Livro Eletrônico

Aula 00

Matemática II p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

AULA 00 – Razões e Proporções. Divisão em partes Direta e Inversamente Proporcionais, Regra de Três Simples e Composta

Sumário

1 – Apresentação 02

2 – Razão e Proporção 10

1 - Razão...10

2 - Proporção............. 11

3 - Propriedade Fundamental da Proporção.......................................12

4 - Casos Especiais de Razão...27

3 – Divisão Proporcional..29

1 - Grandezas Diretamente Proporcionais 29

2 - Grandezas Inversamente Proporcionais 31

3 - Divisão Proporcional........................... 33

4 – Regra de Três 41

1 -Regra de Três Simples 42

2 -Regra de Três Composta 48

5 – Torneiras e Misturas 51

1 -Problemas Tipo Torneira 51

2 -Misturas...................... 52

6 – Lista de Questões... 64

7 – Gabarito.. 72

"A montanha é íngreme, mas a vista é maravilhosa"

1 – APRESENTAÇÃO

Olá, Guerreiroooo! **SAIUUUUUUUUUUU O EDITAL!!!!!! VAMOS COM TUDOOOOOOO!!!!**

Meu nome é **Ismael Santos**, professor de **Matemática do Estratégia Concursos**. Estarei com você nesta caminhada rumo à **Escola de Sargentos das Armas – ESA**. Tenho certeza que faremos uma excelente parceria, que tem como objetivo: a sua tão sonhada **APROVAÇÃO.**

Deixe que me apresente: sou servidor público federal há 12 anos, natural do Rio de Janeiro – RJ, Graduado em Gestão Financeira, Graduando em Matemática pela UFF-RJ, Pós-graduado em Orçamento Público.

Iniciei meus estudos para concursos muito cedo, aos 14 anos. Naquela época, meu objetivo principal era o certame do Colégio Naval. Essa batalha teve início em 2002. Não foi nada fácil! Tive muita dificuldade nesta preparação, em especial devido à falta de base sólida de conhecimento teórico. O resultado já era esperado: REPROVADO em meu primeiro concurso.

Em 2003, consegui focar mais nos estudos. Ver a matéria pela segunda vez foi, certamente, um facilitador. Neste ano, minha evolução foi muito grande. Estava confiante! Pois bem! Chegou a prova! Mais uma reprovação! Este resultado não foi o esperado. Foi duro suportar. No entanto, não podia perder tempo, tinha que voltar a estudar o mais rápido possível, já para o próximo ano.

Chegamos em 2004! Neste ano, além de me preocupar com a parte teórica, resolvi preparar também minha cabeça (psicológico), para que no dia da prova, não fosse surpreendido. Eis que chegou a APROVAÇÃO. Neste certame, obtive a 4ª maior nota do Brasil na primeira fase. Dia inesquecível! Neste mesmo ano, obtive a aprovação também na **EPCAr (Escola Preparatória de Cadetes do Ar).**

Já em 2005, tive a oportunidade de prestar outros concursos, os quais obtive aprovação: **EEAr, UFRJ, UERJ, EsSA, CMRJ e UFFRJ.**

Em 2008, fui morar no Paraná. Cidade na qual servi por 5 anos. Ao fim deste período, fui transferido para o Rio de Janeiro.

Entre os anos de 2014 a 2016, obtive outras aprovações, desta vez, para cargos públicos civis, tais como: **Agente da Polícia Civil –RJ, Papiloscopista da Polícia Civil –RJ, Técnico da Assembleia Legislativa – RJ e Fiscal de Posturas de Niterói.**

No triênio 2015 – 2017, fui instrutor da ESA (Escola de Sargento das Armas). Neste período, inclusive, tive a oportunidade de passar 1 mês em competição desportiva na EEAr, outra escola de altíssima qualidade de ensino.

Ufa! Quanta coisa, não? Pois é! Tudo serviu de experiência! Conhecimento não ocupa espaço! Nunca pare de estudar!

Perceba que minha experiência com concursos militares já vem desde 2002. São mais de 15 anos respirando esta área. Não à toa, é a que mais me identifico para lecionar. Por este motivo aceitei o convite do Estratégia Concursos para assumir a Matemática das Carreiras Militares. Tenha certeza que verás esta fascinante matéria com uma linguagem bem acessível. Digo ainda que a abordagem será totalmente focada no edital seu último concurso - 2018.

E aí, futuro aluno do Curso de Formação de Sargentos 20/21, animado para saber um pouco mais sobre o nosso curso de Matemática? Vamos nessa?

A matemática do seu edital foi dividida, didaticamente, da seguinte forma: **MAT I, MAT II, e MAT III.**

Em modos gerais, podemos dizer que a **Mat I é a nossa querida Álgebra. Já a Mat II, seria a parte relacionada à Aritmética. Por fim, Mat III, é a que tem uma queda para a Geometria.** Esta divisão irá facilitar seus estudos, no sentido de crescer de forma equitativa (equilibrada) em cada uma das frentes, não deixando nenhuma delas por último.

Dentro desta divisão, o seu edital foi particionado de forma que os tópicos dentro de cada uma das três frentes sejam dependentes entre si. Ou seja, deve ser estudada na forma cronológica proposta. A organização é 70% do seu concurso. Não dê mole! OK?

Eu, Ismael Santos, estarei responsável por toda Mat I e por parte da Mat II. É isso mesmo! Pego metade de toda sua Matemática. A outra parte ficará a cargo do Professor Ítalo Marinho, meu amigo pessoal e de trabalho, com uma didática e um conhecimento absurdo. Certamente irão gostar!

Que tal darmos uma olhadinha no conteúdo Programático do EDITAL 2019 do seu concurso? Simbora?

MATEMÁTICA

1) **Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos:** Representação de conjuntos, subconjuntos, operações: união, interseção, diferença e complementar. Conjunto universo e conjunto vazio; conjunto dos números naturais e inteiros: operações fundamentais, números primos, fatoração, número de divisores, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum; conjunto dos números racionais: operações fundamentais. Conjunto dos números reais: operações fundamentais, módulo, representação decimal, operações com intervalos reais.

2) **Razões e proporções:** grandezas diretamente e indiretamente proporcionais e porcentagem;

3) **Números complexos:** operações, módulo, conjugado de um número complexo, representações algébrica e trigonométrica. Representação no plano de Argand – Gauss, Potencialização e radiciação. Extração de raízes. Fórmulas de Moivre.

4) **Resolução de equações**: binomiais e trinomiais.

5) **Funções:** Definição, domínio, imagem, contradomínio, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, funções pares e ímpares, funções periódicas; funções compostas; relações; raiz de uma função; função constante, função crescente, função decrescente; função definida por mais de uma sentença; função inversa e seu gráfico; Função Linear, Função Afim e Função

Quadrática: Gráficos, domínio, imagem e características; variações de sinal; máximos e mínimos; e inequação produto e inequação quociente.

6) **Função Modular:** Definição, gráfico, domínio e imagem da função modular; equações modulares; e inequações modulares.

7) **Função Exponencial:** Gráficos, domínio, imagem e características da função exponencial, logaritmos decimais, e equações e inequações exponenciais.

8) **Função Logarítmica:** Definição de logaritmo e propriedades operatórias; gráficos, domínio, imagem e características da função logarítmica; e equações e inequações logarítmicas.

9) **Trigonometria:** Arcos notáveis; trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); lei dos senos e lei dos cossenos; unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano; círculo trigonométrico, razões trigonométricas e redução ao 1º quadrante; funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e inequações trigonométricas no conjunto dos números reais; fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto; e sistemas de equações e inequações trigonométricas e resolução de triângulos.

