Função Modular

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O módulo de um número real **a** é representado por |a|, em que $|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$.

Exemplos:

1º) $|3| = 3$

2º) $|-4| = -(-4) = 4$

> Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância do ponto **a** até a origem da reta real.

Propriedades do módulo

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $|x|.|y| = |x.y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

iv) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

v) $|x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

vi) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall y \neq 0$

EQUAÇÃO MODULAR

É toda equação na qual a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a equação $|x| = 8$.

Há dois valores que satisfazem a equação:

$x = -8$ ou $x = 8$

Portanto, $S = \{-8, 8\}$.

2º) Resolver a equação $|x - 4| = 10$.

Se um número possui módulo 10, esse número pode ser igual a −10 ou 10. Portanto, temos:

$$\begin{cases} x - 4 = 10 \\ \text{ou} \\ x - 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-6, 14\}$.

3º) Resolver a equação $|2x + |x - 1|| = 5$.

Resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{cases} 2x + |x - 1| = 5 \\ \text{ou} \\ 2x + |x - 1| = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ |x - 1| = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| = -2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

ou

$$|x - 1| = -2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x - 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Substituindo cada um dos resultados na equação original, verificamos que $x = -6$ ou $x = 2$ são soluções da equação.

Portanto, $S = \{-6, 2\}$.

4º) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 3| = 14$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Observe que:

i) para valores de **x** menores do que −3, os termos x − 1 e x + 3 são **negativos**.

ii) para valores de **x** entre −3 e 1, o termo x − 1 é **negativo**, e o termo x + 3 é **positivo**.

iii) para valores de **x** maiores do que 1, os termos x − 1 e x + 3 são **positivos**.

Assim, podemos representar esse fato no esquema a seguir:

$x < -3$	$\mathbf{-3}$	$-3 < x < 1$	$\mathbf{1}$	$x > 1$
$-(x - 1) - (x + 3) = 14$		$-(x - 1) + (x + 3) = 14$		$x - 1 + x + 3 = 14$
$-x + 1 - x - 3 = 14$		$-x + 1 + x + 3 = 14$		$2x = 12$
$-2x = 16$		$4 = 14$		$x = 6$
$x = -8$				
(convém)		(absurdo)		(convém)

Devemos verificar também se as raízes −3 e 1 são soluções da equação:

i) Para x = −3, temos 4 = 14. (absurdo)

ii) Para x = 1, temos 4 = 14. (absurdo)

Assim, as soluções são x = −8 ou x = 6.

Portanto, S = {−8, 6}.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação é dita modular quando a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a inequação $|x| > 7$.

Observe que há dois intervalos reais que satisfazem a essa condição: $x < -7$ ou $x > 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 7\}$.

2º) Resolver a inequação $|x| < 7$.

Observe que há apenas um intervalo que satisfaz a essa condição: $-7 < x < 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$.

GENERALIZANDO

Seja **a** um número real positivo. Há dois casos possíveis:

1º caso: $\boxed{|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a}$

2º caso: $\boxed{|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$

3º) Resolver a inequação $|3x - 2| \leq 7$.

$-7 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2 \Rightarrow$

$-5 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -\dfrac{5}{3} \leq x \leq 3$

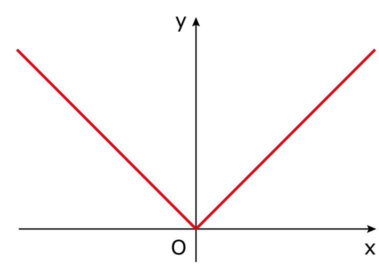
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} \leq x \leq 3\right\}$.

FUNÇÃO MODULAR

É uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Essa função, de acordo com a definição de módulo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$



O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Observe que:

Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$.

Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$.

A imagem da função modular é o conjunto

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

GRÁFICOS DE FUNÇÕES MODULARES

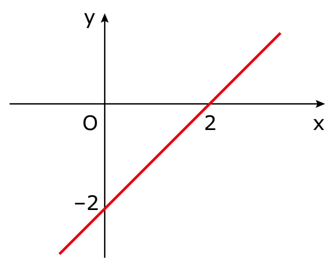
Gráficos de funções da forma y = |f(x)|

Esse tipo de gráfico é obtido pela "reflexão" ou "rebatimento", em relação ao eixo x, das partes do gráfico nas quais $f(x) < 0$.

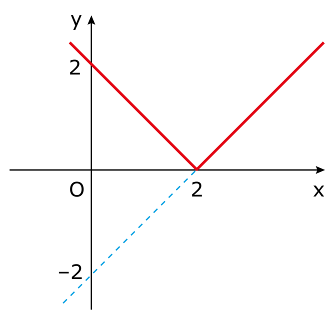
Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função y = |x – 2|.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função y = x – 2.



Agora, basta efetuar uma reflexão, em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.

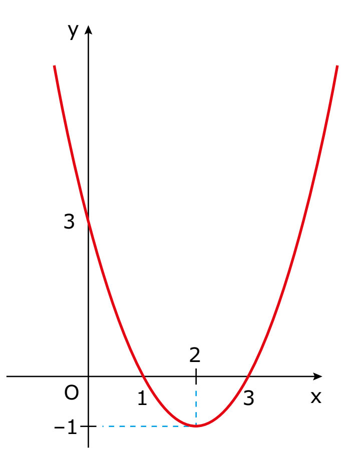


OBSERVAÇÃO

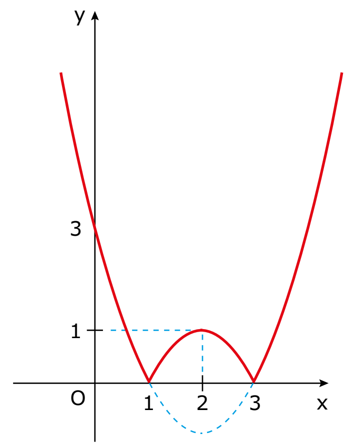
O gráfico da função básica y = |x| também pode ser obtido por esse processo.

2º) Esboçar o gráfico da função y = |x² – 4x + 3|.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função y = x² – 4x + 3.



Efetuando a reflexão em torno do eixo x, temos o seguinte gráfico:

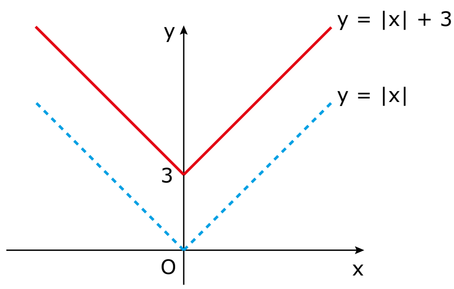


Outros gráficos

Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função y = |x| + 3.

Basta esboçar o gráfico da função y = |x| e, em seguida, deslocar esse gráfico 3 unidades para cima.



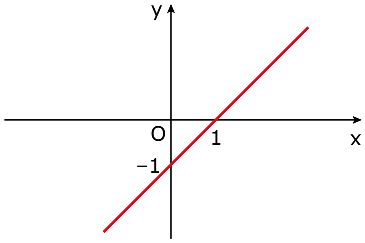
2º) Esboçar o gráfico da função y = |x – 1| – 2.

Basta esboçar o gráfico da função y = |x – 1| e, em seguida, deslocar esse gráfico 2 unidades para baixo.

1º passo: Esboço do gráfico da função y = |x – 1|:

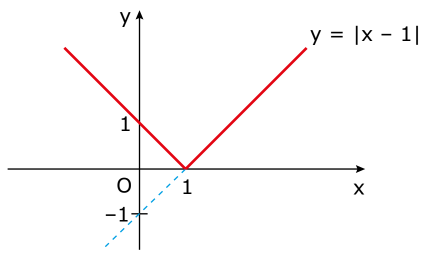
Nesse caso, podemos utilizar o "rebatimento" em relação ao eixo x, descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de y = x – 1.



MATEMÁTICA

Em seguida, basta efetuar uma reflexão em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.



2º passo: Transladamos o gráfico da função y = |x − 1| construído anteriormente 2 unidades para baixo. Para isso, é necessário encontrar os pontos de interseção de y = |x − 1| − 2 com os eixos coordenados:

- Interseção com o eixo Oy

  Fazendo $x = 0 \Rightarrow y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$

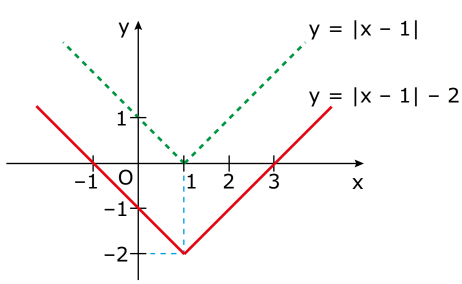
  $y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$

- Interseção com o eixo Ox

  Fazendo $y = 0 \Rightarrow 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$

  $|x - 1| = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ \quad \text{ou} \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$



3º) Esboço do gráfico da função y = |x − 1| + |x + 2|.

Vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos:

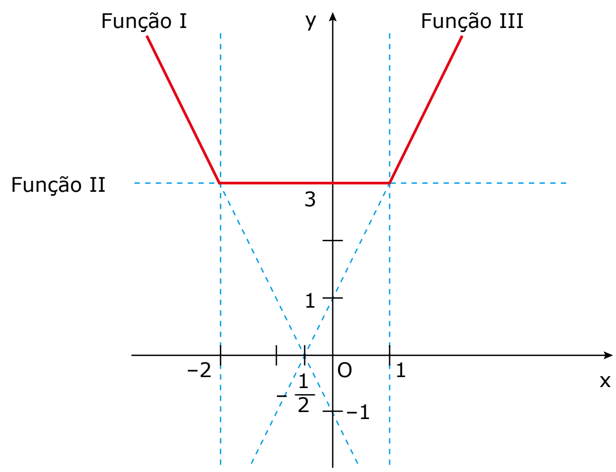
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Logo, podemos usar o seguinte esquema:

x ≤ −2	−2 < x < 1	x ≥ 1
$y = -(x - 1) - (x + 2)$ $y = -x + 1 - x - 2$ $y = -2x - 1$ (função I)	$y = -(x - 1) + x + 2$ $y = -x + 1 + x + 2$ $y = 3$ (função II)	$y = x - 1 + x + 2$ $y = 2x + 1$ (função III)

(Pontos de separação no esquema: **−2** e **1**.)

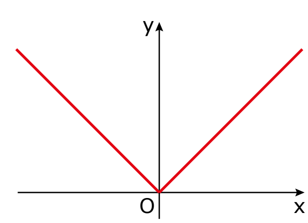
Daí, observe que há três funções, uma para cada intervalo de **x**. Representando tais funções em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, temos:



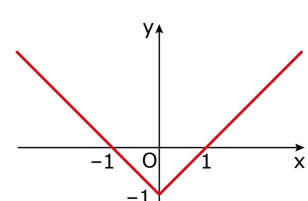
4º) Esboço do gráfico da função y = ||x| − 1|.

Inicialmente, esboçamos o gráfico da função y = |x|. Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade para baixo, obtendo o gráfico da função y = |x| − 1. Finalmente, "rebatemos", em relação ao eixo x, a parte do gráfico com ordenada negativa, obtendo o gráfico da função y = ||x| − 1|.

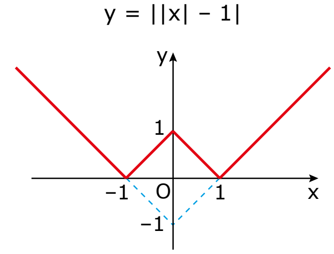
y = |x|



y = |x| − 1



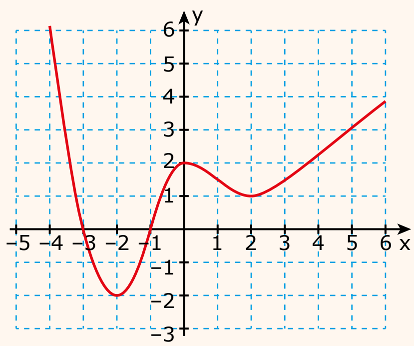
y = ||x| − 1|



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função f(x).



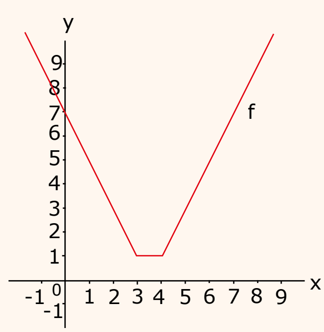
O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$ é igual a:

A) 6.
B) 5.
C) 4.
D) 3.
E) 2.

02. 7N6D (CEFET-MG) Seja f(x) uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, |f(x)|,

A) nunca passará pela origem.
B) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.
C) intercepta o eixo x somente se f(x) for do primeiro grau.
D) intercepta o eixo y somente se f(x) for do segundo grau.

03. I7KE (UFMS–2020) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:



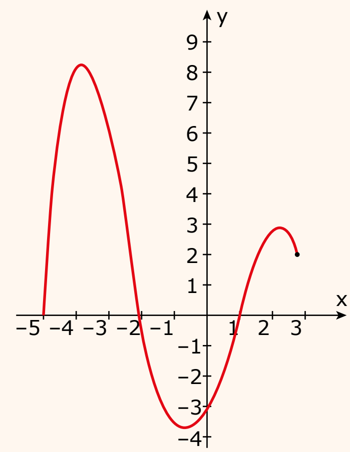
A função **f** pode ser representada por

A) $|x| + |x + 7|$.
B) $|3 - x| + |x - 4|$.
C) $-|x| + |x - 7|$.
D) $|x + 2| + |x + 5|$.
E) $|x + 9| - |3x + 2|$.

04. YBCK (CEFET-MG) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

05. ZRC8 (UESC-BA) Para fazer um estudo sobre certo polinômio P(x), um estudante recorreu ao gráfico da função polinomial y = P(x), gerado por um *software* matemático. Na figura, é possível visualizar a parte da curva obtida para valores de **x**, de −5 até 2,7.

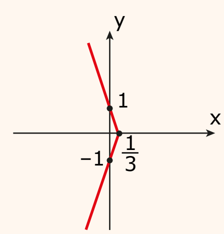


O número de raízes da equação $|P(x)| = 1$, no intervalo [−5; 2,7], é igual a

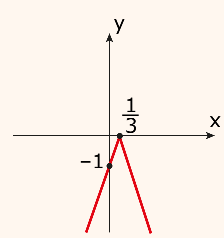
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

06. ØG21 (PUC Rio) Qual dos gráficos a seguir representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

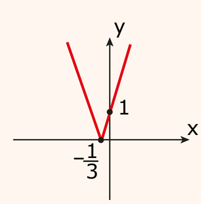
A)



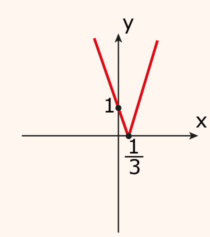
B)



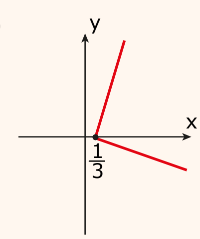
C)



D)



E)



07. MAØA (Unit-AL) Sabendo-se que x_1 e x_2 são números reais distintos que satisfazem a equação $|3x + 10| = |5x + 2|$, é correto afirmar que o valor de $|x_1 - x_2|$ é

A) $\frac{7}{2}$. B) 4. C) $\frac{11}{2}$. D) 6. E) $\frac{15}{2}$.

08. EE65 (UECE) Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, os valores dos números reais **a** e **b** são, respectivamente,

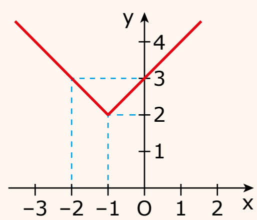
A) −1 e 6. B) 5 e 6. C) 0 e 36. D) 5 e 36.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

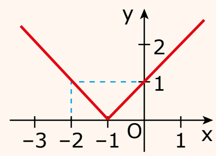
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UDESC) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + 2$ é:

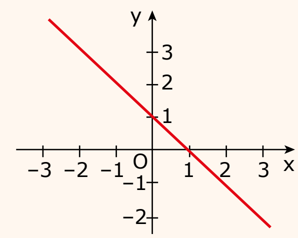
A)



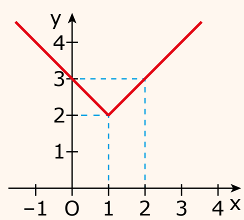
C)



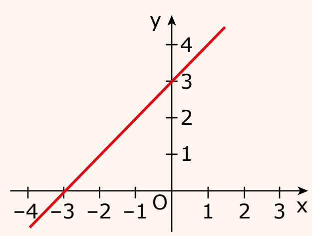
E)



B)



D)



02. 6ICØ (FGV-SP) A soma dos valores inteiros de **x** que satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geq 1$ é

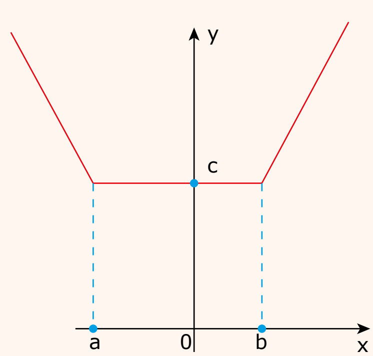
A) 25. C) 16. E) 21.

B) 13. D) 18.

03. (ESA–2023) O valor da soma dos elementos do conjunto solução da equação $|4x - 5| = 2x - 1$ é igual a:

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

04. KAQ3 (EsPCEx-SP) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de $a + b + c$ é igual a



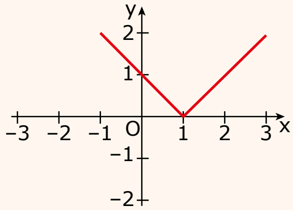
Desenho Ilustrativo Fora de Escala

A) −7. B) −6. C) 4. D) 6. E) 10.

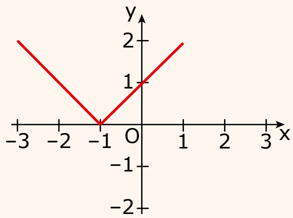
05. Y3J8

(PUC Rio) Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

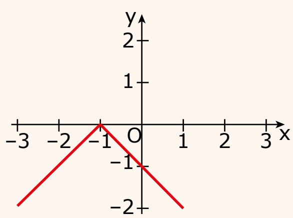
A)



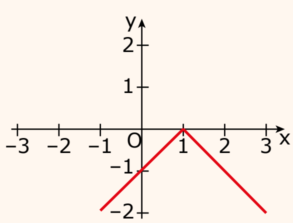
B)



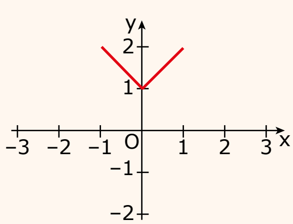
C)



D)



E)



06. (EsPCEx-SP) O conjunto solução da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

A) −8.

B) −2.

C) 0.

D) 2.

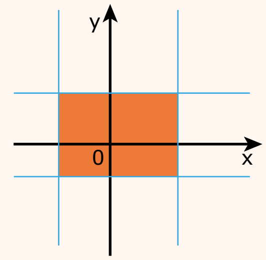
E) 8.

07. FBTN

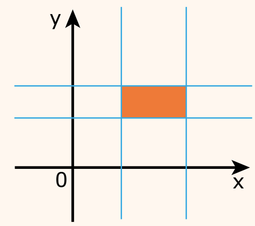
(UFRGS-RS) Considere as desigualdades definidas por $|x + 5| \leq 2$ e $|y - 4| \leq 1$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos a seguir melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

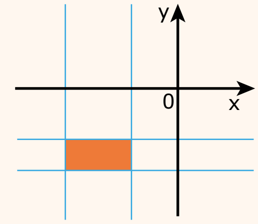
A)



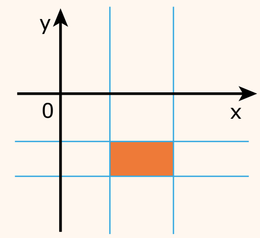
B)



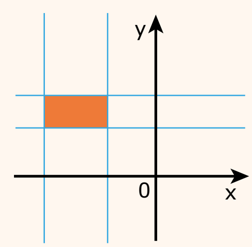
C)



D)



E)



08. (UFLA-MG) Se $y = |x|^2 - 5|x| + 6$, a afirmativa correta é:

A) **y** se anula somente para quatro valores de **x**.

B) **y** possui apenas um ponto de mínimo.

C) **y** se anula somente para dois valores de **x**.

D) **y** não é uma função par.

09. (FGV-SP) No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $|x| + |y| = 2$ determinam um polígono cujo perímetro é:

A) $2\sqrt{2}$

B) $4 + 2\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) $8 + 4\sqrt{2}$

E) $8\sqrt{2}$

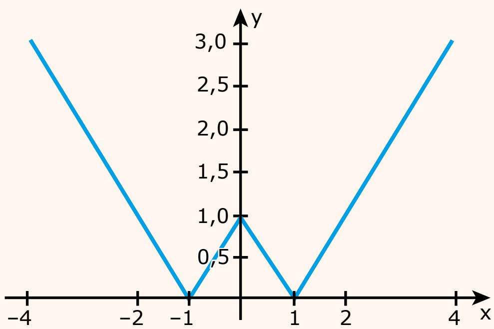
MATEMÁTICA

10. MU7V (UECE) Em um referencial cartesiano ortogonal, no qual a unidade linear é o centímetro, a área da região limitada pelo gráfico da equação $|x| + |y| = 1$, em centímetros quadrados, é:

A) 1 B) 2 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$

11. 9M6D (UFRJ) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(2x) = |1 - x|$. Determine os valores de **x** para os quais $f(x) = 2$.

12. (PUCPR) Considere os seguintes dados. Pode-se dizer que quando duas variáveis **x** e **y** são tais que a cada valor de **x** corresponde um único valor de **y**, segundo uma lei matemática, diz-se que **y** é função de **x**. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, que é representada pelo gráfico a seguir.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir:

I. **f** é ímpar.
II. **f** é injetora.
III. A lei matemática de **f** é $f(x) = ||x| - 1|$.
IV. **f** é crescente se, e só se, $x > 1$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

A) Somente II é correta.
B) Somente I é correta.
C) Somente III e V são corretas.
D) Todas as proposições são corretas.
E) Todas as proposições são falsas.

13. NWJ5 (EN-RJ) A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x| \cdot \frac{x^2 - 1}{x}$ nos pontos **P** e **Q**. Qual a distância entre **P** e **Q**?

A) $2\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

14. 8FZI (UDESC) A área da região fechada delimitada pelas funções $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 2|$ e $h(x) = |x - 3|$, em unidades de área, é igual a:

A) 1 B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

SEÇÃO ENEM

01. Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia na resolução de um desafio matemático. O professor forneceu uma série de informações acerca de um número **Y**. A primeira equipe que conseguisse determinar esse número venceria a prova.

As informações eram as seguintes:

- O número **Y** é natural.
- O número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da origem da reta real.

Acerca do número **Y**, podemos concluir que

A) é um número primo.
B) possui 6 divisores naturais.
C) é divisor de 56.
D) é um número ímpar.
E) é múltiplo de 3.

02. A elaboração de um programa computacional consiste em fornecer uma série de comandos ao computador para que o mesmo execute uma determinada tarefa. Tais comandos devem ser dados em uma linguagem apropriada, chamada linguagem de programação. É comum que um programador, antes de digitar o programa propriamente dito, crie um algoritmo, ou seja, uma espécie de rascunho que contém a sequência de operações que o futuro programa deverá executar. Um programador escreveu em um papel o seguinte algoritmo:

Passo 1) Dados iniciais
x_0: valor de entrada
Passo 2) Faça $x_0 - 1$.
Passo 3) Se $|x_0 - 1| = 6$, então FIM.
Passo 4) Se $|x_0 - 1| \neq 6$, então VOLTE AO PASSO 2, UTILIZANDO $|x_0 - 1|$ COMO DADO DE ENTRADA.

Após a implementação do programa, foram feitos vários testes. Em um desses testes, verificou-se que o passo 2 foi repetido uma única vez, antes de o programa terminar. O número de valores reais possíveis para o dado de entrada x_0, nessas condições, é igual a

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B 02. B 03. B 04. D 05. D 06. D 07. C 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. E
03. D
04. C
05. A
06. E
07. E
08. A
09. E
10. B
11. $x = -2$ ou $x = 6$
12. C
13. B
14. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C 02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Função Exponencial

INTRODUÇÃO

Conta uma lenda que um rei havia prometido realizar qualquer desejo a quem executasse uma difícil tarefa. Quando um dos seus súditos conseguiu realizá-la, o rei viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. O súdito pediu então que as 64 casas de um tabuleiro de xadrez, jogo muito apreciado no reino, fossem preenchidas com grãos de trigo, do seguinte modo: na primeira casa, seria colocado um grão de trigo e, em cada casa seguinte, seria colocado o dobro de grãos que havia na casa anterior. O rei suspirou aliviado, considerando o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os seus conselheiros, alguns dias depois, anunciaram que o reino encontrava-se totalmente sem provisões de trigo, uma vez que apenas na última casa o total de grãos era de 2^{63}, o que corresponde a, aproximadamente, 9 223 300 000 000 000 000 = $9{,}2233 \cdot 10^{18}$. Essa quantidade, juntamente com a soma das quantidades colocadas nas outras casas, superava em muito não só a capacidade do reino, mas a de todos os outros de que se tinha notícia.

Essa lenda nos dá um exemplo de uma função exponencial, a função $y = 2^x$. As funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente, sendo extremamente importantes para descrever diversos fenômenos, tais como crescimento populacional, reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos, entre outros. Seu estudo desenvolveu-se notadamente por volta do século XVI, com o trabalho de dois matemáticos: John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630).

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tal função é denominada **função exponencial**.

Exemplos:

1º) $f(x) = 3^x$

2º) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

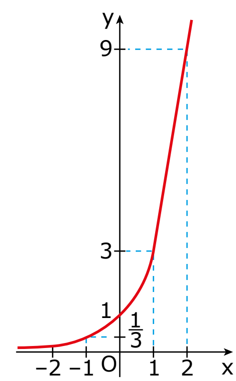
3º) $f(x) = 0{,}78^x$

4º) $f(x) = 2{,}23^x$

GRÁFICOS

Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir alguns valores à variável, calcular a imagem correspondente e construir o gráfico. Assim, temos:

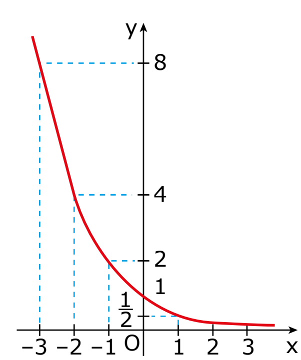
x	$y = 3^x$
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

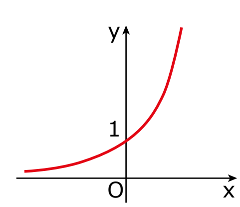


De modo geral, há dois tipos de gráfico para a função $f(x) = a^x$:

i) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **crescente**.

Exemplo:

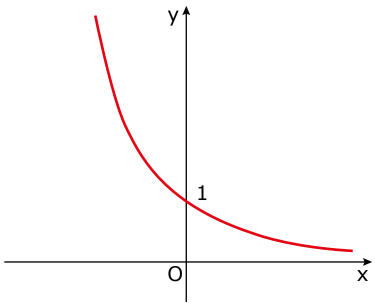
$f(x) = 2^x$



ii) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **decrescente**.

Exemplo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



Com relação aos gráficos, podemos dizer que:

i) Trata-se de uma função injetora, pois, a cada valor da imagem, corresponde um único valor do domínio.

ii) O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$).

iii) A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo **x** real. Portanto, a sua imagem Im é dada por $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$.

iv) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1). Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.

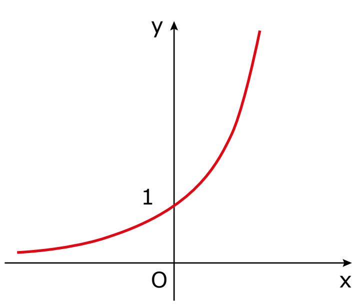
OBSERVAÇÃO

O número "e"

Trata-se de um número irracional, cujo valor é 2,71828... . Esse número é conhecido como número neperiano, uma referência ao matemático escocês John Napier (1550-1617), autor da primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos.

O número **e** é extremamente importante no estudo de juros e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, crescimento de bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e^x$ é dado por:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Determinar os valores de **k** para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

Resolução:

Para que a função seja crescente, é necessário que $2 + \frac{3k}{5} > 1$.

Portanto, temos:

$$2 + \frac{3k}{5} > 1 \Rightarrow \frac{3k}{5} > -1 \Rightarrow 3k > -5 \Rightarrow k > -\frac{5}{3}$$

02. (PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que:

A) tem um único zero no intervalo [0, 2].

B) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$.

C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.

D) assume valores de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$.

E) assume valores apenas em $\mathbb{R}_+$.

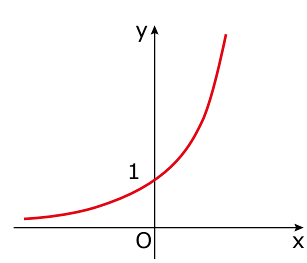
Resolução:

A função $f(x) = e^x$ não possui raízes, pois $e^x > 0$ para todo **x** real. Portanto, a alternativa A é falsa.

Para $0 < a < 1$, temos que $e^x > a^x$. Portanto, a alternativa B é falsa.

Para $a > e$, temos que $e^x < a^x$. Portanto, a alternativa C é falsa.

A função $f(x) = e^x$ possui o seguinte gráfico:



Observe que se trata de uma função com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, a alternativa D é verdadeira.

Conforme visto no item anterior, o domínio não se restringe ao conjunto $\mathbb{R}_+$. Portanto, a alternativa E é falsa.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. GP6J

(IMED-SP) Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função $B(t) = 10 . 3^{t-1}$, em que B(t) expressa a quantidade de bactérias e **t** representa o tempo em horas. Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

02. 9DN0

(EBMSP) Muita gente não consegue começar o dia sem uma xícara de café e até mesmo há quem se refira ao café como "o combustível do homem moderno". Uma xícara de café contém vitamina B12, vitamina B5, magnésio e potássio, e outros nutrientes.

Para preparar um café instantâneo, adiciona-se água em ebulição, 100 °C, à mistura do café.

A uma temperatura ambiente de 30 °C, a temperatura do café, em °C, após **t** minutos, pode ser calculada pela função $f(t) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{2}}$.

Passados quatro minutos, ápos o preparo do café, a temperatura da bebida é, aproximadamente,

A) 64 °C.
B) 66 °C.
C) 68 °C.
D) 70 °C.
E) 72 °C.

03. (UNISC-RS–2021) O número de bactérias numa cultura, em função do tempo **t** (em horas), pode ser expresso por $N(t) = 256 . 2^{0,75t}$. Em quanto tempo, em horas, o número de bactérias será igual a 2 048?

A) 2
B) 6
C) 8
D) 3
E) 4

04. (UNIFESP) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se **K** é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo **t**, em horas.

Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de

A) 12 horas e meia.
B) 12 horas.
C) 10 horas e meia.
D) 8 horas.
E) 6 horas.

