MATEMÁTICA APLICADA

1 Rubens dirigiu durante 1h20min com uma velocidade média de 60 km/h. Durante a primeira meia hora, Rubens dirigiu com uma velocidade média de 56 km/h e, durante a meia hora seguinte, com velocidade média de 72 km/h.
Com que velocidade média Rubens dirigiu nos 20 minutos finais?

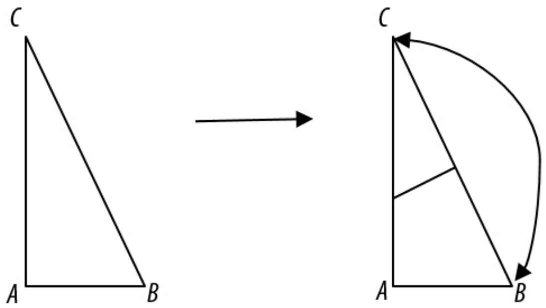
RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Seja v a velocidade média com que Rubens dirigiu nos 20 minutos finais.
Assim, tem-se:

$$\frac{28+36+v\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=60 \Rightarrow 64+\frac{v}{3}=80 \Rightarrow v=48 \text{ km/h.}$$

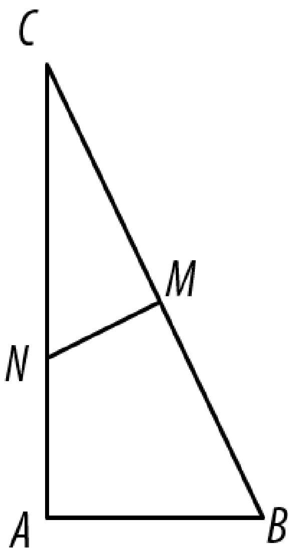
MATEMÁTICA APLICADA

2 Um triângulo retângulo de papel, *ABC*, cujos catetos *AB* e *AC* medem, respectivamente, 5 cm e 12 cm, foi dobrado de modo a fazer coincidirem os vértices *B* e *C*, conforme sugere a figura a seguir:



Calcule o comprimento da dobra.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA



Para que B e C coincidam, a dobra MN tem que ser perpendicular a BC e M tem que ser o ponto médio de BC.

$$BC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm.}$$

Assim, pela semelhança dos triângulos retângulos ABC e MNC, tem-se:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow \frac{MN}{5} = \frac{\frac{13}{2}}{12} \Rightarrow MN = \frac{65}{24} \cong 2,7 \text{ cm.}$$

3 Márcia tem 47 moedas de R$ 1, 00, de R$ 0,50 e de R$ 0,25, que totalizam R$ 25,50.
Sabendo que Márcia tem 3 moedas de R$ 0,50 a mais do que moedas de R$ 0,25, quantas moedas de cada valor ela tem?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Sejam *x*, *y* e *z* as quantidades de moedas de R$ 1,00, R$ 0,50 e R$ 0,25, respectivamente.

Assim, tem-se: $\begin{cases} x+y+z=47 \\ x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=25,5 \\ y=z+3 \end{cases}$. Daí, tem-se: $\begin{cases} x+2z=44 \\ 4x+3z=96 \end{cases} \Rightarrow x=12,\ z=16$ e, portanto, $y=19$.

Logo, Márcia tem 12 moedas de R$ 1,00, 19 moedas de R$ 0,50 e 16 moedas de R$ 0,25.

MATEMÁTICA APLICADA

4 Um sapo encontra-se sobre o número 1 de um eixo orientado da esquerda para a direita, sobre o qual estão marcados os números inteiros positivos. A cada salto, o sapo pode se deslocar uma, duas ou três unidades para a direita. Entretanto, ele nunca se desloca para uma posição onde haja um número primo (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...).

A De quantas maneiras diferentes o sapo pode se deslocar do número 1 até chegar ao número 12?

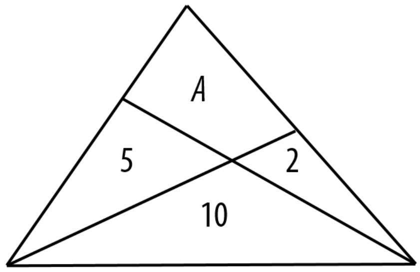
B De quantas maneiras diferentes o sapo pode se deslocar do número 1 até chegar ao número 18?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Do número 1 ele só pode ir para o 4.
Do 4, ele só pode ir para o 6.
Do 6, ele pode ir para o 8 ou para o 9.
Do 8, ele pode ir para o 9 ou para o 10.
Do 9, ele pode ir para o 10 ou para o 12.
Do 10, ele só pode ir para o 12.
Portanto, os caminhos possíveis para ir do 1 ao 12 são:
1, 4, 6, 8, 9, 10, 12
1, 4, 6, 8, 9, 12.
1, 4, 6, 8, 10, 12.
1, 4, 6, 9, 10, 12.
1, 4, 6, 9, 12.
Logo, são 5 caminhos diferentes para ir do 1 ao 12.

