Capítulo 1
A linguagem dos conjuntos

Para pensar

1. Como 15 bilhões de anos equivalem a um ano no calendário cósmico, temos:

365 dias = $365 \cdot 24$ horas = 8.760 horas

Então:

8.760 horas —— 15.000.000.000 anos
1 hora —— x

$8.760x = 15.000.000.000$

$x = \dfrac{15.000.000.000}{8.760} \approx 1.712.329$ anos

Assim, no calendário cósmico, uma hora equivale a aproximadamente 1.712.329 anos.

2. Como, pelo item 1, sabemos que uma hora equivale a 1.712.329 anos e que cada hora tem 60 minutos, um minuto equivale a:

$1.712.329 \div 60 \approx 28.538$ anos

Assim, no calendário cósmico, um minuto equivale a aproximadamente 28.538 anos.

3. De acordo com o infográfico, os primeiros seres humanos surgiram às 22 h 30 min do dia 31 de dezembro, ou seja, surgiram há 1 h 30 min atrás, que é o tempo restante para completar um ano. Considerando que, pelo item 1, uma hora equivale a aproximadamente 1.712.329 anos, então 1 h 30 min (ou seja, 1,5 hora) equivale a:

$1{,}5 \cdot 1.712.329 \approx 2.568.494$ anos

Assim, a Terra é habitada por humanos há aproximadamente 2.568.494 anos.

Exercícios propostos

1. a) $A = \{1, 4, 6, 9, 10\}$
$B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

b)

camundongo / sintoma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X			X		X			X	X
B	X	X		X	X	X	X	X	X	
C			X	X	X	X	X		X	

2. a) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$
$\therefore x = \pm 3$
$A = \{-3, 3\}$

b) Todo número inteiro x é tal que $x^2 \geqslant 0$; logo:
$B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

c) Todo número inteiro $x \neq 0$ é tal que $x^2 > 0$; logo:
$C = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$

d) Apenas o número inteiro 0 (zero) satisfaz a inequação $x^2 \leqslant 0$, pois todo número inteiro, diferente de zero, elevado ao quadrado é positivo; logo:
$D = \{0\}$

e) Não existe número inteiro x tal que $x^2 < 0$; logo:
$E = \varnothing$

f) A fração $\dfrac{1}{x} = 0$ não se anula para nenhum valor atribuído a x; logo:
$F = \varnothing$

g) Conjunto dos números naturais maiores que 56 e menores ou igual a 118.
$G = \{57, 58, 59, ..., 116, 117, 118\}$

h) Conjunto dos números inteiros negativos.
$H = \{..., -4, -3, -2, -1\}$

i) Conjunto dos números naturais maiores ou igual a 70.
$I = \{70, 71, 72, 73, 74, ...\}$

3. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; logo, A é finito.
b) $B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; logo, B é infinito.
c) $C = \{-3, 3\}$; logo, C é finito.
d) $D = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$; logo, D é infinito.
e) $E = \{0\}$; logo, E é finito.

4. a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$
c) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$

5. $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

6. a) V, pois r é um conjunto de pontos, sendo A um deles.
b) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.
c) V, pois o elemento do conjunto $\{A\}$, que é o ponto A, pertence ao conjunto de pontos r.
d) F, pois essa afirmação significa que $\overrightarrow{AB}$ é um elemento de r, quando, na verdade, os pontos pertencentes a $\overrightarrow{AB}$ é que são elementos de r.
e) V, pois todos os elementos (pontos) de $\overrightarrow{AB}$ pertencem ao conjunto de pontos r.
f) V, pois todos os elementos (pontos) de $\overrightarrow{DE}$ pertencem ao conjunto de pontos $\overrightarrow{AE}$.
g) V, pois cada extremo de $\overline{AC}$ é elemento do conjunto de pontos $\overline{AC}$.
h) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.

7. Como os dois conjuntos são iguais, então $x = 3$ e $y = 1$.

8.
- Como $D \subset E$ e $E \subset F$, deduzimos que:
$D \subset F$ (I)
Além disso, é dado: $F \subset D$ (II)
Por (I) e (II), concluímos que $D = F$.
- Como $E \subset F$ e $F \subset D$, deduzimos que:
$E \subset D$ (III)
Além disso, é dado: $D \subset E$ (IV)
Por (III) e (IV), concluímos que $D = E$.
Assim, temos $D = F$ e $D = E$, concluindo então que $D = E = F$.

Alternativa **c**.

9. a) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{5\}, \{8\}, \{5, 8\}\}$
b) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{6\}\}$
c) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$

10. O conjunto E tem 5 elementos; logo, possui $2^5 = 32$ subconjuntos. Então $\mathcal{P}(E)$ tem 32 elementos.

11. **a)** Qualquer país da Europa é um elemento do conjunto A. Por exemplo, Itália ou França.

b) Não, pois os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são subconjuntos de A.

c) Qualquer subconjunto de A, por exemplo, $\varnothing$, {Itália}, {França}, {Itália, França} etc.

d) Como o conjunto A tem 50 elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^{50} elementos.

12. **a)** F, pois, por exemplo, para $n(B) = 3$, temos $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ com 16 e 8 elementos, respectivamente.

b) F, pela mesma justificativa do item **a**.

c) V, pois sendo n o número de elementos de B, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, ou seja, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é duas vezes o número de elementos de $\mathcal{P}(B)$.

d) F, pela mesma justificativa do item **c**.

e) V, pois, para $n = 0$, temos que o número de elementos de $\mathcal{P}(B)$ é $2^0 = 1$.

13. **a)** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $A \cap B = \{0, 1, 2\}$

c) $A \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $A \cap D = \varnothing$

e) $A \cup B \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

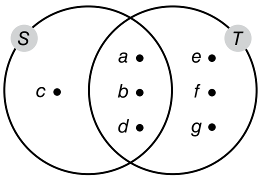
f) $A \cap B \cap C = \{0, 1, 2\}$

g) $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$

h) $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

i) $(A \cap D) \cup (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

14.



15. A parte hachurada contempla a intersecção de A com B e a intersecção de B com C, logo, ela representa $B \cap (A \cup C)$.
Alternativa **d**.

16. **a)** Escócia, Inglaterra, País de Gales e Irlanda do Norte.

b) Escócia, Inglaterra e País de Gales.

c) $G \cap I = \varnothing$

d) $R \cap I =$ {Irlanda do Norte}

e) $R \cup I =$ {Escócia, Inglaterra, País de Gales , Irlanda do Norte, República da Irlanda}

f) $(R \cup I) \cap G =$ {Escócia, Inglaterra, País de Gales}

17. **a)** V, pois Minas Gerais pertence à região Sudeste.

b) V, pois Santa Catariana pertence à região Sul.

c) F, pois Piauí pertence ao Nordeste, e não ao Norte.

d) V, pois o estado do Amazonas pertence à região Norte.

e) F, pois ele pode ser de qualquer um dos estados da região Norte, e não necessariamente do Amazonas.

f) V, pois, para ser gaúcho, tem que pertencer a A, ou seja, deveria pertencer a $(A \cup B \cup C)$.

g) F, pois, para ser carioca, tem que pertencer a B, que não faz parte da união considerada.

h) V, pois $(A \cup D) \cap (B \cup D) = D$, que é o conjunto de pessoas nascidas no Nordeste, o que inclui a Bahia.

18. **a)** V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{AC}$ temos $X \in \overline{AB}$ ou $X \in \overline{BC}$; e para qualquer $X \in \overline{AB}$ ou $X \in \overline{BC}$ temos $X \in \overline{AC}$.

b) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{BC}$ temos $X \in \overline{AC}$ ou $X \in \overline{BD}$; e para qualquer $X \in \overline{AC}$ ou $X \in \overline{BD}$ temos $X \in \overline{BC}$.

c) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overrightarrow{AC}$ temos $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overline{AB}$; e para qualquer $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overline{AB}$ temos $X \in \overrightarrow{AC}$.

d) V, pois para qualquer ponto X pertencente a r temos $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overrightarrow{CB}$; e para qualquer $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overrightarrow{CB}$ temos $X \in r$.

e) F, pois essa intersecção representa $\overline{BC}$.

f) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{BC}$, temos $X \in \overline{AD}$ ou $X \in \overline{BC}$; e para qualquer $X \in \overline{AD}$ ou $X \in \overline{BC}$ temos $X \in \overline{BC}$.

g) F, pois $A \in \left(\overline{AD} \cup \overline{BC}\right)$ e $A \notin \overline{BC}$.

h) F, pois $\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$.