05. 6F04

(UFGD-MS) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{-2x}$. O valor de $f\left(\frac{3a}{2} - 1\right) - f\left(\frac{3a}{2}\right)$ é igual a:

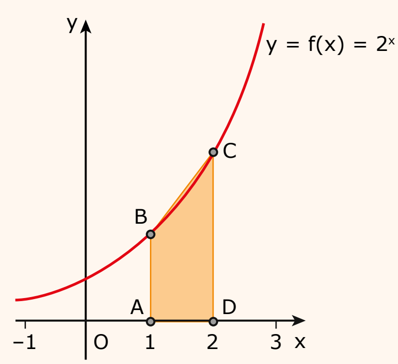
A) 2
B) f(2a)
C) $3f\left(\frac{3}{2}a\right)$
D) $f\left(\frac{3}{2}a\right)$
E) −2

06. (ACAFE-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos e armazenar os alimentos em locais apropriados ajudam a prevenir a contaminação por estes. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é

A) 1 h e 35 min.
B) 1 h e 40 min.
C) 1 h e 50 min.
D) 1 h e 55 min.

07. WWA2

(UFJF-MG) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura a seguir está representado, no plano cartesiano, o gráfico de **f** e um trapézio ABCD, retângulo nos vértices **A** e **D** e cujos vértices **B** e **C** estão sobre o gráfico de **f**.



A medida da área do trapézio ABCD é igual a

A) 2.
B) $\frac{8}{3}$.
C) 3.
D) 4.
E) 6.

08. ZX8U

(UEL-PR) O crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = \alpha.4^{\lambda.t}$, em que $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas, e P(t) é a população de bactérias no instante **t**. Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, após 8 horas o número de bactérias da colônia será:

A) 6α

B) 8α

C) 9α

D) $8\alpha - 4$

E) $\alpha + 8$

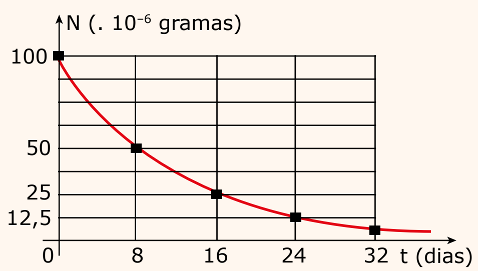
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 0ØGX

(PUC RS) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama.

O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico a seguir representa a massa residual de iodo 131 (N) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

A) $N_0 > 0$ e $k > 0$

B) $N_0 < 0$ e $k > 0$

C) $N_0 > 0$ e $k < 0$

D) $N_0 < 0$ e $k < 0$

02. (UECE–2022) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = b\ .\ a^x$, onde a e b são números reais positivos, $a \neq 1$. Se $f(1) = 8$ e $f(2) = 16$ então, o valor de f(4) é

A) 48.

B) 24.

C) 32.

D) 64.

03. ABQ9

(FCMSC-SP–2023) O decaimento radioativo de uma substância se dá de acordo com a fórmula $r(t) = C\ .\ 3^{-6t}$, com C sendo uma constante diferente de zero e r(t) a quantidade de radioatividade presente na substância após t segundos desde o início do decaimento. O valor de t, em segundos, para que a substância fique com a terça parte da radioatividade que tinha inicialmente é igual a:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{6}$

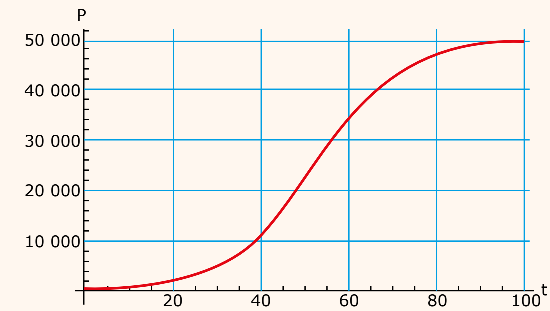
E) $\frac{2}{5}$

04. CEWY

(UEL-PR–2019) Os vírus dependem de uma célula hospedeira susceptível para se multiplicarem. Seja $e > 2$ uma constante real. Suponha que $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ represente a quantidade de partículas virais no interior de uma célula hospedeira no instante $t \geq 0$, de forma que

$$P(t) = \frac{5.10^4}{1 + 200e^{\frac{-1}{10}t}}$$

O gráfico de P no intervalo $0 \leq t \leq 100$ é dado a seguir.



Com base no texto, na equação e no gráfico, atribua (V) verdadeiro ou (F) falso às afirmativas a seguir.

( ) De acordo com a função, o número de partículas virais nunca atinge $5\ .\ 10^4$.

( ) No instante inicial $t = 0$, existem 25 partículas virais dentro da célula.

( ) **P** é uma função decrescente.

( ) O número de partículas virais atinge 10 000 unidades antes do instante $t = 60$.

( ) A função $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sobrejetora.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

A) V, V, F, V, F.

B) V, F, F, V, F.

C) V, F, F, V, V.

D) F, V, V, F, F.

E) F, F, V, F, V.

05. (UECE–2019) Se $f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ é a função real de variável real definida por $f(x) = e^{tgx}$, pode-se afirmar corretamente que a imagem ou conjunto de valores de **f** é o conjunto de todos os números

A) reais.

B) reais maiores do que zero e menores do que um.

C) reais menores do que um.

D) reais positivos.

06. (UPE–2022) Um experimento consiste em estudar um fenômeno que cresce exponencialmente. Para uma melhor análise da curva de crescimento, a equipe responsável utilizou um software para representá-la geometricamente. A equação dessa curva é dada por $f(x) = k \,.\, 4^{x+p}$, onde k e p são constantes positivas. A partir do software, observaram que f(5) = 15, resultado que divergia em muito da realidade. Após uma análise cuidadosa, perceberam que o gráfico estava posicionado incorretamente e, após alguns cálculos, verificaram que, para corrigir esse erro, seria necessário adicionar 3 unidades ao parâmetro p. Depois de fazer isso, todos os resultados tornaram-se compatíveis.

Após o deslocamento que corrigiu a posição da curva, qual o real valor de f(5) obtido pelo software?

A) 3 375
B) 960
C) 750
D) 35
E) 18

07. QX4F (Unemat-MT) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k.2^{-0,5t}$, em que **t** é o tempo (em horas), **k** é uma constante real e Q(t) é a quantidade da substância (em gramas), no tempo **t**.

Considerando que no instante inicial, t = 0, a de substância é de 800 g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial.

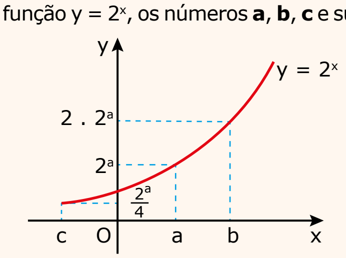
A) 2 h
B) 4 h
C) 6 h
D) 8 h
E) 10 h

08. (ULBRA-RS) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N(t) = C.A^t$, com o tempo **t** dado em dias e **A** e **C** dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

A) 40
B) 30
C) 25
D) 20
E) 10

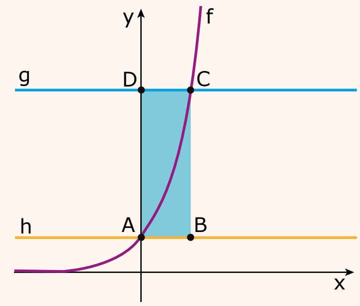
09. JWW7 (UFRN) No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números **a**, **b**, **c** e suas imagens.



Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função de **a**, os valores de **b** e **c** são, respectivamente:

A) $\frac{a}{2}$ e 4a
B) a – 1 e a + 2
C) 2a e $\frac{a}{4}$
D) a + 1 e a – 2

10. 91EN (UERJ) Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, g(x) = 8 e h(x) = k, sendo $x \in \mathbb{R}$ e **k** uma constante real.



No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices **A** e **C** são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente. Determine a área desse retângulo.

11. TXD8 (UEPA) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registradas 60 000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes, 40% das vítimas estavam em motos.

VEJA, 19 ago. 2013 (Adaptação).

A função $N(t) = N_0.(1,2)^t$ fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo **t** o número de anos e N_0 o número de vítimas que estavam em moto em 2012. Nessas condições, o número previsto de vítimas em moto para 2015 será de

A) 41 472.
B) 51 840.
C) 62 208.
D) 82 944.
E) 103 680.

12. (Unifor-CE) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada por $q(t) = q_0.2^{-0,2t}$, q_0 quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após **t** meses.

A quantidade de meses que a água do reservatório se reduzirá a 25% do que era no início é de

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.
E) 12.

13. (ESPM-SP) Um novo aparelho eletrônico foi lançado no mercado em janeiro de 2014, quando foram vendidas cerca de 3 milhões de unidades. A partir de então, esse número teve um crescimento exponencial, dado pela expressão $v = n.k^t$, onde **n** e **k** são constantes reais e **t** é o número de meses após o lançamento (jan = 0, fev = 1, etc.). Se, em fevereiro desse ano foram vendidos 4,5 milhões de aparelhos, podemos concluir que, no mês seguinte, esse número passou para

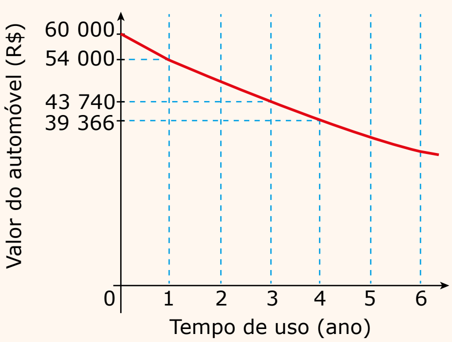
A) 5,63 milhões.
B) 10,13 milhões.
C) 4,96 milhões.
D) 8,67 milhões.
E) 6,75 milhões.

14. I1AA (UFTM-MG) A população **P** de um país no ano **t** pode ser estimada através da função $P(t) = m.n^{t-2011}$, para $n \neq 0$. Sabendo-se que a população atual desse país é de 15,3 milhões de habitantes, e que sua taxa anual de crescimento é de 2%, então, $\frac{m}{n}$ é igual a:

A) $1{,}2 \cdot 10^6$
B) $1{,}5 \cdot 10^6$
C) $1{,}2 \cdot 10^7$
D) $1{,}5 \cdot 10^7$
E) $1{,}2 \cdot 10^8$

SEÇÃO ENEM

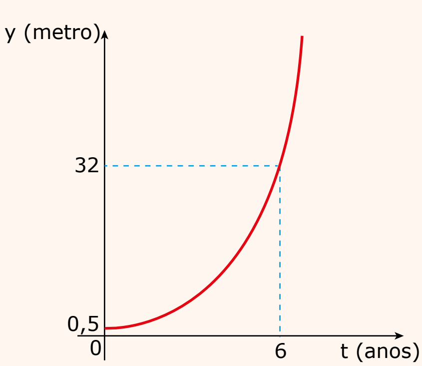
01. (Enem) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b.a^t$, com **t** em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

A) 48 000,00
B) 48 114,00
C) 48 600,00
D) 48 870,00
E) 49 683,00

02. (Enem) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual **y** representa a altura da planta em metro, **t** é considerado em ano, e **a** é uma constante maior do que 1. O gráfico representa a função **y**.



Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

A) 3
B) 4
C) 6
D) $\log_2 7$
E) $\log_2 15$

03. (Enem) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800.(1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

A) 7 416,00.
B) 3 819,24.
C) 3 709,62.
D) 3 708,00.
E) 1 909,62.

04. Sob certas condições, o número **N** de bactérias de uma cultura, em função do tempo **t**, medido em horas, é dado por $N(t) = N_0.2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que, após 6 dias, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por:

A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) 16
D) 1 024
E) 4 096

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E	04. B	07. C
02. B	05. C	08. C
03. E	06. B	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	06. B	11. A
02. D	07. B	12. D
03. D	08. C	13. E
04. B	09. D	14. D
05. D	10. 12 u.a.	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. B	03. E	04. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Inequações Exponenciais

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja **a** um número real tal que $0 < a \neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos:

Se $a^x = a^y$, então $x = y$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $32^x = 128$.

Resolução:

$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$

$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

Portanto, $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$.

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$.

Resolução:

Podemos escrever $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{82}{9}$.

Substituindo 3^x por **y**, temos:

$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$

$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,400$

$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$ ou $y = 9$

Para $y = \frac{1}{9}$, temos $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Para $y = 9$, temos $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Resolução:

$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$

$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3$ ou $y = 4$

Para $y = -3$, temos $2^x = -3$ (absurdo).

Para $y = 4$, temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

Exemplos:

1º) $7^x > 343$

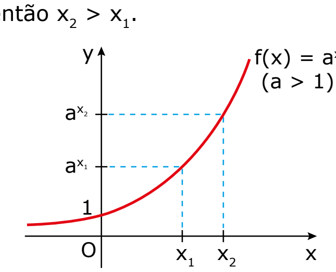
2º) $3^{x-4} \leq 81$

3º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

1º caso: a > 1

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 > x_1$.

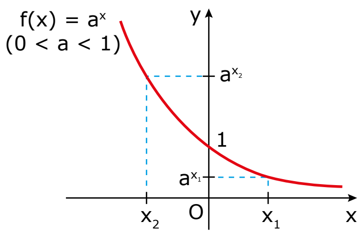


Portanto:

Se $a > 1$, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

2º caso: 0 < a < 1

Como a função $f(x) = a^x$ é decrescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 < x_1$.



Portanto:

Se 0 < a < 1, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04. Resolver a inequação $7^x > 343$.

Resolução:

$7^x > 343 \Rightarrow 7^x > 7^3$

Como 7 > 1, devemos conservar a desigualdade, ou seja, x > 3.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

05. Resolver a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$.

Resolução:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

Como $0 < \frac{1}{5} < 1$, devemos inverter a desigualdade,

ou seja, $3x - 21 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 23 \Rightarrow x \leq \frac{23}{3}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{23}{3}\right\}$.

06. Resolver a inequação $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^x \leq 18$.

Resolução:

Nesse caso, devemos utilizar as propriedades das potências.

$$2^x \cdot 2^2 - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18 \Rightarrow 4 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18$$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$$4y - \frac{y}{2} + y \leq 18 \Rightarrow \frac{10y - y}{2} \leq 18 \Rightarrow 9y \leq 36 \Rightarrow y \leq 4$$

Substituindo **y** por 2^x, obtemos:

$2^x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^2 \Rightarrow x \leq 2$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. RVRX (UNITAU-SP) Sabendo-se que **x** é um número real, o conjunto solução da equação $5^{3x+1} = 625$ é:

A) S = {–1}
B) S = {0}
C) S = {1}
D) S = {2}
E) S = { }

02. (IFMA) A soma das raízes da equação $(2^x)^{x-1} = 4$ é

A) 1 e –2.
B) –1.
C) 2.
D) –1 e 2.
E) 1.

03. (UECE–2020) Se o número real **k** é a solução da equação $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$, então, o número **k** cumpre a seguinte condição:

A) 1,5 < k < 3,5
B) 7,5 < K < 9,5
C) 5,5 < k < 7,5
D) 3,5 < k < 5,5

04. 2FW4 (UERJ–2022) Um teste de material foi realizado com placas de vidro homogêneo. Considere I_0 a intensidade de luz que incide no vidro e **I** a quantidade de luz que o atravessa. Observe a equação que relaciona I_0 e **I**, a partir da constante, e, sendo **x** a espessura do vidro, em milímetros, e **k** a constante do material com que foi fabricado:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx}$$

Considere a tabela a seguir, que apresenta valores aproximados para e^{-w}.

w	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24
e^{-w}	0,819	0,811	0,802	0,794	0,787

Para k = 0,046 e x = 5 mm, a porcentagem da intensidade da luz incidente que atravessa o vidro é:

A) 78,7%
B) 79,4%
C) 80,2%
D) 81,1%

05. UYEX (PUC Rio) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1\,024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é

A) –5.
B) 0.
C) 2.
D) 14.
E) 1 024.

06. (UPE) Os técnicos de um laboratório observaram que uma população de certo tipo de bactérias cresce segundo a função $B(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$ com **t** sendo medido em horas. Qual o tempo necessário para que ocorra uma reprodução de $6{,}4 \cdot 10^{10}$ bactérias?

A) 1 h
B) 3 h
C) 4 h
D) 6 h
E) 16 h

07. C33N (USF-SP) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante **t**, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

A) 5 horas.
B) 6 horas.
C) 7 horas.
D) 9 horas.
E) 12 horas.

08. LWKA (ESPM-SP) Se $(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$, o valor de x^x é

A) 27.
B) 4.
C) $\frac{1}{4}$.
D) 1.
E) $-\frac{1}{27}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. D1Q5 (UFJF-MG) A função $c(t) = 200 \cdot 3^{kt}$, com $k = \frac{1}{12}$, dá o crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja, nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo:

A) [0, 4]
B) [4, 12]
C) [12, 36]
D) [36, 72]
E) [72, 108]

02. (FGV-SP) A raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$ é

A) um número primo.
B) um número negativo.
C) um número irracional.
D) um número maior ou igual a 1.
E) um múltiplo de 5.

03. AN34 (Mackenzie-SP) O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $M^{x^3-1} \leq M^{x^2-1}$, com **M** real e M > 1, é:

A)]−∞; 1]
B) [1; ∞[
C) [0; 1]
D) [−1; ∞[
E) [0; ∞[

04. E3VE (ESPM-SP) A soma das raízes da equação $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$ é igual a

A) 5.
B) 3.
C) 8.
D) 12.
E) 7.

05. (FGV) A raiz da equação $3^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 22\sqrt{3}$ é um número

A) inteiro positivo.
B) inteiro negativo.
C) irracional.
D) racional positivo não inteiro.
E) racional negativo não inteiro.

06. 65XØ (UFSJ-MG) A interseção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a

A) 2 e pertence à reta y = x + 2.
B) 1 e pertence à reta y = x + 1.
C) 2 e pertence à reta y = x − 2.
D) 1 e pertence à reta y = x − 1.

07. FYEN (UFSCar-SP) O par ordenado (x, y), solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$, é:

A) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$
B) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$
C) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$
D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
E) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

08. XDQA (ESPM-SP) O valor de **x** na equação $4^x + 2 \cdot 8^x = 2^x$ é

A) irracional.
B) racional não inteiro positivo.
C) racional não inteiro negativo.
D) racional inteiro positivo.
E) racional inteiro negativo.

09. 4BZM (UECE–2020) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, então, o número de elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 1\}$ é igual a

A) 0.
B) 2.
C) 1.
D) 3.

10. FYKU (FGV) Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9^x - 9^{x-1} = 1\,944$, então, m − n é igual a

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

11. 72KI (Mackenzie-SP) Os valores de **x**, $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem as condições $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq 5^{-4x}$ e $x^2 \leq 5$, são:

A) $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$
B) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
C) $0 \leq x \leq 4$
D) $x \leq 0$ ou $x \geq 4$
E) $-\sqrt{5} \leq x \leq 0$

MATEMÁTICA

12. (IFSul) A equação $2^{x+1} - 24 = -\dfrac{64}{2^x}$ possui como solução:

A) x = 2 e x = 3
B) x = 2 e x = 6
C) x = 3 e x = 6
D) x = 4 e x = 8

13. NC6H (UEMG) Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \,.\, 2^{x-1} + 6 = 2 \,.\, 3^y \end{cases}$$

Na solução desse sistema, tem-se x = a e y = b. Assim, o valor da expressão $\dfrac{(a-3b)(b-a)}{3(b+a)}$ é

A) –1.
B) $-\dfrac{1}{2}$.
C) $\dfrac{1}{5}$.
D) $\dfrac{1}{3}$.

14. HW15 (UEL-PR) Um barco parte de um porto **A** com 2^k passageiros e passa pelos portos **B** e **C**, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{\frac{k}{2}}$ novos passageiros. Se o barco parte do porto **C** com 28 passageiros e se **N** representa o número de passageiros que partiram de A, é correto afirmar que

A) **N** é múltiplo de 7.
B) **N** é múltiplo de 13.
C) **N** é divisor de 50.
D) **N** é divisor de 128.
E) **N** é primo.

15. A1MA (EsPCEx-SP) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \,.\, 27^y = 9 \\ y^3 + \dfrac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é:

A) Ambos no primeiro quadrante.
B) Um no quarto quadrante e o outro no eixo x.
C) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
D) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo y.
E) Um no segundo quadrante e o outro no eixo x.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \,.\, 2^{3t}$$

em que **t** é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

A) reduzida a um terço.
B) reduzida à metade.
C) reduzida a dois terços.
D) duplicada.
E) triplicada.

02. A pressão atmosférica **P**, em mmHg, é dada em função da altura **h** (em relação ao nível do mar) pela expressão $P(h) = 760.e^{\lambda.h}$, sendo **e** o número neperiano, que vale aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma elevação, verificou através de um barômetro (instrumento que mede a pressão atmosférica) que a pressão no ponto em que se encontrava era igual a 600 mmHg. Considerando o parâmetro $\lambda = -0{,}0002$, pode-se afirmar que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar, é igual a

Dados: $e^{6,63} = 760$ e $e^{6,40} = 600$.

A) 1 150 m.
B) 1 370 m.
C) 1 520 m.
D) 2 240 m.
E) 3 000 m.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. D	05. B	07. D
02. E	04. B	06. A	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	05. D	09. C	13. C
02. D	06. A	10. D	14. D
03. A	07. D	11. E	15. E
04. A	08. E	12. A	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A

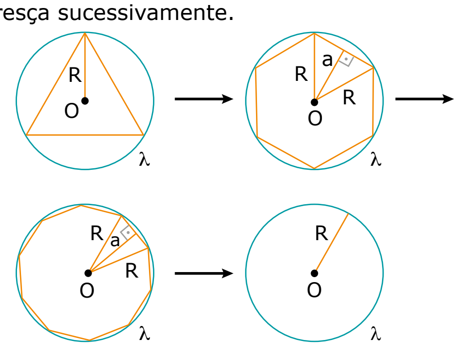
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Áreas de Círculo e suas Partes

ÁREA DE UM CÍRCULO

Considere a circunferência λ de centro **O** e raio **R**.

Inscreva em λ polígonos regulares, de modo que o número de lados cresça sucessivamente.

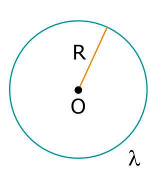


Sabemos que a área de um polígono regular **P** é o produto do seu semiperímetro **p** pelo apótema **a**: $A_p = p.a$

Quanto maior o número de lados do polígono regular inscrito em λ, mais seu perímetro se aproxima do perímetro (comprimento) da circunferência, e seu apótema se aproxima do raio. A área do polígono torna-se, portanto, cada vez mais próxima da área do círculo de raio **R**.

Afirma-se, então, que a área de um círculo é o produto do seu semiperímetro pelo raio.

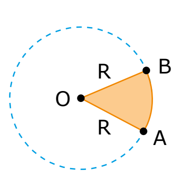
Assim, para o círculo de raio **R**, tem-se:



$$A = \pi R.R \Rightarrow \boxed{A = \pi R^2}$$

SETOR CIRCULAR

Setor circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e dois raios com extremidades nas extremidades do arco.

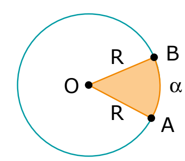


Área de um setor circular

A área de um setor circular de raio **R** é proporcional à medida do arco correspondente.

1º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em graus.

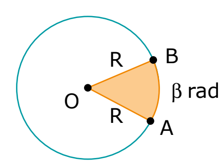


Área	**Arco**
πR^2	360°
A	α

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}}$

2º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em radianos.

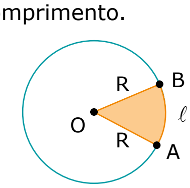


Área	**Arco**
πR^2	2π rad
A	β rad

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\beta R^2}{2}}$

3º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em comprimento.

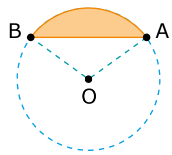


Área	**Arco**
πR^2	$2\pi R$
A	ℓ

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi R}{\ell} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\ell R}{2}}$

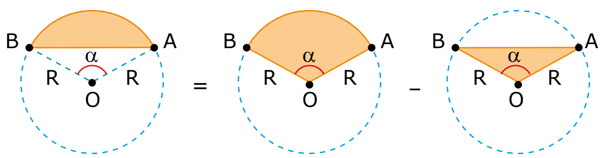
SEGMENTO CIRCULAR

Segmento circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por uma corda com extremidades nas extremidades do arco.



A corda $\overline{AB}$ determina dois segmentos circulares, como mostrado na figura anterior.

Para calcularmos a área de um segmento circular de ângulo central $0 < \alpha \leq \pi$, procedemos como mostrado na figura seguinte:

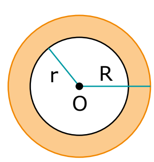


$$A = A_{setor} - A_{triângulo} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2}R^2.\text{sen }\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen }\alpha)}$$

COROA CIRCULAR

Dadas duas circunferências concêntricas de raios **r** e **R**, com r < R, chama-se coroa circular ao conjunto dos pontos pertencentes ao círculo de raio **R** e exteriores ao círculo de raio **r**.

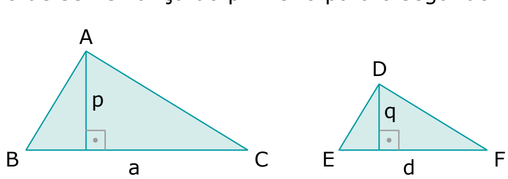


Para calcularmos a área de uma coroa circular, fazemos a diferença entre as áreas dos dois círculos:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, sendo **k** a razão de semelhança do primeiro para o segundo.



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área do primeiro para a área do segundo triângulo, temos:

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d}\cdot\frac{p}{q} = k.k = k^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = k^2}$$

Dessa maneira, deduzimos uma importante propriedade:

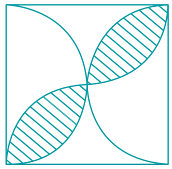
A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Essa propriedade pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes, isto é:

A razão entre áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (AFA-SP) Na figura a seguir, o lado do quadrado é 1 cm. Então, a área da região hachurada, em cm², é



A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

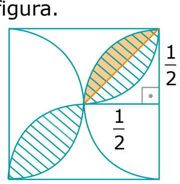
B) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

D) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

Resolução:

A área hachurada corresponde a quatro vezes a área de um segmento circular de ângulo central 90° e raio $\frac{1}{2}$, como indicado na figura.



Assim, $A_{hac.} = 4(A_{setor} - A_{\Delta}) \Rightarrow A_{hac.} = 4.\left(\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2}\right) \Rightarrow$

$A_{hac.} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ cm².

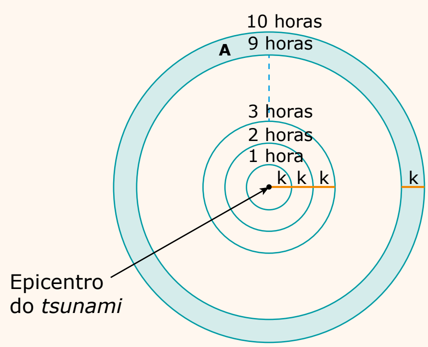
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFPE–2020) O Vaticano é um país reconhecido pela Organização das Nações Unidas (ONU). Situado na zona norte da cidade de Roma, é considerado o menor país do mundo, com 0,45 km² de extensão. Se o Vaticano tivesse a forma de um círculo, qual seria a medida do quadrado de seu raio? (Utilize a aproximação $\pi = 3$).

A) 0,13 km
B) 0,14 km
C) 0,15 km
D) 0,16 km
E) 0,17 km

02. X4HG (UEL-PR) Considere que um *tsunami* se propaga como uma onda circular.



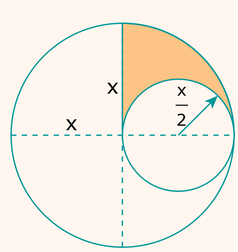
Se a distância radial percorrida pelo *tsunami*, a cada intervalo de 1 hora, é de **k** quilômetros, então a área **A**, em quilômetros quadrados, varrida pela onda entre 9 horas e 10 horas, é dada por:

A) $A = \pi k^2$
B) $A = 9\pi k^2$
C) $A = 12\pi k^2$
D) $A = 15\pi k^2$
E) $A = 19\pi k^2$

03. (UECE–2022) A praça Coronel Miro, na cidade de Rio Sá, é limitada por quatro ruas, formando um quadrado cuja medida do lado é 99 m. No centro da praça, foi construído um jardim cuja área é limitada por uma circunferência. Se a razão entre as medidas da área da praça e da área ocupada pelo jardim é 9, então, a medida, em metros, do raio desta circunferência é:

A) $\dfrac{\sqrt{99}}{\pi}$
B) $\dfrac{3\sqrt{99}}{\pi}$
C) $\dfrac{33}{\pi}$
D) $\dfrac{33}{\sqrt{\pi}}$

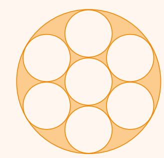
04. L7GK (Mackenzie-SP)



O valor da área sombreada na figura anterior é:

A) $\dfrac{\pi x^2}{4}$
B) $\dfrac{\pi x^2}{2}$
C) $\dfrac{\pi x^2}{8}$
D) $\dfrac{\pi x^2}{12}$
E) $\dfrac{\pi x^2}{6}$

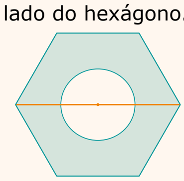
05. 2P4U (FGV) Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm², é igual a:

A) π
B) $\dfrac{3\pi}{2}$
C) 2π
D) $\dfrac{5\pi}{2}$
E) 3π

06. SL4W (UPE) A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.

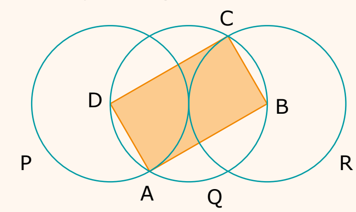


Considere: $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$

Nessas condições, quanto mede a área da superfície colorida?

A) 2,0 cm²
B) 3,0 cm²
C) 7,2 cm²
D) 8,0 cm²
E) 10,2 cm²

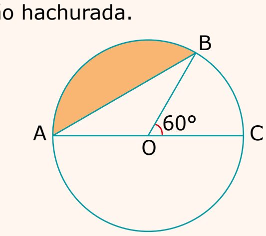
07. 3HI9 (UFRGS-RS) Na figura a seguir, três discos **P**, **Q** e **R**, de mesmo raio, são construídos de maneira que **P** e **R** são tangentes entre si e o centro de **Q** é ponto de tangência entre **P** e **R**. O quadrilátero sombreado ABCD têm vértices nos centros dos discos **P** e **R** e em dois pontos de interseção de **Q** com **P** e **R**.



Se o raio do disco **P** é 5, a área do quadrilátero ABCD é:

A) $5\sqrt{3}$
B) 25
C) 50
D) $25\sqrt{3}$
E) 75

08. GZA1 (UEG-GO) A figura a seguir representa uma circunferência de raio r = 2 cm, em que $\overline{AC}$ é o diâmetro e $\overline{AB}$ é uma corda. Sabendo-se que o ângulo $B\hat{O}C$ = 60°, calcule a área da região hachurada.

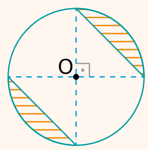


MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 9LFD (UFT-TO) Considerando a circunferência da figura a seguir com centro no ponto **O** e diâmetro igual a 4 cm.



