \cap B)}{\mathrm{n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Sejam um espaço amostral E, finito e não vazio, e dois eventos A e B de E. Dizemos que A e B são eventos **independentes** se, e somente se:

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{ou} \quad P(A/B) = P(A)$$

Teorema da multiplicação de probabilidades

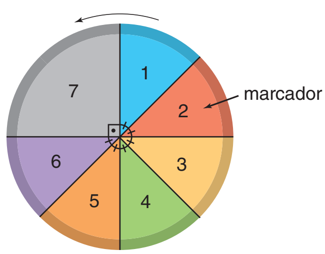
Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio. Se A e B são eventos de E, com $A \neq \varnothing$, a probabilidade de ocorrer A **e** B é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

No Vestibular

1. **(UFPE)** Em uma pesquisa de opinião sobre o consumo dos produtos A, B e C constatou-se que: 30% dos entrevistados consomem A, 43% consomem B, 46% consomem C, 12% consomem A e B, 11% consomem A e C, 13% consomem B e C , 5% consomem A, B e C. Se escolhermos ao acaso um dentre os entrevistados, qual a probabilidade percentual de ele não consumir nenhum dos três produtos?

2. **(Ufla-MG)** Em um programa de auditório, utiliza-se uma roleta, como na figura.



   a) A roleta é girada três vezes. Calcule a probabilidade de os números obtidos no primeiro giro, no segundo giro e no terceiro giro serem, respectivamente, 1, 2 e 3.
   b) A roleta é girada duas vezes. Calcule a probabilidade de a soma do número obtido no primeiro giro mais o número obtido no segundo giro ser menor que 13.

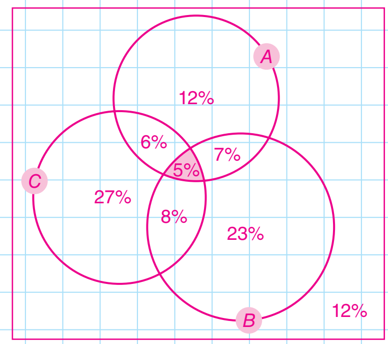
3. **(Unioeste-PR)** Uma universidade irá participar dos jogos Olímpicos Universitários com 140 acadêmicos distintos dos seguintes cursos: 80 de Matemática, 40 de Engenharia elétrica e 20 de Ciências da computação. Sorteando-se um acadêmico ao acaso, para representar a Universidade na solenidade de abertura destes jogos, qual a probabilidade de que ele pertença ao curso de Matemática ou de Engenharia elétrica?

   a) $\frac{4}{7}$
   b) $\frac{3}{7}$
   c) $\frac{8}{7}$
   d) $\frac{6}{7}$
   e) $\frac{5}{7}$

4. **(UFG-GO)** Segundo uma reportagem do jornal *O Popular* [Goiânia, 24 out. 2008, p. 19], no mês de setembro de 2008, 7,6% dos trabalhadores brasileiros estavam desempregados. Por faixa etária, 49,8% dos desempregados tinham entre 25 e 49 anos. Dentre os trabalhadores considerados na reportagem, escolhendo-se ao acaso, a probabilidade de ele estar desempregado e ter entre 25 e 49 anos é, aproximadamente, igual a:

   a) 0,038
   b) 0,065
   c) 0,153
   d) 0,385
   e) 0,655

Exercício 1



Portanto, a probabilidade de um entrevistado não consumir nenhum dos três produtos é 12%.

Exercício 2

Os números de 1 a 6, compreendidos sob um ângulo de 45°, possuem a mesma probabilidade $\left(\frac{1}{8}\right)$, e o número 7, compreendido sob um ângulo de 90°, possui o dobro da probabilidade $\left(\frac{2}{8}\right)$ de cada um dos números de 1 a 6.

Logo:

a) $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$

b) Os casos em que a soma de dois resultados é maior ou igual a 13 são (6 + 7), (7 + 6) ou (7 + 7). Logo, a probabilidade procurada será igual a:

$1 - [P(6 \text{ e } 7) + P(7 \text{ e } 6) + P(7 \text{ e } 7)] =$

$= 1 - \left[\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8}\right)\right] = \frac{7}{8}$

Exercício 3

A probabilidade pedida é: $\frac{80 + 40}{140} = \frac{6}{7}$

Alternativa **d.**

Exercício 4

Pelo teorema da multiplicação de probabilidade, temos:

$\frac{7{,}6}{100} \cdot \frac{49{,}8}{100} \approx 0{,}0378$

Alternativa **a.**

5. **(UFPel-RS)** As corridas de cavalos começaram nas chamadas canchas retas e se constituem em grande atrativo para seus apreciadores, reunindo bom número de pessoas e sendo motivo de festa nos lugares em que se realizam.

Existem diferentes modalidades de apostas, entre elas a trifeta, que pode ser simples, combinada ou parcial. Se você pedir, no guichê, por exemplo, "trifeta simples 2-6-5", para acertar, é necessário que o cavalo de número 2 (dois) chegue em primeiro, o de número 6 (seis), em segundo e, é claro, o de número 5 (cinco), em terceiro.

Disponível em: <http://www.jcb.com.br>.
Acesso em: 18/7/2005.

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que a probabilidade de um apostador acertar a "trifeta simples", num páreo de que participam 7 cavalos, é de:

a) 210

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{1}{210}$

d) $\frac{1}{70}$

e) 70

f) I.R.

6. **(Unir-RO)** Lançando-se um dado com a forma de um dodecaedro regular, cujas faces são numeradas de 1 a 12, qual a probabilidade de um número primo "sair" na face superior?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{4}$

7. **(Unifor-CE)** Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{i + j}$.

Escolhendo-se ao acaso um elemento de A, a probabilidade de que ele seja um número racional é:

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{5}{9}$

e) $\frac{2}{3}$

8. **(Fuvest-SP)** Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1 e que as outras faces saíam com a mesma frequência esperada em um dado não viciado.

Qual a frequência da face 1?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{12}$

9. **(PUC-RJ)** Em uma amostra de vinte peças, existem exatamente quatro defeituosas.

a) Calcule o número de maneiras diferentes de escolher, sem reposição, uma peça perfeita e uma defeituosa.

b) Calcule o número de maneiras diferentes de escolher, sem reposição, duas peças perfeitas.

c) Retirando-se, ao acaso, sem reposição, três peças, calcule a probabilidade de exatamente duas serem perfeitas. Escreva a resposta em forma de fração.

10. **(Fuvest-SP)** Dois dados cúbicos, não viciados, com faces numeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. A probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo, é de:

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{5}{9}$

e) $\frac{2}{3}$

11. **(UFV-MG)** Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq n \leq 64\}$. Escolhendo-se ao acaso um elemento de X, a probabilidade de ele ser múltiplo de 3 ou de 5 é:

a) 48%

b) 46%

c) 44%

d) 42%

12. **(Unicamp-SP)** Três candidatos, A, B e C, concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B, e 100 votariam apenas em C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C, e 10 sócios estão em dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?

b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição mas ainda não tenha se decidido por um único candidato?

Exercício 5

Nas condições do problema, a probabilidade de o apostador acertar a trifeta simples é: $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210}$

Alternativa **c.**

Exercício 6

Os números primos de 1 a 12 pertencem ao conjunto {2, 3, 5, 7, 11}. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{5}{12}$.

Alternativa **b.**

Exercício 7

Pela lei de formação, a matriz A é:

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\frac{5\pi}{2} & \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} & \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} \\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} & \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} & \text{sen}\,\pi \\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} & \text{sen}\,\pi & \text{sen}\,\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{9}$.

Alternativa **c.**

Exercício 8

Seja x a probabilidade de sair a face 1. Assim, temos:

$x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Alternativa **c.**

Exercício 9

Na amostra existem 4 peças defeituosas e 16 peças perfeitas, logo:

a) $C_{4,1} \cdot C_{16,1} = 4 \cdot 16 = 64$

b) $C_{16,2} = 120$

c) $\frac{C_{16,2} \cdot C_{4,1}}{C_{20,3}} = \frac{120 \cdot 4}{1.140} = \frac{480}{1.140} = \frac{8}{19}$

Exercício 10

Apresentamos o espaço amostral S do lançamento de dois dados com os casos favoráveis em destaque.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Logo, a probabilidade pedida é: $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Alternativa **a.**

Exercício 11

Os múltiplos de 3 pertencentes ao conjunto x constituem uma PA de primeiro termo igual a 15, último termo igual a 63, razão igual a 3 e número de termos n dado por:

$63 = 15 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 17$

Os múltiplos de 5 pertencentes ao conjunto x constituem uma PA de primeiro termo igual a 15, último termo igual a 60, razão igual a 5 e número de termos k dado por:

$60 = 15 + (k - 1) \cdot 5 \Rightarrow k = 10$

Os múltiplos de 15 pertencentes ao conjunto x constituem uma PA de primeiro termo igual a 15, último termo igual a 60, razão igual a 15 e número de termos m dado por:

$60 = 15 + (m - 1) \cdot 15 \Rightarrow m = 4$

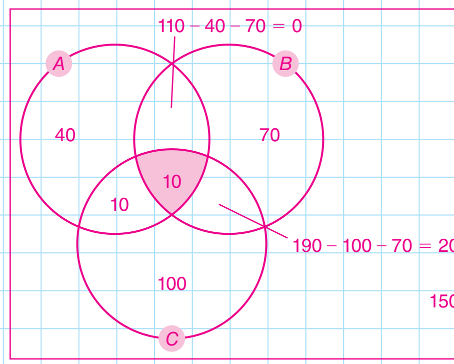
Assim, a probabilidade pedida é:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{17 + 10 - 4}{50} = 46\%$

Alternativa **b.**

Exercício 12

a) Do enunciado, temos:



Existem 20 sócios que estão na dúvida entre os candidatos B e C, mas não estão em dúvida quanto ao candidato A. Na notação de conjunto, representamos o conjunto dessas pessoas por $(B \cap C) - A$.

O total de sócios que não votariam em B é:

$100 + 10 + 40 = 150$

b) O total de sócios que participaram da pesquisa é:

$100 + 20 + 10 + 10 + 70 + 40 + 150 = 400$

O total de sócios que ainda não se decidiram por um único candidato é: $10 + 10 + 20 = 40$

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{40}{400} = 10\%$

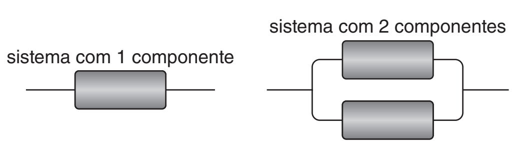
13. **(Uerj)** Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de *Aedes aegypti*, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a seguinte tabela:

Tipo	Quantidade de mosquitos
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 3	10

Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

a) $\frac{8}{81}$ **b)** $\frac{10}{99}$ **c)** $\frac{11}{100}$ **d)** $\frac{21}{110}$

14. **(UFSCar-SP)** A probabilidade de que um componente eletrônico não quebre é chamada de confiabilidade. Para aumentar a confiabilidade de um sistema, é comum que se instalem dois componentes eletrônicos de mesma confiabilidade em paralelo. Nesse caso, o sistema só irá falhar se ambos os componentes instalados falharem simultaneamente.



a) Calcule a probabilidade de que um sistema com dois componentes, cada um de confiabilidade 90%, não falhe.

b) Admita que um sistema com *n* componentes em paralelo só falhará se os *n* componentes falharem simultaneamente. Calcule o número de componentes em paralelo que devem ser instalados em um sistema para que ele tenha confiabilidade de 99,9%, sabendo-se que cada componente tem confiabilidade de 50%. (Adote $\log 2 = 0{,}3$.)

15. **(Unicamp-SP)** Dois prêmios iguais serão sorteados entre dez pessoas, sendo sete mulheres e três homens. Admitindo que uma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, responda às perguntas abaixo.

a) De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos entre as dez pessoas?

b) Qual é a probabilidade de que dois homens sejam premiados?

c) Qual é a probabilidade de que ao menos uma mulher receba um prêmio?

16. **(Unifesp)** Uma urna contém todas as cartelas, do tipo da figura I, totalmente preenchidas com os algarismos 1, 2, 3 e 4, de forma que cada linha (horizontal) contempla todos os quatro algarismos.

figura I

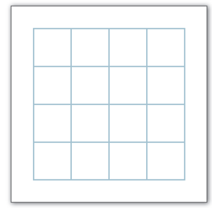
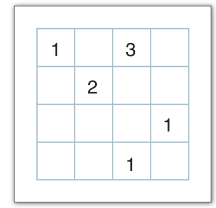


figura II



A probabilidade de se retirar dessa urna, aleatoriamente, uma cartela contemplando a configuração da figura II, com a exigência adicional de que cada coluna (vertical) e cada um dos subquadrados destacados contenham todos os algarismos (1, 2, 3 e 4), é:

a) $\frac{1}{12 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

b) $\frac{1}{16 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

c) $\frac{1}{18 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

d) $\frac{1}{20 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

e) $\frac{1}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$

17. **(Vunesp)** Através de fotografia de satélites de certa região da floresta Amazônica, pesquisadores fizeram um levantamento das áreas de floresta (*F*) e não floresta (*D*) dessa região, nos anos de 2004 e de 2006. Com base nos dados levantados, os pesquisadores elaboraram a seguinte matriz de probabilidade:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Para} \\ & & \begin{array}{cc} F & D \end{array} \\ \text{De} & \begin{array}{c} F \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por exemplo, a probabilidade de uma área de não floresta no ano de 2004 continuar a ser área de não floresta no ano de 2006 era 0,98. Supondo que a matriz de probabilidades se manteve a mesma do ano de 2006 para o ano de 2008, determine a probabilidade de uma área de floresta dessa região em 2004 passar a ser de não floresta em 2008.

18. **(Fuvest-SP)** Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine:

a) A probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

b) A probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

Exercício 13

P(1 mosquito estar contaminado com DEN 3 e outro não) $=$

$= \dfrac{10}{100} \cdot \dfrac{90}{99} \cdot 2 = \dfrac{20}{10 \cdot 11}$

P(2 mosquitos estarem contaminados com DEN 3) $=$

$= \dfrac{10}{100} \cdot \dfrac{9}{99} = \dfrac{1}{10 \cdot 11}$

Portanto, a probabilidade procurada é igual a:

$\dfrac{20}{10 \cdot 11} + \dfrac{1}{10 \cdot 11} = \dfrac{21}{110}$

Exercício 14

a) Se 90% é a confiabilidade de um componente, então 10% é a probabilidade de que ele falhe (ou 0,1). Logo, a probabilidade de que os dois falhem é $(0{,}1) \cdot (0{,}1) = 0{,}01 = 1\%$, então a probabilidade de que o sistema não falhe é $100\% - 1\% = 99\%$.

b) Sistema com confiabilidade de 99,9% é o sistema com 0,1% de probabilidade de falha (ou 0,001). Como cada componente tem 50% ou $\frac{1}{2}$ de probabilidade de falha, para que o sistema falhe devemos ter:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0{,}001 \Rightarrow 2^n = 10^3 \Rightarrow \log 2^n = \log 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 10 \Rightarrow n = \dfrac{3}{\log 2} \Rightarrow n = 10$

Exercício 15

a) Do enunciado, temos: $C_{10,\,2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

b) Os dois homens podem ser escolhidos de $C_{3,\,2}$ maneiras.

Assim, a probabilidade pedida é: $P = \dfrac{C_{3,\,2}}{C_{10,\,2}} = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$

c) A probabilidade de que ao menos uma mulher receba um prêmio é igual a 1 menos a probabilidade de que dois homens sejam premiados. Assim:

$P = 1 - \dfrac{1}{15} = \dfrac{14}{15}$

Exercício 16

Temos 4! modos de dispor esses algarismos na primeira linha, 4! na segunda, 4! na terceira e 4! na quarta.
Assim, o número de casos possíveis é $4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!$.
Temos exatamente duas maneiras de atender à exigência adicional:

figura I

1	4	3	2
3	2	1	4
4	3	2	1
2	1	4	3

ou

figura II

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

Logo, a probabilidade é: $P = \dfrac{2}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = \dfrac{1}{12 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

Exercício 17

Dividiremos em dois casos esse problema:
1º caso: de 2004 a 2006, a probabilidade de continuar a ser de floresta era de 0,95; de 2006 a 2008, a probabilidade de passar de floresta para não floresta era de 0,05. Assim, teremos para esse 1º caso a probabilidade de: $0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0475$
2º caso: de 2004 para 2006, a probabilidade de passar de floresta para não floresta era de 0,05; de 2006 a 2008, a probabilidade de continuar a ser de não floresta era de 0,98. Assim, teremos para esse 2º caso a probabilidade de: $0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}049$
Logo, a probabilidade pedida é:
$0{,}0475 + 0{,}049 = 0{,}0965$

Exercício 18

a) A probabilidade de que tenham sido retiradas duas bolas pretas e uma branca é:

$\dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{15}{56}$

b) Sejam os eventos:

$A = \{$retirar duas bolas pretas e uma branca$\}$
$B = \{$retirar três bolas que não são da mesma cor$\}$
Queremos calcular $P(A/B)$. Como $A \subset B$, temos:

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

Pelo item anterior, $P(A) = \dfrac{15}{56}$.

A probabilidade de as bolas retiradas não serem da mesma cor é a soma da probabilidade de retirar duas pretas e uma branca com a de retirar duas brancas e uma preta.
A probabilidade de uma bola ser preta e duas serem brancas é: $\dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot 3 = \dfrac{15}{28}$

Portanto, a probabilidade de as bolas retiradas não serem da mesma cor é: $P(B) = \dfrac{15}{56} + \dfrac{15}{28} = \dfrac{45}{56}$

Logo, a probabilidade pedida é:

$P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{\frac{15}{56}}{\frac{45}{56}} = \dfrac{1}{3}$

Geometria de posição

A Geometria de posição estuda as figuras geométricas quanto à sua forma e posição, não importando suas medidas.

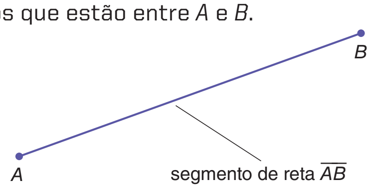
Conceitos fundamentais

Ponto, reta e plano

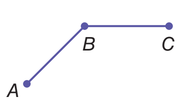
- **Ponto**, **reta** e **plano** são conceitos primitivos da Geometria. Existem três postulados que garantem a existência desses conceitos, chamados de **postulados de existência**:
  - Existem infinitos pontos.
  - Existe reta: uma reta é um conjunto *r* de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a *r*.
  - Existe plano: um plano é um conjunto α de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a α.
- É usual nomear os pontos por letras maiúsculas: *A*, *B*, *C*, *D*, ...; as retas por letras minúsculas: *a*, *b*, *c*, *d*, ...; e os planos por letras gregas minúsculas: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...
- Existem dois postulados que garantem a determinação da reta e do plano, chamados **postulados de determinação**:
  - Dois pontos distintos determinam uma reta.
  - Três pontos não colineares determinam um plano.
- **Espaço** é o conjunto de todos os pontos.

Segmentos de reta

- Dois pontos, *A* e *B*, de uma reta determinam um **segmento de reta**, indicado por $\overline{AB}$, de modo que:
  - Se $A \not\equiv B$, o segmento é formado por *A* e *B* e por todos os pontos que estão entre *A* e *B*.

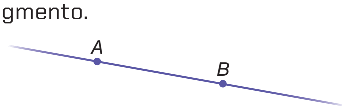


  - Se $A \equiv B$, temos o segmento formado apenas por um ponto, chamado de **segmento nulo**.
- **Segmentos consecutivos** são aqueles que têm um extremo em comum.



$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos consecutivos.

- A **reta suporte** de um segmento é a reta que contém esse segmento.



r é a reta suporte do segmento $\overline{AB}$.

Figuras geométricas

- **Figura geométrica** é qualquer conjunto não vazio de pontos.
- Uma figura geométrica é **plana** quando todos os seus pontos são coplanares, isto é, pertencem a um mesmo plano.
- Uma figura geométrica é **reversa** quando seus pontos não são coplanares.
- Uma figura geométrica formada por conjunto *U* de pontos é **convexa** se, e somente se, dois pontos quaisquer de *U* são extremos de um segmento de reta contido em *U*.

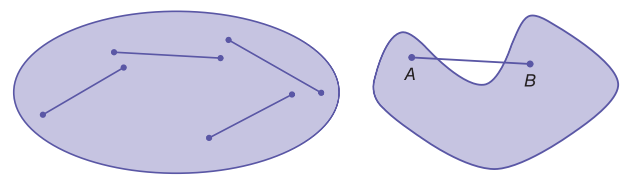
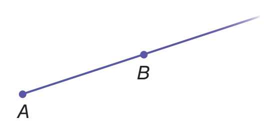


figura convexa figura não convexa

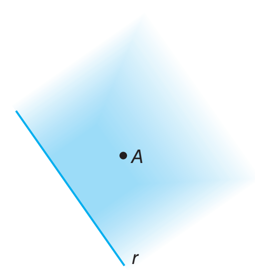
Semirreta, semiplano e semiespaço

- Todo ponto *A* de uma reta *r* separa essa reta em dois conjuntos convexos distintos, *r*′ e *r*″. A reunião do ponto *A* com cada um dos conjuntos *r*′ ou *r*″ é chamada **semirreta** de origem *A*. Se essa semirreta passa por um ponto *B*, distinto de *A*, podemos indicá-la por $\overrightarrow{AB}$.



semirreta $\overrightarrow{AB}$

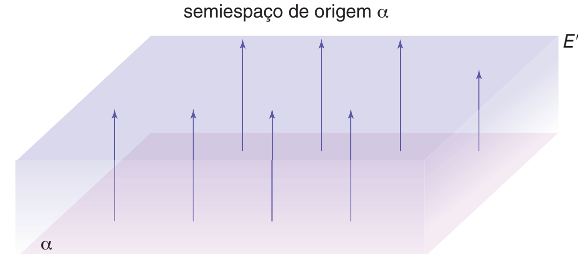
- Toda reta *r* de um plano α separa esse plano em dois conjuntos convexos e disjuntos, α' e α''. A reunião da reta *r* com cada um dos conjuntos α' ou α'' é chamada **semiplano** de origem *r*. Representamos por spl(*r*, *A*) um semiplano que tem origem *r* e passa por um ponto *A*, com $A \notin r$.



spl (*r*, *A*): semiplano de origem *r*

- Todo plano α divide o espaço *E* em dois conjuntos convexos e distintos, *E*′ e *E*″. A reunião do plano α com cada um dos conjuntos *E*′ ou *E*″ é chamada de **semiespaço** de origem α.

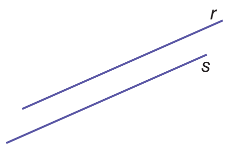
semiespaço de origem α



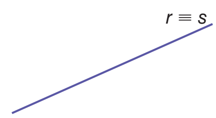
Posições relativas

Posições relativas entre duas retas

- Duas retas coplanares são **paralelas** se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.

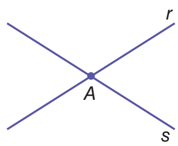


r e s são retas paralelas distintas ($r \,/\!\!/\, s$ e $r \not\equiv s$).



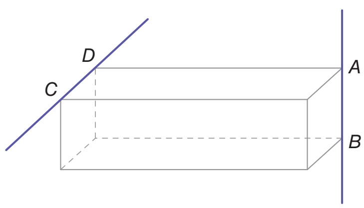
r e s são retas paralelas coincidentes ($r \,/\!\!/\, s$ e $r \equiv s$).

- Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, têm um único ponto em comum.



r e s são concorrentes.

- Duas retas são **reversas** se, e somente se, não são coplanares.



As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas, pois não existe um plano que contenha ambas ao mesmo tempo.

Posições relativas entre reta e plano

- Uma reta r é **paralela** a um plano α se, e somente se, r e α não têm nenhum ponto em comum.
- Uma reta r é **secante** (ou concorrente) a um plano α se, e somente se, r e α têm um único ponto em comum.
- Uma reta r está **contida** em um plano α se, e somente se, todos os pontos de r pertencem ao plano α.

Posições relativas entre dois planos

- Dois planos são **paralelos** se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.
- Dois planos são **secantes** se, e somente se, têm uma única reta em comum.

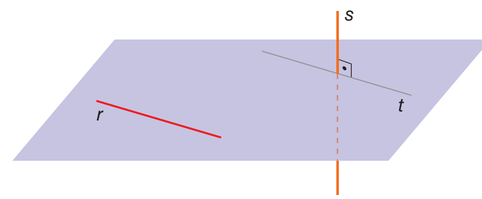
Determinação de um plano

Um plano pode ser determinado por meio de um dos quatro casos fundamentais:

- Três pontos não colineares determinam um plano.
- Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.
- Duas retas concorrentes determinam um plano.
- Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

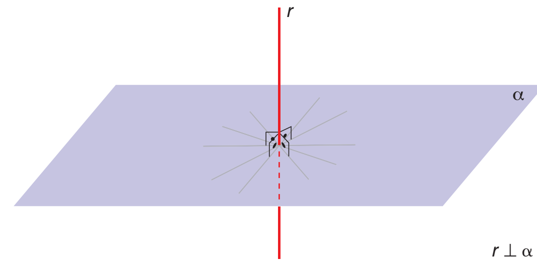
Perpendicularidade

- Duas retas r e s são **perpendiculares** se, e somente se, são concorrentes e determinam um ângulo reto entre si. Se r e s são perpendiculares, indicamos: $r \perp s$ ou $s \perp r$
- Duas retas r e s são **ortogonais** se, e somente se, são reversas e os ângulos formados por elas são retos. Se r e s são ortogonais, indicamos: $r \perp s$ ou $s \perp r$



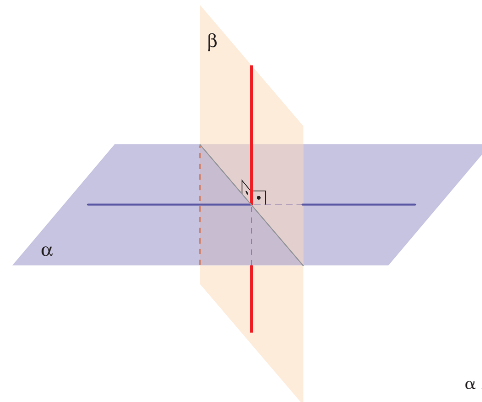
r e s são reversas, $t \,/\!\!/\, r$ e $t \perp s \Leftrightarrow r$ e s são ortogonais.

- Uma reta r secante a um plano α é **perpendicular** a α se, e somente se, todas as retas do plano α que concorrem com r são perpendiculares a r.



$r \perp \alpha$

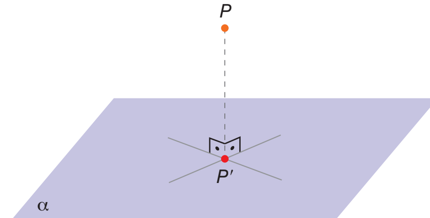
- Dois planos são **perpendiculares** se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



$\alpha \perp \beta$

Projeção ortogonal

- A **projeção ortogonal** de um ponto P sobre um plano α é o ponto P' tal que $P' \in \alpha$ e $\overline{PP'} \perp \alpha$.



- A **projeção ortogonal** de uma figura geométrica sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

No Vestibular

1. **(Unicamp-SP)** É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique, usando argumentos de Geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

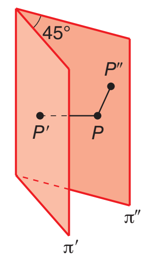
2. **(Fuvest-SP)** Os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ são arestas de um cubo. Um plano α, paralelo ao plano ABC, divide esse cubo em duas partes iguais. A intersecção do plano α com o cubo é um:
   a) triângulo.
   b) quadrado.
   c) retângulo.
   d) pentágono.
   e) hexágono.

3. **(Fuvest-SP)** São dados cinco pontos não coplanares A, B, C, D, E. Sabe-se que $ABCD$ é um retângulo, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:
   a) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EB}$
   b) $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$
   c) $\overleftrightarrow{EB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$
   d) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$
   e) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$

4. **(Fuvest-SP)** Dados um plano α e uma reta r, podemos afirmar que:
   a) Existe um plano β que contém r e é perpendicular a α.
   b) Existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.
   c) Existe um plano β que contém r e é paralelo a α.
   d) Existe um único plano β que contém r e é paralelo a α.
   e) Qualquer plano β que contém r intercepta o plano α.

5. **(Fuvest-SP)** Sejam r e s duas retas distintas. Pode-se afirmar que sempre:
   a) Existe uma reta perpendicular a r e a s.
   b) r e s determinam um único plano.
   c) Existe um plano que contém s e não intercepta r.
   d) Existe uma reta que é paralela a r e a s.
   e) Existe um plano que contém r e um único ponto de s.

6. **(Fuvest-SP)** Sejam π' e π'' as faces de um ângulo diedro de 45° e P um ponto interior a esse diedro. Sejam P' e P'' as projeções ortogonais de P sobre π' e π'', respectivamente. Então, a medida, em graus, do ângulo $P'PP''$ é:



   a) 30
   b) 45
   c) 60
   d) 90
   e) 135

7. **(Fuvest-SP)** O quadrado $ABCD$ é a face de um cubo e I é o centro da face oposta. Sendo α o ângulo entre os planos ABI e CDI, calcule tg $\frac{\alpha}{2}$.
   a) $\frac{1}{2}$
   b) 2
   c) $\frac{1}{3}$
   d) 4
   e) $\frac{1}{4}$

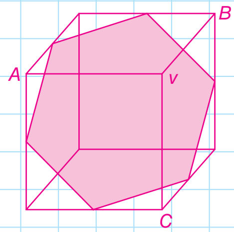
8. **(UFSCar-SP)** Considere um plano a e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a a, a intersecção dessa reta com a é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre a. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre a é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.
   Com relação a um plano a qualquer fixado, pode-se dizer que:
   a) A projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.
   b) A projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
   c) A projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
   d) A projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
   e) A projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

Exercício 1

Três pontos não colineares determinam um plano (postulado de determinação); já com 4 pontos distintos, podemos determinar $C_{4,3}$ planos distintos, ou seja, 4 planos.

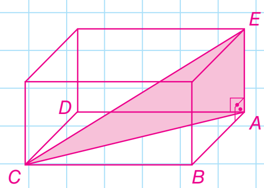
Exercício 2

Considere a figura ao lado.
Como α é paralelo ao plano que contém o triângulo ABC e divide o cubo em duas partes iguais, α intercepta o cubo nos pontos médios das suas arestas, determinando, assim, um hexágono.
Alternativa **e**.



Exercício 3

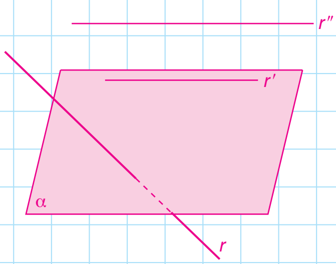
Considere o paralelepípedo reto-retângulo abaixo.



Dentre as alternativas, a única correta é a que apresenta $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ como retas perpendiculares.
Alternativa **d**.

Exercício 4

A reta r pode ser concorrente com o plano α (r), estar contida nele (r') ou ser paralela a ele (r''), conforme a figura abaixo.



Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) Verdadeira, pois:
- se a reta r é perpendicular ao plano, então qualquer plano que contém r é perpendicular a α.
- se a reta r não é perpendicular ao plano, então r e uma reta s, concorrente com r e perpendicular a α, determinam um plano perpendicular a α.

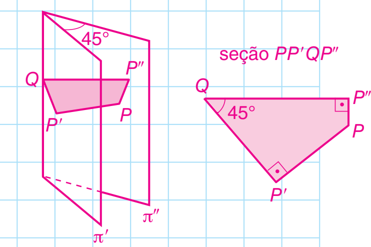
b) Falsa, pois se a reta r for perpendicular a α existirão infinitos planos que contêm r e são perpendiculares a α.
c) Falsa, pois se r tiver ponto em comum com α não existe um plano que contenha r e seja paralelo a α.
d) Falsa, de acordo com o item anterior.
e) Falsa, pois se r é paralela a α, existe um plano β que contém r e é paralelo a α, ou seja, não intercepta α.
Alternativa **a**.

Exercício 5

Se r e s são duas retas distintas, elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Vamos analisar cada uma das alternativas:
a) Verdadeira.
b) Falsa, pois se r e s forem reversas elas não determinarão um único plano.
c) Falsa, pois se r e s são concorrentes não existe um plano que contenha s e não intercepte r.
d) Falsa, pois se r e s são concorrentes não existe uma reta que seja paralela a r e a s.
e) Falsa, pois se r e s são concorrentes não existe um plano que contenha r e um único ponto de s.
Alternativa **a**.

Exercício 6

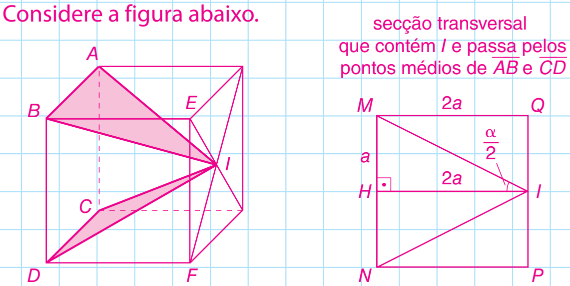
Considere a figura ao lado.
O plano determinado por $P'PP''$ intercepta o diedro formando o quadrilátero $PP'QP''$. Como P' e P'' são projeções ortogonais sobre π' e π'', respectivamente, temos:
$m(Q\hat{P}'P) = m(Q\hat{P}''P) = 90°$



Assim, no quadrilátero $PP'QP''$:
$m(P'\hat{P}P'') + 90° + 45° + 90° = 360°$
$\therefore m(P'\hat{P}P'') = 135°$
Alternativa **e**.

Exercício 7

Considere a figura abaixo.



Sendo $2a$ a medida da aresta do cubo, no triângulo MHI temos: $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
Alternativa **a**.