10) **Contagem e Análise Combinatória:** Fatorial: definição e operações; princípios multiplicativo e aditivo da contagem; arranjos, combinações e permutações; e binômio de Newton: desenvolvimento, coeficientes binomiais e termo geral.

11) **Probabilidade:** Experimento aleatório, experimento amostral, espaço amostral e evento; probabilidade em espaços amostrais equiprováveis; probabilidade da união de dois eventos; probabilidade condicional; propriedades das probabilidades; e probabilidade de dois eventos sucessivos e experimentos binomiais.

12) Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar, transposição e produto); matriz inversa; determinante de uma matriz: definição e propriedades; e sistemas de equações lineares.

13) Sequências Numéricas e Progressões: Sequências numéricas; progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos e propriedades; progressões geométricas (finitas e infinitas): termo geral, soma dos termos e propriedades.

14) Geometria Espacial de Posição: Posições relativas entre duas retas; posições relativas entre dois planos; posições relativas entre reta e plano; perpendicularidade entre duas retas, entre dois planos e entre reta e plano; e projeção ortogonal.

15) Geometria Espacial Métrica: Prismas: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; pirâmide: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; cilindro: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; cone: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; esfera: elementos, seção da esfera, área, volumes e partes da esfera; inscrição e circunscrição de sólidos.

16) Geometria Analítica Plana: Ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e condição de alinhamento de três pontos; reta: equações geral e reduzida, interseção de retas, paralelismo e perpendicularidade, ângulo entre duas retas, distância entre ponto e reta e distância entre duas retas, bissetrizes do ângulo entre duas retas, Área de um triângulo e inequações do primeiro grau com duas variáveis; circunferência: equações geral e reduzida, posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; problemas de tangência; e equações e inequações do segundo grau com duas variáveis; elipse: definição, equação, posições relativas entre ponto e elipse, posições relativas entre reta e elipse; hipérbole: definição, equação da hipérbole, posições relativas entre ponto e hipérbole, posições relativas entre reta e hipérbole e equações das assíntotas da hipérbole; parábola: definição, equação, posições relativas entre ponto e parábola, posições relativas entre reta e parábola; reconhecimento de cônicas a partir de sua equação geral.

17) Geometria Plana: Ângulo: definição, elementos e propriedades; Ângulos na circunferência; Paralelismo e perpendicularidade; Semelhança de triângulos; Pontos notáveis do triângulo; Relações métricas nos triângulos (retângulos e quaisquer); Triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras; Congruência de figuras planas; Feixe de retas paralelas e transversais, Teorema de Tales; Teorema das bissetrizes internas e externas de um triângulo; Quadriláteros notáveis; Polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Perímetro e área de polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Fórmula de Heron; Razão entre áreas; Inscrição e circunscrição.

18) Polinômios: Função polinomial, polinômio identicamente nulo, grau de um polinômio, identidade de um polinômio, raiz de um polinômio, operações com polinômios e valor numérico de um polinômio; divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert e dispositivo de Briot-Ruffini; relação entre coeficientes e raízes. Fatoração e multiplicidade de raízes e produtos notáveis. Máximo divisor comum de polinômios;

19) Equações Polinomiais: Teorema fundamental da álgebra, teorema da decomposição, raízes imaginárias, raízes racionais, relações de Girard e teorema de Bolzano.

Perceba que os tópicos destacados acima, são referentes a nossa **Mat I e parte da Mat II, que serão repassados por meio de livros eletrônicos + videoaulas, que estão sob minha responsabilidade**. Vale ressaltar que, antes de iniciarmos os pontos efetivos referentes ao edital, decidimos por bem darmos uma **revisada na Matemática Básica**, para que você possa relembrar pontos muito importantes para o bom desempenho do nosso curso. Confie em mim! Tudo fará diferença na sua aprovação. Leia cada detalhe! Não irá se arrepender.

Os Livros Eletrônicos do Estratégia Militar **são materiais completos**, com todo o arcabouço **teórico e prático**, tudo isso para otimizar seu tempo de estudo. É importante, além de saber estudar por eles, também ter uma excelente disciplina de estudos. É de suma importância a leitura atenta a todos os pontos teóricos, ainda que "ache" saber tudo. Antes de fazer as questões propostas, que possuem um grau mais elevado, oriento a **fazer os exercícios resolvidos**, bem como os exercícios-modelo. Eles farão você pegar uma base mais sólida.

Além dos Livros que irão explicar cada ponto do edital, na profundidade necessária ao seu concurso, lembro-vos ainda do acesso às videoaulas. Este material será complementar ao “PDF”. Para você que tem uma certa dificuldade em matemática, segue uma dica importante: **ASSISTA ÀS VIDEOAULAS ANTES DE TUDO**. Isso facilitará muito sua vida!

Além das aulas teóricas gravadas, farei também correção de questões de provas anteriores bem como de alguns desafios, para que fiquem um nível acima da prova. Tentarei esgotar, ao máximo, questões do seu certame, no entanto, utilizarei questões de fixação (modelo) e questões de outros concursos militares, para que tenha uma quantidade razoável de exercícios de cada tópico.

Nossa estratégia é trabalhar com uma teoria simples e aplicada àquilo que sua banca realmente cobra! Nada de perda de tempo. O negócio é atingir o que cai na prova.

Preparado, futuro “Soldado de Caxias”? Sigamos em frente!

Vamos à nossa aula!

O primeiro dos assuntos é: **Razão. Tema não muito comum, com poucas questões atuais, porém, com bastante importância na construção da base sólida para o aprendizado dos demais tópicos! Ahhh...detalhe: por mais que Regra de Três não esteja no seu edital, fiz questões de deixar no material, tendo em vista que ajuda em outros pontos do seu edital!!!**

2 – Razão e Proporção

1 –Razão

É a comparação entre dois números ou duas grandezas. Essa comparação pode ser feita por subtração ou divisão.

- <u>As razões feitas por subtração, são ditas razões aritméticas, cujo resultado é uma diferença entre as grandezas.</u>
- <u>As razões feitas por divisão (quociente), são ditas razões geométricas, cujo resultado indica quantas vezes um número contém ou está contido em outro.</u>

Em nosso curso, utilizaremos a palavra Razão, nos referindo a Razão Geométrica. OK?

A Razão, em outras palavras, é o quociente entre o antecedente e o quociente, sendo este último, diferente de zero.

Quadro Resumo:

Razão → Aritmética: R = a – b

Razão → Geométrica: R = $\frac{a}{b}$; b≠0

Assim, dado dois números **a** e **b** (b≠0), o quociente entre eles, nesta ordem, é a razão de **a** para **b.**

Vejamos algumas nomenclaturas:

a : b ⇒ Razão de **a** para **b**

$\frac{a}{b} \Rightarrow$ **a** está para **b**

a: chama-se antecedente
b: chama-se consequente

2 - Proporção

É a igualdade de duas ou mais razões. Sua forma mais característica é a igualdade entre duas razões.

Segue exemplo abaixo:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ Proporção

Vejamos algumas nomenclaturas:

a e **c**: antecedentes da proporção
b e **d**: consequentes da proporção
a e **d**: extremos
b e **c**: meios

Não fique preso aos diversos nomes que estou apresentando. O importante para sua prova, além de saber que existe, é saber usar os conceitos no momento certo, ok?