Pode-se afirmar que o valor da área da região hachurada é:

A) $\left(\sqrt{8}\pi - 4\right)\text{cm}^2$

B) 2π cm²

C) $(2\pi - 4)$ cm²

D) $(\pi - 1)$ cm²

E) $(4\pi - 2)$ cm²

02. (IFPE–2020) Uma praça tem o formato de um triângulo retângulo de catetos 30 m e 40 m. Deseja-se construir um lago circular no interior dessa praça (o lago pode tocar os limites da praça). Qual é a área do maior lago, em forma de círculo, que se pode construir totalmente no interior da praça?

A) 81π m²

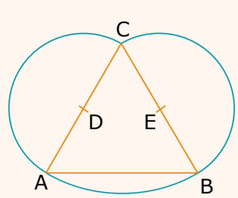
B) 169π m²

C) 100π m²

D) 144π m²

E) 121π m²

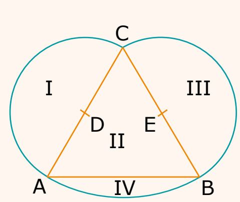
03. (PUC Rio) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 16. Com centro em **C**, temos um arco de círculo entre **A** e **B**, como na figura. Sejam **D** e **E** os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Com centros em **D** e **E**, temos semicírculos de **A** a **C** e de **B** a **C**, como na figura.



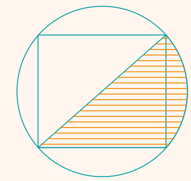
A) Determine os raios dos círculos na figura, de centros **C**, **D** e **E**, respectivamente.

B) Calcule o comprimento dos arcos AC, CB e BA.

C) Calcule as áreas das quatro regiões indicadas na figura a seguir.



04. PYK6 (ACAFE-SC) Na figura a seguir, o quadrado está inscrito na circunferência. Sabendo que a medida do lado do quadrado é 8 cm, então, a área da parte hachurada, em cm², é igual a:



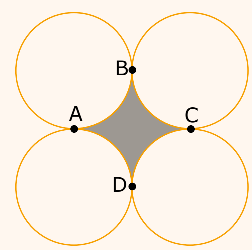
A) $4(\pi + 2)$

B) $8(\pi + 4)$

C) $8(\pi + 2)$

D) $4(\pi + 4)$

05. (UFPR–2023) Na figura a seguir, estão representadas quatro circunferências de raio r = 1 cm que são tangentes nos pontos A, B, C e D. Assinale a alternativa que corresponde ao valor, em cm², da área hachurada em cinza.



A) $\pi - 1$.

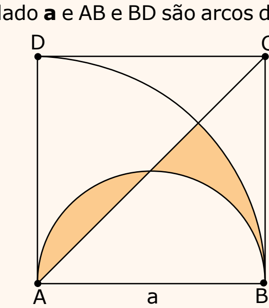
B) $\pi - 2$.

C) $2 - \frac{\pi}{2}$.

D) $4 - \pi$.

E) $4 - \frac{\pi}{2}$.

06. (UFRGS-RS–2022) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado **a** e AB e BD são arcos de circunferência.



A área da região sombreada é:

A) $\frac{a^2}{16}(\pi - 1)$

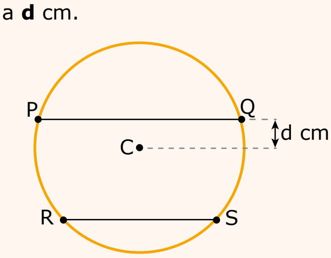
B) $\frac{a^2}{16}(\pi - 2)$

C) $\frac{a^2}{8}(\pi - 1)$

D) $\frac{a^2}{4}(\pi - 2)$

E) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$

07. (UNIFESP–2022) A figura representa um círculo de centro **C** com duas cordas paralelas, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, cujas medidas são PQ = 8 cm e RS = 6 cm. A distância entre **C** e a corda $\overline{PQ}$ é igual a **d** cm.

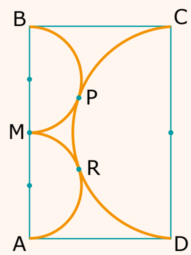


A) Calcule a área do círculo para o caso em que d = 3 cm.

B) Calcule a medida do raio da circunferência para o caso em que a distância entre $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ seja de 4 cm.

08. 35CO

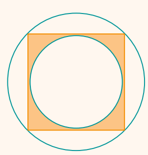
(Albert Einstein) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo tal que BC = 6 cm e **M** é ponto médio do lado AB. Se os semicírculos no interior do retângulo são dois a dois tangentes entre si, nos pontos **M**, **P** e **R**, então a área de ABCD, em centímetros quadrados, é:



A) $36\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$ D) $18\sqrt{2}$

09. QJAA

(UEFS-BA)



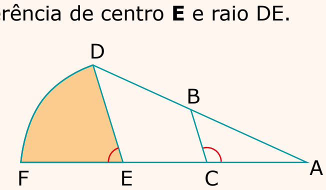
Na figura, tem-se uma circunferência inscrita em um quadrado, que, por sua vez, está inscrito em outra circunferência.

Considerando-se π = 3,14, a área escura compreendida entre o quadrado e a circunferência menor representa, em relação à área interna à circunferência maior, um percentual de, aproximadamente,

A) 11,8%.
B) 13,7%.
C) 16,4%.
D) 18,3%.
E) 21,5%.

10. 5J2T

(EPCAR-MG) Na figura a seguir, tem-se que $\overset{\frown}{DF}$ é um arco de circunferência de centro **E** e raio DE.



Sabe-se que:

- ADE é um triângulo
- DE é paralelo a BC
- $\overline{BD} = 7$ cm
- $\overline{AC} = 10$ cm
- $\overline{BC} = 6$ cm
- $A\hat{C}B = 120°$
- $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

A área do setor circular hachurado na figura, em cm², é igual a:

A) 27π B) $\dfrac{27\pi}{2}$ C) $\dfrac{9\pi}{2}$ D) 3π

11. L54T

(UFV-MG) A região hachurada da figura 1 a seguir é denominada Triângulo de Reuleaux, em homenagem a Franz Reuleaux (1829-1905). Nesse triângulo, os vértices **A**, **B** e **C** são centros de circunferências de raio **r**, as quais contêm, respectivamente, os arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$, conforme ilustrado. A janela da Catedral de Notre Dame (Figura 2) em Bruxelas, na Bélgica, tem seu *design* inspirado no Triângulo de Reuleaux.

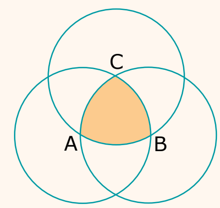


Figura 1

Figura 2

Para a construção dessa janela, é necessário conhecer a área do Triângulo de Reuleaux, em função do raio **r**, que é dada por:

A) $\dfrac{\pi + \sqrt{3}}{2}r^2$

B) $\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2$

C) $\dfrac{\pi - \sqrt{5}}{2}r^2$

D) $\dfrac{\pi + \sqrt{5}}{2}r^2$

SEÇÃO ENEM

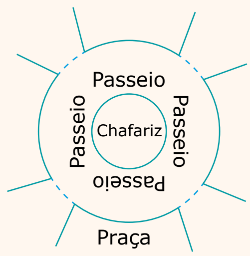
01. (Enem–2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro d = 40 cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é h = 60 cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

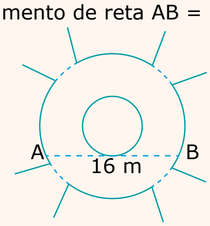
Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

A) 16 628
B) 22 280
C) 28 560
D) 41 120
E) 66 240

02. (Enem) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos **A** e **B**, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB = 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

A) 4π.
B) 8π.
C) 48π.
D) 64π.
E) 192π.

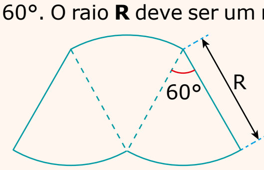
03. (Enem) Em uma plataforma de exploração de petróleo, localizada no mar, ocorreu um vazamento. A equipe técnica de operação dessa plataforma percebeu que a mancha de óleo espalhado na superfície do mar tinha formato circular e estimou, visualmente, que a área atingida era de aproximadamente 100 km².

Utilize 3 como aproximação para π.

O valor inteiro mais próximo do raio da mancha de óleo formada, em km, é

A) 4.
B) 6.
C) 10.
D) 17.
E) 33.

04. (Enem) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que á formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio **R** deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

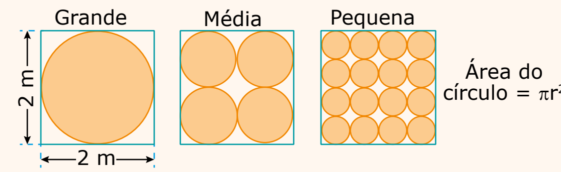
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para **R**, em metros, deverá ser

A) 16.
B) 28.
C) 29.
D) 31.
E) 49.

05. (Enem) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
B) a entidade I recebe metade do material da entidade III.
C) a entidade II recebe o dobro de material da entidade III.
D) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. E
- 03. D
- 04. C
- 05. C
- 06. C
- 07. D
- 08. $A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ cm²

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. C
- 03.
  - A) C = 16, D = E = 8
  - B) $\overset{\frown}{AC} = 8\pi$, $\overset{\frown}{CB} = 8\pi$ e $\overset{\frown}{BA} = \frac{16\pi}{3}$
  - C) $I = 32\pi$, $II = 64\sqrt{3}$, $III = 32\pi$ e $IV = \frac{128\pi}{3} - 64\sqrt{3}$
- 04. C
- 05. D
- 06. E
- 07.
  - A) 25π cm²
  - B) $\frac{\sqrt{1\,105}}{8}$ cm
- 08. B
- 09. B
- 10. B
- 11. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

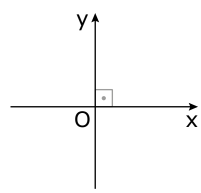
- 01. B
- 02. D
- 03. B
- 04. B
- 05. E

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

Sistema Cartesiano e Ponto

SISTEMA CARTESIANO – COORDENADAS DE UM PONTO

Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si e com origem comum **O**, conforme a figura a seguir:



Nessas condições, diz-se que x e y formam um sistema cartesiano retangular (ou ortogonal), e o plano por eles determinado é chamado plano cartesiano.

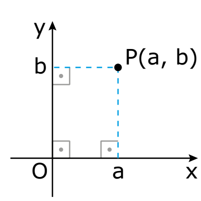
Eixo x (ou Ox): eixo das abscissas

Eixo y (ou Oy): eixo das ordenadas

O: origem do sistema

A cada ponto **P** do plano, corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de **P** sobre o eixo x e sobre o eixo y, respectivamente.

Assim, o ponto **P** tem coordenadas **a** e **b**, e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).

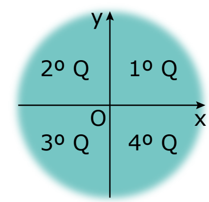


Nota:

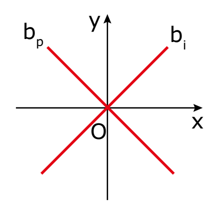
Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que será chamado, simplesmente, sistema cartesiano.

OBSERVAÇÕES

i) Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes **Q**, que são numerados, como na figura a seguir:



ii) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes ímpares e indicada por b_i. A do 2º e 4º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes pares e indicada por b_p.

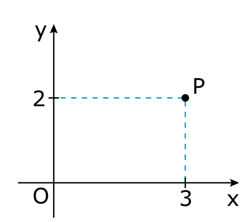


Propriedades

i) Todo ponto P(a, b) do 1º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada positiva (b > 0) e, reciprocamente, todo ponto P (a,b) com a > 0 e b > 0 pertence ao 1º quadrante.

$$\boxed{P(a, b) \in 1^{\circ}\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0}$$

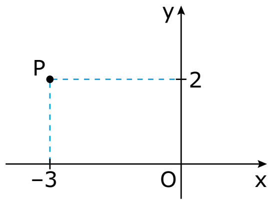
Assim: $P(3, 2) \in 1^{\circ}$ Q



ii) Todo ponto P(a, b) do 2º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 2^{\circ}\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0}$$

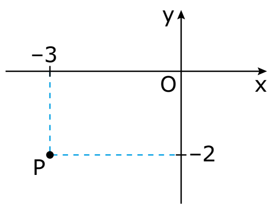
Assim: P(−3, 2) ∈ 2º Q



iii) Todo ponto P(a, b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 3^{\circ}\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0}$$

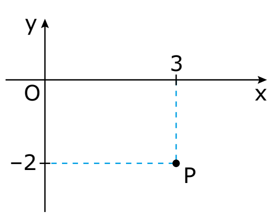
Assim: P(−3, −2) ∈ 3º Q



iv) Todo ponto P(a, b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 4^{\circ}\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0}$$

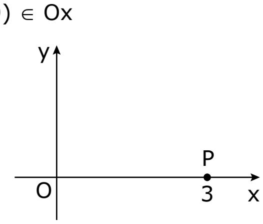
Assim: P(3, −2) ∈ 4º Q



v) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in Ox \Leftrightarrow b = 0}$$

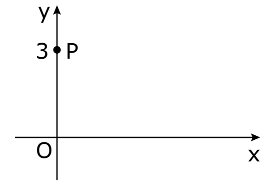
Assim: P(3, 0) ∈ Ox



vi) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0}$$

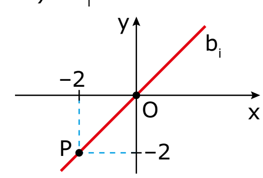
Assim: P(0, 3) ∈ Oy



vii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in b_i \Leftrightarrow a = b}$$

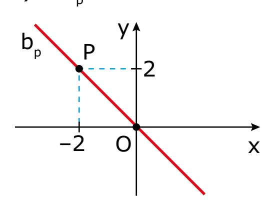
Assim: P(−2, −2) ∈ b_i



viii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = −b) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in b_p \Leftrightarrow a = -b}$$

Assim: P(−2, 2) ∈ b_p



SIMETRIAS NO SISTEMA CARTESIANO

Consideramos dois tipos de simetria no sistema cartesiano:

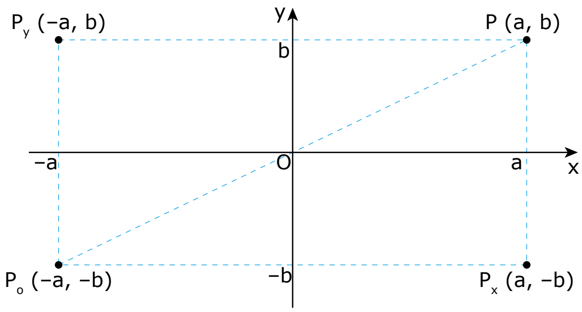
- Simetria central: transformação de reflexão de um objeto (ponto ou figura) em relação a um ponto.
- Simetria axial: transformação de reflexão de um objeto (ponto ou figura) em relação a uma reta.

Em relação a um ponto P(a, b), seus principais pontos simétricos são:

P_o: simétrico em relação à origem

P_x: simétrico em relação ao eixo x

P_y: simétrico em relação ao eixo y



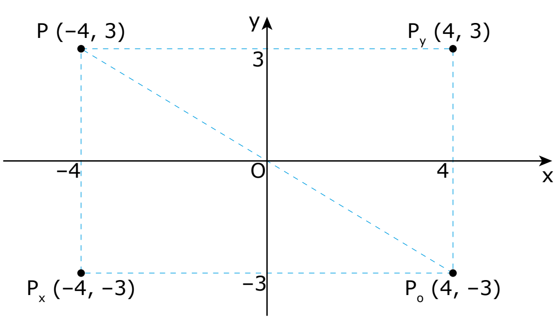
OBSERVAÇÕES

i) Note que, na representação gráfica, tomamos $P \in 1^o$ quadrante.

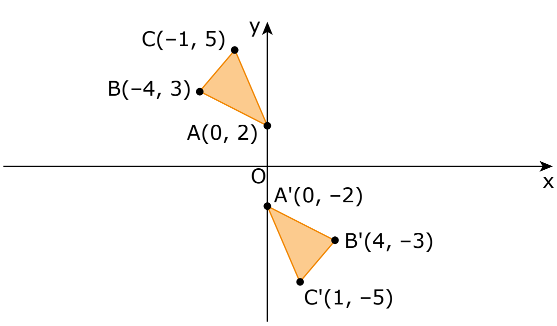
ii) Note que o simétrico de **P** em relação à origem é tal que: O(0, 0) é o ponto médio do segmento $\overline{PP_o}$.

Exemplos:

1º) Os principais pontos simétricos de P(–4, 3) são:



2º) O triângulo simétrico ao triângulo ABC em relação à origem é:



PONTO MÉDIO

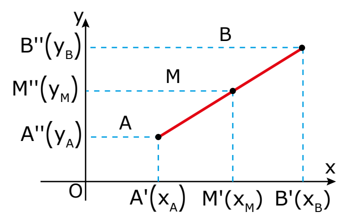
Considerem-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ou seja, o ponto **M** é dado por:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Demonstração:



Se **M** é ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), pelo Teorema de Tales, para o eixo x, pode-se escrever:

$$A'M' = M'B' \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow$$

$$2.x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, para o eixo y, tem-se: $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, as coordenadas do ponto médio **M** do segmento $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$) são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de **A** e **B** e das ordenadas de **A** e **B**.

BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

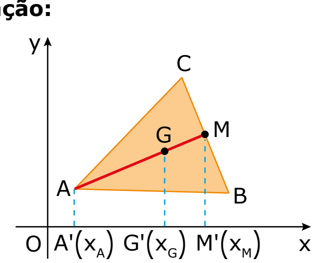
Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. O baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ou seja, o ponto **G** é dado por:

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Demonstração:



Considerando a mediana $\overline{AM}$, o baricentro **G** é tal que:

$$AG = 2.GM$$

Pelo Teorema de Tales, para o eixo x, podemos escrever:

$$\boxed{A'G' = 2.G'M'}$$

$$x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \Rightarrow 3.x_G = x_A + 2.x_M$$

E, como $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, tem-se:

$$3.x_G = x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

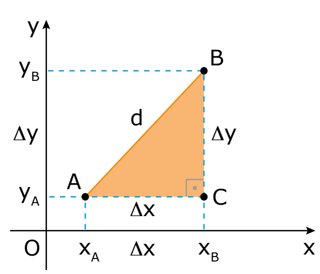
Analogamente, para o eixo y, tem-se:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a algum dos eixos coordenados.

Traçando-se por **A** e **B** as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em **C**, tem-se o triângulo ACB, retângulo em **C**.



A distância entre os pontos **A** e **B** que se indica por **d** é tal que:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

OBSERVAÇÕES

i) Como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.

ii) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos, ou, ainda, se os pontos **A** e **B** coincidem, caso em que d = 0.

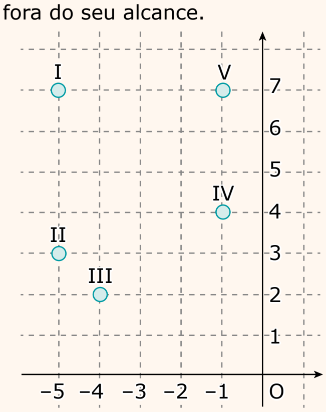
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR) Considere os pontos A(2, 8) e B(8, 0). A distância entre eles é de:

A) $\sqrt{14}$
C) $3\sqrt{7}$
B) $3\sqrt{2}$
D) 10

02. YS1T
(UPE–2022) Um provedor de Internet instalará um novo transmissor com um alcance máximo de 3 quilômetros. A fim de estudar com mais exatidão esse alcance, o técnico representou o bairro de interesse num plano cartesiano, onde cada unidade equivale a 1 km. O transmissor foi instalado no ponto (–3, 5). As residências I, II, III, IV e V, cujas posições estão indicadas na figura a seguir, assinaram um plano para receber o sinal de internet desse transmissor, mas uma delas ficou fora do seu alcance.



Qual residência ficou fora do alcance do transmissor?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

03. GS2L
(EEAR) Seja ABC um triângulo tal que A(1, 1), B(3, –1) e C(5, 3). O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.

A) (2, 1)
C) (1, 3)
B) (3, 3)
D) (3, 1)

04. PLJ8
(UNIFESP) Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas (x + 3y, –x – y) e também por (4 + y, 2x + y), em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nestas condições, x^y é igual a

A) –8.
D) 8.
B) –6.
E) 9.
C) 1.

05. ZV89
(CEFET-MG) Os pontos A(–5, 2) e C(3, –4) são extremidades de uma diagonal de um quadrado. O perímetro desse quadrado é:

A) $18\sqrt{2}$
C) $24\sqrt{2}$
B) $20\sqrt{2}$
D) $28\sqrt{2}$

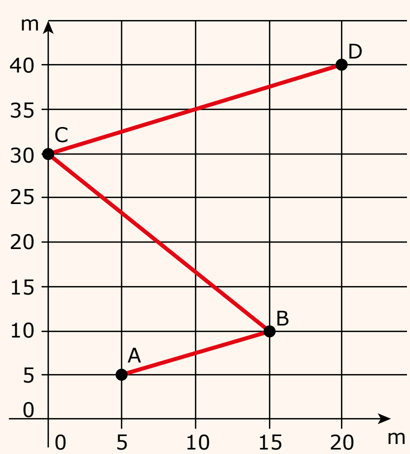
06. 1Y95 (FGV) No plano cartesiano, o triângulo de vértices A(1, –2), B(m, 4) e C(0, 6) é retângulo em **A**. O valor de **m** é igual a

A) 47.
B) 48.
C) 49.
D) 50.
E) 51.

07. 5BRT (PUC Rio) Se os pontos A(–1, 0), B(1, 0) e C(x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre **A** e **C** é:

A) 1
B) 2
C) 4
D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{3}$

08. LAIT (IFSC-SC) O plano cartesiano representado a seguir mostra o deslocamento de uma pessoa por 4 pontos diferentes, no interior do pavilhão da Oktoberfest. Considere que essa pessoa partiu do ponto **A** e formou, com seu trajeto, segmentos de reta entre os pontos consecutivos **A**, **B**, **C** e **D**, nessa ordem. Em uma escala em metros, é correto afirmar que ela se deslocou



A) $5(3\sqrt{5} + 5)$ m.
B) $(3\sqrt{5} + 5)$ m.
C) 53 m.
D) $2(3\sqrt{2} + 7)$ m.
E) $4(3\sqrt{5} + 5)$ m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPF-RS–2022) No plano de coordenadas cartesianas, a parábola dada pela equação $y = (x - 7)^2$ intersecta a reta com equação $y = 16$ em dois pontos, A e B. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é:

A) 9
B) 10
C) 16
D) 11
E) 8

02. C47A (Cesgranrio) Os pontos **M**, **N**, **P** e **Q** do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Se M(3, 5), N(1, 2) e P(5, 1), então o vértice **Q** é:

A) (7, 4)
B) (6, 5)
C) (9, 8)
D) (8, 6)
E) (6, 3)

03. ZS27 (FGV) No plano cartesiano, M(3, 3), N(7, 3) e P(4, 0) são os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC, e AC de um triângulo ABC. A abscissa do vértice **C** é

A) 6.
B) 7.
C) 8.
D) 9.
E) 0.

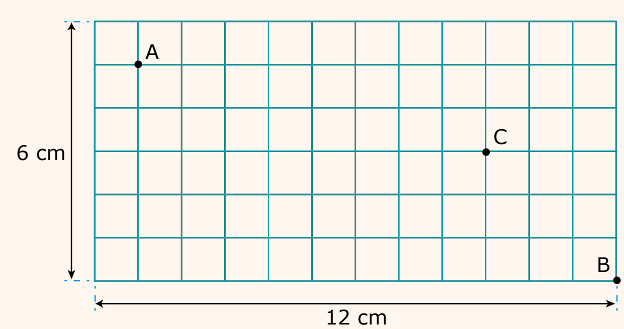
04. 48D5 (PUC Minas) Os catetos AC e AB de um triângulo retângulo estão sobre os eixos de um sistema cartesiano. Se M = (–1, 3) for o ponto médio da hipotenusa BC, é correto afirmar que a soma das coordenadas dos vértices desse triângulo é igual a

A) –4.
B) –1.
C) 1.
D) 4.

05. (PUC Minas) Quando representamos no sistema de coordenadas xOy, o ponto **B** é o simétrico do ponto A(–3, 2) em relação à origem **O**; por sua vez, o ponto **C** é o simétrico de **B** em relação ao eixo x. Com base nessas informações, é correto afirmar que a medida de área do triângulo ABC é igual a

A) 8.
B) 9.
C) 10.
D) 12.

06. 7GUX (Mackenzie-SP) Na representação em escala, os quadrados são iguais e cada centímetro representa 100 km. Um avião sai da cidade **A**, faz escala na cidade **C**, chegando à cidade **B**, conforme a figura.



Entre as alternativas dadas, identifique aquela em que consta o valor mais próximo da distância percorrida pelo avião, de **A** até **B**, passando por **C**.

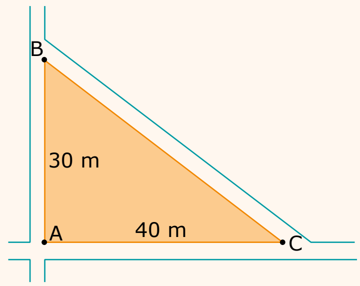
A) 1 000 km.
B) 950 km.
C) 1 150 km.
D) 1 400 km.
E) 1 250 km.

07. (EEAR–2019) Sejam A(−3, 3), B(3, 1), C(5, −3) e D(−1, −2) vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é

A) 15.
B) 13.
C) 12.
D) 10.

08. 5UZ4

(ESPM-SP) A figura a seguir representa uma praça de forma triangular, em que o ângulo $\hat{A}$ é reto.



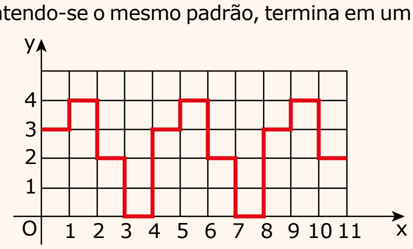
Duas pessoas percorrem o contorno da praça a partir do ponto **A**, mas em sentidos contrários, até se encontrarem num ponto **P** do lado BC. Sabendo-se que elas percorreram distâncias iguais, podemos concluir que a distância do ponto **P** ao ponto **A** em linha reta é de, aproximadamente,

Adote $\sqrt{5} \cong 2{,}25$.

A) 22 m.
B) 25 m.
C) 27 m.
D) 30 m.
E) 32 m.

09. WCJØ

(Fatec-SP) No plano cartesiano da figura, considere que as escalas nos dois eixos coordenados são iguais e que a unidade de medida linear é 1 cm. Nele, está representada parte de uma linha poligonal que começa no ponto P(0, 3) e, mantendo-se o mesmo padrão, termina em um ponto **Q**.



Na figura, a linha poligonal é formada por segmentos de reta

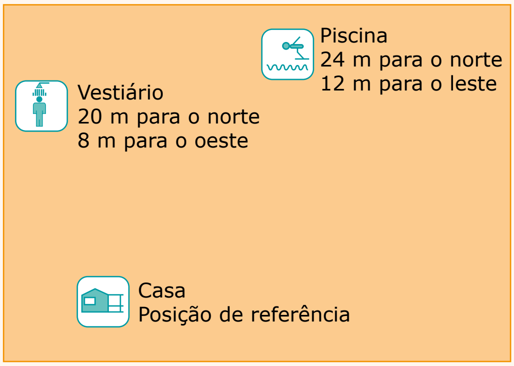
- que são paralelos aos eixos coordenados e
- cujas extremidades têm coordenadas inteiras não negativas.

Sabendo que o comprimento da linha poligonal, do ponto **P** até o ponto **Q**, é igual a 94 cm, as coordenadas do ponto **Q** são:

A) (25, 2)
B) (28, 1)
C) (32, 1)
D) (33, 1)
E) (34, 2)

10. 56ØN

(Insper-SP) O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema a seguir, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.

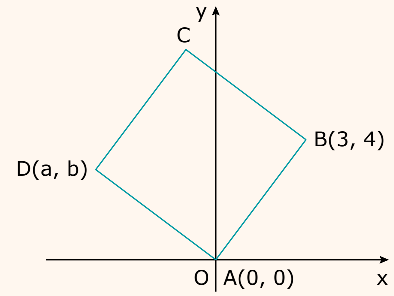


O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço numa localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

A) 4,2 m para o leste e 13,8 m para o norte.
B) 3,8 m para o oeste e 13,1 m para o norte.
C) 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.
D) 3,4 m para o oeste e 12,5 m para o norte.
E) 3,4 m para o leste e 12,5 m para o norte.

11. R1QV

(UFMG) Nesta figura, está representado um quadrado de vértices ABCD.

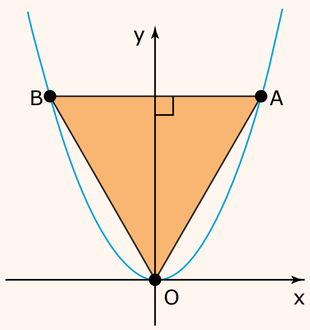


Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos **A** e **B** são A(0, 0) e B(3, 4). Então, é correto afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice **D** é

A) −2.
B) −1.
C) $-\frac{1}{2}$.
D) $-\frac{3}{2}$.

12. QW7O

(ESPM-RJ–2019) No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função $y = x^2$ e o triângulo equilátero OAB.

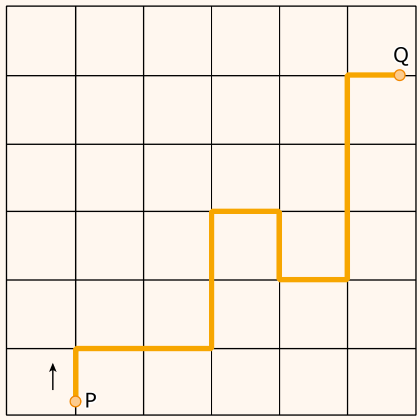


A área desse triângulo mede:

A) $2\sqrt{3}$
B) 3
C) $\sqrt{3}$
D) 2
E) $3\sqrt{3}$

SEÇÃO ENEM

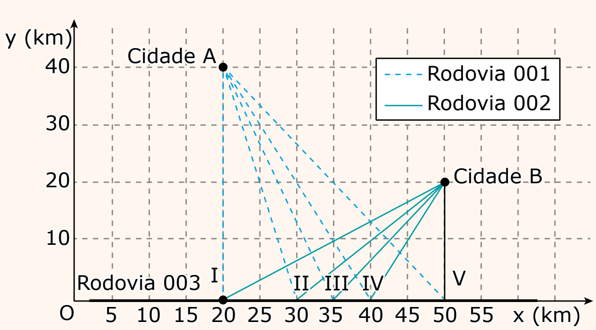
01. (Enem–2022) Uma pessoa precisa se deslocar de automóvel do ponto P para o ponto Q, indicados na figura, na qual as linhas verticais e horizontais simbolizam ruas.



Por causa do sentido de tráfego nessas ruas, o caminho poligonal destacado é a possibilidade mais curta de efetuar esse deslocamento. Para descrevê-lo, deve-se especificar qual o sentido a ser tomado em cada cruzamento de ruas, em relação à direção de deslocamento do automóvel, que se movimentará continuamente. Para isso, empregam-se as letras E, F e D para indicar "vire à esquerda", "siga em frente" e "vire à direita", respectivamente. A sequência de letras que descreve o caminho poligonal destacado é

A) DDEFDDEEFFD.
B) DFEFDDDEFFD.
C) DFEFDDEEFFD.
D) EFDFEEDDFFE.
E) EFDFEEEDFFE.