Exercício 8

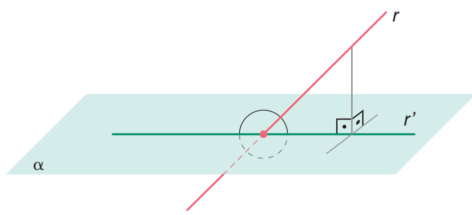
Analisando cada uma das alternativas, temos:
a) Falsa, pois a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar somente em um segmento de reta ou em um ponto.
b) Falsa, pois a projeção ortogonal de uma reta pode resultar somente em uma reta ou em um ponto.
c) Falsa, pois a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar somente em uma parábola, em uma parábola "deformada", em uma reta ou em uma semirreta.
d) Falsa, pois a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar somente em um triângulo ou em um segmento de reta.
e) Verdadeira.
Alternativa **e**.

Geometria métrica: poliedros

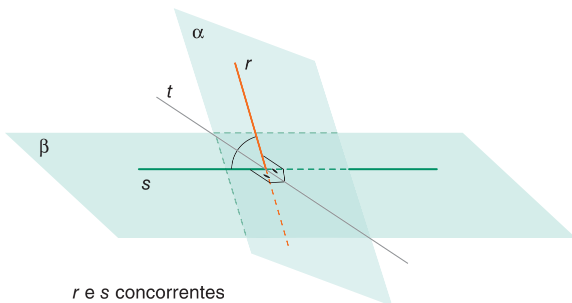
Os poliedros são blocos maciços com a superfície formada por polígonos; por exemplo, cubos e pirâmides.

Ângulos e distâncias

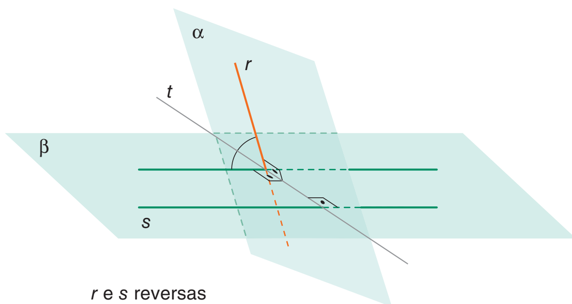
- Seja r uma reta secante a um plano α, e não perpendicular a α, e r' a projeção ortogonal de r sobre α. Os ângulos formados pela reta r e pelo plano α são os ângulos formados por r e r'.



- Sejam α e β dois planos secantes e t a reta comum a esses planos. Os ângulos formados por α e β são os ângulos formados por duas retas r e s, perpendiculares a t, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

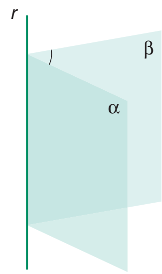


r e *s* concorrentes

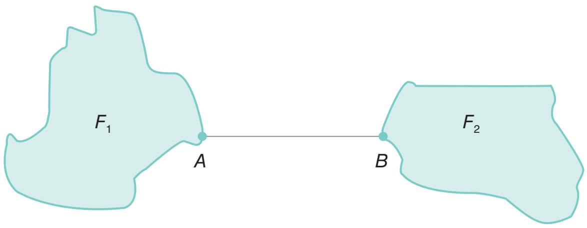


r e *s* reversas

- Um ângulo formado por dois semiplanos α e β de mesma origem r é chamado de **ângulo diedro** (ou simplesmente **diedro**) de arestas r e faces α e β.



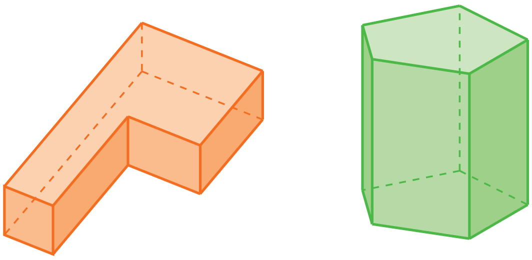
- A **distância** entre duas figuras geométricas F_1 e F_2 é a medida do menor segmento de reta que tem um extremo em F_1 e o outro extremo em F_2.



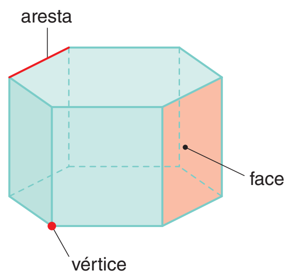
Poliedro

- Seja uma superfície S formada por n polígonos, com $n \geqslant 4$, tal que:
  - não há dois polígonos adjacentes contidos em um mesmo plano;
  - cada lado de qualquer polígono é lado de dois e apenas dois deles.

  A superfície S separa o espaço em duas regiões que não têm ponto em comum: a região I, limitada por S, e a região E, ilimitada. A reunião da superfície S com a região limitada I é chamada de **poliedro**. A superfície S é a superfície do poliedro, e as regiões I e E são o interior e o exterior do poliedro, respectivamente.



- Cada polígono que compõe a superfície do poliedro é chamado de **face** do poliedro.
- Cada lado de uma face qualquer do poliedro é chamado de **aresta** do poliedro.
- Cada vértice de uma face qualquer do poliedro é chamado de **vértice** do poliedro.



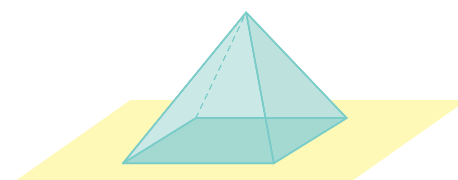
- Os poliedros são nomeados conforme o número de faces. Por exemplo:

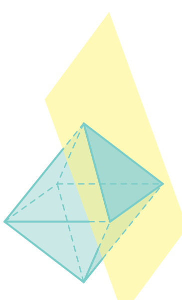
Número de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro

Número de faces	Nome do poliedro
13	tridecaedro
14	tetradecaedro
15	pentadecaedro
16	hexadecaedro
17	heptadecaedro
18	octadecaedro
19	eneadecaedro
20	icosaedro

Poliedro convexo

- Um poliedro é **convexo** quando o plano que contém qualquer uma de suas faces deixa as outras faces contidas em um mesmo semiespaço.





- Em todo poliedro convexo vale a **relação de Euler**:

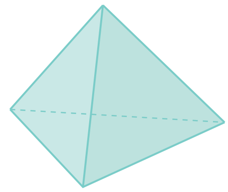
$$\boxed{V - A + F = 2}$$

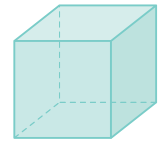
em que V, A e F representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

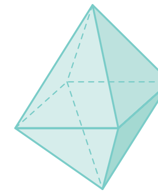
Poliedro regular

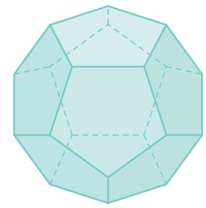
- Considere um polígono convexo contido em um plano α e um ponto O que não pertence a α. Chama-se **ângulo poliédrico** convexo a reunião das semirretas de origem O que passam por qualquer ponto desse polígono.
- Um poliedro convexo é **regular** se, e somente se, são obedecidas as condições:
  - todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si;
  - todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

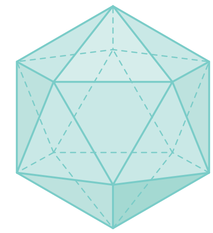
- Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares:


tetraedro regular


cubo

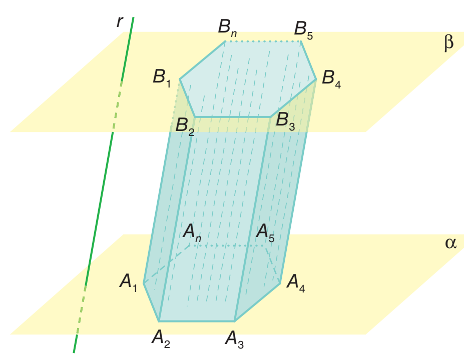

octaedro regular


dodecaedro regular


icosaedro regular

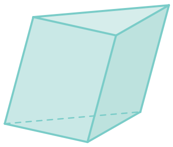
Prisma

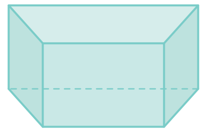
- Sejam dois planos paralelos e distintos, α e β, uma reta r secante a esses planos e um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em α. Consideremos todos os segmentos de retas paralelos a r, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo pertencente a β.
  A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado prisma convexo limitado ou, simplesmente, **prisma**.

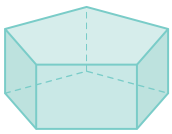


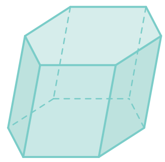
- Observando o prisma acima, temos:
  - Os polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$, contidos nos planos α e β, são as **bases** do prisma;
  - As demais faces, exceto as bases, são as **faces laterais** do prisma;
  - Os vértices das faces são os **vértices** do prisma;
  - Os lados das bases são as **arestas das bases** do prisma;
  - As demais arestas, exceto as das bases, são as **arestas laterais** do prisma;
  - A distância entre os planos das bases é a **altura** do prisma;
  - Todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma é a **diagonal do prisma**; por exemplo, $\overline{B_1A_4}$.

- Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de sua base.


prisma triangular

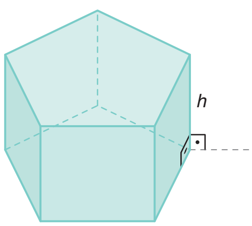

prisma quadrangular


prisma pentagonal

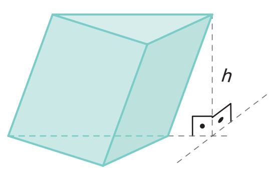

prisma hexagonal

Prisma reto e prisma oblíquo

- Um prisma é **reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.
- Um prisma não reto é chamado de prisma **oblíquo**.



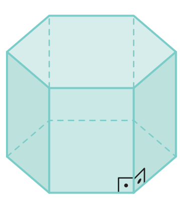
prisma pentagonal reto



prisma triangular oblíquo

Prisma regular

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e suas bases são polígonos regulares.



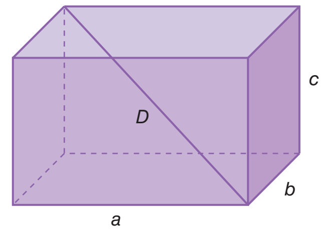
Volume de um prisma

O volume V de um prisma é o produto da área B de sua base por sua altura h:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

Paralelepípedo

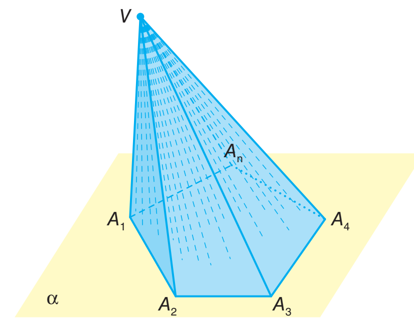
- **Paralelepípedo** é todo prisma cujas bases são paralelogramos.
- Um paralelepípedo é **reto** se suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Se um paralelepípedo não é reto, ele é **oblíquo**.
- Todo prisma reto cujas bases são retângulos é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo**.
- Um paralelepípedo reto-retângulo cujas faces são todas quadradas é chamado de **cubo**.
- Seja um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c. Sua diagonal de medida D, sua área total A_T e seu volume V são dados por:



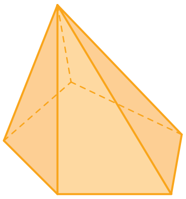
$$\boxed{\begin{aligned} D &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ A_T &= 2(ab + ac + bc) \\ V &= a \cdot b \cdot c \end{aligned}}$$

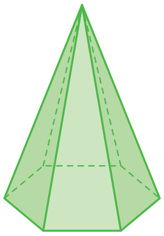
Pirâmide

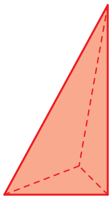
- Sejam um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em um plano α e um ponto V, não pertencente a α. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo em V.
  A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado pirâmide convexa limitada ou, simplesmente, **pirâmide**.

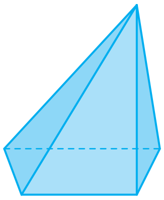


- Observando a pirâmide acima, temos:
  - O ponto V é o **vértice** da pirâmide;
  - O polígono $A_1A_2A_3...A_n$ é a **base** da pirâmide;
  - Os pontos A_1, A_2, ..., A_n são os **vértices da base**;
  - Os lados da base são as **arestas da base**;
  - As demais arestas, exceto as da base, são as **arestas laterais**;
  - A distância entre o vértice V e o plano da base é a **altura** da pirâmide.
- Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base.

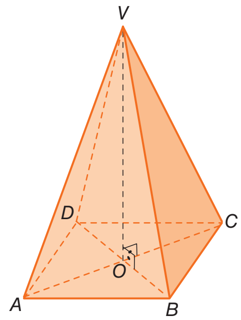

pirâmide pentagonal


pirâmide hexagonal


pirâmide triangular


pirâmide quadrangular

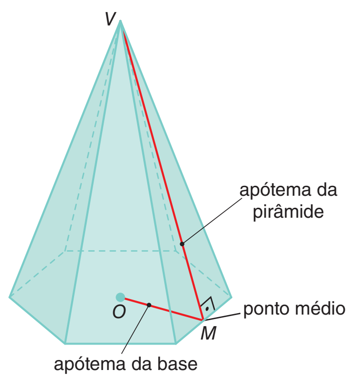
- Uma pirâmide é **regular** se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.



Apótemas em uma pirâmide

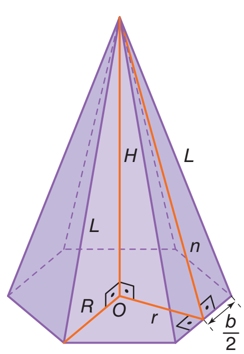
Considere uma pirâmide regular e o ponto médio M de qualquer um dos lados de sua base.

- O segmento de reta que tem um extremo em M e o outro no vértice da pirâmide é chamado de **apótema da pirâmide**.
- O segmento de reta que tem um extremo em M e o outro no centro O da base é chamado de **apótema da base**.



O teorema de Pitágoras e a pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, sejam: H a altura; n a medida do apótema da pirâmide; r a medida do apótema da base; b a medida de uma aresta da base; L a medida de uma aresta lateral; R o raio da circunferência circunscrita à base.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$H^2 + r^2 = n^2$$
$$n^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = L^2$$
$$H^2 + R^2 = L^2$$

Volume de uma pirâmide

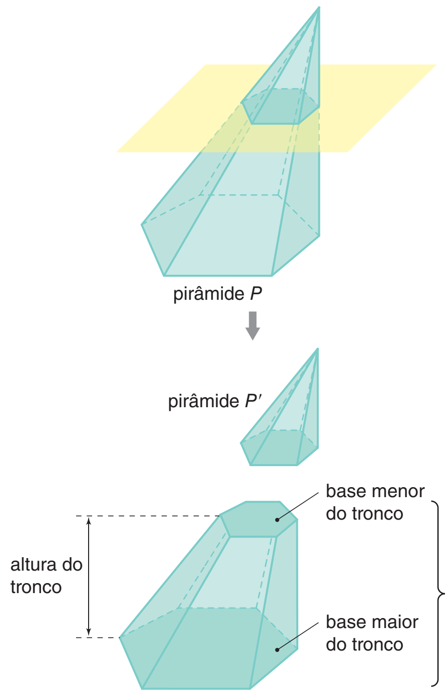
- O volume V de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área B de sua base por sua altura H:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H}$$

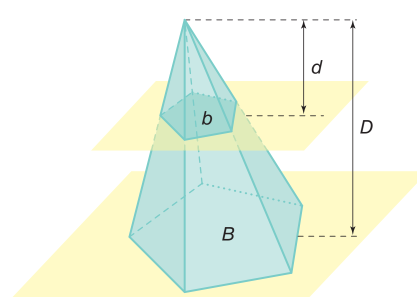
- Duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes (de mesma área) têm volumes iguais.

Semelhança de pirâmides

- Considere uma pirâmide P seccionada por um plano paralelo à sua base. Esse plano separa a pirâmide em dois sólidos: um **tronco de pirâmide** e uma pirâmide P', semelhante à pirâmide inicial P.



- Se um plano secciona uma pirâmide P, de altura D e área da base B, a uma distância d do vértice tal que a secção transversal tenha área b, então:



$$\boxed{\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2}$$

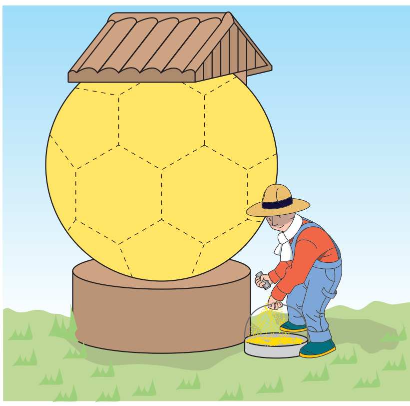
- Além disso, a razão entre os volumes $V_{P'}$ e V_P das pirâmides semelhantes P' e P, respectivamente, é igual ao cubo da razão de semelhança:

$$\boxed{\frac{V_{P'}}{V_P} = \left(\frac{d}{D}\right)^3}$$

No Vestibular

1. **(UFPel-RS)** No México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria.

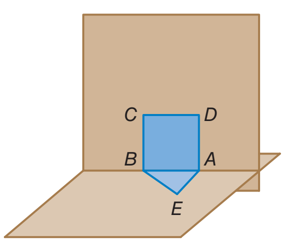
A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.



Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem:

a) 90 arestas e 60 vértices.
b) 86 arestas e 56 vértices.
c) 90 arestas e 56 vértices.
d) 86 arestas e 60 vértices.
e) 110 arestas e 60 vértices.
f) I.R.

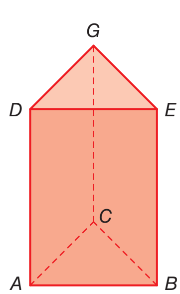
2. **(UFSCar-SP)** O triângulo ABE e o quadrado $ABCD$ estão em planos perpendiculares, conforme indica a figura.



Se $EA = 3$ e $AB = 5$, então ED é igual a:

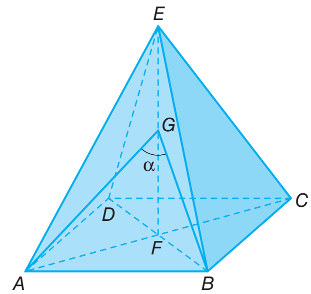
a) $\sqrt{24}$ **c)** $3\sqrt{3}$ **e)** $\sqrt{34}$
b) 5 **d)** $4\sqrt{2}$

3. **(Fuvest-SP)** Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face $ADCG$, e finalmente completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice:



a) A **c)** C **e)** E
b) B **d)** D

4. **(Fuvest-SP)** A figura a seguir mostra uma pirâmide reta de base quadrada $ABCD$ de lado 1 e altura $EF = 1$. Sendo G o ponto médio da altura $\overline{EF}$ e α a medida do ângulo $A\hat{G}B$, então cos α vale:

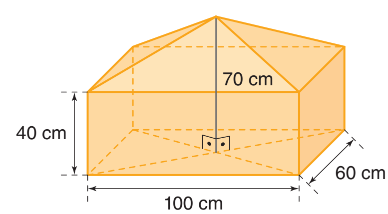


a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{1}{6}$

5. **(Uerj)** Leia os quadrinhos:

(*O Globo*, março 2000)

figura 1

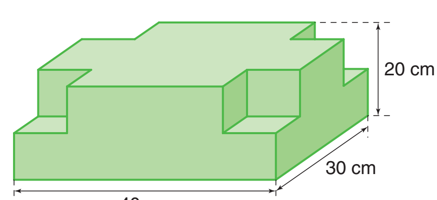


Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo reto-retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3, igual a:

a) 12 **b)** 13 **c)** 14 **d)** 15

6. **(Unifor-CE)** A peça de ferro abaixo foi obtida de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 30 cm e 40 cm, com a retirada de quatro cubos iguais de aresta 10 cm.



Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm^3, então a massa dessa peça, em quilograma, é:

a) 187,2 **c)** 171,6 **e)** 156
b) 179,4 **d)** 163,8

Exercício 1

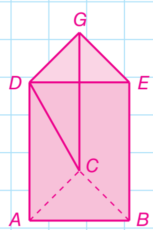
O total de faces do silo é: $20 + 12 = 32$
O total A de arestas do silo é dado por:
$2A = 20 \cdot 6 + 12 \cdot 5 \Rightarrow A = 90$
Assim, pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2$
$\therefore V = 60$
Alternativa **a**.

Exercício 2

Como os planos são perpendiculares, o triângulo EAB é retângulo em A. Assim, temos:
$ED = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
Alternativa **e**.

Exercício 3

Considere a figura a seguir.



O primeiro trajeto da formiga é do vértice G para o vértice C, em seguida do vértice C para o vértice D e, finalmente, do vértice D para o vértice E, pois $\overleftrightarrow{DE}$ é uma reta reversa a $\overleftrightarrow{CG}$.
Alternativa **e**.

Exercício 4

Seja F o ponto médio das diagonais do quadrado $ABCD$ de lado unitário. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AFG, temos: $AG^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
Pela lei dos cossenos, no triângulo isósceles AGB, temos:
$1^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$
Alternativa **b**.

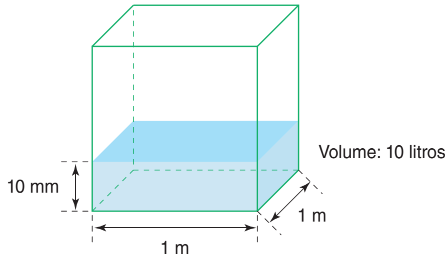
Exercício 5

O volume de terra é igual à soma do volume do paralelepípedo reto-retângulo com o volume da pirâmide. Assim, convertendo as unidades de medida para decímetro, temos que o volume V é dado por:
$V = \left(4 \cdot 10 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 3\right) \text{dm}^3 = 300 \text{ dm}^3$
Como a terra foi acumulada em 20 anos, o volume médio anual é: $\frac{300}{20} = 15$
Alternativa **d**.

Exercício 6

Subtraindo do volume do paralelepípedo reto-retângulo os volumes dos cubinhos de aresta 10 cm, obtemos o volume V da peça:
$V = 20 \cdot 30 \cdot 40 - 4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 20.000 \text{ cm}^3$
Assim, sendo a densidade do ferro 7,8 g/cm^3, a massa da peça é:
$7{,}8 \cdot 20.000 \text{ g} = 156.000 \text{ g} = 156 \text{ kg}$
Alternativa **e**.

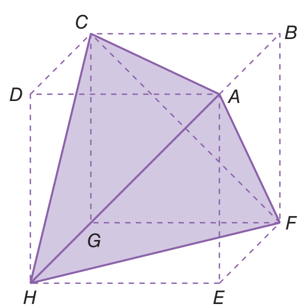
7. **(Unifesp)** Quando se diz que numa determinada região a precipitação pluviométrica foi de 10 mm, significa que a precipitação naquela região foi de 10 litros de água por metro quadrado, em média.



Se numa região de 10 km² de área ocorreu uma precipitação de 5 cm, quantos litros de água foram precipitados?

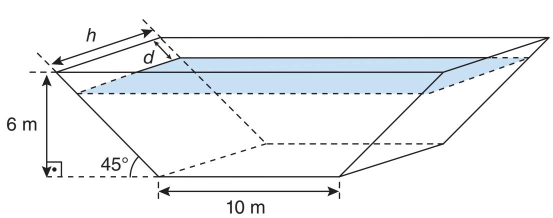
a) 5×10^7
b) 5×10^8
c) 5×10^9
d) 5×10^{10}
e) 5×10^{11}

8. **(UFSCar-SP)** Na figura, os pontos *ACFH* são vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de aresta 3. O volume do tetraedro é:



a) $\frac{27}{8}$
b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$
c) 9
d) $\frac{27\sqrt{13}}{18}$
e) 18

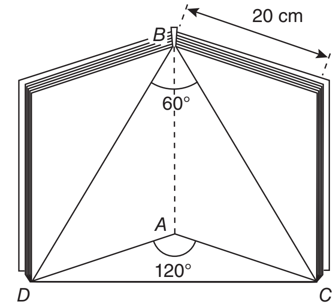
9. **(Mackenzie-SP)**



A figura acima representa uma caçamba com água, na qual as laterais oblíquas e o piso são retangulares e as laterais paralelas têm o formato de trapézios isósceles. Se $d = \sqrt{2}$, a razão entre o volume de água e o volume total da caçamba é:

a) $\frac{17}{25}$
b) $\frac{21}{32}$
c) $\frac{25}{28}$
d) $\frac{17}{28}$
e) $\frac{25}{32}$

10. **(Unicamp-SP)** Suponha que um livro de 20 cm de largura esteja aberto conforme a figura a seguir, sendo $D\hat{A}C = 120°$ e $D\hat{B}C = 60°$.

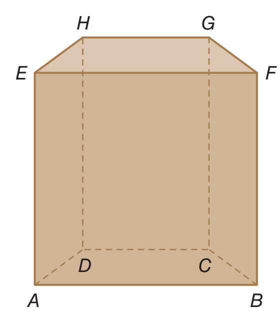


a) Calcule a altura $\overline{AB}$ do livro.
b) Calcule o volume do tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* e *D*.

11. **(FGV)** Considere uma pirâmide regular de altura $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cuja base é um quadrado de lado 3. Calcule:

a) o volume da pirâmide.
b) o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

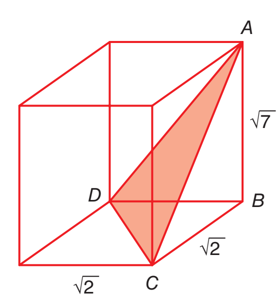
12. **(UFG-GO)** A figura abaixo representa um prisma reto, cuja base *ABCD* é um trapézio isósceles, sendo que suas arestas medem $AB = 10$, $DC = 6$, $AD = 4$ e $AE = 10$.



O plano determinado pelos pontos *A*, *H* e *G* secciona o prisma determinando um quadrilátero. A área desse quadrilátero é:

a) $8\sqrt{7}$
b) $10\sqrt{7}$
c) $16\sqrt{7}$
d) $32\sqrt{7}$
e) $64\sqrt{7}$

13. **(UFSCar-SP)** A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}$, sendo *A*, *B*, *C* e *D* quatro de seus vértices.



A distância de *B* até o plano que contém *A*, *D* e *C* é igual a:

a) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{14}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
e) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

Exercício 7

Uma precipitação de 5 cm, ou seja, de 50 mm, representa 50 litros por m^2. Assim, numa região de 10 km^2, isto é, de $10 \cdot 10^6$ m^2, teremos:

$50 \cdot 10 \cdot 10^6 \text{ L} = 5 \cdot 10^8 \text{ L}$

Alternativa **b.**

Exercício 8

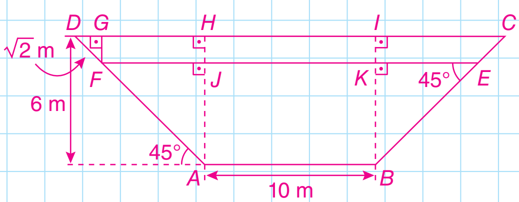
Subtraindo o volume dos 4 tetraedros do volume do cubo de aresta 3, obtemos o volume procurado:

$3^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9$

Alternativa **c.**

Exercício 9

Representando uma secção, temos:



No $\triangle DFG$:

$FG = DF \cdot \text{sen } 45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Logo, $DG = FG = 1$. Além disso, $DH = AH = 6$.

Assim, as dimensões do trapézio $ABCD$ são: $AB = 10$ m, $CD = 22$ m e $AH = 6$ m

E do trapézio $ABEF$: $AB = 10$ m, $EF = 20$ m e $AJ = 5$ m

Assim, sendo h a altura do prisma, temos que a razão pedida é:

$$\frac{\frac{5 \cdot (10 + 20)}{2} \cdot h}{\frac{6 \cdot (10 + 22)}{2} \cdot h} = \frac{25}{32}$$

Alternativa **e.**

Exercício 10

a) O $\triangle DBC$ é equilátero. Sendo $BD = BC = DC = l$, temos:

$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \ l = 20\sqrt{3}$

Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle BAD$, temos:

$AB^2 + 20^2 = l^2 \Rightarrow AB^2 = 3 \cdot (20^2) - 20^2$

$\therefore \ AB = 20\sqrt{2}$

Logo, a altura do livro é $20\sqrt{2}$ cm.

b) Seja DAC a base e $\overline{AB}$ sua altura. Assim, o volume é dado por:

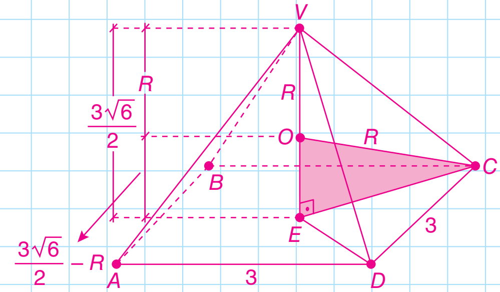
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \text{sen } 120° \cdot 20\sqrt{2} \text{ cm}^3 = \frac{2.000\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3$

Exercício 11

a) A área da base da pirâmide é: $3^2 = 9$. Portanto, seu volume V é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ u.v.} = \frac{9\sqrt{6}}{2} \text{ u.v.}$$

b)



Da figura, $OV = OA = OB = OC = OD = R$, em que R é o raio da esfera.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OEC$:

$R^2 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{27}{2} - 3R\sqrt{6} + R^2 + \frac{9}{2}$

$\therefore \ R = \sqrt{6}$ u.c.

Exercício 12

O plano que contém os pontos A, H e G determina no prisma um trapézio isósceles de base maior $\overline{AB}$ de medida 10, base menor $\overline{HG}$ de medida 6 e lados não paralelos de medidas: $BG = AH = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116}$

Assim, a altura h desse trapézio é:

$h = \sqrt{116 - 2^2} = \sqrt{112}$

E sua área é dada por:

$\frac{(10 + 6) \cdot \sqrt{112}}{2} = 32\sqrt{7}$

Alternativa **d.**

Exercício 13

O triângulo ADC é isósceles. Temos:

$AC = AD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = 3$

$DC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida h da altura do triângulo ADC em relação à base $\overline{DC}$:

$$h^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$$

Logo, a área desse triângulo é: $\frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Temos ainda que o volume do tetraedro trirretângulo $ABCD$ é:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Portanto, a distância d pedida é dada por:

$\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot d \Rightarrow d = \frac{\sqrt{14}}{4}$

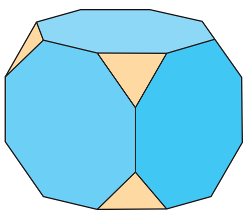
Alternativa **b.**

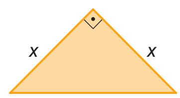
14. **(Unicamp-SP)** Dado um cubo de aresta ℓ, qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo?

15. **(FEI-SP)** Num paralelepípedo reto-retângulo a área total mede 28 cm^2 e a diagonal, $\sqrt{21}$ cm. A soma das dimensões mede:

a) 7 cm
b) 8 cm
c) 9 cm
d) 10 cm
e) 12 cm

16. **(Unifesp)** Um poliedro é construído a partir de um cubo de aresta $a > 0$, cortando-se em cada um de seus cantos uma pirâmide regular de base triangular equilateral (os três lados da base da pirâmide são iguais). Denote por x, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, a aresta lateral das pirâmides cortadas.



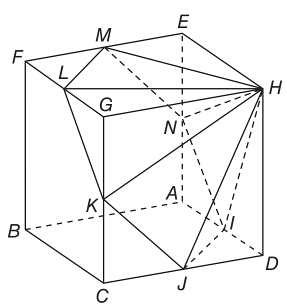


face lateral das pirâmides cortadas

a) Dê o número de faces do poliedro construído.
b) Obtenha o valor de x, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, para o qual o volume do poliedro construído fique igual a cinco sextos do volume do cubo original. A altura de cada pirâmide cortada, relativa à base equilateral, é $\frac{x}{\sqrt{3}}$.

17. **(UFU-MG)** Na figura ao lado, temos um cubo $ABCDEFGH$ de aresta $a = 6$ cm. Os pontos I, J, K, L, M e N são pontos médios das arestas a que pertencem.

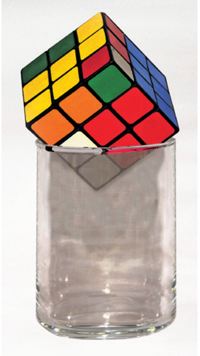
Determine o volume da pirâmide de base hexagonal $IJKLMN$ e vértice H.



18. **(Fuvest-SP)** Pedrinho, brincando com seu cubo mágico, colocou-o sobre um copo, de maneira que:

- apenas um vértice do cubo ficasse no interior do copo, conforme ilustra a foto;
- os pontos comuns ao cubo e ao copo determinassem um triângulo equilátero.

Sabendo-se que o bordo do copo é uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm, determine o volume da parte do cubo que ficou no interior do copo.


Beto Celli

Exercício 14

O volume do octaedro regular é o dobro do volume de uma pirâmide reta quadrangular regular com diagonal da base igual a ℓ e altura igual a $\frac{\ell}{2}$, ou seja:

$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{6}$

Exercício 15

Sendo S a soma das dimensões a, b e c do paralelepípedo reto-retângulo, em centímetro, temos:
$S = a + b + c \Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$
$\therefore S^2 = 21 + 28 \Rightarrow S = 7$
Alternativa **a**.

