“A vontade de vencer é importante, mas o que é mais importante é a vontade de se preparar. “

Bobby Cavaleiro

SUMÁRIO

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

1. EQUAÇÃO POLINOMIAL OU ALGÉBRICA:

Denominamos equação polinomial ou equação algébrica de grau n a toda equação da forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde a_o, a_1, ..., a_n são chamados coeficientes e podem ser números reais ou complexos. e $a_n \neq 0$ é chamado coeficiente dominante.

O conjuntos solução ou conjunto verdade de uma equação algébrica, no conjunto universo U, é o subconjunto de U que contém as raízes da equação.

Duas equações são ditas equivalentes em U, quando apresentam o mesmo conjunto solução nesse domínio.

2. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: Todo polinômio de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa.

COROLÁRIO 1: Toda equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas.

COROLÁRIO 2: Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ de grau n pode ser colocado na forma fatorada:

$$P(x) = a_n (x - r_1)\cdot(x - r_2)\cdot\ldots\cdot(x - r_n)$$

onde r_1, r_2, ..., r_n são as raízes de P(x).

COROLÁRIO 3: Se um polinômio de grau n possuir mais de n raízes, então ele é identicamente nulo.

EXEMPLO:

Verificar que uma raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ é o número 1, obter as outras raízes e obter a forma fatorada de P(x).

Podemos aplicar diretamente o algoritmo de Ruffini:

	1	–3	4	–2
1	1	–2	2	0

Como o resto da divisão por $x - 1$ é 0, então 1 é raiz de P(x).

O quociente é $q(x) = x^2 - 2x + 2$, cujas raízes são $1 \pm i$.

RAÍZES: 1, 1+ i e 1 – i. $P(x) = (x - 1)\cdot(x - 1 - i)\cdot(x - 1 + i)$

3. MULTIPLICIDADE:

Dizemos que r é raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação P(x) = 0 se, e somente se,

$$P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x) \text{ e } Q(r) \neq 0$$

ou seja, r é raiz de multiplicidade m de P(x) = 0 quando o polinômio P é divisível por $(x-r)^m$ e não é divisível por $(x-r)^{m+1}$.

Quando m = 1 dizemos que r é uma raiz simples; quando m = 2, dupla; tripla quando m = 3, etc.

4. RELAÇÕES DE GIRARD:

Seja a equação algébrica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

escrevendo a equação na forma fatorada

$$a_n(x-r_1).(x-r_2)...(x-r_n)=a_nx^n + (r_1+r_2+...+r_n)x^{n-1} + (r_1r_2+r_1r_3+...+r_{n-1}r_n)x^{n-2} + ... + (-1)^n a_n r_1 r_2 ... r_n$$

Igualando as duas formas temos:

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$r_1r_2 ..... r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

No caso da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes r_1 e r_2, a soma das raízes é $S = r_1 + r_2 = (-1)^1 \cdot \frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é $P = r_1 \cdot r_2 = (-1)^2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$.

EXEMPLO:

Sendo o polinômio $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ cujas raízes são -1, -2 e -3, então temos:

$$\sigma_1 = (-1) + (-2) + (-3) = (-1)^1 \cdot \frac{6}{1} = -6$$

$$\sigma_2 = (-1)(-2) + (-1)(-3) + (-2)(-3) = (-1)^2 \frac{11}{1} = 11$$

$$\sigma_3 = (-1)(-2)(-3) = (-1)^3 \frac{6}{1} = -6$$

5. RAÍZES COMPLEXAS DE EQUAÇÕES COM COEFICIENTES REAIS

Se um complexo $z = a + bi$, a $\in$ R e b $\in$ R, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz da equação.

COROLÁRIOS:

1) Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

2) Se o complexo z é raiz de multiplicidade m de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z}$ também é raiz de multiplicidade m da equação.

EXEMPLO:

Resolver a equação $x^4 +4x^3 -17x^2 +26x -14 = 0$ sabendo que $1 -i$ é uma de suas raízes.

