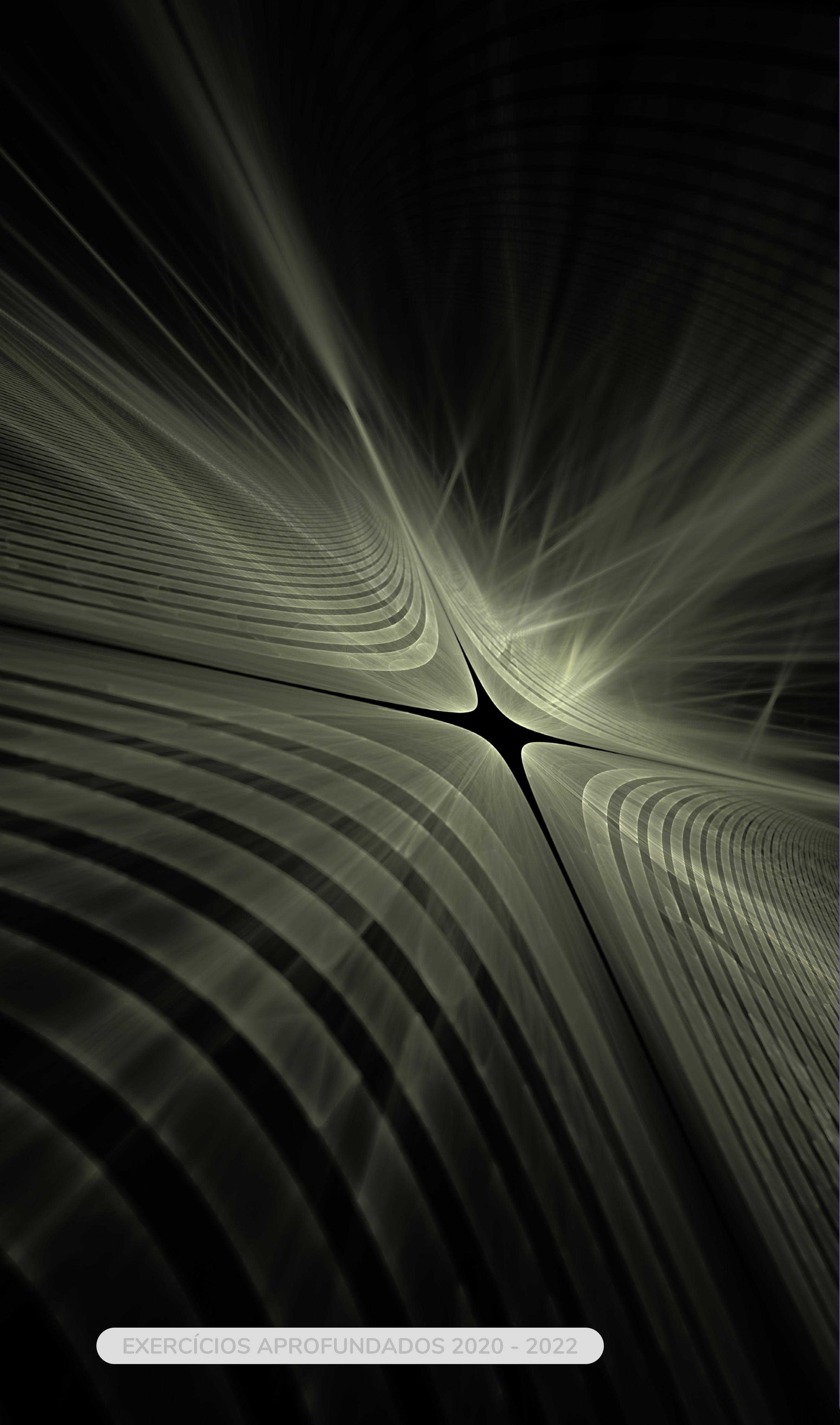


GEOMETRIA ANALÍTICA

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

GEOMETRIA ANALÍTICA

Aqui você aprenderá a quantificar a geometria plana e espacial, conhecerá as equações das figuras geométricas, calculará distâncias e muito mais!

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Exercícios Aprofundados: Lugar Geométrico e Equações da Reta
2. Exercícios Aprofundados: Posições entre Retas, Circunferência e Posições Relativas com Circunferências
3. Exercícios Aprofundados: Cônicas

LUGAR GEOMÉTRICO E EQUAÇÕES DA RETA

1. (EPCAR (AFA) 2020) Em umas das extremidades de um loteamento há um terreno triangular que será aproveitado para preservar a área verde tendo em seu interior uma região quadrada que será pavimentada e destinada a lazer.