Exercício 16

a) O total de faces do poliedro formado é numericamente igual à soma do número de faces com o número de vértices do cubo: $6 + 8 = 14$

b) O volume dos 8 tetraedros trirretângulos é dado por:

$a^3 - \frac{5a^3}{6} = \frac{a^3}{6}$

Assim, sendo x a medida de cada aresta que forma o ângulo triédrico trirretângulo, temos:

$8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot x = \frac{a^3}{6} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

Exercício 17

No $\triangle EHM$: $(MH)^2 = (EM)^2 + (EH)^2 \Rightarrow MH = 3\sqrt{5}$
Sendo O o centro da base hexagonal da pirâmide, temos que o segmento $\overline{OM}$ e os lados da base da pirâmide possuem medida igual a $3\sqrt{2}$ cm. No $\triangle MHO$, temos:
$(3\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (OH)^2 \Rightarrow OH = 3\sqrt{3}$
Portanto, o volume, em cm^3, é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot (3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow V = 81$

Exercício 18

Sejam A, B e C os pontos de intersecção entre os lados do tetraedro trirretângulo e o bordo do copo. Esses pontos são vértices de um triângulo equilátero.
Assim, como o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo é igual a $2\sqrt{3}$ cm, seu lado a mede:

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow a = 6$ cm

Sendo x a medida das arestas que formam o ângulo triédrico trirretângulo, temos: $x\sqrt{2} = 6$ cm $\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ cm
Portanto, o volume da parte do cubo que está no interior do copo é:

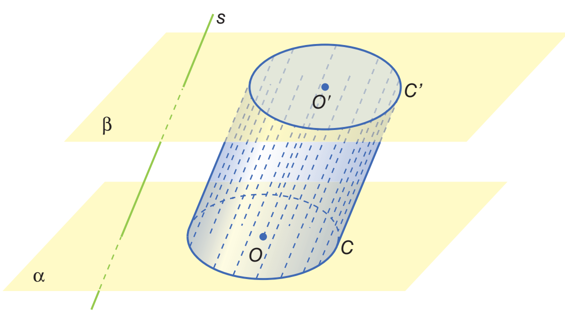
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}\ cm^3 = 9\sqrt{2}\ cm^3$

Geometria métrica: corpos redondos

Ao cortar uma laranja com uma faca, você observará uma secção circular. O mesmo ocorre ao cortar um salame ou uma casquinha de sorvete. Esses objetos servem como modelo dos três sólidos geométricos que estudaremos neste capítulo: a esfera, o cilindro e o cone. Por possuírem secções circulares, esses sólidos são chamados de corpos redondos.

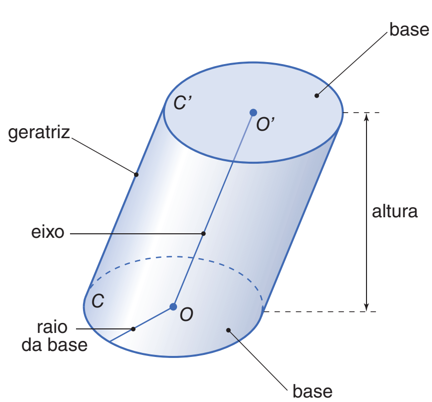
Cilindro circular

- Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo no círculo C e o outro extremo em β.

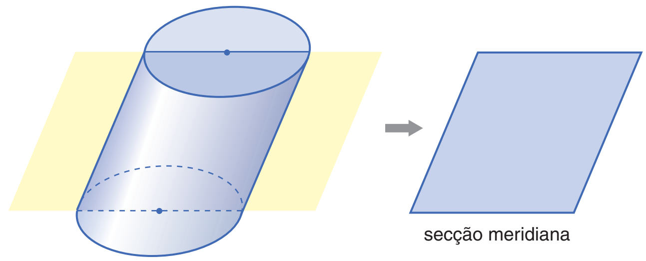


A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cilindro circular limitado ou, simplesmente, **cilindro**.

- Observando o cilindro acima, temos:
  - Os círculos C e C' são as **bases** do cilindro;
  - A reta $\overleftrightarrow{OO'}$, que passa pelos centros das bases, é o **eixo** do cilindro;
  - O raio do círculo C (ou C') é o **raio** da base do cilindro;
  - A distância entre as bases é a **altura** do cilindro;
  - Todo segmento de reta, paralelo ao eixo $\overleftrightarrow{OO'}$, que tem extremidades pertencentes às circunferências das bases, é chamado de **geratriz** do cilindro.

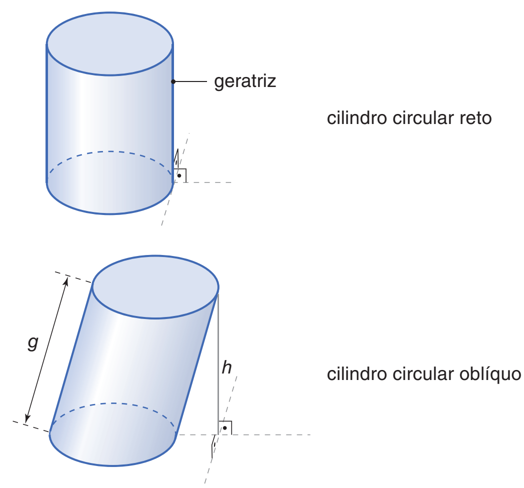


- Uma **secção meridiana** de um cilindro circular é a intersecção do cilindro com um plano que passa pelos centros das bases desse cilindro.

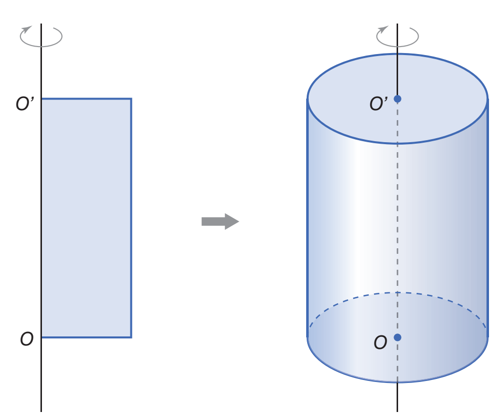


Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo

- Cilindro circular **reto** é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares às bases. Um cilindro circular não reto é chamado de cilindro circular **oblíquo.**

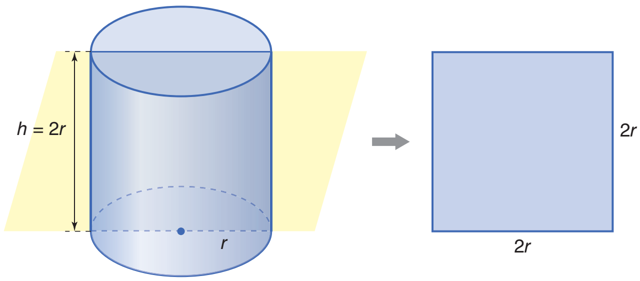


- O cilindro circular reto também é conhecido como **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.



Cilindro equilátero

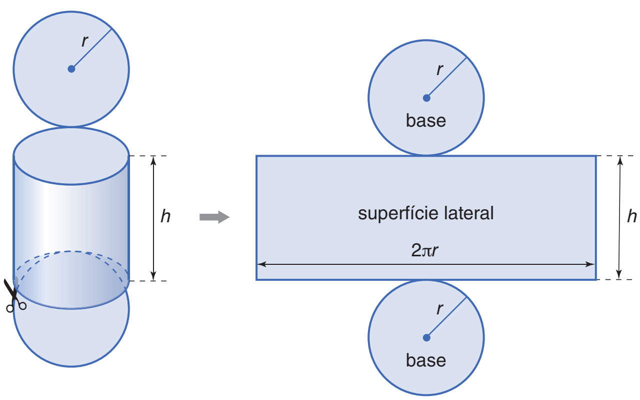
Todo cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas é chamado de **cilindro equilátero**.



cilindro equilátero   secção meridiana

Área lateral e área total de um cilindro circular

Observe a planificação de um cilindro de raio r e altura h:



A área lateral A_ℓ e a área total A_T desse cilindro são dadas por:

$$A_\ell = 2\pi rh$$
$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Volume de um cilindro circular

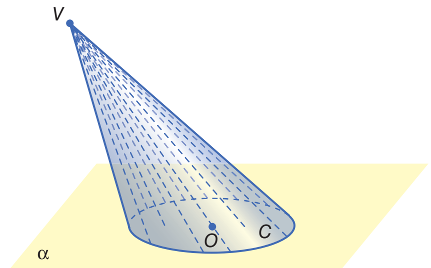
O volume V de um cilindro é o produto da área B de sua base por sua altura h. Se a base do cilindro tem raio r, temos:

$$V = Bh \Rightarrow V = \pi r^2 h$$

Cone circular

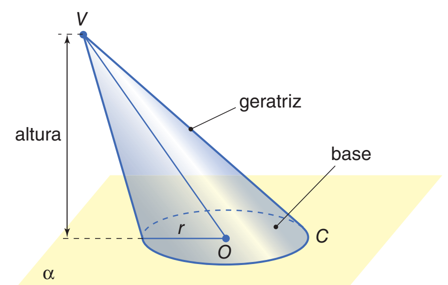
› Sejam um círculo C de centro O, contido em um plano α, e um ponto V não pertencente a α. Considere todos os segmentos de reta que possuem um extremo no círculo C e o outro no ponto V.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cone circular limitado ou simplesmente **cone circular**.

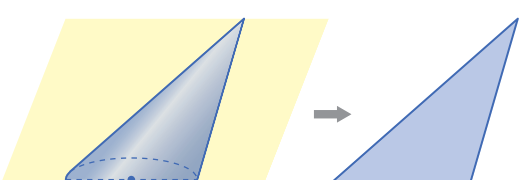


› Observando o cone acima, temos:

- O círculo C é a **base** do cone;
- O ponto V é o **vértice** do cone;
- A reta $\overleftrightarrow{OV}$ é o **eixo** do cone;
- O raio do círculo C é o **raio** da base do cone;
- A distância entre o vértice e o plano da base é a **altura** do cone;
- Todo segmento de reta cujos extremos são o ponto V e um ponto da circunferência da base é chamado de **geratriz** do cone.



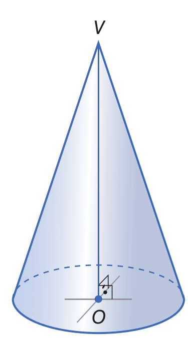
› Uma **secção meridiana** de um cone é a intersecção do cone com um plano que passa pelo vértice e pelo centro da base desse cone.



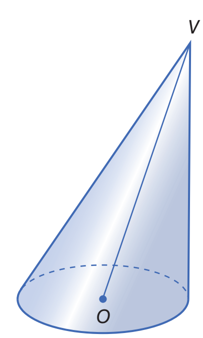
secção meridiana

Cone circular reto e cone circular oblíquo

› Cone circular **reto** é todo cone circular cujo eixo é perpendicular ao plano da base. Um cone circular não reto é chamado de cone circular **oblíquo**.

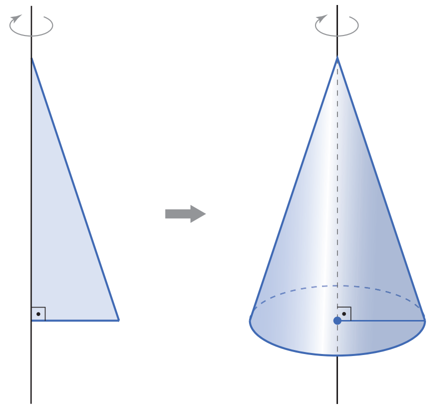


cone circular reto



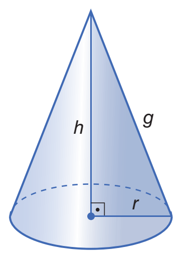
cone circular oblíquo

- O cone circular reto também é conhecido como **cone de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos.



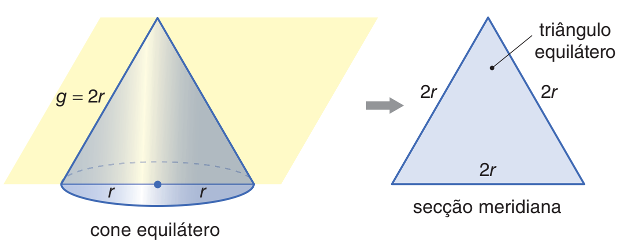
- Em um cone circular reto de altura h, raio da base r e geratriz de medida g, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2$$



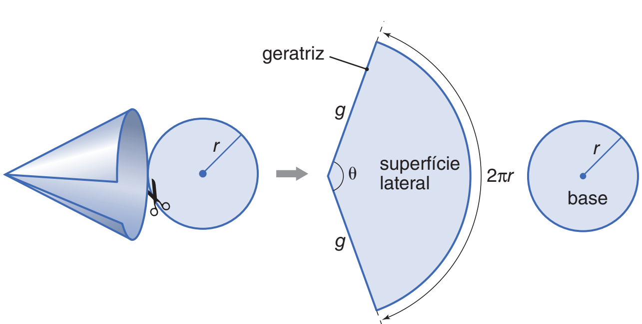
Cone equilátero

Todo cone circular reto cujas secções meridianas são triângulos equiláteros é chamado de **cone equilátero**.



Área lateral, área total e ângulo central de um cone circular

Observe a planificação de um cone de raio r e geratriz g:



A área lateral A_ℓ, a área total A_T, o ângulo central θ do setor e o volume V desse cilindro são dados por:

$$A_\ell = \pi r g$$
$$A_T = \pi r(g + r)$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad ou } \theta = \frac{360° \cdot r}{g}$$

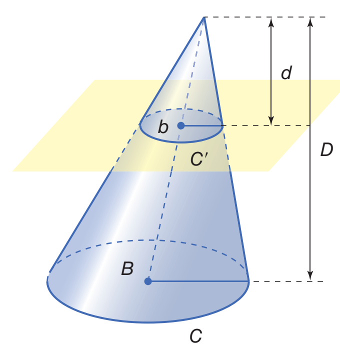
Volume de um cone circular

O volume V de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área B de sua base por sua altura h:

$$V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Cones semelhantes

- Considere um cone C seccionado por um plano paralelo à sua base. Esse plano separa o cone em dois sólidos: um **tronco de cone** e um cone C', semelhante ao cone inicial C.



- Se esse plano secciona o cone C, de altura D e área da base B, a uma distância d do vértice tal que a secção transversal tenha área b, então:

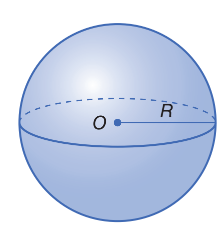
$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

- Além disso, a razão entre os volumes $V_{C'}$ e V_C dos cones semelhantes C' e C, respectivamente, é igual ao cubo da razão de semelhança:

$$\frac{V_{C'}}{V_C} = \left(\frac{d}{D}\right)^3$$

Esfera

- Considere um ponto O e uma medida R, com $R > 0$. Chama-se **esfera** de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O sejam menores ou iguais a R.



- Uma secção plana que passa pelo centro de uma esfera tem o mesmo centro e o mesmo raio dessa esfera e é chamada de **círculo máximo da esfera**. Esse círculo máximo separa a esfera em dois sólidos chamados **hemisférios**.

Volume de uma esfera

O volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

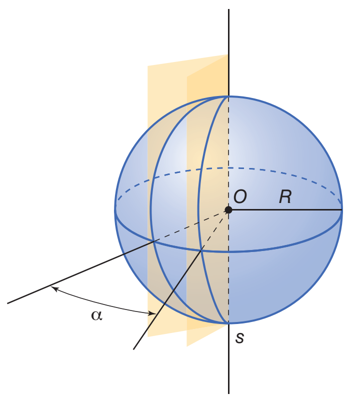
Área da superfície esférica

A área A da superfície de uma esfera de raio R é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

Fuso esférico e cunha esférica

Considere um ângulo diedro de medida α, cuja aresta s passa pelo centro O de uma esfera de raio R:



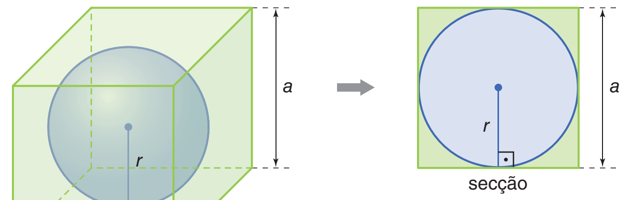
- A parte da esfera contida nesse diedro é chamada de **cunha esférica** de raio R e ângulo diedro de medida α.
- A parte da superfície esférica contida nesse diedro é chamada de **fuso esférico** de raio R e ângulo diedro de medida α.

Inscrição e circunscrição de uma esfera

Esfera e poliedros

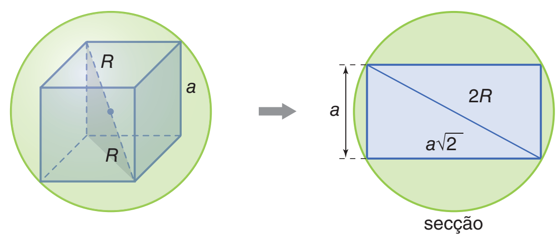
- Uma esfera está **inscrita** em um poliedro se, e somente se, tangencia todas as faces do poliedro. Nesse caso se diz, também, que o poliedro está circunscrito à esfera.
- Uma esfera está **circunscrita** a um poliedro se, e somente se, todos os vértices do poliedro pertencem à superfície da esfera. Nesse caso se diz, também, que o poliedro está inscrito na esfera.

- Esfera inscrita em um cubo



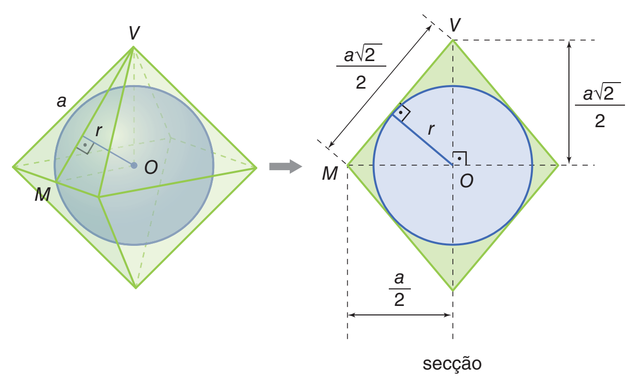
$$r = \frac{a}{2}$$

- Esfera circunscrita em um cubo



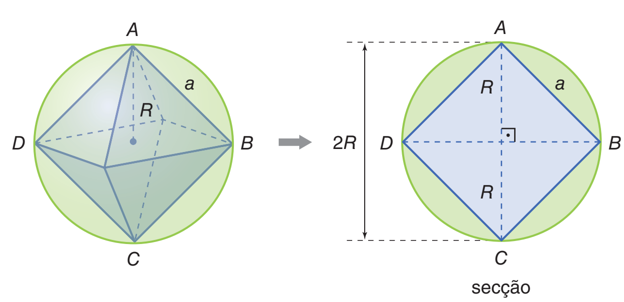
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- Esfera inscrita em um octaedro regular



$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

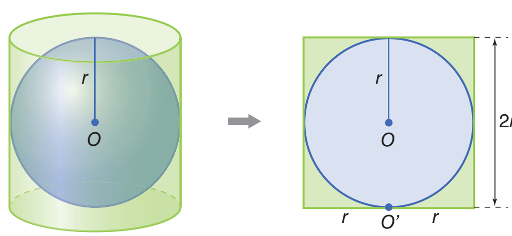
- Esfera circunscrita em um octaedro regular



$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Esfera e corpos redondos

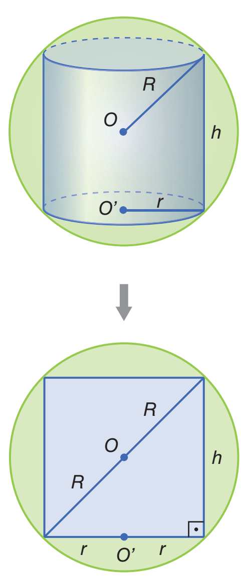
- Uma esfera está **inscrita** em um cilindro (ou em um cone) se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e as bases do cilindro (ou a base do cone). Nesse caso se diz, também, que o cilindro (ou o cone) está circunscrito à esfera.
- Uma esfera está **circunscrita** a um cilindro circular reto se, e somente se, as circunferências das bases do cilindro estão contidas na superfície da esfera. Nesse caso se diz, também, que o cilindro está inscrito na esfera.
- Uma esfera está **circunscrita** a um cone se, e somente se, o vértice e todos os pontos da circunferência da base do cone pertencem à superfície da esfera. Nesse caso se diz, também, que o cone está inscrito na esfera.
- Esfera inscrita em um cilindro circular reto



secção plana

$$h = 2r$$

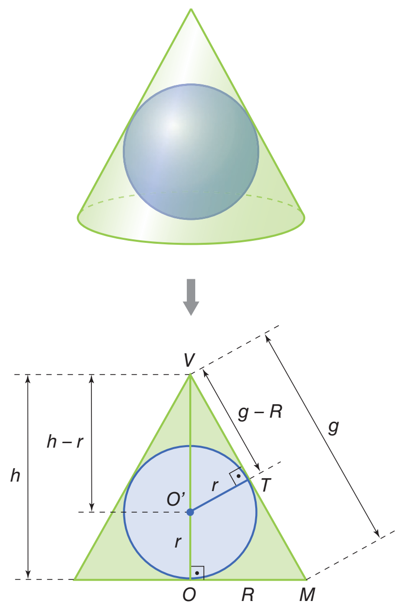
- Esfera circunscrita em um cilindro circular reto



secção

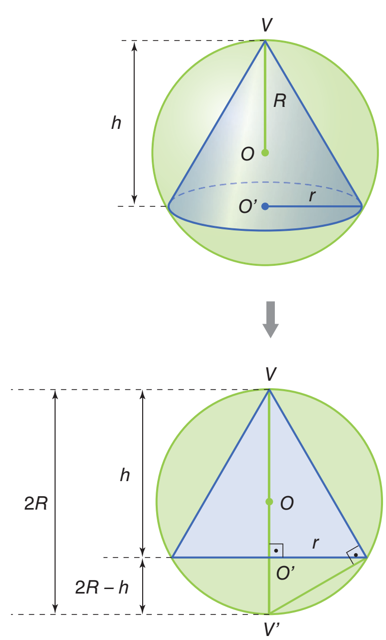
$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$

- Esfera inscrita em um cone circular reto



$$\frac{g}{h-r} = \frac{R}{r} = \frac{h}{g-R}$$

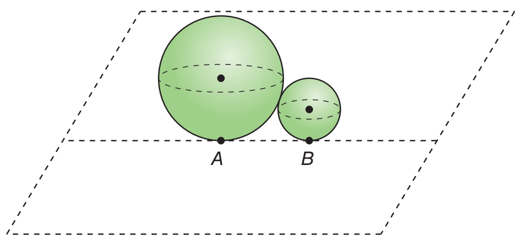
- Esfera circunscrita em um cone circular reto



$$r^2 = h(2R - h)$$

No Vestibular

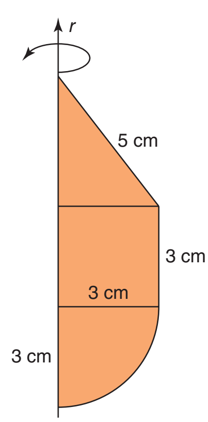
1. **(Fuvest-SP)** No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



a) 8
b) $6\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

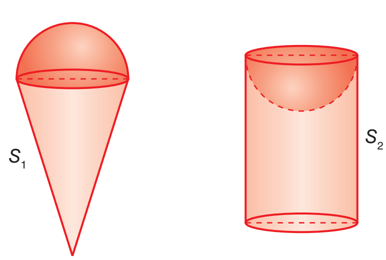
2. **(UFPel-RS)** Todo sólido obtido através do movimento de rotação completa de uma região plana em torno de uma reta, sendo ambas no mesmo plano, é chamado sólido de revolução.

Um giro completo na região destacada, em torno da reta r, determina um sólido de revolução. É correto afirmar que o volume desse sólido é:



a) 75π cm³
b) 81π cm³
c) 57π cm³
d) 99π cm³
e) 72π cm³
f) I.R.

3. **(Udesc)** Um cilindro circular reto e um cone reto possuem a mesma altura h e o mesmo raio r da base. Uma semiesfera é retirada do interior do cilindro e é acrescentada no topo do cone, gerando os sólidos S_1 e S_2, conforme a figura a seguir.

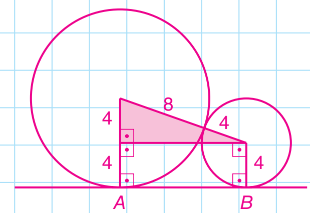


Se os volumes desses sólidos são representados, respectivamente, por $Vol(S_1)$ e $Vol(S_2)$, é correto afirmar que:

a) $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ se, e somente se, $h = 2r$
b) $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ se, e somente se, $r = 2h$
c) $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ para quaisquer valores de r e h
d) $Vol(S_1) > Vol(S_2)$ para quaisquer valores de r e h
e) $Vol(S_1) < Vol(S_2)$ para quaisquer valores de r e h

Exercício 1

Considere a figura abaixo, que representa uma secção meridiana das esferas:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo em destaque, temos:

$AB^2 + 4^2 = (8 + 4)^2 \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$

Alternativa **c**.

Exercício 2

O volume, em centímetro cúbico, do sólido obtido com a rotação de 360° da região hachurada é igual ao volume de um cone de raio da base 3 cm e altura 4 cm adicionado ao volume de um cilindro circular reto de raio da base 3 cm e altura 3 cm, adicionado ao volume de uma semiesfera de raio 3 cm, ou seja:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 57\pi$$

Alternativa **c**.

Exercício 3

O volume do cone é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, e o volume do cilindro é $\pi \cdot r^2 \cdot h$. Com a retirada da semiesfera do cilindro, o volume S_2 é: $\pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Com a sobreposição da semiesfera no cone, o volume S_1 é: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

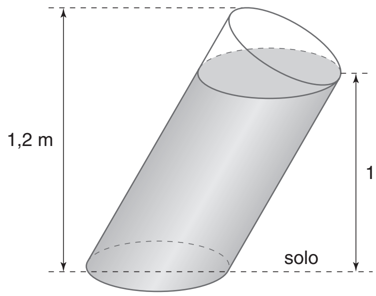
Logo, temos $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ se, e somente se:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 =$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow h = 2r$$

Alternativa **a**.

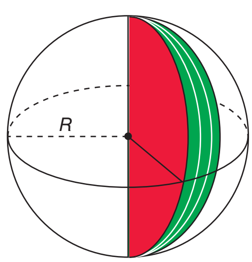
4. **(Unifesp)** A figura indica algumas das dimensões de um bloco de concreto formado a partir de um cilindro circular oblíquo, com uma base no solo, e de um semicilindro.



Dado que o raio da circunferência da base do cilindro oblíquo mede 10 cm, o volume do bloco de concreto, em cm³, é:

a) 11.000π
b) 10.000π
c) 5.500π
d) 5.000π
e) 1.100π

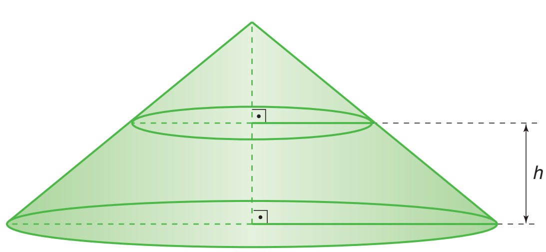
5. **(Unesp)** Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais. Cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

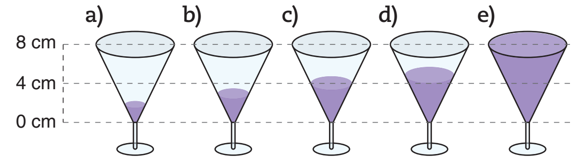
a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);
b) quantos cm^2 de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

6. **(UFU-MG)** O cone maior da figura a seguir tem raio da base e altura iguais a 10 cm.



Determine a altura h de forma que o volume do tronco de cone de altura h seja igual à metade do volume do cone maior.

7. **(UFJF-MG)** Uma taça em forma de um cone circular reto estava cheia de vinho até a borda. Depois de se ter tomado metade do vinho, a figura que melhor representa a quantidade de bebida que restou na taça é:



8. **(Unifor-CE)** Um funil tem a forma de um cone reto cuja planificação da superfície lateral corresponde a um setor circular de 216° e 9 cm de raio. O volume desse funil, em centímetros cúbicos, é:

a) 65,384π
b) 67,256π
c) 69,984π
d) 72,586π
e) 74,254π

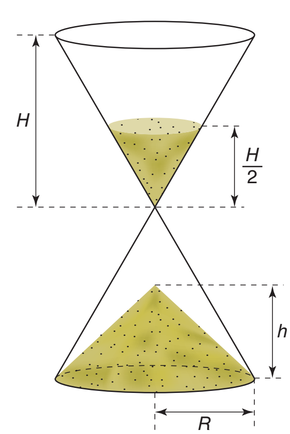
9. **(UFV-MG)** Um círculo está inscrito em um quadrado e ambos são submetidos a uma rotação de 180°, em torno de uma das diagonais do quadrado. Sejam V_c e V_q os volumes dos sólidos gerados pelo círculo e pelo quadrado, respectivamente. O valor da expressão $\left(\dfrac{V_q}{V_c}\right)^2$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

10. **(UFBA)** Considere um recipiente de vidro com a forma de dois cones congruentes de altura H, raio da base R e vértice comum.

Sabe-se que, inicialmente, um dos cones está completamente cheio de areia, e o outro, totalmente vazio. A areia é então redistribuída, de modo a formar, na parte superior do recipiente, um cone de altura $\dfrac{H}{2}$ e, na parte inferior, outro cone, de altura h e raio da base R, conforme a figura.

Com base nessas informações, determine a razão $\dfrac{h}{H}$.



Exercício 4

O volume V, em centímetro cúbico, do bloco de concreto é igual ao volume de um cilindro oblíquo de raio da base 10 cm e altura 100 cm adicionado ao volume de um semicilindro de raio da base 10 cm e altura dada por: 1,2 m − 1 m = 20 cm.
Assim:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot (10)^2 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (10)^2 \cdot 0{,}2 = 11.000\pi$$

Alternativa **a**.

Exercício 5

a) Como a melancia, de forma esférica, foi cortada em 12 fatias iguais, a área da casca de cada fatia é:

$$\frac{4\pi R^2}{12}\ \text{cm}^2 = \frac{\pi R^2}{3}\ \text{cm}^2$$

b) A superfície total tem área:

$$\left(\frac{\pi R^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2}\right)\text{cm}^2 = \frac{4\pi R^2}{3}\ \text{cm}^2$$

Exercício 6

O ângulo formado pela geratriz e pelo raio do cone maior é igual a 45°, pois: $\text{tg } 45° = \frac{10}{10} = 1$

Para que o volume do tronco de cone seja igual à metade do volume do cone maior, o volume do cone menor deve ter volume igual à metade do volume do cone maior:

$$V_{\text{cone maior}} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 10}{3} = \frac{1.000\pi}{3} \Rightarrow V_{\text{cone menor}} = \frac{500\pi}{3}$$

Sendo x a altura do cone menor, temos:

$$\therefore \frac{500\pi}{3} = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot x}{3} \Rightarrow x^3 = 500$$

$$\therefore x = 5\sqrt[3]{4}$$

Portanto: $h = (10 - x)$ cm $\Rightarrow h = \left(10 - 5\sqrt[3]{4}\right)$ cm

Exercício 7

Sendo h e v, respectivamente, a altura e o volume do cone final de vinho, temos: $\frac{2v}{v} = \left(\frac{8}{h}\right)^3 \Rightarrow h = 4\sqrt[3]{4}$

Alternativa **d**.

Exercício 8

O comprimento, em centímetro, do arco de ângulo central 216° e raio 9 cm é: $\frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 9 = \frac{54\pi}{5}$

Assim, o raio R da base do cone é dado por:

$$2\pi \cdot R = \frac{54\pi}{5} \Rightarrow R = \frac{27}{5}$$

Logo, a altura do cone é:

$$9^2 = \left(\frac{27}{5}\right)^2 + H^2 \Rightarrow H = \frac{36}{5}$$

Portanto, o volume V do cone, em centímetro cúbico, é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{27}{5}\right)^2 \cdot \frac{36}{5} = 69{,}984\pi$$

Alternativa **c**.

Exercício 9

A rotação de 180° do círculo em torno de uma das diagonais do quadrado circunscrito de lado ℓ gera uma esfera de raio $\frac{\ell}{2}$ e, portanto, de volume V_c igual a:

$$V_c = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot \ell^3}{6}$$

A rotação de 180° do quadrado em torno de uma das suas diagonais gera dois cones congruentes com raio da base e altura iguais a $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ e, portanto, de volume V_q igual a:

$$V_q = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \cdot \ell^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$$

Assim: $\left(\frac{V_q}{V_c}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\pi \cdot \ell^3 \cdot \sqrt{2}}{6}}{\frac{\pi \cdot \ell^3}{6}}\right)^2 = 2$

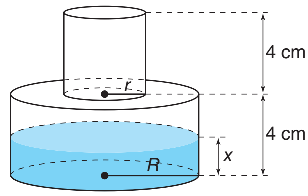
Alternativa **a**.

Exercício 10

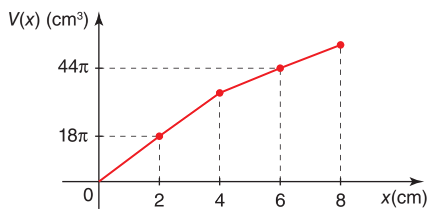
O volume total de areia inicial em um dos cones é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$. Após a redistribuição, o total de areia no cone superior é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2}$ e no cone inferior é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$. Assim, temos:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{7}{8}$$

11. **(Fuvest-SP)** Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura, 4 cm, e raios das bases R e r, respectivamente.



Se o volume $V(x)$ de um líquido que atinge a altura x da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais são os valores de R e r?



12. **(Fuvest-SP)** Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da figura 2.

Antes Depois

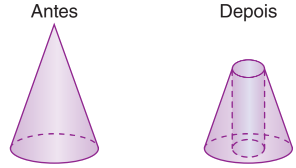
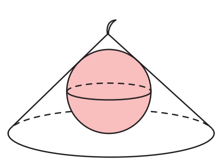


Figura 1 Figura 2

Se a área da base desse novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B, determine seu volume.