Como trata-se de uma equação de coeficientes reais, se $1 -i$ é raiz , então $1 +i$ também é raiz.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini:

	1	4	−17	26	−14
$1 -i$	1	$5 -i$	$-13 -6i$	$7 +7i$	0
$1 +i$	1	6	−7	0	

$\Rightarrow x^2 +6x -7 = 0 \Rightarrow$ raízes: $x =1$ ou $x =-7$

$\Rightarrow S = \{1, -7, 1+i, 1-i\}$

6. RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES COM COEFICIENTES INTEIROS:

Se $r = \frac{p}{q}$, p e q inteiros primos entre si, é uma raiz racional da equação de coeficientes inteiros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

EXEMPLO:

Verificar se a equação $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admite raízes racionais.

$$r = \frac{p}{q} \Rightarrow p \in \{1, -1\} \text{ e } q \in \{1, -1, 2, -2\}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{q} \in \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$$

$p(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$

$p(1) = 3$ $p(-1) = -3$ $P(1/2) = 0$ $p(-1/2) = -3/2$

Logo, a única raiz racional da equação é ½

7. REGRA DE EXCLUSÃO DE NEWTON

Suponhamos que uma equação polinomial P(x), com coeficientes inteiros, admita a raiz a raiz x=a. Devemos ter:

$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x)$

sendo Q(x) um polinômio inteiro, do grau m–1

$P(x) \equiv -(a - x).Q(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{P(x)}{a - x} = -Q(x)$$

Substituindo $x = 1$ e $x = -1$ temos

$$\frac{P(1)}{a - 1} = -Q(1)$$

$$\frac{P(-1)}{a + 1} = -Q(-1)$$

Concluímos toda raiz inteira positiva a, $a \neq 1$, diminuída de uma unidade deve dividir P(1) e aumentada de uma unidade deve dividir P(–1).

8. M.M.C e M.D.C. DE POLINÔMIOS:

O máximo divisor comum (M.D.C.) entre polinômios é o polinômio unitário formado pelos fatores comuns aos polinômios elevados aos seus menores expoentes, de forma que ele é o polinômio de maior grau que divide todos aqueles.

As raízes comuns aos polinômios são também raízes de seu MDC, com a menor multiplicidade.

Se o MDC de dois polinômios é 1, diz-se que eles são primos entre si.

Quando os polinômios não estão na forma fatorada, o seu MDC pode ser obtido pelo método das divisões sucessivas.

EXEMPLO:

Obtenha o MDC dos polinômios p(x) = $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ e q(x) = $x^2 - 4x + 3$.

	$x^2 + x + 4$	$\frac{1}{10}x - \frac{3}{10}$	← quocientes
$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$	$x^2 - 4x + 3$	$10x - 10$	
$10x - 10$	0		← restos

$$\Rightarrow \text{mdc}(p, q) = \frac{1}{10}(10x - 10) = x - 1$$

vale notar que a divisão por 10 se faz necessária para que o mdc seja um polinômio unitário.

O mínimo múltiplo comum entre polinômios é o polinômio unitário formado por todos os fatores que aparecem nos polinômios, comuns ou não, elevados ao seu maior expoente, de forma que ele é o polinômio de menor grau que é múltiplo de todos aqueles.

Todas as raízes dos polinômios são raízes do seu mmc.

EXEMPLOS:

$P(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ e $Q(x) = x^3(x-1)(x-3)^2$.

mdc $(P, Q) = x(x-1)$

mmc $(P, Q) = x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^2$

9. RAÍZES COMUNS

9.1. AS RAÍZES COMUNS DE P(X) E Q(X) SÃO AS RAÍZES DO MDC(P(X), Q(X))

9.2. SEJA A UMA DE P(X) COM MULTIPLICIDADE M>1 , ISTO É , A É RAIZ DE MULTIPLICIDADE M-1 DE P'(X) – OU AINDA PODEMOS DIZER QUE O NÚMERO A É RAIZ DE MULTIPLICIDADE M-1 DO MDC(P(X),P'(X)).