3 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DA PROPORÇÃO

Veremos a partir de agora, algumas propriedades muito importantes para o prosseguimento da nossa aula. Ressalto que ao repassar a definição e o esquematizado de cada propriedade, irei demonstrar como se chega àquela determinada definição, passando um exemplo prático de sua aplicação. Isso ajudará sobremaneira no entendimento do conteúdo. Sem mais, vamos nessa!

1ª Propriedade:

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

Verificação:

- ✓ Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- ✓ Agora, vamos multiplicar os dois membros por pelo produto *b.d*.
- ✓ Após esta operação, simplifique os termos semelhantes.

$$\frac{a}{\cancel{b}}.\cancel{b}d = \frac{c}{\cancel{d}}.b\cancel{d} \Rightarrow a.d = c.b$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Uma distribuidora de combustível mistura gasolina e álcool em quantidades proporcionais a 8 e 5. Em uma encomenda de um posto de combustível havia 4800l de gasolina. Quantos litros de álcool foram utilizados nessa encomenda?

Pelo enunciado do problema temos que $\frac{\text{gasolina}}{\text{álcool}} = \frac{8}{5}$ que é a proporção da mistura.

Para a quantidade de 4800l de gasolina vamos utilizar *x* l de álcool.

Ou seja: $\frac{4800}{x} = \frac{8}{5}$, pela 1ª propriedade (propriedade fundamental das proporções), teremos:

$$\frac{4800}{x}=\frac{8}{5}\Rightarrow 4800.5=8.x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4800.5}{8}\Rightarrow\frac{8.600.5}{8}=600.5=3000l$$

Portanto, foram utilizados 3000l de álcool nessa encomenda.

Essa primeira propriedade nos traz duas consequências, a saber:

a) Uma proporção não se altera quando permutamos meios ou extremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

b) Uma proporção não se altera quando invertemos as razões:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

2ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Verificação:

- ✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (b, c ≠ 0), $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (constante de proporcionalidade).
- ✓ Podemos dizer que: $\begin{cases} a=kb \\ c=kd \end{cases}$
- ✓ Somando as equações, encontramos:

$$a + c = kb + kd \Rightarrow a + c = k.(b + d)$$

$$k = \frac{a + c}{b + d}$$

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule x e y na proporção $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$, dado x + y = 14.

Utilizando a 2ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{x + y}{2 + 5}$$

Como x + y = 14, teremos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{14}{7} = 2$$

Logo, x = 4 e y = 10

3ª Propriedade:

Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu respectivo consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$$

Verificação:

- ✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (constante de proporcionalidade)
- ✓ Podemos dizer que: $\begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}$
- ✓ Subtraindo as equações, teremos:

$$a - c = bk - dk \Rightarrow a - c = k.(b - d)$$

$$k = \frac{a - c}{b - d}$$

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determine x e y, sendo $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ **e** $x - y = 12.$

Utilizando a 3ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{x}{5} = \frac{x}{2} = \frac{x - y}{5 - 2}$$

Como x – y = 12, teremos

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{12}{3} = 4$$

Logo x = 20 e y = 8

4ª Propriedade:

Em toda proporção, o produto das duas razões sempre será igual a qualquer uma delas, porém, elevadas a segunda potência (ao quadrado).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a.c}{b.d}$$

Verificação:

- ✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (b, d ≠ 0) podemos dizer que:

$$\begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}$$

- ✓ Multiplicando as equações, vem:

$$a.c = kb.kd \Rightarrow a.c = k^2.b.d$$

$$k^2 = \frac{a.c}{b.d}$$

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a.c}{b.d} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a.c}{b.d}$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determine x e y, sendo $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ e x . y = 160

Utilizando a 4ª propriedade podemos escrever:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x.y}{5.2} = \frac{x^2}{5^2} = \frac{y^2}{2^2}$$

$$\frac{x.y}{10} = \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{4}$$

Como x . y = 1600, teremos:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{4} = \frac{160}{10} = 16$$

Logo,

$$x^2 = 16.25 \therefore x = 20$$

$$y^2 = 16.4 \therefore y = 8$$

5ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma dos termos da primeira razão estará para seu antecedente ou consequente, assim como a soma dos termos da segunda razão estará para seu antecedente ou consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\text{ ou }\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Verificação:

- ✓ Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (b, d ≠ 0)

$$\begin{cases} a = kb(1) \\ c = kd(2) \end{cases}$$

- ✓ Somando-se b aos dois membros (1), e somando-se d aos dois membros de equação (2), vem:

$$\begin{aligned} a+b &= kb+b \\ a+b &= b.(k+1) \\ k+1 &= \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c+d &= kd+d \\ c+d &= d.(k+1) \\ k+1 &= \frac{c+d}{d} \end{aligned}$$

- ✓ Igualando-se, teremos

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

TOME NOTA!

Para demonstrarmos a 5ª propriedade, poderíamos fazer simplesmente:

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

6ª Propriedade:

Em toda proporção, a diferença dos termos da primeira razão estará para seu antecedente ou consequente, assim como a diferença dos termos da segunda razão estará para antecedente ou consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

PRESTE MAIS ATENÇÃO!!

A 6ª propriedade pode ser verificada por procedimento análogo ao da 5ª propriedade. Exemplo. Se a razão entre os números **a** e **b**, nesta ordem, é 0,75, então a razão entre os números a + b e b é:

Vejamos que: $\frac{a}{b}=0,75\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{75}{100}\Leftrightarrow\frac{a}{8}=\frac{3}{4}$

Pela 5ª propriedade, vem: $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{3+4}{4}$

Logo, $\frac{a+b}{b}=\frac{7}{4}$

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

1. Determine x e y, respectivamente, sendo $\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{5}{2}\\ x.y=160\end{cases}$

Comentário:

Permutando os meios da proporção, obtemos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$$

Efetuando o produto das razões, encontramos:

$$\frac{x.y}{5.2} = \frac{160}{10} = 16$$

Sendo as razões iguais, o produto é igual ao quadrado de qualquer uma delas, logo:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = 4$$

$$\begin{cases} x = 4.5, x = 20 \\ y = 4.2, y = 8 \end{cases}$$

Gabarito: ***x = 20 e y = 8***

(Exercício Modelo)

2. Determine x e y, respectivamente, sendo $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ e $x^2 + y^2 = 52$

Comentário:

Quadrando os membros da proporção, obtemos:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{x^2 + y^2}{4+9} = \frac{52}{13} = 4$$

Se $\frac{x^2}{4} = 4,$ então $x^2 = 16, x = 4$

$$\text{Se } \frac{y^2}{9} = 4, \quad \text{então} \quad y^2 = 36, y = 6$$

Gabarito: ***x = 4 e y = 6***

(Exercício Modelo)

3. Sendo $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x.y.z = 1920 \end{cases}$, calcule os valores de x, y e z.

Comentário:

Efetuando o produto das razões, obtemos:

$$\frac{x.y.z}{30} = \frac{1920}{30} = 64 \ , \quad \text{logo} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\begin{cases} x = 2.4, x = 8 \\ y = 3.4, y = 12 \\ z = 5.4, z = 20 \end{cases}$$

Gabarito: ***x = 8 ,y = 12 e z = 20***

(Exercício Modelo)

4. A diferença entre os consequentes de uma proporção é 2, e os antecedentes são 75 e 45. Ache os consequentes desta proporção.

