PROBABILIDADE

2020 - 2022

PROBABILIDADE

Qual a probabilidade de você gabaritar matemática no vestibular? Estude com a gente e aumente as suas chances!

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Introdução à probabilidade
2. Probabilidade da União e do Complementar
3. Probabilidade Condicional
4. Probabilidade da Intersecção e Eventos Independentes

PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Certamente você já ouviu perguntas como: "*Meu time de futebol ganhará amanhã?*" Ou "*Quais são as chances de ganhar na Mega Sena?*" Então você pode ter pensado que existe uma forma de prever os acontecimentos antes deles ocorrerem, o que chamamos de prever o futuro. E a resposta para isso é: não! Não é possível prever o futuro! Contudo, podemos nos fazer outra pergunta: é possível dizer quão provável que um acontecimento ocorra? E para esta, temos sim como resposta.

Vamos começar com um baralho de 52 cartas que são divididas em quatro naipes: ouros, paus, espadas e copas. Cada naipe possui as seguintes cartas: Às (A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete (J), Dama (Q), Rei (K).

Agora vamos pegar esse baralho, embaralha-lo e distribuir sobre a mesa. Você deverá escolher uma carta. A pergunta aqui é: você consegue dizer qual é a carta que escolheu antes de olhá-la? Certamente não, a não ser que seja muito sortudo ou tenha dado aquela olhadinha sem querer. Mudando então de pergunta: é mais provável que a carta escolhida seja um número ou uma letra? Você deve ter pensado que o mais provável é que seja um número e você está certo, pois há mais números do que letras, logo há mais possibilidades de retirar um número do que uma letra.

A diferença entre prever o futuro e a probabilidade está em ter 100% de certeza que algo ocorra ou não. Olhe para o exemplo do baralho, sabemos que é mais provável que a carta escolhida seja um número ao invés de uma letra, mas aí surge a pergunta: já que não temos 100% de certeza de que a carta retirada será um número, quão provável que ela seja? Essa resposta é encontrada no estudo das probabilidades.

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Ao trabalharmos com situações em que o resultado não é garantido pelas condições em que você o realiza, chamamos esse processo de **experimentos aleatórios**. No exemplo do baralho, você embaralha e sorteia uma carta. Quando se realiza esse mesmo procedimento diversas vezes, a mesma carta poderá ser retirada ou poderá obter outra entre as 52. O resultado não é garantido pela forma que estamos construindo a situação.

Outros exemplos de experimentos aleatórios:

I. Retirar um número entre 1 e 100 de dentro de uma caixa;

II. Lançamento de dados não viciados[1];

[1] É aquele dado onde todas as faces tem a mesma chance de sair.

III. Lançamento de uma moeda honesta[2];

IV. Número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina durante um dia;

Quando for possível saber o resultado antes mesmo de realizar o experimento, chamamos de evento determinístico ou não aleatório.

ESPAÇO AMOSTRAL

Ao lançar um dado não viciado os resultados prováveis serão 1, 2, 3, 4, 5, ou 6. Esses resultados prováveis é o que chamaremos de **espaço amostral** que nada mais é que um conjunto com todos as possibilidades.

Exemplos:

I. Experimento: Retirar um número entre 1 e 100 de dentro de uma caixa é um experimento aleatório**.**

Espaço Amostral: $S = \{1, 2, 3, \ \dots, 99, 100\}$.

II. Experimento: Lançamento de uma moeda honesta;

Espaço Amostral: $S = \{Cara, Coroa\}$.

III. Experimento: Número de ligações recebidas no canal de emergência 190 durante o período de uma hora.

Espaço Amostral: $S = \{0, 1, 2, 3, \ \dots, 99, 100, 101, \dots\} = \mathbb{N}$.

Os espaços amostrais podem ser finitos, que é quando você sabe a quantidade de elementos que ele possui ou infinitos, que é quando a quantidade de elementos não pode ser representada.

EVENTOS

Quando elencamos alguma característica dentro de um espaço amostral, estamos olhando para os elementos ali que satisfazem tal característica. Deste modo, definimos **evento** como qualquer resultado que possa ocorrer dentro de um espaço amostral.

Experimento: Lançamento de um dado não viciado.

Espaço Amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eventos: $A: ser\ par.\ \ A = \{2, 4, 6\}$; $B: ser\ ímpar.\ \ B = \{1, 3, 5\}$; $C: Ser\ múltiplo\ de\ 3.$ $C = \{3, 6\}$; $D: Ser\ par\ e\ ímpar.\ \ D = \emptyset$;

Observação: O evento D é um tipo especial de evento, chamado de Evento impossível, ou seja, um resultado que nunca ocorrerá.

[2] É aquela cuja as chances de sair cara ou coroa são as mesmas.