10. FÓRMULA DE NEWTON:

Seja o polinômio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, onde $a_n \neq 0$, e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ as suas raízes, definimos $S_k = r_1^k + r_2^k + r_3^k + \cdots + r_n^k$. Assim, para $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$a_n \cdot S_k + a_{n-1} \cdot S_{k-1} + \cdots + a_1 \cdot S_{k-n-1} + a_0 \cdot S_{k-n} = 0$$

Observe ainda que $S_0 = r_1^0 + r_2^0 + r_3^0 + \cdots + r_n^0 = n$ e $S_1 = r_1^1 + r_2^1 + r_3^1 + \cdots + r_n^1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

1. (FUVEST 2004) O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determinar
a) o valor de m
b) as raízes de p.

2. (UFRJ 1999) Encontre as raízes de $x^3 + 15x^2 + 66x + 80 = 0$, sabendo que são reais e estão em progressão aritmética.

3. (FGV 2002)
a) Sejam a, b e c as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0$. Calcule o valor da expressão: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$.
b) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes vale 4.

4. Verificar qual é a multiplicidade da raiz -3 na equação $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18 = 0$ e obter as outras raízes.

5. (IME2004) Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

6. (ITA-79) Se *a*, *b*, *c* são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde $\boldsymbol{r} \in \Re$, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:
a) -60
b) $62 + r$
c) $62 + r^2$
d) $62 + r^3$
e) $62 - r$

7. (AFA) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?
a) $p^2 = rq$
b) $2p + r = q$
c) $3p^2 = r^2q$
d) $p^3 = rq^3$
e) $q^3 = rp^3$

8.

a) É dado o polinômio do 3^0grau $P(x)=x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, onde λ é um número real não negativo. Determine o menor valor do parâmetro λ de modo que o polinômio p(x) possua 3 raízes reais e distintas.

b) Encontre um polinômio de grau mínimo tal que $p(i) = -1$, $p(1)=2+i$ e $P(0)=1$.

9. Mostre que é raiz tripla do polinômio $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

10. Calcular as raízes iguais da equação, $f(x) \equiv x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = 0$

11. (ITA) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $x^4 + x^3 + p.x^2 + x + q$, com p e q sendo reais. Determine todas as raízes do polinômio.

12. (ITA) Mostre que é racional: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

13. (IME) Resolva as equações abaixo sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

$$\begin{cases} x^3 7.x^2 - 204x + 1260 = 0 \\ x^3 - 15.x^2 - 394x + 840 = 0 \end{cases}$$

14. Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?

a) $p^2 = rq$
b) $2p + r = q$
c) $3p^2 = r^2q$
d) $p^3 = rq^3$
e) $q^3 = rp^3$

15. (EN 2011) Sejam a, b, c as raízes da equação $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Qual o valor de $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 1}$?

a) $\dfrac{2\sqrt{21}}{9}$
b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$
c) $\dfrac{2\sqrt{7}}{9}$
d) $\dfrac{\sqrt{21}}{9}$
e) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

16. (IME 2010) Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde a e b são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de p(x) depende

a) apenas de a e é positiva.
b) de a e b e é negativa
c) apenas de b e é positiva.
d) apenas de b e é negativa.
e) de a e b e é positiva.

Obs.: e representa a base do logaritmo neperiano e ln a função logaritmo neperiano.

17. (EFOMM 2012) O valor de λ na equação $y^3 - 61y^2 + \lambda y - 5832 = 0$ de modo que suas raízes estejam em progressão geométrica, é:

a) 1017
b) 1056
c) 1078
d) 1098
e) 1121

18. (ITA 2011) Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a:

a) -64
b) -36
c) -28
d) 18
e) 27

19. (ITA) Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto-retangular são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da sua diagonal é igual a:

a) $\frac{7}{12}$ cm
b) $\frac{9}{24}$ cm
c) $\frac{\sqrt{24}}{12}$ cm
d) $\frac{\sqrt{61}}{12}$ cm
e) $\frac{\sqrt{73}}{12}$ cm

20. (IME2007) Seja $p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^3 + ex + f$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de p(x) são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de p(x) é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

21. (IME2007) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m-15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

22. (IME2008) Encontre o polinômio P (x) tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3$. P (x) e Q (x) + 2 é divisível por x^4, onde Q (x) é um polinômio do 6º grau.