13. **(UFTM-MG)** Um *designer* projetou uma vela decorativa com a forma de cone circular reto, de altura 8 cm e raio da base 6 cm. Uma parte da vela será feita com parafina transparente, e a outra com parafina vermelha. A parte vermelha será uma esfera inscrita no cone, como indicado na figura, feita fora de escala.



Sabe-se que o preço de 1 cm^3 de parafina transparente é o dobro do preço de 1 cm^3 de parafina vermelha. Sejam T o custo com parafina transparente e V o custo com parafina vermelha para fabricar uma dessas velas. Assim, é correto afirmar que:

a) $\frac{T}{V} = \frac{5}{6}$

b) $\frac{T}{V} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{T}{V} = \frac{9}{2}$

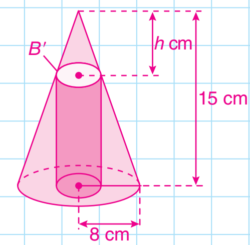
d) $\frac{T}{V} = \frac{8}{3}$

e) $\frac{T}{V} = \frac{10}{3}$

Exercício 11

O volume do cilindro circular reto de raio maior é $\pi \cdot R^2 \cdot x$, com $0 \leqslant x \leqslant 4$.
Pela análise do gráfico, para a altura 2 cm, o volume do cilindro circular reto de raio maior é 18π cm^3. Logo:
$\pi \cdot R^2 \cdot 2 = 18 \cdot \pi \Rightarrow R = 3$
Para $4 \leqslant x \leqslant 8$, o volume de líquido na garrafa é igual ao volume de um cilindro circular reto de raio da base 3 cm e altura 4 cm somado com o volume de um cilindro circular reto de raio da base r e altura $(x - 4)$ cm. Pela análise do gráfico, para a altura 6 cm, o volume de líquido é 44π cm^3. Logo:
$\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot r^2 \cdot (6 - 4) = 44 \cdot \pi \Rightarrow r = 2$

Exercício 12



Sendo B' a base do cilindro retirado; h a altura do cone menor; A_b a área de B, e $A_{B'}$ a área da base do cilindro, temos:

$A_{B'} = A_b - \frac{2}{3}A_b = \frac{1}{3}A_b$

Sendo k a razão de semelhança entre os cones menor e maior, temos: $k^2 = \frac{\frac{1}{3}A_b}{A_b} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

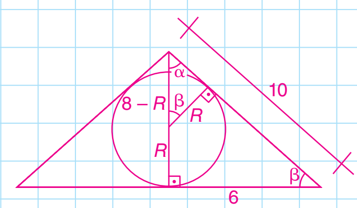
A altura do cilindro é dada por:
$15 - h = 15 - 15k = 5\left(3 - \sqrt{3}\right)$

Assim, os volumes, em centímetro cúbico, são:

$V_{\text{cone maior}} = \frac{1}{3}A_b \cdot 15 = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi$

$V_{\text{cone maior}} - V_{\text{cone menor}} - V_{\text{cilindro}} = \frac{640\sqrt{3}\pi}{9}$

Exercício 13



Por semelhança, temos: $\frac{10}{8 - R} = \frac{6}{R} \Rightarrow R = 3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3}$ $cm^3 = 36\pi$ cm^3

$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3}$ $cm^3 = 96\pi$ cm^3

Logo, o volume da vela feita com parafina transparente é dado por:
$(96\pi - 36\pi)$ $cm^3 = 60\pi$ cm^3
Assim, sendo x o preço da parafina vermelha, temos:

$$\frac{T}{V} = \frac{60\pi \cdot 2x}{36\pi \cdot x} = \frac{120}{36} = \frac{10}{3}$$

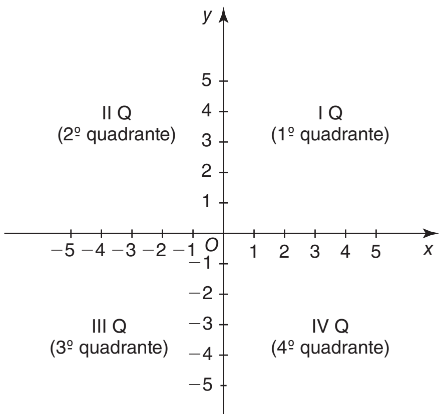
Alternativa **e**.

Geometria analítica: ponto e reta

A Geometria analítica plana estuda as figuras geométricas associadas a um sistema de dois eixos coordenados. Dessa forma, as figuras são representadas por pares ordenados de números reais ou por equações ou inequações.

Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

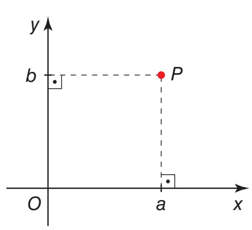
- Dois eixos reais, Ox e Oy, perpendiculares entre si na origem O, formam o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**.



- O plano que contém esse sistema é chamado **plano cartesiano**.
- Os eixos Ox e Oy, denominados **eixos coordenados**, são, respectivamente, o **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas**.
- O ponto O é a **origem** do sistema de eixos.
- Os eixos coordenados separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que são enumerados conforme a figura acima.
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes.

Coordenadas de um ponto

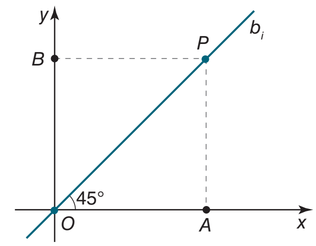
- Para determinar as **coordenadas** do ponto P no plano cartesiano abaixo, traçamos por P as perpendiculares aos eixos Ox e Oy, obtendo nesses eixos dois números, chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente. Se a é a abscissa de P e b é a ordenada de P, indicamos: $P(a, b)$



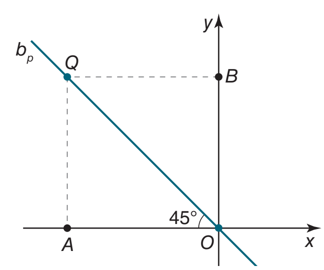
- Todo ponto P pertencente ao eixo das abscissas é da forma $P(x, 0)$.
- Todo ponto Q pertencente ao eixo das ordenadas é da forma $Q(0, y)$.

Retas bissetrizes dos quadrantes

- A reta b_i, que contém as bissetrizes dos quadrantes I e III, é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.



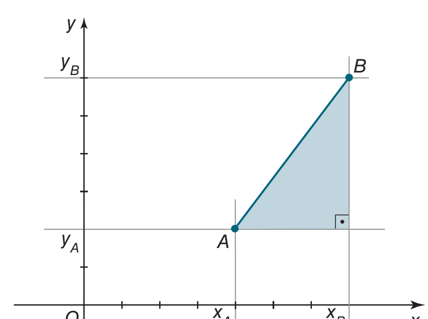
- Todo ponto P da bissetriz b_i dos quadrantes ímpares é da forma $P(x, x)$.
- A reta b_p, que contém as bissetrizes dos quadrantes II e IV, é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.



- Todo ponto Q da bissetriz b_p dos quadrantes pares é da forma $Q(x, -x)$ ou $Q(-x, x)$.

Distância entre pontos

Em um plano cartesiano, em que u é a unidade adotada nos eixos coordenados, a **distância entre dois pontos**, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, que se indica por AB ou d_{AB}, é o comprimento do segmento $\overline{AB}$ na unidade u.

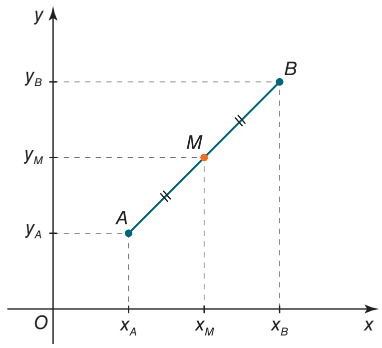


$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Coordenadas do ponto médio

Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos, então o **ponto médio** $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

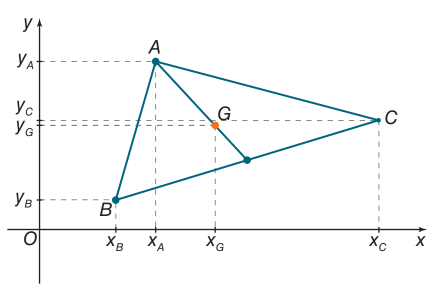
$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$



Coordenadas do baricentro de um triângulo

Se $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são vértices de um triângulo, então o **baricentro** $G(x_G, y_G)$ desse triângulo é tal que:

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$



Área de um triângulo

A **área** A de um triângulo qualquer de vértices $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D \text{ é o determinante } \begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix}$$

Condição de alinhamento de três pontos

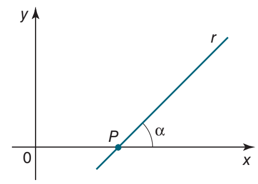
Pelo teorema acima, concluímos que três pontos, $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$, são **colineares** se, e somente se:

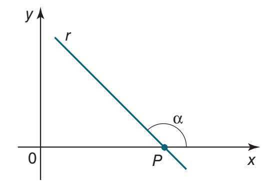
$$\begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O estudo da reta

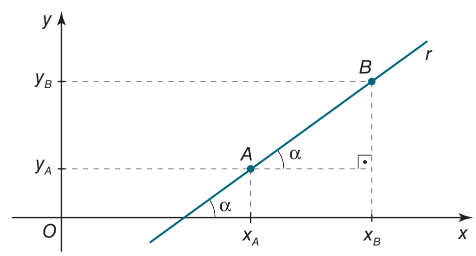
Inclinação e coeficiente angular de uma reta

- No plano cartesiano xOy, seja r uma reta que intercepta o eixo das abscissas em um ponto P e forma com esse eixo um ângulo de medida α, com $0° \leqslant \alpha < 180°$, medido no sentido anti-horário a partir de um ponto do eixo Ox à direita de P. A medida α é chamada de **inclinação** da reta r.





- As retas horizontais, ou seja, paralelas ao eixo Ox, têm 0° de inclinação.
- Chama-se **coeficiente angular** de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número m tal que: $\boxed{m = \text{tg}\ \alpha}$
- Consideremos dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, de uma reta r não vertical, de inclinação α.



O coeficiente angular m da reta r é dado por:

$$\boxed{m_r = \text{tg}\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são **colineares** se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou se não existem m_{AB} e m_{BC}.

Equação fundamental da reta

Se r é a reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então a **equação fundamental** da reta r é: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

Equação reduzida da reta

- Isolando a variável y na equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$ e indicando por q a constante $y_0 - mx_0$, obtemos a **equação reduzida** da reta r:

$$y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{q}_{\text{coeficiente linear}}$$

- O coeficiente m de x na equação reduzida é o **coeficiente angular** da reta. O termo q, independente de x e y, é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas e é chamado de **coeficiente linear** da reta r.

Equação geral da reta

- Toda reta do plano cartesiano é gráfico de uma equação do tipo:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

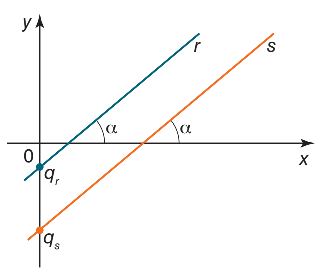
em que x e y são variáveis e a, b e c são constantes reais, com a e b não simultaneamente nulas. Essa equação é chamada de **equação geral** da reta.

- Dados dois pontos distintos, $E(x_E, y_E)$ e $F(x_F, y_F)$, uma **equação** da reta $\overleftrightarrow{EF}$ é dada por:

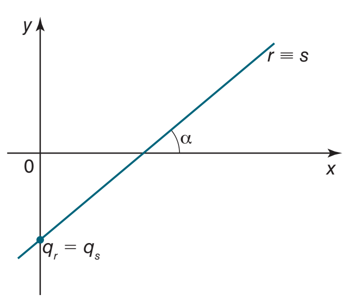
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Posições relativas entre retas

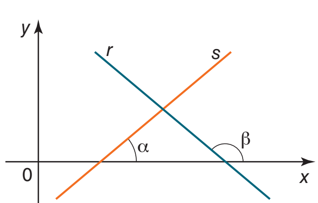
- Duas retas não verticais, r e s, de equações reduzidas $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$, respectivamente, são:
  - **Paralelas distintas** se, e somente se, $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$.



  - **Paralelas coincidentes** se, e somente se, $m_r = m_s$ e $q_r = q_s$.



  - **Concorrentes** se, e somente se, $m_r \neq m_s$.



- Duas retas de equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são **concorrentes** se, e somente se, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

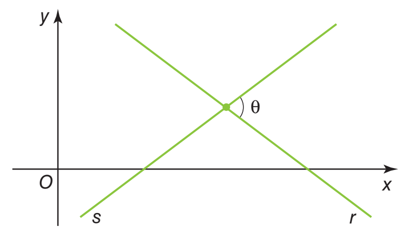
- Duas retas de equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são **paralelas** (distintas ou coincidentes) se, e somente se, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

- Duas retas, r e s, não verticais, são **perpendiculares** se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra. Ou seja, sendo m_r e m_s os coeficientes angulares das retas perpendiculares r e s, respectivamente, temos:

$$\boxed{m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1}$$

Ângulos entre duas retas

- Se duas retas, r e s, não verticais, de coeficientes angulares respectivamente iguais a m_r e m_s, formam entre si um ângulo agudo de medida θ, então:



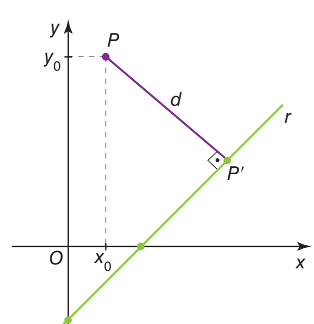
$$\boxed{\text{tg } \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|}$$

- Se r é uma reta vertical e s é uma reta oblíqua de coeficiente angular m_s, então a medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\boxed{\text{tg } \theta = \frac{1}{|m_s|}}$$

Distância entre ponto e reta

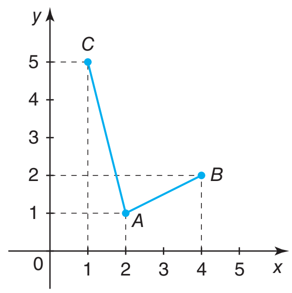
A **distância** d entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por:



$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

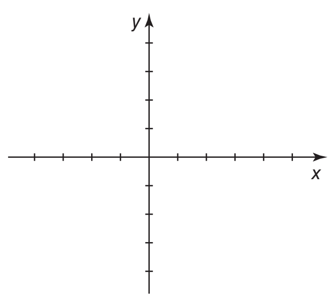
No Vestibular

1. **(UEMS)** Na figura, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são dois lados de um triângulo. O terceiro lado $\overline{BC}$ tem como suporte a reta cuja equação é:



a) $y = -x - 4$
b) $y = -x - 6$
c) $y = x - 6$
d) $y = x + 4$
e) $y = -x + 6$

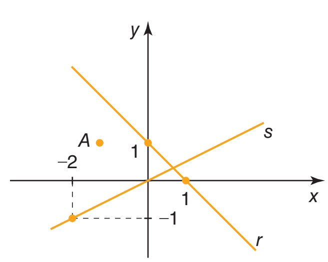
2. **(UFRJ)** Esboce graficamente as retas $y = x - 1$, $y = x - 3$, $y = -x + 1$ e $y = 1$ e determine a área da região delimitada por essas retas.



3. **(UFRJ)** Determine a área da região R definida pela intersecção de R_1, R_2 e R_3, sendo:

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x + 5y - 16 \leq 0\}$
- $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x - 3y \geq 0\}$
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0\}$

4. **(Fuvest-SP)** Na figura a seguir, A é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que A está localizado abaixo da reta r e acima da reta s, tem-se:



a) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

b) $y < \frac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$

c) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

d) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$

e) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

Exercício 1

Uma equação da reta determinada pelos pontos B e C é:

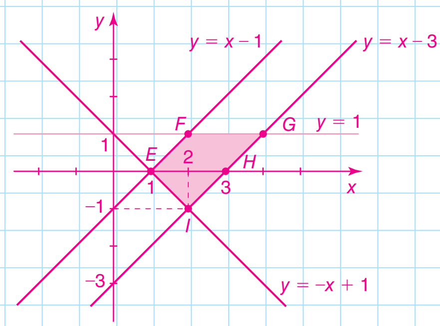
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20 + 2x + y - 5x - 4y - 2 = 0$$

$\therefore\ -3x - 3y + 18 = 0$

$\therefore\ y = -x + 6$

Alternativa **e**.

Exercício 2

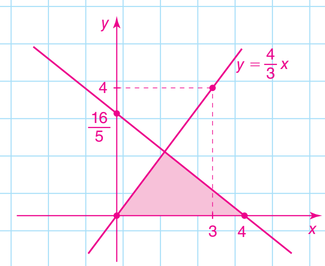


A área A do quadrilátero $EFGI$ é a soma das áreas do paralelogramo $EFGH$ e do triângulo EHI, isto é:

$$A = (3 - 1) \cdot 1 + \frac{(3 - 1) \cdot 1}{2} = 3$$

Exercício 3

Representando a intersecção dos conjuntos R_1, R_2 e R_3, temos:



Obtemos as coordenadas do ponto de intersecção entre as retas $y = \frac{4x}{3}$ e $y = -\frac{4x}{5} + \frac{16}{5}$ pelo sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4x}{3} \\ y = -\frac{4x}{5} + \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ e } y = 2$$

Assim, a área da região R é um triângulo de base 4 e altura 2. Portanto, a área é igual a: $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

Exercício 4

A equação da reta s é $y = \frac{x}{2}$, e a equação da reta r é $y = -x + 1$.

Como o ponto $A(x, y)$ está acima da reta s e abaixo da reta r, sua ordenada y deve satisfazer o sistema:

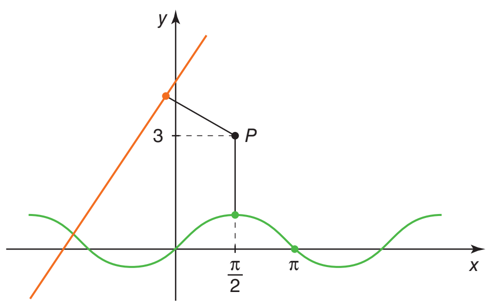
$$\begin{cases} y > \frac{x}{2} \\ y < -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} < y < -x + 1$$

Alternativa **e**.

5. **(UEL-PR)** A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$. Essa trajetória determina uma reta:

a) que contém os pontos (3, 9) e (−2, 6).
b) paralela à reta de equação $6x - 2y - 1 = 0$.
c) perpendicular à reta de equação $3x - y + 1 = 0$.
d) que contém os pontos (1, 3) e (7, 3).
e) perpendicular à reta de equação $5x - y = 0$.

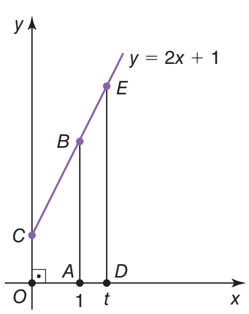
6. **(Unifesp)** Considere a reta de equação $4x - 3y + 15 = 0$, a senoide de equação $y = \text{sen}\, x$ e o ponto $P = \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, conforme a figura.



A soma das distâncias de P à reta e de P à senoide é:

a) $\frac{12 + 2\pi}{5}$
b) $\frac{13 + 2\pi}{5}$
c) $\frac{14 + 2\pi}{5}$
d) $\frac{15 + 2\pi}{5}$
e) $\frac{16 + 2\pi}{5}$

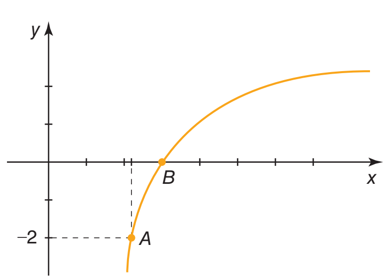
7. **(Unifesp)** Num sistema cartesiano ortogonal, considerados os pontos e a reta exibidos na figura,



o valor de t para o qual a área do polígono $OABC$ é igual a quatro vezes a área do polígono $ADEB$ é:

a) $-1 + \sqrt{30}$
b) $1 + \sqrt{5}$
c) $\sqrt{10}$
d) 3
e) $\frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$

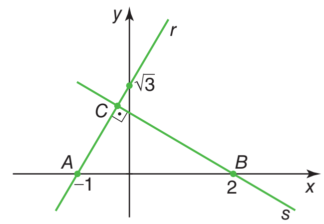
8. **(UFPel-RS)** O gráfico abaixo representa a função $y = \log_2 (x - 2)$.



Com base nos textos, é correto afirmar que a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

a) $8x - 3y - 24 = 0$
b) $2x + 6y - 6 = 0$
c) $2x + 6y - 24 = 0$
d) $6x - 2y + 6 = 0$
e) $3x - 8y + 24 = 0$
f) I.R.

9. **(Unifor-CE)** Duas retas, r e s, perpendiculares entre si, interceptam os eixos cartesianos nos pontos A e B, como é mostrado na figura abaixo.

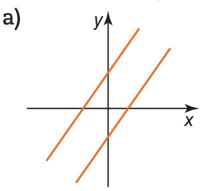


Se o ponto C é a intersecção de r e s, a área do triângulo ABC, em unidade de superfície, é:

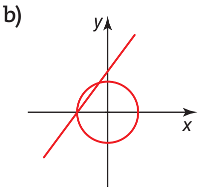
a) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{7\sqrt{3}}{8}$
d) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$
e) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

10. **(Fuvest-SP)** O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano, cujas coordenadas satisfazem a equação: $(x^2 + y^2 + 1) \cdot (2x + 3y - 1) \cdot (3x - 2y + 3) = 0$, pode ser representado, graficamente, por:

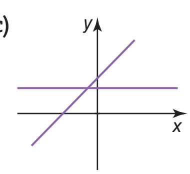
a)



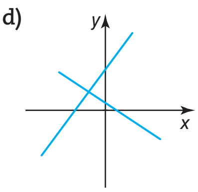
b)



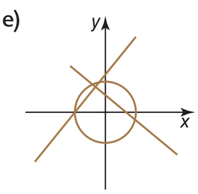
c)



d)



e)



11. **(Fuvest-SP)** O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem $t^2 - t - 6 = 0$, onde $t = |x - y|$, consiste de:

a) uma reta.
b) duas retas.
c) quatro retas.
d) uma parábola.
e) duas parábolas.

12. **(Fuvest-SP)** Os pontos $M(2, 2)$, $N(-4, 0)$ e $P(-2, 4)$ são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo ABC. A reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ tem a equação:

a) $x + 2y - 6 = 0$
b) $x - 2y + 2 = 0$
c) $2x - 2y - 2 = 0$
d) $2x + y - 6 = 0$
e) $-x + 2y + 6 = 0$

Exercício 5

Para t real, temos:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t & \text{(I)} \\ t = \dfrac{y}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$x = 2 + \frac{y}{3} \Rightarrow y = 3x - 6$$

Essa equação representa uma reta paralela à reta de equação $6x - 2y - 1 = 0$, que também tem coeficiente angular 3.
Alternativa **b**.

Exercício 6

A distância do ponto P à reta é dada por:

$$\frac{\left|4 \cdot \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 3 + 15\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6 + 2\pi}{5}$$

E a distância do ponto P à senoide é:

$$3 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 1 = 2$$

Calculando a soma das distâncias, temos:

$$\frac{6 + 2\pi}{5} + 2 = \frac{16 + 2\pi}{5}$$

Alternativa **e**.

Exercício 7

Pela análise do gráfico: $B(3, 1)$ e $E(t, 2t + 1)$.
Como a área do trapézio retângulo $OABC$ é igual a 4 vezes a área do trapézio $ABED$, temos:

$$\frac{(3 + 1) \cdot 1}{2} = 4 \cdot \frac{(2t + 1 + 3)(t - 1)}{2} \Rightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$$

Alternativa **e**.

Exercício 8

Sendo x_A a abscissa do ponto A, temos:

$$-2 = \log_2 (x_A - 2) \Rightarrow x_A = \frac{9}{4}$$

Sendo x_B a abscissa do ponto B, temos:
$0 = \log_2 (x_B - 2) \Rightarrow x_B = 3$
Logo, uma equação da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{4} & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 - 2x + 3y - 0 - \frac{9y}{4} + 6 = 0$$

$\therefore 8x - 3y - 24 = 0$
Alternativa **a**.

Exercício 9

Uma equação da reta r é:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + \sqrt{3}x - y - 0 - 0 + \sqrt{3} = 0$$

$\therefore y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$
Como a reta s é perpendicular à reta r, seu coeficiente angular m_s é dado por: $m_s = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
Portanto, uma equação da reta s é:

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercício 9

As coordenadas do ponto C são dadas pela solução do sistema formado pelas equações das retas r e s. Assim, temos:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ e } y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Logo, a área do triângulo ABC é: $\dfrac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

Alternativa **d**.

Exercício 10

$$(x^2 + y^2 + 1) \cdot (2x + 3y - 1) \cdot (3x - 2y + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + 1 = 0}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{2x + 3y - 1 = 0}_{\text{(II)}} \text{ ou } \underbrace{3x - 2y + 3 = 0}_{\text{(III)}}$$

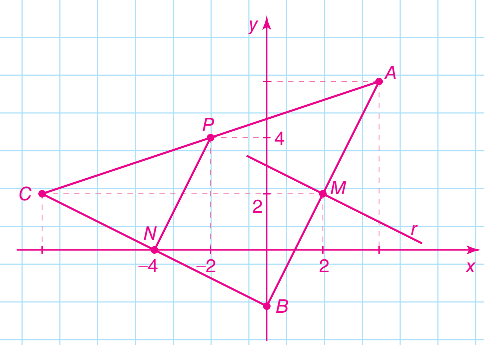
$$\therefore \underbrace{x^2 + y^2 = -1}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{y = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{(II)}} \text{ ou } \underbrace{y = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}}_{\text{(III)}}$$

Assim, a equação (I) tem conjunto solução $S = \varnothing$, e as equações (II) e (III) representam retas perpendiculares.
Alternativa **d**.

Exercício 11

$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = -2$ ou $t = 3$
Como $|x - y| \geq 0$, temos:
$|x - y| = 3 \Rightarrow x - y = 3$ ou $x - y = -3$
Essas equações representam duas retas distintas.
Alternativa **b**.

Exercício 12



Como $\overline{PN}$ é base média do triângulo ABC, temos que $\overline{PN} \parallel \overline{AB}$; logo, a mediatriz r de $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{PN}$.
O coeficiente angular de $\overleftrightarrow{PN}$ é:

$$m_{\overleftrightarrow{PN}} = \frac{4 - 0}{-2 - (-4)} = 2$$

Portanto, o coeficiente angular de r é: $m_r = -\dfrac{1}{m_{\overleftrightarrow{PN}}} = -\dfrac{1}{2}$

Assim, a equação de r é dada por:

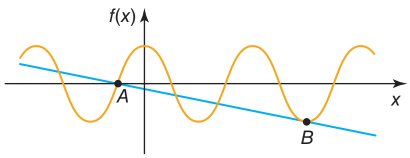
$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$$

Alternativa **a**.

13. (Fuvest-SP) A inequação $x^2 + 2xy + y^2 < 1$ representa o interior de:

a) uma circunferência.
b) uma hipérbole.
c) uma parábola.
d) uma faixa.
e) um ângulo.

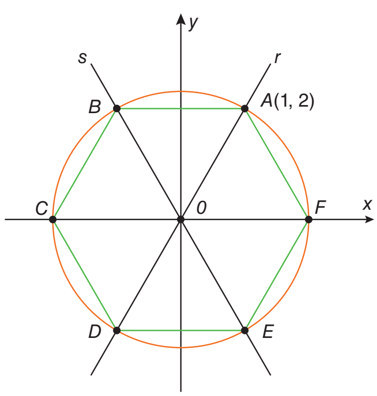
14. (UFTM-MG) Na figura, tem-se o gráfico da função $f(x) = \cos(2x)$, ao qual pertencem os pontos A e B assinalados.



Se A pertence ao eixo das abscissas e B tem ordenada -1, então o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ vale:

a) $-\dfrac{4}{7\pi}$ b) $-\dfrac{5}{3\pi}$ c) $-\dfrac{1}{6}$ d) $-\dfrac{4\pi}{9}$ e) $-\dfrac{\pi}{10}$

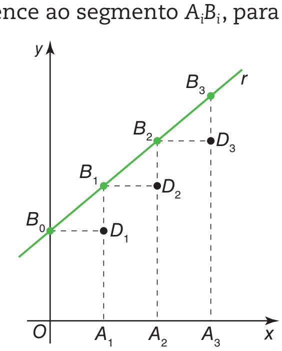
15. (Unifesp) A figura representa, em um sistema ortogonal de coordenadas, duas retas, r e s, simétricas em relação ao eixo Oy, uma circunferência com centro na origem do sistema, e os pontos $A = (1, 2)$, B, C, D, E e F correspondentes às intersecções das retas e do eixo Ox com a circunferência.



Nessas condições, determine:

a) as coordenadas dos vértices B, C, D, E e F e a área do hexágono $ABCDEF$.
b) o valor do cosseno do ângulo $A\hat{O}B$.

16. (Fuvest-SP) Na figura a seguir, a reta r tem equação cartesiana $y = 2\sqrt{2}x + 1$ no plano cartesiano Oxy. Além disso, os pontos B_0, B_1, B_2, B_3 estão na reta r, sendo $B_0(0, 1)$. Os pontos A_0, A_1, A_2, A_3 estão no eixo Ox, com $A_0 = O(0, 0)$. O ponto D_i pertence ao segmento A_iB_i, para $1 \leqslant i \leqslant 3$.

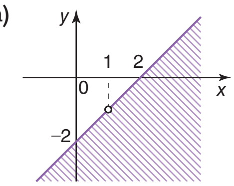


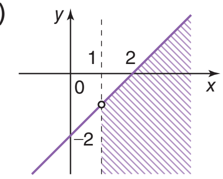
Os segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 são paralelos ao eixo Oy, os segmentos B_0D_1, B_1D_2, B_2D_3 são paralelos ao eixo Ox, e a distância entre B_i e B_{1+i} é igual a 9, para $0 \leqslant i \leqslant 2$.

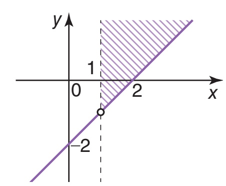
Nessas condições:

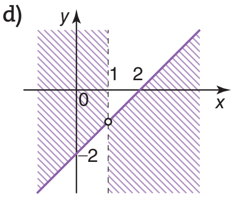
a) Determine as abscissas de A_1, A_2, A_3.
b) Sendo R_i o retângulo de base A_iA_{1+i} e altura $A_{i+1}D_{i+1}$, para $0 \leqslant i \leqslant 2$, calcule a soma das áreas dos retângulos R_0, R_1 e R_2.

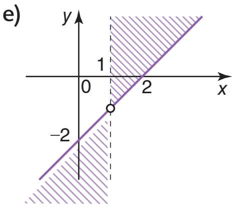
17. (UFRS) O conjunto dos pontos P cujas coordenadas cartesianas (x, y) satisfazem $\dfrac{y+1}{x-1} \leqslant 1$ está representado na região hachurada da figura:

a)


b)


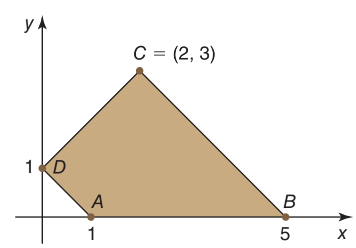
c)


d)


e)


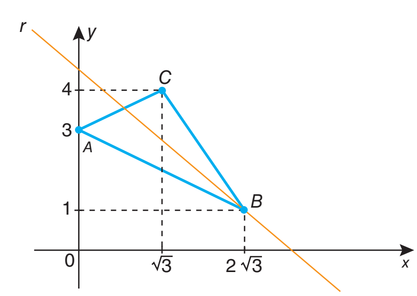
18. (Fuvest-SP) Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero $ABCD$, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado $\overline{AB}$ e passando pelo ponto $P(a, 0)$. O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:

a) $\sqrt{5} - 1$
b) $5 - 2\sqrt{2}$
c) $5 - \sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$
e) $5 + 2\sqrt{2}$



19. (Ibmec) Considere, no plano cartesiano da figura, o triângulo de vértices A, B e C.

Se r é a reta suporte da bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, então o coeficiente angular de r é igual a:



a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) -1 c) $-\dfrac{4}{3}$ d) $-\dfrac{3}{2}$ e) $-\sqrt{3}$

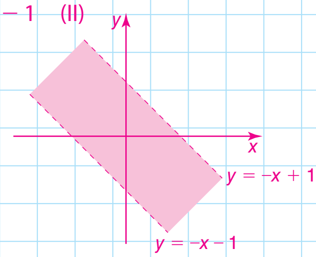
Exercício 13

$x^2 + 2xy + y^2 < 1 \Rightarrow (x + y)^2 < 1$

$\therefore -1 < x + y < 1$

$\therefore \begin{cases} x + y < 1 \\ x + y > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -x + 1 & \text{(I)} \\ y > -x - 1 & \text{(II)} \end{cases}$

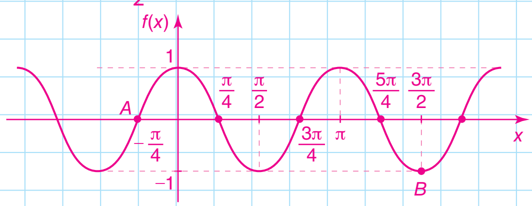
Representando a intersecção das regiões representadas pelas desigualdades (I) e (II) no plano cartesiano, obtemos:



Alternativa **d.**

Exercício 14

O gráfico da função $f(x) = \cos(2x)$ tem período $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.



Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, $\left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$, portanto o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é: $\dfrac{-1-0}{\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}} = -\dfrac{4}{7\pi}$

Alternativa **a.**

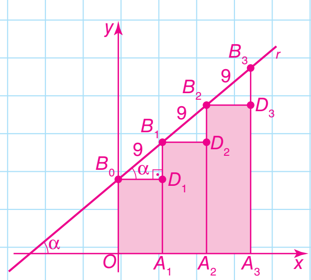
Exercício 15

a) Pelas simetrias das retas r e s em relação aos eixos Ox e Oy, temos: $x_A = x_E = -x_B = -x_D = 1$ e
$y_A = y_B = -y_D = -y_E = 2$
Se $A(1, 2)$, então $B(-1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(1, -2)$.
Os segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ têm comprimento igual ao raio da circunferência dado por:
$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
Assim:
$x_F = OF = \sqrt{5}$ e $y_F = 0$,
$x_C = -OC = -\sqrt{5}$ e $y_C = 0$
Portanto: $F\left(\sqrt{5}, 0\right)$ e $C\left(-\sqrt{5}, 0\right)$
Como os trapézios $CBAF$ e $CDEF$ são congruentes, a área do hexágono $ABCDEF$ é o dobro da área do trapézio $CBAF$, ou seja, é igual a:
$2 \cdot \dfrac{(CF + AB) \cdot y_A}{2} = \left(2\sqrt{5} + 2\right) \cdot 2 = 4\sqrt{5} + 4$

b) No triângulo OAB, pela lei dos cossenos, temos:
$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos(A\hat{O}B)$
$\therefore \cos(A\hat{O}B) = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}$

Exercício 16

Considere a figura a seguir.



a) Como o coeficiente angular da reta r é $\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$, no triângulo retângulo $B_0D_1B_1$, temos:
$\dfrac{B_1D_1}{B_0D_1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow B_1D_1 = 2\sqrt{2}B_0D_1$
Pelo teorema de Pitágoras:
$\left(2\sqrt{2}B_0D_1\right)^2 + (B_0D_1)^2 = 9^2 \Rightarrow B_0D_1 = 3$
Assim, como os triângulos $B_0D_1B_1$, $B_1D_2B_2$ e $B_2D_3B_3$ são congruentes, as abscissas de A_1, A_2 e A_3 são, respectivamente, 3, 6 e 9.

b) As ordenadas y_1, y_2 e y_3 dos pontos B_0, B_1 e B_2 são:
$y_1 = 1$
$y_2 = 2\sqrt{2} \cdot 3 + 1 = 6\sqrt{2} + 1$
$y_3 = 2\sqrt{2} \cdot 6 + 1 = 12\sqrt{2} + 1$
Logo, a soma das áreas dos retângulos pedidos é dada por:
$3\left(1 + 6\sqrt{2} + 1 + 12\sqrt{2} + 1\right) = 9 + 54\sqrt{2}$

Exercício 17

$\dfrac{y+1}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{y+1}{x-1} - 1 \leq 0$

$\therefore \dfrac{y - x + 2}{x - 1} \leq 0$

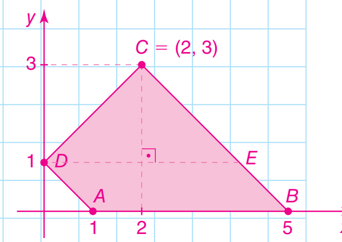
$\therefore \begin{cases} y - x + 2 \leq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y - x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$

Representando a união das soluções desses sistemas, obtemos o gráfico da alternativa d.

Alternativa **d.**

Exercício 18

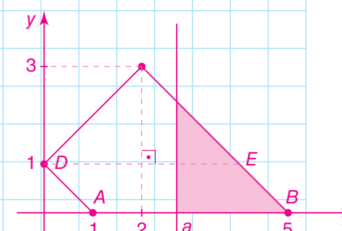
Considere a figura a seguir.



A área total A_T do quadrilátero $ABCD$ é igual à área do paralelogramo $ABED$ de base 4 e altura 1 somada à área do triângulo retângulo isósceles CDE de hipotenusa 4 e altura 2, ou seja:

$A_T = A_{ABED} + A_{CDE} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 4 \cdot 1 + \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 8$



Assim, a reta perpendicular ao lado $\overline{AB}$ tem abscissa a tal que $2 < a < 5$.

Como a área do triângulo retângulo isósceles em destaque deve ser a metade da área do quadrilátero, temos:

$A = \dfrac{(5 - a)(5 - a)}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{(5 - a)^2}{2}$

$\therefore (5 - a)^2 = 8$

$\therefore 5 - a = 2\sqrt{2}$ ou $5 - a = -2\sqrt{2}$

$\therefore a = 5 + 2\sqrt{2}$ (não convém) ou $a = 5 - 2\sqrt{2}$

Alternativa **b.**

Exercício 19

Sejam os pontos $D(0, 1)$, $E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{AB}, 1\right)$, α a medida do ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ com a horizontal no sentido anti-horário e β a medida do ângulo determinado pela reta r no vértice B. Então:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\text{tg}\,(\alpha + 2\beta) = \dfrac{CE}{BE} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Assim, $\beta = 15°$. Se γ é o ângulo de inclinação da reta, temos:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (30° + 15°) = 135°$

Logo, seu coeficiente angular é: $\text{tg}\,135° = -1$

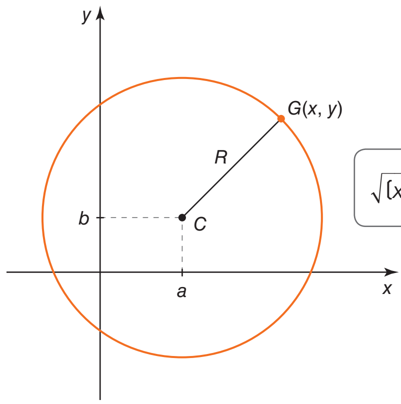
Alternativa **b.**

Geometria analítica: cônicas

Iluminando uma parede plana com uma lanterna, a intersecção da superfície do cone de luz com o plano da parede representa uma figura cônica. Dependendo da inclinação do eixo do cone em relação ao plano da parede, essa figura pode ser uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou um ramo de hipérbole.

Circunferência

Consideremos no plano cartesiano uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R. Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico, temos que G pertence a λ se, e somente se, $CG = R$, ou seja:



$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

Equação reduzida da circunferência

- Elevando ao quadrado ambos os membros da equação acima, obtemos a **equação reduzida** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- A equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, nas variáveis x e y, com $\{a, b, k\} \subset \mathbb{R}$, representa:
  - uma circunferência se, e somente se, $k > 0$;
  - um ponto se, e somente se, $k = 0$;
  - o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

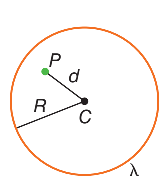
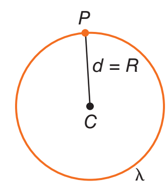
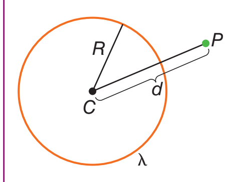
Equação geral da circunferência

Eliminando os parênteses da equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R, obtemos a **equação geral** (ou normal) da circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

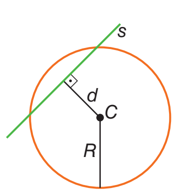
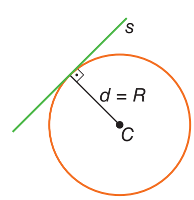
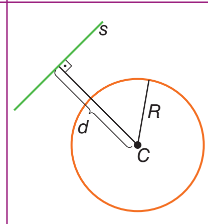
Posições relativas entre ponto e circunferência

No plano cartesiano, as posições relativas entre um ponto P e uma circunferência λ podem ser observadas a partir da comparação entre o raio R de λ e a distância d entre o ponto e o centro C da circunferência.

P é interior a λ	P pertence a λ	P é exterior a λ
$d < R$	$d = R$	$d > R$
		

Posições relativas entre reta e circunferência

- No plano cartesiano, as posições relativas entre uma reta s e uma circunferência λ podem ser observadas a partir da comparação entre o raio r de λ e a distância d entre a reta e o centro C da circunferência.

s é secante a λ	s é tangente a λ	s é exterior a λ
$d < R$	$d = R$	$d > R$
		

- Dadas as equações da reta s: $ax + by + c = 0$ e da circunferência λ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, temos que $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

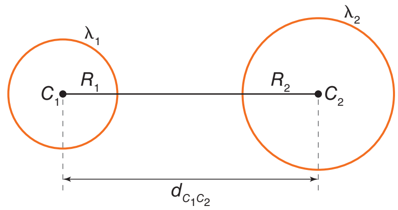
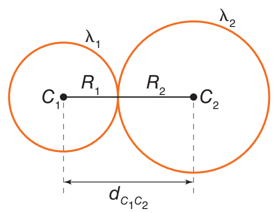
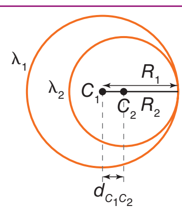
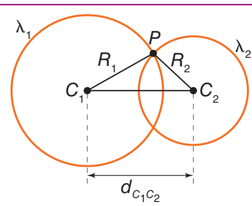
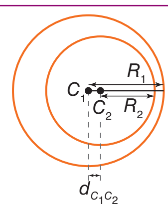
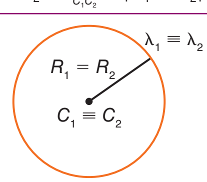
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Por substituição, obtemos uma equação do 2º grau em uma única variável. Sendo Δ o discriminante dessa equação, temos:

- Se $\Delta < 0$, o sistema é impossível, o que significa que s é exterior a λ.
- Se $\Delta = 0$, o sistema tem uma única solução, o que significa que s é tangente a λ.
- Se $\Delta > 0$, o sistema tem exatamente duas soluções, o que significa que s é secante a λ.

Posições relativas entre duas circunferências

› No plano cartesiano, sendo λ_1 e λ_2 duas circunferências de centros C_1 e C_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente, temos uma dentre as seis posições possíveis:

λ_1 e λ_2 são exteriores	 $d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$
λ_1 e λ_2 são tangentes exteriormente	 $d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$
λ_1 e λ_2 são tangentes interiormente	 $d_{C_1C_2} = \lvert R_1 - R_2 \rvert$
λ_1 e λ_2 são secantes	 $\lvert R_1 - R_2 \rvert < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$
λ_2 é interior a λ_1	 $R_1 > R_2$ e $d_{C_1C_2} < \lvert R_1 - R_2 \rvert$
λ_1 e λ_2 são coincidentes	 $d_{C_1C_2} = 0$ e $R_1 = R_2$

› Dadas as equações das circunferências λ_1: $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2$ e λ_2: $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2$, temos que $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:

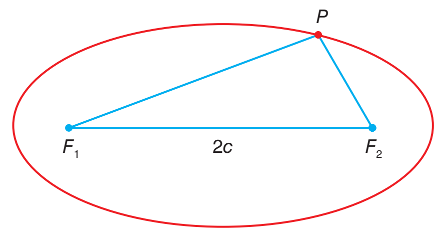
$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2 \end{cases}$$

Esse sistema:

- É impossível se, e somente se, λ_1 e λ_2 são exteriores ou uma delas for interior à outra.
- Tem uma única solução se, e somente se, λ_1 e λ_2 são tangentes interiormente ou exteriormente.
- Tem exatamente duas soluções se, e somente se, λ_1 e λ_2 são secantes.
- Tem mais de duas soluções se, e somente se, λ_1 e λ_2 são coincidentes.

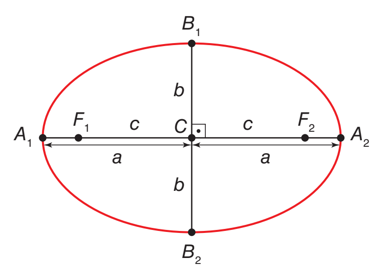
Elipse

› Fixados dois pontos, F_1 e F_2, de um plano α tais que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se **elipse** o conjunto dos pontos P do plano α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, com $2a > 2c$, ou seja:



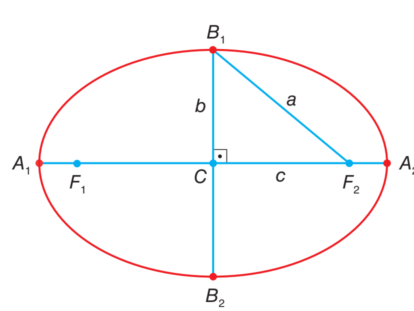
$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

› Considere a elipse abaixo.



- **Focos** da elipse: são os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal**: é a distância $2c$ entre os focos, sendo c a semidistância focal.
- **Corda** da elipse: é qualquer segmento de reta cujos extremos são pontos da elipse.
- **Eixo maior** da elipse: é a corda $\overline{A_1A_2}$, que passa pelos focos. Temos: $A_1A_2 = 2a$
- **Centro** da elipse: é o ponto médio C da corda $\overline{A_1A_2}$
- **Eixo menor** da elipse: é a corda $\overline{B_1B_2}$, perpendicular a $\overline{A_1A_2}$, que passa por C. Temos: $B_1B_2 = 2b$ e $CB_1 = CB_2 = b$

› Pelo teorema de Pitágoras, temos do triângulo B_1CF_2:

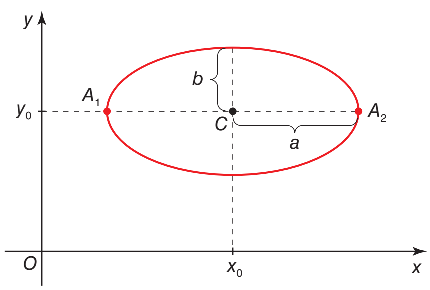


$$a^2 = b^2 + c^2$$

- O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado de **excentricidade** da elipse. Observando que esse número é o cosseno do ângulo agudo $B_1\hat{F}_2C$, temos: $0 < e < 1$

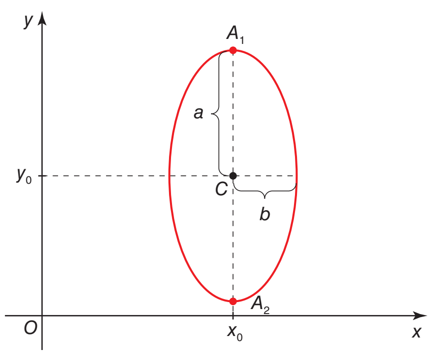
Equação reduzida da elipse

- Se uma elipse tem o eixo maior paralelo ao das abscissas, então sua equação reduzida é:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

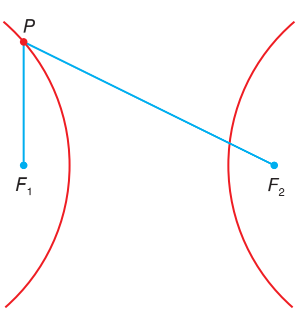
- Se uma elipse tem o eixo maior paralelo ao das ordenadas, então sua equação reduzida é:



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

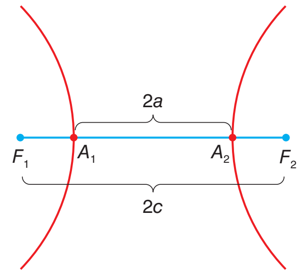
Hipérbole

- Fixados dois pontos, F_1 e F_2, de um plano α tais que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos P do plano α cujas diferenças, em módulo, das distâncias PF_1 e PF_2 são iguais a uma constante $2a$, com $0 < 2a < 2c$, ou seja:

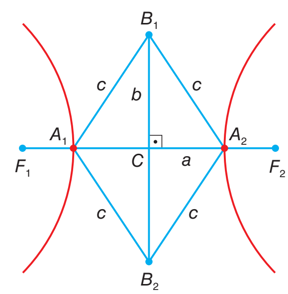


$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

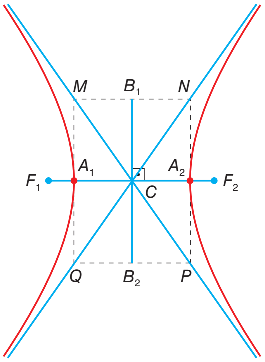
- Considere a hipérbole abaixo.



- **Focos** da hipérbole: são os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal**: é a distância $2c = F_1F_2$ entre os focos, sendo c a semidistância focal.
- **Vértices** da hipérbole: são os pontos A_1 e A_2, que são a intersecção da hipérbole com o segmento $\overline{F_1F_2}$.
- **Eixo real** da hipérbole: é o segmento $\overline{A_1A_2}$. Temos: $A_1A_2 = 2a$
- **Centro** da hipérbole: é o ponto médio C do eixo real $\overline{A_1A_2}$.
- **Eixo imaginário** da hipérbole: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, perpendicular a $\overline{A_1A_2}$, que passa por C tal que: $B_1A_1 = B_1A_2 = B_2A_1 = B_2A_2 = c$. Temos: $B_1B_2 = 2b$ e $CB_1 = CB_2 = b$



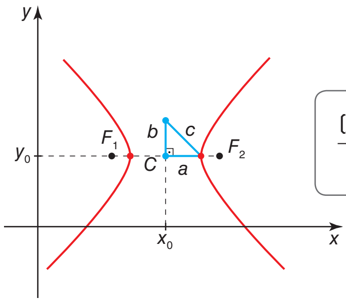
- Pelo teorema de Pitágoras, temos do triângulo B_1CA_2: $c^2 = a^2 + b^2$
- O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado de **excentricidade** da hipérbole. Observando que esse número é a secante do ângulo agudo $B_1\hat{A}_2C$, temos: $e > 1$
- Chama-se **retângulo referência** da hipérbole o retângulo $MNPQ$, cujos pontos médios dos lados são A_1, B_1, A_2 e B_2. As retas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NQ}$, que contêm as diagonais do retângulo, são denominadas **assíntotas** da hipérbole. A hipérbole não tem ponto em comum com nenhuma das assíntotas e a distância entre a hipérbole e cada assíntota se aproxima indefinidamente de zero.



Quando o retângulo referência é um quadrado ($2a = 2c$), a hipérbole é chamada de **equilátera**.

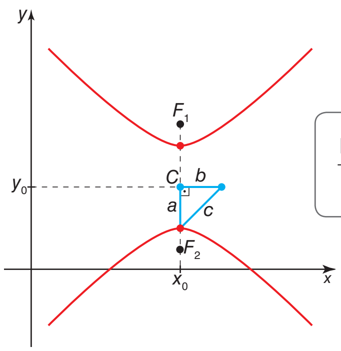
Equação reduzida da hipérbole

- Se uma hipérbole tem o eixo real paralelo ao das abscissas, então sua **equação reduzida** é:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

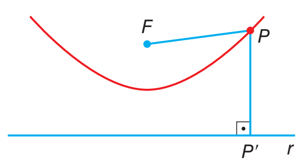
- Se uma hipérbole tem o eixo real paralelo ao das ordenadas, então sua **equação reduzida** é:



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

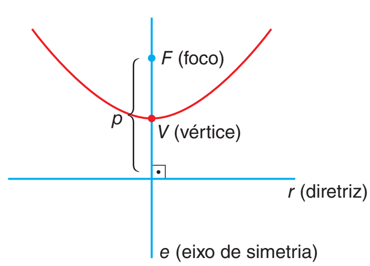
Parábola

- Fixados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chama-se **parábola** o conjunto dos pontos P desse plano equidistantes de r e F, ou seja:



$PF = PP'$
(P' é a projeção ortogonal de P sobre r)

- Considere a parábola abaixo.

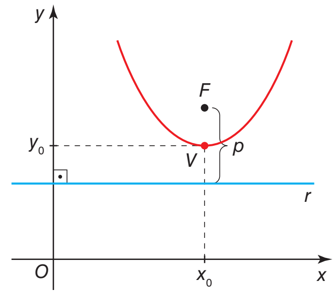


  - **Foco** da parábola: é o ponto F.
  - **Diretriz** da parábola: é a reta r.
  - **Eixo de simetria** da parábola: é a reta e que passa por F e é perpendicular à diretriz.
  - **Vértice** da parábola: é o ponto V, intersecção da parábola com o eixo e.
  - **Parâmetro** da parábola: é a distância p do foco à diretriz.

- A razão entre as distâncias de um ponto P ao foco e à diretriz é chamada de **excentricidade** da parábola. Como essas distâncias são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

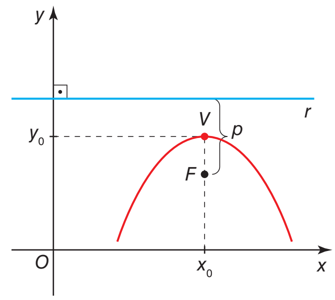
Equação reduzida da parábola

- Se uma parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para cima, então sua equação reduzida é:



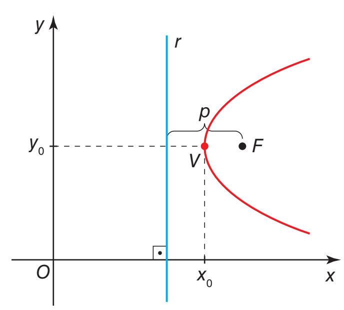
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

- Se uma parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para baixo, então sua equação reduzida é:



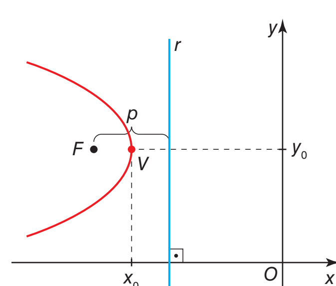
$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

- Se uma parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para a direita, então sua equação reduzida é:



$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

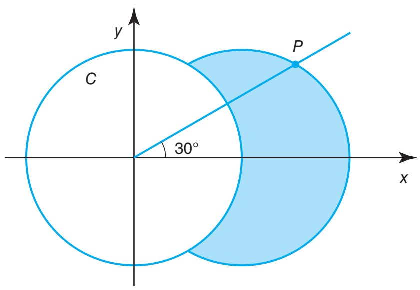
- Se uma parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para a esquerda, então sua equação reduzida é:



$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

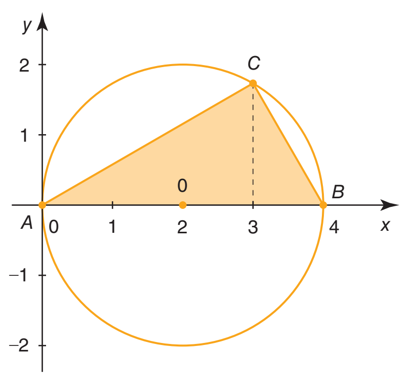
No Vestibular

1. **(Unicamp-SP)** A circunferência de centro em (2, 0) e tangente ao eixo y é interceptada pela circunferência C, definida pela equação $x^2 + y^2 = 4$, e pela semirreta que parte da origem e faz um ângulo de 30° com o eixo x, conforme a figura a seguir.



a) Determine as coordenadas do ponto P.
b) Calcule a área da região sombreada.

2. **(Udesc)** A figura abaixo apresenta o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O.



Analise as afirmativas abaixo de acordo com a figura.

I. A área do triângulo ABC é igual a $2\sqrt{3}$ unidades de área.
II. A equação da circunferência é dada por $x^2 + y^2 + 4x = 0$.
III. A equação da reta que passa pelos pontos A e C é dada por $y = 3x$.
IV. A medida do ângulo $A\hat{B}C$ é igual a 60°.

Assinale a alternativa correta.

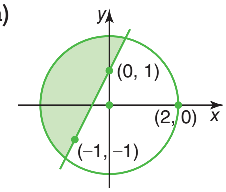
a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I, II e IV são verdadeiras.
e) Somente a afirmativa I é verdadeira.

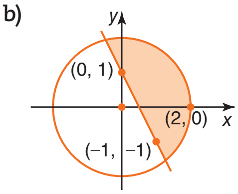
3. **(UFG-GO)** Dadas as circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas:

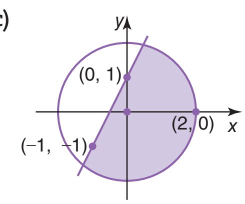
a) esboce os seus gráficos;
b) determine as coordenadas do ponto de intersecção das retas tangentes comuns às circunferências.

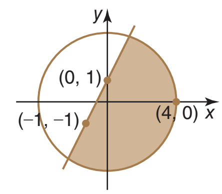
4. **(Unesp)** Dentre as regiões coloridas, aquela que representa no plano cartesiano o conjunto

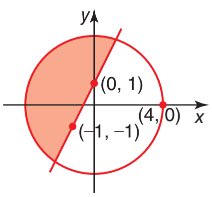
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x + 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


5. **(Unifor-CE)** Considere que, num sistema de eixos cartesianos ortogonais, as intersecções das curvas de equações $x^2 + y^2 - 3x - 19 = 0$ e $y^2 = x + 4$ são vértices de um polígono convexo cujos lados correspondem ao perímetro de um terreno. Se para desenhar esse terreno no sistema de eixos considerado foi usada uma escala de 1 : 6, a sua área real, em metros quadrados, é:

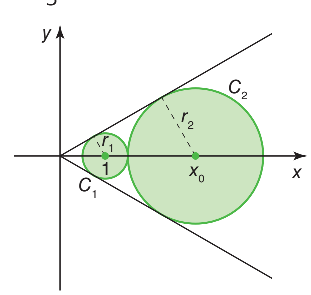
a) 288
b) 540
c) 960
d) 1.152
e) 2.304

6. **(Fuvest-SP)** No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto A(–5, 1) e é tangente à reta de equação $4x - 3y - 2 = 0$ em um ponto P. Seja, ainda, Q o ponto de intersecção da reta t com o eixo Ox. Assim:

a) Determine as coordenadas do ponto P.
b) Escreva uma equação para a circunferência C.
c) Calcule a área do triângulo APQ.

7. **(UFG-GO)** Na figura abaixo, as circunferências C_1 e C_2 são tangentes entre si e ambas tangentes às retas de equações

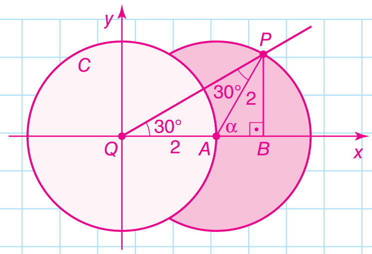
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.



Calcule a equação da circunferência C_2, sabendo que o ponto (1, 0) é o centro da circunferência C_1.

Exercício 1

Considere a figura ao lado:



a) O triângulo OAP é isósceles de base $\overline{PO}$.
Assim,
$\alpha = 30° + 30° = 60°$.
No triângulo retângulo PAB, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{PB}{PA} \Rightarrow PB = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{AB}{PA} \Rightarrow AB = 1$

Logo, as coordenadas do ponto P são $P\left(3, \sqrt{3}\right)$.

b) Sendo E e F os pontos de intersecção das duas circunferências, os triângulos OAE e OAF são equiláteros e, portanto, o ângulo $E\hat{O}F$ mede 120°.
Assim, a área da região sombreada é igual à área de um círculo de raio 2 menos duas vezes a área de um segmento circular de raio 2 e ângulo central de 120°, ou seja:

$$\pi \cdot 2^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 120°\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

Exercício 2

I. Verdadeira.
O triângulo ABC é retângulo em C, pois está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$; logo, a altura h desse triângulo, relativa a $\overline{AB}$, é dada por:
$h^2 = 3 \cdot 1 \Rightarrow h = \sqrt{3}$
Assim, a área S do triângulo é: $S = \dfrac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

II. Falsa, pois a circunferência tem centro no ponto (2, 0) e raio 2, ou seja, sua equação é:
$(x - 2)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$

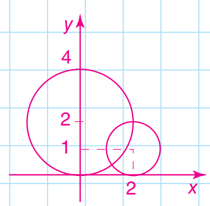
III. Falsa, pois o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é:
$\text{tg } (C\hat{A}B) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

IV. Verdadeira, pois $\text{tg } (C\hat{A}B) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $C\hat{A}B$ é ângulo agudo.

Alternativa **c**.

Exercício 3

a) $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$
Representando essas circunferências no plano cartesiano, temos:



b) Uma reta tangente às circunferências é a reta de equação $y = 0$.
Sabemos que as retas tangentes às circunferências e a reta r que passa pelos centros (0, 2) e (2, 1) das circunferências têm um mesmo ponto P em comum.
Essa reta r tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$$

Assim, o ponto P é a solução do sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

Portanto, $P(4, 0)$.

Exercício 4

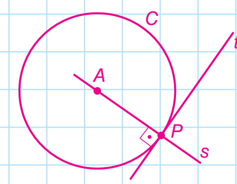
A região do plano determinada pela relação $y \geqslant 2x + 1$ é o semiplano de origem $y = 2x + 1$ e que não contém o ponto (0, 0).
A região do plano determinada pela relação $x^2 + y^2 \leqslant 4$ é o círculo de raio 2 e centro (0, 0).
Assim, a figura da alternativa **a** representa a intersecção dessas regiões.
Alternativa **a**.

Exercício 5

As coordenadas dos pontos de intersecção entre as curvas são soluções do sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 19 = 0 \\ y^2 = x + 4 \end{cases}$
Resolvendo esse sistema, obtemos: $P_1(5, 3)$, $P_2(5, -3)$, $P_3(-3, 1)$ e $P_4(-3, -1)$
Assim, os pontos de intersecção determinam um trapézio isósceles de base maior 6, base menor 2 e altura 8. Logo, adotando a escala 1 : 6, concluímos que a área do terreno é:
$\dfrac{(36 + 12)48}{2} \text{ m}^2 = 1.152 \text{ m}^2$
Alternativa **d**.

Exercício 6

A figura ao lado ilustra parte do problema.



Sendo m_t e m_s os coeficientes angulares das retas t e s, respectivamente, temos que $m_s = -\dfrac{1}{m_t}$, pois t e s são perpendiculares. Assim:

$4x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{2}{3}$

$\therefore m_t = \dfrac{4}{3}$ e $m_s = \dfrac{-1}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{3}{4}$

Logo, como s passa pelo ponto $A(1, -5)$, uma equação da reta s é:

$y - 1 = -\dfrac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 3x + 4y + 11 = 0$

As coordenadas do ponto P são dadas pela solução do sistema formado pelas equações das retas t e s, ou seja:

$\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ 3x + 4y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

$\therefore P(-1, -2)$

b) O raio r da circunferência C é igual à distância entre o ponto A e a reta t, ou seja:

$r = D_{C,r} = \dfrac{|4(-5) - 3 \cdot 1| - 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$

Assim, uma equação da circunferência C é:
$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$

c) Substituindo y por 0 na equação de t, temos:
$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$
Logo, o ponto Q tem coordenadas $Q\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e a área S do triângulo APQ é dada por:

$$S = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{25}{2}$$

Logo, $S = \dfrac{25}{4}$

Exercício 7

Sendo α a inclinação da reta de equação $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, temos:

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

Assim: $\begin{cases} \text{sen } 30° = \dfrac{r_1}{1} \\ \text{sen } 30° = \dfrac{r_2}{1 + r_1 + r_2} \end{cases} \Rightarrow r_1 = \dfrac{1}{2} \text{ e } r_2 = \dfrac{3}{2}$

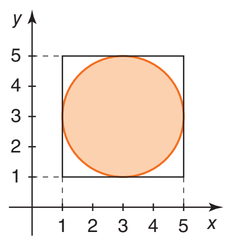
Logo, o centro e o raio de C_2 são, respectivamente, (3, 0) e $\dfrac{3}{2}$.
Concluímos, então, que uma equação de C_2 é:

$(x - 3)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$

8. **(Fuvest-SP)** Sendo $P = (a, b)$ um ponto qualquer da circunferência de centro na origem e raio 1, que satisfaça $b > a$, $a \neq b$ e $a \neq -b$, pode-se afirmar que $\log\left(\dfrac{b^3}{a^2 - b^2}\left(\dfrac{a^4}{b^4} - 1\right)\right)$ vale:

a) 0
b) 1
c) $-\log b$
d) $\log b$
e) $2\log b$

9. **(Fuvest-SP)** Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto (2, 0) e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices (1, 1), (5, 1), (5, 5) e (1, 5). Então:



a) $0 < m < \dfrac{1}{3}$
b) $m = \dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{1}{3} < m < 1$
d) $m = 1$
e) $1 < m < \dfrac{5}{3}$

10. **(Fuvest-SP)** Considere o triângulo ABC, onde $A = (0, 4)$, $B = (2, 3)$ e C é um ponto qualquer da circunferência $x^2 + y^2 = 5$. A abscissa do ponto C que torna a área do triângulo ABC a menor possível é:

a) -1 b) $-\dfrac{3}{4}$ c) 1 d) $\dfrac{3}{4}$ e) 2

11. **(ITA-SP)** Dadas a circunferência $C: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ e a reta $r: 3x - y + 5 = 0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

12. **(Fuvest-SP)** Considere, no plano cartesiano Oxy, a circunferência C de equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ e sejam P e Q os pontos nos quais C tangencia os eixos Ox e Oy, respectivamente. Seja PQR o triângulo isósceles inscrito em C, de base $\overline{PQ}$, e com o maior perímetro possível. Então, a área de PQR é igual a:

a) $2\sqrt{2} - 2$
b) $2\sqrt{2} - 1$
c) $2\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2} + 2$
e) $2\sqrt{2} + 4$

13. **(Fuvest-SP)** Para cada número real m seja $P_m = (x_m, y_m)$ o ponto de intersecção das retas $mx + y = 1$ e $x - my = 1$. Sabendo-se que todos os pontos P_m pertencem a uma mesma circunferência, qual é o centro dessa circunferência?

a) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
b) $(0, 0)$
c) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
d) $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$
e) $(1, 1)$

14. **(Fuvest-SP)** A elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$
b) $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$
c) $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$
d) $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$
e) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

Exercício 8

A circunferência de centro na origem e raio 1 possui equação reduzida $x^2 + y^2 = 1$.
Como $P(a, b)$ pertence a essa circunferência, temos:
$a^2 + b^2 = 1$ (I)
Além disso:

$$\log\left[\frac{b^3}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)\right] = \log\left[\frac{b^3}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^4 - b^4}{b^4}\right)\right] =$$

$$= \log\left[\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{b(a^2 - b^2)}\right] = \log\frac{a^2 + b^2}{b} \quad \text{(II)}$$

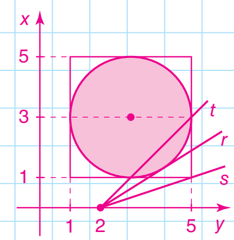
De (I) e (II), temos: $\log\dfrac{a^2 + b^2}{b} = \log\dfrac{1}{b} = \log b^{-1} = -\log b$

Portanto: $\log\dfrac{1}{b} = \log 1 - \log b = -\log b$

Alternativa **c.**

Exercício 9

Considere a figura a seguir.