Um outro exemplo é o experimento de lançar uma moeda duas vezes, que teremos:

O espaço amostral:

$$S = \{(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, coroa); (coroa, cara)\}.$$

São vários eventos:

$$A = \{(cara, cara); (cara, coroa)\}$$

$$B = \{(cara, coroa); (coroa, coroa)\}$$

$$C = \{(coroa, coroa); (coroa, cara)\}$$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Até agora construímos o conhecimento necessário para responder à pergunta inicial: já que não temos 100% de certeza de que será um número, quão provável é que a carta escolhida do baralho que foi comentado lá no início contenha um número?

De modo geral, para encontrarmos as chances de um determinado evento A do espaço amostral S ocorrer, temos:

$$P(A) = \frac{Quantidade\ de\ elementos\ do\ conjunto\ A}{Quantidade\ de\ elementos\ do\ conjunto\ S} \text{ ou } P(A) = \frac{Quantidade\ de\ resultados\ favoráveis}{Quantidade\ de\ resultados\ totais}.$$

Ou seja, se temos 52 duas cartas no espaço amostral. Chamando o evento “a carta conter um número” de A, obtemos: $P(A) = \frac{36}{52} \approx 0.69,$ assim, há 69% de chances de que ao sortear uma carta de baralho ela contenha um número.

PROBABILIDADE DA UNIÃO

Quando queremos quantificar as possibilidades de duas coisas acontecerem sem haver interferência, estamos usando a probabilidade da união de dois eventos, isto é, esperamos que aconteça uma determinada situação ou outra. Tomemos como evento o lançamento de um dado não viciado, e listamos alguns eventos possíveis:

$A = \{ser\ par\} = \{2, 4, 6\};$

$B = \{ser\ ímpar\} = \{1, 3, 5\};$

$C = \{ser\ múltiplo\ de\ 3\} = \{3, 6\}.$

Observe que temos números que são ímpares ou múltiplos de 3 e para encontrarmos as chances de tirar um número ímpar ou múltiplo de 3 usamos a união dos dois eventos. Então vamos lá:

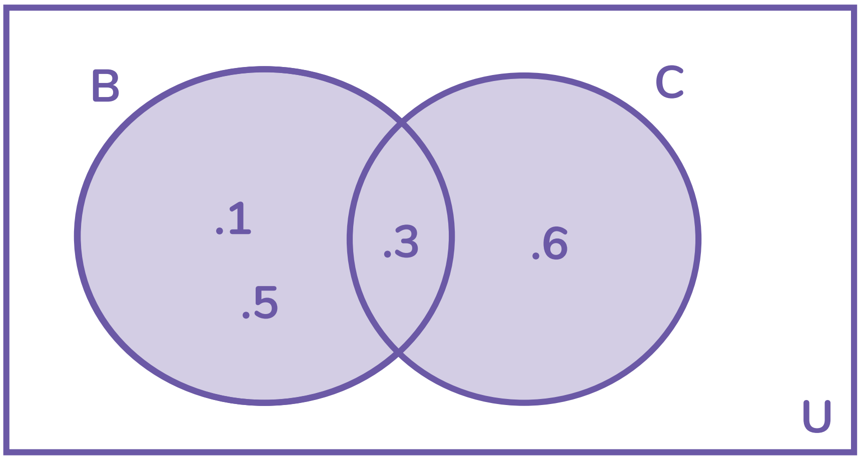
$Evento\ B = \{ser\ ímpar\} = \{1, 3, 5\};$

$Evento\ C = \{ser\ múltiplo\ de\ 3\} = \{3, 6\}.$

$$P(B \cup C) = \frac{P(B)}{P(espaço\ amostral)} + \frac{P(C)}{P(espaço\ amostral)} - \frac{P(B \cap C)}{P(espaço\ amostral)}$$

$$P(B \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67 \cong 67\%.$$

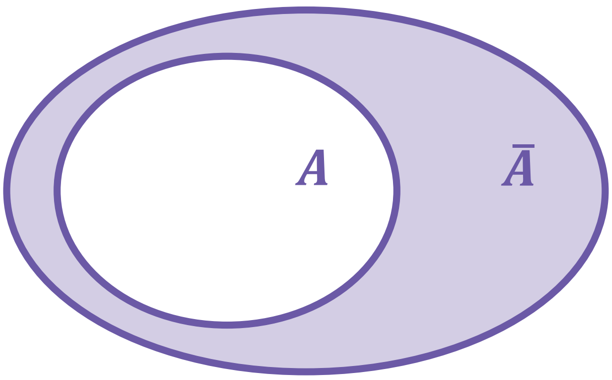
Podemos representar essa operação de união por meio do diagrama de Venn-Euler, aquele visto lá no conteúdo de Conjuntos.



Podemos aqui também calcular outras situações, tais como: ser par ou múltiplo de três, não ser múltiplo de três, entre outros. Tente você aí em casa calcular a probabilidade destas situações.