1.

raízes: a, b, c $\qquad$ $b \cdot c = -1$

Pelas relações de Girard:

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = -3/2 \Rightarrow a \cdot (-1) = -3/2 \Rightarrow a = 3/2$

$ab + ac + bc = 2 \Rightarrow a(b + c) + bc = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}(b+c) - 1 = 2 \Rightarrow b + c = 2$

$a + b + c = \frac{3}{2} + 2 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 7$

$\begin{cases} b + c = 2 \\ bc = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

$S = \{3/2,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\}$

RESPOSTA:

a) $m = 7$

b) $S = \{3/2,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\}$

2.

raízes: $a - r$, a, $a + r$

soma $= 3a = -15 \Rightarrow a = -5$

produto $= (-5 - r) \cdot (-5) \cdot (-5 + r) = -80 \Rightarrow r^2 - 25 = -16 \Rightarrow r = \pm 3$

raízes: $-8, -5, -3 \Rightarrow S = \{-8, -5, -3\}$

RESPOSTA: $S = \{-8, -5, -3\}$

3.

a) Pelas Relações de Girard: $a + b + c = 4$ e $abc = 1$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{c + b + a}{abc} = \frac{4}{1} = 4$$

b) raízes: a, b,c $\qquad$ $b + c = 4$

Pelas relações de Girard: $a + b + c = 2 \Rightarrow a + 4 = 2 \Rightarrow a = -2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline -2 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow$ raízes: $-2, 1, 3 \Rightarrow S = \{-2, 1, 3\}$

RESPOSTA:
a) 4
b) S = {–2, 1, 3}

4.

	1	6	11	12	18
–3	1	3	2	6	0
–3	1	0	2	0	
–3	1	–3	11		

$\Rightarrow P(x) = (x+3)^2 \cdot (x^2+2) \Rightarrow -3$ tem multiplicidade 2

5.
1ª SOLUÇÃO:
P(x) não tem raiz tripla, pois como a soma das raízes é nula, a raiz tripla seria 0, contradizendo $b \neq 0$.
Logo P(x) tem pelo menos duas raízes reais distintas.

Se a = 0, $P(x) = x^3 + b$ tem uma única raiz real, $\sqrt[3]{-b}$ (as outras são $\sqrt[3]{-b}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$), logo $a \neq 0$.

Se a > 0, a derivada $P'(x) = 3x^2 + a$ é positiva para todo $x \in R$, o que significa que a função $P : R \to R$ é estritamente crescente, contradizendo o fato de P(x) ter pelo menos duas raízes reais distintas.
Logo, como $a \in R$, devemos ter a < 0.

2ª SOLUÇÃO:
Suponha r_1, r_2 e r_3 as raízes de P(x). Pelas relações de Girard:

$r_1 . r_2 . r_3 = -b \neq 0$ (I)
$r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (II)
$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = a$ (III)

A equação (I) nos dá $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 > 0$.
Como $(r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)$, então:

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = a = -\frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}{2} < 0.$$

6.
Substituindo a, b e c na equação acima e somando obtemos:
$a^3 + b^3 + c^3 - r(a + b + c) + 60 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -60$

RESPOSTA: A

7.

$$\begin{cases} a+b+c=-p \text{ (I)} \\ ab+ac+bc=q \text{ (II)} \\ abc=-r \text{ (III)} \\ b^2=ac \text{ (IV)} \end{cases}$$

por III e IV $b^3=-r$

por II e IV b(a+b+c)=q $\Leftrightarrow$ -bp=q $\Leftrightarrow$ $-b^3.p^3=q^3 \Leftrightarrow r.p^3=q^3$