Comentário:

Com os dados da questão, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{75}{x} = 15 \therefore x = 5 \\ \dfrac{45}{y} = 15 \therefore y = 3 \end{cases}$$

Gabarito: *x = 5 e y = 3*

Depois de praticar alguns exercícios de fixação, começaremos agora a estudar alguns nomes específicos e outras propriedades tão importantes quanto as vistas anteriormente. OK? Vamos nessa!

- **Proporção Contínua**

É toda proporção cujos meios ou extremos são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad a : b = b : c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad b : a = c : b$$

- **Terceira Proporcional**

É o terceiro termo de uma proporção contínua.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \qquad x \rightarrow 3^{a} \text{ proporcional}$$

$$a : b = b : x \therefore x = \frac{b^2}{a}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule a 3ª proporcional entre 4 e 6.

Montando a proporção, teremos:

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow\frac{36}{4},\ x = 9$$

- **Média Proporcional**

É o termo igual de uma proporção contínua.

Seja a proporção contínua entre os termos a, x e b:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}\Rightarrow x=\sqrt{a.b}\ \text{(média proporcional)}$$

Assim,

A média proporcional é igual a raiz quadrada do produto obtido entre duas grandezas (*a e b*).

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule a média proporcional entre 9 e 16

$$x=\sqrt{9.16}\Rightarrow x=\sqrt{144}\therefore x=12$$

- **Quarta Proporcional**

É o quarto termo de uma proporção não contínua.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \qquad x\rightarrow \text{4ª proporcional}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determinar a 4ª proporcional dos números 9, 4 e 18.

$$\frac{9}{4}=\frac{18}{x}\Rightarrow 9.x=4.18\therefore x=8$$

TOME NOTA!

Não irei aprofundar tanto neste tema Propriedades da Proporção, tendo em vista extrapolar o conteúdo do seu edital.

QUESTÕES COMENTADAS

5. (ESA 85) A idade de um pai somada com a de seu filho dá 45 anos. Sabendo-se que a idade do filho está para a idade do pai assim como 1 está para 4, podemos dizer que as idades são:

a) 9 e 36 anos

b) 8 e 32 anos

c) 8 e 37 anos

d) 6 e 39 anos

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ **Idade do Pai: P**
- ✓ **Idade do Filho: F**

- ✓ **P + F = 45**
- ✓ **P/F = 1/4**

Assim,

$$\frac{P}{F}=\frac{4x}{1x}$$
$$4x+1x=45$$
$$5x=45 \therefore x=9$$

Logo,

$$P=4x=4.9=36$$
$$F=1x=1.9=9$$

Gabarito: A

---

6. (ESA 87) Os preços de duas peças de fazenda estão entre si como 7 está para 8. Sabendo-se que o triplo do preço de uma menos o dobro do preço da outra vale R$ 50,00. Os preços dessas peças são:

a) R$ 60,00 e R$ 70,00

b) R$ 70,00 e R$ 80,00

c) R$ 30,00 e R$ 40,00

d) R$ 80,00 e R$ 90,00

e) R$ 50,00 e R$ 60,00

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ Peça: x
- ✓ Peça: y
- ✓ x/y: 7/8
- ✓ 3x – 2y = 50,00

Assim, temos que:

$$\frac{x}{y}=\frac{7k}{8k}$$
$$3x-2y=50$$
$$3.(7k)-2.(8k)=50$$
$$21k-16k=50$$
$$5k=50$$
$$k=10$$

Logo,

$$x=7k=7.(10)=70$$
$$y=8.k=8.(10)=80$$

Gabarito: B

---

7. (ESA 91) Um atirador acerta, no alvo, 3(três) de cada 5(cinco) disparos que faz. Tendo feito uma série de 30 tiros, ele errou:

(A) 28

(B) 15

(C) 12

(D) 25

(E) 24

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ A cada 5 tiros: 2 são certos e 3 errados.
- ✓ C/E = 3/2
- ✓ C + E = 30

Assim, temos que:

$$\frac{c}{e}=\frac{3k}{2k}$$
$$2k+3k=30$$
$$5k=30$$
$$k=6$$

Logo,

$$e=2k$$
$$e=2.(6)$$
$$e=12$$

Gabarito: C

---

8. (ESA 91) Se a razão entre os números a e b, nesta ordem, é de 0,75; então a razão entre os números (a + b) e b é:

(A) 4/3

(B) 1/3

(C) 3/4

(D) 1,75

(E) 0,25

Comentário:

Vamos a conta!

$$\frac{a}{b}=0,75$$
$$\frac{a}{b}=\frac{75}{100}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{7}{4}=1,75$$

Gabarito: D

---

4 - Casos Especiais de Razão

Agora, veremos alguns casos bem especiais de Razão. Ressalto que são bem comuns nas resoluções de problemas. Vamos a eles!

Escala:

É a razão entre a mediana de comprimento do desenho e a medida real desse comprimento, representado na mesma unidade.

$$E = \frac{\textit{medida de comprimento do desenho}}{\textit{medida de comprimento real}}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

A escala da planta de um terreno, na qual o comprimento de 60 metros foi representado por um segmento de 3 cm, é:

a) 1 : 10.000

b) 1 : 2.000

c) 1 : 3.000

d) 1 : 6.000

e) 1 : 4.000

Como 60 metros equivalem a 60.000 centímetros, temos que:

$$E = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2.000}$$

Probabilidade:

São as "chances", "possibilidades" de ocorrer determinado evento.

Caso se queira encontrar a probabilidade de determinado evento ocorrer, basta calcular a razão entre o número de situações favoráveis para que o evento ocorra, é o número total de situações que podem ocorrer.

$$P = \frac{\textit{Evento Favorável}}{\textit{Total}}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Qual a probabilidade de sair o número 2 num lançamento de um dado não viciado com 6 faces?

Evento favorável: uma possibilidade (só o número 2)

Espaço amostral: seis possibilidades (1 a 6)

Assim, $P = \frac{1}{6}$

Densidade demográfica:

É a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$D = \frac{número\ de\ habitantes}{área}$$

Na cidade de Três Corações, o número de habitantes é 30.000. Sabendo-se que a área é de 100.000 m², podemos afirmar que a densidade desta cidade é?

$$D = \frac{30.000}{100.000} = \frac{3}{10} = 0{,}3\ hab/m^2$$

Velocidade Média:

É a razão entre a variação do espaço percorrido pela variação do tempo.

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T}$$

A velocidade constante para se percorrer 240 km em 3 horas é

$$v = \frac{240km}{3h} = 80km/h$$

Densidade:

É a razão entre uma certa quantidade de massa e o volume dessa quantidade de massa.

$$D = \frac{massa}{volume}$$

Qual é a densidade de um líquido sabendo que 100 litros do mesmo têm massa 60 kg?

$$d = \frac{60kg}{100\ell} = 0,6kg/\ell$$

3 - Divisão Proporcional

1 - Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas, a outra aumenta (ou diminui) na mesma proporção da primeira.

São grandezas **diretamente proporcionais**, por exemplo:

- ✓ O salário de um operário e o tempo de trabalho;
- ✓ O preço e quantidade e a quantidade de mercadorias adquiridas;
- ✓ Os juros de um capital empregado durante um determinado tempo etc.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Um carro percorre, com velocidade constante em 1h,60km e, em duas horas, 120km.

Grandeza tempo	Grandeza distância
1h	60km
2h	120km

... ...

A proporção correspondente é: $\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$ ou $\frac{1}{60} = \frac{2}{120}$

Caso o veículo do exemplo mantenha a velocidade constante ao longo do percurso, teremos a sequência de razões.

$$\frac{1}{60} = \frac{2}{120} = \frac{3}{180} = \frac{4}{240} = \ldots$$

Resumindo: para cada hora, o veículo percorre mais 60 Km.