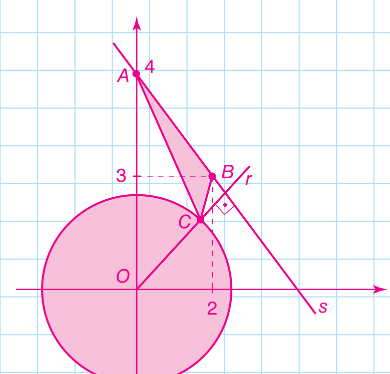
Seja r a reta tangente à circunferência com $m_r > 0$ e consideremos as retas s e t auxiliares. O coeficiente angular da reta s é $m_s = \dfrac{1}{3}$ e o coeficiente angular da reta t é $m_t = \dfrac{3}{3} = 1$. Assim:

$m_s < m_r < m_t \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < m_r < 1$

Alternativa **c.**

Exercício 10

Para que o triângulo ABC tenha a menor área possível, sua altura em relação ao lado $\overline{AB}$ deverá ser a menor possível. Assim, o ponto C é determinado pela intersecção da circunferência de centro (0, 0) e raio $\sqrt{5}$ com a reta r que passa por $O(0, 0)$ e é perpendicular a s.



Exercício 10

O coeficiente angular da reta s é: $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{2-0} = -\frac{1}{2}$

Como $r \perp s$, seu coeficiente angular de r é: $m_r = -\frac{1}{m_s} = 2$

Assim, a equação da reta r é: $y = 2x$

Resolvendo o sistema a seguir, obtemos os dois pontos de intersecção da reta com a circunferência. O ponto C é aquele que estiver mais próximo da reta s:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ $(x = 1 \text{ e } y = 2)$ ou $(x = -1 \text{ e } y = -2)$

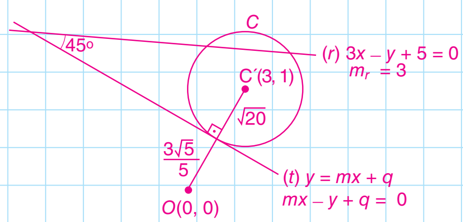
As soluções desse sistema são $(1, 2)$ e $(-1, -2)$. Dentre esses pontos, o mais próximo da reta s é $C(1, 2)$.

Alternativa **c**.

(*Nota*: A solução $C'(-1, -2)$ determina o ponto que torna a área do triângulo ABC' máxima.)

Exercício 11

A circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ tem centro $C'(3,1)$ e raio $\sqrt{20}$.



Devemos ter: $\left|\frac{m-3}{1+3m}\right| = \text{tg } 45° \Rightarrow m = -2 \text{ ou } m = \frac{1}{2}$

Assim, t_1: $-2x - y + q = 0$ ou t_2: $\frac{x}{2} - y + q = 0$

Da condição de tangência para t_1:

$$\frac{|-2 \cdot 3 - 1 + q|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20} \Rightarrow q = 17 \text{ ou } q = -3$$

$\therefore$ t_1: $-2x - y + 17 = 0$ ou t_1: $-2x - y - 3 = 0$

Da condição de tangência para t_2:

$$\frac{\left|\frac{3}{2} - 1 + q\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20} \Rightarrow q = \frac{9}{2} \text{ ou } q = -\frac{11}{2}$$

$\therefore$ t_2: $\frac{x}{2} - y + \frac{9}{2} = 0$ ou t_2: $\frac{x}{2} - y - \frac{11}{2} = 0$

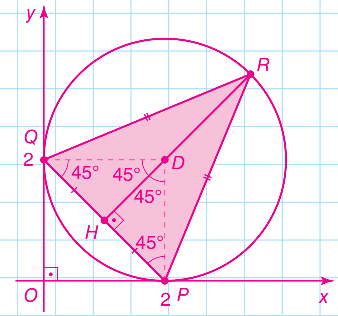
Das quatro retas obtidas, só a reta t_1: $-2x - y - 3 = 0$ dista $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ da origem, pois:

$$\frac{|-2 \cdot 0 - 0 - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Assim, uma equação da reta t é $-2x - y - 3 = 0$, que é equivalente a $2x + y + 3 = 0$.

Exercício 12

Considere a figura a seguir.



$\overline{PQ}$ é diagonal de um quadrado de lado 2 e, portanto, $PQ = 2\sqrt{2}$. Como H é ponto médio de $\overline{PQ}$, temos:

$DH = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Assim, a altura do triângulo PQR é: $\sqrt{2} + 2$

Logo, sua área é: $\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

Alternativa **d**.

Exercício 13

O lugar geométrico dos pontos P_m é determinado pela solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1-y}{x} & \text{(I)} \\ x - my = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos: $x^2 + y^2 - x - y = 0$,

ou seja: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Assim, o lugar geométrico é a circunferência de centro $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Alternativa **a**.

Exercício 14

Seja $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ a abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$.

Os pontos A e B são determinados pelo sistema formado pelas equações da elipse e da reta:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{(2x+1)^2}{2} = \frac{9}{4}$$

$\therefore$ $12x^2 + 8x - 7 = 0$ (I)

Observando a soma das raízes da equação (I), temos:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{8}{12}$

$\therefore \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{8}{24} \Rightarrow x_M = -\frac{1}{3}$

Substituindo x por $-\frac{1}{3}$ na equação da reta, obtemos:

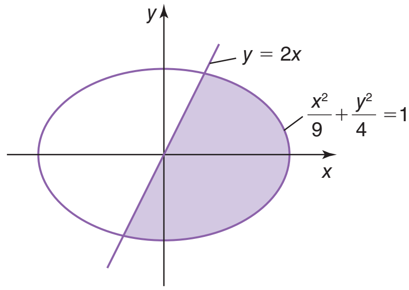
$y = \frac{1}{3}$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Alternativa **d**.

(*Nota*: Observe que resolvemos o exercício sem determinar os pontos A e B.)

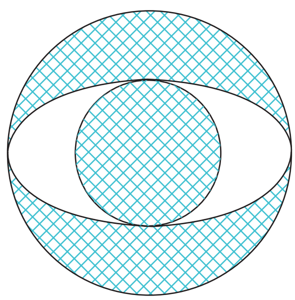
15. (Unifesp) A área colorida na figura limitada pela elipse e pela reta indicadas, é:



a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

(*Nota*: A área S de uma elipse cujos semieixos medem a e b é dada por $S = \pi ab$.)

16. (UFPB) O escudo de um time de futebol é formado por uma elipse de excentricidade $e = \frac{4}{5}$, cujo eixo menor mede 6 cm, e duas circunferências concêntricas e tangentes a essa elipse, como mostra a figura.

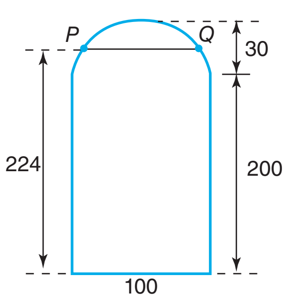


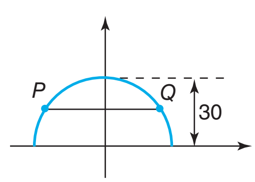
Considere que a área da região limitada pela elipse é dada por πab cm^2, sendo, em centímetros, a o comprimento de um semieixo maior e b, de um semieixo menor. Nesse contexto, é correto afirmar que a área da região hachurada mede:

a) 19π cm^2
b) 17π cm^2
c) 15π cm^2
d) 18π cm^2
e) 24π cm^2

17. (Uerj) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100 cm $\times$ 200 cm e uma semielipse.

Observe as figuras:

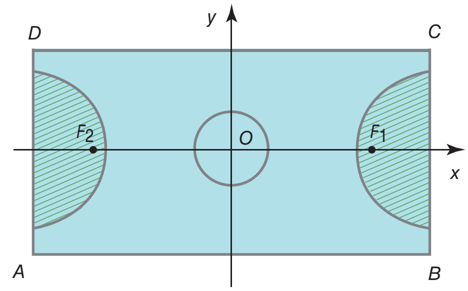




Na semielipse o eixo maior mede 100 cm e o semieixo menor, 30 cm. Calcule a medida da corda $\overline{PQ}$, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224 cm de altura.

18. (Udesc) Determine a equação da parábola que passa pelos focos da hipérbole $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ e pelo ponto de intersecção entre a reta $y - 2x + 7 = 0$ e o eixo das ordenadas, e tem diretriz horizontal.

19. (UFPB) Uma quadra de futsal está representada na figura pelo retângulo $ABCD$, onde $A = (-20, -10)$ e $C = (20, 10)$.



Cada uma das áreas dos goleiros (regiões hachuradas) é delimitada por uma das linhas de fundo, $\overline{AD}$ ou $\overline{BC}$, e por um dos dois ramos de uma hipérbole de focos $F_1 = (6\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (-6\sqrt{5}, 0)$. O círculo central e a hipérbole são concêntricos, o raio do círculo mede 3 m e uma das assíntotas da hipérbole passa pelos pontos A e C.

Nesse contexto, identifique as proposições verdadeiras.

01. A distância entre o centro do círculo e um vértice da hipérbole é de 12 m.

02. A quadra tem 800 m^2 de área.

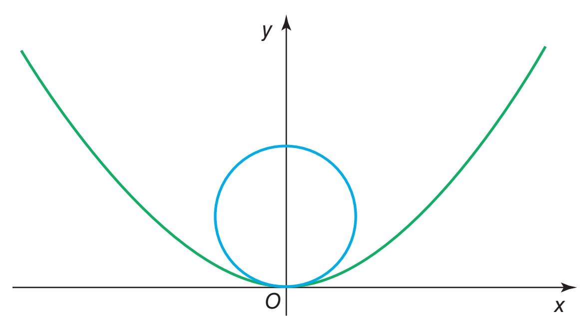
04. A equação da hipérbole é $\frac{x^2}{180} - \frac{y^2}{36} = 1$.

08. A excentricidade da hipérbole é igual a $\frac{5}{3}$.

16. O eixo imaginário da hipérbole tem comprimento igual a 4 vezes o raio do círculo.

- Qual é a soma dos valores atribuídos às proposições verdadeiras?

20. (UFG-GO) A figura mostra, no plano cartesiano, o gráfico da parábola de equação $y = \frac{x^2}{4}$ e uma circunferência com centro no eixo y e tangente ao eixo x no ponto O.



Determine o raio da maior circunferência, nas condições acima, que tem um único ponto de intersecção com a parábola.

21. (Fuvest-SP) O lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta $y = 0$ e da circunferência $x^2 + (y-2)^2 = 1$ é:

a) uma reta.
b) uma semirreta.
c) uma circunferência.
d) uma elipse.
e) uma parábola.

22. (UFC-CE) No plano cartesiano, $x^2 - y^2 + 5x - 5y = 0$ é uma equação de:

a) um conjunto vazio.
b) um conjunto unitário.
c) uma hipérbole.
d) duas retas paralelas.
e) duas retas concorrentes.

Exercício 15

A elipse possui semieixo maior $a = 3$ e semieixo menor $b = 2$. Como a reta de equação $y = 2x$ divide a elipse em duas regiões equivalentes, concluímos que a área da região sombreada é: $\dfrac{\pi ab}{2} = 3\pi$

Alternativa **c.**

Exercício 16

Seja o centro das circunferências e da elipse a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Equação da circunferência menor:

$x^2 + y^2 = b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

$\therefore\ r = 3$

Equação da elipse:

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow c = \dfrac{4a}{5}$

$2b = 6 \Rightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + \left(\dfrac{4a}{5}\right)^2$

$\therefore\ a = 5$ e $c = 4$

Portanto: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Equação da circunferência maior:

$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

$\therefore\ R = 5$

Portanto, a área hachurada (S) é igual à área do interior da circunferência maior menos a área do interior da elipse, somada à área do interior da circunferência menor, ou seja:

$S = (\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 5 \cdot 3 + \pi \cdot 3^2)\ \text{cm}^2 \Rightarrow S = 19\pi\ \text{cm}^2$

Alternativa **a.**

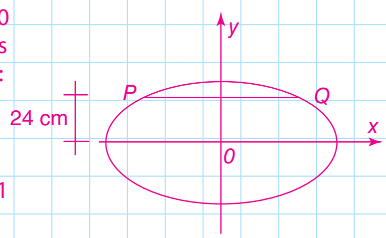
Exercício 17

$2a = 100 \Rightarrow a = 50$

Como $b = 30$, temos a equação da elipse:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2.500} + \dfrac{y^2}{900} = 1$



Além disso: $y = 224 - 200 = 24$

$\dfrac{x^2}{2.500} + \dfrac{24^2}{900} = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{50 \cdot 18}{30}$

$\therefore\ x = \pm 30$

Portanto: $P(-30, 24)$ e $Q(30, 24)$.

Assim: $d_{PQ} = (30 + 30)$ cm $= 60$ cm

Exercício 18

A hipérbole de equação $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ possui centro no ponto $C(3, 0)$.

A medida a do semieixo real é dada por: $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

A medida b do semieixo imaginário é dada por:

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

Assim, temos: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 12$

$\therefore\ c = 4$

Logo, a distância focal da hipérbole é 8 e, portanto, seus focos são os pontos de abscissas $(-1, 0)$ e $(7, 0)$.

Além disso, a reta de equação $y = 2x - 7$ intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -7)$.

Logo, a equação da parábola que passa pelos pontos $(-1, 0)$, $(7, 0)$ e $(0, -7)$ é:

$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow -7 = a(0 + 1)(0 - 7)$

$\therefore\ a = 1$

Logo: $y = 1(x + 1)(x - 7) = x^2 - 6x - 7$

Exercício 19

A reta (assíntota da hipérbole) que passa nos pontos $A(-20, -10)$ e $C(20, 10)$ é a reta $y = \dfrac{1}{2}x$.

Logo: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$ e $c = 6\sqrt{5}$

Assim:

$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow \left(6\sqrt{5}\right)^2 = b^2 + (2b)^2$

$\therefore\ b = 6$ e $a = 12$

Portanto, a equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

01. Verdadeiro, pois $a = 12$.

02. Verdadeiro, pois a área da quadra é: $40 \cdot 20\ \text{m}^2 = 800\ \text{m}^2$

04. Falso, pois a equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

08. Falso, pois a excentricidade $\left(\dfrac{c}{a}\right)$ é igual a: $\dfrac{6\sqrt{5}}{12} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

16. Verdadeiro, pois o eixo imaginário é igual a $2b = 12$, portanto, 4 vezes o raio do círculo.

• A soma é: $01 + 02 + 16 = 19$

Exercício 20

Seja r a medida do raio da circunferência e considerando a origem do sistema de coordenadas cartesianas como o único ponto de intersecção entre a parábola e a circunferência, temos a seguinte equação:

$x^2 + (y - r)^2 = r^2$

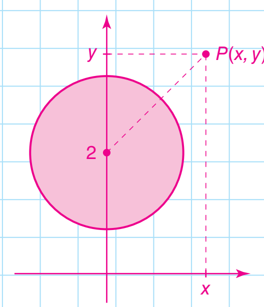
$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ x^2 + (y - r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow 4y + (y - r)^2 = r^2$

$\therefore\ y^2 + (4 - 2r)y = 0$

Como a equação do 2º grau $y^2 + (4 - 2r)y = 0$ deve ter apenas uma solução, então $\Delta = 0$. Portanto:

$$\Delta = (4 - 2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow r = 2$$

Exercício 21



Considere a figura ao lado.

Observando que os pontos equidistantes da circunferência e do eixo Ox têm ordenadas positivas, temos que a distância do ponto $P(x, y)$ a esse eixo é:

$D_{P\overleftrightarrow{Ox}} = |y| = y$

A distância de $P(x, y)$ à circunferência λ, de centro $(0, 2)$ e raio 1, é:

$D_{P\lambda} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} - 1$

Como P é equidistante da reta $y = 0$ e da circunferência λ, temos:

$D_{P\overleftrightarrow{Ox}} = D_{P\lambda} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} - 1$

$\therefore\ y + 1 = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$

$\therefore \begin{cases} y \geqslant -1 \\ y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant -1 \\ y = \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

O que representa uma parábola com concavidade voltada para cima, eixo de simetria $x = 0$ e ponto de mínimo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Alternativa **e.**

Exercício 22

$x^2 - y^2 + 5x - 5y = 0 \Rightarrow x^2 + 5y - (y^2 + 5y) = 0$

$\therefore \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{4} \Rightarrow \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2$

$\therefore \begin{cases} y + \dfrac{5}{2} = x + \dfrac{5}{2} \\ y + \dfrac{5}{2} = -\left(x + \dfrac{5}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 5 \end{cases}$

Portanto, a equação corresponde a duas retas concorrentes.

Alternativa **e.**

Conjunto dos números complexos

No século XVI, os matemáticos Cardano e Bombelli admitiram, pela primeira vez, a existência de raízes quadradas de números negativos. Isso deu origem à teoria dos números complexos, que mais tarde foi ampliada. Atualmente, essa teoria tem aplicações em várias áreas do conhecimento como Hidrodinâmica, Mecânica dos fluidos, Eletricidade, Informática etc.

Os números complexos

A unidade imaginária

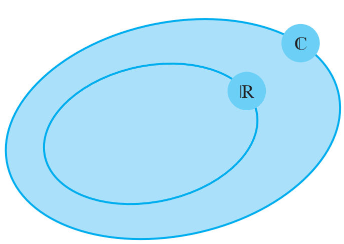
A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números negativos. Para que a radiciação sempre seja possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número **i**, não real, que chamaram de **unidade imaginária**, e que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

Número complexo

Número complexo é todo número da forma $a + bi$ em que $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária.

- A expressão $a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é chamada de **forma algébrica** do número complexo, em que a é a **parte real** e b é a **parte imaginária**.
- Todo número complexo cuja parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário**.
- Todo número complexo cuja parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário puro**.
- Todo número complexo cuja parte imaginária é zero é um **número real**. Portanto, todo número real a é, também, um número complexo, pois pode ser representado por $a + 0i$. Assim, temos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



- Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias também são iguais.

Conjugado de um número complexo

O **conjugado** do número complexo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número complexo:

$$\bar{z} = a - bi$$

Operações com números complexos

- Para a adição e multiplicação de números complexos foram conservadas as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro.
- O elemento **oposto** de um número complexo qualquer $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número complexo $-z = -a - bi$.
- O elemento **inverso** multiplicativo de um número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número complexo indicado por z^{-1}, tal que: $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$
- Assim, para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, temos:

  I. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

  II. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di)$
  $\therefore\ z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

  III. $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$
  $\therefore\ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

  IV. $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$ (com $z_2 \neq 0$)

Forma algébrica de números complexos inversos

Para representar o inverso de um número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, na forma algébrica, podemos multiplicar o numerador e o denominador de $\dfrac{1}{a + bi}$ pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

Potências de i

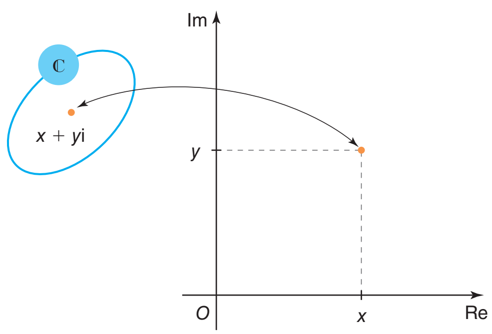
- Existem somente quatro valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

$$i^0 = 1 \qquad i^2 = -1$$
$$i^1 = i \qquad i^3 = -i$$

- Para o cálculo da potência i^n, com n inteiro e $n \geqslant 4$, dividimos n por 4, obtendo um resto inteiro r. Teremos, então: $i^n = i^r$

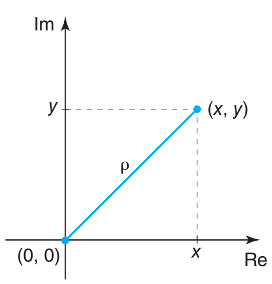
Representação geométrica de um número complexo

- A cada número complexo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, associamos o ponto (x, y) do plano cartesiano. Esse plano será chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**.
- No plano de Argand-Gauss, o eixo das abscissas é chamado de **eixo real** (Re), e o eixo das ordenadas é chamado de **eixo imaginário** (Im). Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é chamado de **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.



Módulo de um número complexo

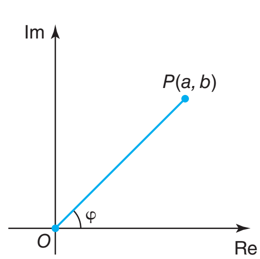
O **módulo** ρ de um número complexo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$ do plano de Argand-Gauss.



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\therefore\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Argumento de um número complexo

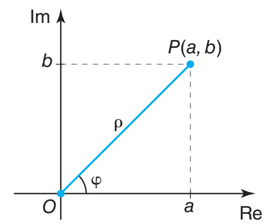
- Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, o seu **argumento** é a medida φ do ângulo formado pelo semieixo positivo Ox e pela semirreta $\overrightarrow{OP}$, medido no sentido anti-horário a partir do semieixo Ox.



- A medida φ, com $0 \leqslant \varphi < 360°$, é chamada de argumento principal do número complexo z. Valores da forma $\varphi + k \cdot 360°$ ou $\varphi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}^*$, são chamados de argumentos secundários de z.

Forma trigonométrica de um número complexo

Para todo número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, de módulo ρ e argumento φ, temos:



$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Assim, podemos representar o número complexo z na **forma trigonométrica** (ou forma polar):

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)}$$

Multiplicação de números complexos

Dados $z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, temos:

$$\boxed{z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}(\alpha + \beta)]}$$

Divisão de números complexos

Dados $z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, com $w \neq 0$, temos:

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}(\alpha - \beta)]}$$

Potenciação de números complexos (Teorema de De Moivre)

Se $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ é um número complexo não nulo e n é um número inteiro qualquer, temos:

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\text{sen}\,n\varphi)}$$

Raízes de um número complexo

- As **raízes n-ésimas** de um número complexo não nulo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ são n números complexos distintos $w_1, w_2, w_3, ..., w_n$ de mesmo módulo $\rho^{\frac{1}{n}}$, cujos argumentos formam uma progressão aritmética crescente de primeiro termo $\dfrac{\varphi}{n}$ e razão $\dfrac{360°}{n}$ $\left(\text{ou } \dfrac{2\pi}{n}\right)$.
- As imagens dessas raízes n-ésimas no plano complexo são vértices de um polígono regular de n vértices inscrito em uma circunferência de raio $\rho^{\frac{1}{n}}$ e centro na origem O do sistema.

No Vestibular

1. **(UFPel-RS)** O módulo de um número complexo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, é a distância do ponto (a, b) ao ponto $(0, 0)$ do plano Argand-Gauss.

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o módulo do número complexo $z = \dfrac{1 + 3i}{1 - 2i} + (1 - i)^6$ é, aproximadamente:

a) 7,07 **c)** 8,06 **e)** 9,06
b) 6,08 **d)** 6,63 **f)** I.R.

2. **(Unifor-CE)** Seja z um número complexo dado por $z = \dfrac{(3 + 4i) \cdot (-1 + i)^4}{(3 - 3i)^2}$. Considerando as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, o valor de $\log |z|$ é:

a) 0,02 **b)** 0,04 **c)** 0,06 **d)** 0,4 **e)** 0,6

3. **(Unifor-CE)** Seja o número complexo $z = x + 3i$, em que x é um número real negativo. Se $|z| = 6$, então a forma trigonométrica de z é:

a) $6 \cdot \left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$

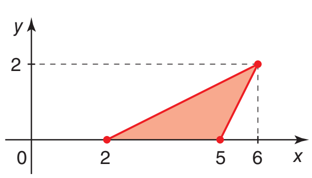
b) $6 \cdot \left(\cos \dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}\right)$

c) $6 \cdot \left(\cos \dfrac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{4\pi}{3}\right)$

d) $6 \cdot \left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}\right)$

e) $6 \cdot \left(\cos \dfrac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{6}\right)$

4. **(Unifesp)** Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$.



A área do triângulo de vértices $w_1 = iz_1$, $w_2 = iz_2$ e $w_3 = 2iz_3$ é:

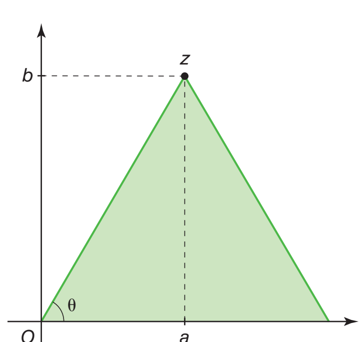
a) 8 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

5. **(Vunesp)** Considere os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = x + 2i$, onde i é a unidade imaginária e x é um número real. Determine:

a) O número complexo $z_1 \cdot z_2$ em função de x.
b) Os valores de x tais que $\text{Re}(z_1 \cdot z_2) \leq \text{Im}(z_1 \cdot z_2)$, onde Re denota a parte real e Im, a parte imaginária do número complexo.

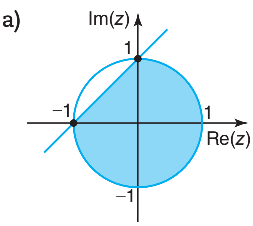
6. **(Vunesp)** O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura.

Sabendo que a área desse triângulo é igual a $36\sqrt{3}$, determine z^2.

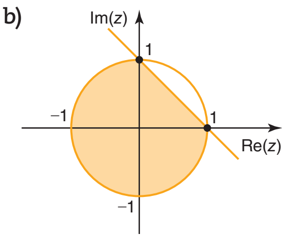


7. **(FCC)** É dado o número complexo $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. O lugar geométrico das imagens dos números z, tais que $|z| < 1$ e $x + y < 0$, é representado no plano Argand-Gauss pela região pintada na figura:

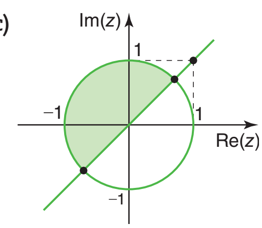
a)



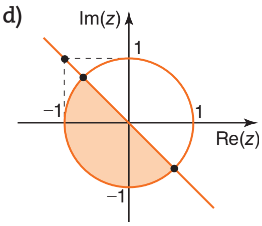
b)



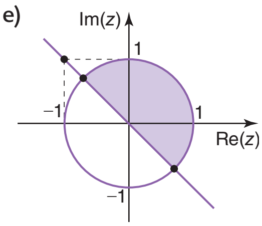
c)



d)



e)



8. **(Fuvest-SP)** Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\dfrac{2 + i}{\alpha + 2i}$ é zero, então α é:

a) -4 **c)** 1 **e)** 4
b) -2 **d)** 2

9. **(UFPel-RS)** Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampère) são exemplos de quantidades complexas.

Considerando Z_1 e Z_2 dois números complexos, $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ seus respectivos conjugados e $|Z_1|$ e $|Z_2|$ seus respectivos módulos, analise as afirmativas.

I. $Z_1 \cdot \overline{Z}_1$ é sempre um número real.
II. $|Z_1| \cdot |Z_2|$ é sempre um número irracional.
III. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2$
IV. $|Z_1 \cdot Z_2| \neq |Z_1| \cdot |Z_2|$

A respeito dessas afirmativas, é correto afirmar que:

a) Somente I e II são verdadeiras.
b) Somente II e IV são verdadeiras.
c) Somente I e III são verdadeiras.
d) Todas as afirmativas são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são falsas.
f) I.R.

Exercício 1

$z = \frac{1+3i}{1-2i} + (1-i)^6 = \frac{1+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} + [(1-i)^2]^3 = 7 + i$

Assim, o par ordenado associado a z é (7, 1).

Portanto, z tem módulo: $\sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

Alternativa **a**.

Exercício 2

$z = \frac{(3+4i)\cdot(-1+i)^4}{(3-3i)^2} = \frac{(3+4i)\cdot[(-1+i)^2]^2}{9(1-i)^2} =$

$= \frac{(3+4i)\cdot(-2i)^2}{9\cdot(-2i)} = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}i$

Assim:

$\log|z| = \log\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \log\frac{10}{9} = 1 - 2\log 3 =$
$= 0{,}04$

Alternativa **b**.

Exercício 3

$x < 0$ e $\sqrt{x^3 + 3^2} = 6 \Rightarrow x = -3\sqrt{3}$

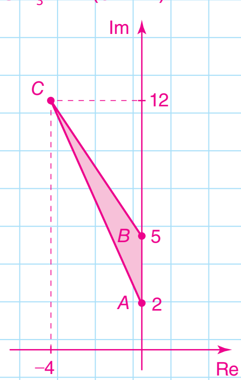
Assim, temos:

$z = -3\sqrt{3} + 3i = 6\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

Alternativa **b**.

Exercício 4

Considere a figura a seguir, em que os pontos A, B e C representam, respectivamente, os afixos dos números $w_1 = 2i$, $w_2 = 5i$ e $w_3 = 2i(6 + 2i) = -4 + 12i$.



Assim, a área do triângulo ABC é:

$\frac{(5-2)\cdot 4}{2} = 6$

Alternativa **b**.

Exercício 5

a) $z_1 \cdot z_2 = (2+i)(x+2i) = (2x-2) + (x+4)i$

b) $\text{Re}(z_1\cdot z_2) \leqslant \text{Im}(z_1 \cdot z_2) \Rightarrow 2x - 2 \leqslant x + 4$
$\therefore x \leqslant 6$

Exercício 6

Sendo ℓ a medida do lado do triângulo equilátero de área $36\sqrt{3}$, temos:

$36\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell = 12$

Assim, $b = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ e $a = 6$. Logo:

$z = 6 + 6\sqrt{3}i \Rightarrow z^2 = -72 + 72\sqrt{3}\,i$

Exercício 7

O conjunto dos pontos que satisfazem a desigualdade $|z| < 1$ é o interior do círculo de centro na origem e raio 1.

O conjunto dos pontos que satisfazem a desigualdade $x + y < 0$, ou seja, $y < -x$ é o semiplano aberto de origem na bissetriz dos quadrantes pares e que contém o ponto (0, −1). Assim, o lugar geométrico pedido é o representado na alternativa d.

Alternativa **d**.

Exercício 8

$\frac{2+i}{\alpha+2i} = \frac{2+i}{\alpha+2i}\cdot\frac{\alpha-2i}{\alpha-2i} = \frac{2\alpha+2}{\alpha^2+4} + \frac{\alpha-4}{\alpha^2+4}i$

Como a parte imaginária é nula, temos:

$\frac{\alpha-4}{\alpha^2+4} = 0 \Rightarrow \alpha = 4$

Alternativa **e**.

Exercício 9

I. V, pois, sendo $z_1 = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos: $Z_1 \cdot \overline{Z_1} = x^2 + y^2$

II. F, pois, se considerarmos $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 2$, teremos: $|Z_1| \cdot |Z_2| = 2$

III. V, de acordo com a propriedade do produto de números complexos conjugados.

IV. F, de acordo com a propriedade do módulo do produto de números complexos.

Alternativa **c**.

10. **(Unifesp)** Os números complexos z_1, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde a é um número real positivo, representam no plano complexo vértices de um triângulo equilátero. Dado que $|z_2 - z_1| = 2$, o valor de a é:

a) 2

b) 1

c) $\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{1}{2}$

11. **(UPF-MG)** Sendo o número complexo $z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{\sqrt{8}}$, as expressões de z^3 e z^6 são dadas, respectivamente, por:

a) i e -1
b) i e $+1$
c) $-i$ e 1
d) $-i$ e -1
e) 1 e 1

12. **(Mackenzie-SP)** Que números complexos representam dois vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem, onde um dos três vértices do triângulo é dado por $V_1 = -2i$?

a) $\sqrt{3} + i$ e $\sqrt{3} - i$
b) $-\sqrt{3} - i$ e $\sqrt{3} - i$
c) $\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} + i$
d) $-\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} - i$
e) 2i e 2

13. **(Unir-RO)** Fixado um ângulo θ, em radianos, a multiplicação complexa $(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta) \cdot (x + iy)$ representa a rotação de θ radianos, no sentido anti-horário, em torno da origem, do número complexo $x + iy$. Rotacionando 30 graus, no sentido anti-horário e em torno da origem, o número complexo $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$, obtém-se:

a) $\sqrt{3} + i$
b) $1 + i\sqrt{3}$
c) $1 + 2i$
d) $2 + 4i$
e) $1 + i$

14. **(Fuvest-SP)** Dentre os números complexos $z = a + bi$, não nulos, que têm argumento igual a $\dfrac{\pi}{4}$, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é:

a) $1 + i$
b) $1 - i$
c) $-1 + i$
d) $\sqrt{2} + 2i$
e) $-\sqrt{2} + 2i$

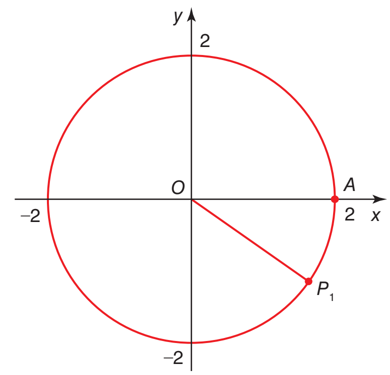
15. **(Unicamp-SP)** Dado o número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

a) Resolva as equações $z \cdot \bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.
b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

16. **(UFSCar-SP)** Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2 \cdot a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \ldots + i^{a_{10}}$ é igual a:

a) 9i ou $-9i$
b) $-9 + i$ ou $-9 - i$
c) $9 + i$ ou $9 - i$
d) $8 + i$ ou $8 - i$
e) $7 + i$ ou $7 - i$

17. **(UFBA)** Na figura, tem-se uma circunferência de centro na origem dos eixos coordenados e raio igual a 2 u.c. O comprimento do menor arco de origem em A e extremidade em P_1 é igual a $\dfrac{\pi}{3}$ u.c.



Considere os pontos P_1, P_2 e P_3 vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência e representado, nessa ordem, no sentido anti-horário.

Sendo P_1, P_2 e P_3, respectivamente, afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3, calcule $|\bar{z}_1 + z_2^5 + z_3|$.

18. **(ITA-SP)** O conjunto A, definido por $A = \{z \in \mathbb{C};\ (z - i)(\overline{z - i}) = 4\}$, representa no plano complexo:

a) Uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e $-$ i.
b) Uma circunferência de centro no ponto (0, 1) e raio 2.
c) Uma circunferência de centro no ponto (0, 0) e raio 4.
d) Um par de retas que se cortam no ponto (1, 1).
e) Nenhuma das anteriores.

19. **(Unicamp-SP)** Identifique o lugar geométrico dos pontos $z = x + iy$ do plano complexo tal que $\text{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$. Determine a equação cartesiana e faça o gráfico desse lugar.

20. **(Fuvest-SP)**

a) Se $z_1 = \cos\theta_1 + i\text{sen}\,\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\text{sen}\,\theta_2$, mostre que o produto $z_1 \cdot z_2$ é igual a $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$.
b) Mostre que o número complexo $z = \cos 48° + i\text{sen}\,48°$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

21. **(Unicamp-SP)** Se $z = x + iy$ é um número complexo, o número real x é chamado "parte real de z" e é indicado por Re(z), ou seja, $\text{Re}(x + iy) = x$.

a) Mostre que o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem à equação $\text{Re}\left(\dfrac{z + 2i}{z - 2}\right) = \dfrac{1}{2}$, ao qual se acrescenta o ponto (2, 0), é uma circunferência.
b) Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 0)$ e é tangente àquela circunferência.

Exercício 10

Como os afixos associados aos números complexos z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero e $|z_2 - z_1| = 2$ representa a medida do lado desse triângulo, temos, para $a > 0$:

$|z_2 - z_3| = 2 \Rightarrow |a\sqrt{3} + ai - 2i| = 2$

$\therefore \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a-2)^2} = 2 \Rightarrow a = 1$

Alternativa **b**.

Exercício 11

$z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Assim, a forma trigonométrica de z é: $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

Pelo teorema de De Moivre, concluímos:

$z^3 = \cos\left(3 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(3 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) = i$

$z^6 = \cos\left(6 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(6 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$

Alternativa **a**.

Exercício 12

Como $V_1 = -2i = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$, temos:

$V_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

$V_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

Alternativa **c**.

Exercício 13

Como $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad, temos:

$\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\right) =$

$= \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\right) = 1 + i$

Alternativa **e**.

Exercício 14

Seja $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ o argumento principal de $z = x + yi$. Como z pertence à parábola de equação $y = x^2$, então $z = x + x^2i$.

Além disso: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x^2}{x} \therefore x = 1$

Assim, $z = 1 + i$.

Alternativa **a**.

Exercício 15

a) Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Temos:

- $z \cdot \bar{z} = 4 \Rightarrow (x + yi)(x - yi) = 4$
  $\therefore x^2 + y^2 = 4$
  Logo, as soluções da equação são todos os números complexos cujos afixos são pontos da circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio 2.
- $(\bar{z})^2 = z^2 \Rightarrow (x - yi)^2 = (x + yi)^2$
  $\therefore 4xyi = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$
  Logo, as soluções da equação são todos os números complexos cujos afixos pertencem ao eixo real ou ao eixo imaginário.

b) Os pontos de intersecção dos lugares geométricos representados pelas duas equações são os pontos onde a circunferência intercepta os eixos coordenados, ou seja, (2, 0); (0, 2); (−2, 0) e (0, −2).

Exercício 16

$a_2 = 2 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 \cdot q = 2 \cdot a_1 \therefore q = 2$, pois $a_1 \neq 0$

Como a_1 é um número ímpar, temos: $i^{a_1} = i$ ou $i^{a_1} = -i$.

Como $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + ... + i^{a_{10}} = i^{a_1} + (i^{a_1})^2 + (i^{a_1})^{2^2} + ... + (i^{a_1})^{2^9}$, analisaremos os dois casos:

- se $i^{a_1} = i$, temos:
  $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + ... + i^{a_{10}} =$
  $= i + (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 + i$
- se $i^{a_1} = -i$, temos:
  $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + ... + i^{a_{10}} =$
  $= -i + (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 - i$

Alternativa **e**.

Exercício 17

O comprimento da circunferência da figura é $C = 4\pi$.

A razão entre o comprimento do arco e o da circunferência é $\dfrac{\frac{\pi}{3}}{4\pi} = \dfrac{1}{12}$ e, portanto, a medida do ângulo $A\hat{O}P_1$ é, em radiano, $\dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$.

Considerando o sentido horário e o anti-horário como negativo e positivo, respectivamente, temos que P_1 é extremidade do arco de $-\dfrac{\pi}{6}$ rad, P_2 é extremidade do arco de $\dfrac{\pi}{2}$ rad e P_3 é extremidade do arco de $\dfrac{7\pi}{6}$ rad.

Assim:

$z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$

$z_2 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2i$

$z_3 = 2\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i$

Logo, $\bar{z}_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2^5 = 32i$. Portanto:

$|\bar{z}_1 + z_2^5 + z_3| = |\sqrt{3} + i + 32i - \sqrt{3} - i| = 32$

Exercício 18

Sendo $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$(z - i)(\overline{z - i}) = 4 \Rightarrow (x + yi - i)(\overline{x + yi - i}) = 4$

$\therefore (x + yi - i)(x - yi + i) = 4 \Rightarrow (x)^2 - (yi - i)^2 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$

Logo, a equação representa uma circunferência de centro no ponto (0, 1) e raio 2.

Alternativa **b**.

Exercício 19

Para $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

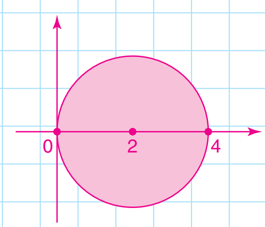
$\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{x + yi}\right) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{x + yi} \cdot \dfrac{x - yi}{x - yi}\right) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$

Essa equação representa a circunferência de centro (2, 0) e raio 2.



Exercício 20

a) $z_1 \cdot z_2 = (\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) =$
$= \cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 i^2 =$
$= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + (\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 +$
$+ \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)i = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

b) Para $z = \cos 48° + i\operatorname{sen} 48°$, temos:

$z^{10} = \cos 480° + i\operatorname{sen} 480° = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^5 = \cos 240° + i\operatorname{sen} 240° = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Logo: $z^{10} + z^5 + 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$

Assim, $z = \cos 48° + i\operatorname{sen} 48°$ é raiz da equação.

22. **(Unicamp-SP)** Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{y}{|z|}$. Essa forma de representar os números complexos não nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:

$[|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^k = |z|^k(\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta)$, que é válida para todo $k \in \mathbb{Z}$. Use essas informações para:

a) Calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$.

b) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{15}$.

23. **(Fuvest-SP)** O número complexo $z \neq 0$ e o seu inverso $\dfrac{1}{z}$ têm o mesmo módulo. Conclui-se que:

a) z e $\dfrac{1}{z}$ são conjugados.

b) $z + \dfrac{1}{z} = i$

c) Este módulo é 2.

d) z e $\dfrac{1}{z}$ são reais.

e) $z^2 = 1$

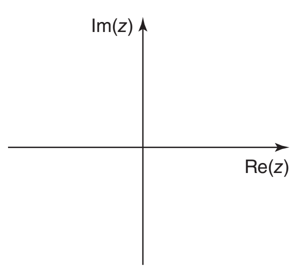
24. **(Fuvest-SP)** Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z - i}{1 + i}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lembretes: $i^2 = -1$; $w = a + bi$, com a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\mathrm{Im}(w) = b$.

25. **(Fuvest-SP)**

a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, onde i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$, e $\bar{z}$ é o conjugado de z.

b) Represente essas soluções no plano complexo, usando o sistema de coordenadas desenhado a seguir.



26. **(Fuvest-SP)** Nos itens a seguir, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2$?

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z + i}{1 + iz}$ é um número real.

27. **(Fuvest-SP)** Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Exercício 21

a) Sendo $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z + 2i}{z - 2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{x + yi - 2i}{x + yi - 2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{Re}\left(\frac{x + (y + 2)i}{(x - 2) + yi} \cdot \frac{(x - 2) - yi}{(x - 2) - yi}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + y^2 + 2y}{(x - 2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

Para $x \neq 2$ e $y \neq 0$, essa equação é equivalente a:
$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0$
Assim, a equação, juntamente com o ponto (2, 0), representa uma circunferência de centro (0, −2) e raio $2\sqrt{2}$.

b) O ponto (−2, 0) pertence à circunferência dada. Assim, a reta tangente à circunferência no ponto (−2, 0) tem coeficiente angular 1, já que o centro da circunferência é o ponto (0, −2). Logo, uma equação dessa reta é:
$y - 0 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 2$

Exercício 22

a) Escrevendo $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica, temos:

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$. Assim:

$$z^{12} = (\sqrt{3} + i)^{12} = 2^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{12\pi}{6}\right) = 4.096$$

b) Observando que $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{15}$ representa a soma dos termos da PG com 16 termos, de primeiro termo 1 e razão z, temos:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{15} = \frac{1(z^{16} - 1)}{z - 1}$$

Como $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{4}$, obtemos:

$$z^{16} = \cos\frac{16\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{16\pi}{4} = 1$$

Logo, a soma pedida é:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{15} = \frac{1(z^{16} - 1)}{z - 1} = \frac{1 - 1}{z - 1} = 0$$

Exercício 23

Lembrando que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e que $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, temos:

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z| = \frac{1}{|z|}$$

$$\therefore |z|^2 = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$$

$$\therefore z = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Assim, z e $\dfrac{1}{z}$ são conjugados.

Alternativa **a**.

Exercício 24

Sendo $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

- $|z| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2$
  $\therefore x^2 + y^2 = 4$ (I)
- $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z - i}{1 + i}\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\dfrac{x + yi - i}{1 + i}\right) = \dfrac{1}{2}$

  $\therefore \mathrm{Im}\left(\dfrac{x + (y - 1)i}{1 + i} \cdot \dfrac{1 - i}{1 - i}\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow -x + y - 1 = 1$

  $\therefore y = x + 2$ (II)

Assim, os pontos que satisfazem simultaneamente as equações (I) e (II) acima são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 2) \text{ ou } (x = -2 \text{ e } y = 0)$$

Concluímos, então, que $z = 2i$ ou $z = -2$.

Exercício 25

a) Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

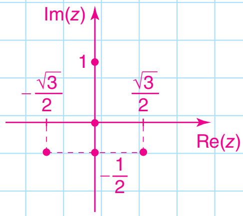
$\bar{z} = iz^2 \Rightarrow x - yi = i(x^2 - y^2 + 2xy)$

$$\therefore \begin{cases} x = -2xy \\ x^2 - y^2 = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 - y^2 = -y \end{cases}$$

$\therefore\ x = 0$ e $y = 0$ ou $x = 0$ e $y = 1$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$ e $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$ e $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \left\{0, i, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right\}$

b)



Exercício 26

a) Para $z \neq i$, temos:

$\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2 \Rightarrow 2 + 2iz = z + i$

$\therefore\ z = \dfrac{2 - i}{1 - 2i} \Rightarrow z = \dfrac{2 - i}{1 - 2i} \cdot \dfrac{1 + 2i}{1 + 2i}$

$\therefore\ z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

b) Um número complexo é real se, e somente se, sua parte imaginária é nula. Assim, sendo $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$\text{Im}\left(\dfrac{z + i}{1 + iz}\right) = 0 \Rightarrow \text{Im}\left(\dfrac{x + yi + i}{1 + i(x + yi)}\right) = 0$

$\therefore\ \text{Im}\left(\dfrac{x + (y + 1)i}{(1 - y) + xi} \cdot \dfrac{(1 - y) - xi}{(1 - y) - xi}\right) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 - y^2 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 1$

Ou seja, o conjunto pedido é formado pelos pontos da circunferência de centro na origem e raio 1, exceto o ponto (0, 1).

Exercício 27

a) Sendo $z = x + iy$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z} \Rightarrow (x + yi)^2 = \alpha(x + yi) + (\alpha - 1)(x - yi)$

$$\therefore\ x^2 - y^2 + 2xyi = 2\alpha x - x + yi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\alpha x - x & \text{(I)} \\ 2xy = y & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

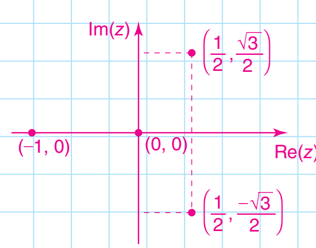
- Para $y = 0$, obtemos de (I):
  $x^2 = 2\alpha x - x \Rightarrow x^2 - (2\alpha - 1)x = 0$
- Para $x = \dfrac{1}{2}$, obtemos de (I):
  $\dfrac{1}{4} - y^2 = \alpha - \dfrac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} - \alpha$

Assim, para que essas equações do 2º grau admitam duas soluções reais distintas cada uma, devemos ter:

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 \neq 0 \\ \dfrac{3}{4} - \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \neq \alpha < \dfrac{3}{4}$$

b) Para $\alpha = 0$, temos:

$$y = 0 \text{ e } x^2 + x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2} \text{ e } y^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ x = -1 \text{ e } y = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ e } y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ e } y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Polinômios e equações polinomiais

Até o início do século XIX, os matemáticos já haviam deduzido fórmulas resolutivas para equações polinomiais do 1º ao 4º grau. Nessa época, os matemáticos Niels Henrik Abel e Évarist Galois provaram que equações polinomiais de grau superior a 4 não podem ser resolvidas por radicais e combinações dos coeficientes, isto é, não existem fórmulas resolutivas de equações polinomiais de grau igual ou superior a 5.

Polinômios

Polinômio na variável x é toda expressão $P(x)$ que pode ser representada na forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ em que $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{n, n-1, n-2, ..., 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, e a variável x pode assumir qualquer valor complexo.

- Para indicar que $P(x)$ representa a expressão $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, escrevemos: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, ou $P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$
- Cada uma das parcelas a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, $a_{n-2}x^{n-2}$, ..., a_1x e a_0 é um **termo** ou **monômio** do polinômio, sendo a_0 o **termo independente** da variável x.
- Os números complexos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1 e a_0 são os **coeficientes** do polinômio. Se todos esses coeficientes são iguais a zero, o polinômio é chamado **identicamente nulo**. Indica-se que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo por $P(x) \equiv 0$.
- O **grau** de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente da variável dentre os termos de coeficientes não nulos. Indicamos o grau de um polinômio P pelo símbolo ∂P ou pelo símbolo gr(P). Não se define grau de um polinômio identicamente nulo, pois todos os seus coeficientes são nulos.
- O coeficiente não nulo da variável de maior expoente é o **coeficiente dominante** do polinômio, ou seja, o coeficiente dominante é o do termo que determina o grau do polinômio.

Valor numérico de um polinômio

Atribuindo um valor complexo α à variável x, obtemos a expressão:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0,$$

cujo resultado é chamado de **valor numérico** do polinômio $P(x)$ para $x = \alpha$. Indicamos esse valor numérico por $P(\alpha)$.

Raiz de um polinômio

Chamamos de **raiz** do polinômio $P(x)$ todo número complexo α tal que $P(\alpha) = 0$. A raiz também é chamada de **zero** do polinômio.

Identidade de polinômios

- Dois polinômios são **idênticos** se, e somente se, têm o mesmo grau e termos semelhantes iguais ou se são identicamente nulos.
- Indicamos a identidade entre dois polinômios, $P(x)$ e $Q(x)$, por $P(x) \equiv Q(x)$.

Operações com polinômios

Adição e subtração de polinômios

- A **soma** de dois polinômios, $P(x)$ e $Q(x)$, é o polinômio obtido adicionando-se os termos de $P(x)$ com os termos semelhantes de $Q(x)$.
- Se os polinômios P e Q têm graus m e n, respectivamente, com $m \geqslant n$, e $P + Q$ é não nulo, então:

$$\text{gr}(P + Q) \leqslant m$$

- Dois polinômios são **opostos** quando a soma deles é o polinômio identicamente nulo. Assim, o oposto de $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ é o polinômio que indicamos por $-P(x)$, dado por: $-P(x) = -a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - ... - a_1x - a_0$
- A **diferença** entre os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, nessa ordem, que indicamos por $P(x) - Q(x)$, é definida como a soma de $P(x)$ com o oposto de $Q(x)$, isto é:

$$P(x) - Q(x) \equiv P(x) + [-Q(x)]$$

Multiplicação de polinômios

- O produto dos **monômios** ax^r e bx^s, de variável x e coeficientes a e b, é o monômio abx^{r+s}.
- Sendo $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios quaisquer, definimos o **produto** de $P(x)$ por $Q(x)$ como a soma dos produtos de cada monômio de $P(x)$ por todos os monômios de $Q(x)$.
- Se os polinômios P e Q têm graus m e n, respectivamente, então:

$$\text{gr}(P \cdot Q) = m + n$$

Divisão de polinômios

- Dividir o polinômio $E(x)$ pelo polinômio não nulo $D(x)$ significa obter os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$\boxed{Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)}$$

de modo que gr(R) < gr(D) ou $R(x) \equiv 0$.

- Os polinômios $E(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados, respectivamente, de **dividendo**, **divisor**, **quociente** e **resto** da divisão.
- Demonstra-se que existe um único quociente $Q(x)$ e um único resto $R(x)$ na divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

- Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão de $E(x)$ por $D(x)$ é **exata**, ou ainda, que $E(x)$ é **divisível** por $D(x)$.

- Se os polinômios E e D são tais que $\text{gr}(E) \geqslant \text{gr}(D)$ e Q é o quociente de E por D, então: $\text{gr}(Q) = \text{gr}(E) - \text{gr}(D)$

Método de Descartes

- Para dividir um polinômio $E(x)$ por um polinômio $D(x)$, com $\text{gr}(E) \geqslant \text{gr}(D)$, podemos adotar o seguinte algoritmo:

  I. determinamos o grau do quociente $Q(x)$ e o maior valor possível do grau do resto $R(x)$;

  II. escrevemos os polinômios Q e R, com os respectivos graus obtidos anteriormente, com coeficientes a determinar;

  III. obtemos os coeficientes desconhecidos dos polinômios pela identidade:

$$Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$$

- Por exemplo, vamos dividir $x^4 - 2x$ por $x^2 + 1$:

  I. o quociente dessa divisão terá grau 2 e o resto, grau 0 ou 1;

  II. assim, o quociente é da forma $Q(x) \equiv ax^2 + bx + c$ e o resto, $R(x) \equiv dx + e$;

  III. aplicando a igualdade $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, obtemos:

$$Q(x) \cdot (x^2 + 1) + R(x) \equiv x^4 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ax^2 + bx + c) \cdot (x^2 + 1) + (dx + e) \equiv x^4 - 2x$$

$$\therefore\ ax^4 + ax^2 + bx^3 + bx + cx^2 + c + dx + e \equiv x^4 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + (b + d)x + (c + e) \equiv x^4 - 2x$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = -2 \\ c + e = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1;\ b = 0;\ c = -1;\ d = -2;\ e = 1$$

Logo, $Q(x) \equiv x^2 - 1$ e $R(x) \equiv -2x + 1$.

Método da chave

- O quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ também podem ser obtidos pelo seguinte método:

  I. Dispomos $E(x)$ e $D(x)$, conforme as potências decrescentes na variável x, sob a forma:

$$E(x)\ \underline{|\ D(x)}$$

  II. Dividimos o monômio de mais alto grau de $E(x)$ pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$.

  III. Subtraímos do dividendo o produto do divisor $D(x)$ pelo quociente encontrado anteriormente, obtendo assim o primeiro resto parcial.

  IV. Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$.

  V. Subtraímos do primeiro resto parcial o produto do divisor $D(x)$ pelo quociente encontrado anteriormente, obtendo assim o segundo resto parcial.

  E assim sucessivamente, até obter o resto final $R(x)$, que deve obedecer a uma das condições:

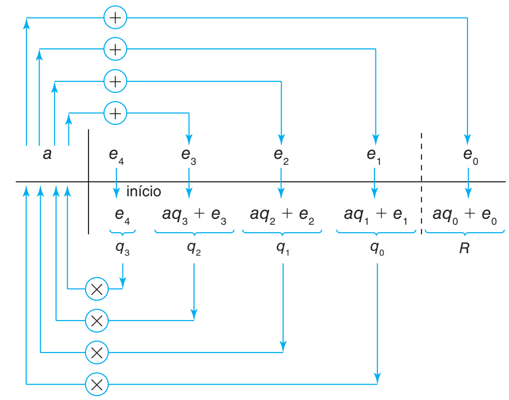
$$\text{gr}(R) < \text{gr}(D) \text{ ou } R(x) \equiv 0$$

- Por exemplo, vamos dividir $x^4 - 2x$ por $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{rl|l} \ominus & x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 0 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3} & x^4 \qquad\quad + x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \ominus & -x^2 - 2x + 0 & \\ & -x^2 \qquad - 1 & \\ \cline{2-2} & -2x + 1 & \end{array}$$

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

- Dividindo o polinômio de 4º grau $E(x) \equiv e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0$ pelo binômio $x - \alpha$, obtemos o quociente $Q(x) \equiv q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$ e o resto R, em que os números q_3, q_2, q_1, q_0 e R são obtidos pelo seguinte algoritmo:

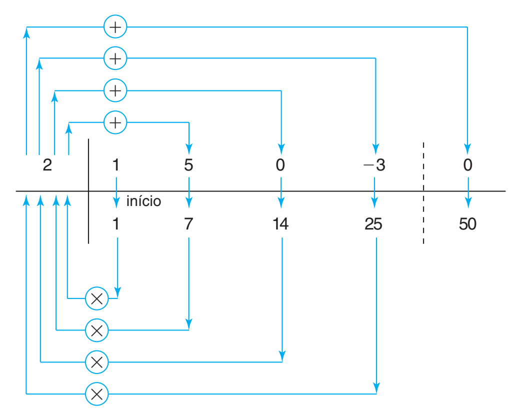


Essa técnica pode ser generalizada para a divisão de qualquer polinômio $E(x)$ de grau maior ou igual a 1 por um binômio $x - \alpha$.

- Por exemplo, vamos dividir $x^4 + 5x^3 - 3x$ por $x - 2$. Observando que $x^4 + 5x^3 - 3x$ pode ser escrito na forma $x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 3x + 0$, dispomos os coeficientes no esquema:

2	1	5	0	−3	0
	1				

Depois, efetuamos as seguintes operações:



Nesse esquema, temos:

2	1	5	0	−3	0
	1	7	14	25	50

$\underbrace{1 \quad 7 \quad 14 \quad 25}_{\text{coeficientes de } Q(x)}$ — 50: resto

Assim, obtemos o quociente $Q(x) \equiv x^3 + 7x^2 + 14x + 25$ e o resto $R(x) \equiv 50$.

Teoremas

- **Teorema do resto:** Sendo a uma constante complexa qualquer, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.
- **Teorema de D'Alembert:** Sendo a uma constante complexa qualquer, um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$.
- Sendo a e b constantes complexas distintas quaisquer, um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Equações polinomiais

Equação polinomial (ou equação algébrica) na incógnita x é toda equação que pode ser representada na forma:

$$P(x) = 0$$

em que $P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ é um polinômio de grau n, com $n \geqslant 1$.

- O grau de uma equação polinomial $P(x) = 0$ é o grau do polinômio $P(x)$.
- Em uma equação polinomial $P(x) = 0$, as raízes do polinômio $P(x)$ também são chamadas de raízes da equação polinomial.
- No universo dos números complexos, o conjunto formado por todas as raízes da equação $P(x) = 0$ é chamado de **conjunto solução** (S) ou conjunto verdade (V) da equação.

Teoremas

- **Teorema fundamental da Álgebra (TFA):** Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.
- **Teorema da decomposição:** Todo polinômio de grau n, com $n \geqslant 1$, $P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ pode ser fatorado na forma:

$$\boxed{P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n)}$$

em que $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

- **Teorema das raízes complexas:** Qualquer equação polinomial de grau n, com $n \geqslant 1$, admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.
- **Teorema das raízes imaginárias:** Se o número imaginário $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, então o conjugado de z, ou seja, $\bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.
- **Teorema das raízes racionais:** Seja o número racional representado por $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, e seja a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0$, na variável x e coeficientes inteiros. Se $\frac{p}{q}$ é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Multiplicidade de uma raiz

Seja a equação polinomial de grau n, na variável x, de raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$, dada, na forma fatorada, por:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n) = 0$$

Dizemos que uma raiz tem **multiplicidade *k*** se, e somente se, ela aparece exatamente k vezes entre os fatores do primeiro membro, com $k \geqslant 1$.

Relações de Girard

- Em toda equação polinomial de grau n:

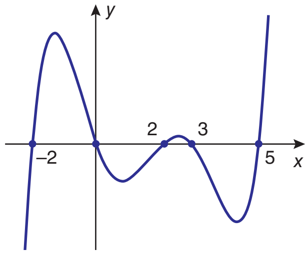
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

com $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ e raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$, temos:

  - A soma das raízes é igual a:
  $$r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
  - A soma do produto das raízes tomadas duas a duas é igual a:
  $$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + ... + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
  - A soma do produto das raízes tomadas três a três é igual a:
  $$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + ... + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
  $\vdots$
  - O produto de todas as raízes é igual a:
  $$r_1r_2r_3 \cdot ... \cdot r_n = \frac{(-1)^na_0}{a_n}$$

No Vestibular

1. (Unifesp) Se a figura representa o gráfico de um polinômio real, $p(x)$, podemos afirmar que:



a) $p(x)$ tem uma raiz real a, tal que $3 < a < 5$.
b) $p(x)$ é divisível por $x - 1$.
c) $p(x)$ tem apenas 4 raízes reais.
d) $p(x)$ não tem raiz real.
e) o grau de $p(x)$ é maior ou igual a 5.

2. (Unir-RO) O polinômio $p(x) = x^4 - 1$ pode ser fatorado como o produto $p(x) = (x - 1) \cdot q(x)$. Sobre $q(x)$, pode-se afirmar que possui:

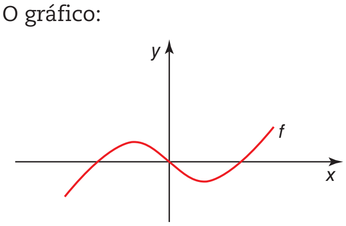
a) quatro raízes imaginárias.
b) três raízes reais.
c) três raízes imaginárias.
d) uma raiz imaginária e duas raízes reais.
e) duas raízes imaginárias e uma real.

3. (Vunesp) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de A é um polinômio $P(x)$.

a) Verifique se 2 é uma raiz de $P(x)$.
b) Determine todas as raízes de $P(x)$.

4. (Fuvest-SP) O gráfico:



pode representar a função $f(x) =$

a) $x(x - 1)$
b) $x^2(x^2 - 1)$
c) $x^3(x - 1)$
d) $x(x^2 - 1)$
e) $x^2(x - 1)$

5. (Unicamp-SP) Seja

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n tal que $a_n \neq 0$ e $a_j \in \mathbb{R}$ para qualquer j de 0 a n. Seja $g(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$ o polinômio de grau $n - 1$ em que os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ são os mesmos empregados na definição de $f(x)$.

a) Supondo $n = 2$, mostre que $g\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, para todo $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.
b) Supondo $n = 3$ e que $a_3 = 1$, determine a expressão do polinômio $f(x)$, sabendo que $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$.

Exercício 1

Pela análise do gráfico, concluímos que $p(x)$ tem, pelo menos, 5 raízes reais, a saber: $-2, 0, 2, 3$ e 5.
Assim, o grau de $p(x)$ é maior ou igual a 5.
Alternativa **e.**

Exercício 2

$p(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) =$
$= (x - 1)[(x + 1)(x^2 + 1)]$
Logo: $q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$
Esse polinômio apresenta uma raiz real e duas raízes imaginárias: 1, i e $-$i.
Alternativa **e.**

Exercício 3

a) $\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Assim, sendo $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ temos:
$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$
Logo, 2 é raiz.

b) Fatorando o polinômio $P(x)$, obtemos:
$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2)$
$\therefore P(x) = (x - 2)(x^2 - 1)$
As raízes de $P(x)$ são dadas por:
$P(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$
$\therefore x - 2 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$
$\therefore x = 2$ ou $x = 1$ ou $x = -1$
Logo, as raízes de $P(x)$ são 2, 1 e -1.

Exercício 4

Pela análise do gráfico, percebemos que f possui 3 raízes reais distintas: uma negativa, uma nula e outra positiva.
Assim, o gráfico pode representar a função da alternativa d, cujas raízes são 0, 1 e -1.
Alternativa **d.**

Exercício 5

a) Para $n = 2$, temos:
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 2a_2x + a_1$
Assim:

I. $g\left(x + \frac{h}{2}\right) = 2a_2x + a_2h + a_1$

II. $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \frac{a_2(x + h)^2 + a_1(x + h) + a_0 - a_2x^2 - a_1x - a_0}{h} =$

$= \frac{a_2x^2 + 2a_2xh + a_2h^2 + a_1x + a_1h + a_0 - a_2x^2 - a_1x - a_0}{h} =$

$= \frac{h(2a_2x + a_2h + a_1)}{h} = 2a_2x + a_2h + a_1$

Logo: $g\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

b) Para $n = 3$ e $a_3 = 1$, temos:
$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$
Assim, como $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$, temos:

$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = -1 \\ 2a_2 + a_1 = -3 \\ a_2 - a_1 + a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = -1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

Logo: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

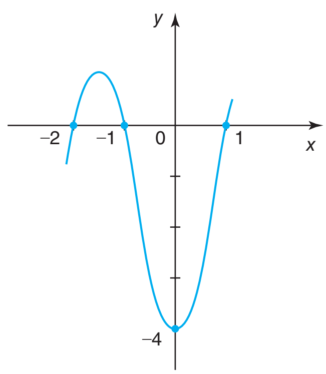
6. **(Fuvest-SP)** Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é:

a) 2
b) 1
c) 0
d) -1
e) -2

7. **(Fuvest-SP)** Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é:

a) -5
b) -3
c) 0
d) 3
e) 5

8. **(UFPel-RS)** O polinômio $p(x)$ está representado no gráfico abaixo e o polinômio $q(x)$ é dado pela expressão $q(x) = x + 5$.



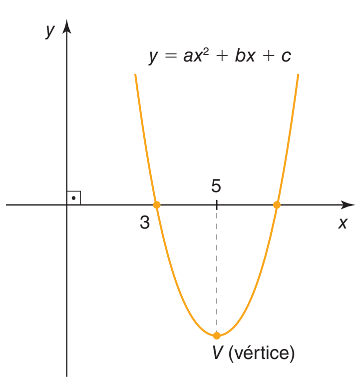
Com base nos textos, é correto afirmar que o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$ é:

a) -136
b) -197
c) -144
d) -72
e) -100
f) I.R.

9. **(Unifor-CE)** Na divisão de um polinômio f por $x^2 - 2$ obtêm-se quociente $kx + t$ e resto $2x + 1$. Se f é divisível por $x^2 - 1$, então um outro divisor de f é o polinômio:

a) $2x^2 - x - 1$
b) $2x^2 + x - 1$
c) $2x^2 - 3x - 1$
d) $2x - 3$
e) $2x - 1$

10. **(Unifesp)** Dividindo-se os polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por $x - 2$, obtêm-se, respectivamente, r_1 e r_2 como restos. Sabendo-se que r_1 e r_2 são os zeros da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, conforme gráfico,



o resto da divisão do polinômio produto $p_1(x) \cdot p_2(x)$ por $x - 2$ é:

a) 3
b) 5
c) 8
d) 15
e) 21

11. **(Fuvest-SP)** Sejam R_1 e R_2 os restos das divisões de um polinômio $p(x)$ por $x - 1$ e por $x + 1$, respectivamente. Nessas condições, se $R(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x^2 - 1)$, então $R(0)$ é igual a:

a) $R_1 - R_2$

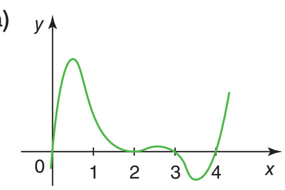
b) $\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$

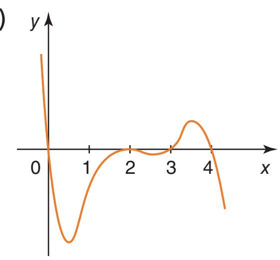
c) $R_1 + R_2$

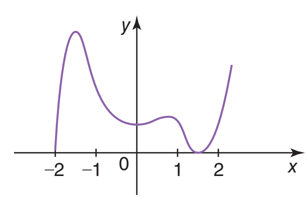
d) R_1R_2

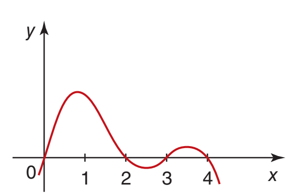
e) $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$

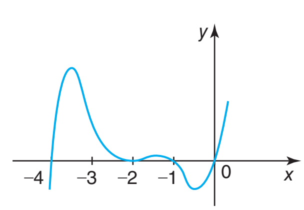
12. **(Fuvest-SP)** Dado o polinômio $P(x) = x^2(x - 1)(x^2 - 4)$, o gráfico da função $y = P(x - 2)$ é melhor representado por:

a)


b)


c)


d)


e)


Exercício 6

$p(x) = (2x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 1) + (-x + 2) \Rightarrow p(1) = 1$
Alternativa **b**.