02. (Enem–2022) O governo de um estado pretende realizar uma obra de infraestrutura para auxiliar na integração e no processo de escoamento da produção agrícola de duas cidades. O projeto consiste na interligação direta das cidades, A e B com a Rodovia 003, pela construção das Rodovias 001 e 002. As duas rodovias serão construídas em linha reta e deverão se conectar a Rodovia 003 em um mesmo ponto, conforme esboço apresentado na figura, na qual estão também indicadas as posições das cidades A e B, considerando o eixo x posicionado sobre a Rodovia 003 e cinco localizações sugeridas para o ponto de conexão entre as três rodovias.

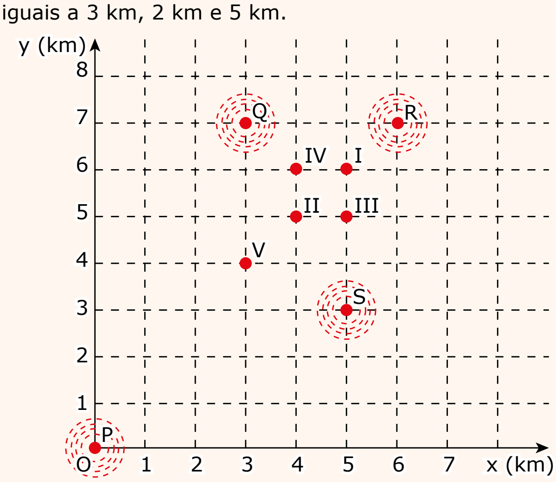


Pretende-se que a distância percorrida entre as duas cidades, pelas Rodovias 001 e 002, passando pelo ponto de conexão, seja a menor possível. Dadas as exigências do projeto, qual das localizações sugeridas deve ser a escolhida para o ponto de conexão?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

03. (Enem–2019) Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.



Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

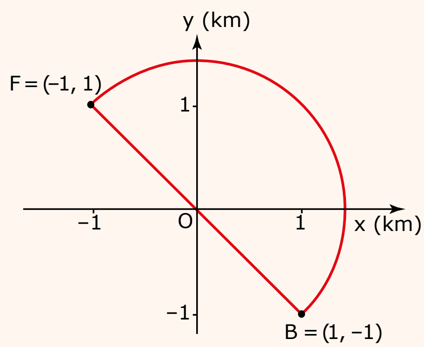
04. (Enem) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja **A** está localizada no ponto A(1, 2). No ponto médio entre a loja **A** e a loja **B** está o sanitário **S**, localizado no ponto S(5, 10).

Determine as coordenadas do ponto de localização da loja **B**.

A) (–3, –6)
B) (–6, –3)
C) (3, 6)
D) (9, 18)
E) (18, 9)

05. (Enem) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (**F**) até o reservatório de um novo bairro (**B**).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



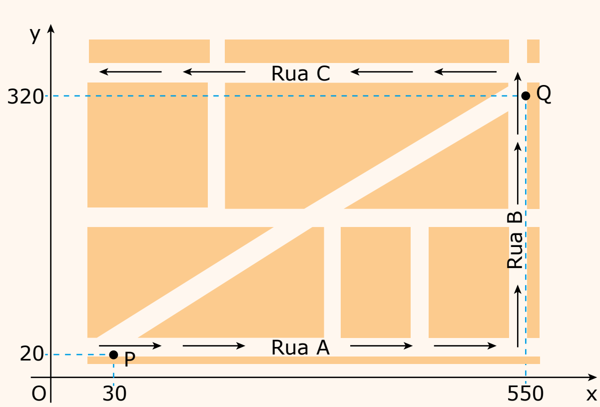
Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

A) 1 260.
B) 2 520.
C) 2 800.
D) 3 600.
E) 4 000.

06. (Enem) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por **P** e **Q**.



Os estudos indicam que o novo ponto **T** deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes **P** e **Q**, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos **P** e **T** e entre os pontos **T** e **Q** sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

A) (290, 20)
B) (410, 0)
C) (410, 20)
D) (440, 0)
E) (440, 20)

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	05. B
02. C	06. C
03. D	07. B
04. A	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E	07. D
02. A	08. C
03. C	09. C
04. D	10. C
05. D	11. B
06. E	12. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. D
02. D	05. B
03. A	06. E

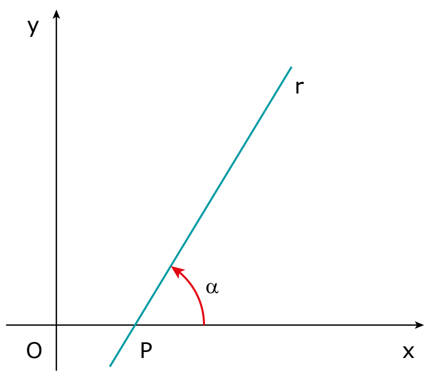
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Estudo Analítico da Reta

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Considere, no plano cartesiano, uma reta **r** concorrente com o eixo x no ponto **P**.

Chama-se inclinação de **r** a medida do ângulo α que **r** forma com o eixo Ox, sendo esse ângulo medido a partir do eixo x no sentido anti-horário.



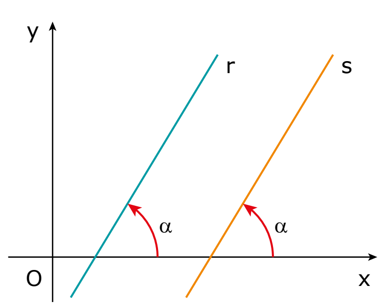
COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

Considerando-se uma reta **r** não perpendicular ao eixo x (não vertical), ou seja, tal que $\alpha \neq 90°$, chama-se coeficiente angular (ou declividade) da reta **r** o número **m**, tal que $m = \text{tg } \alpha$.

OBSERVAÇÕES

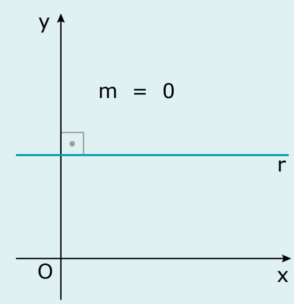
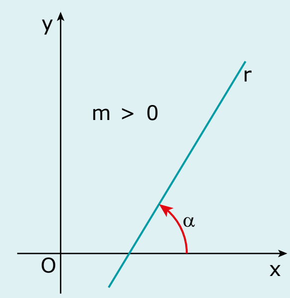
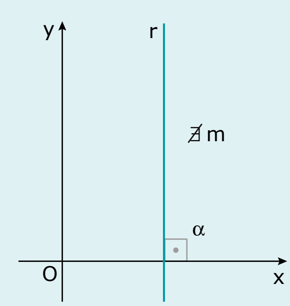
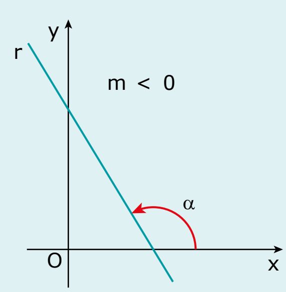
i) A inclinação **m** de uma reta é tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

ii) No plano cartesiano, duas retas paralelas têm a mesma inclinação.



iii) Se $\alpha = 90°$, então a reta não tem coeficiente angular.

Assim, tem-se:

$\alpha = 0°$ (nulo)	$0° < \alpha < 90°$ (agudo)
	
$\alpha = 90°$ (reto)	**$90° < \alpha < 180°$ (obtuso)**
	

Isto é:

i) Se $\alpha = 0°$, então $m = 0$.

ii) Se $\alpha = 90°$, então não existe **m**.

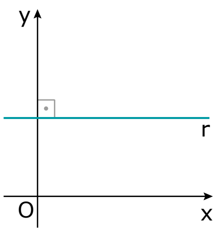
iii) Se $0 < \alpha < 90°$, então $m > 0$.

iv) Se $90° < \alpha < 180°$, então $m < 0$.

Exemplo:

Dar os coeficientes angulares das retas **r**, **s**, **t** e **u**.

A)

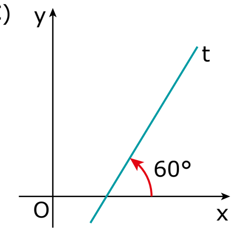


$\alpha_r = 0° \Rightarrow$

$m_r = \text{tg } 0° \Rightarrow$

$m_r = 0$

C)

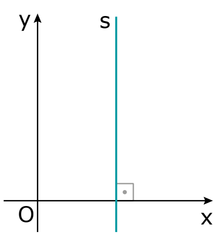


$\alpha_t = 60° \Rightarrow$

$m_t = \text{tg } 60° \Rightarrow$

$m_t = \sqrt{3}$

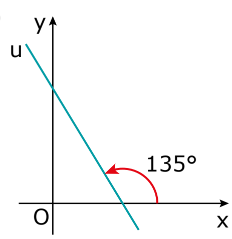
B)



$\alpha_s = 90° \Rightarrow$

Não existe m_s.

D)



$\alpha_u = 135° \Rightarrow$

$m_u = \text{tg } 135° \Rightarrow$

$m_u = -1$

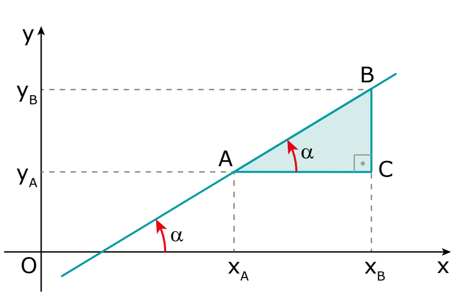
COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA QUE PASSA POR DOIS PONTOS DADOS

Considerem-se dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, isto é, a reta AB não é paralela aos eixos coordenados. Há dois casos a se considerar:

1º caso: $\alpha < 90°$

Do triângulo ABC, tem-se:

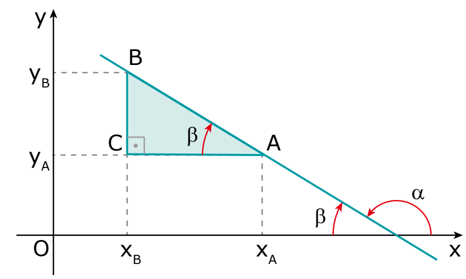
$$m = \text{tg } \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



2º caso: $\alpha > 90°$

Do triângulo ABC, tem-se:

$$\text{tg } \beta = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$



Como $\alpha + \beta = 180°$, tem-se $\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$.

Logo: $m = \text{tg } \alpha = -\dfrac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Portanto, para os dois casos, tem-se:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

OBSERVAÇÕES

i) Se a reta AB é paralela ao eixo x $(y_A = y_B \text{ e } x_A \neq x_B)$, tem-se m = 0, e a fórmula continua válida.

ii) Se a reta AB é perpendicular ao eixo x $(x_A = x_B \text{ e } y_A \neq y_B)$, não existe **m**, pois $x_B - x_A = 0$.

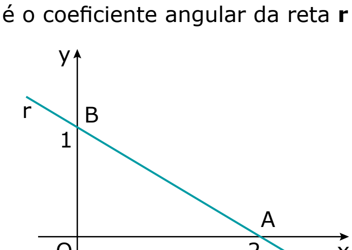
Exemplos:

1º) Qual é o coeficiente angular das retas que passam nos seguintes pontos?

A) $\left.\begin{matrix} A(2, 1) \\ B(4, 9) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{9 - 1}{4 - 2} \Rightarrow m_{AB} = 4$

B) $\left.\begin{matrix} A(-1, 2) \\ B(0, 5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5 - 2}{0 - (-1)} \Rightarrow m_{AB} = 3$

2º) Qual é o coeficiente angular da reta **r** na figura?



Temos: A(2, 0) e B(0, 1)

$$m = m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - 2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DE UMA RETA

No plano cartesiano, uma reta fica determinada por um dos dois modos:

1º modo: Conhecendo-se um de seus pontos e sua declividade, que é dada pela inclinação da reta (coeficiente angular).

2º modo: Conhecendo-se dois pontos distintos que pertencem a ela.

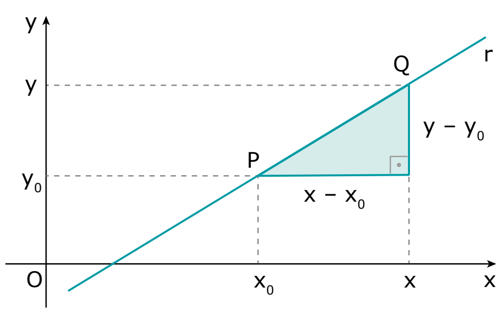
Vejamos, então, como se obtém a equação de uma reta.

1º modo: Temos dois casos a considerar:

i) A reta tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r**, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**.

Sendo $Q(x, y)$ um ponto genérico de **r**, distinto de **P**, então o coeficiente angular **m** da reta pode ser calculado com base em **P** e **Q**.



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{(I)}$$

A relação (I) entre as coordenadas dos pontos **P** e **Q** pode ser escrita na forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{(II)}$$

Note que, se P = Q, então $x = x_0$ e $y = y_0$, e a relação (II) continua verdadeira, pois $y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0)$.

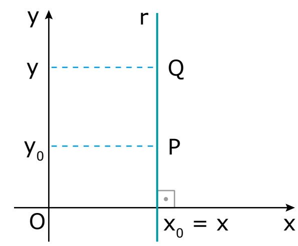
Assim:

A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m** é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ii) A reta não tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r** que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem inclinação 90° (reta vertical).

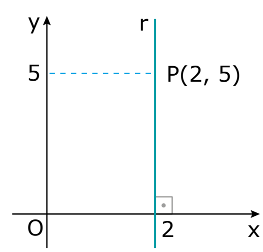


Sendo **r** uma reta vertical e Q(x, y) um ponto genérico de **r**, tem-se:

$$\boxed{x = x_0}$$

Exemplo:

Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto P(2, 5) e é perpendicular ao eixo x.



$x = x_0$, isto é, $x = 2$, ou seja, $x - 2 = 0$.

2º modo: Obter uma equação da reta que passa por dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Procede-se da seguinte maneira:

1º passo: Calcula-se o coeficiente angular **m** da reta AB.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2º passo: Com o coeficiente angular **m** e qualquer um dos dois pontos dados, recai-se no 1º modo.

Assim, tomando-se o ponto **A**, tem-se:

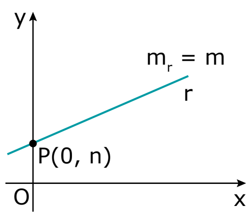
$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Esta é a equação fundamental da reta que passa pelos pontos **A** e **B**.

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA RETA

Equação reduzida

Considere-se a reta **r** que passa pelo ponto P(0, n) e tem coeficiente angular **m**.



Sua equação fundamental é:

$$y - n = m(x - 0)$$

Segue-se que:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Esta é chamada de equação reduzida da reta.

OBSERVAÇÕES

i) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular **m** e a ordenada **n** do ponto onde esta reta intercepta o eixo y.

ii) As retas de inclinação igual a 90° não possuem equação reduzida.

Equação geral

No plano cartesiano, toda equação de uma reta pode ser escrita na forma ax + by + c = 0, com a ≠ 0 ou b ≠ 0. De fato:

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos, e $x_A \neq x_B$, temos:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental da reta que passa por **A** e **B** é:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A) \Rightarrow$$

$$yx_B - yx_A - y_Ax_B + y_Ax_A = y_Bx - y_Bx_A - y_Ax + y_Ax_A \Rightarrow$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + y_Bx_A - y_Ax_B = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $y_Bx_A - y_Ax_B = c$, a equação fica:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

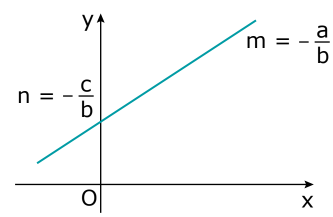
E, se $x_A = x_B$, a equação fica ax + 0y + c = 0, que é a equação de uma reta paralela ao eixo y.

Reciprocamente, no plano cartesiano, a equação ax + by + c = 0 com a ≠ 0 ou b ≠ 0 representa uma reta. De fato:

Se b ≠ 0, tem-se:

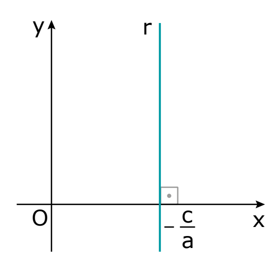
$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Comparando-se com a equação reduzida y = mx + n, tem-se:



$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Se b = 0, tem-se ax + c = 0, ou seja, $x = -\frac{c}{a}$.



A reta é perpendicular ao eixo x.

A equação na forma

$$\boxed{ax + by + c = 0, \text{ com } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$$

é chamada de equação geral da reta.

OBSERVAÇÕES

i) Se c = 0, a equação fica ax + by = 0, e a reta passa pela origem (0, 0). De fato: a.0 + b.0 = 0

Assim, por exemplo, a reta r: 2x + 3y = 0 passa pela origem.

ii) Se $a = 0$, a equação fica $by + c = 0$, e a reta é paralela ao eixo x. De fato: $by + c = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{c}{b}$.

Assim, por exemplo, a reta r: $2y + 5 = 0$ é paralela ao eixo x.

iii) Se $b = 0$, a equação fica $ax + c = 0$, e a reta é paralela ao eixo y. De fato: $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{c}{a}$.

Assim, por exemplo, a reta r: $2x - 7 = 0$ é paralela ao eixo y.

iv) Toda reta do plano cartesiano possui infinitas equações na forma geral. Assim, se $ax + by + c = 0$ é a equação de uma reta, então a equação $k(ax + by + c) = 0$, $k \neq 0$, representa a mesma reta, pois são equações equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções.

Assim, por exemplo, $x + 2y + 3 = 0$ e $3(x + 2y + 3) = 0$ representam a mesma reta.

Interseção de retas

Para obter o ponto de interseção entre duas retas concorrentes, basta resolvermos o sistema formado por suas equações gerais ou reduzidas.

Exemplos:

1º) Achar o ponto de interseção entre as retas:

$y = 2x - 5$ e $y = -x + 4$

Temos que:

$2x - 5 = -x + 4$

$x = 3 \Rightarrow y = 1$

Logo, o ponto de interseção é P(3, 1).

2º) Achar o ponto de interseção entre as retas:

$2x + y - 3 = 0$ e $3x - y - 7 = 0$

Temos que:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \quad\;\; + \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$5x = 10$

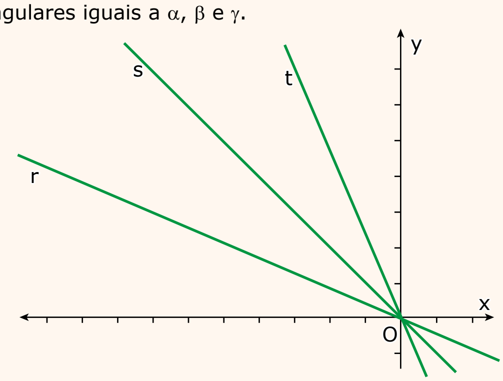
$x = 2 \Rightarrow y = -1$

Logo, o ponto de interseção é P(2, −1).

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPE–2022) No plano cartesiano ortogonal da figura, as retas r, s e t possuem, respectivamente, coeficientes angulares iguais a α, β e γ.



Portanto, é CORRETO afirmar que:

A) $\alpha > \beta > \gamma$

B) $\beta > \gamma > \alpha$

C) $\gamma > \beta > \alpha$

D) $\gamma > \alpha > \beta$

E) $\alpha > \gamma > \beta$

02. YA6I (EEAR) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por:

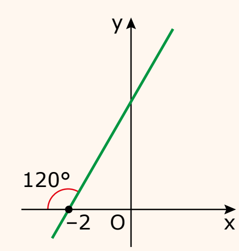
A) $y = 7x + 1$

B) $y = 6x + 1$

C) $y = \dfrac{7}{6}x + 1$

D) $y = \dfrac{6}{7}x + 1$

03. KSUK (UNIRIO-RJ)



A equação reduzida da reta representada anteriormente é:

A) $3x - \sqrt{3}y + 6 = 0$

B) $3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$

C) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$

D) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

E) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

04. 6G5O (IFSul) Considerando as retas $y = 5x + 12$ e $y = ax + 4$ que se interceptam no ponto A(−1, b), os valores de **a** e **b** são, respectivamente,

A) −5 e 1.

B) −3 e 7.

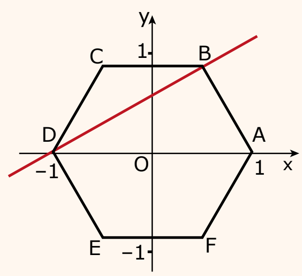
C) −1 e 7.

D) 4 e 8.

05. (PUC Minas) No final do ano de 2005, o número de casos de dengue registrados em certa cidade era de 400 e, no final de 2013, esse número passou para 560. Admitindo-se que o gráfico do número de casos registrados em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, é correto afirmar que, no final de 2015, o número de casos de dengue registrados será igual a

A) 580.
B) 590.
C) 600.
D) 610.

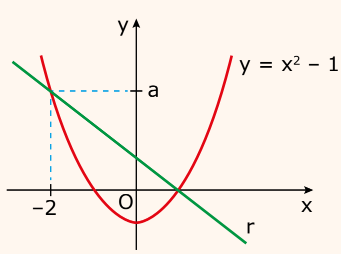
06. JØDJ
(UFRGS-RS) Os pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto **A** tem coordenadas (1, 0) e o ponto **D** tem coordenadas (−1, 0), como na figura a seguir.



A equação da reta que passa pelos pontos **B** e **D** é:

A) $y = \sqrt{3}x$
B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$
C) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
E) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

07. 67PC
(UFMG) Observe os gráficos da reta **r** e da função quadrática.



A equação da reta **r** é:

A) $x - 2y - 2 = 0$
B) $-2x + y + 1 = 0$
C) $x + y - 2 = 0$
D) $x + y + 1 = 0$
E) $x + y - 1 = 0$

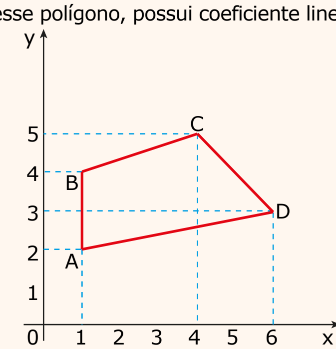
08. Z7UØ
(UFSJ-MG) Dados o ponto P(−1, 2) e as retas r: $2x - 5y + 7 = 0$ e s: $2x + y + 7 = 0$, é correto afirmar que:

A) o ponto de interseção das duas retas tem coordenadas $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.
B) o ponto **P** pertence à reta **r**.
C) as retas **r** e **s** são paralelas.
D) as retas **r** e **s** não têm ponto comum.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 29MY
(PUC RS) O polígono ABCD, na figura a seguir, indica o trajeto de uma maratona realizada em uma cidade, sendo que as coordenadas estão representadas no sistema de eixos cartesianos a seguir. A reta que passa pelos pontos **A** e **C**, vértices desse polígono, possui coeficiente linear igual a



A) 0.
B) $\frac{2}{3}$.
C) $\frac{3}{4}$.
D) $\frac{4}{5}$.
E) 1.

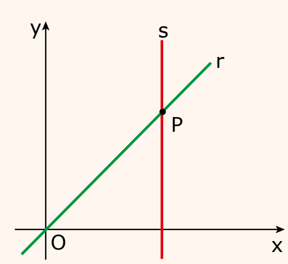
02. (EEAR–2022) Seja r a reta determinada por A(3, 5) e B(6, −1). O ponto de abscissa 8 pertencente à r possui ordenada igual a:

A) 9
B) 7
C) −6
D) −5

03. RYF1
(UPE) No plano cartesiano, as interseções das retas de equações $x - y + 2 = 0$; $y = 4$; $y + x = -4$ determinam um triângulo, cujos vértices são pontos de coordenadas:

A) (2, 4); (−4, 4); (2, −4)
B) (−2, 4); (−4, 4); (-2, −4)
C) (−2, −4); (8, −4); (3, 1)
D) (4, 2); (4, −8); (−1, −3)
E) (2, 4); (−8, 4); (−3, −1)

04. WPM4
(UFF-RJ) Na figura a seguir, estão representadas as retas **r** e **s**.

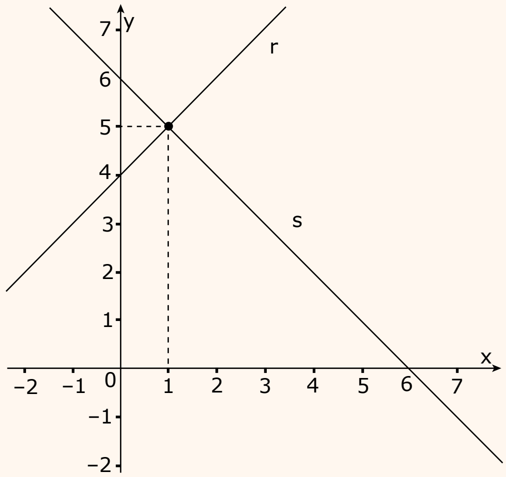


Sabendo que a equação da reta **s** é $x = 3$ e que $d_{OP} = 5$, a equação de **r** é:

A) $y = \frac{3}{4}x$
B) $y = \frac{4}{3}x$
C) $y = \frac{5}{3}x$
D) $y = 3x$
E) $y = 5x$

05. GA6Z

(UFRGS-RS) A representação geométrica das retas **r** e **s** encontra-se desenhada no sistema de coordenadas cartesianas na imagem a seguir:



Assinale a alternativa que apresenta o sistema de equações lineares que pode representar as retas **r** e **s** da imagem anterior.

A) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 5x+5y=1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} -x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

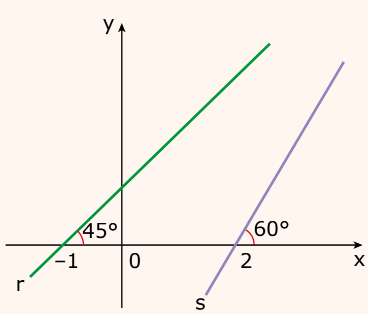
C) $\begin{cases} -x+y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$

D) $\begin{cases} -x-2y=3 \\ x+y=6 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

06. 437Q

(Unifor-CE) Sejam as retas **r** e **s** representadas na figura a seguir:



A abscissa do ponto de interseção de **r** e **s** é:

A) $\dfrac{-3\sqrt{3}-5}{2}$

B) $\dfrac{3\sqrt{3}+7}{2}$

C) $\dfrac{3\sqrt{3}-7}{2}$

D) $\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}$

E) $\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}$

07. QQSA

(UECE) Seja **r** a reta que passa pelos pontos $P_1(-2, 1)$ e $P_2(5, 3)$. Se **r** intercepta os eixos coordenados nos pontos M(m, 0) e N(0, n), então o valor de $\frac{14}{11}(n - m)$ é

A) 6.

B) 7.

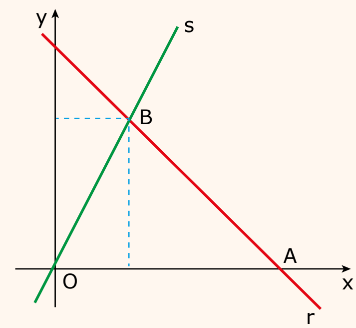
C) 8.

D) 9.

E) 1.

08. F5I9

(Fatec-SP) Na figura a seguir, a reta **r** tem equação $x + 3y - 6 = 0$, e a reta **s** passa pela origem e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$.



A área do triângulo OAB, em unidades de área, é igual a

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

09. (PUC Minas) O triângulo ABC tem seus lados apoiados sobre as retas $x - 1 = 0$, $x - y = 0$ e $x + y - 4 = 0$. Nessas condições, pode-se afirmar que ABC é um triângulo

A) escaleno.

B) equilátero.

C) obtusângulo.

D) retângulo.

10. (UEL-PR–2020) Na exposição virtual "A Beleza da Matemática", realizada no Museu do Amanhã, o belo é celebrado como simetria matemática, como exemplificado na imagem a seguir.

Imagem da exposição "A Beleza da Matemática", Museu do Amanhã

No plano cartesiano, dois pontos distintos **P** e **Q** são simétricos em relação a uma reta **r** se as seguintes condições forem simultaneamente atendidas:

I. a distância de **P** a **r** é igual à distância de **Q** a **r**;

II. a reta que contém **P** e **Q** é perpendicular à reta **r**.

Suponha que, no plano que contém a imagem da borboleta, o eixo de simetria **r** seja dado pela equação de reta $y + x = 2$. Se $P = (-2, 0)$ é um ponto desse plano, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o ponto simétrico a **P** em relação à reta **r**.

A) (0, 2)

B) (2, 0)

C) (2, 2)

D) (2, 4)

E) (4, 2)

11. P7M8

(Insper) No plano cartesiano, a reta **r**, de coeficiente angular 10, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada **a**. Já a reta **s**, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada **b**. Se as retas **r** e **s** interceptam-se em um ponto de abscissa 6, então:

A) b = a

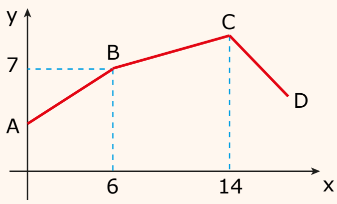
B) b = a − 9

C) b = a − 6

D) b = a + 9

E) b = a + 6

12. EUOX (ESPM-SP) O gráfico a seguir é formado por 3 segmentos de retas consecutivos.



Sabe-se que:

I. A reta que contém o segmento AB tem coeficiente linear igual a 4.

II. O coeficiente angular do segmento BC vale metade do coeficiente angular do segmento AB.

III. A ordenada do ponto **D** é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto **C**.

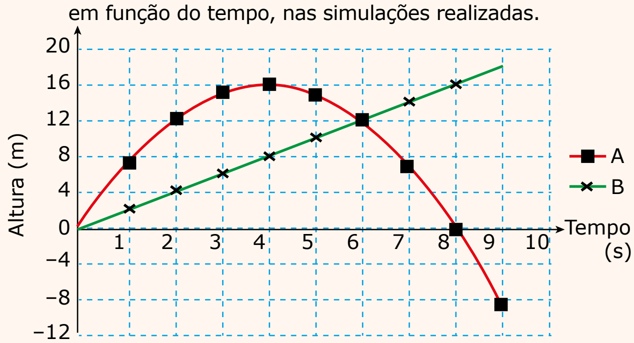
IV. O coeficiente angular do segmento CD é igual a −1.

Podemos concluir que a abscissa do ponto **D** vale

A) 17.
B) 19.
C) 15.
D) 18.
E) 16.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, **A** e **B**, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil **B** interceptar o **A** quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

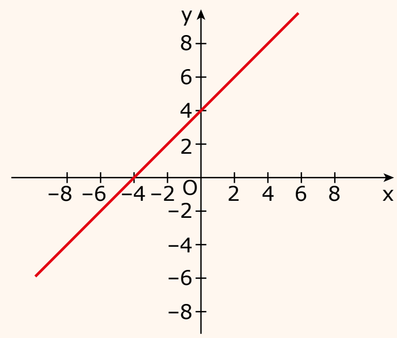


Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil **B** deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de **B** deverá

A) diminuir em 2 unidades.
B) diminuir em 4 unidades.
C) aumentar em 2 unidades.
D) aumentar em 4 unidades.
E) aumentar em 8 unidades.

02. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta da equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P(-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

A) (−5, 0).
B) (−3, 1).
C) (−2, 1).
D) (0, 4).
E) (2, 6).

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. C
02. C	06. B
03. D	07. E
04. B	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E	07. D
02. D	08. D
03. E	09. D
04. B	10. D
05. C	11. E
06. B	12. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Inequações Trigonométricas

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas.

Para resolver a equação trigonométrica f(x) = g(x), devemos reduzi-la a uma das três equações seguintes:

i) sen α = sen β;

ii) cos α = cos β;

iii) tg α = tg β.

Estas são denominadas equações fundamentais.

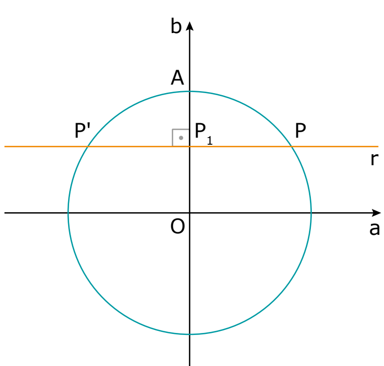
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO SEN α = SEN β

Se sen α = sen β = OP_1, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares.



Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

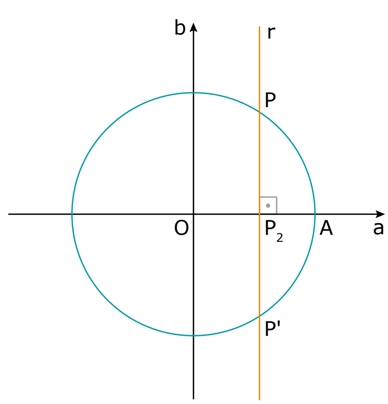
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO COS α = COS β

Se cos α = cos β = OP_2, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos.



Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\therefore \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$

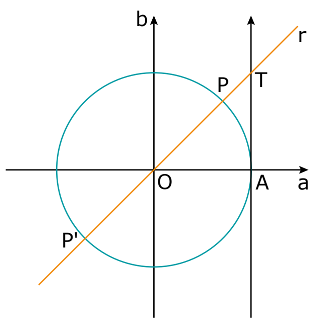
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TG α = TG β

Se tg α = tg β = AT, então as imagens de α e β estão sobre a reta **r**, determinada por **O** e **T**, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo.



Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\therefore \text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dadas f(x) e g(x) duas funções trigonométricas e m $\in \mathbb{R}$, as inequações trigonométricas f(x) > g(x) ou f(x) < g(x) podem ser reduzidas a inequações de um dos seis tipos:

i) sen x > m

ii) sen x < m

iii) cos x > m

iv) cos x < m

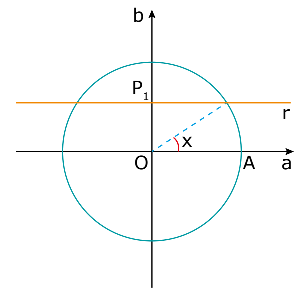
v) tg x > m

vi) tg x < m

RESOLUÇÃO DE SEN x > m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que OP_1 = m. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de **r**.

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais **x** pode pertencer, tomando o cuidado de partir de **A** e de percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

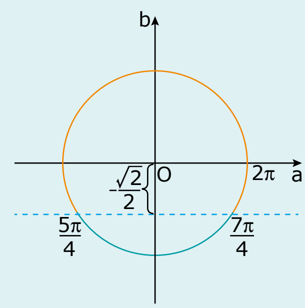


Exemplo:

Resolver a inequação sen x $\geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi$$

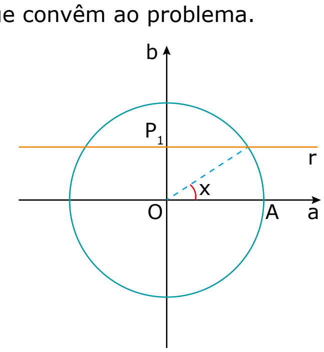


Notemos que escrever $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ estaria errado, pois, como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe **x** algum nesse intervalo.

RESOLUÇÃO DE SEN x < m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que OP_1 = m. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de **r**.

Finalmente, partindo de **A** e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

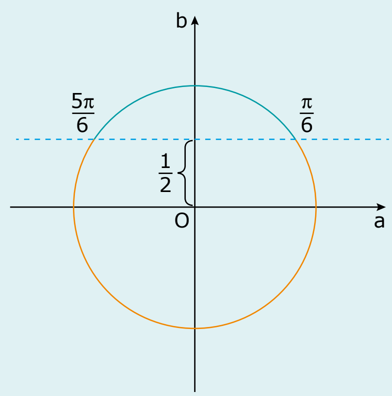


Exemplo:

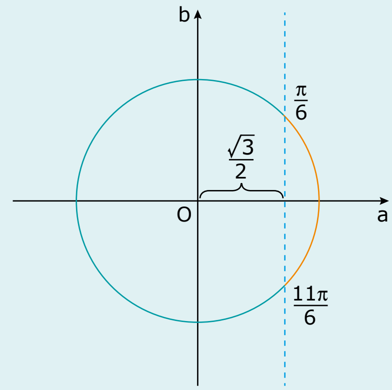
Resolver a inequação sen x < $\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



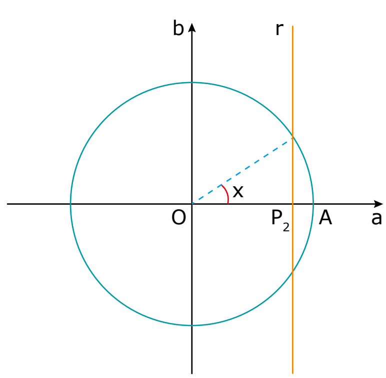
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



RESOLUÇÃO DE COS x > m

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



Exemplo:

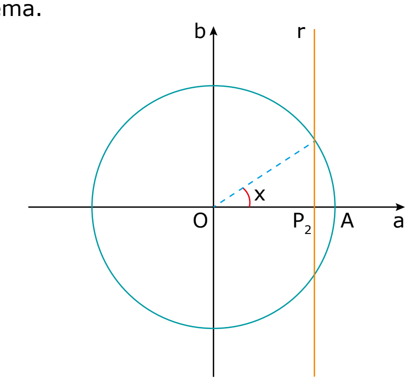
Resolver a inequação cos x > $\frac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

RESOLUÇÃO DE COS x < m

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à esquerda de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

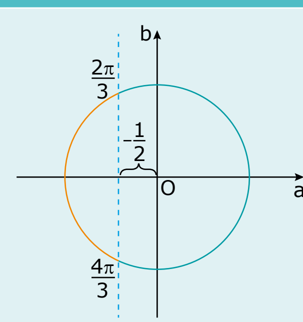


Exemplo:

Resolver a inequação cos x < $-\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

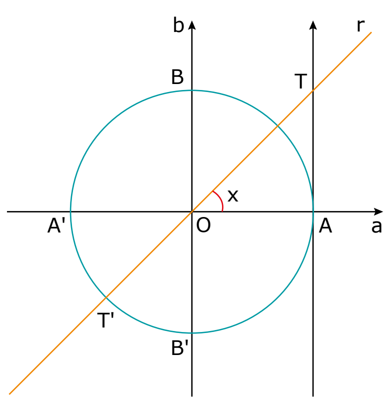
$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$



RESOLUÇÃO DE TG x > m

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta r = $\overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x > m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B$ e o seu oposto $T'\hat{O}B'$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



Exemplo:

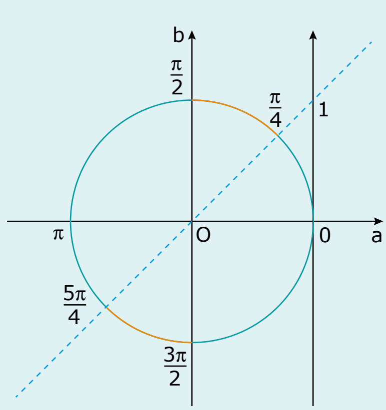
Resolver a inequação tg x > 1, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$,

que podem ser resumidos em:

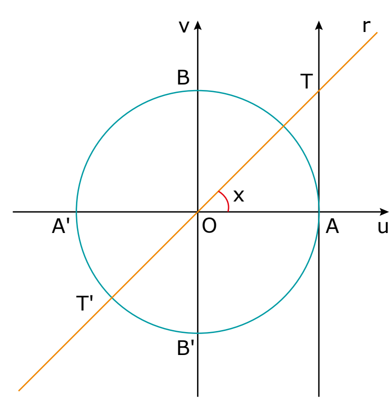
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



RESOLUÇÃO DE TG x < m

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta r = $\overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x < m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B'$ e o seu oposto $T'\hat{O}B$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



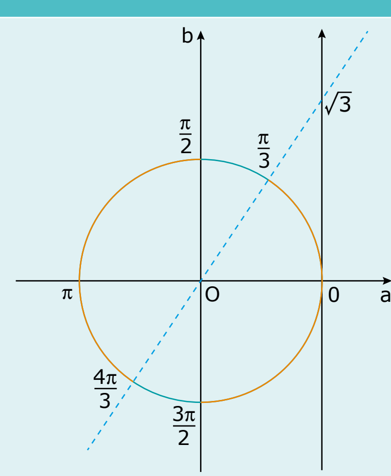
Exemplo:

Resolver a inequação tg x < $\sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

$0 + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, que podem ser resumidos em:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi$$



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS) Se $x \in \mathbb{R}$, então a equação $\cos(x) = \cos(-x)$ apresenta o conjunto solução:

A) $\mathbb{R}$
B) $[-1; 1]$
C) $[0; +\infty)$
D) $(-\infty; 0]$
E) $\{-1, 0, 1\}$

02. GFE6
(UEG-GO) A inequação $\text{sen } x.\cos x \leq 0$, no intervalo de $0 \leq x \leq 2\pi$ e x real, possui conjunto solução:

A) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

B) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$

E) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$

03. UR66
(PUC RS) A solução da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, quando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é:

A) $\frac{\pi}{4}$
B) $-\frac{\pi}{4}$
C) $\frac{7\pi}{12}$
D) $\frac{\pi}{2}$
E) 0

04. (UFJF-MG–2022) Observe a equação trigonométrica a seguir.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Sobre suas raízes pode-se afirmar que:

A) não são números reais.
B) são da forma $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, sendo k um número inteiro qualquer.
C) são da forma $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, sendo k um número inteiro qualquer.
D) são da forma $x = k\pi$, sendo k um número inteiro qualquer.
E) são da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número inteiro qualquer.

05. 7A8Q
(PUC Rio) Sabendo que $\cos 3x = -1$, quais são os possíveis valores para $\cos x$?

A) $\frac{1}{2}$ e -1
B) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{2}$ e 1
D) -1 e 5
E) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

06. TMGT
(PUC RS) Se $0 \leq x < 2\pi$, então o conjunto solução da equação $\text{sen } x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ é:

A) $S = \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
B) $S = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
C) $S = \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$
D) $S = [0; 2\pi]$
E) $S = [0; \pi]$

07. UTZP
(Vunesp) O conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, é definido por:

A) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

C) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

08. 8ECT
(UFPR–2020) Seja **x** um arco no primeiro quadrante.

A) Encontre o valor de sen(x), sabendo que $\cos(x) = \frac{3}{8}$.
B) Encontre o valor de sen(x), sabendo que $8\text{tg}(x) = 3\cos(x)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KZI2
(Mackenzie-SP) O maior valor inteiro de **k** para que a equação $\sqrt{3}\text{sen } x + \cos x = k - 2$ apresente soluções reais é

A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 7.

02. SVB7
(UFU-MG) Considere que **f** e **g** são as funções reais de variável real dadas, respectivamente, por $f(x) = 1 + \text{sen }(2x)$ e $g(x) = 1 + 2.\cos(x)$. Desse modo, podemos afirmar que, para $x \in [0, 2\pi)$, os gráficos de **f** e **g** cruzam-se em

A) 1 ponto.
B) 2 pontos.
C) 3 pontos.
D) nenhum ponto.

03. ØR5C
(Unimontes-MG) Considere a equação trigonométrica $\cos 3x.\cos 2x - \text{sen } 3x.\text{sen } 2x = 0$. O número de raízes da equação, no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$, é

A) 2.
B) 1.
C) 3.
D) 4.

04. (UECE) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = \text{sen } 2x$ e P (a, b) um ponto na interseção dos gráficos de **f** e **g**. Os possíveis valores para tg^2 a são:

A) 0 ou 1
B) 0 ou 2
C) 0 ou 3
D) 0 ou $\sqrt{3}$

MATEMÁTICA

05. (Mackenzie-SP–2019) Os valores de x, $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais $|\text{sen } x| > \frac{1}{2}$, são:

A) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

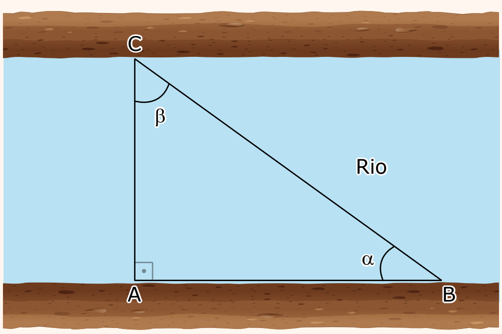
B) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

C) $0 < x < \pi$

D) $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

06. STU6 (AFA-SP–2021) Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio. Para tal, ele tomou dois pontos **A** e **B** em uma margem do rio e outro ponto **C** na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir.



Desenho fora de escala

Considere que:

- a distância entre os pontos **A** e **B** é de 30 m;
- os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(\text{sen}^2\,\alpha)x^2 - 9(\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta) + \frac{5}{2}\cos\beta = 0$, na qual x = 2 é uma de suas raízes;
- $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A largura aproximada do rio, em m, é igual a:

A) 15
B) 17
C) 21
D) 51

07. ØIJO (FGV) No intervalo $[0, 4\pi]$, a equação $\text{sen}^3\,x - 2\text{sen}^2\,x - 5\text{sen}\,x + 6 = 0$ tem raízes cuja soma é:

A) 2
B) –2
C) 6
D) $\frac{\pi}{2}$
E) 3π

08. (EsPCEx-SP) A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a:

A) $\frac{5\pi}{3}$
B) 2π
C) $\frac{7\pi}{3}$
D) π
E) $\frac{8\pi}{3}$

09. E9IA (Mackenzie-SP) O conjunto solução da inequação $\cos^4 x - \text{sen}^4 x < \frac{1}{2}$, no intervalo $[0, \pi]$, é:

A) $S = \varnothing$

B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

C) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

E) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} < x \leq \pi\right\}$

10. 4F1M (UDESC) A equação $3\text{sen}^2\,x + (m - 1)\text{sen}\,x - 4(m - 1)^2 = 0$ admite solução para os valores de **m** pertencentes ao intervalo:

A) $[-1, 1]$
B) $[0, 2]$
C) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right]$
D) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$
E) $[1, 4]$

11. CBUS (UEFS-BA) O número de soluções da equação $3\cos^2 x + \tan^2 x = 3$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 6.
E) 7.

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. A
- 03. A
- 04. B
- 05. A
- 06. E
- 07. A
- 08.
  - A) $\frac{\sqrt{55}}{8}$
  - B) $\frac{1}{3}$

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. A
- 06. B
- 07. E
- 08. B
- 09. B
- 10. B
- 11. E

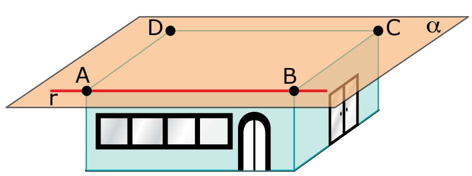
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Geometria de Posição e Poliedros

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Introdução

Alguns conceitos na Geometria são intuitivos, primitivos e, por isso, não necessitam de definição. A Geometria de posição é construída com base nas noções intuitivas de ponto, reta e plano, que estão exemplificadas na figura a seguir:



i) **A**, **B**, **C** e **D** são pontos;

ii) **r** ou $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta que contém os pontos **A** e **B**;

iii) **α** é o plano que contém o teto da casa.

Com base nos conceitos básicos de ponto, reta e plano, podemos enunciar alguns postulados (verdades aceitas sem demonstração):

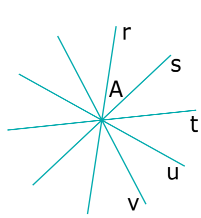
i) Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

ii) Em um plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

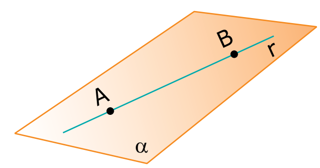
iii) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

$r = \overleftrightarrow{AB}$

iv) Por um ponto passam infinitas retas.



v) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

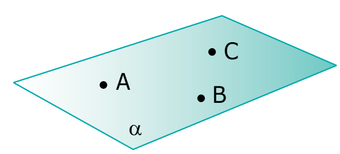


$r = \overleftrightarrow{AB}$

Determinação de planos

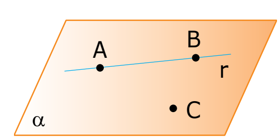
Dizemos que um plano está determinado quando ele é único. Existem quatro modos de se determinar planos:

i) Por três pontos não colineares.

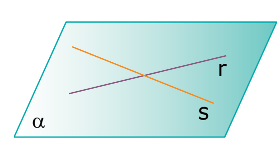


$\alpha = (A, B, C)$

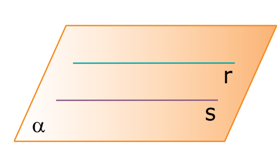
ii) Por uma reta e um ponto fora dela.



iii) Por duas retas concorrentes.



iv) Por duas retas paralelas distintas.

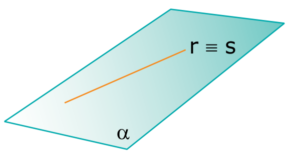


Posições relativas entre duas retas

Duas retas que pertencem ao mesmo plano (coplanares) podem ser paralelas ou concorrentes.

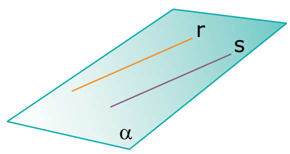
Paralelas

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou não têm ponto comum.



Paralelas coincidentes

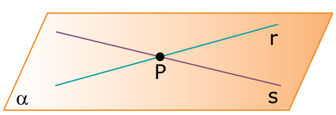
ou



Paralelas distintas

Concorrentes

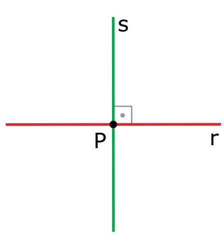
Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.



$r \cap s = \{P\}$

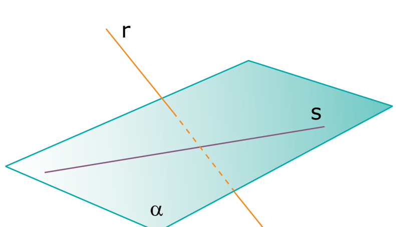
Caso particular:

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulo reto.



Reversas

Duas retas são reversas se, e somente se, não existir um plano que as contenha, ou seja, se não forem coplanares.



r reversa a **s**

Não existe um plano que contém **r** e **s** simultaneamente, e, consequentemente, $r \cap s = \varnothing$ (retas reversas não possuem pontos em comum).

Caso particular:

Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

RESUMINDO

Dadas duas retas quaisquer, podemos classificá-las da seguinte maneira:

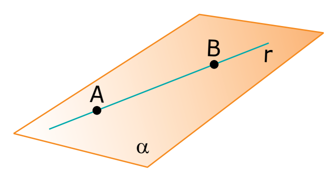
- Retas coplanares
  - Paralelas
    - Coincidentes
    - Distintas
  - Concorrentes
- Retas não coplanares
  - Reversas

Posições relativas entre uma reta e um plano

Uma reta e um plano podem admitir as seguintes posições relativas:

Reta contida no plano

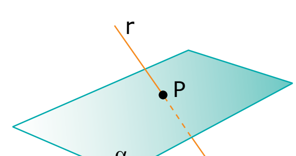
Uma reta **r** ($\overleftrightarrow{AB}$) está contida em um plano α se, e somente se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.



Reta secante (ou concorrente) ao plano

Uma reta e um plano são secantes se possuem um único ponto em comum.

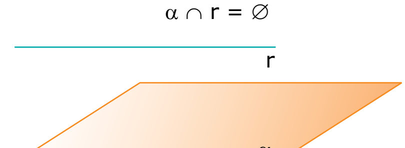
$\alpha \cap r = P$



Reta paralela ao plano

Uma reta e um plano são paralelos se, e somente se, não possuem pontos em comum.

$\alpha \cap r = \varnothing$



Posições relativas entre planos

Dois planos podem admitir as seguintes posições relativas:

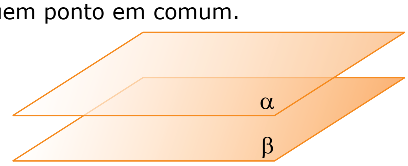
Paralelos coincidentes

Dois planos são coincidentes se, e somente se, possuem todos os pontos em comum.

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Paralelos distintos

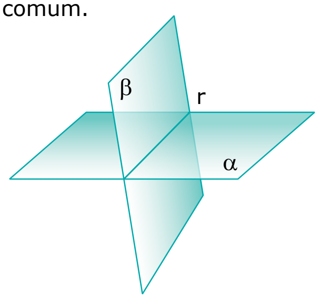
Dois planos são paralelos distintos se, e somente se, não possuem ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Secantes

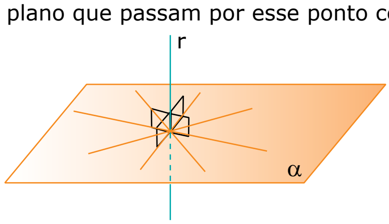
Dois planos são secantes se, e somente se, possuem uma única reta em comum.



$\alpha \cap \beta = r$

Reta perpendicular ao plano

Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.



$r \perp \alpha$ ou $\alpha \perp r$

OBSERVAÇÃO

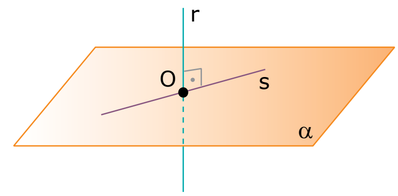
Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

Teorema

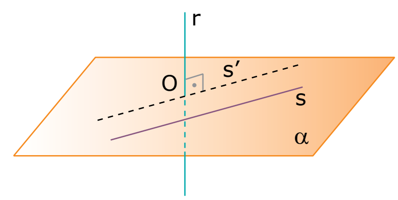
Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular ou ortogonal a qualquer reta do plano.

Nas figuras seguintes, mostramos as duas possibilidades.

- **r** e **s** são perpendiculares.

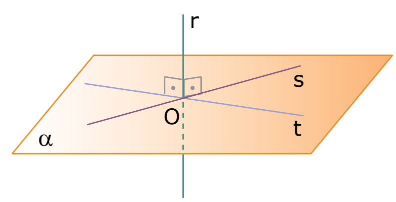


- **r** e **s** são ortogonais (reversas que formam 90°).



Teorema

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



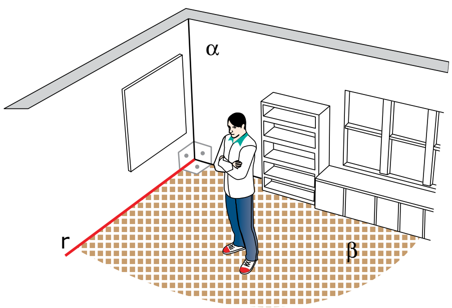
$r \perp \alpha$

Observe, na figura a seguir, a reta que representa a interseção de duas paredes da sala. Ela é perpendicular ao chão, pois é perpendicular a duas retas concorrentes do chão.

Planos perpendiculares

Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular a β.

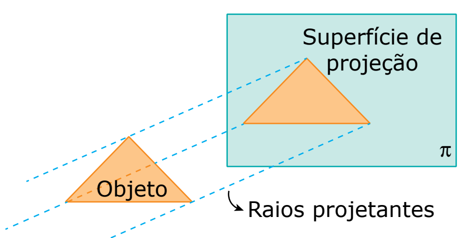
Observe, na figura a seguir, que o chão da sala (plano β) é perpendicular à parede (plano α), pois o chão possui uma reta perpendicular à parede (reta **r**).



$\beta \perp \alpha$, pois $r \perp \alpha$.

PROJEÇÕES

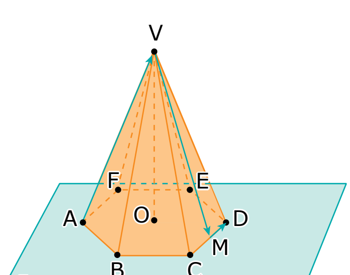
Trabalharemos aqui com projeções de um objeto sobre uma superfície plana, denominada **superfície de projeção**. A projeção é construída através de linhas imaginárias que tangenciam os vértices do objeto. As interseções dessas linhas imaginárias com o plano geram uma imagem correspondente à **projeção** desse objeto no plano. Tais linhas imaginárias são chamadas de **raios de projeção** ou **raios projetantes**.

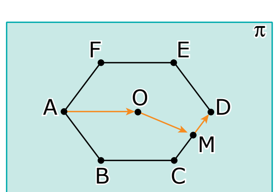


Sombras obtidas utilizando-se as propriedades das projeções

Outro exemplo de utilização do conceito de projeção é descrito a seguir:

Considere uma pirâmide hexagonal regular de base ABCDEF e vértice **V**, indicados na figura. O ponto **O** é o centro do hexágono regular da base e o ponto **M** é o ponto médio da aresta CD. Considere que um ponto se desloque pela pirâmide seguindo a trajetória AVMD.





Deslocamento visto de cima

Observe que, se visualizarmos a figura anterior (vista superior), teremos a projeção AOMD da trajetória desse ponto localizada no plano π, que contém a base da pirâmide.

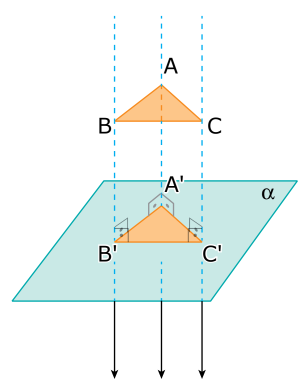
Classificação das projeções

As projeções construídas segundo o método descrito anteriormente são classificadas de acordo com o ângulo formado entre os raios projetantes e a superfície de projeção e de acordo com a posição relativa entre os raios projetantes.

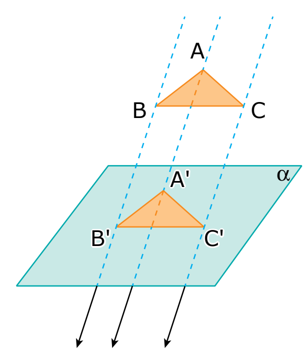
Quanto aos ângulos dos raios projetantes com a superfície de projeção

Projeção ortogonal e projeção oblíqua

Uma projeção é dita ortogonal quando os raios projetantes são perpendiculares à superfície de projeção. Por outro lado, é dita oblíqua quando os raios de projeção são oblíquos à superfície de projeção.



Projeção ortogonal

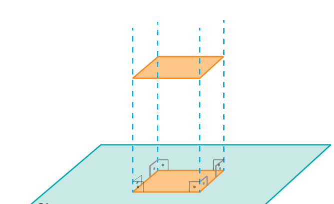


Projeção oblíqua

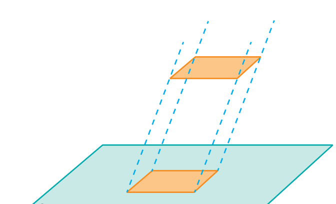
Quanto à posição relativa entre os raios projetantes

Projeção cilíndrica

Uma projeção é dita cilíndrica quando os raios projetantes são paralelos entre si. Toda projeção ortogonal é cilíndrica.



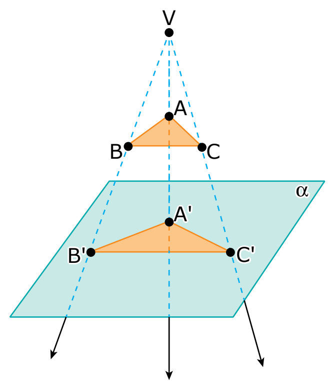
Projeção cilíndrica ortogonal



Projeção cilíndrica oblíqua

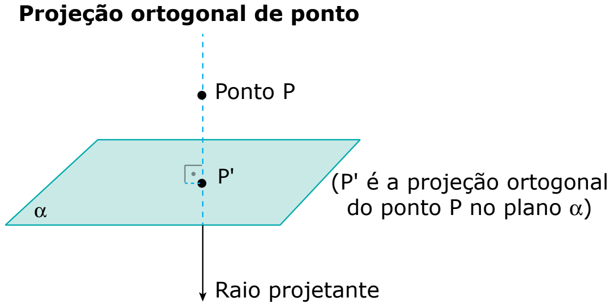
Projeção cônica

Uma projeção é dita cônica quando os raios projetantes se intersectam em um ponto **V**, denominado ponto de convergência. Em outros termos, os raios projetantes são concorrentes entre si em um único ponto. Nesse caso, as dimensões do objeto projetado não são conservadas na projeção. Toda projeção cônica é oblíqua.



Exemplos de projeções

Projeção ortogonal de ponto



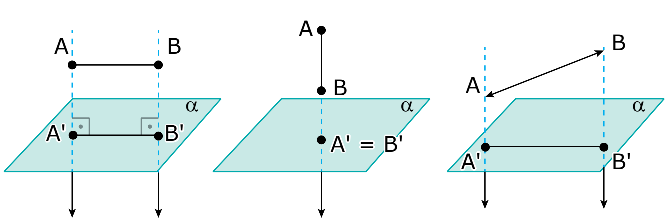
Projeção ortogonal de um segmento

Para um segmento AB:

i) **Paralelo ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada pelo segmento A'B' horizontal, que tem a mesma medida do segmento original.

ii) **Perpendicular ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada por um único ponto.

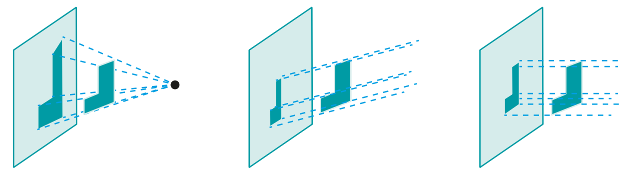
iii) **Oblíquo ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada pelo segmento A'B' de medida menor que o segmento original.



(i) (ii) (iii)

Projeção de uma região

A projeção de uma região ocorre a partir da projeção de todos os pontos da região.

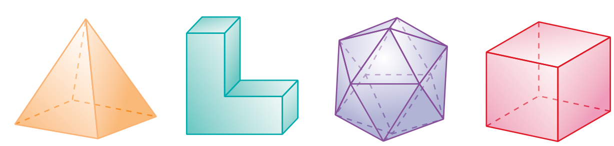


Projeção cônica — Projeção cilíndrica oblíqua — Projeção cilíndrica ortogonal

Na Geometria Espacial, é comum o uso das projeções como artifícios na solução de problemas estabelecidos.