Portanto,

Duas sucessões de números ou grandezas *(a, b, c, ...) e (a', b', c', ...)* são diretamente proporcionais quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = k$ constante, na qual K é dita constante de proporcionalidade.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

As sucessões de números (2, 6, 8) e (3, 9, 12) são diretamente proporcionais, pois:

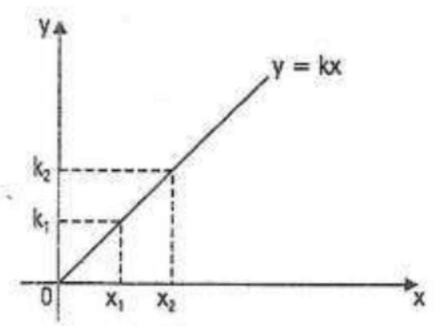
$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

No estudo de várias ciências, constata-se a existência de proporcionalidade entre grandezas.

- A cinemática nos mostra que o espaço percorrido por um corpo animado de movimento uniforme é proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo.

- Na Geometria, as áreas de dois retângulos de mesma base ou altura, são proporcionais as suas alturas ou bases, respectivamente. E os comprimentos de duas circunferências, são proporcionais aos seus raios

- Duas grandezas diretamente proporcionais também podem ser representadas graficamente, expressas por uma “função linear” do tipo: $y - k.x$, onde k é a constante de proporcionalidade ($k \in \mathbb{R}^*$)



2 - Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra diminui (aumenta) na proporção inversa da primeira.

São grandezas **inversamente proporcionais,** por exemplo:

- O número de operários e o tempo necessário à realização de uma obra;
- A velocidade de um móvel e o tempo gasto etc.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Um carro percorre uma distância em 2h com velocidade constante de 100km/h. A mesma distância é percorrida em 4h se a velocidade for de 50km/h.

Grandeza	Grandeza distância
2h	100km
4h	50km

... ...

Nesse caso, conforme a grandeza tempo aumenta, a grandeza velocidade diminui na mesma proporção, ou seja, as grandezas são inversamente proporcionais.

A proporção correspondente é a igualdade da primeira razão ($2/4$) com o **inverso** da 2ª razão (100/50):

$$\frac{2}{4}=\frac{50}{100}$$

Que também é escrita da forma: $\dfrac{2}{\frac{1}{100}}=\dfrac{4}{\frac{1}{50}}=\dfrac{8}{\frac{1}{25}}$

Portanto, duas sucessões de números ou grandezas *(a, b, c, ...) e (a', b', c', ...)* são inversamente proporcionais se uma for proporcional aos inversos dos termos da outra. Isto é:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}}=\frac{b}{\frac{1}{b'}}=\frac{c}{\frac{1}{c'}}=\ldots=k$$

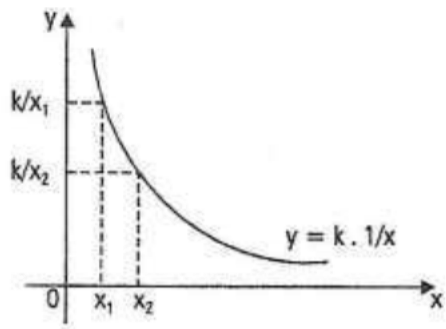
a . a' = b . b' = c . c' = ... = k (constante de proporcionalidade)

Como exemplo também podemos citar o volume ocupado por uma certa massa de gás e a **pressão** que ele suporta; dentre outros exemplos em física.

A "função" que expressa duas grandezas variáveis inversamente proporcionais é do tipo:

$y=k.\frac{1}{x}\Leftrightarrow x.y=k\Leftrightarrow\dfrac{x}{\frac{1}{y}}=k,$ *onde k é a constante de proporcionalidade* ($k\in\mathbb{R}^*$)

E o gráfico no plano cartesiano é um ramo da hipérbole, ou seja:



Vejamos a mais um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Dividir 235 em três partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Sejam x, y e z, as três partes, então $x+y+z=235$ e $\frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{4}}=\frac{z}{\frac{1}{5}}$.

Assim, temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{4}}=\frac{z}{\frac{1}{5}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\frac{235}{\frac{47}{60}}=300$$

$x=\frac{1}{3}\cdot 300=100$, $y=\frac{1}{4}\cdot 300=75$ e $z=\frac{1}{5}\cdot 300=60$

3 - Divisão proporcional

Do capítulo anterior sabemos que:

Duas sucessões de número ou grandezas (a, b, c ,...) e (a’, b’, c’, ...) são ditas:

- Diretamente proporcionais, quando:

$$\left\{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots=k\right.$$

- Inversamente proporcionais, quando:

$$\left\{\frac{a}{\frac{1}{a'}}=\frac{b}{\frac{1}{b'}}=\frac{c}{\frac{1}{c'}}=\ldots=k\right. \qquad \text{ou} \qquad a.a'=b.b'=c.c'=\ldots=k$$

Onde k é a constante ou coeficiente ou fator de proporcionalidade.

Perceba, por exemplo que: as sucessões (1, 2, 3) e (2, 4, 6) são diretamente proporcionais, pois, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$. Enquanto (2, 3, 6) e (6, 4, 2) são inversamente proporcionais, pois 2 .6 = 3 . 4 = 6 . 2

✓ **<u>Divisão diretamente proporcional</u>**

Dividir o número ou uma grandeza N em partes diretamente proporcionais a vários números dados a, b, c, ..., é determinar os valores de x, y, z ..., cuja soma seja igual ao número N.

Da proporção contínua: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$=..., desde que x + y + z + ... = N, teremos:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots=\frac{x+y+z+\ldots}{a+b+c+\ldots}$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots=\frac{N}{a+b+c+\ldots}$$

Para calcular x, y, z, ..., podemos escrever:

$$\begin{cases} x=\dfrac{N}{a+b+c+\ldots}.a \\ y=\dfrac{N}{a+b+c}.b \\ z=\dfrac{N}{a+b+c}.c \end{cases}$$

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

9. Dividir o número 280 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 5 e 7

Comentário:

As sucessões (x, y, z) e (2, 5, 7) são diretamente proporcionais, logo:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\frac{x+y+z}{2+5+7}=\frac{280}{14}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=20$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=20 \therefore x=40 \\ \dfrac{y}{5}=20 \therefore y=100 \\ \dfrac{y}{7}=20 \therefore z=140 \end{cases}$$

Gabarito: x=40, y=100, z=140

(Exercício Modelo)

10. Paulo e Roberto apostaram R$ 15,00 e R$ 25,00 num sorteio da loteria. Faça a divisão correta, sabendo que o prêmio foi de R$ 300.000,00

Comentário:

Sendo x e y as quantias que Paulo e Roberto devem receber, respectivamente, temos que:

$$\frac{x}{15}=\frac{y}{25}=\frac{x+y}{15+25}=\frac{30.000}{40}$$

$$\frac{x}{15}=\frac{y}{25}=7500$$

$$\begin{cases} x=15.7500 \therefore x=112.500,00 \\ y=25.7500 \therefore y=187.500,00 \end{cases}$$

Gabarito: x = 112.500,00 e y = 187.500,00

Ufa....quanta coisa, não? Sigamos em frente! Sem desanimar.