Levando as medidas desse projeto, em metros, para o plano cartesiano, em uma escala de $1:100$, tem-se:

- O é a origem do plano cartesiano;

- O, P e Q são os vértices do terreno triangular;

- dois vértices do triângulo são os pontos $P(-2, 0)$ e $Q(0, 6)$ e dois de seus lados estão contidos nos eixos cartesianos;

- O, M, R e N são os vértices da região quadrada;

- a área da região quadrada tem três vértices consecutivos M, O e N sobre os eixos cartesianos; e

- R está alinhado com P e Q

Assim, pode-se afirmar que

a. a abscissa do ponto R é maior que -1

b. a região pavimentada supera $25.000\ m^2$

c. a ordenada de R é maior que $\frac{7}{5}$

d. sobram, para área verde, exatamente, $37.000\ m^2$

2. (UECE 2019) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, escolhida uma unidade de comprimento $(u \cdot c)$, a medida em $(u \cdot c)^2$ da área da região do plano limitada pelas retas $x - 3y = 0$, $3x - y = 0$ e $x + y - 4 = 0$ é

a. 8.

b. 9.

c. 4.

d. 6.

3. (UDESC 2018) Considere o prisma triangular com 8 u.c. de altura e a base sendo um triângulo ABC cujos vértices são os pontos de interseção das retas $2y = x$, $y + x = 3$ e $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$. Se o volume desse prisma triangular é 12 u.v., o valor da soma das abscissas dos vértices do triângulo ABC é:

a. 5

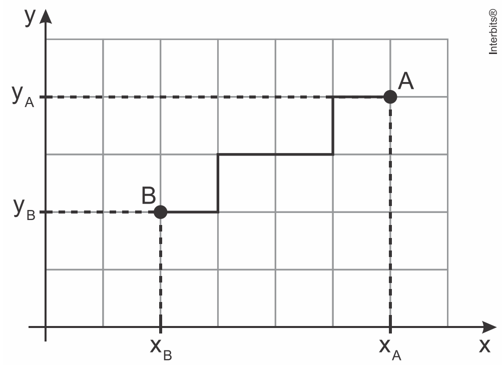
b. 2

c. 4

d. 3

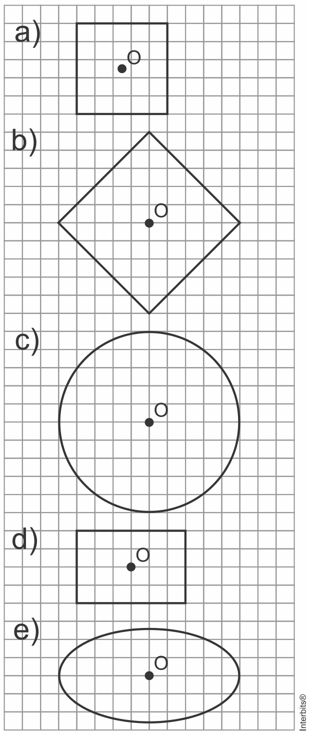
e. 1

4. (ESPM 2018) Num sistema de coordenadas cartesianas, considere que o caminho que liga dois pontos só poderá ser feito através de segmentos paralelos aos eixos coordenados. Dessa forma, teremos uma maneira diferente de calcular a distância entre dois pontos A e B. Vamos representá-la por $d(AB)$ e calculá-la da seguinte maneira: $d(AB) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$, como no exemplo abaixo:

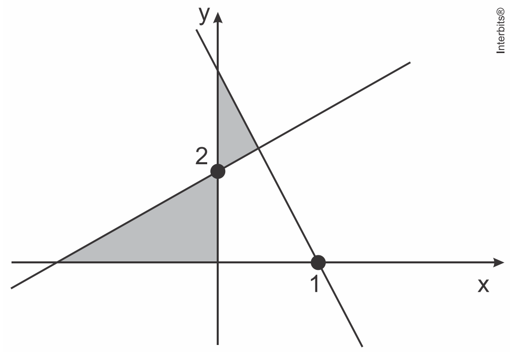


$d(AB) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$
$d(AB) = 4 + 2 = 6$

De acordo com o texto acima, assinale a alternativa que representa o conjunto dos infinitos pontos P do plano que estão à distância $d(OP) = 5$ do ponto O:



5. (UEMG 2017) No gráfico, representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a -3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é



a. 6 u.a.
b. $\frac{21}{5}$ u.a.
c. $\frac{29}{7}$ u.a.
d. $\frac{33}{7}$ u.a.

6. (UECE 2017) Em um plano, munido do referencial cartesiano usual, seja A o ponto de interseção das retas $3x + y + 4 = 0$ e $2x - 5y + 14 = 0$. Se os pontos B e C são respectivamente as interseções de cada uma destas retas com o eixo-x, então, a área do triângulo ABC, é igual

a. $\frac{13}{3}$ u.a.
b. $\frac{14}{3}$ u.a.

c. $\frac{16}{3}$ u.a.

d. $\frac{17}{3}$ u.a.