B Importante notar que o sapo obrigatoriamente passa pelo 12 se quiser chegar ao 18.
Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de ir do 1 ao 18 é igual ao número de maneiras de ir do 1 ao 12 vezes o número de maneiras de ir do 12 ao 18.
Do 12, ele pode ir ao 14 ou ao 15.
Do 14, ele pode ir ao 15 ou ao 16.
Do 15, ele pode ir ao 16 ou ao 18.
Do 16, ele só pode ir ao 18.
Portanto, os caminhos para ir do 12 ao 18 são:
12, 14, 15, 16, 18
12, 14, 15, 18
12, 14, 16, 18
12, 15, 16, 18
12, 15, 18
Assim, são 5 caminhos para ir do 12 ao 18. Logo, são $5 \times 5 = 25$ caminhos para ir do 1 ao 18.

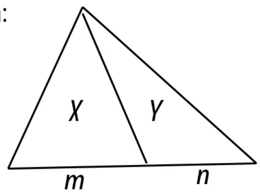
5 A figura mostra um triângulo subdividido em quatro regiões, cujas áreas estão indicadas nas mesmas.



Determine o valor de *A*.

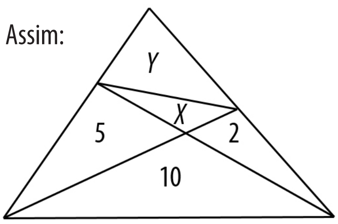
RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Lema:



$\frac{X}{m}=\frac{Y}{n}$, onde X e Y são as áreas das regiões correspondentes e m e n são os comprimentos dos segmentos correspondentes.

Assim:

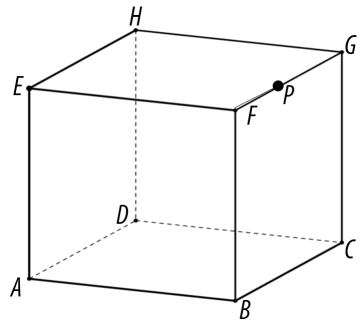


$$\frac{X}{2}=\frac{5}{10}\Rightarrow X=1$$

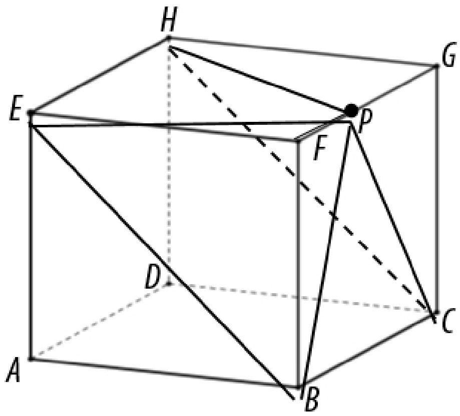
$$\frac{2+X+Y}{10+5}=\frac{Y}{X+5}\Rightarrow\frac{3+Y}{15}=\frac{Y}{6}\Rightarrow Y=2$$

Portanto: $A=X+Y=1+2=3$

6 A figura mostra um paralelepípedo retângulo *ABCDEFGH*, de dimensões $AB=12$, $BC=8$ e $CG=10$. O ponto *P*, pertencente à aresta *FG*, é tal que $FP=3$. Calcule o volume da pirâmide quadrangular de base *BCHE* e vértice *P*.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA



O volume da pirâmide *BCHEP* é igual ao volume do paralelepípedo dado ($12 \times 8 \times 10 = 960$), menos os volumes dos sólidos *BCHEAD* (metade do paralelepípedo $= 480$), *BDEF* ($\frac{12 \times 10 \times 3}{6} = 60$) e *CDHG* ($\frac{12 \times 10 \times 5}{6} = 100$).

Portanto, o volume pedido é $960 - 480 - 60 - 100 = 320$.

OUTRA RESOLUÇÃO

$EB = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. Assim, a área da base da pirâmide é $8 \cdot 2\sqrt{61} = 16\sqrt{61}$.

Sendo h a altura da pirâmide, tem-se: $2\sqrt{61} \cdot h = 12 \cdot 10 \Rightarrow h = \frac{60}{\sqrt{61}}$.

Logo, o volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{61} \cdot \frac{60}{\sqrt{61}} = 320$.

7 Em uma escola, 70% dos alunos gostam de dançar e o resto não gosta.
Dos que gostam de dançar, 95% dizem que gostam de dançar e o resto diz que não gosta.
Dos que não gostam de dançar, 65% dizem que não gostam e o resto diz que gosta.
Dos que dizem que não gostam de dançar, qual a porcentagem dos que realmente não gostam?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Do total de alunos da escola, dizem que não gostam de dançar:
5% dos 70% que gostam de dançar, isto é, 3,5% do total de alunos da escola;
65% dos 30% que não gostam de dançar, isto é, 19,5%.

Logo, a fração (porcentagem) dos que dizem que não gostam de dançar e que realmente não gostam é $\frac{19,5}{19,5+3,5}=\frac{19,5}{23}\cong 84,8\%$.