✓ **Divisão inversamente proporcional**

No caso de querermos dividir o número N em partes inversamente proporcionais a a, b, c,...,

isto é $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},...,$ cuja soma $x+y+z+...$ seja igual a N

Da proporção contínua $\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{a}{\frac{1}{c}}=...$desde que x + y + z + ... = N, teremos

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=...=\frac{x+y+z+...}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=...=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}$$

Para calcular x, y, z, ..., podemos escrever:

$$\begin{cases} x = \dfrac{N}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\ldots}\cdot\dfrac{1}{a} \\ y = \dfrac{N}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\ldots}\cdot\dfrac{1}{b} \\ z = \dfrac{N}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\ldots}\cdot\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

(Exercício Modelo)

11. Dividir o número 3.850 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5

Comentário:

As sucessões (x, y, z, w) e (2, 3, 4, 5) são inversamente proporcionais, logo:

$$2x = 3y = 4z = 5w$$

Dividindo todos os termos pelo MMC (2, 3, 4, 5) = 60, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{30} = 50 \therefore x = 1500 \\ \dfrac{y}{20} = 50 \therefore y = 1000 \\ \dfrac{z}{15} = 50 \therefore z = 750 \\ \dfrac{w}{12} = 50 \therefore w = 600 \end{cases}$$

Gabarito: x=1500, y=1000, z=750 e w=600

(Exercício Modelo)

12. João e José trabalharam um ano inteiro como sócios. Sabendo que João tirou três meses de férias e José 4 meses, efetue a divisão correta do lucro total obtido de R$ 36000,00

Comentário:

Sendo x e y quantias que João e José devem receber, respectivamente, teremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3x = 4y$$

Dividindo todos os termos pelo MMC (3,4) = 12

Teremos $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3}$

(Dica: Poderíamos simplesmente multiplicar em cruz)

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{7} = \frac{36000}{7}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = 4.\dfrac{36000}{7} \therefore x = 20.571,47 \\ x = 3.\dfrac{36000}{7} \therefore y = 15.428,57 \end{cases}$$

Gabarito: x = R$20.571,47 e y = R$15.428,56

✓ **Divisão proporcional composta**

Diremos que a divisão proporcional é composta quando a grandeza (ou número) N for proporcional (direta ou inversamente) a duas ou mais grandezas (ou números) simultaneamente.

(Exercício Modelo)

13. Dividir o número 23,5 em três partes simultaneamente proporcionais às sucessões (5, 3, 2) e (4, 7, 3)

Comentário:

A divisão proporcional às duas sucessões será proporcional ao produto dos elementos correspondentes, isto é:

$$\frac{x}{5.4} = \frac{y}{3.7} = \frac{z}{2.3} = \frac{x+y+z}{40+21+6} = \frac{23,5}{47} = 0,5$$

Logo

$$\begin{cases} \dfrac{x}{20} = 0,5 \therefore x = 10 \\ \dfrac{y}{21} = 0,5 \therefore y = 10,5 \\ \dfrac{z}{6} = 0,5 \therefore z = 3 \end{cases}$$

Gabarito: *x*=10; y=10,5 e z=3.

(Exercício Modelo)

14. Dois técnicos receberam juntos a quantia de R$ 8.680,00. O primeiro trabalhou 20 dias à razão de 8 horas por dia; o segundo 30 dias, à razão de 4 horas por dia. Quanto receberá cada um?

Comentário:

Sendo x e y as quantias correspondentes ao 1º e ao 2º técnico, respectivamente, temos:

$$\frac{x}{20.8}=\frac{y}{30.4}=\frac{x+y}{160+120}=\frac{8.680}{280}$$

$$\frac{x}{160}=\frac{y}{120}=31$$

Logo

$$\begin{cases}\dfrac{x}{160}=31 \therefore x=4960\\ \dfrac{y}{120}=31 \therefore y=3720\end{cases}$$

Gabarito: x=R$ 4960,00 e y=R$ 3.720,00

(Exercício Modelo)

15. Dividir 3.400 em duas partes que sejam ao mesmo tempo, diretamente proporcionais a 4 e 10 e inversamente proporcionais a 8 e 14.

Comentário:

Sendo x a 1ª parte e y a 2ª parte, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4.\dfrac{1}{8}} = \dfrac{y}{10.\dfrac{1}{4}} \\ x + y = 3400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{y}{\dfrac{5}{7}} = \dfrac{x+y}{\dfrac{17}{14}} \\ x + y = 3400 \end{cases}$$

Donde se conclui que:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = 2800 \Rightarrow x = 1400$$

$$\frac{y}{\frac{5}{7}} = 2800 \Rightarrow y = 2000$$

Gabarito: *x=1400 e y=2000*

---

4 - Regra de Três

A Regra de Três é um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvem proporcionalidade entre duas ou mais grandezas.

O mecanismo de regra de três consiste basicamente em: reunir grandezas de mesma espécie fornecidas pelo problema em colunas paralelas; verificar se estas grandezas são direta ou inversamente proporcionais; e utilizar a proporção conveniente para determinar a solução do problema.

Nos problemas de regra de três a grandeza onde houver valor desconhecido é chamada relativa, e a(s) conhecida (s) é (são) chamada (s) principal (is).

1 - Regra de Três Simples

A Regra de Três é dita simples quando envolve apenas duas grandezas que podem ser direta ou inversamente proporcionais.

A solução de um problema de regra de três simples consiste em determinar o quarto termo de uma proporção, respeitando a relação entre as grandezas.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Em três minutos, uma torneira despeja 4l de água, num tanque. Se o tanque ficou cheio em 5 horas, qual é a capacidade do tanque?

As grandezas tempo e volume são diretamente proporcionais, pois quanto mais tempo se passa com a torneira aberta, mais volume de água é despejada.

Mantendo as grandezas de mesma espécie na mesma coluna, e não esquecendo que 5h = 5 . 60min = 300min, temos a seguinte tabela:

Tempo (min)	Capacidade (l)
3min	4 l
300min	x

A proporção correspondente é:

$$\frac{3}{300} = \frac{4}{x}$$

$$3x = 4300 \therefore x = 400l$$

Vejamos outro exemplo!

Um motociclista viaja da cidade de São Paulo à Ubatuba, uma cidade no litoral paulista, 4 horas, percorrendo, em média, 60km por hora, isto é, com velocidade média de 60km/h. Para fazer o mesmo percurso em 3 horas, qual deverá ser a nova velocidade média?

As grandezas tempo e velocidade são inversamente proporcionais, pois quanto menor for o tempo gasto ao se fazer o percurso, maior será a velocidade média do motociclista.

Mantendo a grandeza de mesma espécie na mesma coluna, temos a seguinte tabela:

Tempo (h)	Velocidade (km/h)
4	60
3	x

A proporção correspondente é:

$$*\frac{3}{4}=\frac{60}{x}$$

$$3x=4.60 \therefore x=80km/h.$$

A velocidade média deverá ser de 80km/h.

* Note que nesse caso invertemos uma das razões, lembrando que as grandezas são inversamente proporcionais

✓ **Como identificar duas grandezas direta ou inversamente proporcionais**

Duas grandezas são **diretamente proporcionais quando aumentando-se uma delas, a outra aumenta na mesma razão que a primeira.**

Exemplos.