19. **a)** $F - E = \{1, 2, 9\}$

b) $G - E = \{5, 7\}$

c) $(E \cup G) - F = \{5, 7\}$

d) $(F - G) \cup (G - F) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

e) $\complement_F^E = \{1, 2, 9\}$

f) $\complement_F^{(E \cap G)} = \{1, 2, 3, 9\}$

g) $\complement_F^G$ não existe, pois $G \not\subset F$

h) $\complement_E^E = \varnothing$

i) $\complement_F^{\varnothing} = F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$

20. **a)** V, pois o conjunto dos nomes dos meses do primeiro semestre é {janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho}.

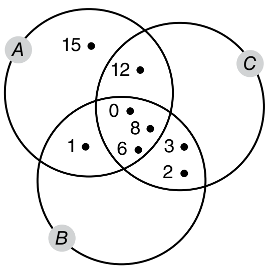
b) F, esse completar é o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 5.

c) V, o conjunto de todos os estados da região Norte é {Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}.

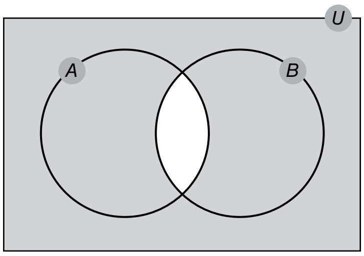
d) V, a molécula de água é formada por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, logo, o complementar do conjunto de átomos de hidrogênio dessa molécula é formado apenas pelo oxigênio.

e) F, o conjunto {P, R, T} não é um subconjunto das letras da palavra Pernambuco.

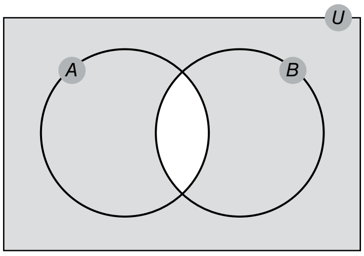
21.



22. a) $A' \cup B'$



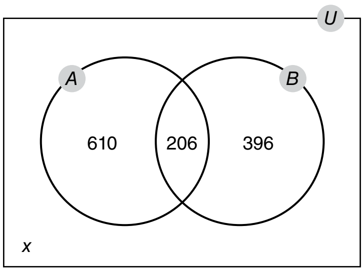
b) $(A \cap B)'$



Observe que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

23. a) $\overline{A} = \{x \in U \mid x$ é do sexo feminino$\}$
b) $\overline{B} = \{y \in U \mid y$ tem menos de 1,6 m de altura$\}$
c) $\overline{C} = \{z \in U \mid z$ tem mais de 1,7 m de altura$\}$
d) $\overline{B \cap C} = \{p \in U \mid p$ tem menos de 1,6 m ou mais de 1,7 m de altura$\}$
e) $\overline{B} \cup \overline{C} = \{q \in U \mid q$ tem menos de 1,6 m ou mais de 1,7 m de altura$\}$

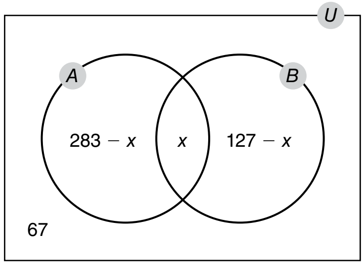
24. Sejam:
- U o conjunto dos 2.200 entrevistados;
- A o conjunto dos entrevistados que já estiveram na região Nordeste;
- B o conjunto dos entrevistados que já estiveram na região Norte;
- x o número de entrevistados que nunca estiveram em nenhuma das duas regiões.



$x + 610 + 206 + 396 = 2.200 \Rightarrow x = 988$

Logo, 988 das pessoas entrevistadas nunca estiveram em nenhuma das duas regiões.

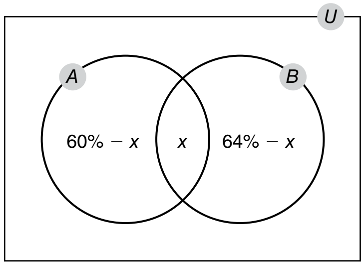
25. Sejam:
- U o conjunto dos 400 jovens entrevistados;
- A o conjunto dos jovens que já dirigiram automóvel;
- B o conjunto dos jovens que já dirigiram motocicleta;
- x o número de jovens que já dirigiram os dois veículos.



$67 + 283 - x + x + 127 - x = 400 \Rightarrow x = 77$

Portanto, 77 jovens já dirigiram os dois tipos de veículo.

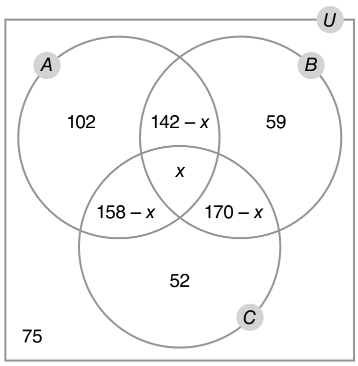
26. Sejam:
- U o conjunto dos funcionários da empresa;
- A o conjunto dos funcionários com mais de 20 anos de idade;
- B o conjunto dos funcionários com menos de 40 anos de idade;
- x o número de funcionários com mais de 20 e menos de 40 anos de idade.



$60\% - x + x + 64\% - x = 100\% \Rightarrow x = 24\%$

Portanto, 24% dos funcionários têm mais de 20 anos de idade e menos de 40 anos de idade.

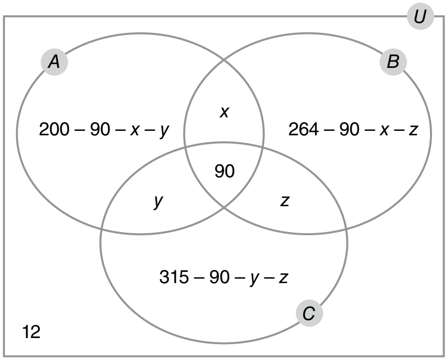
27. Sejam:
- U o conjunto dos 590 entrevistados;
- A o conjunto dos entrevistados que já assistiram ao telejornal A;
- B o conjunto dos entrevistados que já assistiram ao telejornal B;
- C o conjunto dos entrevistados que já assistiram ao telejornal C;
- x o número de entrevistados que já assistiram aos três telejornais.



$75 + 102 + 59 + 52 + 142 - x + 158 - x + 170 - x + x = 590 \Rightarrow x = 84$

Logo, o número de espectadores de cada emissora pode ser determinado por:
Emissora A: 102 + 142 − 84 + 84 + 158 − 84 = 318
Emissora B: 59 + 142 − 84 + 84 + 170 − 84 = 287
Emissora C: 52 + 158 − 84 + 84 + 170 − 84 = 296
Assim, a emissora com maior número de espectadores foi a emissora A, com 318 deles.

28. Sejam:
- U o conjunto das 500 pessoas entrevistadas;
- A o conjunto das pessoas que já assistiram a algum espetáculo no teatro A;
- B o conjunto das pessoas que já assistiram a algum espetáculo no teatro B;
- C o conjunto das pessoas que já assistiram a algum espetáculo no teatro C;
- x o número de pessoas que assistiram a algum espetáculo nos teatros A e B;
- y o número de pessoas que assistiram a algum espetáculo nos teatros B e C;
- z o número de pessoas que assistiram a algum espetáculo nos teatros A e C.



290 − 90 − x − y + x + 264 − 90 − x − z + z + + 315 − 90 − y − z + y + 90 + 12 = 500
∴ x + y + z = 201
Essa soma representa a quantidade de entrevistados que assistiram a espetáculos em exatamente dois teatros. Como o que se quer saber é o número de pessoas que assistiram a espetáculos em pelo menos dois dos três teatros, basta adicionar 90, que é o número de entrevistados que já assistiram a algum espetáculo nos três teatros:
201 + 90 = 291
Assim, 291 entrevistados assistiram a algum espetáculo em pelo menos dois teatros.

29. O número de torcedores só pode ser um número natural. Sendo esse número x, temos: $20.000 \leqslant x \leqslant 30.000$
Então:
a) V, pois $x \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, logo, $x \in \mathbb{Q}$.
b) V, pois x deve ser natural e $20.000 \leqslant x \leqslant 30.000$.
c) F, pois x deve ser um número natural e existem números racionais não naturais tal que $20.000 \leqslant x \leqslant 30.000$.
d) V, pois $\frac{142.457}{7} = 20.351$, que é um número natural sob a condição $20.000 \leqslant x \leqslant 30.000$.
e) F, pois $\frac{324.102}{12} = 27.008{,}5$, que não é um número natural.