POLIEDROS

Poliedros são figuras espaciais fechadas formadas pela reunião de polígonos, como mostrado nos exemplos seguintes:

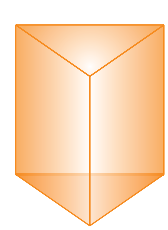


Cada polígono é denominado face do poliedro. Os lados dos polígonos são as arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro.

Um poliedro é chamado convexo se o plano que contém qualquer um dos seus polígonos deixa os demais polígonos no mesmo semiespaço.

Exemplos:

1º)



Poliedro convexo

2º)

Poliedro não convexo

O segundo poliedro é não convexo, pois o plano que contém a face negritada, por exemplo, divide o poliedro em duas partes, uma para cada semiespaço.

Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é:

$$\boxed{S = (V - 2).360°}$$

Nela, **V** é o número de vértices desse poliedro.

Relação de Euler

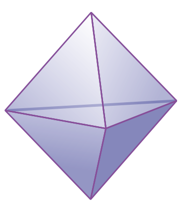
Para todo poliedro convexo, vale a relação

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Nela, **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas, e **F** é o número de faces desse poliedro.

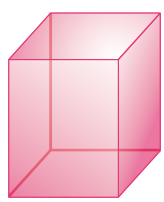
Exemplos:

1º)



$V - A + F = 2$
$5 - 9 + 6 = 2$

2º)



$V - A + F = 2$
$8 - 12 + 6 = 2$

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

i) Todas as faces têm o mesmo número (**n**) de arestas.

ii) De todos os vértices, parte o mesmo número (**m**) de arestas.

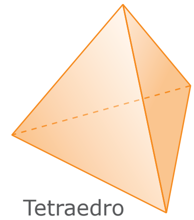
iii) Vale a Relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Propriedade

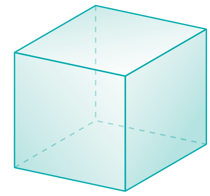
Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Nomes dos poliedros de Platão

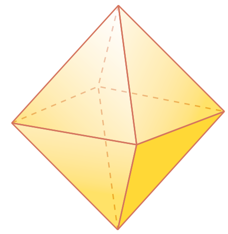
Nome	m	n	A	V	F
Tetraedro	3	3	6	4	4
Hexaedro	3	4	12	8	6
Octaedro	4	3	12	6	8
Dodecaedro	3	5	30	20	12
Icosaedro	5	3	30	12	20



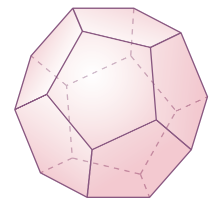
Tetraedro



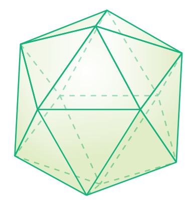
Hexaedro



Octaedro



Dodecaedro



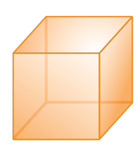
Icosaedro

OBSERVAÇÃO

Um poliedro é regular se ele é de Platão e possui todas as arestas congruentes. Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

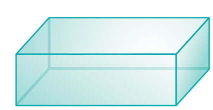
Exemplos:

1º)



Cubo: poliedro de Platão regular

2º)



Paralelepípedo: poliedro de Platão não regular

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUCPR) O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. O número de arestas e vértices desse sólido é

A) A = 21 e V = 13.
B) A = 24 e V = 16.
C) A = 48 e V = 40.
D) A = 32 e V = 24.
E) A = 34 e V = 24.

Resolução:

Em 4 faces triangulares, temos 12 lados, e, em 6 faces hexagonais, temos 36 lados, totalizando 48 lados. Cada lado é comum a duas faces e, portanto, foi contado duas vezes.

Assim, o número de arestas **A** é: $2A = 48 \Rightarrow A = 24$

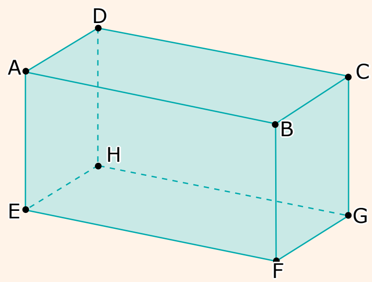
Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, temos: $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 10 = 24 + 2 \Rightarrow V = 16$

Logo, esse sólido possui 24 arestas e 16 vértices.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (ESA–2022) Observe o paralelepípedo retorretângulo da figura a seguir.



Sobre este sólido, assinale a única alternativa correta.

A) As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são ortogonais entre si.

B) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ é paralela ao plano (ADH).

C) As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são paralelas entre si.

D) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano (EFG).

E) As retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ são perpendiculares entre si.

02. ABØB (UNICAP-PE–2020) Marque com V ou com F, conforme sejam verdadeiras ou falsas as afirmativas.

( ) Um triângulo equilátero tem 5 cm de lado. Se cada lado for aumentado em 2 cm, então sua área aumentará 10%.

( ) Três pontos distintos determinam um único plano.

( ) Retas paralelas distintas determinam um único plano.

( ) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas.

03. HXAP (IFSP) A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

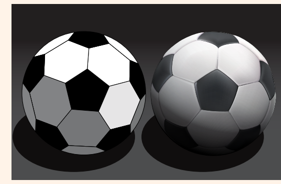
Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com **V** vértices, **A** arestas e **F** faces, vale a relação V – A + F = 2. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é

A) 10.
B) 12.
C) 15.
D) 16.
E) 18.

04. 6LNI (Unit-AL) O número de vértices de um poliedro convexo de sete faces, sendo duas pentagonais e cinco quadrangulares, é

A) 7.
B) 10.
C) 14.
D) 17.
E) 20.

05. X01V (UEFS-BA)



Um tipo de bola de futebol é inspirado no icosaedro truncado, que é um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

O número de vértices desse poliedro é

A) 40.
B) 48.
C) 60.
D) 64.
E) 76.

06. I91F (UEPB) Sejam as afirmativas:

I. Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.

II. Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.

III. Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.

IV. Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

Podemos concluir que

A) apenas I é verdadeira.
B) apenas II é verdadeira.
C) todas são falsas.
D) apenas III é verdadeira.
E) apenas IV é verdadeira.

07. (PUC RS) Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 9.
E) 10.

08. HXDR (UECE) Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono é

A) 90.
B) 72.
C) 60.
D) 56.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KXØ1 (EsPCEx-SP–2022) Dado um cubo, o número de pares distintos de retas reversas que podemos traçar, de tal forma que cada reta contenha uma aresta desse cubo, é igual a

A) 24.
B) 30.
C) 36.
D) 42.
E) 48.

02. TQXL (UEG-GO) Observe e classifique as afirmações a seguir como sendo verdadeiras ou falsas:

I. Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, então as interseções são retas paralelas.

II. Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

MATEMÁTICA

III. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

IV. Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.

Marque a alternativa correta.

A) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
B) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
C) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
D) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
E) Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.

03. TR5N

(CEFET-MG) No contexto da Geometria Espacial, afirma-se:

I. Se uma reta é paralela a um plano, então ela está contida nesse plano.

II. Duas retas sem ponto comum são paralelas ou reversas.

III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

IV. Duas retas distintas paralelas a um plano são paralelas entre si.

São corretas apenas as afirmativas

A) I e II.
B) I e III.
C) II e III.
D) II e IV.
E) III e IV.

04. GPX5

(UEMA) A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas forma os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

A) 80 e 60.
B) 80 e 50.
C) 70 e 40.
D) 90 e 60.
E) 90 e 50.

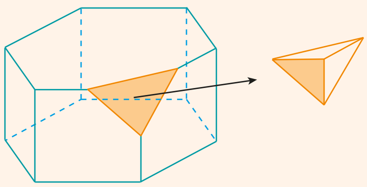
05. (Albert Einstein) Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

A) 56.
B) 32.
C) 30.
D) 36.
E) 48.

06. ØKD4

(Insper-SP) De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é

A) 24.
B) 20.
C) 18.
D) 16.
E) 12.

07. WRDC

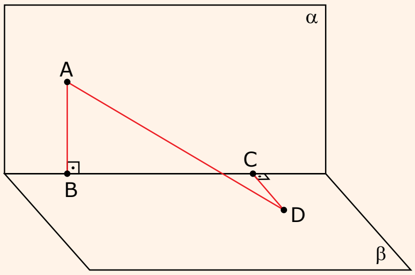
(Albert Einstein) Seja uma reta **r** e os planos secantes α e β, de modo que $\alpha \cap \beta = r$. Seja **s** uma reta paralela à reta **r**, de modo que $s \cap \beta = \varnothing$. Seja **t** uma reta secante ao plano β no ponto P, de modo que $P \in r$. De acordo com essas informações, necessariamente

A) $s \cap \alpha = s$.
B) $t \cap \beta = \varnothing$.
C) $P \notin \alpha$.
D) $r \cap t \neq \varnothing$.

08. (UFC-CE) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então o número de faces triangulares é

A) 12.
B) 11.
C) 10.
D) 9.
E) 8.

09. (UERJ–2019) No esquema a seguir, estão representados os planos ortogonais α e β, sendo **A** um ponto de α e **D** um ponto de β. Os pontos **B** e **C** pertencem à intersecção desses dois planos, sendo $\overline{BC}$ = 40 cm. Considere, ainda, $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{CD}$ = 20 cm, perpendiculares a β e α, respectivamente.



Calcule, em centímetros, a distância $\overline{AD}$.

10. UTQU

(UERJ) Considere o icosaedro a seguir (Figura 1), construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro.

Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado na figura 2.

Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica (Figura 3).

Figura 1

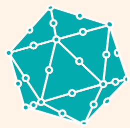


Figura 2

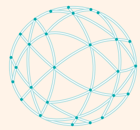
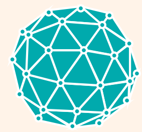


Figura 3



O número de arestas dessa estrutura é igual a

A) 90. B) 120. C) 150. D) 180.

11. PØDL (FUVEST-SP) Dados um plano α e uma reta **r**, podemos afirmar que

A) existe um plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

B) existe um único plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

C) existe um plano β que contém **r** e é paralelo a α.

D) existe um único plano β que contém **r** e é paralelo a α.

E) qualquer plano β que contém **r** intercepta o plano α.

12. ALE5 (EsPCEx-SP) Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas **r**, **s** e **t** tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

A) as retas **r** e **s** somente definirão um plano se forem concorrentes com **t** em um único ponto.

B) as retas **r** e **s** podem definir um plano paralelo à reta **t**.

C) as retas **r** e **s** são necessariamente concorrentes.

D) se **r** e **s** forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

E) o plano definido por **r** e **t** é necessariamente paralelo a **s**.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2022) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

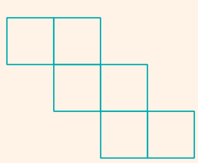


Figura 1

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

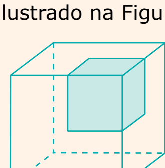
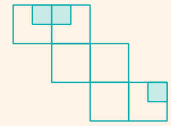


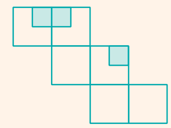
Figura 2

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo planificação apresentada na Figura 1, é:

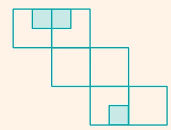
A)



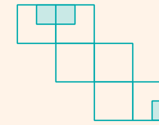
B)



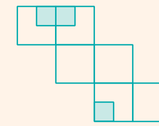
C)



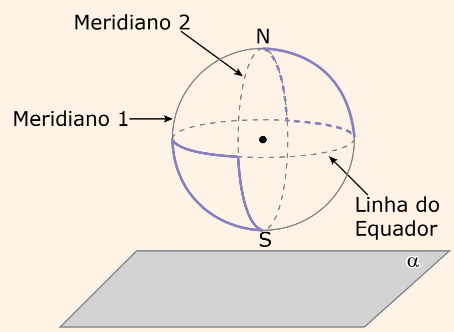
D)



E)

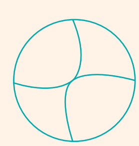


02. (Enem–2022) Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.

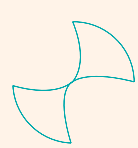


A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é:

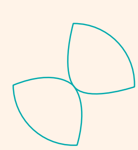
A)



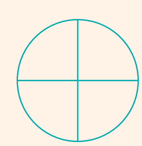
B)



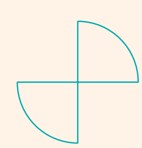
C)



D)

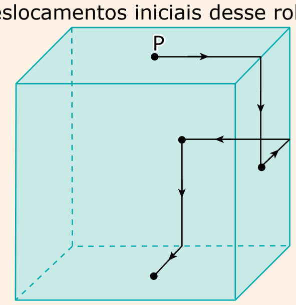


E)

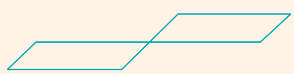


03. (Enem–2022) Um robô, que tem um imã em sua base, se desloca sobre a superfície externa de um cubo metálico, ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces.

Ele inicia seu deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da seguinte, converte à direita e continua sua movimentação, sempre alternado entre conversões à esquerda e a à direita quando alcança o centro de uma face. O robô só termina sua movimentação quando retorna ao ponto P. A figura apresenta deslocamentos iniciais desse robô.

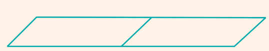


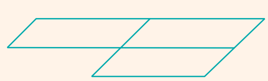
A projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é:

A) 

B) 

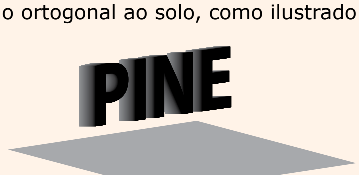
C) 

D) 

E) 

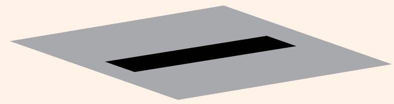
04. (Enem–2019) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.

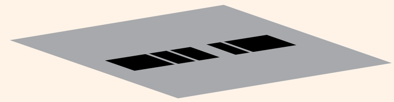
Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

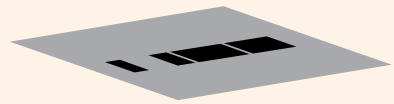


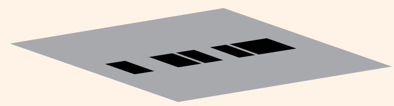
Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo.

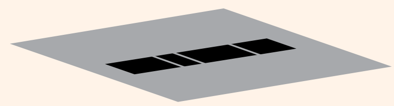
A sombra projetada no solo é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. F F V F
- 03. A
- 04. B
- 05. C
- 06. C
- 07. E
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. C
- 04. D
- 05. D
- 06. B
- 07. D
- 08. E
- 09. AD = $10\sqrt{29}$ cm
- 10. B
- 11. A
- 12. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. E
- 03. A
- 04. E

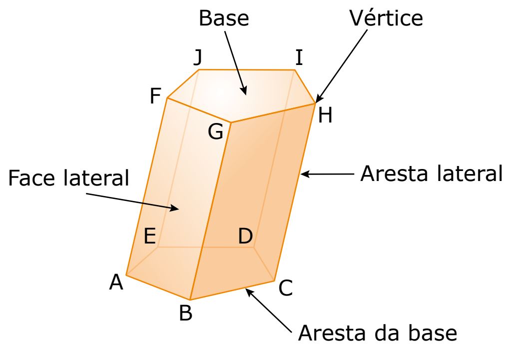
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Prismas

DEFINIÇÃO

Prisma é todo poliedro convexo construído tomando-se dois polígonos congruentes situados em planos paralelos e unindo-se os pontos desses polígonos através de segmentos paralelos.

Na figura a seguir, temos um prisma cujas bases são os pentágonos congruentes ABCDE e FGHIJ. Os paralelogramos que unem as duas bases do prisma são denominados faces laterais.



Podemos, então, identificar no prisma mostrado os seguintes elementos:

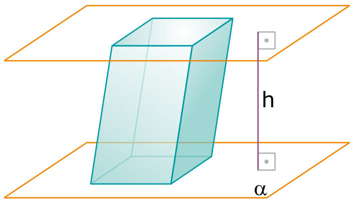
i) Bases: faces ABCDE e FGHIJ

ii) Arestas da base: (AB, BC, CD, DE, EA) e (FG, GH, HI, IJ, JF)

iii) Faces laterais: paralelogramos BCHG, CDIH, DEJI, EAFJ, ABGF

iv) Arestas laterais: CH, DI, EJ, AF, BG

A altura de um prisma é a distância **h** entre os planos das bases.

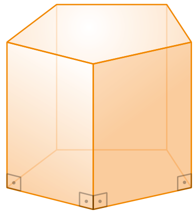


NOMENCLATURA

Um prisma será chamado triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

CLASSIFICAÇÃO

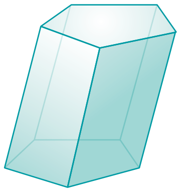
Um prisma é classificado como reto quando as suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Em outras palavras, num prisma reto as faces laterais são retângulos.



Prisma pentagonal reto

Observação: O prisma reto que possui as bases definidas como polígonos regulares é chamado de prisma regular.

Um prisma é classificado como oblíquo quando as suas arestas laterais são oblíquas em relação às bases. Em outras palavras, num prisma oblíquo as faces laterais são paralelogramos não retângulos.

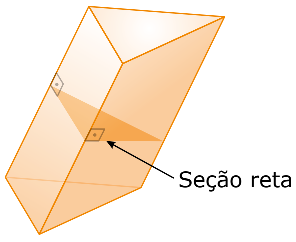


Prisma pentagonal oblíquo

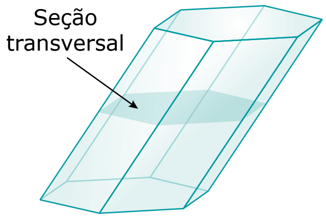
SEÇÕES

Seção (ou secção) de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a seção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Seção reta ou seção normal é uma seção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



Seção transversal é uma seção cujo plano é paralelo às bases.



ÁREAS

Área lateral (A_ℓ) é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_T) é a soma da área lateral com as áreas das bases (A_B).

$$\boxed{A_T = A_\ell + 2.A_B}$$

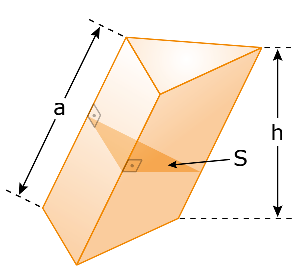
VOLUME

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

$$\boxed{V = A_B.h}$$

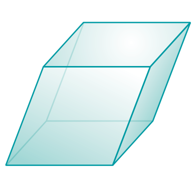
Pode-se demonstrar também que o volume de um prisma é o produto da área da seção reta pela medida da aresta.

$$\boxed{V = S.a}$$



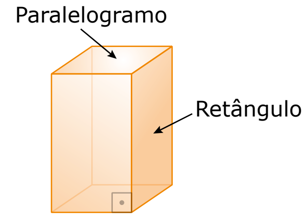
PARALELEPÍPEDO

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.



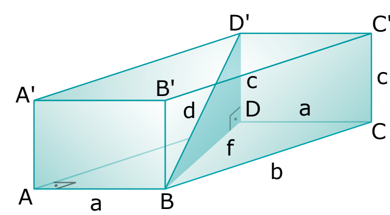
Paralelepípedo oblíquo

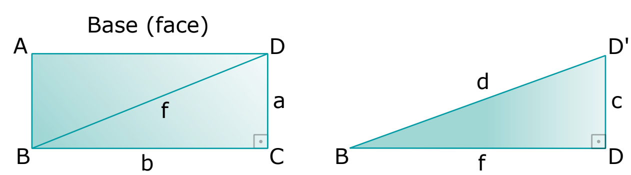
Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) e de dois paralelogramos (bases).



Paralelepípedo (reto)

Paralelepípedo reto retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.





Cálculo da diagonal **d**

No triângulo BCD, temos $f^2 = a^2 + b^2$.

No triângulo BDD', temos $d^2 = f^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cálculo da área total **S**

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles (ABCD, A'B'C'D') com dimensões **a** e **b**, outros dois (ABB'A', DCC'D') com dimensões **a** e **c** e os últimos dois (ADD'A', BCC'B') com dimensões **b** e **c**.

Logo:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$$

$$\boxed{S = 2(ab + ac + bc)}$$

Cálculo do volume **V**

O volume de um prisma, como sabemos, é o produto da área da base pela altura, ou seja, $V = A_B.h$.

Assim, para o paralelepípedo retângulo, temos:

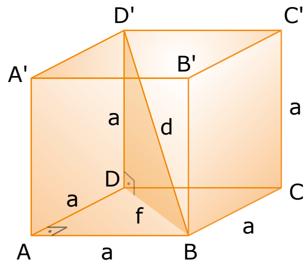
$$A_B = a.b \quad e \quad h = c$$

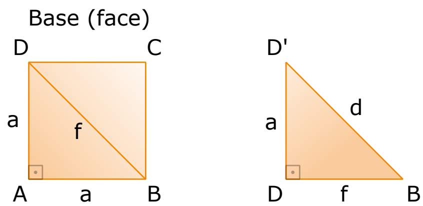
Então:

$$\boxed{V = a.b.c}$$

CUBO

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.





Dado um cubo de aresta **a**, calculemos sua diagonal **d**, sua área total **S** e seu volume **V**.

Cálculo da diagonal d

Inicialmente, calculemos a medida **f** de uma diagonal de face.

No triângulo BAD, temos:

$$f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$$

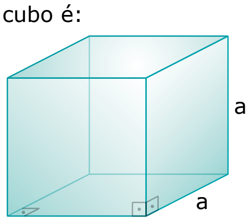
No triângulo BDD', temos:

$$d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{d = a\sqrt{3}}$$

Cálculo da área total S

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado **a**. A área de cada um é a^2. Então, a área total do cubo é:



$$\boxed{S = 6a^2}$$

Cálculo do volume V

No cubo de aresta **a**, temos:

$$A_B = a.a \text{ e } h = a$$

Então:

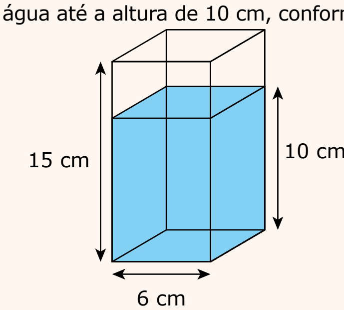
$$\boxed{V = a^3}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Famema-SP–2020) Um recipiente transparente possui o formato de um prisma reto de altura 15 cm e base quadrada, cujo lado mede 6 cm.

Esse recipiente está sobre uma mesa com tampo horizontal e contém água até a altura de 10 cm, conforme a figura.



Fora de escala

Se o recipiente for virado e apoiado na mesa sobre uma de suas faces não quadradas, a altura da água dentro dele passará a ser de

A) 4 cm.
B) 3,5 cm.
C) 3 cm.
D) 2,5 cm.
E) 2 cm.

02. (UFG-MG) A caixa-d'água do edifício comercial Sombras do Ocaso tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões internas são 3,20 m, 2,00 m e 1,25 m. A capacidade dessa caixa, em litros, é

A) 800.
B) 8 000.
C) 8.
D) 80.

03. CJLF (UFPR) A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores a seguir mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

A) 37 500 litros.
B) 375 000 litros.
C) 3 750 000 litros.
D) 37 500 000 litros.
E) 375 000 000 litros.

04. C17W (UPE–2022) Um tanque de água em formato de paralelepípedo retangular reto, que possui 4 m de comprimento, 1,5 m de largura e 3 m de profundidade, contém 12 mil litros. Após três dias de uso intenso, o volume de água caiu para 9 mil litros.

É correto afirmar que, nesses três dias de uso, a altura do nível da água sofreu uma redução de:

A) 48 cm
B) 50 cm
C) 53 cm
D) 55 cm
E) 60 cm

05. Y28I (IFPE) Na residência de Laércio, há uma caixa-d'água vazia com capacidade de 5 metros cúbicos. Ele vai encher a caixa trazendo água de um poço próximo, em uma lata cuja base é um quadrado de lado 40 cm e cuja altura é 50 cm. Qual é o número mínimo de vezes que Laércio precisará ir ao poço até encher integralmente a caixa-d'água?

A) 67
B) 52
C) 55
D) 63
E) 56

MATEMÁTICA

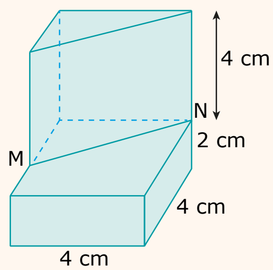
06. CYV2

(IFCE) Foram construídos dois cubos de madeira. Um deles tem 343 cm³ de volume e o outro tem aresta medindo 2 cm a mais que o primeiro. A área total do maior cubo, em centímetros quadrados é

A) 538.
B) 486.
C) 678.
D) 729.
E) 4 374.

07. H2X0

(UPE) O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm de altura a um paralelepípedo reto de dimensões 4 cm, 4 cm e 2 cm, conforme a figura.

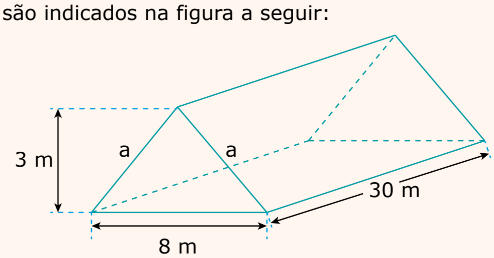


Se **M** é o ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido? Adote $\sqrt{5} \cong 2,2$.

A) 99,6 cm².
B) 103,6 cm².
C) 105,6 cm².
D) 107,6 cm².
E) 109,6 cm².

08. C1KN

(PUC RS) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer-se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura a seguir:



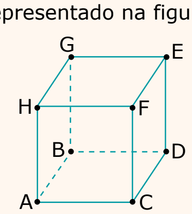
A quantidade de telhas de tamanho 15 cm por 20 cm necessárias para fazer esse telhado é:

A) 10^4
B) 10^5
C) $5 \cdot 10^3$
D) $5 \cdot 10^4$
E) $25 \cdot 10^4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Uma partícula parte do ponto **A** e chega ao ponto **H** percorrendo a poligonal ABCDEFGH no cubo de aresta unitária, representado na figura a seguir.



A distância percorrida pela partícula é:

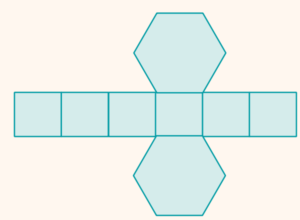
A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 7
D) $5 + 2\sqrt{2}$
E) $5 + 2\sqrt{3}$

02. (UECE–2022) Uma caixa d'água com formato de um cubo cuja medida da aresta é 1 metro está completamente cheia ao meio-dia de quarta-feira. A partir de então, por uma tubulação instalada na base inferior da caixa, escoa água a uma vazão constante. Decorridas quatro horas de escoamento, sem reabastecimento simultâneo, a caixa ainda contém 840 litros d'água. Assim, é correto afirmar que a caixa estará vazia no dia seguinte às

A) 11 horas.
B) 2 horas.
C) 14 horas.
D) 13 horas.

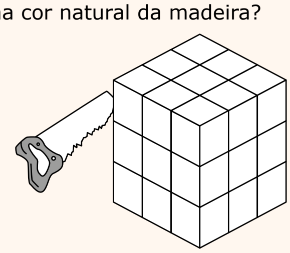
03. IHQ9

(UFRGS-RS) Na figura a seguir, está representada a planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base. Se a altura do prisma é 2, seu volume é:



A) $4\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{3}$

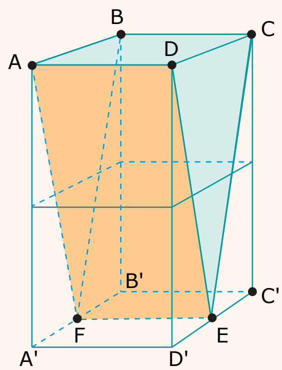
04. (CMRJ–2020) Um cubo de madeira foi pintado de branco em toda a sua superfície. Após a secagem da pintura, ele foi serrado em 27 cubos menores iguais. As faces desses cubos, que não foram pintadas, estão na cor natural da madeira. Considerando os 27 cubos menores, quantas faces estão na cor natural da madeira?



A) 54
B) 72
C) 102
D) 108
E) 162

05. (UERJ) Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios **F** e **E** das arestas A'B' e C'D', respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir:



O volume do sólido ABCDEF, em cm^3, é igual a

A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.

06. LUGW

(PUC Rio) O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?

A) Não se altera.

B) Aumenta aproximadamente 3%.

C) Diminui aproximadamente 3%.

D) Aumenta aproximadamente 8%.

E) Diminui aproximadamente 8%.

07. (UFTM-MG) Sem perda do volume original, um ourives pretende transformar um cubo de ouro de 1 cm^3 em uma placa na forma de um paralelepípedo reto-retângulo. Adotando a medida da aresta do cubo como largura da placa e 50% da medida da aresta do cubo como altura da placa, a medida, em centímetros, do comprimento dessa placa resultará em

A) 1,2. C) 1,8. E) 2,2.

B) 1,5. D) 2,0.

08. 2F66

(UERJ–2020) Em uma fábrica, uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, com 25 cm de comprimento, 10 cm de largura e 8 cm de altura, é preenchida com pequenos cubos de 0,5 cm^3. Inicialmente, apenas um cubo é colocado na caixa. Em seguida, a cada minuto, duplica-se o número de cubos dentro dela. Considere a tabela:

x	0,30	0,48	0,60	0,70
10^x	2	3	4	5

O valor do tempo **t**, em minutos, necessário para a caixa ser totalmente preenchida, é igual a

A) 12. B) 14. C) 16. D) 18.

09. C6QW

(IFSul) Um tanque vazio, com formato de paralelepípedo reto retângulo, tem comprimento de 8 metros, largura de 3 metros e altura 1,5 metros. Esse tanque é preenchido com óleo a uma vazão de 1 000 litros a cada 15 minutos. Nesse sentido, após duas horas do início do preenchimento, a altura de óleo no interior do tanque atingirá, aproximadamente,

A) 24 cm. C) 1,05 cm.

B) 33 cm. D) 1,15 cm.

10. KTIH

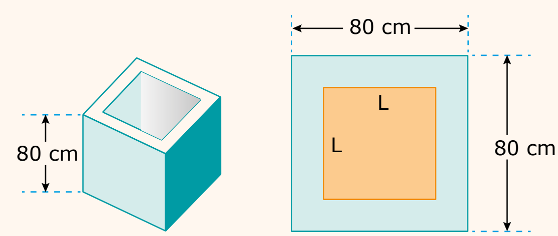
(UERJ) As figuras a seguir mostram dois pacotes de café em pó que têm a forma de paralelepípedos retângulos semelhantes.

Se o volume do pacote maior é o dobro do volume do menor, a razão entre a medida da área total do maior pacote e a do menor é igual a:

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{4}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{8}$

11. 2318

(UEL-PR) Um engenheiro deseja projetar um bloco vazado cujo orifício sirva para encaixar um pilar. O bloco, por motivos estruturais, deve ter a forma de um cubo de lado igual a 80 cm, e o orifício deve ter a forma de um prisma reto de base quadrada e altura igual a 80 cm, conforme as figuras seguintes. É exigido que o volume do bloco seja igual ao volume do orifício.