Exercício 7

Pelo algoritmo da divisão: $p(x) = q(x) \cdot (x - 1) + 10$
Como $p(x)$ é divisível por $x - 3$, temos $p(3) = 0$; então:
$p(3) = q(3) \cdot (3 - 1) + 10 \Rightarrow q(3) = -5$
Alternativa **a**.

Exercício 8

O gráfico mostra que $p(x)$ tem como raízes:
-2, -1 e 1. Assim, o menor grau possível de $p(x)$ é 3.
Supondo que $p(x)$ seja do 3º grau, temos pelo teorema da decomposição:
$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Rightarrow p(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 1)$
$\therefore -4 = a(0 + 2)(0 + 1)(0 - 1) \Rightarrow a = 2$
Logo: $p(x) = 2(x + 2)(x + 1)(x - 1)$
Assim, pelo teorema do resto, concluímos:
$p(5) = 2(-5 + 2)(-5 + 1)(-5 - 1) = -144$
Alternativa **c**.

Exercício 9

Pelo algoritmo da divisão, temos:
$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2) \cdot (kx + t) + (2x + 1)$
Por outro lado, como f é divisível por $x^2 - 1$, f é divisível por $x + 1$ e $x - 1$. Assim, pelo teorema do resto, obtemos:
$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1^2 - 2) \cdot (k \cdot 1 + t) + (2 \cdot 1 + 1) = 0 \\ ((-1)^2 - 2) \cdot (k \cdot (-1) + t) + (2 \cdot (-1) + 1) = 0 \end{cases}$$
$\therefore k = 2$ e $t = 1$
Logo:
$f(x) = (x^2 - 2) \cdot (2x + 1) + 2x + 1 = (2x + 1) \cdot (x^2 - 1)$
$\therefore f(x) = (2x + 1)(x - 1)(x + 1)$
Assim, outro fator de f é $(2x + 1)(x - 1) = 2x^2 - x - 1$
Alternativa **a**.

Exercício 10

Pelo teorema do resto, $p_1(2) = r_1$ e $p_2(2) = r_2$.
Pelo gráfico, obtemos $r_1 = 3$ e, como a abscissa do vértice da parábola é 5, concluímos que $r_2 = 7$.
Assim, o resto da divisão de $p_1(x) \cdot p_2(x)$ por $x - 2$ é:
$p_1(2) \cdot p_2(2) = r_1 \cdot r_2 = 3 \cdot 7 = 21$
Alternativa **e**.

Exercício 11

Pelo teorema do resto, se $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$, então $p(\alpha) = 0$. Logo, $p(1) = R_1$ e $p(-1) = R_2$ (I). Além disso, pelo algoritmo da divisão:
$$\begin{array}{l|l} p(x) & (x - 1)(x + 1) \\ \hline R(x) & q(x) \end{array}$$
$\therefore p(x) = (x + 1)(x - 1) \cdot q(x) + R(x)$ (II)
Como o grau do divisor é 2, o mais alto grau possível para o resto é 1, ou seja, $R(x)$ é do tipo $ax + b$. Assim, de (I) e (II), temos:
$$\begin{cases} p(1) = R_1 \\ p(-1) = R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = a + b \\ R_2 = -a + b \end{cases}$$
$\therefore b = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ e $a = \dfrac{R_1 - R_2}{2}$
Então, $R(x) = \left(\dfrac{R_1 - R_2}{2}\right)x + \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ e $R(0) = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$.
Alternativa **e**.

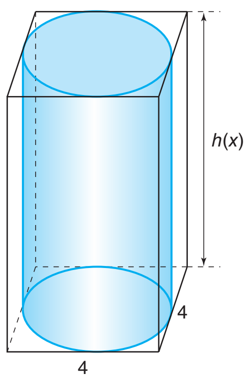
Exercício 12

Determinemos as raízes de $P(x)$:
$P(x) = 0 \Rightarrow x^2(x - 1)(x^2 - 4) = 0$
$\therefore x = 0$ (raiz dupla) ou $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$
Como o gráfico de $h(x) = P(x - 2)$ é obtido deslocando o gráfico de $P(x)$ duas unidades para a direita, concluímos que as raízes de $h(x)$ são:
$x = 2$ (raiz dupla) ou $x = 3$ ou $x = 0$ ou $x = 4$
Além disso:
$P(3) > 0 \Rightarrow h(1) > 0$
$P(7) > 0 \Rightarrow h(5) > 0$
Alternativa **a**.

13. **(Unifesp)** Sejam p, q, r as raízes distintas da equação $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 9

14. **(UFSCar-SP)** A figura mostra um prisma retangular reto de base quadrada com um cilindro circular reto inscrito no prisma. O lado da base do prisma mede 4 dm e a altura é dada por $h(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ dm, com $x > 0$.



a) Calcule o volume do prisma para $x = 3$ dm.
b) Para $x = 1$ dm o volume do cilindro inscrito é 16π dm³. Encontre os outros valores de x para os quais isto acontece.

15. **(Unicamp-SP)** Para resolver equações do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, podemos proceder do seguinte modo: como $x = 0$ não é uma raiz, divide-se a equação por x^2 e, após fazer a mudança de variáveis $u = x + \frac{1}{x}$, resolve-se a equação obtida (na variável u). Observe que, se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $u \geq 2$.

a) Ache as 4 raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
b) Encontre os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real positiva.

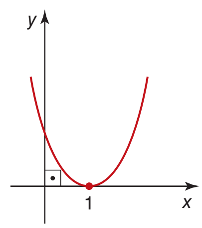
16. **(UFPel-RS)** Encontre um polinômio $p(x)$ de menor grau – indicando-o na forma de produto –, com coeficientes reais tais que 4 seja uma raiz de multiplicidade 3; -2 seja raiz de multiplicidade 2 e que esse polinômio tenha ainda $5 + 2i$ e 0 (zero) como raízes.

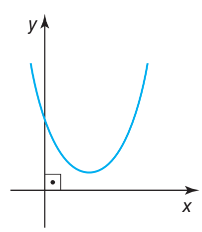
17. **(UFPel-RS)** O estudo e o desenvolvimento dos métodos de resolução de equações de graus superiores a 2 tiveram grande impulso nos séculos XV e XVI, com grupos matemáticos italianos. O primeiro a encontrar um método para determinar a resolução de equações do 3º grau foi Scipione Del Ferro. Outro matemático italiano, conhecido como Tartaglia, também desenvolveu um método de resolução para equação do 3º grau. As fórmulas de Tartaglia são as mais célebres da Álgebra, sendo conhecidas como fórmulas de Cardano.

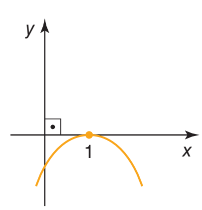
Considerando o polinômio do 3º grau $t^3 - 4t^2 + t + 6$, é correto afirmar que a soma dos módulos das raízes desse polinômio é:

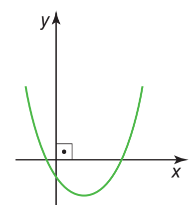
a) 4
b) 5
c) 6
d) 3
e) 1
f) I.R.

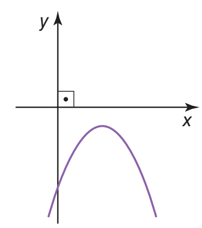
18. **(Unifesp)** Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, sabendo que a, b e c são números reais e que o número 1 e o número complexo $1 + 2i$ são raízes de $p(x)$, isto é, que $p(1) = p(1 + 2i) = 0$. Nestas condições, existe um polinômio $q(x)$ para o qual $p(x) = (1 - x) \cdot q(x)$. Uma possível configuração para o gráfico de $y = q(x)$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


19. **(Unicamp-SP)** Dada a equação polinomial com coeficientes reais $x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$.

a) Encontre o valor numérico de a de modo que o número complexo $2 + i$ seja uma das raízes da referida equação.
b) Para o valor de a encontrado no item anterior, determine as outras duas raízes da mesma equação.

20. **(Udesc)** Dividindo o polinômio $p(x)$ por $d(x) = x^2 + 1$, encontram-se o quociente $q(x) = x + 3$ e o resto $r(x) = -7x - 11$. Então, a soma de todas as soluções da equação $p(x) = 0$ é igual a:

a) -3
b) -1
c) 8
d) 16
e) 4

Exercício 13

Fatorando o primeiro membro da equação, obtemos:
$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) + (x - 2) = 0$
$\therefore (x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$
Logo, as raízes da equação são: 2, i e $-$i
Portanto: $2^2 + i^2 + (-i)^2 = 2$
Alternativa **b**.

Exercício 14

a) Para $x = 3$ dm, temos:
$h(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6$
Logo, o volume V é:
$V = 4 \cdot 4 \cdot 6 \text{ dm}^3 = 96 \text{ dm}^3$

b) O raio da base do cilindro inscrito no prisma regular de base quadrada é: $r = \dfrac{4}{2} = 2$
Logo: $\pi \cdot 2^2 \cdot h(1) = 16\pi \Rightarrow h(1) = 4$
Portanto:
$x^3 - 5x^2 + 8x = 4 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$
Como 1 é raiz dessa equação, temos que $h(x)$ é divisível por $x - 1$ e, portanto:
$h(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) =$
$= (x - 1)(x - 2)^2$
Logo, para que o volume do cilindro seja $16\pi \text{ dm}^3$ devemos ter: $x = 1$ ou $x = 2$

Exercício 15

a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 3x + 4 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$
$\therefore x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 4 = 0$
Sendo $u = x + \dfrac{1}{x}$, temos: $u^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
Efetuando a mudança de variável:
$u^2 - 2 - 3u + 4 = 0 \Rightarrow u^2 + 3u + 2 = 0$
$\therefore u = 1$ ou $u = 2$
Logo: $x + \dfrac{1}{x} = 1$ ou $x + \dfrac{1}{x} = 2$
$\therefore x = 1$ (raiz dupla) ou $x = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

b) $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = u \\ u^2 - 3u + (b - 2) = 0 \end{cases}$
Sendo $u = x + \dfrac{1}{x}$, temos: $u^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
Fazendo a mudança de variável:
$u^2 - 3u + (b - 2) = 0$
$\therefore u = \dfrac{3 - \sqrt{17 - 4b}}{2}$ ou $u = \dfrac{3 + \sqrt{17 - 4b}}{2}$, com $b \leqslant \dfrac{17}{4}$
Do enunciado, para que a equação tenha pelo menos uma raiz real positiva, devemos ter $u \geqslant 2$; logo:
$\dfrac{3 + \sqrt{17 - 4b}}{2} \geqslant 2 \Rightarrow b \leqslant 4$
Como $\dfrac{3 - \sqrt{17 - 4b}}{2} \leqslant \dfrac{3}{2}$, concluímos que $b \leqslant 4$.

Exercício 16

Como $p(x)$ tem coeficientes reais, pelo teorema das raízes imaginárias, se 5 + 2i é raiz, então 5 $-$ 2i também é.
Como 4 é raiz tripla, -2 é raiz dupla e zero também é raiz, temos que o polinômio de menor grau possível é dado por:
$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = a(x - 4)^3(x + 2)^2(x - 5 - 2i)(x - 5 + 2i)(x - 0)$
Fazendo $a = 1$, temos:
$p(x) = 1(x - 4)^3(x + 2)^2(x - 5 - 2i)(x - 5 + 2i)x \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = (x - 4)^3(x + 2)^2(x^2 - 10x + 29)x$

Exercício 17

O conjunto de divisores do termo independente é $D_6 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ e o conjunto dos divisores do coeficiente dominante é $D_1 = \{\pm1\}$. Assim, as possíveis raízes racionais pertencem ao conjunto $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.
Testando, por Briot-Ruffini, essas candidatas a raízes racionais da equação, obtemos -1, 2 e -3 como raízes.
Como a equação é do 3º grau, concluímos que essas são as únicas raízes. Assim:
$|-1| + |2| + |-3| = 6$
Alternativa **c**.

Exercício 18

Como os coeficientes de $p(x)$ são números reais, pelo teorema das raízes imaginárias, se 1 + 2i é raiz, então 1 $-$ 2i também é. Assim, temos:
$p(x) = (x - 1) \cdot (x - 1 - 2i) \cdot (x - 1 + 2i) =$
$= (1 - x) \cdot (-x^2 + 2x - 5)$
Ou seja: $q(x) = -x^2 + 2x - 5$
Alternativa **e**.

Exercício 19

a) Como a equação tem apenas coeficientes reais, pelo teorema das raízes imaginárias, se 2 + i é raiz, então 2 $-$ i também é.
Assim, pelas relações de Girard, temos:
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{-5}{1} \Rightarrow x_1 + 2 + i + 2 - i = 5$
$\therefore x_1 = 1$
Como 1 é raiz, a soma dos coeficientes da equação é zero, ou seja:
$1 - 5 + 9 - a = 0 \Rightarrow a = 5$

b) As raízes são: 1, 2 + i e 2 $-$ i

Exercício 20

Pelo algoritmo da divisão, temos:
$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = (x^2 + 1) \cdot (x + 3) - (7x + 11)$
$\therefore p(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$
Assim, pelas relações de Girard, a soma das raízes da equação $p(x) = 0$ é: $-\dfrac{3}{1} = -3$
Alternativa **a**.

21. **(Fuvest-SP)** $P(x)$ é um polinômio cujas raízes formam uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. O coeficiente do termo de mais alto grau de $P(x)$ é 1 e o termo independente é 2^{21}. O grau do polinômio é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

22. **(UFBA)** Considerando o polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, mostre que $z_1 = i$ é uma raiz de $p(x)$, que, juntamente com as demais raízes z_2, z_3 e z_4, satisfaz a equação $z_1^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2 = -10$.

23. **(Fuvest-SP)** As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine:

a) O valor de m;
b) As raízes desse polinômio.

24. **(Fuvest-SP)** O produto de duas das raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determinar:

a) o valor de m.
b) as raízes de P.

25. **(Unifor-CE)** Os valores de a, b e c que satisfazem a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ são raízes do polinômio $f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x + k$, em que k é um número real.

Nessas condições, é correto afirmar que:

a) duas das raízes de f são negativas.
b) o produto das raízes de f é -15.
c) a menor das raízes de f é -5.
d) -3 é raiz de f.
e) $k = 15$.

26. **(Fuvest-SP)** Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então, o valor de k é:

a) -8
b) -4
c) 0
d) 4
e) 8

27. **(Fuvest-SP)** Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, onde a é um número real diferente de zero. Determine os valores de a para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

Exercício 21

Seja $P(x) = 1x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + 2^{21}$ o polinômio de grau n nas condições dadas, com as raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$. Como as raízes formam uma PG de razão $q = 2$ e primeiro termo $a_1 = 2$, temos:
$r_1 = 2, r_2 = 2^2, r_3 = 2^3, ..., r_n = 2^n$
Portanto, o produto das raízes é positivo. Assim, pelas relações de Girard:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_n = \frac{2^{21}}{1} \Rightarrow 2^{1+2+3+...+n} = 2^{21}$$

O expoente do primeiro membro dessa equação representa uma soma de PA finita igual a 21. Assim:

$$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = S \Leftrightarrow \frac{(1 + n) \cdot n}{2} = 21$$

$\therefore n = 6$
Alternativa **c**.

Exercício 22

Como a equação apresenta coeficientes reais, pelo teorema das raízes imaginárias, se i é raiz, então $-i$ também é.
Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

i	1	-2	4	-2	3
	1	$-2 + i$	$3 - 2i$	$3i$	0

Assim, como o resto da divisão é zero, i é raiz.
Pelas relações de Girard, o produto das raízes da equação é:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow i \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 3$$

$$\therefore z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \frac{3}{i} \Rightarrow (z_2 \cdot z_3 \cdot z_4)^2 = -9$$

Logo: $z_1^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2 = i^2 + (-9) = -10$

Exercício 23

a) Sejam $x - r$, x e $x + r$ as raízes em PA do polinômio. Assim, pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{-3}{1}\right) \Rightarrow x - r + x + x + r = 3$$

$\therefore x = 1$
Como 1 é raiz, a soma dos coeficientes de $p(x)$ é zero, ou seja: $1 - 3 + m = 0 \Rightarrow m = 2$

b) Pelas relações de Girard, temos:
$(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = -2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$
Logo, as raízes são: $1 - \sqrt{3}$, 1 e $1 + \sqrt{3}$

Exercício 24

a) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.
Como $x_2 \cdot x_3 = -1$, temos, pelas relações de Girard:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_1 \cdot (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2}$$

Assim:

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0$$

$$\therefore m = 7$$

b) Como $x_1 = \frac{3}{2}$ é uma raiz de $P(x)$, aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini temos:

$\frac{3}{2}$	2	−7	4	3
	2	−4	−2	0

Logo, $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 4x - 2)$ e, portanto, suas raízes são dadas por:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 4x - 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2}$$

ou $x = 1 + \sqrt{2}$

Exercício 25

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b - c = -3 \\ a - b + c = 1 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = -1$, $b = 1$ e $c = 3$
Como 1 é raiz, a soma dos coeficientes de f é zero, ou seja:
$1 + (-8) + 14 + 8 + k = 0 \Rightarrow k = -15$
Pelas relações de Girard, sendo x_4 a outra raiz de f, temos:
$-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot x_4 = -15 \Rightarrow x_4 = 5$
Alternativa **b**.

Exercício 26

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação, com $x_1 \cdot x_2 = 1$, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{+k}{2} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} \\ 1 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{+k}{2} \\ 1 \cdot x_3 = -2 \end{cases}$$

Assim, $x_3 = -2$, ou seja, -2 é raiz da equação e, portanto: $2(-2)^3 - (-2)^2 + k(-2) + 4 = 0 \Rightarrow k = -8$
Alternativa **a**.

Exercício 27

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, devemos ter:

$$x_1 \leqslant 3 \leqslant x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3 \leqslant 0 \\ 3 - x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

$\therefore (x_1 - 3)(3 - x_2) \geqslant 0$
$\therefore 3(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 9 \geqslant 0$ (I)
Assim, pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a - 1}{a} \\ x_1x_2 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Substituindo esses valores em (I), obtemos:

$$3\left(\frac{a - 1}{a}\right) - \frac{1}{a} - 9 \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leqslant a < 0$$

Limite e derivada

Quando um estudo exige a taxa instantânea de variação de uma grandeza, como temperatura, velocidade, juros etc., o conceito de derivada está presente. A ideia central do Cálculo diferencial é a de taxa pontual de variação de uma função. Essa taxa, chamada de derivada, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico dessa função, no ponto considerado.

Limite

Vizinhanças em $\mathbb{R}$

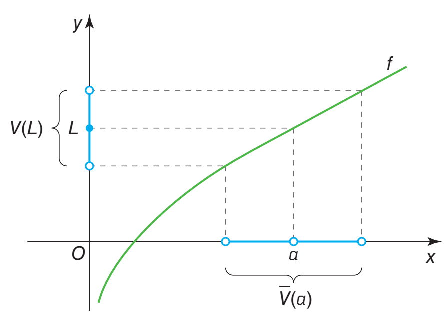
- No conjunto dos números reais, chama-se **vizinhança completa** de um número real a, indicada por $V(a)$, qualquer intervalo $]p, q[$ tal que $a \in]p, q[$.

- No conjunto dos números reais, seja $V(a)$ uma vizinhança completa qualquer de um número real a. Chama-se **vizinhança reduzida** de a, que indicamos por $\overline{V}(a)$, o conjunto $V(a) - \{a\}$.

Definição de limite

Seja f uma função real de variável real e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que exista pelo menos uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f.

O **limite** dos valores $f(x)$, para x tendendo ao número a, é igual a L se, e somente se, para qualquer vizinhança completa de L, $V(L)$, existe alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que **todo** elemento x de $\overline{V}(a)$ possui imagem $f(x)$ em $V(L)$.



Indicamos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a a, é igual a L por:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Limites laterais

Uma condição necessária e suficiente para a existência do limite L de uma função $f(x)$, para x tendendo a um número real a, é que existam e sejam iguais a L os **limites laterais** de $f(x)$, à esquerda e à direita de a, isto é:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

Propriedades dos limites

- Se k, a, L_1 e L_2 são constantes reais e as funções f e g são tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, valem as seguintes propriedades:

I. $\lim\limits_{x \to a} k = k$

II. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

III. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$

IV. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

V. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$

- Se $a \in \mathbb{R}$ e f e g são funções reais de variável real tal que existem $f \circ g$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(g(x))$, então:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

Limite trigonométrico fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Função contínua

Seja f uma função real de variável real tal que existe uma vizinhança completa de um número real a contida no domínio de f. A função f é **contínua** em a se, e somente se:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Teorema do confronto

Sejam:

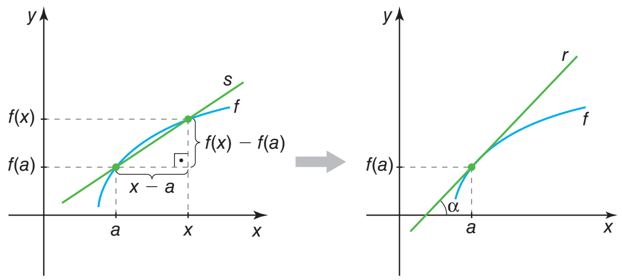
- f, g e h funções reais de variável real;
- um número real a tal que exista uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, contida no domínio de cada uma dessas funções, e existam $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ e, para qualquer x pertencente a $\overline{V}(a)$, temos $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Derivada

Seja f uma função real de variável real e seja a um número real tal que existe uma vizinhança completa de a contida no domínio de f. O limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, se existe, é chamado de **derivada** da função f no ponto de abscissa a. Indicamos essa derivada por $f'(a)$, isto é:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



As retas que passam por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ tendem à reta tangente r quando x tende a a.

Derivadas laterais

Seja f uma função real de variável real e seja $[a, b]$, com $a < b$, um intervalo fechado contido no domínio de f.

- A derivada de f para x tendendo a a pela direita, que se indica por $f'_+(a)$, é:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se, e somente se, esse limite existe e é finito.

- A derivada de f para x tendendo a b pela esquerda, que se indica por $f'_-(b)$, é:

$$f'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

se, e somente se, esse limite existe e é finito.

Função derivada

Seja a função $f: A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, e seja E o subconjunto de A cujos elementos são todos os valores de x tal que existe $f'(x)$. Chama-se **função derivada de f** a função $f': E \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Derivadas fundamentais

- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, sendo k uma constante real.
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, sendo n um número real não nulo.
- $f(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\, x$

Regras de derivação

- Sejam u e v funções deriváveis em um intervalo aberto I. Para todo x, com $x \in I$, temos:
  - $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
  - $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$
  - $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
  - $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$, sendo $v(x) \neq 0$
- **Regra da cadeia**: Sejam $g: A \to B$ e $f: B \to C$ funções reais de variável real tais que $g(x) = u$, $f(u) = y$, g é derivável no ponto de abscissa x e f é derivável no ponto de abscissa u. Nessas condições, a derivada da função composta é:

$$(fog)'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$

- Se f é contínua em um intervalo aberto I, com $y = f(x)$, para $x \in I$, $g(y) \neq 0$ e g derivável em y, a **derivada da função inversa** é:

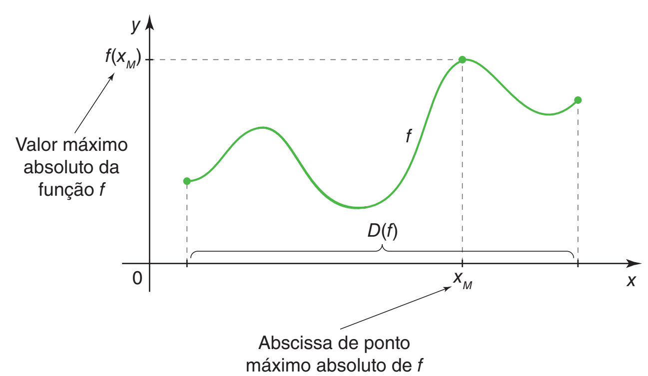
$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Valor máximo relativo e valor mínimo relativo

Seja f uma função real de variável real e sejam x_M e x_m números do domínio de f. Dizemos que:

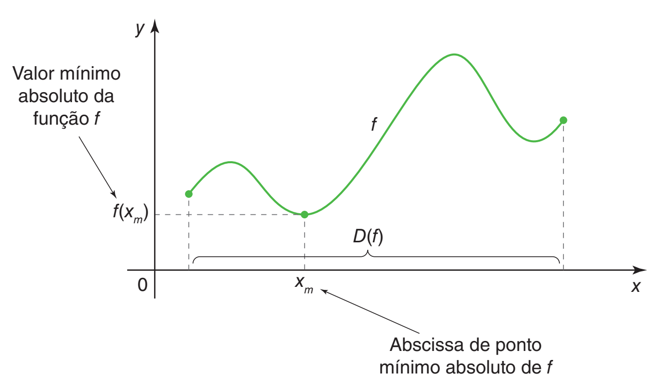
- $f(x_M)$ é **valor máximo absoluto** da função f se, e somente se:

$$f(x_M) \geqslant f(x), \forall\, x, \text{ com } x \in D(f)$$



- $f(x_m)$ é **valor mínimo absoluto** da função f se, e somente se:

$$f(x_m) \leqslant f(x), \forall\, x, \text{ com } x \in D(f)$$

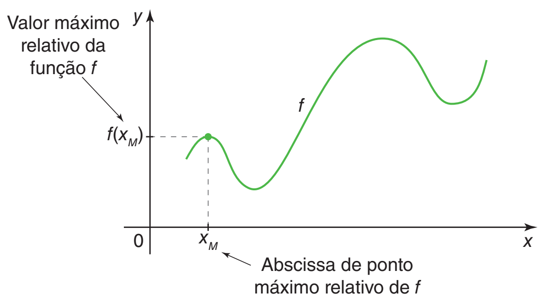


Valor máximo relativo e valor mínimo relativo

Seja f uma função real de variável real e sejam x_M e x_m números do domínio de f. Dizemos que:

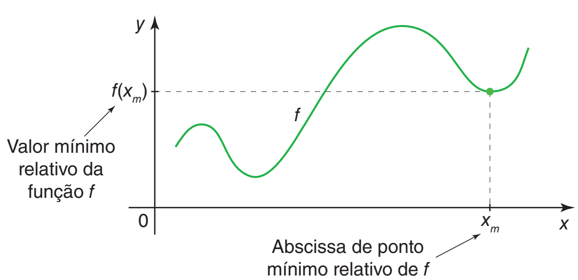
- O número $f(x_M)$ é chamado de **valor máximo relativo** (ou valor máximo local) da função f se, e somente se, existe uma vizinhança completa $V(x_M)$ tal que:

$$f(x_M) \geqslant f(x), \forall\ x, \text{ com } x \in V(x_M) \cap D(f)$$



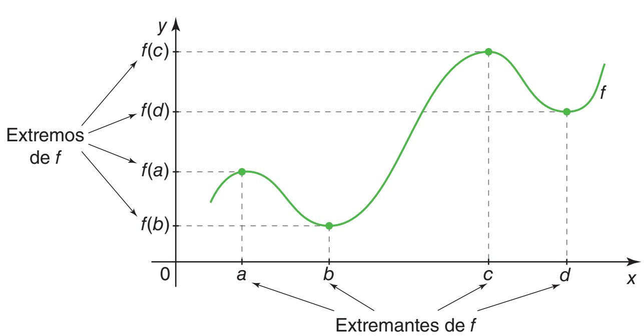
- O número $f(x_m)$ é chamado de **valor mínimo relativo** (ou valor mínimo local) da função f se, e somente se, existe uma vizinhança completa $V(x_m)$ tal que:

$$f(x_m) \leqslant f(x), \forall\ x, \text{ com } x \in V(x_m) \cap D(f)$$



Extremo e extremante

Se a é a abscissa de um ponto máximo ou mínimo (local ou absoluto) de uma função f, então os números a e $f(a)$ são chamados de **extremante** e **extremo** da função f, respectivamente.



Função crescente e função decrescente

Sendo f uma função real de variável real, derivável em $]a, b[$, temos:

- Se $f'(x) > 0$ para todo x pertencente a $]a, b[$, então f é **crescente** em $]a, b[$;
- Se $f'(x) < 0$ para todo x pertencente a $]a, b[$, então f é **decrescente** em $]a, b[$.

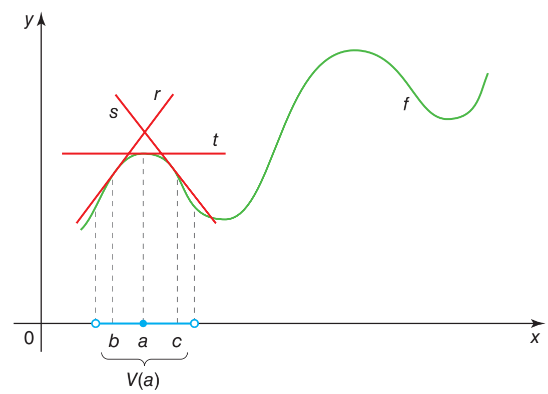
Teste da primeira derivada

Seja f uma função real de variável real, derivável em uma vizinhança completa $V(a)$ de um número a.

- Se $f'(a) = 0$ e

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \text{ para todo } x, \text{ com } x \in V(a) \text{ e } x < a \\ f'(x) < 0, \text{ para todo } x, \text{ com } x \in V(a) \text{ e } x > a \end{cases},$$

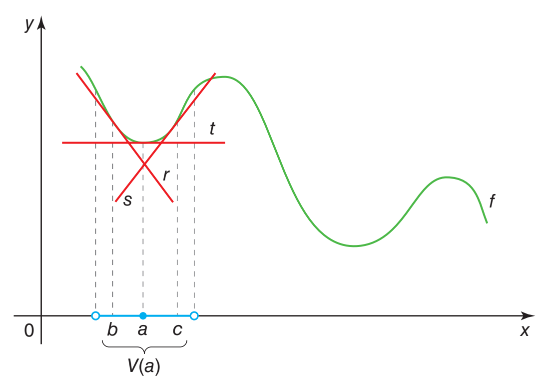
então o número a é abscissa de um ponto máximo relativo de f, e $f(a)$ é valor máximo relativo de f.



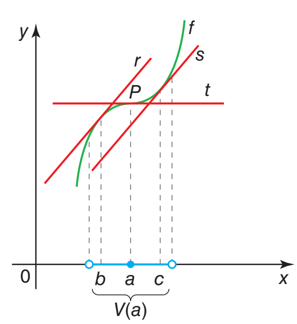
- Se $f'(a) = 0$ e

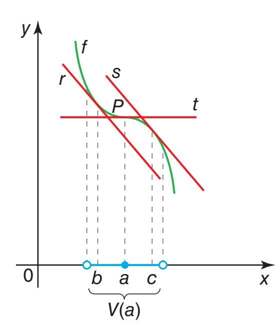
$$\begin{cases} f'(x) < 0, \text{ para todo } x, \text{ com } x \in V(a) \text{ e } x < a \\ f'(x) > 0, \text{ para todo } x, \text{ com } x \in V(a) \text{ e } x > a \end{cases},$$

então o número a é abscissa de um ponto mínimo relativo de f, e $f(a)$ é valor mínimo relativo de f.



- Se $f'(a) = 0$ e para alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, $f'(x)$ não mudar de sinal, $\forall x$ com $x \in \overline{V}(a)$, então o ponto $P(a, f(a))$ é chamado **ponto de inflexão horizontal** de f.





No Vestibular

1. **(UEL-PR)** O valor do limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x + \frac{1}{2}}$ é:

a) $-\dfrac{5}{2}$

b) $-\dfrac{3}{2}$

c) 1

d) $-\dfrac{2}{3}$

e) $-\dfrac{2}{5}$

2. **(Cesgranrio-RJ)** A tangente à curva $y = x^3$ no ponto (1, 1) tem coeficiente angular igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3. **(UEL-PR)** A derivada da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x^5 + 4x^3 + 3x - 6$, no ponto de abscissa $x_0 = -1$, é igual a:

a) 25
b) 19
c) 9
d) 5
e) 3

4. **(PUC-MG)** O valor da derivada da função $f(x) = \sqrt{7 - x}$, no ponto $(-2, 3)$, é:

a) $-\dfrac{1}{2}$

b) $-\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{1}{6}$

d) 2

e) 3

5. **(UEL-PR)** A equação horária de um móvel é $y = \dfrac{t^3}{3} + 2t$, sendo y sua altura em relação ao solo, medida em metros, e t o número de segundos transcorridos após sua partida. Sabe-se que a velocidade do móvel no instante $t = 3$ s é dada por $y'(3)$, ou seja, a derivada calculada em 3. Essa velocidade é igual a:

a) 6 m/s
b) 11 m/s
c) 15 m/s
d) 27 m/s
e) 29 m/s

Exercício 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2 - 3}{2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}$$

Alternativa **e.**

Exercício 2

Como a função $y = x^3$ é derivável no ponto (1, 1) e $y' = 3x^2$, temos que o coeficiente angular da reta tangente no ponto (1, 1) é:

$y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3$

Alternativa **c.**

Exercício 3

Como a função $f(x) = -2x^5 + 4x^3 + 3x - 6$ é derivável no ponto de abscissa $x_0 = -1$ e $f'(x) = -10x^4 + 12x^2 + 3$, temos:

$f'(-1) = -10(-1)^4 + 12(-1)^2 + 3 = 5$

Alternativa **d.**

Exercício 4

Sejam $u(x) = 7 - x$ e $f(u) = \sqrt{u}$. Como $u(x)$ é derivável no ponto de abscissa -2 e $f(u)$ é derivável no ponto de abscissa 3, temos, pela regra da cadeia:

$$(fog)'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{7 - x}}$$

Portanto: $(fog)'(-2) = -\dfrac{1}{2\sqrt{7 - (-2)}} = -\dfrac{1}{6}$

Alternativa **b.**

Exercício 5

Como $y = \dfrac{t^3}{3} + 2t$ é derivável no ponto de abscissa 3 e

$y' = \dfrac{3t^2}{3} + 2 = t^2 + 2$, temos:

$y'(3) = 3^2 + 2 = 11$

Alternativa **b.**