7. (UPE-SSA 3 2017) Qual é a medida da área do quadrilátero limitado pelas retas (r) $y = 4$; (s) $3x - y - 2 = 0$; (t) $y = 1$ e (u) $3x + 2y - 20 = 0$?

a. 7,5

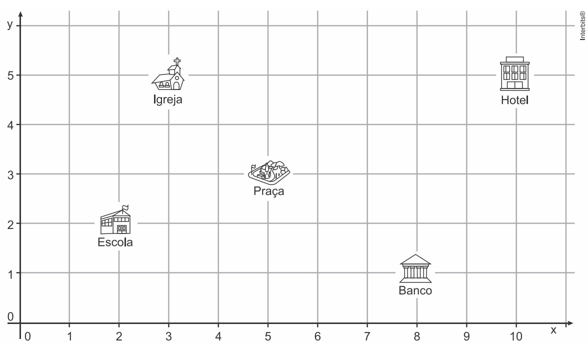
b. 9,0

c. 10,5

d. 11

e. 12

8. (UFSC 2017) A figura abaixo representa parte do mapa de uma cidade em que uma unidade linear do plano cartesiano corresponde a $1\,\text{km}$.



Com base nos dados da figura, é correto afirmar que:

01. A equação da reta que passa pela praça e pela igreja também passa pelo banco.

02. A reta que passa pelo banco e é perpendicular à reta que passa pela igreja e pelo hotel tem equação $y = 8$.

04. A equação da circunferência com centro na praça e que passa pela escola é $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$.

08. A distância da escola ao hotel é de $\sqrt{73}$ km.

16. A área do quadrilátero convexo formado pela escola, pelo banco, pelo hotel e pela igreja tem $23{,}5\ \text{km}^2$.

32. O ponto da circunferência, com centro na praça e que passa pela escola, que fica mais próximo da igreja é $(3, 4)$.

9. (UEM-PAS 2017) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal no plano, considere três pontos: $A(1, 3)$; $B(5, 3)$ e $C(3, 0)$. Então, é **correto** afirmar que:

01. A reta que passa pelos pontos A e B tem como equação $x = 3$.

02. A altura do triângulo ABC, em relação ao vértice C, mede $\sqrt{13}$.

04. A reta que passa pelos pontos A e C tem coeficiente angular igual $-\frac{3}{2}$.

08. A área do triângulo ABC é 6.

16. O triângulo ABC é equilátero.

10. (UECE 2017) Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $3x - 2y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 12 = 0$ representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos x é

Dados: u.a. $\equiv$ unidade de área

a. 9 u.a.

b. 10 u.a.

c. 11 u.a.

d. 12 u.a.

11. (UFRGS 2017) As retas de equações $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que

a. $a > 0$ e $b > 0$.

b. $a < 0$ e $b < 0$.

c. $a < -1$ e $b > 0$.

d. $a > 0$ e $b < 0$.

e. $a < -1$ e $b < 0$.

12. (ESC. NAVAL 2016) A área da região limitada pelos gráficos das funções $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = |x|$ e $y = \frac{3\sqrt{2} + 2x}{4}$ é igual a:

a. $\frac{3\sqrt{2}}{4}(3\pi - 2)$

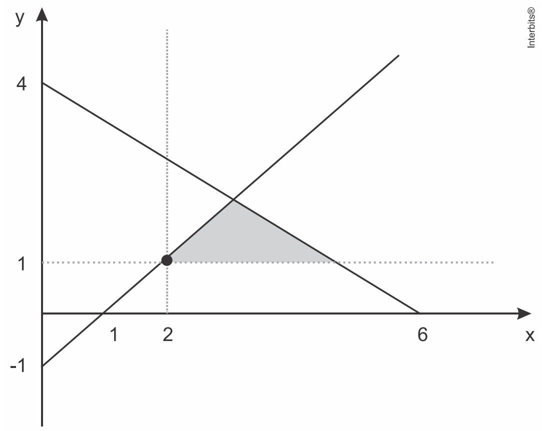
b. $\frac{3}{4}(\pi - 2)$

c. $\frac{3}{4}(\pi - 2\sqrt{2})$

d. $\frac{3}{4}(3\pi - 2)$

e. $\frac{3}{4}(3\pi - 2\sqrt{2})$

13. (UPE-SSA 3 2016) Qual é a medida da área do triângulo destacado na figura abaixo?



a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{5}$

e. $\frac{5}{4}$

14. (UDESC 2016) Dados os pontos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(7, 2)$, a medida da menor mediana, em unidades de comprimento, do triângulo isósceles que tem por base o segmento AC e que um dos lados está sobre a reta que passa pelos pontos A e B é igual a:

a. $\sqrt{5}$

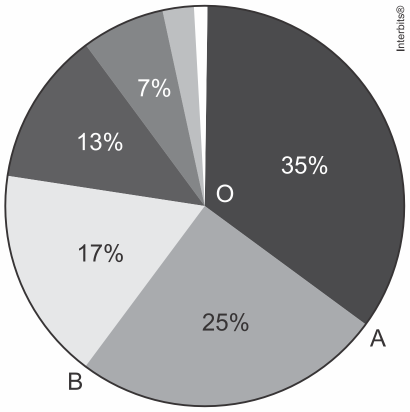
b. 2

c. 3

d. $\frac{5\sqrt{17}}{2}$

e. 5

15. (UEFS 2016)



O gráfico de setores da figura é gerado na tela de um computador usando um sistema de coordenadas cartesianas. As coordenadas do centro O são $(50, 30)$ e as do ponto A são $(58, 24)$.

Para que o setor OAB, correspondente a um valor de 25%, seja desenhado corretamente, a equação que descreve os pontos (x, y) do segmento BO deve ser

a. $y = 22 + \frac{4}{3}x$, com $0 \le x \le 6$

b. $y = 24 + \frac{3}{4}x$, com $0 \le x \le 8$

c. $y = 22 + \frac{4}{3}x$, com $44 \le x \le 50$

d. $y = 22 + \frac{4}{3}(x - 44)$, com $44 \le x \le 50$

e. $y = 24 + \frac{3}{4}(x - 42)$, com $42 \le x \le 50$

16. (ITA 2016) Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ e $(6, 4)$ em duas regiões da mesma área, então o valor de a é igual a

a. $2\sqrt{5} - 1.$

b. $2\sqrt{6} - 1.$

c. $3\sqrt{5} - 4.$

d. $2\sqrt{7} - 2.$

e. $3\sqrt{7} - 5.$

17. (UFJF-PISM 3 2015) Dado o triângulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (4, 2)$. Considere as seguintes afirmações:

I. O triângulo é retângulo.

II. O ponto médio do segmento de reta que liga os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é $M = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

III. A área do triângulo é $\frac{5}{2}$ unidades de área.

Diante da análise feita, marque a opção **CORRETA.**

a. Apenas a afirmação I é verdadeira.

b. Apenas a afirmação II é verdadeira.

c. Apenas a afirmação III é verdadeira.

d. Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

e. Todas as afirmações são verdadeiras.

18. (ESPCEX (AMAN) 2015) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x+3y-4=0$ é o ponto

a. $(-3,-1)$.

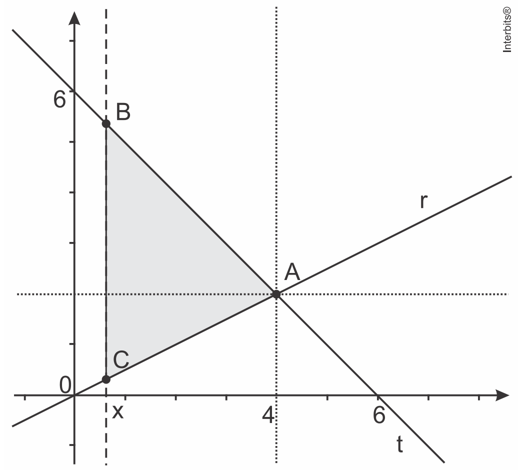
b. $(-1,-2)$.

c. $(-4,4)$.

d. $(3,8)$.

e. $(3,2)$.

19. (UDESC 2015) Seja f a função que representa a área do triângulo ABC, representado na figura.



A expressão da função $f(x)$, para $0 \leq x \leq 4$, é:

a. $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2-6x+12$

b. $f(x)=-3x+12$

c. $f(x)=-x^3+3x^2+x+12$

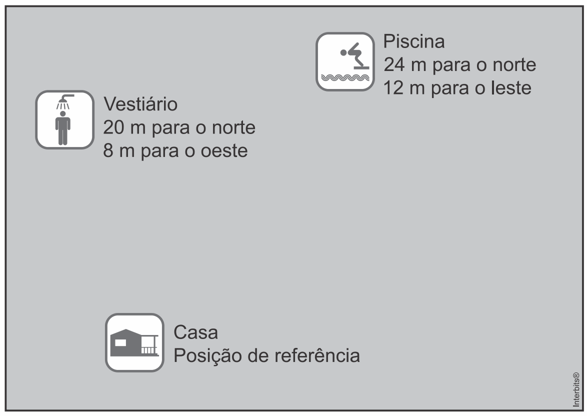
d. $f(x)=x^3-5x^2+4x+12$

e. $f(x)=-x^2+8x-16$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Utilize as informações a seguir para a(s) questão(ões) abaixo.

O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema abaixo, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.



20. (INSPER 2015) O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço numa localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

a. $4{,}2\text{ m}$ para o leste e $13{,}8\text{ m}$ para o norte.

b. $3{,}8\text{ m}$ para o oeste e $13{,}1\text{ m}$ para o norte.

c. $3,8 \text{ m}$ para o leste e $13,1 \text{ m}$ para o norte.

d. $3,4 \text{ m}$ para o oeste e $12,5 \text{ m}$ para o norte.

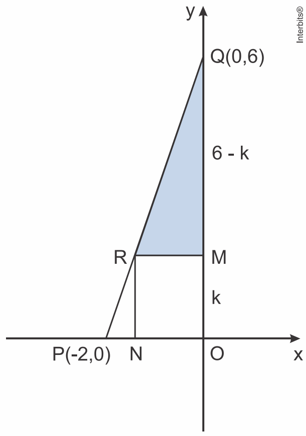
e. $3,4 \text{ m}$ para o leste e $12,5 \text{ m}$ para o norte.

ANOTAÇÕES

GABARITO

1. [C]

De acordo com as informações do problema e considerando $OMRN$ um quadrado de lado k, temos a seguinte figura:



$$\Delta QRM \sim \Delta QPO \Rightarrow \frac{6-k}{6} = \frac{k}{2} \Rightarrow 6k = 12 - 2k \Rightarrow 8k = 12 \Rightarrow k = 1{,}5$$

Portanto, o lado do quadrado é $1{,}5 \cdot 100 = 150\text{ m}.$

[A] Falsa, pois a abscissa do ponto R é $-1{,}5$

[B] Falsa, a área da região pavimentada é $150 \times 150 = 22.500\text{ m}^2.$

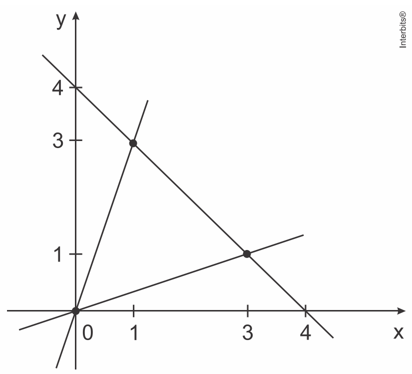
[C] **Verdadeira**, pois $1{,}5 > 7/5\ (1{,}4).$

[D] Falsa, a área verde será dada por $\dfrac{200 \cdot 600}{2} - 22.500 = 37.500\text{ m}^2.$

Resposta: [C], a ordenada de R é maior que $\dfrac{7}{5}.$

2. [C]

Considere a figura.



As retas $y = \dfrac{x}{3}$ e $y = 3x$ se intersectam no ponto $(0, 0)$; as retas $y = \dfrac{x}{3}$ e $y = -x + 4$ se intersectam no ponto $(3, 1)$ e as retas $y = 3x$ e $y = -x + 4$ se intersectam em $(1, 3).$ Logo, a área procurada é a do triângulo definido por esses três pontos.

A resposta é

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |9 - 1| = 4\text{ u.c.}^2$$

3. [D]

Seja A o ponto de interseção das retas $y = \dfrac{1}{2}x$ e $y = ax.$ Como ambas passam pela origem, temos $A = (0, 0).$ Ademais, sendo B o ponto de interseção das retas $y = \dfrac{1}{2}x$ e $y = -x + 3,$ vem

$$\frac{1}{2}x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Donde concluímos que $B = (2, 1).$

Finalmente, se C é o ponto de interseção das retas $y = -x + 3$ e $y = ax,$ com $a \neq 0,$ então

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 3 - x & 0 \end{matrix} \right\| \cdot 8 = 12 \Rightarrow |6 - 3x| = 3$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} 6 - 3x = 3 \\ \text{ou} \\ 6 - 3x = -3 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

Portanto, segue que $C = (1, 2)$ e, assim, a resposta é $0 + 2 + 1 = 3.$

4. [B]

Vamos supor que O é a origem do sistema cartesiano.

Seja $P(x, y).$

Assim, do enunciado, temos:

$$5 = |x - 0| + |y - 0|$$
$$|x| + |y| = 5$$

Daí,

$$\begin{cases} x + y = 5 & (x \geq 0, y \geq 0) \\ x - y = 5 & (x \geq 0, y \leq 0) \\ -x + y = 5 & (x \leq 0, y \geq 0) \\ -x - y = 5 & (x \leq 0, y \leq 0) \end{cases}$$

O sistema acima é representado pelo quadrado da alternativa [B].

5. [C]

A equação da reta que passa pelo ponto $(0, 2)$ é $y = \frac{1}{2}x + 2,$ enquanto que a reta que passa pelo ponto $(1, 0)$ tem por equação $y = -3x + 3.$

A área pedida corresponde à soma das áreas dos triângulos hachurados, ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| + \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 3 & \frac{15}{7} & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |8| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right|$$
$$= 4 + \frac{1}{7}$$
$$= \frac{29}{7} \text{ u.a.}$$

6. [D]

Determinando os pontos de intersecção da reta de equação $3x + y + 4 = 0$ com o eixo $x.$

Fazendo $y = 0,$ temos:

$$3x + 0 + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow B = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

Determinando os pontos de intersecção da reta de equação $2x - 5y + 14 = 0$ com o eixo $x.$

Fazendo $y = 0,$ temos:

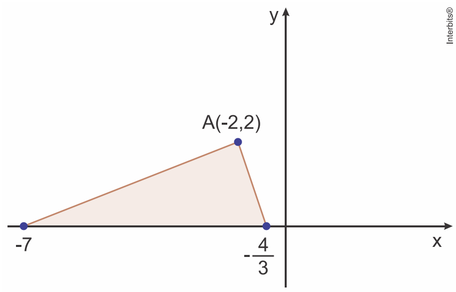
$$2x - 5 \cdot 0 + 14 = x = 7 \Rightarrow C = (-7, 0).$$

Determinado agora a ordenado do ponto de intersecção entre as retas.

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ 2x - 5y + 14 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -2$ e $y = 2$ (altura do triângulo) e o ponto $A(-2, 2).$

Temos então o triângulo ABC representado abaixo:

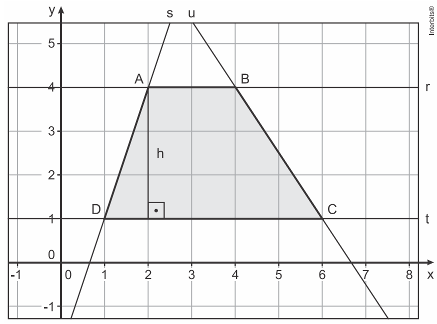


Logo, a área A do triângulo será dada por:

$$A = \frac{\left(\frac{-4}{3} - (-7)\right) \cdot 2}{2} = \frac{17}{3}$$

7. [C]

Determinando, inicialmente, os pontos A, B, C e D representados na figura a seguir:



$$r \cap s = \{A\}$$
$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2,4)$$

$$r \cap u = \{B\}$$
$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4,4)$$

$$t \cap s = \{C\}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6,1)$$

$$t \cap s = \{D\}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x - y - 2 - 0 \end{cases} \Rightarrow D(1,1)$$

Portanto, a área S do quadrilátero (trapézio) será dada por:

$$S = \frac{(AB + CD)\cdot h}{2} = \frac{(2+5)\cdot 3}{2} = 10{,}5$$

8. 04 + 08 + 16 = 28.

[01] Falsa. Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 25 + 3 + 24 - 9 - 40 - 5 = -2.$$

Portanto, a reta não passa pelos três pontos.

[02] Falsa. A reta que passa pela igreja e pelo hotel tem por equação $y = 5.$ Por outro lado, a reta que passa pelo banco e é perpendicular à reta $y = 5$ é a reta de equação $x = 8.$

[04] Verdadeira. O quadrado da distância entre a praça e a escola é igual a

$$d^2(P, E) = (5-2)^2 + (3-2)^2 = 10\,\text{km}^2.$$

Desse modo, a equação da circunferência com centro na praça e que passa pela escola é

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0.$$

[08] Verdadeira. De fato, temos

$$d(E, H) = \sqrt{(10-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{73}\,\text{km}.$$

[16] Verdadeira. Com efeito, segue que

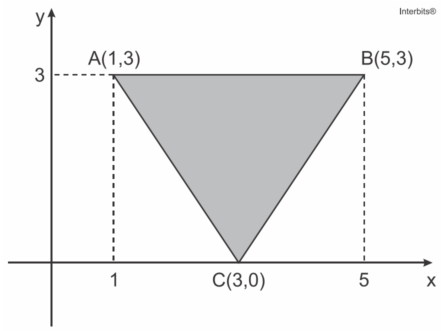
$$\begin{aligned}(EBHI) &= \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 2 & 8 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{matrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\cdot|2 + 40 + 50 + 6 - 16 - 10 - 15 - 10| \\ &= 23{,}5\,\text{km}^2.\end{aligned}$$

[32] Falsa. O ponto que está mais próximo da igreja corresponde ao ponto de interseção da reta que passa por $P(5, 3)$ e $I(3, 5)$ com a circunferência de equação $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10,$ de tal sorte que a abscissa desse ponto seja um número real menor do que $3.$

Portanto, não pode ser $(3, 4).$

9. 04 + 08 = 12.

Construindo o triângulo $ABC,$ temos:



[01] Falsa. A reta que passa pelos pontos A e B tem equação $y = 3.$

[02] Falsa. A altura mede relativa ao vértice C mede $3.$

[04] Verdadeira. Calculando o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e $B,$ temos:

$$m = \frac{0-3}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

[08] Verdadeira. Calculando a área do triângulo ABC obtemos:

$$A = \frac{(5-1)\cdot 3}{2} = 6$$

[16] Falsa, pois $AB = 5 - 1 = 4$ e $AC^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow AC = \sqrt{13}.$

10. [A]

A reta $y = \frac{3}{2}x + 3$ intersecta o eixo das abscissas no ponto $(-2, 0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0, 3).$ Já a reta $y = -\frac{3}{4}x + 3$ intersecta o eixo das abscissas no ponto $(4, 0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0, 3).$ Desse modo, a região cuja área queremos calcular corresponde ao triângulo de vértices $(-2, 0), (0, 3)$ e $(4, 0).$

O resultado é dado por

$$\frac{1}{2}\cdot(4-(-2))\cdot 3 = 9\,\text{u.a.}$$

11. [D]

Determinando o ponto de intersecção das retas resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = -x + b \end{cases}$$

$$ax = -x + b$$

$$x \cdot (a+1) = b$$

$$x = \frac{b}{a+1} \text{ e } y = \frac{a \cdot b}{a+1}$$

Considerando que $x < 0$ e $y < 0,$ podemos escrever que:

$$\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow \frac{\frac{a \cdot b}{a+1}}{\frac{b}{a+1}} > 0 \Rightarrow a > 0$$

Se $a > 0$ e $x = \frac{b}{a+1} < 0,$ concluímos que $b < 0.$

Portanto, a opção correta é:

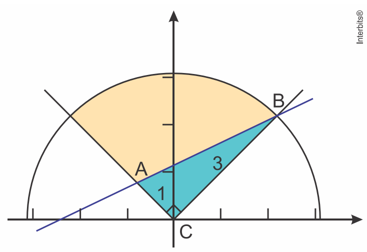
$a > 0$ e $b < 0.$

12. [D]

Sendo A e B os pontos de intersecção entre $y = \frac{3\sqrt{2} + 2x}{4}$ e $y = |\,x\,|,$ pode-se escrever:

$$\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{2} + 2x}{4} \\ y = |\,x\,| \end{cases} \rightarrow \pm x = \frac{3\sqrt{2} + 2x}{4} \rightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Desenhando os gráficos das funções e os pontos calculados, tem-se:



$$dist_{AC} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} \rightarrow dist_{AC} = 1$$

$$dist_{BC} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} \rightarrow dist_{BC} = 3$$

$$S_{ACB} = \frac{3 \cdot 1}{2} \rightarrow S_{ACB} = 3/2$$

$$S = S_{setor} - S_{ACB} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} - \frac{3}{2} \rightarrow S = 3/4 \cdot (3\pi - 2)$$

13. [E]

Calculando os pontos dos vértices do triângulo hachurado, tem-se:

Reta crescente: $y_1 = x - 1$

Reta decrescente: $y_2 = -\frac{4}{6}x + 4$

Ponto de encontro entre as duas retas:

$$x - 1 = -\frac{4}{6}x + 4 \rightarrow x = 3 \text{ e } y = 2$$

Quanto $y_2 = 1,$ x será:

$$y_2 = 1 = -\frac{4}{6}x + 4 \rightarrow x = \frac{18}{4} = 4{,}5$$

Com as coordenadas dos vértices do triângulo, pode-se escrever:

$$S_{triângulo} = \frac{(4{,}5 - 2) \cdot (2 - 1)}{2} = \frac{2{,}5}{2} \rightarrow S_{triângulo} = \frac{5}{4}$$

14. [C]

Seja P o ponto da reta que passa por A e $B,$ tal que o triângulo APC seja isósceles de base $AC.$ Daí, chamando de $M = (4, 2)$ o ponto médio do segmento $AC,$ é imediato que PM é mediana do triângulo $APC.$ Ademais, PM também é altura.

A equação da reta que passa por A e B é dada por

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Logo, temos $P = (4, 5)$ e, portanto, $\overline{PM} = 3\text{ u.c.}$

Por outro lado, sendo $\overline{AC} = 6\text{ u.c.},$ podemos concluir que o triângulo APC é retângulo isósceles. Em consequência, e pela desigualdade triangular, segue que a menor mediana do triângulo APC é $PM.$

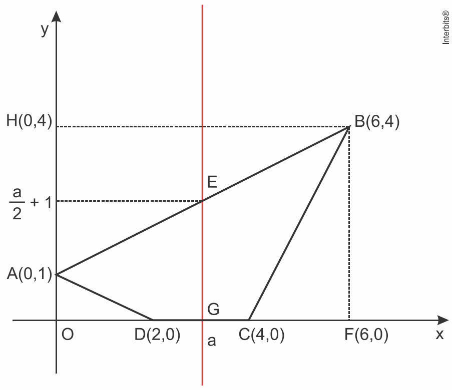
15. [D]

Como $0{,}25 \cdot 360° = 90°,$ tem-se que as retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ são perpendiculares. Logo, a equação da reta $\overleftrightarrow{OB}$ é dada por

$$y - 30 = -\frac{58 - 50}{24 - 30}(x - 50) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{110}{3}.$$

Portanto, a resposta é $y = 22 + \frac{4}{3}(x - 44),$ com $44 \le x \le 50.$

16. [D]



Determinando, inicialmente, a equação da reta AB.

$$y=\frac{4-1}{6-0}\cdot x+1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1$$

Como o ponto E pertence à reta AB, podemos escrever que $P(a, \frac{a}{2}+1)$.