- Números de operários trabalhando numa obra e metros de muro construído;
- Tempo de percurso e distância percorrida por um móvel à velocidade constante;
- Número de latas de tinta e total de m^2 de parede pintadas etc;

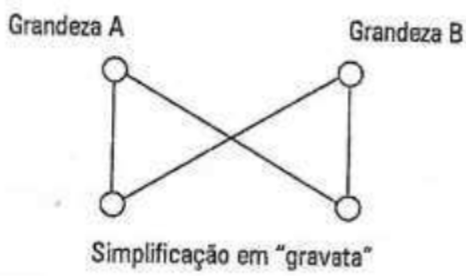
Duas grandezas são **inversamente proporcionais quando, aumentando-se uma delas, a outra diminui na mesma razão de aumento da primeira.**

Exemplos.

- Número de operários que trabalham numa construção e tempo gasto para construir. Note que, dobrando o número de operários que trabalham numa obra, fica reduzido a metade o tempo de duração da mesma;
- Velocidade e tempo de percurso.
- Horas diárias de trabalho e total de dias de conclusão da obra.

Esquema para simplificação da regra de três
Quando as grandezas forem diretamente proporcionais:

Quando as grandezas forem inversamente proporcionais:



QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

16. Se um operário levou 9 dias para fazer um muro de 560 metros. Quantos dias o mesmo operário nas mesmas condições de trabalho levará para fazer outro muro de 364 metros?

Comentário:

As grandezas tempo (em dias) e muro (em metros) são diretamente proporcionais, pois se dobrarmos o número de dias de trabalho, o operário construirá o dobro do muro em metros.

Tempo (dias)	Muro (m)
9	$\cancel{56}$ 2
x	$\cancel{364}$ 13

Simplificando adequadamente, temos:

$$\frac{9}{x}=\frac{2}{13}\Rightarrow 2x=117 \therefore x= \text{58,5h ou 58h30min}$$

Gabarito: 58,5h ou 58h30min

(Exercício Modelo)

17. As rodas dianteiras de um trator tem perímetro 1,80m e as traseiras 3m de perímetro. Enquanto a roda menor dá 90 voltas, quantas voltas dá a roda maior?

Comentário:

Podemos organizar a seguinte tabela:

Rodas (m)	Voltas
1,80	90
3	X

$$\frac{3}{1,80} = \frac{90}{x} \Rightarrow 3x = 162 \therefore x = 54 \textit{ voltas}$$

Note que as grandezas perímetro da roda e número de voltas dadas nem determinado percurso são grandezas inversamente proporcionais, pois quanto maior a roda, menor será o número de voltas dadas, proporcionalmente.

Gabarito: 54 voltas

(Exercício Modelo)

18. Doze operários deviam construir uma estrada de rodagem em 20 dias. Cinco dias depois foram admitidos mais 6 operários. Em quanto tempo será construída a estrada?

Comentário:

Seriam 12 operários em 20 dias, mas 5 dias após, teremos:

Operários	Dias
+6 12	15 (20-5)
18	X

$$\frac{18}{12} = \frac{15}{x} \Rightarrow 18x = 180 \therefore x = 10$$

Gabarito: 10 dias

(Exercício Modelo)

19. As capacidades de duas destilarias de petróleo estão na razão de 3/5. Se a primeira destila 6000 barris diários, quanto destilará a segunda?

Comentário:

Neste caso a proporção já está pronta. Sendo as grandezas capacidades das destilarias e produção de barris diários de petróleo diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{3}{5}=\frac{6000}{x} \Rightarrow 3x=30000 \therefore x=10.000$$

Gabarito: 10.000 barris

(Exercício Modelo)

20. Um fazendeiro tem milho para alimentar 15 galinhas durante 20 dias. No fim de 2 dias compra mais 3 galinhas; 4 dias depois desta compra, uma raposa mata várias galinhas e o fazendeiro pode alimentar as que restam durante 18 dias. Quantas galinhas a raposa matou?

Comentário:

Havia milho para 15 galinhas durante 20 dias. Após 2 dias havia milho para 15 galinhas durante 18 dias. Com a compra de 3 galinhas, teremos:

Galinhas	Dias
15	18
18	X

$$\frac{18}{15}=\frac{18}{x}\therefore x=15\,\textit{dias}$$

18 galinhas, e milho para alimentá-las durante 15 dias. Considerando que a raposa matado x galinhas 4 dias depois. Serão 918 – x) galinhas restantes. Portanto, teremos:

Galinhas	Dias
18	11
18 - x	18

$$\frac{18}{18-x}=\frac{18}{11}\Rightarrow 19-x=11\therefore x=7\,\textit{galinhas}$$

Gabarito: 7 galinhas

2 - Regra de Três Composta

A regra de três é dita composta quando envolve mais de duas grandezas, podendo ser, duas a duas, direta ou inversamente proporcionais

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Trabalhando 9 horas por dia, 15 operários fazem 72m de muro em 32 dias. Quantos dias gastarão 18 operários para fazer 180m do mesmo muro, trabalhando 8h por dia?

Mantendo as grandezas de mesma espécie na mesma coluna, temos a seguinte tabela:

Horas / d	Operários	Muro (m)	Dias
9	15	72	32
8	18	180	x

Comparando cada uma das grandezas com aquela que contém a incógnita (relativa), verificando se a proporcionalidade é direta ou inversa, formamos a proporção igualando a razão que contém a incógnita com o produto das demais.

$$\frac{32}{x} = \frac{8}{9} . \frac{18}{15} . \frac{72}{180}$$

Simplificando adequadamente, obtemos:

$$\frac{32}{x} = \frac{32}{75} \therefore x = 75$$

Serão gastos 75 dias.

A verificação se a grandeza é direta ou inversamente proporcional é feita ao se comparar com a grandeza que possui o termo desconhecido (grandeza relativa).

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Dez máquinas iguais produziram 150 peças iguais em 4 dias. Em quanto tempo 8 máquinas iguais às primeiras produzirão 300 peças?

Dias	Máquinas	Peças
4	10	150
x	8	300

As grandezas dias e máquinas são inversamente proporcionais, e dias e peças são diretamente proporcionais, então a proporção correta é:

$$\frac{4}{x}=\frac{8}{10}\cdot\frac{150}{300}$$

$$\frac{4}{x}=\frac{8}{20}\therefore x=10$$

Portanto: 10 dias.

(Exercício Modelo)

21. Trinta e seis operários, trabalhando 8 horas por dia durante 12 dias, abrem uma estrada de 15km. Quantos dias de 6 horas gastarão 48 operários para abrir outra estrada de 20km, supondo-se que os operários da 2ª turma são duas vezes mais produtivos que os da 1ª turma, e que a dificuldade do 1º trabalho está para o 2º como 4 para 5?

Comentários:

Seja k a produtividade dos operários da 1ª turma e 2k da 2ª turma.

Operários	Horas/dia	Dias	Estrada (km)	Produtividade	Dificuldade
36	6	12	15	K	4
48	8	x	20	2k	5

$$\frac{12}{x}=\frac{48}{36}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{15}{20}\cdot\frac{2k}{k}\cdot\frac{4}{5}$$

Simplificando o produto das frações, obtemos:

$$\frac{12}{x}=\frac{6}{5}\therefore x=10$$

Gabarito: 10

Antes de terminar nossa aula, irei abordar dois pontos fundamentais relacionados a este tópico: divisão proporcional. Espero que estejam gostando do conteúdo. Sem mais delongas, vamos ao qu interessa?

5 – TORNEIRAS E MISTURAS

1 - PROBLEMAS TIPO TORNEIRA

São aqueles em que são abordadas as relações entre os tempos que cada torneira demora a encher um recipiente e o tempo que elas demorariam para enchê-lo juntas.