RESPOSTA: E

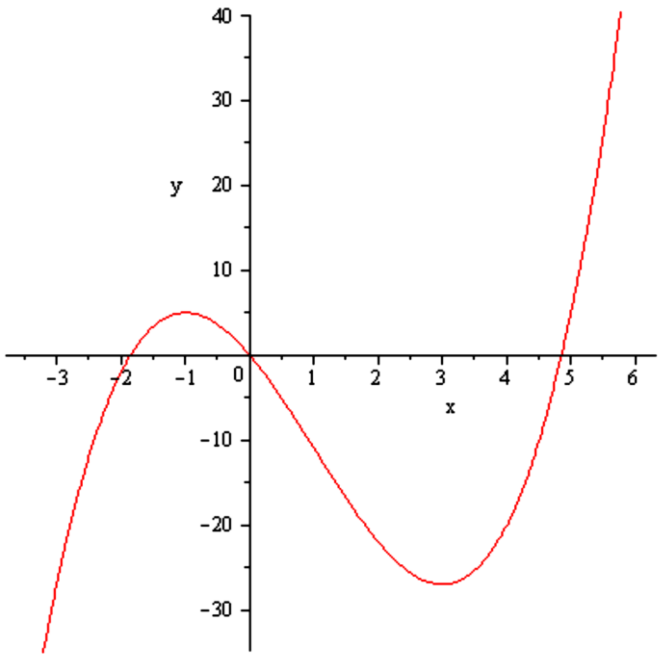
8.

Considere o polinômio $t(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ raízes $\{0, \frac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\}$

Logo a derivada de t(x) é $t'(x)=3x^2 - 6x - 9$ raízes $\{-1,3\}$

$t(-1) = 5$ e $t(3) = -27$

gráfico de t(x)



como p(x) =t(x) +λ e λ≠0 → o gráfico de t(x) é exatamente o mesmo gráfico de T(x) deslocado de λ para cima .

logo

se λ<27 o polinômio terá 3 raízes distintas

se λ=27 o polinômio terá 1 raiz simples e uma raiz dupla igual a 3 .

logo o menor valor de λ é igual a zero.

b) p(x)=a(x–i).(x–(2+i)).(x–0).

9.

$p(2)=p'(2)=p''(2)=0$ e $p'''(2) \neq 0$.

10.

Temos $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$ e o m.d.c. entre f(x) e f' (x) é $\Delta = x^3 - 3x + 2$. Apliquemos novamente o processo, determinando o m.d.c. entre os polinômios Δ e $\Delta' = 3x^2 - 3$. Achamos $x - 1$, como resultado. Logo, pondo $x - 1 = 0$, vê-se que a unidade é raiz dupla de $\Delta = x^3 - 3x + 2 = 0$ cuja outra raiz simples é –2. Portanto, a unidade é raiz tripla e –2 raiz dupla para a equação considerada. Suas raízes serão pois: 1, 1, 1, –2, –2.

11.

Sabendo que, se 2 + i é raiz, então seu conjugado 2 – i também será. Desta forma, P(x) será divisível por:

$$\left(x-(2+i)\right)\left(x-(2-i)\right)=x^2-4x+5$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+x^3+p.x^2+x+q & x^2-4x+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+4.x^3-5.x^2} & x^2+5x+(p+15) \\
5x^3+(p-5).x^2+x+q & \\
\underline{-5x^3+20.x^2+-25.x} & \\
\quad (p+15)x^2-24x+q & \\
\underline{\quad -(p+15)x^2+(4p+60)x-(5p+75)} & \\
\qquad (4p+36).x+(q-5p-75) &
\end{array}$$

Como P(x) é divisível por x^2-4x+5, o resto da divisão acima deve ser identicamente nulo.

$$\begin{cases} 4p+36=0 \\ q-5p-75=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=-9; q=30$$

As outras raízes de P(x) serão raízes do quociente da divisão.

Ou seja, serão raízes de $x^2 + 5x + 6$, isto é, -2 e -3.

De onde segue que as raízes de P(x) serão:

$$\boxed{-2,-3,2+i,2-i}$$

12.