30.
a) F
b) V
c) V
d) V
e) V
f) F
g) V
h) V
i) V

31. **a)** $g = 4{,}22222... \Rightarrow 10g = 42{,}22222...$
$\therefore 10g - g = 42{,}22222... - 4{,}22222... \Rightarrow 9g = 38$
$\therefore g = \frac{38}{9}$
b) $g = 5{,}64646464... \Rightarrow 100g = 564{,}64646464...$
$\therefore 100g - g = 559 \Rightarrow 99g = 559$
$\therefore g = \frac{559}{99}$

32. **a)** 4
b) 4
c) Não existe.

33.
a) irracional
b) racional
c) racional
d) irracional
e) irracional
f) irracional
g) racional
h) irracional
i) irracional
j) irracional

34. $a = 0$; $b = -9$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \sqrt{7}$

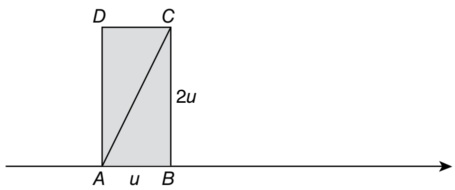
35. **a)** Para $n = 2$:
Vamos obter números irracionais na forma $\sqrt{a}$, com $a \in \mathbb{N}$, de modo que $5 < \sqrt{a} < 6$.
Como $5 = \sqrt{25}$ e $6 = \sqrt{36}$, basta escolher um natural a que seja maior que 25 e menor que 36.
Exemplos: $\sqrt{28} = 5{,}291502...$ e $\sqrt{35} = 5{,}916079...$
Para $n = 3, 4, 5, ...$, obtemos, de modo análogo, outros números irracionais compreendidos entre 5 e 6.
b) A média aritmética entre dois números reais a e b, com $a < b$, é um número x tal que $a < x < b$. Aplicando essa propriedade, temos:
I. A média aritmética entre $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ é $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2}$, um número irracional. Pela propriedade temos:
$$\sqrt{5} < \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2} < \sqrt{7}$$
II. A média aritmética entre $\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2}$ é $\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{4}$, um número irracional. Pela propriedade anterior e pela parte (I), temos:
$$\sqrt{5} < \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{4} < \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2} < \sqrt{7}$$
Por (I) e (II), obtivemos os números irracionais $\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{4}$ e $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2}$, compreendidos entre $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$.
c) $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ e $\sqrt{3} = 1{,}732050807...$
Então, $\sqrt{2} < 1{,}5 < \sqrt{3}$ e $\sqrt{2} < 1{,}6 < \sqrt{3}$, ou seja, 1,5 e 1,6 são números racionais compreendidos entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

36. **a)** F, pois para norte necessariamente caminhará 3 hm e, para leste, $4\sqrt{2}$ hm. Como $\sqrt{2}$ é maior do que 1, então $4\sqrt{2}$ é maior do que 3.
b) V, a pessoa necessariamente caminha três unidades para o norte e 4 unidades para leste.

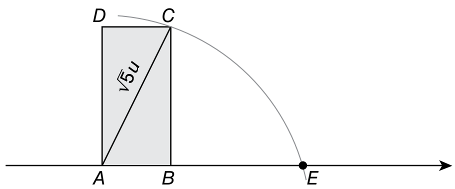
c) F, pois o comprimento é sempre o mesmo: $(3 + 4\sqrt{2})$ hm, que é um número irracional.
d) V, pela justificativa do item **c**.

37. a) F; por exemplo: $-2 \in \mathbb{Z}$, mas $-2 \notin \mathbb{N}$
b) V
c) F; por exemplo: o número $\frac{43}{9}$ é uma dízima periódica e um número racional.
d) V
e) V
f) F; pois os números irracionais também fazem parte do conjunto dos números reais.
g) F; por exemplo: $3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
h) F; por exemplo: $0 \cdot \sqrt{2} = 0$
i) V
j) V

38. Seja um retângulo em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$ e o lado $\overline{BC}$ tem comprimento $2u$, conforme mostra a figura:

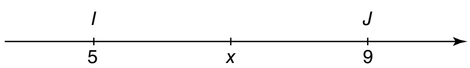


Pelo teorema de Pitágoras, temos que a diagonal $\overline{AC}$ mede $\sqrt{5}u$; usando um compasso, com a ponta-seca em A e raio $\overline{AC}$, desenhamos o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E:



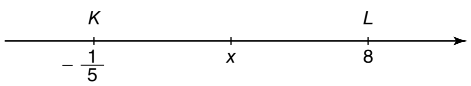
Assim, o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{5}u$.

39. a) $d = 15 - 5 = 10$
b) $d = 4 - (-4) = 8$
c) $d = \frac{23}{4} - \frac{3}{2} = \frac{17}{4}$
d) Sendo x a abcissa do ponto médio de $\overline{IJ}$, temos:



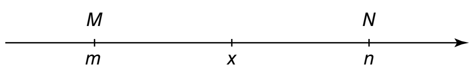
$x - 5 = 9 - x \Rightarrow x = 7$

e) Sendo x a abcissa do ponto médio de $\overline{KL}$, temos:



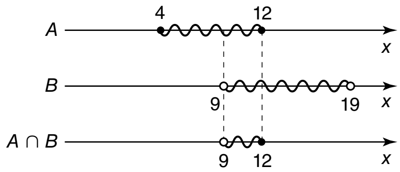
$x - \left(-\frac{1}{5}\right) = 8 - x \Rightarrow x = \frac{39}{10}$

f) Sendo x a abcissa do ponto médio de $\overline{MN}$, temos:



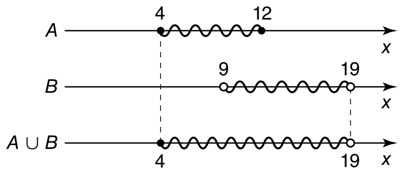
$x - m = n - x \Rightarrow x = \frac{m + n}{2}$

40. a)



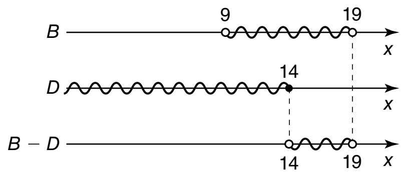
Logo, $A \cap B =]9, 12]$.

b)



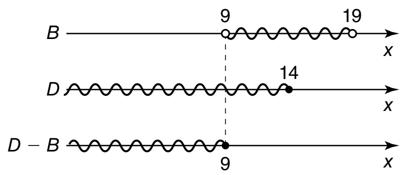
Logo, $A \cup B = [4, 19[$.

c)



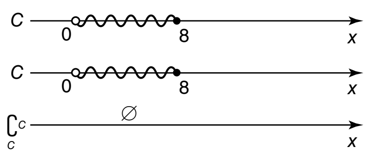
Logo, $B - D =]14, 19[$.

d)



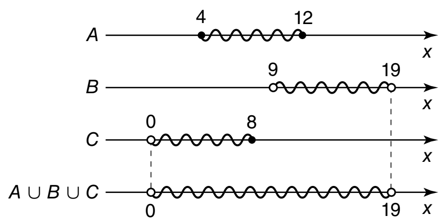
Logo, $D - B =]-\infty, 9]$.

e)



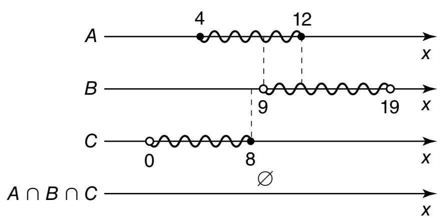
Logo, $\complement_C^C = \varnothing$

f)



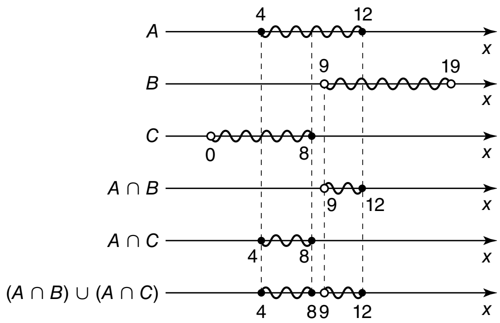
Logo, $A \cup B \cup C =]0, 19[$.

g)



Logo, $A \cap B \cap C = \varnothing$.

h)



Logo, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = [4, 8] \cup]9, 12]$.