Calculando, agora, a área do quadrilátero ABCD.

$$A_{(ABCD)}=A_{(HBFO)}-A_{(AOD)}-A_{(BCF)}-A_{(ABH)}$$
$$A_{(ABCD)}=6\cdot 4-\frac{2\cdot 1}{2}-\frac{2\cdot 4}{2}-\frac{3\cdot 6}{2}$$
$$A_{(ABCD)}=10$$

Portanto a área do quadrilátero GEBC é igual a 5.

$$A_{(GEBC)}=5 \Rightarrow A_{(EGCB)}-A_{(BCF)}\cdot=5 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+1+4\right)\cdot(6-a)-\frac{2\cdot 4}{2}=5$$
$$\Rightarrow (\frac{a}{2}+5)\cdot(6-a)=18 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot a^2-2a+12=0 \Rightarrow a^2+4a-24=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{-4\pm 4\sqrt{7}}{2} \Rightarrow a=-2\pm 2\sqrt{7}$$

Como $a>0$, temos: $a=2\sqrt{7}-2$

17. [E]

[I] Verdadeira. Tem-se que

$$d(A, B)=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5},$$
$$d(A, C)=\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

e

$$d(B, C)=\sqrt{(4-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}.$$

Daí, como $d^2(A, C)=d^2(A, B)+d^2(B, C)$, segue que o triângulo ABC é retângulo em B.

[II] Verdadeira. De fato, o ponto médio do lado AB é $P=\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, o ponto médio do lado BC é $Q=\left(3, \frac{5}{2}\right)$ e, portanto, o ponto médio do segmento PQ é $M=\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

[III] Verdadeira. A área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{matrix}\right\|$$
$$=\frac{1}{2}\cdot|3+4+4-2-12-2|$$
$$=\frac{5}{2}\text{ u.a.}$$

18. [A]

Considerando, $(r)\,2x+3y-4=0$ e $P(1, 5)$

Determinando a equação da reta (s) perpendicular a reta (r) e que passa pelo ponto $(1, 5)$

$$(s)\,3x-2y+k=0$$
$$3-10+k=0$$
$$k=7$$

Logo, a equação da reta (s) será dada por $3x-2y+7=0$.

Determinando, o ponto M de intersecção das retas r e s.

$$\begin{cases}2x+3y-4=0\\ 3x-2y+7=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $M(-1, 2)$.

Determinando agora o ponto A simétrico do ponto p em relação à reta r, M é ponto médio de PA.

$$\frac{1+x_A}{2}=-1 \Rightarrow x_A=-3$$
$$\frac{5+x_A}{2}=2 \Rightarrow x_A=-1$$

Logo, $A(-3, -1)$.

19. [A]

A reta t passa pelos pontos $(0, 6)$ e $(6, 0)$. Logo, sua equação é

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow y=-x+6.$$

Se A é o ponto de intersecção das retas r e t, então

$$y_A=-4+6=2.$$

Em consequência, a equação da reta r é

$$y = \frac{2}{4} \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Portanto, sendo $A = (4, 2)$, $B = (x, -x+6)$ e $C = \left(x, \frac{x}{2}\right)$ a lei da função f é tal que

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 4 & x & x & 4 \\ 2 & -x+6 & \frac{x}{2} & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -4x + 24 + \frac{x^2}{2} + 2x - 2x + x^2 - 6x - 2x \right|$$

$$= \left| \frac{3x^2}{4} - 6x + 12 \right|.$$

Observando que $\frac{3x^2}{4} - 6x + 12 \geq 0$ para todo x real, segue-se que $f(x) = \frac{3x^2}{4} - 6x + 12$, para $0 \leq x \leq 4$.

20. [C]

Sejam $C(0, 0)$, $V(-8, 20)$, $P(12, 24)$ e $A(x, y)$, respectivamente, os pontos que indicam as posições da casa, do vestiário, do poço e da piscina. Tem-se que

$$d(A, C) = d(A, V) = d(A, P)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+8)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-12)^2 + (y-24)^2}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} x^2 + y^2 = (x+8)^2 + (y-20)^2 \\ (x+8)^2 + (y-20)^2 = (x-12)^2 + (y-24)^2 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} 2x - 5y = -58 \\ 5x + y = 32 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} x \cong 3,8 \text{ m} \\ y \cong 13,1 \text{ m} \end{matrix} \right.$$

Portanto, a piscina deverá ser construída, em relação à casa, na posição dada por, aproximadamente, $3,8$ metros para leste e $13,1$ metros para o norte.

ANOTAÇÕES