8 Considere uma função *f*, definida no conjunto dos inteiros positivos, tal que:

- $f(1)=1$
- $f(2n)=f(n)+2$, para todo inteiro positivo n
- $f(2n+1)=2f(n)$, para todo inteiro positivo n

Para quantos valores inteiros e positivos de n, menores ou iguais a 2018, tem-se que $f(n)$ é ímpar?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

- Se $n=2^k$, k inteiro não negativo, tem-se $f(n)=f(1)+2k=2k+1$, ou seja, um número ímpar.
- Se $n=2^k\cdot y$, k inteiro não negativo e y ímpar maior do que 1, tem-se $f(n)=f(y)+2k$ e, como $f(y)$ é par, $f(n)=f(y)+2k$ também é par.

Portanto, $f(n)$ é ímpar, se, e somente se, $n=2^k$, k inteiro não negativo.

Como $2^{10}=1024$ e $2^{11}=2048$, os valores inteiros e positivos de n, menores ou iguais a 2018, tais que $f(n)$ é ímpar são:
$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$, ou seja, 11 valores.

9 Considere duas circunferências: uma de centro $(-8,5)$ e raio $\sqrt{85}$ e outra de centro $(2,-1)$ e raio $\sqrt{17}$.

A Mostre que a equação da reta que passa pelos dois pontos de interseção das circunferências dadas é $5x-3y+4=0$.

B Determine o ponto sobre a reta do item A que está mais próximo da origem.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A As equações das circunferências dadas são: $\begin{cases}(x+8)^2+(y-5)^2=85\\(x-2)^2+(y+1)^2=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+16x-10y+4=0\\x^2+y^2-4x+2y-12=0\end{cases}$

Como a distância entre os centros é igual a $\sqrt{(-8-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{136}<\sqrt{85}+\sqrt{17}$, há, realmente, dois pontos de interseção entre as circunferências dadas. Como esses pontos satisfazem as duas equações, então eles também satisfazem a diferença entre elas, ou seja, a equação $20x-12y+16=0 \Rightarrow 5x-3y+4=0$ que é, portanto, a equação da reta que os contém.

OBS.: Também é possível resolver o sistema inicial, encontrar suas duas soluções (-2, -2) e (1, 3) e, então, mostrar que esses pontos satisfazem a equação da reta dada.

B O ponto da reta $5x-3y+4=0$ mais próximo da origem é o ponto de interseção dessa reta com a reta que contém a origem e é perpendicular a ela, ou seja, a reta de equação $3x+5y=0$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases}5x-3y+4=0\\3x+5y=0\end{cases}$ encontra-se $x=\frac{-10}{17}, y=\frac{6}{17}$.

O ponto pedido é $\left(\frac{-10}{17}, \frac{6}{17}\right)$.

10 Cristiana, Tarla e Vitória estão jogando um jogo no qual cada uma das três escolhe um número real entre 0 e 1. Vence o jogo aquela cujo número estiver compreendido entre os números escolhidos pelas outras duas. Cristiana disse que iria escolher um número aleatoriamente entre 0 e 1, de modo que a probabilidade dela escolher um número em um dado intervalo é proporcional (e neste caso igual) ao comprimento do intervalo.

Tarla disse que faria o mesmo, mas que sortearia um número entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Sabendo dessas informações, qual número deve escolher Vitória para maximizar a sua probabilidade de ganhar o jogo?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Seja *x* o número a ser escolhido por Vitória. A probabilidade de Vitória ganhar é um menos a probabilidade dela perder. Assim, a probabilidade dela ganhar será máxima quando a probabilidade dela perder for mínima. Vitória perde quando os números escolhidos por Cristiana e por Tarla forem ambos maiores ou ambos menores do que *x*.
Assim:

a) Se $0 < x \leq \frac{1}{4}$, a probabilidade dela perder é igual a $1 - x$ (probabilidade de Cristiana sortear um número entre *x* e 1), já que o número sorteado por Tarla será obrigatoriamente maior que $\frac{1}{4}$. Observe que $1 - x \geq \frac{3}{4}$.

b) Se $\frac{1}{2} \leq x < 1$, a probabilidade dela perder é igual a x (probabilidade de Cristiana sortear um número entre 0 e *x*), já que o número sorteado por Tarla será obrigatoriamente menor que $\frac{1}{2}$. Observe que $x \geq \frac{1}{2}$.

c) Se $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, a probabilidade dela perder é $x \cdot \frac{(x - \frac{1}{4})}{\frac{1}{4}} + (1 - x) \cdot \frac{(\frac{1}{2} - x)}{\frac{1}{4}} = 4x^2 - x + (1 - x) \cdot (2 - 4x) = 8x^2 - 7x + 2$.

O valor mínimo de $8x^2 - 7x + 2$ é $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(49 - 64)}{32} = \frac{15}{32} < \frac{1}{2}$ e ocorre quando $x = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{16}$, que está entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Logo, Vitória deve escolher o número $\frac{7}{16}$ para maximizar a sua probabilidade de ganhar o jogo.