PROBABILIDADE DO COMPLEMENTAR

Antes de mais nada: o que é complementar? Vamos pensar na palavra, que lembra completo, ou seja, um evento complementar é o que falta pra deixar um outro completo. Em "*matemátiques*" denotamos complementar como $\bar{A}$ (lê-se: não A) ou A^c (lê-se: complementar de A). Se fomo representar na forma de diagrama, é o seguinte:



Vamos ver um exemplo para ficar mais claro.

Exemplo: Ao lançarmos um dado, qual a probabilidade de a face superior não ser um número par?

Modo 1	Modo 2
$Evento\ A = \{2, 4, 6\}$ $Espaço\ amostral = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(\mathrm{A}) = 3$ e $n(espaço\ amostral) = 6$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$Evento\ \bar{A} = \{1, 3, 5\}$ $Espaço\ amostral = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(\bar{A}) = 3$ e $n(espaço\ amostral) = 6$ $\mathrm{P}(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Como o próprio nome sugere, a probabilidade condicional está sujeita a uma condição. Qual condição? A condição de que um evento B ocorra, sendo que um evento A já aconteceu.

De modo geral, podemos utilizar a seguinte fórmula para o cálculo de probabilidades condicionais: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, e lê-se: "A probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A ocorreu é igual a probabilidade de A e B ocorrerem, dividido pela probabilidade do evento A".

Exemplo: Um avião com 150 passageiros sai do Rio de Janeiro com destino à Goiás. Ao desembarcarem, foram convidados a responderem a duas perguntas de uma pesquisa: 1ª) Já viajou de avião antes? 2ª) Já esteve em Goiás? A tabela abaixo apresenta as respostas obtidas.

Eventos	Passageiros viajando de avião pela primeira vez	Passageiros que já viajaram de avião	Total
Passageiros que não conheciam o Goiás	85	25	110
Passageiros que já conheciam o Goiás	20	20	40
Total	105	45	150

Um passageiro foi escolhido ao acaso e ele afirma que já viajou de avião antes, qual a probabilidade desse passageiro já conhecer o Goiás?

Inicialmente, definimos os dois eventos: A = Já viajou de avião e B = Já esteve em Goiás. Perceba que queremos a probabilidade de já ter estado em Goiás, tendo a certeza de que o passageiro escolhido já viajou de avião antes, logo se trata de uma probabilidade condicional. Basta identificar na tabela a quantidade de passageiros que já tinham viajado de avião e já conheciam Goiás, onde temos: $P(A \cap B) = \frac{20}{150}$.

Agora, precisamos da probabilidade do evento A ocorrer. Conforme está na tabela, 45 dos 150 participantes viajaram de avião antes. Assim: $P(A) = \frac{45}{150}$.

Em posse dessas duas informações, podemos calcular a probabilidade condicional: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{150}}{\frac{45}{150}} = \frac{20}{45} \cong 0.44 \cong 44\%$.

PROBABILIDADE DA INTERSECÇÃO E EVENTOS INDEPENDENTES

A probabilidade da intersecção de dois eventos ou probabilidade de eventos sucessivos determina a chance de dois eventos ocorrerem simultaneamente ou sucessivamente. Na pratica é: ao lançar dois dados, qual **é** a probabilidade de no primeiro sair um número par e no segundo, um ímpar? Quando lemos essa pergunta, notamos que o conectivo entre as duas partes do problema é o "e", portanto espera-se que as duas coisas ocorram apesar de não interferirem uma na outra, o que chamamos de eventos independentes. Tendo então como fórmula $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ e respondendo à pergunta, temos:

Espaço amostral $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\,2, 4, 6), n(A) = 3$

$B = \{1, 3, 5\}, n(B) = 3$

$P(A \cap B) = \frac{3}{6} . \frac{3}{6} = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Agora quando os eventos não são independentes, ou seja, os dois eventos vão ocorrer mais o segundo só acontece depois do primeiro. Temos então: $P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$, onde $P(A \mid B)$ é a probabilidade de B acontecer, sabendo que A aconteceu; $P(A \cap B)$ é a probabilidade de A e B acontecerem ao mesmo tempo; e $P(A)$ é a probabilidade de A acontecer. Para ficar mais claro, considere um globo em um bingo onde possui 60 bolas numeradas de 1 a 60. Qual a probabilidade de retirarmos a bola 10 e, sem reposição, a bola 7?

A probabilidade de retirar a bola 10 é: $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{60}$.

Agora a urna possui 59 bolas, assim a probabilidade de retirarmos a bola, já tendo retirada a bola 10, é: $P(B|A) = \frac{1}{59}$.

Finalmente, queremos saber qual a probabilidade de os dois eventos acontecerem ao mesmo tempo. Então:

$$P(A \cap B) = P(A).\, P(B|A).$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{60} . \frac{1}{59} = \frac{1}{3540}$$

Para finalizar, vale lembrar uma observação que eventos mutualmente exclusivos é quando $P(A \cap B) = 0$, que é diferente de eventos independentes $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut