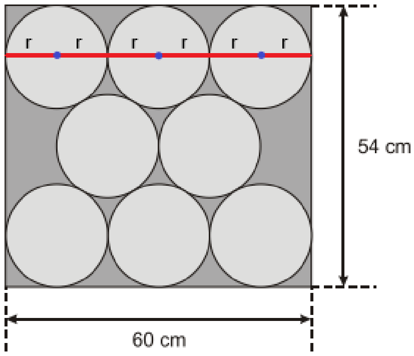
Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 ==

A partir da imagem da questão conseguimos calcular o raio de cada círculo da figura com a igualdade $6 \cdot r = 60$, como vemos na imagem abaixo.



Resolvendo a equação acima temos que o raio dos círculos valem:

$$6 \cdot r = 60 \rightarrow r = \frac{60}{6} \rightarrow r = 10\,cm$$

Agora para calcularmos qual é a área desperdiçada de cartolina devemos calcular a área total da cartolina e subtrairmos a área de todos os círculos, obtendo assim a área desperdiçada de cartolina.

- Área da cartolina:

$$\begin{aligned}
&\text{Área da cartolina} = 60 \cdot 54\\
&\text{Área da cartolina} = 6 \cdot 540\\
&\text{Área da cartolina} = (5+1) \cdot 540\\
&\text{Área da cartolina} = 2.700 + 540 = 3.240\,cm^2
\end{aligned}$$

- Área de todos os círculos:

$$\begin{aligned}
&\text{Área total dos círculos} = n^{o}\,\text{cículos} \cdot \text{área do círculo}\\
&\text{Área total dos círculos} = 8 \cdot \pi \cdot r^2\\
&\text{Área total dos círculos} = 8 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2\\
&\text{Área total dos círculos} = (10-2) \cdot 3{,}14 \cdot 100\\
&\text{Área total dos círculos} = (10-2) \cdot 314\\
&\text{Área total dos círculos} = 3.140 - 628 = 2.512\,cm^2
\end{aligned}$$

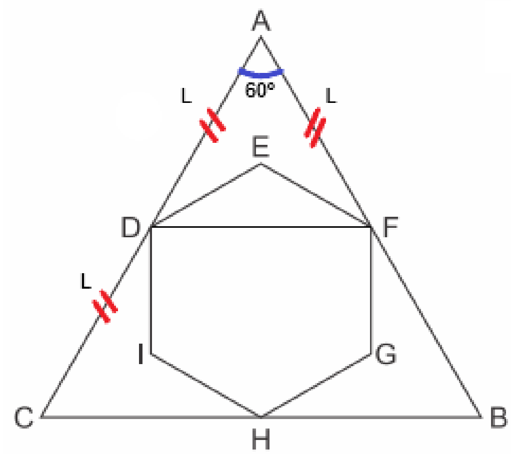
Por fim, calculando a área desperdiçada temos:

$$\begin{aligned}
&\text{Área desperdiçada} = \text{Área da cartolina} - \text{Área total círculos}\\
&\text{Área desperdiçada} = 3.240 - 2.512\\
&\text{Área desperdiçada} = 3.240 - (3.140 - 628)\\
&\text{Área desperdiçada} = 3.240 - 3.140 + 628\\
&\text{Área desperdiçada} = 100 + 628 = 728\,cm^2
\end{aligned}$$

Resposta: Letra A.

Item 02 ==

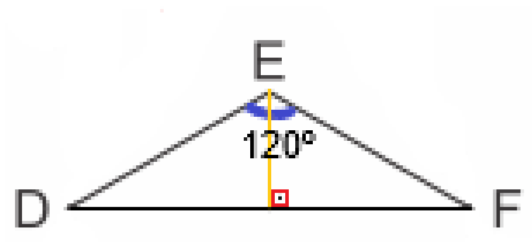
A partir da imagem e dos dados da questão conseguimos construir a seguinte figura.



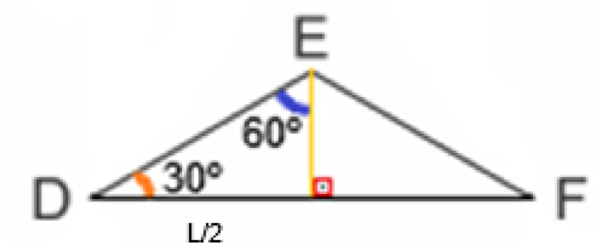
Com isso concluímos que o segmento DF também mede L já que também é um triângulo equilátero. Com isso como DEFGHI é um hexágono regular, vamos calcular quanto vale cada ângulo interno desse hexágono, obtendo:

$$\begin{aligned}
&\text{ângulo interno} = 180 - \text{angulo externo}\\
&\text{ângulo interno} = 180 - \frac{360}{6}\\
&\text{ângulo interno} = 180 - 60\\
&\text{ângulo interno} = 120^{o}
\end{aligned}$$

Dessa forma, destacando o triangulo DEF e traçando a perpendicular a partir do ângulo E, obtemos a seguinte imagem.



Assim, conseguimos correlacionar o lado do hexágono (DE) com o lado do triângulo equilátero (2L) como vemos abaixo no triângulo DEJ que é retângulo e seus outros ângulos são 30º e 60º.



Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Calculando o valor de DE em função de L, obtemos:

$$\frac{\frac{L}{2}}{sen\,(60^o)}=\frac{DE}{sen\,(90^o)}$$

$$\frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{DE}{1}\rightarrow DE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{L}{2}$$

$$DE=\frac{L}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\rightarrow DE=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$DE=\frac{\sqrt{3}L}{3}$$

Agora vamos calcular a área do triângulo equilátero ABC e do hexágono regular DEFGHI que valem:

- Área hexágono DEFGHI:

$$\text{Área do hexágono DEFGHI}=6\cdot\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do hexágono DEFGHI}=6\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{3}L}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do hexágono DEFGHI}=6\cdot\frac{\frac{3}{9}L^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do hexágono DEFGHI}=2\cdot3\cdot\frac{3}{9}\cdot L^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\text{Área do hexágono DEFGHI}=\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$$

- Área triângulo ABC:

$$\text{Área do triângulo ABC}=\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do triângulo ABC}=\frac{(2L)^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do triângulo ABC}=\frac{4L^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do triângulo ABC}=L^2\sqrt{3}$$

Por fim calculando a razão entre essas duas áreas, temos:

$$razão=\frac{\text{Área do hexágono DEFGHI}}{\text{Área do triângulo ABC}}$$

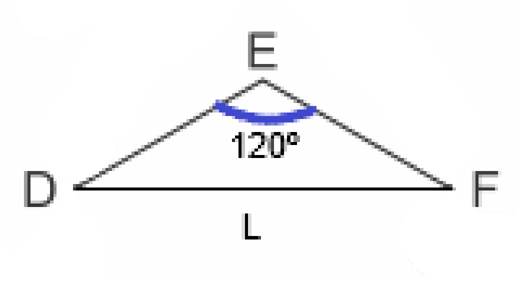
$$razão=\frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{2}}{L^2\sqrt{3}}\rightarrow razão=\frac{L^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{L^2\sqrt{3}}$$

$$razão=\frac{1}{2}$$

Resposta: Letra B.

Observação 1: Partir para calcular a razão direto é uma forma de acelerar a resolução da questão pois irão ocorrer muitas simplificações já que estão em função da mesma incógnita.

Observação 2: Uma outra forma de acharmos a relação do lado do hexágono (DE) com o lado do triangulo ABC (2L) seria utilizando a lei dos cossenos, como vemos abaixo.



$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\theta$$

$$DF^2=DE^2+EF^2-2\cdot DE\cdot EF\cdot\cos(120^o)$$

$$L^2=DE^2+DE^2-2\cdot DE\cdot DE\cdot-\frac{1}{2}$$

$$L^2=3\cdot DE^2\rightarrow DE^2=\frac{L^2}{3}\rightarrow DE=\sqrt{\frac{L^2}{3}}$$

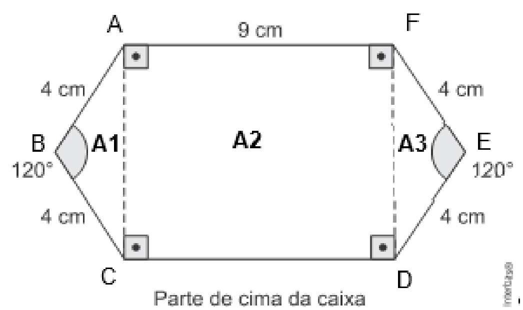
$$DE=\frac{L}{\sqrt{3}}\rightarrow DE=\frac{L\sqrt{3}}{3}$$

Observação 3: **Uma outra forma para acharmos o valor do ângulo interno do hexágono regular seria calculando a soma dos ângulos interno de um hexágono e depois dividindo por 6, uma vez que ele é regular. No entanto acho ela um pouquinho mais longa e requer lembrarmos uma fórmula não muito comum.**

Item 03 =======================================

Por Lei dos Cossenos

Pela imagem abaixo temos que a Área total (Att) é obtida por meio da soma de A1 com A2 com A3.



Calculando as áreas A1 = A3, temos:

$$A1=A3=\frac{1}{2}\times BA\times BC\times sen(120^o)$$

$$A1 = A3 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$OBS: sen(120^o) = sen(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora, para calcularmos A2, encontramos o valor de AC = FD e multiplicamos por 9, como:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos(120^o)$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times -\frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 16 + 16 + 16 \rightarrow AC^2 = 16 \times 3$$

$$AC = \sqrt{4^2 \times 3} \rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$A2 = 9 \times AC \rightarrow A2 = 9 \times 4\sqrt{3}$$

$$OBS: \cos(120^o) = -\cos(60^o) = -\frac{1}{2}$$

Por fim, calculando a área total (Att), temos:

$$Att = A1 + A2 + A3$$

$$Att = 4\sqrt{3} + 9 \times 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$Att = 11 \times (4\sqrt{3}) \rightarrow Att = 11 \times 6{,}8 = 74{,}8$$

Resposta: Letra D.

OUTRA FORMA (Lei dos Senos)

Sabemos que a Área total (Att) é obtida por meio da soma de A1 com A2 com A3 (mesma figura da primeira forma de resolução). Como cada um dos triângulos laterais que formam o hexágono são triângulos isósceles, pode-se deduzir que, se seu maior ângulo é $120°$, então os dois menores ângulos serão iguais a $30°$. Considerando AC como sendo a base do triângulo isósceles, pela lei dos senos tem-se:

$$\frac{AC}{sen(120^o)} = \frac{4}{sen(30^o)} \rightarrow \frac{AC}{sen(60^o)} = \frac{4}{sen(30^o)}$$

$$\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \rightarrow AC \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow AC = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$$

$$AC = 4\sqrt{3}$$

$$OBS: sen(120^o) = sen(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por fim, calculando a área total (Att), temos:

$$Att = A1 + A2 + A3$$

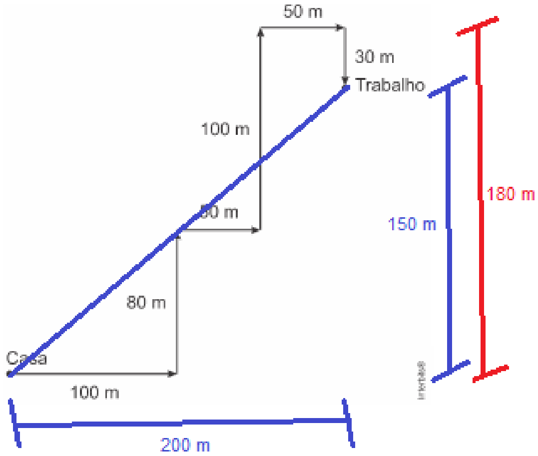
$$Att = 2 \times \left(\frac{4 \times 4\sqrt{3} \times sen(30^o)}{2} \right) + 9 \times 4\sqrt{3}$$

$$Att = 11 \times (4\sqrt{3}) \rightarrow Att = 11 \times 6{,}8 = 74{,}8$$

Resposta: Letra D.

Item 04 ==

Essa questão tem uma resolução bem simples se fizermos a construção geométrica certa, que é simplesmente uma reta unindo diretamente a casa ao trabalho, que é a menor possível:



Com isso, nós podemos calcular separadamente o a distância da casa de Carlos ao trabalho nas direções vertical e horizontal, basta somar as distâncias de cada segmento do trajeto. No final, nós teremos 200 m horizontais e 150 m verticais (desprezamos aqueles 30m pra cima do trabalho que Carlos andou, já que só queremos a distância da casa ao trabalho), e para encontrar a distância total da casa ao trabalho, basta aplicarmos Pitágoras com esses dois valores.

No entanto, não precisamos fazer nenhuma conta, porque esse triângulo de catetos 150 e 200 é uma variação do triângulo 3:4:5 (3x50 e 4x50) e sua hipotenusa valerá 5x50= 250 m

Mas notemos que isso não é a resposta. O que Carlos quer saber é quantos metros a menos ele caminharia caso seguisse em linha reta, ou seja, ele quer a diferença entre o caminho real e esse caminho ideal, que é o menor possível. Para encontrar a distância do caminho real, basta somar todos os pedaços do percurso original:

$$d_{real} = 100 + 80 + 50 + 100 + 50 + 30$$
$$d_{real} = 410m$$

E a resposta será a diferença entre as duas distâncias:

$$d_{real} - d_{reta}$$
$$410 - 250$$
$$160m$$

Resposta: Letra C.

Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 05 ==

Para a escala do folheto de propaganda (1:50) temos que a área do desenho é:

$$\text{ÁREA folheto} = \frac{600}{50} \bullet \frac{800}{50} \rightarrow \text{ÁREA folheto} = 12 \bullet 16$$

$$\text{ÁREA folheto} = (14)^2 - (2)^2 \rightarrow \text{ÁREA folheto} = 196 - 4$$

$$\text{ÁREA folheto} = 192\text{cm}$$

Observação: Uma forma de facilitar as contas no ENEM é aplicar a diferença de quadrados como o Fredão explica.

Já para a nova escala (1:40) a área é:

$$\text{ÁREA nova} = \frac{600}{40} \bullet \frac{800}{40} \rightarrow \text{ÁREA nova} = 15 \bullet 20$$

$$\text{ÁREA nova} = 300\text{cm}$$

Assim, área que aumentou é dada pela diferença entre as áreas, sendo:

$$\text{diferença} = \text{ÁREA nova} - \text{ÁREA folheto}$$

$$\text{diferença} = 300 - 192 \rightarrow \text{diferença} = 108\text{cm}$$

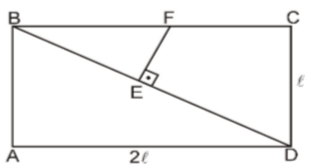
Observação: Comece a leitura pelo enunciado marcando as partes importantes para que não tenha o risco de calcular apenas a nova área e marcar a letra D, ou ainda calcule a diferença de áreas em metros e marque a letra A.

Resposta: Letra B.

Item 06 ==

Área de Triângulos e Proporção $\left(\frac{L1}{L2}\right)^2 = \frac{A1}{A2}$

A partir do enunciado conseguimos calcular as áreas do quadrado ABCD, triângulo ABD e triângulo BEF, que são:



$$\text{ÁreaABCD} = \text{Base} \times \text{Altura}$$

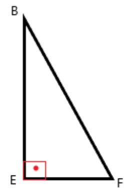
$$\text{ÁreaABCD} = 2l \times l$$

$$\text{ÁreaABCD} = 2l^2$$

$$\text{ÁreaABD} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$$

$$\text{ÁreaABD} = \frac{2l \times l}{2}$$

$$\text{ÁreaABD} = l^2$$



$$\text{ÁreaBEF} = \frac{1}{5} \times \text{ÁreaABCD}$$

$$\text{ÁreaBEF} = \frac{1}{5} \times 2l^2$$

$$\text{ÁreaBEF} = \frac{2l^2}{5}$$

Agora calculando BD pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$BD^2 = BA^2 + AD^2$$

$$BD^2 = L^2 + (2L)^2 \rightarrow BD^2 = 5L^2$$

$$BD = \sqrt{5L^2} \rightarrow BD = L\sqrt{5}$$

Por fim, aplicando semelhança de triângulo nos triângulos ABD e BEF, temos que BF é:

$$\left(\frac{BF}{BD}\right)^2 = \left(\frac{\text{ÁreaABD}}{\text{ÁreaBEF}}\right) \rightarrow \left(\frac{BF}{L\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2L^2}{5}}{L^2}\right)$$

$$\frac{BF^2}{5L^2} = \frac{\frac{2L^2}{5}}{L^2} \rightarrow BF^2 \bullet L^2 = 5L^2 \bullet \frac{2L^2}{5}$$

$$BF^2 = 2L^2 \rightarrow BF = \sqrt{2L^2} \rightarrow BF = L\sqrt{2}$$

Resposta: Letra E

Item 07 ==

A questão nos dá o valor do raio da pista circular, logo é simples para nós encontrar o comprimento de uma volta da pista:

$$C = 2\pi r = 2 \times 3 \times 35$$

$$C = 210\text{m}$$

Mas Ruan quer andar 21km, ou 21.000 metros, logo, como em cada volta ele anda 210m, podemos encontrar o número necessário de voltas por regra de 3:

$$\frac{1}{n} = \frac{210}{21000} \rightarrow n = 100$$

Resposta: Letra A.

Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 08 ==

A partir da imagem conseguimos a seguinte equação:

$$distância\ dos\ centros = r_A + r_B$$

Como as duas engrenagens não deslizam entre si, ou seja, percorrem a mesma distância. E ainda que a engrenagem menor dá 1000 voltas, enquanto a maior dá 375 voltas durante o mesmo intervalo de tempo. Podemos correlacionar o número de voltas com o raio de cada uma das esferas obtendo:

$$distância\ engrenagem\ A = distância\ engrenagem\ B$$

$$2 \cdot \pi \cdot r_A \cdot n^o\ de\ voltas\ para\ A = 2 \cdot \pi \cdot r_B \cdot n^o\ de\ voltas\ para\ B$$

$$r_A \cdot n^o\ de\ voltas\ para\ A = r_B \cdot n^o\ de\ voltas\ para\ B$$

$$r_A \cdot 375 = r_B \cdot 1.000 \rightarrow r_A = \frac{r_B \cdot 1.000}{375}$$

$$r_A = \frac{125 \cdot 8}{125 \cdot 3} \cdot r_B \rightarrow r_A = \frac{8}{3} \cdot r_B$$

Assim, substituindo a relação que encontramos acima na primeira equação temos:

$$distância\ dos\ centros = r_A + r_B$$

$$distância\ dos\ centros = \frac{8}{3} \cdot r_B + r_B$$

$$distância\ dos\ centros = \frac{8}{3} \cdot r_B + \frac{3}{3} \cdot r_B$$

$$distância\ dos\ centros = \frac{11}{3} \cdot r_B$$

Resolvendo a equação acima temos que o raio da menor engrenagem

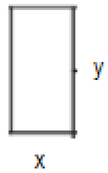
$$distância\ dos\ centros = \frac{11}{3} \cdot r_B$$

$$11 = \frac{11}{3} \cdot r_B \rightarrow r_B = \frac{11}{\frac{11}{3}} \rightarrow r_B = 11 \cdot \frac{3}{11} \rightarrow r_B = 3\,cm$$

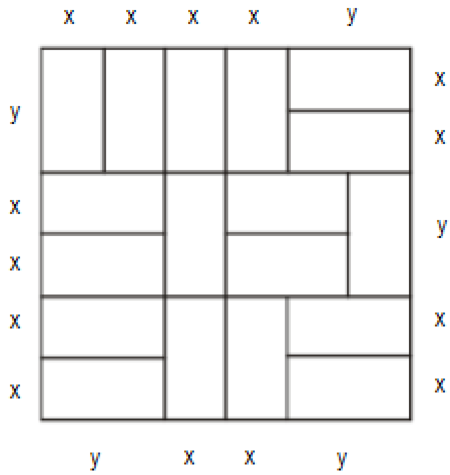
Resposta: Letra B.

Item 09 ==

Chamando cada um dos lados dos retângulos que compõe o quadrado da figura de x (menor lado) e y (maior lado).



Colocando x e y na figura do enunciado:



Com isso podemos estabelecer uma relação entre x e y, igualando o lado de cima e o lado de baixo do quadrado acima.

$$4x + y = 2x + 2y$$

$$2x = y$$

Ou seja, cada lado do quadrado acima mede:

$$4x + y \rightarrow 4x + (2x) = 6x$$

Escrevemos a área desse quadrado, que é de 12 cm^2, em função do lado e chegamos no valo de x:

$$Área = lado^2$$

$$12 = (6x)^2$$

$$12 = 36x^2$$

$$x^2 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Como sabemos que 2x = y, o valor de y é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Portanto, o perímetro de cada retângulo que mede 2x + 2y será:

$$2x + 2y =$$

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} =$$

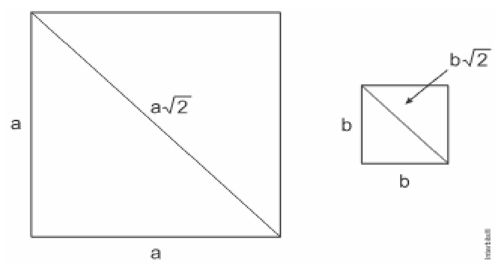
$$\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Perímetro} = 2\sqrt{3}$$

Resposta: Letra C.

Item 10 ==

Essa questão é legal, porque eu lembro que tinha algumas questões da aula de triângulo) que eram com o tal do “triângulo quadrado” (apelido didático, lembrem kkkkk). Então vai ser bem facinha da gente entender e fazer aqui.



A diagonal do quadrado coincide com a hipotenusa dos 2 triângulos quadrados que a compõem. Então é só lembrar que ela vale $\text{cateto} \cdot \sqrt{2}$, e, portanto, $\text{lado do quadrado} \cdot \sqrt{2}$

Mas ok, na aula de áreas, o Lobo revisa esse conceito e mostra novamente que a diagonal vale $\text{cateto} \cdot \sqrt{2}$

Top, relembramos a teoria, vamos fazer a questão:

i) Achar a relação entre os lados a partir da razão entre as áreas fornecida

$$\text{Área}_A = 9 \cdot \text{Área}_B$$

$$a^2 = 9 \cdot b^2$$

$$a = 3b$$

ii) Achar as diagonais

$$\text{Diagonal}_A = \text{lado}_A \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Diagonal}_B = \text{lado}_B \cdot \sqrt{2} = b\sqrt{2}$$

$$a = 3b$$

$$\text{Diagonal}_A = 3b\sqrt{2}$$

$$\text{Diagonal}_B = b\sqrt{2}$$

iii) Razão entre a diagonal do B e a diagonal do A

$$\frac{\text{Diagonal}_B}{\text{Diagonal}_A} = \frac{b\sqrt{2}}{3b\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

Denominador é 3, e 3 é um número primo.

Resposta: Letra B.

Item 11 ==

Primeiro, utilizamos o teorema de Pitágoras para descobrir quanto vale o cateto “x”.

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}_1^{\,2} + \text{Cateto}_2^{\,2}$$

$$(16)^2 = \left(4\sqrt{7}\right)^2 + x^2$$

$$x^2 = (16)^2 - \left(4\sqrt{7}\right)^2$$

$$x^2 = 256 - \left(4^2 \cdot 7\right)$$

$$x^2 = 256 - (16 \cdot 7)$$

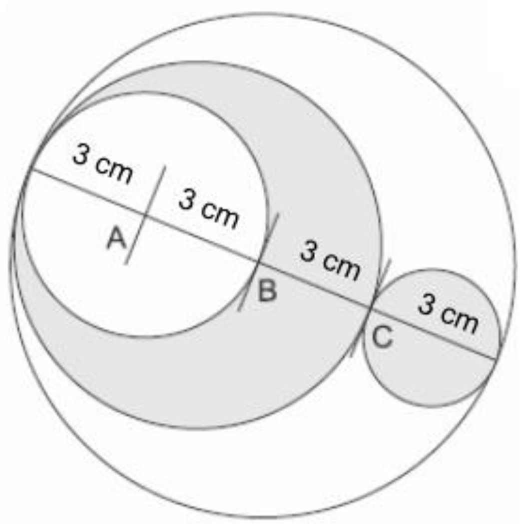
$$x^2 = 256 - 112$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

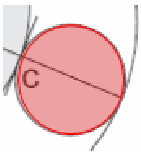
Com isso temos que o diâmetro da maior circunferência mede

12 cm, e como A, B e C dividem este diâmetro em partes iguais, cada parte mede 12/4 = 3 cm.



Agora, calculamos a área hachurada.

i) Calculando a área da menor circunferência:



$$\text{Área da circunferência} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

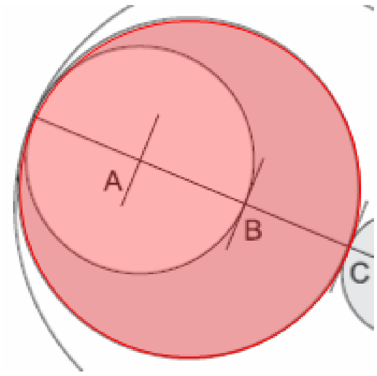
Onde r é o raio e d é o diâmetro.

$$\text{Área}_{\text{menor}} = \frac{\pi(d_{\text{menor}})^2}{4}$$

$$\text{Área}_{\text{menor}} = \frac{\pi \cdot (3)^2}{4}$$

$$\text{Área}_{\text{menor}} = \frac{9\pi}{4}$$

ii) Calculando a área da circunferência de segundo maior tamanho:

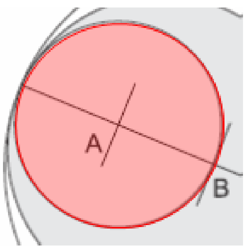


$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{maior}} = \frac{\pi(d_{2^{\text{a}}\text{maior}})^2}{4}$$

$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{maior}} = \frac{\pi \cdot (9)^2}{4}$$

$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{maior}} = \frac{81\pi}{4}$$

iii) Calculando a área da circunferência de segundo menor tamanho:



$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{menor}} = \frac{\pi(d_{2^{\text{a}}\text{menor}})^2}{4}$$

$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{menor}} = \frac{\pi \cdot (6)^2}{4}$$

$$\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{menor}} = \frac{36\pi}{4}$$

iv) Por fim, calculamos a área hachurada a partir do que achamos anteriormente que será igual a:

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \text{Área}_{\text{menor}} + (\text{Área}_{2^{\text{a}}\text{maior}} - \text{Área}_{2^{\text{a}}\text{menor}})$$

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \frac{9\pi}{4} + \left(\frac{81\pi}{4} - \frac{36\pi}{4}\right)$$

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \frac{9\pi}{4} + \left(\frac{45\pi}{4}\right)$$

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \frac{54\pi}{4}$$

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \frac{27\pi}{2}$$

Portanto, área hachurada é $\frac{27\pi}{2}$ cm^2.

Resposta: Letra D.

Item 12 ==

Vamos lá, temos de sempre ter estratégia. Qual deve ser, então, a estratégia de resolução dessa? Começar pela área do círculo, porque ela é a única direta, que o enunciado já praticamente deu para a gente.

i) Área do Círculo

Lembrando que vimos no da aula de áreas do Lobo que a área do círculo é A = π.r²

$$\text{Área}\bigcirc = A\bigcirc$$

$$A\bigcirc = \pi r^2$$

$$A\bigcirc = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

$$A\bigcirc = 9\pi\ cm^2$$

Agora eliminamos as letras C e D.

Se você pensar bem, na verdade podemos eliminar a letra A também, pois a área do losango (amarela + azul) é igual a área dos triângulos (verde), já que os vértices do losango são nos pontos médios (questão não fala explicitamente, mas temos de assumir pra poder resolver de qualquer uma das formas que formos resolver). E, como o círculo está totalmente dentro do losango, sua área tem de ser menor, e, portanto menor que a área verde. Mas 9π, se considerarmos π = 3, já dá 27 e já passa dos 24 da letra A.

Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Então, eliminamos A, C e D.

ii) Várias formas de achar a resposta final, de verdade, são muitas.

a) Eliminando a letra E:

A Área do Retângulo Total é 8.12 = 96 cm², mas a área dos triângulos tem de ser menor que a área total do retângulo. Então deve ser menor que 96, então não é letra B.

Assim, temos eliminados os itens A, B, C e D. Portanto: **Resposta: Letra E.**

b) Achando a área verde, pela área total / 2

Falamos ali em cima que sabemos que a área verde (triângulos) é igual à área do losango (amarela + azul). E a soma dessas áreas dá a área total que vale 96 cm². Então, a área verde vale 48 cm² e a área do losango (amarela + azul) vale 48 cm². Portanto: **Resposta: Letra E**

c) Achando a área verde, pelo cálculo de 4 vezes a área do triângulo

$$A_{verde} = 4 \cdot A_{\triangle}$$

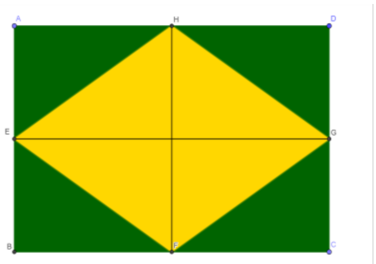
$$A_{\triangle} = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{8}{2} \cdot \frac{12}{2}}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

$$A_{verde} = 4 \cdot 12 = 48\,cm^2$$

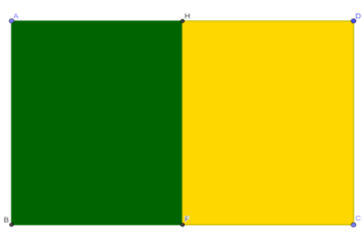
Resposta: Letra E.

d) Achando a área verde, pela percepção geométrica

Essa figura 1



pode ser reescrita como:



Apenas movendo triângulos verdes e amarelos.

Isso ajuda até para entender a letra b). Mas no nosso caso é para calcular a área desse retângulo verde.

$$A = \frac{\text{comprimento}}{2} \cdot \text{altura} = \left(\frac{12}{2}\right) \cdot 8 = 6 \cdot 8 = 48\,cm^2$$

Portanto: **Resposta: Letra E.**

e) Calculando por meio do retângulo total menos a área do losango calculada pela fórmula

$$A_{verde} = A_{total} - A_{losango}$$

$$A_{verde} = 12 \cdot 8 - \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{verde} = 96 - \frac{96}{2} = \frac{96}{2} = 48$$

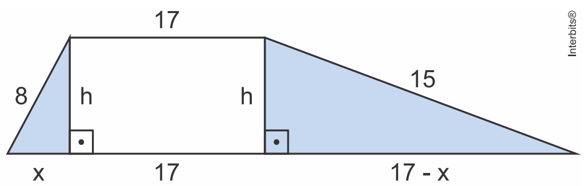
$$A_{verde} = 48\,cm^2$$

Resposta: Letra E.

Chega, por favor. Vocês perceberam que são formas muitos similares? Então, é uma questão bem rapidinha, que podemos fazer de várias formas. Eu particularmente gostei da resolução que usamos a exclusão de possibilidades de resposta. Mas né, suit yourselves (escolham a que melhor se adapte a vocês).

Item 13 ==

Desenhando a altura no trapézio para que fique claro a formação de 2 triângulos retângulos.



Fazendo teorema de Pitágoras no triângulo da esquerda:

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}_1^{\,2} + \text{Cateto}_2^{\,2}$$

$$8^2 = h^2 + x^2$$

$$64 = h^2 + x^2 \text{ (I)}$$

Agora, fazendo teorema de Pitágoras no triângulo da direita:

$$15^2 = h^2 + (17 - x)^2$$

$$15^2 = h^2 + 289 - 34x + x^2$$

$$225 - 289 = h^2 - 34x + x^2$$

$$-64 = h^2 - 34x + x^2 \text{ (II)}$$

Juntando as equações (I) e (II) em um sistema:

$$\begin{cases} 64 = h^2 + x^2 \text{ (I)} \\ -64 = h^2 - 34x + x^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II) podemos descobrir o valor de x:

$$(64 - (-64)) = \left(h^2 - h^2\right) + 0 - (-34x) + \left(x^2 - x^2\right)$$

$$(128) = (0) + (34x) + (0)$$

$$34x = 128$$

$$x = \frac{128}{34} = \frac{64}{17}$$

Substituindo x na equação (I):

$$64 = h^2 + x^2 \rightarrow 64 = h^2 + \left(\frac{64}{17}\right)^2$$

$$64 = h^2 + \frac{64^2}{17^2}$$

$$\frac{17^2 \cdot 64}{17^2} = \frac{17^2 \cdot h^2}{17^2} + \frac{64^2}{17^2}$$

$$17^2 \cdot 64 = 17^2 \cdot h^2 + 64^2$$

$$17^2 \cdot h^2 = 17^2 \cdot 64 - 64^2$$

$$289 \cdot h^2 = 289 \cdot 64 - 64 \cdot 64$$

$$289 \cdot h^2 = 64 \cdot (289 - 64)$$

$$289 \cdot h^2 = 64 \cdot (225)$$

$$h^2 = \frac{64 \cdot (225)}{289}$$

$$h = \frac{\sqrt{64} \cdot \sqrt{(225)}}{\sqrt{289}}$$

$$h = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}$$

Substituindo o h na fórmula da área do trapézio:

$$A = \frac{(B + b)}{2} \times h$$

$$A = \frac{(34 + 17)}{2} \times \frac{120}{17}$$

$$A = \frac{(51)}{1} \times \frac{60}{17}$$

$$A = \frac{(3)}{1} \times \frac{60}{1}$$

$$A = 180 \text{ cm}^2$$

Resposta: Letra A.

Item 14 ==

Se a gente pega um quadrado simples como o seguinte:

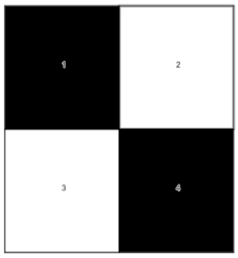


figura 1

Temos 2 quadrados brancos e 2 quadrados pretos, certo? Podemos ver que os 4 quadrados são iguais. Então, vocês concordam que 1 = 4 (pretos) e 2 = 3 (brancos)?

Sendo assim, a razão da área preta/sombreada sobre a área branca/não sombreada é: 1 + 4 (pretos) dividido por 2 + 3 (brancos).

$$\text{Razão} = \frac{A_{preta}}{A_{branca}} = \frac{A_1 + A_4}{A_2 + A_3},$$

mas se $A_1 = A_4$ e $A_1 = A_4$, temos:

$$\text{Razão} = \frac{A_1 + A_1}{A_2 + A_2} = \frac{2 \times A_1}{2 \times A_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_4}{A_3}$$

Assim, a moral da história é que quando temos uma mesma unidade constitutiva de área, como o retângulo formado por 1 quadrado preto + 1 quadrado branco, que se repete, a razão entre as áreas da unidade constitutiva será a mesma razão para todo o polígono.

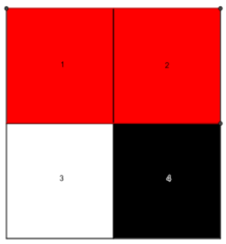


figura 2

Então, podemos ignorar uma das unidades constitutivas, como a parte pintada de vermelho, e fazer a razão somente entre 3 e 4.

Ok, beleza, agora que entendemos isso, vamos resolver o nosso problema, que é muito semelhante, só que ao invés de envolver quadrados, envolve círculos.

Resolução – Treinamento ENEM
S12.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

i) Vou ter que calcular todas essas partes? Não necessariamente jovem, justamente pelos motivos que conversamos acima. Vamos tentar encontrar qual é essa unidade constitutiva que se repete e nos mostra a razão.

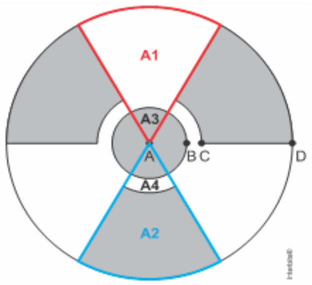


figura 3

No nosso caso, esse padrão que se repete, nossa unidade constitutiva é essa ampulheta formada pela A1 + A2 (vermelho + azul, para os não-daltônicos). E ela se repete 3 vezes, afinal, o enunciado nos diz que a figura está dividida em 6 arcos iguais, e, portanto, há 6 divisões de ângulos iguais nessas figuras circulares.

ii) Bom, legal, agora é só calcular a Área Sombreada e a Área Não-Sombreada.

- Vamos começar calculando o lado negro da força.

Vale ressaltar também, que aqui, há 2 formas de calcularmos essa área. Vamos começar pela mais adequada ao contexto do lado negro da força, o método destrutivo.

O **método destrutivo** consiste em pegar a porção de área que envolve a área que queremos e ir retirando os pedaços de área que não queremos. Esse método é o da minha preferência nesse caso pois envolve cálculos mais agradáveis.

No nosso caso, como sabemos que há 6 arcos iguais, possuímos 6 setores circulares iguais nos círculos envolvidos (são 3: o cinza interno, o branco do meio (que cria a coroa circular com o interno) e o externo que é mesclado).

Veja na imagem abaixo, na ordem da citação anterior, os setores A, B e C. Importante: como são setores, os 3 possuem formato de fatia de pizza e os 3 tem o ponto A como centro. Ou seja, o Setor C contém o A e B; e o Setor B contém o A.

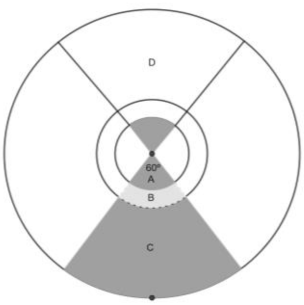


figura 4

$$A_{sombreada} = A_C - Coroa + A_A$$

Sabendo que a Coroa Circular Branca ali vale: $A_B - A_A$, temos:

$$A_{sombreada} = A_C - (A_B - A_A) + A_A$$
$$A_{sombreada} = A_C - A_B + 2 \cdot A_A$$

Além disso: $r_A = 2(AB)$; $r_B = 3(AB + BC)$; $r_C = 9(AB + BC + CD)$

$$A_C = \frac{\pi r_C^2}{6} = \frac{9^2\pi}{6} = \frac{81\pi}{6}$$
$$A_B = \frac{\pi r_B^2}{6} = \frac{3^2\pi}{6} = \frac{9\pi}{6}$$
$$A_A = \frac{\pi r_A^2}{6} = \frac{2^2\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

Portanto:

$$A_{sombreada} = \frac{81\pi}{6} - \frac{9\pi}{6} + 2 \cdot \frac{4\pi}{6} = \frac{(81 - 9 + 8)\pi}{6}$$
$$A_{sombreada} = \frac{80\pi}{6}$$

O outro método, o **método construtivo** seria ir somando os pedaços sombreados. Para esse voltaremos para a figura 3.

Somaremos então A2 + 2 x A3.

Eu não gosto desse método, pois no cálculo de A2 temos de calcular, implicitamente A4. Assim fica mais confuso organizar as áreas e menos visível. No método destrutivo conseguimos definir direitinho todas as áreas e ficou bem visível, e, isso é bom pois usaremos os mesmos valores para achar sem problema a área não-sombreada posteriormente.

Vou fazer os cálculos desse método de forma bem mais breve e pulando mais etapas que o outro para não ficar muito pedante.

$$A_{sombreada} = A_2 + 2 \cdot A_3 =$$
$$= \frac{\pi(AB + BC + CD)^2}{6} - \frac{\pi(AB + BC)^2}{6} + 2 \cdot \frac{\pi(AB)^2}{6}$$
$$A_{sombreada} = \frac{81\pi}{6} - \frac{9\pi}{6} + 2 \cdot \frac{4\pi}{6} = \frac{(81 - 9 + 8)\pi}{6} = \frac{80\pi}{6}$$

- Agora, calculando o lado de luz da força:

Vou usar o **método construtivo** e a figura 4:

Já temos todos os valores que precisamos, agora é só realmente calcular rapidinho.

$$A_D = A_C - A_A$$

$$A_{\text{não-sombreada}} = A_D + A_{\text{coroa}}$$

$$A_{\text{não-sombreada}} = (A_C - A_A) + (A_B - A_A)$$

$$A_{\text{não-sombreada}} = A_C + A_B - 2A_A = \frac{81\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} - \frac{8\pi}{6}$$

$$A_{\text{não-sombreada}} = \frac{82\pi}{6}$$

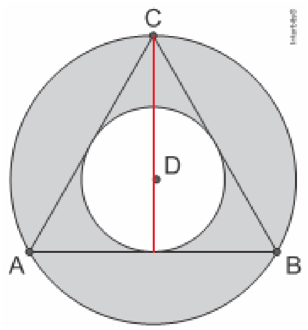
iii) Calculando a razão pedida (entre as áreas sombreada e não-sombreada)

$$\frac{A_{\text{sombreada}}}{A_{\text{não-sombreada}}} = \frac{\frac{80\pi}{6}}{\frac{82\pi}{6}} = \frac{40}{41}$$

Resposta: Letra D.

Item 15 ==

A primeira informação que extraímos dessa questão é que se o perímetro do triângulo é 6, cada lado mede 2. Em seguida, temos que o ponto D representa simultaneamente o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro desse triângulo.



E se traçarmos a altura do triângulo ABC, ela é dividida na razão 1:2 pelo ortocentro, logo a distância do ponto D até o lado AB, que corresponde ao raio do círculo menor, é um terço da altura, e a distância de D até C, que corresponde ao raio do círculo maior. Para descobrirmos o valor da altura podemos usar a fórmula:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \sqrt{3}$$

E, pelas relações que descobrimos, temos:

$$r = \frac{h}{3} \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$R = \frac{2h}{3} \rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Por fim, para encontrarmos a área da coroa circular sombreada, só precisamos subtrair a área do menor círculo da área do maior:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$A = \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$A = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3}$$
$$A = \pi$$

Resposta. Letra E.