41. Considerando a primeira situação, se o preço do aditivo é 12 reais, então o valor gasto com gasolina é de no mínimo 60 reais − 12 reais, ou seja, 48 reais. Como ele abasteceu 16 litros de gasolina, cada litro custa, no mínimo, 48 reais ÷ 16 = 3 reais.

Já considerando o segundo motorista, como o preço do óleo é 18 reais, o valor gasto com gasolina é no máximo 106 reais − 18 reais, ou seja, 88 reais. Ele abasteceu 22 litros, então, o valor por litro é de, no máximo, 88 reais ÷ 22 = 4 reais.

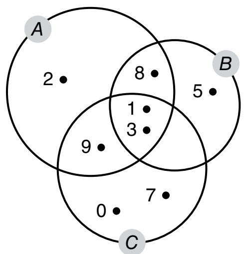
Então, o valor de 1 litro de gasolina é no mínimo 3 reais e no máximo 4 reais.

Alternativa **a**.

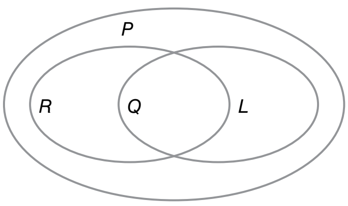
Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1.



2.



3. a) F, pois essa afirmação significa que r é um elemento de α, quando, na verdade, os pontos pertencentes a r é que são elementos de α.

b) V, pois A e B são pontos distintos de r que pertencem a α e, portanto, todos os pontos de r pertencem a α.

c) V, pois $D \in r$ e $r \subset \alpha$.

d) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.

e) V, pois $\overline{AB} \subset r$ e $r \subset \alpha$; logo, $\overline{AB} \subset \alpha$.

f) F, pois essa afirmação significa que $\overline{AB}$ é um elemento de α, quando, na verdade, os pontos pertencentes a $\overline{AB}$ é que são elementos de α.

g) F, pois o ponto C pertence a s e não pertence a α.

4. a) Número de subconjuntos: 2^n. No caso, $n = 7$, então: $2^7 = 128$.
O número de subconjuntos do conjunto A é 128.

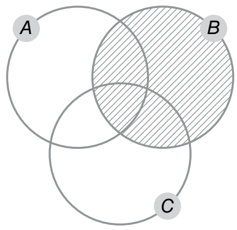
b) $2^n = 256 \rightarrow 2^n = 2^8 \rightarrow n = 8$.
O conjunto B tem 8 elementos.

5. Sendo n o número de elementos de B, temos :
$\mathcal{P}(B) = 2^n$ e $\mathcal{P}(A) = 2\mathcal{P}(B)$, ou seja, $\mathcal{P}(A) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
Assim, o número de elementos de A é uma unidade maior que o número de elementos de B.
Alternativa **b**.

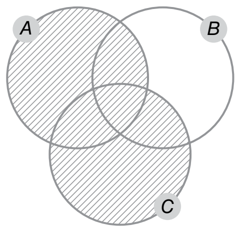
6. a) Não, pois há elementos na intersecção entre esses dois conjuntos.

b) É preciso subtrair os elementos da intersecção, logo, a expressão que deve substituir o ▭ é $n(A \cap B)$.

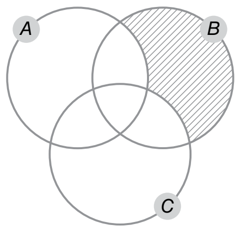
B



A ∪ C



B − (A ∪ C)



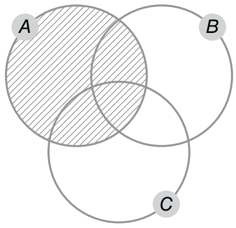
7. A região destacada na última figura não contém nenhum elemento de A nem de C. Logo, ela representa $B - (A \cup C)$.
Alternativa **e**.

8. Temos:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, representando os elementos dos dois conjuntos.
$A - B = \{1, 3, 6, 7\}$, representando os elementos que estão em A, mas não estão em B.
$B - A = \{4, 8\}$, representando os elementos que estão em B, mas não estão em A.
Os elementos de $A \cap B$ são aqueles que estão nos dois conjuntos, ou seja, estão em $A \cup B$, mas não estão em $A - B$ nem em $B - A$. Os elementos que se encaixam nessas condições são 2 e 5. Logo, $A \cap B = \{2, 5\}$.
Alternativa **c**.

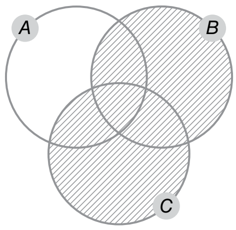
9. **I.** Verdadeiro, pois $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$.
A negação disso é $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. Verdadeiro, pois

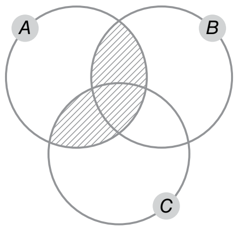
A



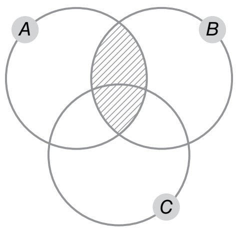
$B \cup C$



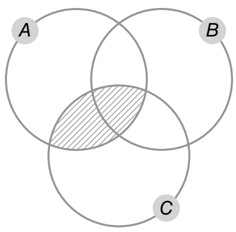
$A \cap (B \cup C)$



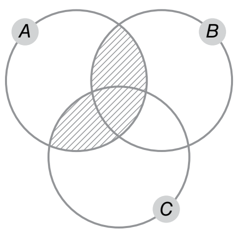
$A \cap B$



$A \cap C$

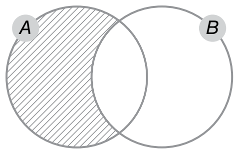


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

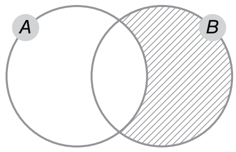


III. Verdadeiro, pois

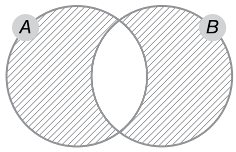
$A - B$



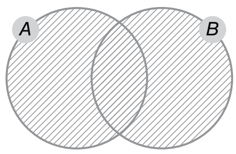
$B - A$



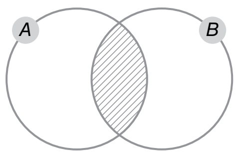
$(A - B) \cup (B - A)$



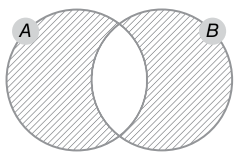
$A \cup B$



$A \cap B$



$(A \cup B) - (A \cap B)$



Alternativa **e**.

10. A forma tabular dos conjuntos A, B e C são:
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

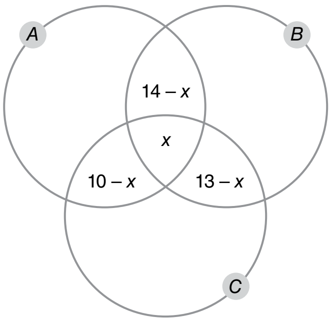
a) Como A é um subconjunto de B, $\complement_B A$ é o conjunto dos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A, ou seja:
$\complement_B A = \{-3, -2, -1, 10, 11, 12, \ldots\}$

b) Como B é um subconjunto de C, então:
$\complement_C B = \{-5, -4\}$

c) Como C é um conjunto de $\mathbb{Z}$, então:
$\complement_{\mathbb{Z}} C = \{\ldots, -8, -7, -6\}$

d) $\complement_{\mathbb{N}} B$ não existe, pois $B \not\subset \mathbb{N}$

11. Pela tabela conseguimos montar o seguinte diagrama de Venn:



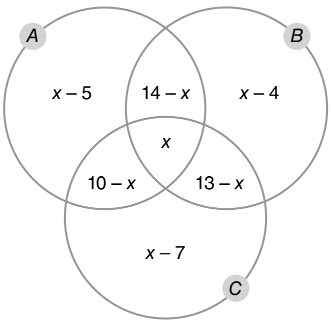
Para obtermos a parte do conjunto que não faz intersecção com nenhum outro, basta subtrair o número de elementos que fazem parte da intersecção do conjunto com qualquer outro conjunto do número total de elementos do conjunto:

$19 - [(14 - x) + x + (10 - x)] = x - 5$

$23 - [(13 - x) + x + (14 - x)] = x - 4$

$16 - [(10 - x) + x + (13 - x)] = x - 7$

Assim, temos o seguinte diagrama:



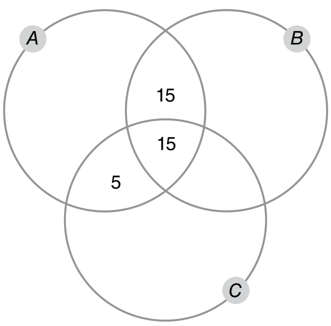
Como o número de elementos de $A \cup B \cup C$ é 29, temos:

$(x - 5) + (x - 4) + (x - 7) + (10 - x) + (14 - x) +$
$+ (13 - x) + x = 29$

$\therefore x = 8$

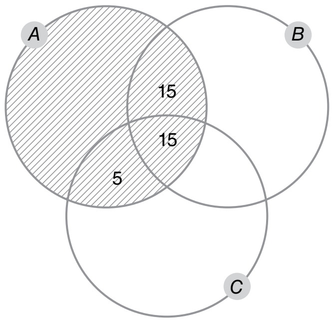
Logo, $A \cap B \cap C$ tem 8 elementos.

12. Completando o diagrama a partir das informações, começando com o número de elementos da intersecção dos três conjuntos, temos:

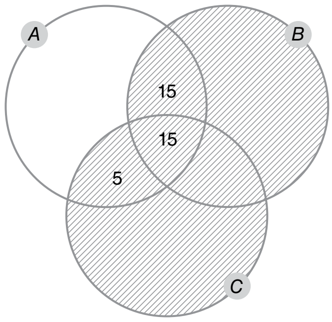


Queremos o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$.

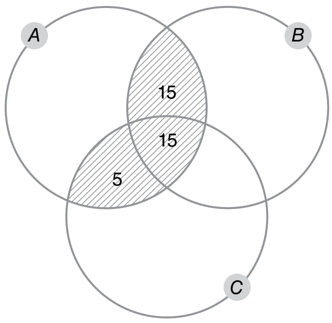
A



$B \cup C$



$A \cap (B \cup C)$



Assim, o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ é a soma $15 + 5 + 15 = 35$.

Aternativa **a**.

13. Para que $\dfrac{n + 6}{2n - 3}$ seja um número natural, devemos obedecer às seguintes condições:

I. $n + 6$ deve ser um número natural.
Essa condição é sempre válida, pois $n \in \mathbb{N}$ e qualquer número natural adicionado a 6 é um número natural.

II. $2n - 3$ deve ser um número natural diferente de zero.
Para essa condição ser válida, devemos ter:
$2n - 3 > 0 \Rightarrow n > \dfrac{3}{2}$
Como n deve ser natural e $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$, temos que $n \geqslant 2$.

III. $n + 6$ deve ser um múltiplo de $2n - 3$.
Para essa condição ser válida, devemos ter $n + 6 = k(2n - 3)$, com $k \in \mathbb{N}$.
Analisando os possíveis valores de k, obtemos:
Para $k = 0$: $n + 6 = 0(2n - 3) \Rightarrow n = -6$, mas $-6 \notin \mathbb{N}$

Para $k = 1$: $n + 6 = 1(2n - 3) \Rightarrow n = 9$

Então temos: $\dfrac{n+6}{2n-3} = \dfrac{9+6}{18-3} = 1$

Para $k = 2$: $n + 6 = 2(2n - 3) \Rightarrow n = 4$

Então temos: $\dfrac{n+6}{2n-3} = \dfrac{4+6}{8-3} = 2$

Para $k = 3$: $n + 6 = 3(2n - 3) \Rightarrow n = 3$

Então temos: $\dfrac{n+6}{2n-3} = \dfrac{3+6}{6-3} = 3$

Para $k = 4$:

$n + 6 = 4(2n - 3) \Rightarrow n = \dfrac{18}{7}$, mas $\dfrac{18}{7} \notin \mathbb{N}$

Para $k = 5$:

$n + 6 = 5(2n - 3) \Rightarrow n = \dfrac{21}{9}$, mas $\dfrac{21}{9} \notin \mathbb{N}$

Para $k = 6$:

$n + 6 = 6(2n - 3) \Rightarrow n = \dfrac{24}{11}$, mas $\dfrac{24}{11} \notin \mathbb{N}$

Para $k = 7$:

$n + 6 = 7(2n - 3) \Rightarrow n = \dfrac{27}{13}$, mas $\dfrac{27}{13} \notin \mathbb{N}$

Para $k = 8$: $n + 6 = 8(2n - 3) \Rightarrow n = 2$

Então temos: $\dfrac{n+6}{2n-3} = \dfrac{2+6}{4-3} = 8$

Observamos que o valor de n diminui conforme o valor de k aumenta e, como pela condição II $n \geqslant 2$, temos o último termo nas condições que procuramos quando $k = 8$.

Assim, existem 4 números que satisfazem a condição do enunciado: 1, 2, 3 e 8. A soma deles é $1 + 2 + 3 + 8 = 14$.

14. Sendo x e y dois números naturais, temos que $x^2 + y^2 = 21$. Fatorando a diferença dos quadrados, temos:

$(x + y) \cdot (x - y) = 21$

Como x e y são números naturais, há duas possibilidades de decompor o número 21:

$21 = 1 \cdot 21$ ou $21 = 3 \cdot 7$

1º caso:

Se $21 = 1 \cdot 21$, temos:

$\begin{cases} x - y = 1 \quad \text{(I)} \\ x + y = 21 \ \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando (I) e (II), obtemos:

$2x = 22 \Rightarrow x = 11$

Substituindo, em (I), x por 11, temos que $y = 10$. Então, $x^2 + y^2 = 11^2 + 10^2 = 221$. (Não é a solução que procuramos.)

2º caso:

Se $21 = 3 \cdot 7$, temos:

$\begin{cases} x - y = 3 \ \text{(I)} \\ x + y = 7 \ \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando (I) e (II), obtemos:

$2x = 10 \Rightarrow x = 5$

Substituindo, em (I), x por 5, temos que $y = 2$. Então, $x^2 + y^2 = 5^2 + 2^2 = 29$.

Alternativa **a**.

15. $(2p + 1)(2q + 1) + 2n = 4pq + 2p + 2q + 1 + 2n =$
$= 2(2pq + p + q + n) + 1$

O termo $2(2pq + p + q + n)$ é par, pois um dos fatores é 2.

O termo $2(2pq + p + q + n) + 1$ é ímpar, pois é da forma $2k + 1$.

Logo, o número inteiro $(2p + 1)(2q + 1) + 2n$ é ímpar.

16. $34^x = 4 \cdot y \Rightarrow (2 \cdot 17)^x = 2^2 \cdot y$

$\therefore 2^x \cdot 17^x = 2^2 \cdot y$

Comparando os dois lados da equação, temos que $x = 2$ e que $y = 17^x$, ou seja, $y = 17^2 = 289$.

Assim, $x = 2$ e $y = 289$.

17. a) $g = 3{,}7777777... \Rightarrow 10g = 37{,}7777777...$

$\therefore 10g - g = 37{,}777777... - 3{,}7777777... \Rightarrow 9g = 34$

$\therefore g = \dfrac{34}{9}$

b) $g = 7{,}3444444... \Rightarrow 10g = 73{,}4444444...$

$\therefore 10g - g = 73{,}444444... - 7{,}3444444... \Rightarrow$

$\Rightarrow 9g = 66{,}1$

$\therefore g = \dfrac{66{,}1}{9} = \dfrac{661}{90}$

c) $g = 5{,}126666... \Rightarrow 100g = 512{,}6666...$

$\therefore 100g - g = 512{,}6666... - 5{,}126666... \Rightarrow$

$\Rightarrow 99g = 507{,}54$

$\therefore g = \dfrac{507{,}54}{99} = \dfrac{50.754}{9.900}$

18. A região hachurada representa a intersecção entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos racionais não positivos. Logo, ela representa o conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_-$.

19. x será irracional se for uma dízima não periódica. Alternativa **e**.

20. Sendo a e b números racionais distintos, com $a < b$, temos que $a < \dfrac{(a+b)}{2} < b$. Como $\dfrac{(a+b)}{2}$ é racional, concluímos que entre dois números racionais distintos existe sempre um número racional.