Chamemos de x a expressão a ser analisada:

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}_{A}+\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}_{B}$$

Elevando a expressão ao cubo:

$$x^3=(A+B)^3=A^3+B^3+3.A^2B+3A.B^2=A^3+B^3+3.A.B.\underbrace{(A+B)}_{x}$$

$$=A^3+B^3+3.A.B.x=\left(2+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{5}\right)+3.x\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right).\left(2-\sqrt{5}\right)}=4+3.x.\sqrt[3]{-1}=4-3x$$

$x^3 + 3x - 4 = 0$

Por inspeção, 1 é raiz do polinômio acima, logo, $(x-1).\left(x^2+x+4\right)=0$

As demais raízes serão as raízes de $x^2 + x + 4$, que são complexas.

Como os radicais são números reais, concluímos que

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1\in\mathbb{R}.$$

13.
Sendo k a raiz da segunda equação podemos escrever:

$$\begin{cases}(3k)^3-7.(3k)^2-204(3k)+1260=0\\ k^3-15.k^2-394k+840=0\end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3, dividindo a primeira por 9 e arrumando o sistema chegamos a:

$$\begin{cases}3.k^3-7.k^2-68k+140=0\\ 3.k^2-45.k^2-1182k+2520=0\end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$38.k^2+1114.k-2380=0 \Leftrightarrow k=2 \text{ ou } -\frac{595}{19}$$

Testando as raízes, temos que a raiz é k = 2. Com isso, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, podemos fatorar os dois polinômios originais:

$$\begin{cases}x^3-7.x^2-204x+1260=(x-6).(x+14).(x-15)=0\\ x^3-15.x^2-394x+840=(x-2).(x-28).(x+15)=0\end{cases}$$

Temos então as soluções das duas equações, respectivamente:

$$\boxed{x=\{6,-14,15\} \;;\; x=\{2,28,-15\}}$$

14.

$$\begin{cases}a+b+c=-p \text{ (I)}\\ ab+ac+bc=q \text{ (II)}\\ abc=-r \text{ (III)}\\ b^2=ac \text{ (IV)}\end{cases}$$

III e IV $\Rightarrow \; b^3=-r$

II e IV $\Rightarrow b(a+b+c)=q \Leftrightarrow -bp=q \Leftrightarrow -b^3.p^3=q^3 \Leftrightarrow r.p^3=q^3$

RESPOSTA: E

15.
Seja $S_n=a^n+b^n+c^n$, onde $n\in\mathbb{N}$, temos:

$$S_0=a^0+b^0+c^0=1+1+1=3$$

$$S_1=a^1+b^1+c^1=\frac{-(-4)}{12}=\frac{1}{3}$$

$$S_2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\cdot(ab+ac+bc)=\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{-3}{12}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$$

Pela fórmula de Newton, temos:

$$12x^3-4x^2-3x+1=0\Rightarrow 12\cdot S_n-4\cdot S_{n-1}-3\cdot S_{n-2}+1\cdot S_{n-3}=0$$

$$n=3\Rightarrow 12\cdot S_3-4\cdot S_2-3\cdot S_1+1\cdot S_0=0\Leftrightarrow S_3=\frac{1}{12}\cdot(4\cdot S_2+3\cdot S_1-S_0)=\frac{1}{12}\cdot\left(4\cdot\frac{11}{18}+3\cdot\frac{1}{3}-3\right)=\frac{1}{27}$$

Logo, $S_3 = a^3 + b^3 + c^3 = \dfrac{1}{27}$ e $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{27} + 1} = \dfrac{2\sqrt{21}}{9}$.

RESPOSTA: A

16.

Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes de $p(x)$ e $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Como $e^b > 0, \forall b \in \mathbb{R}$, não há raízes nula e $S_0 = 3$.

Pelas relações de Girard: $S_1 = 0$

Pela fórmula de Newton: $S_3 + 0 \cdot S_2 + (\ln a) S_1 + e^b \cdot S_0 = 0 \Leftrightarrow S_3 = -3e^b$

Logo, a soma dos cubos das raízes de $p(x)$ depende apenas de b e é negativa.

