12 de Julho de 2006

Problema 1. Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior do triângulo verifica

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Prove que $AP \geqslant AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

Problema 2. Uma diagonal de um polígono regular P de 2006 lados é um *segmento bom* se separa P em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são *segmentos bons*.

Divide-se P em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de P. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

Problema 3. Determine o menor número real M tal que a desigualdade

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leqslant M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

é verdadeira para todos os números reais a, b, c.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

13 de Julho de 2006

Problema 4. Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Seja $P(x)$ um polinomio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinomio

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

onde P aparece k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

Problema 6. A cada lado b de um polígono convexo P associa-se a maior das áreas dos triângulos contidos em P que têm b como um dos lados. Prove que a soma das áreas associadas a todos os lados de P é pelo menos o dobro da área de P.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.