Alternativa **d**.

21. a) Temos que $x = \sqrt{2n + 1}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant 50$.

Se $n = 0$, $x = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{1} = 1$.

Se $n = 50$, $x = \sqrt{2 \cdot 50 + 1} = \sqrt{101}$, que é irracional.

Como $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant 50$, temos que x pode assumir 51 valores distintos.

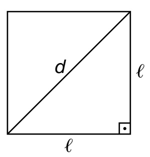
O número x só não será irracional quando o valor de $2n + 1$ for um quadrado perfeito. Entre 1 e 101 há 10 quadrados perfeitos (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100). Como $2n + 1$ representa um número ímpar, apenas 5 desses quadrados perfeitos podem ser da forma $2n + 1$. Assim, dos 51 valores possíveis para x, 46 deles são irracionais.

Portanto, o conjunto A tem 46 elementos irracionais.

b) Os cinco elementos quadrados perfeitos da forma $2n + 1$ resultam em valores inteiros para x.

Então, A tem 5 elementos que são números inteiros.

22. Se ℓ é medida do lado do quadrado, temos que o perímetro é 4ℓ. Se esse perímetro é representado por um número racional, ℓ é um número racional, pois o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.



$d = \underset{\text{rac.}}{\ell} \cdot \underset{\text{irrac.}}{\sqrt{2}}$

O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Logo, $d = \ell\sqrt{2}$ é irracional.

Alternativa **e**.

23. $\sqrt{n(n+1)+n+1} = \sqrt{n^2+n+n+1} =$

$= \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1$

Como n é um número natural, $n + 1$ também é natural e, sendo natural, é também inteiro.

Alternativa **c**.

24. Analisando as afirmações, temos:

(01) F, pois tomando $m = 3$ e $n = 5$, temos $m + n = 8$ e 8 não é divisível por 15.

(02) V, pois, seja $7n$ o número inteiro divisível por 7, seu quadrado é $(7n)^2 = 49n^2$. Como 49 é divisível por 7, $49n^2$ também será.

(04) F, pois ao dividir o número 4, que é par, por 3, o resto é 1, que é ímpar.

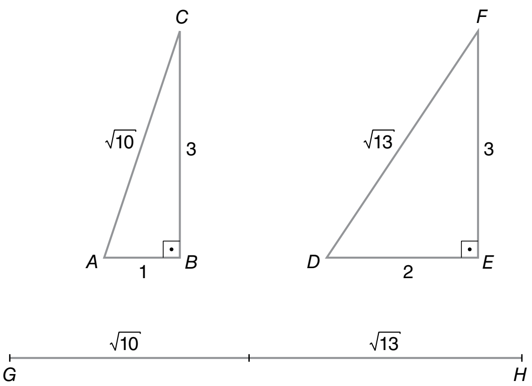
(08) V, pois x e y são números positivos, logo a razão entre eles será positiva e, como o conjunto dos naturais é infinito, sempre há um inteiro positivo maior do que uma razão positiva.

(16) F, pois tomando $x = 0{,}5$, temos $x^2 = 0{,}25$, e $x^2 < x$.

(32) F, pois $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$, que é um número racional.

- Assim, a soma dos números que antecedem as alternativas corretas é $2 + 8 = 10$.

25. Na construção abaixo, as medidas das hipotenusas $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ medem $\sqrt{10}$ e $\sqrt{13}$, calculadas pelo teorema de Pitágoras. Transportando os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ para uma mesma reta, consecutivamente, obtém-se o segmento $\overline{GH}$ de medida $\sqrt{10} + \sqrt{13}$.



26. Usando uma calculadora, como solicitado na atividade, temos que $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$ e $\sqrt{3} \simeq 1{,}7321$. Assim:

$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \simeq 1{,}4142^{1{,}7321} \simeq 1{,}8226$

Escrevendo os intervalos na forma decimal, temos:

a) $\left[\frac{37}{20}, 2\right] = [1{,}85; 2]$

b) $\left[\frac{61}{33}, \frac{37}{20}\right] \simeq [1{,}848; 1{,}850]$

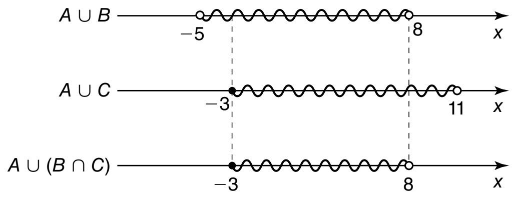
c) $\left[\frac{9}{5}, \frac{91}{50}\right] = [1{,}80; 1{,}82]$

d) $\left[\frac{46}{25}, \frac{37}{20}\right] = [1{,}84; 1{,}85]$

e) $\left[\frac{9}{5}, \frac{37}{20}\right] = [1{,}80; 1{,}85]$

Alternativa **e**

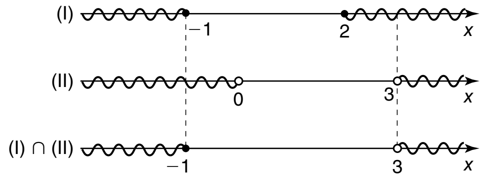
27. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Logo, $A \cup (B \cap C) = [-3, 8[$.

28. I. $x \notin\,]-1, 2[$; logo, $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$

II. $x < 0$ ou $x > 3$



Então, $x \leqslant -1$ ou $x > 3$.

Alternativa **a**.

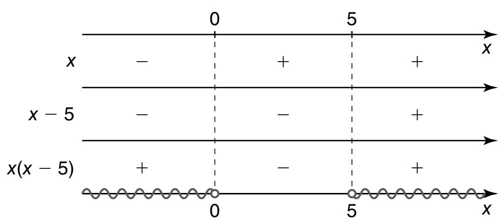
29. a) $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$

A expressão é nula quando x é zero ou quando x é 5.

b)

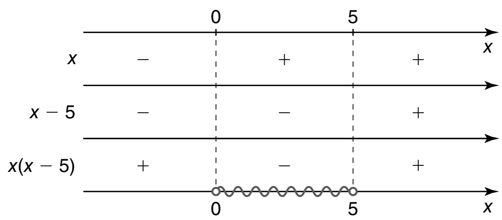
x	Sinal de $x(x - 5)$
7	+
2	−
−4	+
45.893	+
−346.291	+
$\frac{1}{567}$	−
$-\frac{1}{789}$	+

c)



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 5\}$

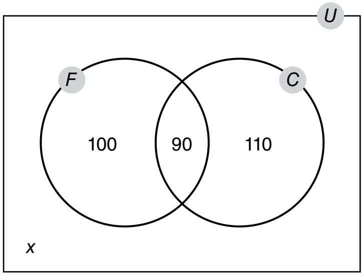
d)



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

Exercícios contextualizados

30. Sejam:
- U o conjunto dos 320 deputados;
- F o conjunto dos deputados que votaram a favor da CPI do futebol;
- C o conjunto dos deputados que votaram a favor da CPI do caixa 2.

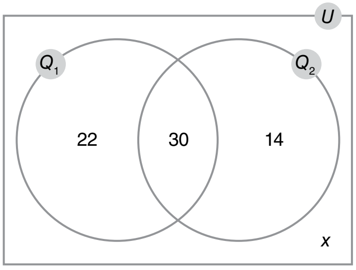


$x + 100 + 90 + 110 = 320 \Rightarrow x = 20$

Logo, 20 deputados votaram contra a instalação das CPIs.

Alternativa **e**.

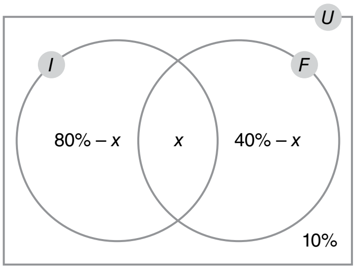
31. Sejam:
- U o universo dos 80 alunos;
- Q_1 o conjunto de alunos que acertaram a questão 1;
- Q_2 o conjunto de alunos que acertaram a questão 2.



Observando o diagrama, notamos que $22 + 14 = 36$ alunos acertaram apenas uma questão.

Alternativa **b**.

32. Sejam:
- U o universo de 100% dos alunos;
- I o conjunto de alunos que estudam inglês;
- F o conjunto de alunos que estudam francês.