Bloco vazado Vista aérea

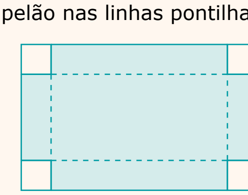
É correto afirmar que o valor **L** do lado da base quadrada do prisma reto corresponde a:

A) $20\sqrt{2}$ cm D) $60\sqrt{2}$ cm

B) $40\sqrt{2}$ cm E) $80\sqrt{2}$ cm

C) $50\sqrt{2}$ cm

12. (PUC Rio) De uma folha de papelão de lados de medidas 23 e 14, foram retirados, dos quatro cantos, quadrados de lado de medida 3 para construir uma caixa (sem tampa) dobrando o papelão nas linhas pontilhadas.



A) Determine o perímetro da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

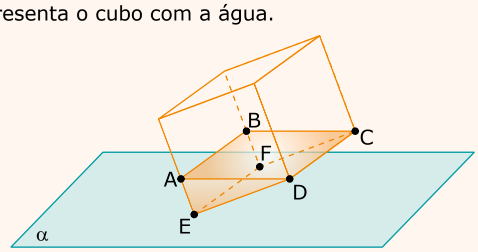
B) Determine a área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

C) Determine o volume da caixa formada.

13. RJIG (UFOP-MG) Maíra adora brincar na piscina da casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de comprimento. A parte rasa tem 0,5 m de profundidade, e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é

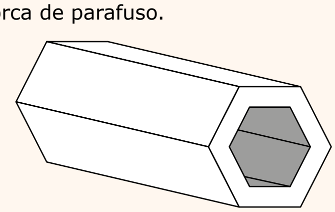
A) 6 000.
B) 8 000.
C) 9 000.
D) 10 000.

14. L3ØI (UERJ) Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura a seguir representa o cubo com a água.



Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm². Determine o volume total, em dm³, de água contida nesse cubo.

15. (UERN) A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.



Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm; que o comprimento do prisma é igual a 35 cm; e, que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm³,

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$)

A) 1 064.
B) 1 785.
C) 2 127.
D) 2 499.

SEÇÃO ENEM

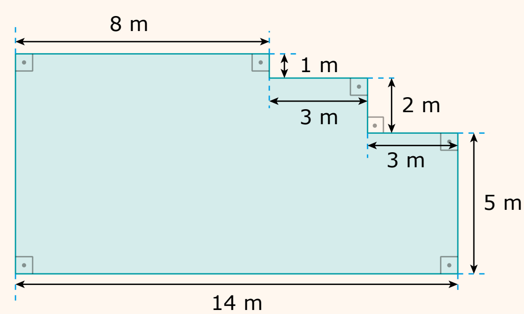
01. (Enem–2022) Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com capacidade para 90 000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento. As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:

- Projeto I: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;
- Projeto II: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
- Projeto III: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
- Projeto IV: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
- Projeto V: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

02. (Enem–2019) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m³, 5 m³ e 10 m³ de concreto.

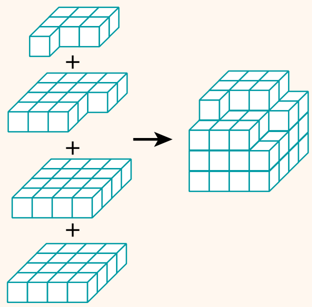


Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

A) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m³.
B) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m³.
C) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m³.
D) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m³.
E) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m³.

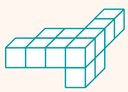
03. (Enem) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

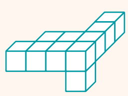
Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

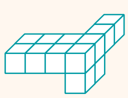


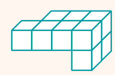
Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.

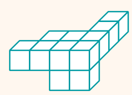
O formato da peça capaz de completar o cubo 4 × 4 × 4 é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

04. (Enem) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na Ilha de Gotland, na Suécia, conforme figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

Figura 1

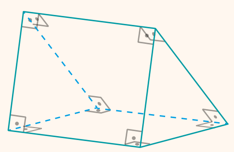


Figura 2

ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (Adaptação).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na figura 2 é

A) tetraedro.
B) pirâmide retangular.
C) tronco de pirâmide retangular.
D) prisma quadrangular reto.
E) prisma triangular reto.

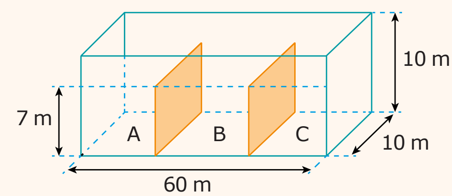
05. (Enem) O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a "reflexão" da água (o movimento) contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

Disponível em: http://desporto.publico.pt. Acesso em: 6 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de

A) 20%.
B) 25%.
C) 47%.
D) 50%.
E) 88%.

06. (Enem) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, **A**, **B** e **C**, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento **C**.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de:

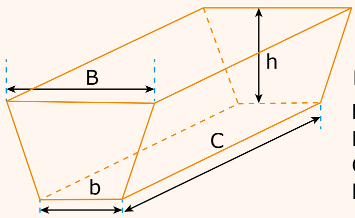
A) $1{,}4 \cdot 10^3$ m³
B) $1{,}8 \cdot 10^3$ m³
C) $2{,}0 \cdot 10^3$ m³
D) $3{,}2 \cdot 10^3$ m³
E) $6{,}0 \cdot 10^3$ m³

07. (Enem) Uma fábrica que trabalha com matéria-prima de fibra de vidro possui diversos modelos e tamanhos de caixa-d'água. Um desses modelos é um prisma reto com base quadrada. Com o objetivo de modificar a capacidade de armazenamento de água, está sendo construído um novo modelo, com as medidas das arestas da base duplicadas, sem a alteração da altura, mantendo a mesma forma.

Em relação ao antigo modelo, o volume do novo modelo é

A) oito vezes maior.
B) quatro vezes maior.
C) duas vezes maior.
D) a metade.
E) a quarta parte.

08. (Enem) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

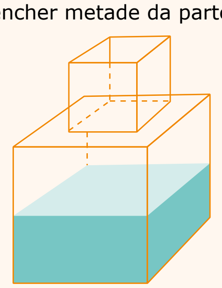
Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA. *Gado de corte*.
Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.
Acesso em: 1 ago. 2012 (Adaptação).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

A) 110.
B) 125.
C) 130.
D) 220.
E) 260.

09. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

A) 8
B) 10
C) 16
D) 18
E) 24

10. (Enem) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Luis Garcia / Creative Commons

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

A) menor que 100 m².
B) entre 100 m² e 300 m².
C) entre 300 m² e 500 m².
D) entre 500 m² e 700 m².
E) maior que 700 m².

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. B
03. C
04. B
05. D
06. B
07. C
08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. D
03. E
04. D
05. C
06. C
07. D
08. A
09. B
10. B
11. B
12.
A) 74 u.c.
B) 286 u.a.
C) 408 u.v.
13. C
14. 128 dm³
15. D

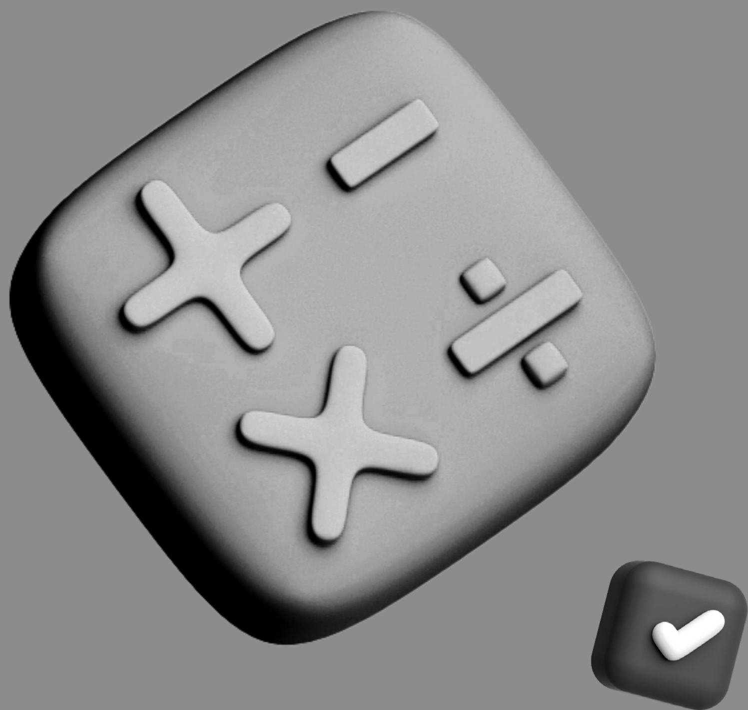
Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. C
03. A
04. E
05. E
06. D
07. B
08. A
09. B
10. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Bernoulli
Sistema de Ensino



MATEMÁTICA

SUMÁRIO

FRENTE A

FRENTE B

FRENTE C

MATEMÁTICA

FRENTE **A**

Caderno Extra

MÓDULO 12

FUNÇÃO MODULAR

01. (PUC Minas) Considere os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 1| < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 3\}$.

O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

A) 2.
B) 4.
C) 8.
D) 9.
E) 1.

02. (PUC Rio) Assinale a afirmativa correta.

A inequação $-|x| < x$

A) nunca é satisfeita.
B) é satisfeita em $x = 0$.
C) é satisfeita para **x** negativo.
D) é satisfeita para **x** positivo.
E) é sempre satisfeita.

03. (UFG-GO) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |1 - |x||$. Assim, marque V ou F.

( ) $f(-4) = 5$
( ) O valor mínimo de **f** é zero.
( ) **f** é crescente para **x** no intervalo [0, 1].
( ) A equação $f(x) = 1$ possui três soluções reais distintas.

04. (UFU-MG) Considere os números reais **x** que satisfazem a equação $|x|^2 + |x| - 12 = 0$. Pode-se afirmar que

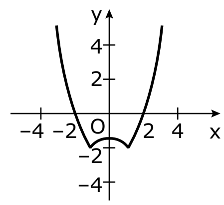
A) existe um único número real **x** que satisfaz a equação.
B) o produto desses números reais **x** é igual a –9.
C) a soma desses números reais **x** é igual a 1.
D) o produto desses números reais **x** é igual a 12^2.

05. (ITA-SP) Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto:

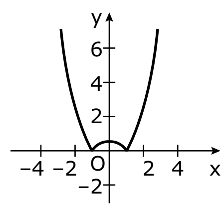
A) [0, 1]
B) [–5, 6]
C) $[-5, 0] \cup [1, +\infty)$
D) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$
E) $[-5, 0] \cup [1, 6]$

06. (PUC RS) Considerando a função **f** definida por $f(x) = x^2 - 1$, a representação gráfica da função **g** dada por $g(x) = |-f(x)| - 2$ é:

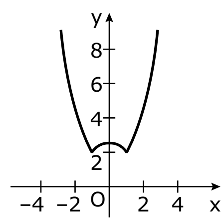
A)



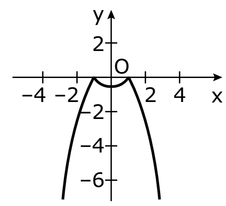
B)



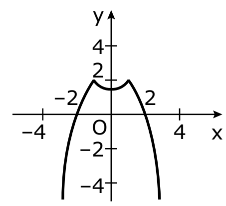
C)



D)



E)



07. (PUC Rio) O conjunto dos números reais **x**, tais que $|x - 2| < |x - 5|$, é

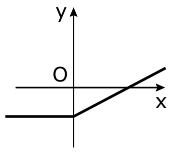
A) vazio.
B) finito.
C) o conjunto de todos os números reais menores que $\frac{7}{2}$.
D) o conjunto de todos os números reais entre 2 e 5.
E) o conjunto de todos os números reais.

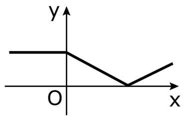
08. (FGV-SP) Relativamente à função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, é correto afirmar que

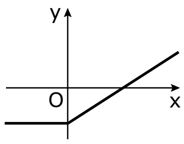
A) o gráfico de **f** é a reunião de duas semirretas.
B) o conjunto imagem de **f** é o intervalo $[1, +\infty[$.
C) **f** é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.
D) **f** é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.
E) o valor mínimo de **f** é 0.

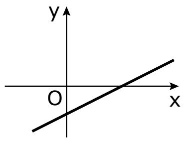
2022_6VEXTRA_V4_MAT_BOOK.indb 3 24/02/2022 15:50:40

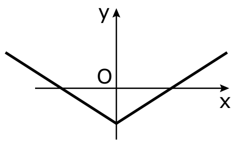
09. (Mackenzie-SP) Na figura, temos o esboço do gráfico de uma função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. O melhor esboço gráfico da função $g(x) = f(|x|)$ é:

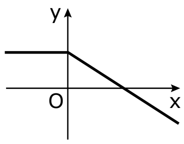


A) 

D) 

B) 

E) 

C) 

10. (UFTM-MG) A função $f(x) = |x + 3| - |x + 1|$ tem valor maior que zero, para **x** real obedecendo à condição:

A) $x < -3$
C) $x > 3$
E) $x > -2$
B) $-3 < x < 3$
D) $x < 2$

11. (UFU-MG) A soma das soluções da equação $|x^2 + 3x + 2| - |6x| = 0$ é igual a

A) 3.
B) −6.
C) −3.
D) 6.

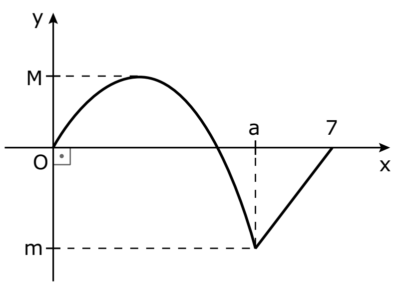
12. (FEI-SP) Se $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\left|1 - \frac{x-1}{2}\right| \leq 4$, então:

A) $x \geq 15$
C) $x \leq 10$
E) $-7 \leq x < 6$
B) $-5 \leq x \leq 11$
D) $12 < x \leq 20$

13. (UFOP-MG) Considere a função **f** definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x, \text{ se } 0 \leq x \leq a \\ 5x - 35, \text{ se } a \leq x \leq 7 \end{cases}$$

cujo domínio é o intervalo fechado [0, 7]. **M** e **m** são, respectivamente, o maior e o menor valor de f(x), como mostra o gráfico.

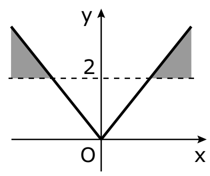


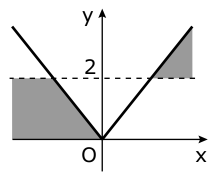
O valor de M − m é

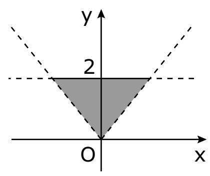
A) −18.
B) 18.
C) −2.
D) 2.

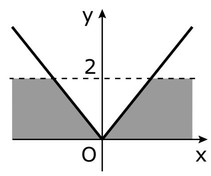
14. Considere o sistema $\begin{cases} y > |x| \\ y \leq 2 \end{cases}$.

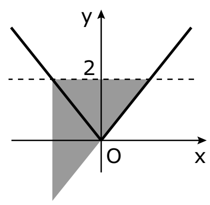
A região do plano que melhor representa a solução do sistema é:

A) 

D) 

B) 

E) 

C) 

15. (ITA-SP) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, podemos afirmar que

A) a solução pertence ao intervalo fechado [1, 2].
B) a solução pertence ao intervalo fechado [−2, −1].
C) a solução pertence ao intervalo aberto (−1, 1).
D) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.
E) a equação não tem solução.

GABARITO

01. A
02. D
03. F V F V
04. B
05. E
06. A
07. C
08. B
09. E
10. E
11. B
12. B
13. B
14. B
15. E

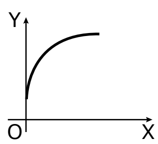
MÓDULO 13

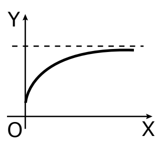
FUNÇÃO EXPONENCIAL

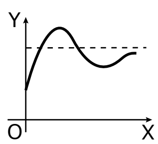
01. (UFLA-MG) A tabela a seguir fornece os dados simulados do crescimento de uma árvore. A variável **X** é o tempo em anos, e **Y**, a altura em dm.

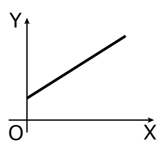
X	Y
0	15,00
2	20,70
4	24,96
6	27,51
8	28,83
10	29,46
12	29,76
14	29,89
16	29,95
18	29,98
20	29,99

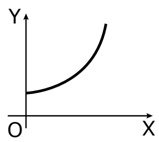
O esboço do gráfico que melhor representa os dados da tabela é:

A) 

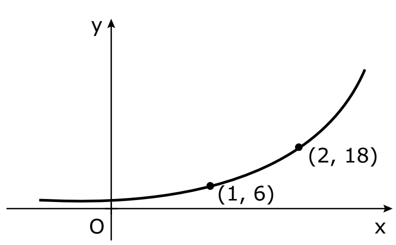
B) 

C) 

D) 

E) 

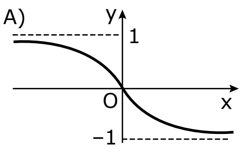
02. (PUC Minas) O gráfico representa a função $y = m.a^x$. Nessas condições, o valor de a^m é

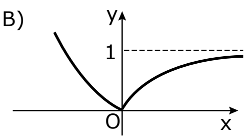


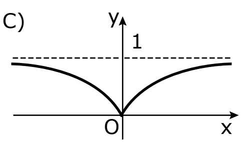
A) 6.
B) 9.
C) 12.
D) 18.
E) 27.

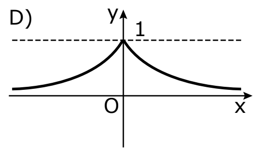
03. (FUVEST-SP) Das alternativas a seguir, a que melhor corresponde ao gráfico da seguinte função é:

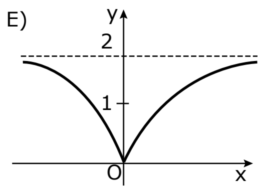
$$f(x) = 1 - 2^{-|x|}$$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

04. (Mackenzie-SP) Um aparelho celular tem seu preço **y** desvalorizado exponencialmente em função do tempo (em meses) **t**, representado pela equação $y = p.q^t$, com **p** e **q** constantes positivas. Se, na compra, o celular custou R$ 500,00 e, após 4 meses, o seu valor é $\frac{1}{5}$ do preço pago, 8 meses após a compra, o seu valor será

A) R$ 25,00.
B) R$ 24,00.
C) R$ 22,00.
D) R$ 28,00.
E) R$ 20,00.

05. (PUC Minas) O valor de certo tipo de automóvel decresce com o passar do tempo de acordo com a função $V(t) = A.2^{\frac{-2t}{3}}$, sendo **t** o tempo medido em anos, **V** o valor do carro no instante **t** e **A** o preço inicial do veículo. O tempo necessário para que esse automóvel passe a custar $\frac{1}{8}$ de seu valor inicial, em anos, é:

A) 3,0.
B) 3,5.
C) 4,0.
D) 4,5.

06. (Mackenzie-SP) O menor valor assumido pela função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 - x^2}$ é

A) 8.
B) 4.
C) $\frac{1}{2}$.
D) $\frac{1}{4}$.
E) $\frac{1}{8}$.

MATEMÁTICA

07. (PUC-Campinas-SP) Para a concretização da melhoria da qualidade dos cursos-d'água urbanos, obras de ampliação da rede coletora e de construção de estações de tratamento estão sendo realizadas de modo que, após **t** anos, a quantidade de poluentes seja dada por $Q = Q_0.2^{-kt}$, em que **k** é uma constante e $\mathbf{Q_0}$, a quantidade de poluentes observada inicialmente. Se 36% da quantidade de poluentes foram removidos ao fim do segundo ano, então a porcentagem da poluição restante ao fim de seis anos, em relação a $\mathbf{Q_0}$, será, aproximadamente,

A) 33%.

B) 25%.

C) 20%.

D) 16%.

E) 12%.

08. (UEPG-PR) Sobre as funções mostradas a seguir:

$f(x) = 2^{x^2 - 4x} - \frac{1}{8}$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e $h(x) = x - 2$.

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

( ) f(x) e g(x) têm as mesmas raízes.

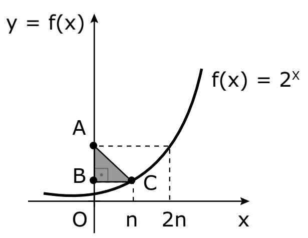
( ) g(x) é crescente para x > 2.

( ) h[g(−1)] = 6.

( ) g(x) > 0 para x < 1 ou x > 3.

( ) h(x) é crescente somente para x > 2.

09. (UFSCar-SP) Se a área do triângulo retângulo ABC, indicado na figura, é igual a 3n, conclui-se que f(n) é igual a:



A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) 3

D) $3\sqrt{2}$

E) 4

10. (ITA-SP) Sejam **f** e **g** duas funções definidas por:

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3.\text{sen}\,x - 1} \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3.\text{sen}^2 x - 1}, x \in \mathbb{R}.$$

A soma do valor mínimo de **f** com o valor mínimo de **g** é igual a

A) 0.

B) $-\frac{1}{4}$.

C) $\frac{1}{4}$.

D) $\frac{1}{2}$.

E) 1.

11. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por:

$$T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$$

Na equação, T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante **t**, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

A) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

B) Determine o valor de **t** para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\frac{2}{3}$ °C superior à temperatura ambiente.

12. (ITA-SP) Considere a função:

$$f: \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2x}} - \left(3^{2x+5}\right)^{\frac{1}{x}} + 1$$

A soma de todos os valores de **x** para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 4.

E) 6.

13. (Unesp) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = \alpha.10^{xt}$, em que N(t) é o número de bactérias em **t** horas, $t \geq 0$ e α e **x** são constantes estritamente positivas. Se, após 2 horas, o número inicial de bactérias, N(0), é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será:

A) 4α

B) $2\alpha\sqrt{2}$

C) 6α

D) 8α

E) $8\alpha\sqrt{2}$

14. (UnB-DF) Em um experimento com uma colônia de bactérias, observou-se que havia 5 000 bactérias vinte minutos após o início do experimento e, dez minutos mais tarde, havia 8 500 bactérias. Suponha que a população da colônia cresce exponencialmente, de acordo com a função $P(t) = P_0e^{xt}$, em que P_0 é a população inicial, **x** é uma constante positiva e P(t) é a população **t** minutos após o início do experimento. Calcule o valor de $\frac{P_0}{100}$, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

GABARITO

01. B
02. B
03. C
04. E
05. D
06. D
07. B
08. V V V V F
09. C
10. D
11. A) $\alpha = 54$ e $\beta = -\dfrac{1}{90}$
    B) 360 minutos
12. C
13. D
14. 17

MÓDULO 14

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

01. (UFRGS-RS) Para valores reais de **x**, $3^x < 2^x$ se, e somente se:

A) $x < 0$
B) $0 < x < 1$
C) $x < 1$
D) $x < -1$
E) $2 < x < 3$

02. (FGV-SP) Assinale a afirmação correta.

A) $(0{,}57)^2 > (0{,}57)^3$
B) $(0{,}57)^7 < (0{,}57)^8$
C) $(0{,}57)^4 > (0{,}57)^3$
D) $(0{,}57)^{0{,}57} > (0{,}57)^{0{,}50}$
E) $(0{,}57)^{-2} < 1$

03. (UFSM-RS) Sabendo que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} = 27$, o valor de $12 - x^2$ é

A) −3.
B) 2.
C) 3.
D) 8.
E) 16.

04. (Unesp) Dada a inequação $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\dfrac{3}{9}\right)^{x-3}$, o conjunto verdade **V**, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por:

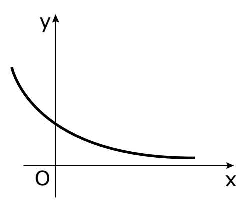
A) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$
B) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ e } x \geq 2\}$
C) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$
D) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$
E) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

05. (ITA-SP) Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de **x**, tais que:

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

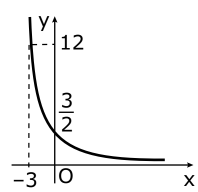
A) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
B) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
C) $]0, 2[$
D) $]-\infty, 0[$
E) $]2, +\infty[$

06. (UFMG) Observe a figura a seguir. Nessa figura, está representado o gráfico da função $f(x) = b^x$, $b > 0$. Se $f(1) + f(-1) = \dfrac{10}{3}$, a única afirmativa verdadeira sobre o valor de **b** é:



A) $0 < b < \dfrac{1}{9}$
B) $\dfrac{2}{9} < b < \dfrac{4}{9}$
C) $\dfrac{8}{9} < b < 1$
D) $1 < b < 4$
E) $4 < b < 9$

07. (UFMG) Observe a figura a seguir:



MATEMÁTICA

Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = ka^x$, sendo **k** e **a** constantes positivas. O valor de f(2) é:

A) $\frac{3}{8}$.

B) $\frac{1}{2}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) 1.

08. (UNIRIO-RJ) É dada a função $f(x) = a3^{bx}$, em que **a** e **b** são constantes. Sabendo que f(0) = 5 e f(1) = 45, obtemos para $f\left(\frac{1}{2}\right)$ o seguinte valor:

A) 0

B) 9

C) $15\sqrt{3}$

D) 15

E) 40

09. (UFES) Dada uma constante real **a**, a equação $2^x = a3^x$, considerada no conjunto dos números reais,

A) tem solução positiva se a > 1.

B) tem solução negativa se a < 0.

C) tem solução positiva se 0 < a < 1.

D) tem solução negativa se 0 < a < 1.

E) só tem solução se a = 1.

10. (UFOP-MG) Com relação à equação exponencial $9^{y^2} - 4\left(3^{1+y^2}\right) + 27 = 0$, pode-se afirmar que ela admite

A) duas raízes inteiras e positivas.

B) duas raízes irracionais e positivas.

C) duas raízes racionais e duas irracionais.

D) duas raízes inteiras e positivas e duas raízes irracionais e negativas.

11. (UFC-CE) O número real que é raiz da equação $5^{x+2} + 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 780$ é

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

12. (Mackenzie-SP) Se $2^x \cdot 3^{y-1} = \frac{18^y}{2}$, então xy é

A) 0.

B) −1.

C) 2.

D) −3.

E) 1.

13. (ITA-SP) A soma das raízes reais positivas da equação $4^a - 5 \cdot 2^a + 4 = 0$, sendo $a = x^2$, vale:

A) 2

B) 5

C) $\sqrt{2}$

D) 1

E) $\sqrt{3}$

14. (Unicamp-SP) Considere a equação $2^x + m \cdot 2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, em que **m** é um número real.

A) Resolva essa equação para m = 1.

B) Encontre todos os valores de **m** para os quais a equação tem uma única raiz real.

GABARITO

01. A

02. A

03. D

04. A

05. C

06. B

07. A

08. D

09. C

10. C

11. B

12. C

13. C

14. A) x = 1

B) m = 1 ou m ≤ 0

MATEMÁTICA

FRENTE

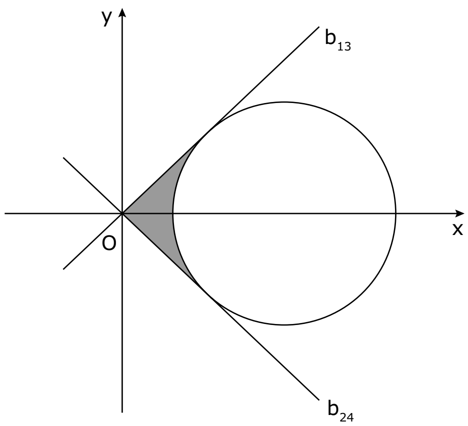
B

Caderno Extra

MÓDULO 12

ÁREAS DE CÍRCULO E SUAS PARTES

01. (CEFET-MG) As bissetrizes dos quadrantes ímpares b_{13} e pares b_{24} tangenciam a circunferência dada pela equação $(x - 4)^2 + y^2 = 8$, como mostra a figura.



A área hachurada é:

A) $2(\pi - 3)$

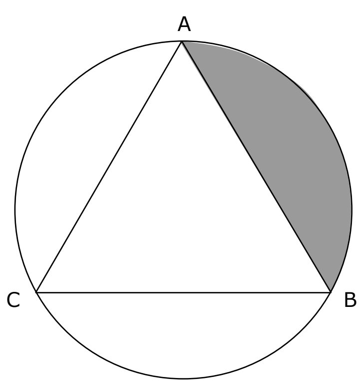
B) $2(2\pi - 3)$

C) $2(5 - \pi)$

D) $2(4 - \pi)$

E) $2(\pi - 2)$

02. (UFMG) Nesta figura, o triângulo equilátero ABC está inscrito numa circunferência de raio 2.



Então, a área da região hachurada é:

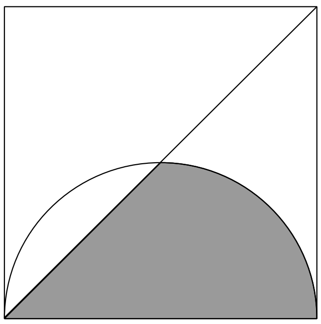
A) $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

B) $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

C) $\dfrac{3\pi - 4\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{3\pi - 2\sqrt{3}}{3}$

03. (FUVEST-SP) Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então, a área da região hachurada é:



A) $\dfrac{\pi}{2} + 2$

B) $\pi + 2$

C) $\pi + 3$

D) $\pi + 4$

E) $2\pi + 1$

04. (PUC Rio) Consideremos o círculo **C** de raio **r** e um quadrado **Q** circunscrito a **C**. A área interior a **Q** e exterior a **C** se subdivide em quatro áreas idênticas, cada uma valendo:

A) $(4 - \pi)r^2$

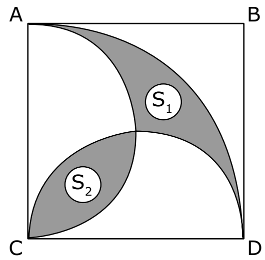
B) $\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)r^2$

C) $\left(3 - \dfrac{\pi}{2}\right)r^2$

D) $\left(\dfrac{\pi}{3} - 1\right)r^2$

E) $\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)r^2$

05. (UFOP-MG) Sendo ABCD um quadrado, podemos afirmar que:



A) $S_1 = 4S_2$

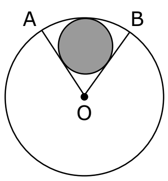
B) $S_1 = \frac{3}{2}S_2$

C) $S_1 = 2S_2$

D) $S_1 = S_2$

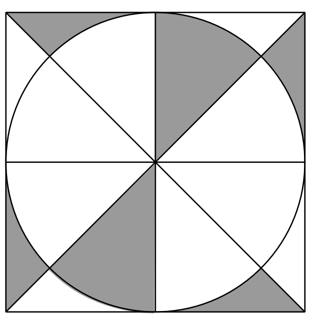
E) Nenhuma das respostas anteriores.

06. (PUCPR) Na circunferência de centro **O** e raio 6, os raios OA e OB formam um ângulo de 60°. Calcule a área do círculo tangente a OA e OB e à circunferência de centro **O**.



