

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

ASSUNTO: ARCO DUPLO, ARCO METADE E ARCO TRIPLLO

## EAD – ITA/IME

### AULAS 13 A 15



### Resumo Teórico

#### Transformações trigonométricas

• ARCO DUPLO

$$\begin{cases} \sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \\ \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{cases}$$

• ARCO METADE

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \end{cases}$$

• ARCO TRIPLLO

$$\begin{cases} \sin(3x) = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x \\ \cos(3x) = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x \\ \operatorname{tg}(3x) = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x} \end{cases}$$



### Exercícios

01. O conjunto imagem e o período de  $f(x) = 2\sin^2(3x) + \sin(6x) - 1$  são, respectivamente,

- A)  $[-3, 3]$  e  $2\pi$       B)  $[-2, 2]$  e  $\frac{2\pi}{3}$   
 C)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  e  $\frac{\pi}{3}$       D)  $[-1, 3]$  e  $\frac{\pi}{3}$   
 E)  $[-1, 3]$  e  $\frac{2\pi}{3}$

02. Considere  $\alpha$  e  $\beta$  números reais que satisfazem a equação

$$(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Marque a alternativa correta.

- A)  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$   
 B)  $\alpha - \beta \in \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$   
 C)  $\alpha - \beta \in \{(2k + 1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$   
 D)  $\alpha - \beta \in \left\{\frac{\pi}{2} + 4k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$   
 E)  $\alpha - \beta \in \left\{\frac{\pi}{6} + 10k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

03. Calculando o valor da expressão:

$$y = \operatorname{tg}10^\circ \cdot (3\cos10^\circ - 2\sin10^\circ \cdot \cos70^\circ),$$

sem emprego de tábuas, obtém-se:

- A) 1      B)  $\frac{1}{4}$   
 C)  $\frac{1}{6}$       D)  $\frac{1}{8}$   
 E)  $\frac{1}{2}$

04. Determine o valor da soma  $S = \sec40^\circ + \sec80^\circ + \sec160^\circ$ .

- A) 9  
 B) 8  
 C) 7  
 D) 6  
 E) 5

05. Mostre que  $\cos20^\circ$  não é um número racional.

06. Determine o valor máximo de  $f(x) = \sin^2 x + 6\cos^2 x + 12\sin x \cos x$ .

- A) 14  
 B) 13  
 C) 12  
 D) 11  
 E) 10

07. Se  $4 \cdot \sin \alpha - 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 5$ , então o valor de  $\cos 2\alpha - 12\sqrt{2} \cdot \sin 2\alpha$  é igual a

- A) 8  
 B) 6  
 C) 4  
 D) 2  
 E)  $\frac{1}{2}$

08. Calcule o valor de

$$M = \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right).$$

- A) 1  
B)  $\frac{1}{2}$   
C)  $\frac{1}{4}$   
D)  $\frac{1}{8}$   
E)  $\frac{1}{16}$

09. Se  $k = \frac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{cotg}40^\circ}{\operatorname{cotg}20^\circ - \operatorname{cotg}40^\circ}$ , então  $k$  é igual a

- A) 1  
B) 0,5  
C) 0,25  
D) -0,5  
E) -0,25

10. Se  $W = 4 - 8\operatorname{sen}^2 9^\circ - 3\operatorname{sec} 18^\circ$ , então uma expressão equivalente para  $W$  será:

- A)  $\operatorname{tg}9^\circ$   
B)  $\operatorname{tg}18^\circ$   
C)  $2\operatorname{tg}18^\circ$   
D)  $2\operatorname{tg}9^\circ$   
E)  $\operatorname{tg}36^\circ$

11. Se  $k = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{50}\right)}}$ , então  $k$  é igual a

- A)  $-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{100}\right)$   
B)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{400}\right)$   
C)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{100}\right)$   
D)  $-\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{200}\right)$   
E)  $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{200}\right)$

12. Se  $Q = \frac{\sqrt[3]{1+6\cos 20^\circ}}{2\cos 20^\circ}$ , então  $Q$  vale:

- A) 1  
B) 0  
C) 0,5  
D) 1,5  
E) 3

13. Se  $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)$  é igual a:

- A)  $-\frac{\sqrt{5}}{4}$   
B)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$   
C)  $-\frac{\sqrt{5}}{10}$   
D)  $-\frac{\sqrt{5}}{15}$   
E)  $-\frac{\sqrt{5}}{20}$

14. Seja  $n$  um inteiro positivo tal que  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ .

- A) Determine  $n$ .  
B) Determine  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{24}$ .

15. Assinale a alternativa que apresenta o mesmo valor da expressão  $[4\cos^2(9^\circ) - 3][4\cos^2(27^\circ) - 3]$ :

- A)  $\operatorname{sen}(9^\circ)$   
B)  $\operatorname{tg}(9^\circ)$   
C)  $\operatorname{cos}(9^\circ)$   
D)  $\operatorname{sec}(9^\circ)$   
E)  $\operatorname{cossec}(9^\circ)$

## Gabarito

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 |
|----|----|----|----|----|
| C  | C  | E  | D  | -  |
| 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
| E  | A  | D  | A  | C  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| E  | A  | B  | -  | B  |

- Demonstração.