$80\% - x + x + 40\% - x + 10\% = 100\% \Rightarrow$

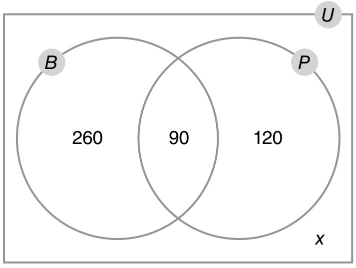
$\Rightarrow x = 30\%$

Assim, a porcentagem de alunos que estudam ambas as línguas é 30%.

Alternativa **e**.

33. Sejam:
- U o universo de 600 produtores;
- B o conjunto de produtores que investiram em biotecnologia;
- P o conjunto de em uso correto de produtos para a proteção de plantas.

Organizando as informações no diagrama, temos:



$260 + 90 + 120 + x = 600 \Rightarrow x = 130$

Analisando as afirmações com base no diagrama, temos:

I. V

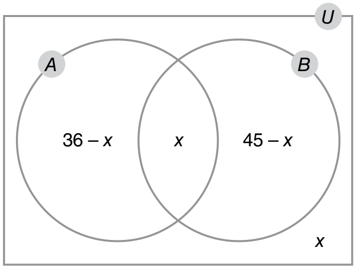
II. V

III. V, pois $260 + 90 + 120 = 470$.

IV. V, pois $x = 130$.

Alternativa **d**.

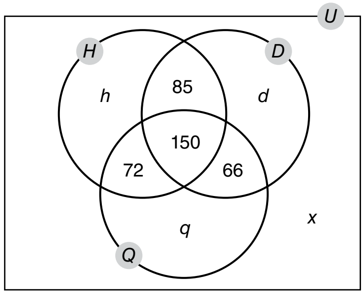
34. Sejam:
- U o universo dos 54 candidatos;
- A o conjunto dos candidatos com pelo menos 30 anos de idade;
- B o conjunto dos candidatos com no máximo 34 anos;
- x o número de candidatos na faixa etária de 30 a 34 anos.



$36 - x + x + 45 - x = 54 \Rightarrow x = 27$

Logo, o número de candidatos na faixa etária de 30 a 34 anos é 27.

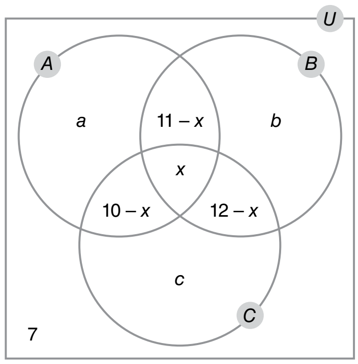
35. Sejam:
- U o conjunto dos 1.210 alunos do ensino médio;
- H o conjunto dos alunos que leram *Helena*;
- D o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*;
- Q o conjunto dos alunos que leram *Quincas Borba*;
- h o número de alunos que leram apenas o romance *Helena*;
- d o número de alunos que leram apenas o romance *Dom Casmurro*;
- q o número de alunos que leram apenas o romance *Quincas Borba*;
- x o número de alunos que não leram nenhum dos romances.



a) $d + 85 + 150 + 66 = 449 \Rightarrow d = 148$
Logo, 148 alunos leram apenas o romance *Dom Casmurro*.

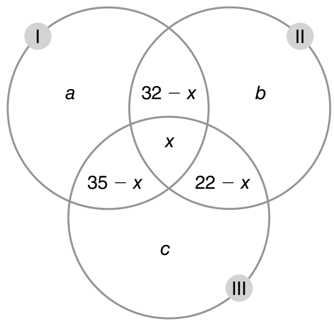
b) $h + 85 + 150 + 72 = 487 \Rightarrow h = 180$
$q + 72 + 150 + 66 = 465 \Rightarrow q = 177$
$148 + 180 + 177 + 85 + 72 + 66 + 150 + x = 1.210 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 332$
Logo, 332 alunos responderam "não" às três perguntas.

36. Sejam:
- A o conjunto de alunos que conheciam a região A;
- B o conjunto de alunos que conheciam a região B;
- C o conjunto de alunos que conheciam a região C;
- x o número de alunos que conheciam as três regiões;
- a o número de alunos que conheciam somente a região A;
- b o número de alunos que conheciam somente a região B;
- c o número de alunos que conheciam somente a região C.



$a + 11 - x + x + 10 - x = 19 \Rightarrow a = x - 2$
$b + 11 - x + x + 12 - x = 20 \Rightarrow b = x - 3$
$c + 10 - x + x + 12 - x = 19 \Rightarrow c = x - 3$
Assim, temos que o valor de x é:
$x - 2 + x - 3 + x - 3 + 11 - x + x + 10 - x +$
$+ 12 - x + 7 = 40 \Rightarrow x = 8$
Logo, o número de alunos que não conheciam nem A nem C é dado por:
$b + 7 = 8 - 3 + 7 = 12$
Alternativa **a**.

37. Sejam:
- I o conjunto de pessoas que responderam "sim" à pergunta I;
- II o conjunto de pessoas que responderam "sim" à pergunta II;
- III o conjunto de pessoas que responderam "sim" à pergunta III;
- x o número de pessoas que responderam "sim" às três perguntas;
- a o número de pessoas que responderam "sim" somente à pergunta I;
- b o número de pessoas que responderam "sim" somente à pergunta II;
- c o número de pessoas que responderam "sim" somente à pergunta III.



Vamos calcular os valores de a, b e c.
$a + 32 - x + x + 35 - x = 62 \Rightarrow a = x - 5$
$b + 32 - x + x + 22 - x = 48 \Rightarrow b = x - 6$
$c + 35 - x + x + 22 - x = 45 \Rightarrow c = x - 12$
Como o total de entrevistados é 88, o valor de x é determinado pela seguinte equação:
$-5 + x + 32 - x + x + 35 - x - 12 + x + 22 - x - 6 +$
$+ x = 88 \Rightarrow x = 22$
Portanto, 22 pessoas responderam "sim" às três perguntas.

38. Considerando todas as notas que não são de R$ 5,00, notamos que todas elas são pares. Logo, a soma delas, independente da quantidade de cada uma, será par. Como é dado que o valor total que a pessoa possui na carteira é ímpar, é preciso adicionar uma quantidade ímpar ao número par equivalente à soma das notas de R$ 2,00, R$ 10,00 e R$ 20,00. Assim, a quantidade de notas de R$ 5,00 deve ser ímpar, pois, caso contrário, o valor seria par.

39. Sejam $2n$ e $2n + 2$ as medidas dos dois caibros, pois são números pares consecutivos, e seja x o comprimento de cada pedaço obtido. Temos:
Número de pedaços obtidos pelo caibro menor: $\frac{2n}{x}$
Número de pedaços obtidos pelo caibro maior: $\frac{2n + 2}{x}$
Como o total de pedaços é 67, temos:
$\frac{2n}{x} + \frac{2n + 2}{x} = 67 \Rightarrow 4n + 2 = 67x$
Como os comprimentos são pares e consecutivos, o maior divisor comum entre eles é 2; logo, o comprimento x de cada pedaço é 2. Então:
$4n + 2 = 67 \cdot 2 \Rightarrow n = 33$
Assim, os comprimentos são $2 \cdot 33 = 66$ dm e $2 \cdot 33 + 2 = 68$ dm.

40. Sendo x a largura, o comprimento será $2x$. Chamando de d a diagonal e usando o teorema de Pitágoras, temos:
$d^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow x\sqrt{5}$
Como x é um número natural, então $x\sqrt{5}$ é um número irracional.
Alternativa **d**.

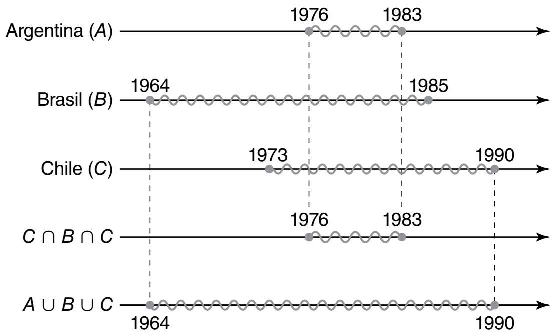
41. Calculando o IMC de cada um:

Duílio: $\frac{96,4}{1,88^2} \approx 27,3$

Sandra: $\frac{84}{1,7^2} \approx 29,1$

Altenativa **b**.