A) 3π
B) 6π
C) 9π
D) 8π
E) 4π

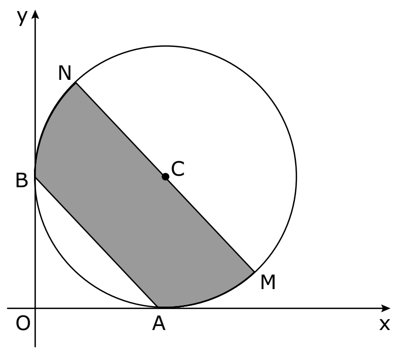
07. (Vunesp) Uma empresa tem o seguinte logotipo:



Se a medida do raio da circunferência inscrita no quadrado é 3 cm, a área, em cm², de toda a região pintada de preto é:

A) $9 - \frac{9\pi}{4}$
B) $18 - \frac{9\pi}{4}$
C) $18 - \frac{9\pi}{2}$
D) $36 - \frac{9\pi}{4}$
E) $36 - \frac{9\pi}{2}$

08. (FUVEST-SP) A circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ é tangente aos eixos coordenados **x** e **y** nos pontos **A** e **B**, conforme a figura. O segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento $\overline{AB}$ e contém o centro **C** da circunferência. É correto afirmar que a área da região hachurada vale:



A) $\pi - 2$

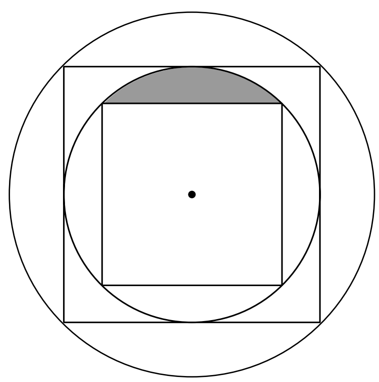
B) $\pi + 2$

C) $\pi + 4$

D) $\pi + 6$

E) $\pi + 8$

09. (UEL-PR) Qual é a área da região hachurada na figura a seguir, sabendo-se que o raio da circunferência maior é **r**?



A) $r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$

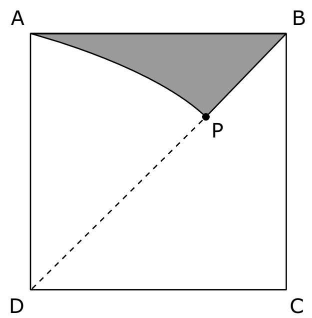
B) $r^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$

C) $r^2\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$

D) $r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

E) $r^2\left(\frac{\pi - 1}{2}\right)$

10. (Mackenzie-SP) Na figura, ABCD é um quadrado e o arco AP tem centro em **D**. Se a área assinalada mede $\frac{4-\pi}{8}$, o perímetro do quadrado é igual a:



A) 2

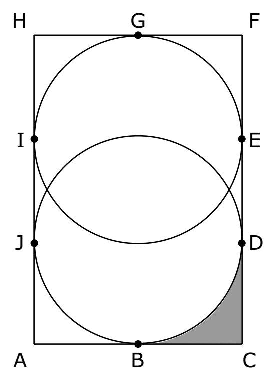
B) $4\sqrt{2}$

C) 4

D) $\sqrt{2}$

E) 8

11. (UFTM-MG) Na figura, **J**, **B**, **D**, **E**, **G** e **I** são pontos de tangência de duas circunferências de raio **r** em relação aos lados do retângulo ACFH.



Sabendo-se que a distância entre os centros das circunferências é **r**, a razão entre a área da parte sombreada da figura e a área do retângulo ACFH é:

A) $\frac{\pi - 2}{8}$

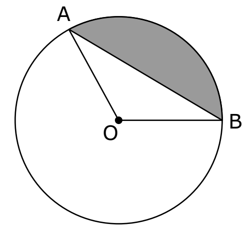
B) $\frac{2\pi - 1}{12}$

C) $\frac{\pi - 2}{24}$

D) $\frac{4 - \pi}{24}$

E) $\frac{\pi - 3}{12}$

12. (UFOP-MG) Os ângulos da base do triângulo isósceles AOB, da figura a seguir, medem 30°. Se o raio do círculo é 9 e o segmento AB mede $9\sqrt{3}$, a área hachurada é:



A) $27\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

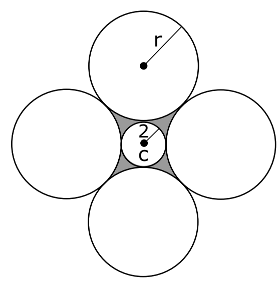
B) 81π

C) $\frac{81\sqrt{3} + \pi}{4}$

D) $\frac{27\pi}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{4}$

E) $27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{2}$

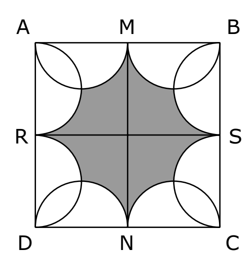
13. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio **r** e cada uma delas é tangente às outras duas e à circunferência interna **C**. Se o raio de **C** é igual a 2, determine:



A) O valor de **r**.

B) A área da região hachurada.

14. (UFMA) Calcule a área hachurada, sendo a medida do lado do quadrado igual a 8 m.



Os pontos **M**, **S**, **N** e **R** são os pontos médios dos lados AB, BC, CD, DA, respectivamente.

MATEMÁTICA

GABARITO

01. D
02. A
03. B
04. B
05. D
06. E
07. B
08. B
09. B
10. C
11. D
12. A
13. A) $r = 2\sqrt{2} + 2$
    B) $48 + 32\sqrt{2} - (16 + 8\sqrt{2})\pi$
14. $48 - 8\pi$

MÓDULO 13

SISTEMA CARTESIANO E PONTO

01. (UECE) Dois vértices de um quadrado estão nos pontos A(3, –4) e B(9, –4). A soma das abscissas dos outros dois vértices é

A) 15.
B) 12.
C) 13.
D) 14.

02. (PUC Rio) Sejam **A** e **B** os pontos (1, 1) e (5, 7) no plano. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

A) (3, 4)
B) (4, 6)
C) (–4, –6)
D) (1, 7)
E) (2, 3)

03. (UNIFEI-MG) Considere no plano cartesiano o triângulo ABC cujos vértices são A(x, 6), B(–1, 4) e C(5, 2). Para que esse triângulo seja isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, qual deve ser o valor de **x**?

A) –3
B) 0
C) $\frac{1}{3}$
D) 3

04. (PUC Rio) O ponto B(3, b) é equidistante dos pontos A(6, 0) e C(0, 6). Logo, o ponto **B** é:

A) (3, 1)
B) (3, 6)
C) (3, 3)
D) (3, 2)
E) (3, 0)

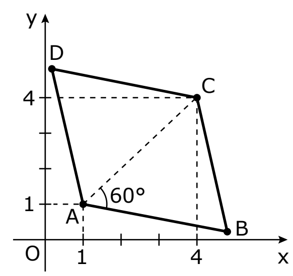
05. (Unesp) O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P(0, 0), Q(6, 0) e R(3, 5), é

A) equilátero.
B) isósceles, mas não equilátero.
C) escaleno.
D) retângulo.
E) obtusângulo.

06. (ITA-SP) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

A) (–b, –b)
B) (2b, –b)
C) (4b, –2b)
D) (3b, –2b)
E) (2b, –2b)

07. (UFAL) Na figura a seguir, tem-se o losango ABCD, com A(1, 1) e C(4, 4), e cuja diagonal $\overline{AC}$ forma ângulo de medida 60° com o lado $\overline{AB}$.



O perímetro desse losango é:

A) $3\sqrt{2}$
B) 6
C) $12\sqrt{2}$
D) $24\sqrt{2}$
E) 48

08. (PUC-Campinas-SP) Sabe-se que os pontos A(0, 0), B(1, 4) e C(3, 6) são vértices consecutivos do paralelogramo ABCD. Nessas condições, o comprimento de $\overline{BD}$ é:

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$
E) 5

09. (UFSCar-SP) Dados os pontos A(2, 0), B(2, 3) e C(1, 3), vértices de um triângulo, o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo é:

A) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

B) $\frac{10}{3}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

E) $\sqrt{10}$

GABARITO

01. B	04. C	07. C
02. A	05. B	08. D
03. D	06. C	09. D

MÓDULO 14

ESTUDO ANALÍTICO DA RETA

01. (Unit-SE) A distância do ponto de interseção das retas $\mathbf{r}: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ e $\mathbf{s}: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ à origem do sistema de coordenadas cartesianas é, em unidades de comprimento, igual a $k\sqrt{2}$. O valor de **k** é

A) $\frac{3}{5}$.

B) $\frac{5}{7}$.

C) 1.

D) $\frac{6}{5}$.

E) $\frac{5}{3}$.

02. (UFC-CE) A reta 2x + 3y = 5, ao interceptar os dois eixos coordenados, forma com estes um triângulo retângulo. Calcule o valor da hipotenusa desse triângulo.

03. (UFG-GO) Se os pontos A(1, 0), B(a, b) e C(0, 1) estão alinhados, então:

A) b = a + 1

B) a + b = 1

C) a − b = 2

D) ab = −1

E) $\frac{a}{b} = 1$

04. (UFC-CE) Os vértices do quadrado ABCD no plano cartesiano são A(−1, 3), B(1, 1), C(3, 3) e D(x, y). Então, os valores de **x** e **y** são

A) x = 1 e y = 5.

B) x = 5 e y = 1.

C) $x = 1 + \sqrt{5}$ e $y = 1 + \sqrt{5}$.

D) $x = 1 - \sqrt{5}$ e y = 1.

E) x = 1 e $y = 1 - \sqrt{5}$.

05. (UFMG) Os valores de **k**, para os quais a equação $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$, nas variáveis **x** e **y**, representa uma reta que passa pela origem, são

A) −1 e 0.

B) 4 e 5.

C) 1 e 6.

D) −2 e 2.

E) −3 e 3.

06. (UECE) Seja **r** a reta que passa pelos pontos $P_1(-1, 0)$ e $P_2(0, 3)$. Considere M(n, q) um ponto de **r**. Se a distância do ponto O(0, 0) ao ponto **M** é $\frac{3}{\sqrt{10}}$ cm, então q − n é igual a:

A) $\frac{4}{5}$

B) 1

C) $\frac{6}{5}$

D) $\frac{7}{5}$

E) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

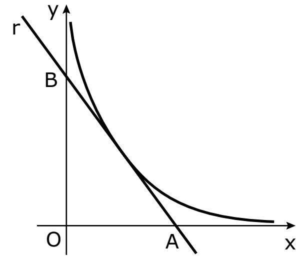
07. (UFSCar-SP) No plano cartesiano, seja **r** uma reta de equação ax + 2y − 2 = 0. Sabendo que P(1, −1) é um ponto de **r**, determine:

A) O valor de **a**.

B) O coeficiente angular de **r**.

08. (UFG-GO) A figura a seguir representa, no plano cartesiano, um ramo da hipérbole de equação xy = 1 e a reta **r** de coeficiente angular m = −4, e que possui um único ponto em comum com a hipérbole.

Sejam **A** e **B** as interseções da reta **r** com os eixos x e y, respectivamente. Calcule a área do triângulo OAB.



MATEMÁTICA

09. (FGV-SP) Uma reta vertical divide o triângulo de vértices (0, 0), (1, 1) e (9, 1), definido no plano ortogonal (x, y), em duas regiões de mesma área. A equação dessa reta é:

A) $x - \frac{5}{2} = 0$

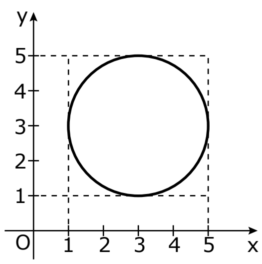
B) $x - 3 = 0$

C) $x - \frac{7}{2} = 0$

D) $x - 4 = 0$

E) $x + \frac{5}{2} = 0$

10. (FUVEST-SP) Uma reta de coeficiente angular m > 0 passa pelo ponto (2, 0) e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices (1, 1), (5, 1), (5, 5) e (1, 5). Então:



A) $0 < m < \frac{1}{3}$

B) $m = \frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3} < m < 1$

D) $m = 1$

E) $1 < m < \frac{5}{3}$

11. (Cesesp-PE) Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença.

Dadas as retas de equação $2\sqrt{3}x - 2y - 3 = 0$ e $2\sqrt{3}x - 6y - 3 = 0$, as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas dadas são:

A) $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

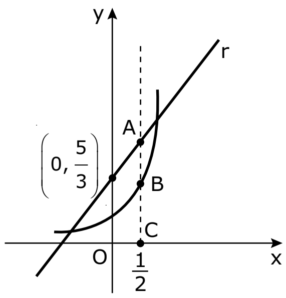
B) $x + y - 1 = 0$ e $x - y + 1 = 0$.

C) $x + y - \sqrt{3} = 0$ e $x - y + \sqrt{3} = 0$.

D) $2x + 2y + \sqrt{3} = 0$ e $2x - 2y + \sqrt{3} = 0$.

E) $2x - 2y - \sqrt{3} = 0$ e $2x + 2y - \sqrt{3} = 0$.

12. (Vunesp) A figura a seguir mostra os gráficos de uma função exponencial $y = a^x$ e da reta que passa pelo ponto $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ e tem inclinação $\frac{10}{7}$. Pelo ponto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, passou-se a perpendicular ao eixo x, que corta os gráficos, respectivamente, em **B** e **A**.



Supondo-se que **B** esteja entre **A** e **C**, conforme mostra a figura, e que a medida do segmento $\overline{AB}$ é dada por $\frac{8}{21}$, determine o valor de **a**.

GABARITO

01. D

02. $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

03. B

04. A

05. C

06. C

07. A) 4

    B) −2

08. 2

09. B

10. C

11. E

12. 4

Caderno Extra

MÓDULO 12

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

01. (UFJF-MG) Resolva a equação:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$$

02. (UFJF-MG) Determine todas as soluções da equação $\cos^2 x - 2.\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

03. (AFA-SP) Os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\sqrt{2}.(\text{sen } x - \cos x) = m^2 - 2$ admite soluções são:

A) $-1 \leq m \leq 1$

B) $-2 \leq m \leq 2$

C) $0 \leq m \leq \sqrt{2}$

D) $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$

04. (UFRGS-RS) O número de soluções da equação $2.\cos x = \text{sen } x$ que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{16\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}\right]$ é

A) 8.

B) 9.

C) 10.

D) 11.

E) 12.

05. (ITA-SP) O conjunto solução de $(\text{tg}^2 x - 1).(1 - \text{cotg}^2 x) = 4, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, é:

A) $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

06. (PUC RS) O conjunto solução da equação $\text{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ em $\mathbb{R}$ é:

A) $\{-1, 0, 1\}$

B) $[-1, 1]$

C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

E) $\mathbb{R}$

07. (Unifor-CE) No intervalo $[-\pi, \pi]$, o número de soluções da equação $2.\cos 4x = 1$ é

A) 2.

B) 3.

C) 4.

D) 5.

E) 8.

08. (Mackenzie-SP) Quando resolvida no intervalo $[0, 2\pi]$, o número de quadrantes nos quais a desigualdade $2.\cos x < \sqrt{3}$ apresenta soluções é

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 3.

E) 4.

GABARITO

01. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

02. $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

03. B

04. C

05. D

06. E

07. E

08. E

MÓDULO 13

GEOMETRIA DE POSIÇÃO E POLIEDROS

01. (Mackenzie-SP) Considerando-se as afirmações a seguir, assinale a alternativa correta.

I. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

II. Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apoia em ambas.

III. Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então é perpendicular à interseção desses planos.

A) Somente a afirmação I é verdadeira.

B) Somente a afirmação II é verdadeira.

C) São verdadeiras as afirmações II e III, apenas.

D) Todas as afirmações são verdadeiras.

E) Nenhuma afirmação é verdadeira.

02. (UFV-MG) Considere as afirmações a seguir:

I. Se dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de um triângulo são congruentes aos ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$, respectivamente, de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.

II. Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a toda reta desse plano.

III. Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

IV. As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, a alternativa que apresenta a sequência correta é:

A) V F F V

B) V V F F

C) F F F V

D) F F V V

E) V V V F

03. (FUVEST-SP) São dados cinco pontos não coplanares **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Sabe-se que ABCD é retângulo, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas

A) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EB}$.

B) $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$.

C) $\overleftrightarrow{EB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$.

D) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

E) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$.

04. (UFBA) Sendo α e β dois planos e r_1 e r_2 duas retas, tais que α // β, $r_1 \perp \alpha$ e r_2 // β, então r_1 e r_2 podem ser

A) paralelas a α.

B) perpendiculares a β.

C) coincidentes.

D) oblíquas.

E) ortogonais.

05. (UFS-SE) Sejam α e β dois planos paralelos e γ um plano oblíquo a eles. A interseção de γ com α e β é constituída de

A) retas paralelas.

B) retas ortogonais.

C) um plano, paralelo a α e β.

D) retas reversas, não ortogonais.

E) retas concorrentes, não perpendiculares.

06. (Vunesp) Seja α um plano e **b** uma reta não perpendicular a α. Então,

A) não existe plano passando por **b** perpendicular a α.

B) existem, no mínimo, dois planos passando por **b** e perpendiculares a α.

C) existe um, e um só, plano passando por **b** e perpendicular a α.

D) existe uma infinidade de planos passando por **b** e perpendiculares a α.

E) todo plano passando por **b** não é perpendicular a α.

07. (UFG-GO) O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não colineares é

A) uma esfera.

B) uma circunferência.

C) um plano.

D) uma reta.

E) um ponto.

08. (PUC-SP) Um triângulo isósceles ABC, com AB = BC = 30 e AC = 24, tem o lado $\overline{AC}$ contido em um plano α e o vértice **B** a uma distância 18 de α. A projeção ortogonal do triângulo ABC sobre o plano α é um triângulo

A) retângulo.

B) obtusângulo.

C) equilátero.

D) isósceles, mas não equilátero.

E) semelhante ao triângulo ABC.

09. (UFBA) Com base nos conhecimentos sobre Geometria Espacial, pode-se afirmar:

01. Se uma reta **r** e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular à reta **r** é também perpendicular ao plano α.

02. Se um ponto **P** não pertence a uma reta **s**, então existe um único plano passando por **P** paralelo à reta **s**.

04. Se uma reta **r** está contida em um plano α, e a reta **s** é reversa a **r**, então a reta **s** intercepta o plano α.

08. Se α e β são dois planos perpendiculares, e **r** é uma reta perpendicular a α, que não está contida em β, então **r** é paralela a β.

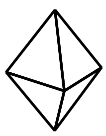
16. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

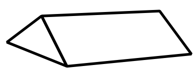
Soma (   )

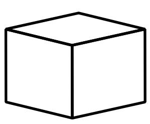
10. (Mackenzie-SP) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é

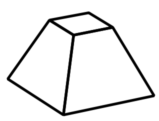
A) 75.
B) 53.
C) 31.
D) 45.
E) 25.

11. (UNITAU-SP) Indique quantas faces possuem, respectivamente, nessa ordem, os sólidos numerados como I, II, III e IV a seguir:

I.

Octaedro

III.

Prisma retangular

II.

Cubo

IV.

Tronco de pirâmide

A) 8, 6, 5, 6
B) 8, 6, 6, 5
C) 8, 5, 6, 6
D) 5, 8, 6, 6
E) 6, 18, 6, 5

12. (Cesgranrio) Se um poliedro regular tem exatamente três diagonais, então o seu número de arestas é

A) 12.
B) 10.
C) 8.
D) 6.
E) 4.

13. (EN-RJ) Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e por 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é

A) 60.
B) 81.
C) 100.
D) 12.
E) 141.

14. Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a 2 160°. Determine o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo que ele tem 15 arestas.

15. Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

GABARITO

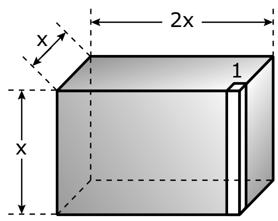
01. C
02. C
03. D
04. E
05. A
06. C
07. D
08. C
09. Soma = 08
10. C
11. A
12. A
13. E
14. 6 triangulares e 3 quadrangulares
15. 8

MÓDULO 14

PRISMAS

01. (Vunesp) Considere o sólido resultante de um paralelepípedo retângulo de arestas medindo **x**, **x** e 2x, do qual um prisma de base quadrada de lado 1 e altura **x** foi retirado. O sólido está representado pela parte escura da figura.

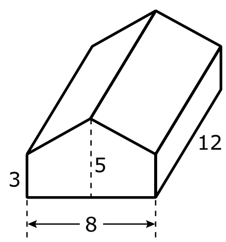
2022_6VEXTRA_V4_MAT_BOOK.indb 17 24/02/2022 15:51:00



O volume desse sólido, em função de **x**, é dado pela expressão:

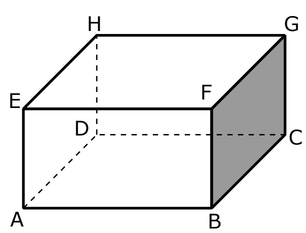
A) $2x^3 - x^2$
B) $4x^3 - x^2$
C) $2x^3 - x$
D) $2x^3 - 2x^2$

02. (Vunesp) O volume de ar contido em um galpão com a forma e com as dimensões dadas pela figura a seguir é



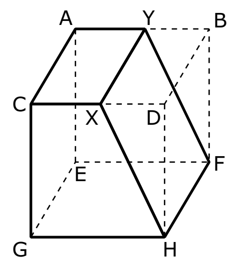
A) 288.
B) 384.
C) 480.
D) 360.
E) 768.

03. (UFJF-MG) Um arquiteto projetou um aquário gigante em forma de um paralelepípedo retângulo de bases ABCD e EFGH, como representado na figura a seguir. Sabe-se que a altura do aquário é de 10 m, e que os lados da base medem $\overline{AB}$ = 30 m e $\overline{AD}$ = 60 m.

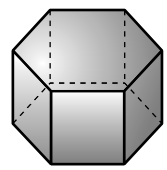


O aquário deve ser dividido em três partes para que diferentes espécies de peixe sejam colocadas, sem que uma espécie ataque as outras. Assim, pela aresta $\overline{DH}$, serão construídas duas paredes planas de vidro, DHMN e DHPQ, perpendiculares ao plano ABCD, de modo que **M** se localize sobre a aresta $\overline{AB}$, **N**, sobre $\overline{EF}$, **P**, sobre $\overline{BC}$ e **Q**, sobre $\overline{FG}$. Determine as distâncias $\overline{AM}$ e $\overline{CP}$, para que as três partes do aquário tenham volumes iguais, e determine, ainda, o volume de uma dessas partes.

04. (Vunesp) A figura destaca o sólido que restou de um cubo de aresta **a**, após retirar-se dele o prisma XDHYBF, sendo $\overline{XY}$ paralelo a $\overline{CA}$. Se o volume do sólido restante é $\frac{4}{7}$ do volume do cubo, ache a fração de **a** que expressa a medida de $\overline{CX}$.



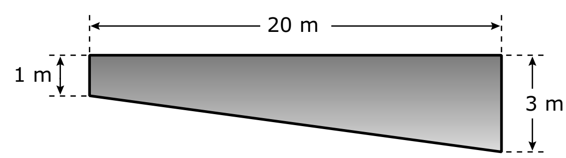
05. (UFSJ-MG) Deseja-se construir um porta-joias de vidro com tampa, em forma de um prisma reto de bases hexagonais regulares, medindo 6 centímetros cada lado de suas faces, como mostra a figura a seguir:



O número que melhor se aproxima da quantidade em centímetros quadrados de vidro necessária para a confecção do porta-joias, desconsiderando-se a sua estrutura, é

A) 404.
B) 398.
C) 392.
D) 410.

06. (UFV-MG) A figura a seguir exibe a seção transversal de uma piscina de 20 m de comprimento por 10 m de largura, com profundidade variando uniformemente de 1 m a 3 m.



A) Determine o volume de água necessário para encher a piscina até a borda.
B) Qual a distância mínima que uma pessoa de 1,70 m deve caminhar, saindo do ponto mais raso da piscina, para que fique totalmente submersa?

07. (UFMG) Um depósito em forma de paralelepípedo retângulo tem as seguintes dimensões internas: 14 m, 22 m e 6 m. Pretende-se encher totalmente esse depósito com caixas cúbicas de mesmo volume e de dimensões inteiras. O número mínimo de caixas desse tipo que enchem totalmente o depósito é

A) 231.
B) 308.
C) 616.
D) 1 078.
E) 1 848.

08. (FGV-SP) Um arquiteto tem dois projetos para a construção de uma piscina retangular com 1 m de profundidade.

Projeto 1: dimensões do retângulo: 16 m × 25 m

Projeto 2: dimensões do retângulo: 10 m × 40 m

Sabendo-se que as paredes laterais e o fundo são revestidos de azulejos, cujo preço é R$ 10,00 por m^2,

A) qual é a despesa com azulejos em cada projeto?

B) se a área do retângulo for de 400 m^2, e **x** for uma de suas dimensões, expresse o custo dos azulejos em função de **x**.

09. (UFES) Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta **a**. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento:

A) $a\sqrt{2}$

B) $a\sqrt{3}$

C) 3a

D) $(1 + \sqrt{2})a$

E) $a\sqrt{5}$

10. (UFJF-MG) Uma caixa-d'água sem tampa, em formato de um cubo de 1 m de aresta, completamente cheia, é inclinada 30° em torno de uma aresta da base. O percentual do volume de água que permanece nessa caixa-d'água, em relação à sua capacidade, é um valor entre

A) 68% e 69%.

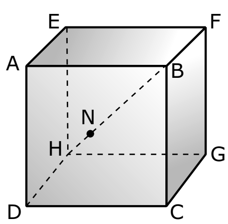
B) 69% e 70%.

C) 70% e 71%.

D) 71% e 72%.

E) 72% e 73%.

11. (UFMG) Observe este cubo de vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**.



O ponto **N** da diagonal $\overline{BH}$ do cubo é tal que a medida do segmento $\overline{BN}$ é o dobro da medida do segmento $\overline{HN}$. Sabe-se que a aresta do cubo mede **a**. Então, calcule o comprimento do segmento $\overline{CN}$, em função de **a**.

12. (UFMG) Um cubo é cortado por um plano que passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem em um vértice **V**, como mostrado na figura I. O sólido VABC é, então, retirado do cubo, obtendo-se um outro sólido, como mostrado na figura II.

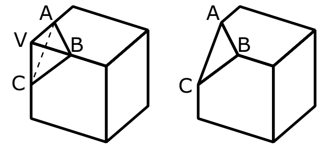


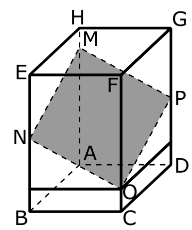
Figura I Figura II

Repetindo-se o mesmo processo em relação a cada um dos demais vértices desse cubo, obtém-se, ao final, um sólido **S**, de 14 faces, cujos vértices são os pontos médios das arestas do cubo original.

A) Determine quantas das 14 faces de **S** são quadriláteros e quantas são triângulos. Justifique sua resposta.

B) Suponha que a aresta do cubo mede 4 cm. Calcule, então, a área da superfície de **S**, isto é, a soma das áreas de todas as suas faces.

13. (UFV-MG) A figura a seguir é um paralelepípedo de base quadrada e de vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**. Sabe-se que um plano intercepta o paralelepípedo, como na figura. Dessa interseção, resulta o quadrilátero MNOP, cujos lados $\overline{ON}$ e $\overline{OP}$ formam ângulos de 30° com a face ABCD. Se a área da base do paralelepípedo vale 3, então o perímetro de MNOP vale



A) 8.

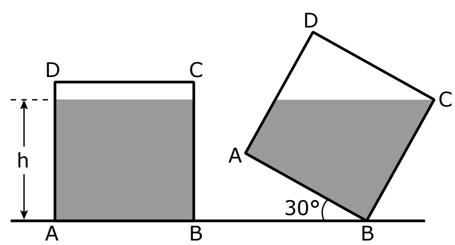
B) 4.

C) 6.

D) 10.

E) 12.

14. (UFMG) Um recipiente cúbico, sem tampa, com arestas medindo 12 cm, está apoiado em um plano horizontal e contém água até um nível de **h** cm. Ao se inclinar esse recipiente sobre uma de suas arestas, de maneira que a face inferior faça um ângulo de 30° com o plano horizontal, são derramados 300 cm^3 de água, conforme mostrado na figura a seguir:



Determine o valor de **h**.

MATEMÁTICA

15. (Unit-SE) De um tronco cilíndrico circular reto equilátero, com 40 cm de diâmetro, deseja-se cortar uma peça na forma de um paralelepípedo reto, inscrito no tronco, cuja base é representada pelo retângulo, na Figura 2.

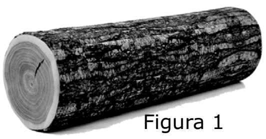


Figura 1

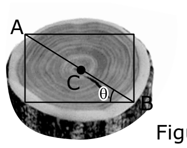


Figura 2

Nessas condições, é correto afirmar que uma expressão para o volume do paralelepípedo, medido em cm^3, é:

A) $16 \cdot 10^3$ sen 2θ

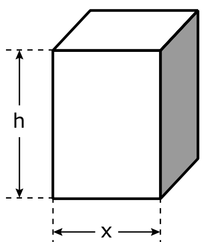
B) $16 \cdot 10^3$ cos 2θ

C) $32 \cdot 10^3$ sen 2θ

D) $32 \cdot 10^3$ cos 2θ

E) $64 \cdot 10^3$ sen θ

16. (UFPE) Um paralelepípedo reto de base quadrada, como o ilustrado a seguir, deve ser construído de tal modo que a soma das suas arestas seja 36 cm, e a área total de sua superfície seja máxima.



Qual o volume do paralelepípedo?

A) 29 cm^3

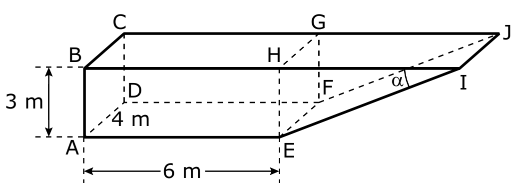
B) 28 cm^3

C) 27 cm^3

D) 26 cm^3

E) 25 cm^3

17. (Vunesp) Um tanque para a criação de peixes tem a forma da figura:



Nesta, ABCDEFGH representa um paralelepípedo retângulo, e EFGHIJ, um prisma, cuja base EHI é um triângulo retângulo (com ângulo reto no vértice **H** e ângulo α no vértice **I**, tal que sen $\alpha = \frac{3}{5}$).

A superfície interna do tanque será pintada com um material impermeabilizante líquido. Cada metro quadrado pintado necessita de 2 litros de impermeabilizante, cujo preço é R$ 2,00 o litro. Sabendo-se que AB = 3 m, AE = 6 m e AD = 4 m, determine:

A) As medidas de $\overline{EI}$ e $\overline{HI}$.

B) A área da superfície a ser pintada e quanto será gasto, em reais.

GABARITO

01. C

02. B

03. $\overline{AM}$ = 20 m, $\overline{CP}$ = 40 m e V = 6 000 m^3

04. $\overline{CX} = \frac{a}{7}$

05. A

06. A) V = 400 000 L

    B) $d_{min.} = \sqrt{49,49}$ m

07. A

08. A) Projeto 1: R$ 4 820,00; Projeto 2: R$ 5 000,00

    B) Custo = $20,00\left(\frac{x^2 + 200x + 400}{x}\right)$ reais

09. E

10. D

11. CN = a

12. A) 6 quadriláteros e 8 triângulos

    B) $A = 16(3 + \sqrt{3})$ cm^2

13. A

14. $h = \frac{169 - 24\sqrt{3}}{12}$ cm

15. C

16. C

17. A) EI = 5 m e HI = 4 m

    B) 104 m^2 e R$ 416,00