RESPOSTA: D

17.

Sejam as raízes da equação $\left(\dfrac{a}{q}, a, aq\right)$, pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{q} + a + aq = 61 \Leftrightarrow a\left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = 61 \Leftrightarrow 18 \cdot \left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = 61 \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} + 1 + q = \dfrac{61}{18} \\ \dfrac{a}{q} \cdot a + \dfrac{a}{q} \cdot aq + a \cdot aq = \lambda \Leftrightarrow \lambda = a^2\left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = 18^2 \cdot \dfrac{61}{18} = 1098 \\ \dfrac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 5832 \Leftrightarrow a^3 = 5832 \Leftrightarrow a = 18 \end{cases}$$

RESPOSTA: D

18.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	a+2	a+b+2
	1	2	4	a+6	

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, então:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = -6 \quad \wedge \quad b = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = 36 - 64 = -28$$

Essa questão poderia ser feita observando que 1 deve ser raiz do polinômio $P(x) = x^4 + x^2 + ax + b$ e da sua primeira derivada $P'(x) = 4x^3 + 2x + a$. Logo, $P'(1) = 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -6$ e $P(1) = 1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$, o que implica $a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = 36 - 64 = -28$.

RESPOSTA: C

19.

Sejam p, q e r as raízes da equação, então $d=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

$$p^2+q^2+r^2=(p+q+r)^2-2(pq+pr+qr)$$

Pelas Relações de Girard: $p+q+r=\frac{-(-26)}{24}=\frac{13}{12}$ e $pq+pr+qr=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow p^2+q^2+r^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2-2\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{61}{144}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{\frac{61}{144}}=\frac{\sqrt{61}}{12}\text{ u.c.}$$

RESPOSTA: D

20.

Pelas relações de Girard, –b, c, –d, c e –f são a soma dos produtos das raízes tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5, respectivamente.
A soma de 4 números pares e 1 ímpar é ímpar, logo, b é ímpar.
Todos os produtos de duas ou mais raízes são pares. Logo, c, d, e e f são pares.
Então, há 4 coeficientes pares.

RESPOSTA: E

21.

Devemos determinar os valores de m para os quais existem dois números inteiros x_1 e x_2 tais que

$$\begin{cases} x_1+x_2=-(m-15) \\ x_1x_2=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-x_1x_2+15 \\ x_1x_2=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+1)(x_2+1)=16 \\ x_1x_2=m \end{cases}$$

Como os divisores de 16 são $\pm$ 1, $\pm$ 2, $\pm$ 4, $\pm$ 8, $\pm$ 16, supondo sem perda de generalidade que $x_1 \le x_2$, a tabela a seguir reúne todos os possíveis valores para x_1, x_2 e m.

x_1+1	x_2+1	x_1	x_2	m
1	16	0	15	0
2	8	1	7	7
4	4	3	3	9
– 16	– 1	– 17	– 2	34
– 8	– 2	– 9	– 3	27
– 4	– 4	– 5	– 5	25

Ou seja, o conjunto de todos os valores possíveis de m é {0, 7, 9, 25, 27, 34}.

22.

Como Q(x) é do 6º grau, temos $Q(x) = x^4 (ax^2 + bx + c) – 2$, logo
$(x – 1)^3 . P (x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 – 1$

Substituindo x por 1, obtemos $a + b + c = 1$.

Aplicando BRIOT-RUFFINI:

1	a	b	c	0	0	0	-1
1	a	a+b	1	1	1	1	0
	a	2a+b	2a+b+1	2a+b+2	2a+b+3	2a+b+4	

Concluímos que $2a + b = –4$, logo $(x – 1) P (x) = ax^4 – 4x^3 – 3x^2 – 2x –1$.

BRIOT-RUFFINI novamente:

1	a	-4	-3	-2	-1
	a	a - 4	a-7	a-9	a-10

Logo a =10   e $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.