42. Organizando os intervalos na reta numérica:



a) Os três países estiveram simultaneamente sob regime ditatorial de 1976 a 1983, ou seja, no intervalo [1976, 1983].

b) Pelo menos um desses países esteve sob regime ditatorial de 1964 a 1990, ou seja, no intervalo [1964, 1990].

43. A menor área possível é considerando as duas menores dimensões. Logo, será $100 \cdot 64 = 6.400$ m^2.
A maior área possível é considerando as duas maiores dimensões. Assim, será $110 \cdot 75 = 8.250$ m^2.
Então o intervalo será [6.400, 8.250].
Alternativa **e**.

44. A distância entre a Terra e um planeta anão é:
$5 \cdot 10^9$ km $= 5 \cdot 10^{15}$ mm
A distância entre a Terra e a estrela Alfa de Centauro é:
$41 \cdot 10^{12}$ km $= 41 \cdot 10^{18}$ mm
Assim, indicando por x a medida pedida, em milímetro, temos:
$$\frac{41 \cdot 10^{18}}{10^3} = \frac{5 \cdot 10^{15}}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 10^{18}}{41 \cdot 10^{18}} = \frac{5}{41}$$
$\therefore\ x \approx 0,12$ mm
Alternativa **a**.

45. I. Adotando o ano de 365 dias e indicando por x o tempo, em hora, temos a regra de três:

Anos		Horas
$4,5 \cdot 10^9$	———	$45 \cdot 365 \cdot 24$
x	———	1

$$\therefore\ x = \frac{4,5 \cdot 10^9}{45 \cdot 365 \cdot 24} \text{ horas} \approx 11.416 \text{ anos}$$

Alternativa **d**.

II. Indicando por y o tempo, em ano, temos a regra de três:

Anos		Anos
$4,5 \cdot 10^9$	———	45
$15 \cdot 10^9$	———	y

$$\therefore\ y = \frac{45 \cdot 15 \cdot 10^9}{4,5 \cdot 10^9} \text{ horas} = 150 \text{ anos}$$

Alternativa **b**.

Pré-requisitos para o capítulo 2

1. a) 50°
b) 90°
c) 48, pois $8 \cdot 6 = 48$.
d) 24, pois $(8 \cdot 6) \div 2 = 24$
e) 45, pois $[(10 + 8) \cdot 5] \div 2 = 45$
f) 200, pois cada metro tem 100 cm.

2. Se o total de estudantes é 30, 40% desse total é:
$30 \cdot 0,40 = 12$
Portanto, estudam 12 rapazes na sala.

3. Duas grandezas variáveis e dependentes são diretamente proporcionais se para cada valor v de uma delas o valor correspondente da outra é kv, em que k é uma constante real. Assim concluímos que, se A e B são grandezas diretamente proporcionais, então a razão dos valores de uma delas para os correspondentes valores não nulos da outra é constante: $\frac{kv}{v} = k$ ou $\frac{v}{kv} = \frac{1}{k}$.
Exemplo possível: No movimento de um automóvel, com velocidade constante, a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo.

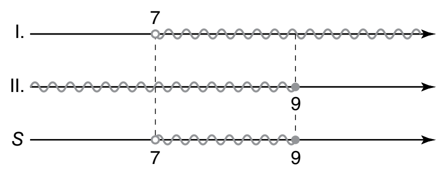
4. Duas grandezas variáveis e dependentes são inversamente proporcionais quando o produto de duas medidas correspondentes quaisquer é uma constante real não nula.
Exemplo possível: No movimento de um automóvel, com velocidade constante, a velocidade é inversamente proporcional ao tempo.

5. a) $4(5 + 2x) - x = 5 - 3(x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 + 8x - x = 5 - 3x - 3$
$\therefore\ 20 + 7x = 2 - 3x \Rightarrow 10x = -18$
$\therefore\ x = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$
$S = \left\{-\frac{9}{5}\right\}$

b) $x(x + 2) - 4x = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 4x = 2x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$
Resolvendo por Bhaskara:
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ e } x_2 = -1$$
$S = \{-1, 5\}$

6. Considerando o sistema $\begin{cases} 2x - 5 > x + 2 \\ 4x - 1 \geqslant 5x - 10 \end{cases}$, temos:

I. $2x - 5 > x + 2 \Rightarrow x > 7$
II. $4x - 1 \geqslant 5x - 10 \Rightarrow 9 \geqslant x \Rightarrow x \leqslant 9$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x \leqslant 9\}$

7. Temos que:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \ \text{(I)} \\ 3x - 2y = -3 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando (I) a (II), temos:
$7x = 7 \Rightarrow x = 1$
Substituindo x por 1 em (I), temos:
$4 \cdot 1 + 2 \cdot y = 10 \Rightarrow y = 3$
Portanto, $x = 1$ e $y = 3$.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. **a)** 10111_2 na base decimal é:

$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 23$

b) 21102_3 na base decimal é:

$2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 =$
$= 162 + 27 + 9 + 2 = 200$

c) 121403_5 na base decimal é:

$1 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 =$
$= 3.125 + 1.250 + 125 + 100 + 0 + 3 = 4.603$

2. 256 é 10000_4, 2011_5 e 1104_6, pois, fazendo as divisões sucessivas, temos:

$$\begin{array}{rrrrr} 256 & \big|\underline{\ 4\ } & & & \\ 0 & 64 & \big|\underline{\ 4\ } & & \\ & 0 & 16 & \big|\underline{\ 4\ } & \\ & & 0 & 4 & \big|\underline{\ 4\ } \\ & & & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 256 & \big|\underline{\ 5\ } & & \\ 1 & 51 & \big|\underline{\ 5\ } & \\ & 1 & 10 & \big|\underline{\ 5\ } \\ & & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 256 & \big|\underline{\ 6\ } & & \\ 4 & 42 & \big|\underline{\ 6\ } & \\ & 0 & 7 & \big|\underline{\ 6\ } \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

3. **a)** g é representado por 103. Na base binária com 8 dígitos é 01100111, pois:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 103 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & & \\ 1 & 51 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & \\ & 1 & 25 & \big|\underline{\ 2\ } & & & \\ & & 1 & 12 & \big|\underline{\ 2\ } & & \\ & & & 0 & 6 & \big|\underline{\ 2\ } & \\ & & & & 0 & 3 & \big|\underline{\ 2\ } \\ & & & & & 1 & 1 \end{array}$$

b) G é representado por 71. Na base binária com 8 dígitos é 01000111, pois:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 71 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & & \\ 1 & 35 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & \\ & 1 & 17 & \big|\underline{\ 2\ } & & & \\ & & 1 & 8 & \big|\underline{\ 2\ } & & \\ & & & 0 & 4 & \big|\underline{\ 2\ } & \\ & & & & 0 & 2 & \big|\underline{\ 2\ } \\ & & & & & 0 & 1 \end{array}$$

c) @ é representado por 64. Na base binária com 8 dígitos é 01000000, pois:

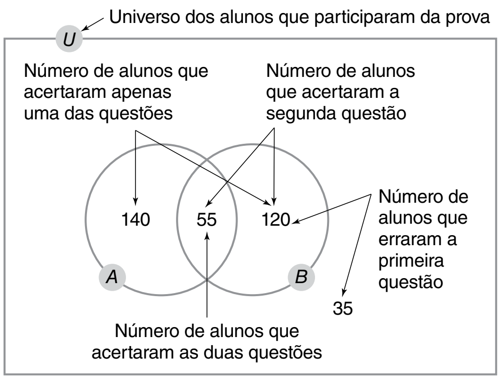
$$\begin{array}{rrrrrrr} 64 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & & \\ 0 & 32 & \big|\underline{\ 2\ } & & & & \\ & 0 & 16 & \big|\underline{\ 2\ } & & & \\ & & 0 & 8 & \big|\underline{\ 2\ } & & \\ & & & 0 & 4 & \big|\underline{\ 2\ } & \\ & & & & 0 & 2 & \big|\underline{\ 2\ } \\ & & & & & 0 & 1 \end{array}$$

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno não representou no diagrama o número de alunos que erraram ambas as questões.

Resolução correta:

a) Sendo U o universo dos alunos que participaram da prova, A o conjunto dos alunos que acertaram a primeira questão e B o conjunto dos alunos que acertaram a segunda, temos o diagrama:



Constatamos, assim, a compatibilidade dos dados, pois não houve nenhuma contradição na montagem do diagrama.

b) De acordo com o diagrama do item **a**, concluímos que o número de alunos que participaram da prova é dado por: $140 + 55 + 120 + 35 = 350$