Para resolver esse tipo de problema, deve-se calcular quanto do recipiente cada torneira enche na unidade de tempo (vazão). A soma desses valores será o que as torneiras juntas encherão na unidade de tempo. Para finalizar, basta observar que essa soma multiplicada pelo tempo tem como resultado o volume do recipiente.

TOME NOTA!

> Algumas variações desse problema apresentam um ralo. Nesse caso deve-se subtrair o quanto o ralo esvazia o recipiente na unidade de tempo.

TOME NOTA!

> Problemas que envolvem trabalhadores realizando determinada tarefa simultaneamente também podem ser resolvidos pelo mesmo método.

Uma torneira sozinha enche um tanque em 2 horas e outra também sozinha enche o mesmo tanque em 3 horas. Quanto tempo as duas torneiras juntas levam para encher o tanque?

Deve-se observar que em 1 hora a primeira torneira sozinha enche $\frac{1}{2}$ do tanque e a segunda $\frac{1}{3}$ do tanque.

Logo, as duas torneiras juntas, em 1 hora, encherão $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ do tanque. Assim, temos:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot t=1 \Leftrightarrow t=\frac{6}{5}=1h\,12min$$

MISTURAS

Problemas de misturas abordam a relação entre as concentrações dos componentes nas misturas originais e, após sua reunião, as concentrações na mistura resultante.

A fim de resolver esses problemas, basta calcular a massa ou volume de cada um dos componentes nas misturas originais e somá-los para obter a quantidade de cada componente na mistura resultante. Com essa informação, pode-se calcular que percentual cada componente representa na mistura resultante. A seguir, vamos analisar algumas situações exemplificativas.

Misturando-se x gramas da substância A com y gramas da substância B, obtém-se uma mistura com $\frac{x}{x+y}\cdot 100\%$ da substância A e $\frac{y}{x+y}\cdot 100\%$ da substância B.

Misturando-se p gramas de uma mistura que contém $x\%$ da substância A com q gramas de uma mistura que contém $y\%$ da substância A, obtém-se uma nova mistura com $\frac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q}\%$ da substância A, ou seja, a concentração de A na nova mistura é a média aritmética ponderada das concentrações tendo as massas como pesos.

Isso ocorre porque a primeira mistura contém $p\cdot\frac{x}{100}$ gramas de A e a segunda mistura contém $q\cdot\frac{y}{100}$ gramas de A, portanto a mistura resultante contém $\frac{p\cdot x+q\cdot y}{100}$ gramas de A em uma massa total de $(p+q)$ gramas.

Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:

(A) 6%

(B) 6,3%

(C) 7,0%

(D) 7,3%

(E) 8,0%

Veremos como resolver este tipo de questão!

Em $500\,\text{ml}$ de soro glicosado a 5%, há $5\% \cdot 500 = \frac{5}{100} \cdot 500 = 25\,\text{ml}$ de glicose.

Em 10 ampolas de $10\,\text{ml}$ de glicose a 23%, há $23\% \cdot 100 = \frac{23}{100} \cdot 100 = 23\,\text{ml}$ de glicose.

No soro glicosado resultante, o volume total é $500 + 100 = 600\,\text{ml}$ e o volume de glicose é $25 + 23 = 48\,\text{ml}$. Assim, a sua concentração é $\frac{48}{600} = 8\%$.

Note que a concentração da mistura é a **média aritmética ponderada** das concentrações dos componentes, sendo os volumes dos componentes os pesos. Assim, o problema poderia ser resolvido diretamente como segue: $\frac{500 \cdot 5\% + 100 \cdot 23\%}{500 + 100} = \frac{25 + 23}{600} = 8\%$.

Gabarito: E

QUESTÕES COMENTADAS

22. Dois trabalhadores podem fazer um trabalho em 15 e 16 dias, respectivamente, trabalhando sós. Com o auxílio de um terceiro podem fazê-lo em 6 dias. Em quanto tempo o terceiro trabalhador pode fazer o serviço, trabalhando só?

Comentário:

1º trabalhador realiza $\frac{1}{15}$ do trabalho em 1 dia

2º trabalhador realiza $\frac{1}{16}$ do trabalho em 1 dia

3º trabalhador realiza $\frac{1}{d}$ do trabalho em 1 dia

Se os três trabalhadores estão trabalhando juntos, temos:

$$\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{d}\right)\cdot 6=1 \Leftrightarrow \frac{1}{d}=\frac{9}{240} \Leftrightarrow d=26\frac{2}{3}\text{dia}$$

Gabarito: $26\frac{2}{3}$ dias

---

23. Uma torneira aberta só enche um tanque em 5 horas e outra, igualmente só, o enche em 6 horas. Por outro lado um ralo aberto esvazia o mesmo tanque em 10 horas. Estando o tanque, inicialmente, vazio, e abertas as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

Comentário:

1ª torneira enche $\frac{1}{5}$ do tanque em 1 hora

2ª torneira enche $\frac{1}{6}$ do tanque em 1 hora

Ralo esvazia $\frac{1}{10}$ do tanque em 1 hora

Se as duas torneiras e o ralo estão abertos, temos:

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)\cdot t=1 \Leftrightarrow t=\frac{30}{8}=3\text{horas}45\text{min}$$

Gabarito: 3h 45 min

---

24. (ESA 88) Dividindo-se 580 em partes diretamente proporcionais a 7, 10 e 12, obtém-se:

a) 100, 220 e 26

b) 140, 200 e 240

c) 120, 220 e 240

d) 150, 200 e 230

e) 70, 100 e 120

Comentários:

Sabemos que as partes são diretamente proporcionais, então:

$$\frac{a}{7}=k;\frac{b}{10}=k;\frac{c}{12}=k$$
$$a=7k;b=10k;c=12k$$
$$a+b+c=580$$
$$7k+10k+12k=580$$
$$29k=580$$
$$k=20$$

Assim,

$$a=7k=7.20=140$$
$$b=10.k=10.20=200$$
$$c=12.k=12.20=240$$

Gabarito: B

---

25. (ESA 94) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus. Num triângulo, as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 2, respectivamente. Então, os ângulos desse triângulo medem, em graus:

a) 100, 50 e 30

b) 60, 70 e 50

c) 60, 80 e 40

d) 60, 90 e 30

e) 50, 90 e 40

Comentários:

Sabemos que as partes são diretamente proporcionais, então:

$$a+b+c=180$$
$$3k+4k+2k=180$$
$$9k=180$$
$$k=20$$
$$a=3k=3.20=60$$
$$b=4.k=4.20=80$$
$$c=2.k=2.20=40$$

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

26. Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

a) 12 e 13 anos.

b) 13 e 14 anos.

c) 14 e 15 anos.

d) 15 e 16 anos.

e) 16 e 17 anos.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

- ✓ **A razão da idade do Pai está para a do Filho assim como: 48/18.**
- ✓ **Idade da mãe: 42 anos**
- ✓ **Idade de Marisa: M**
- ✓ **Razões são iguais, logo formam uma proporção.**

Assim,

$$48/18 = 42/m$$

$$48.m = 18.42$$

$$8.m = 3.42$$

$$4m = 3.21$$

$$m = 15{,}75.$$

Logo, a idade de Marisa está entre 15 e 16.

Gabarito: D

(Exercício Modelo)

27. Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

- ✓ Quantidade de 10,00: A
- ✓ Quantidade de 20,00: B
- ✓ Quantidade de 50,00: C

Como as quantidades são inversamente, temos que:

$$10.A = 20.B = 50.C = K \text{ (constante de proporcionalidade)}$$

Desta forma,

$$A = 0{,}1.K$$

$$B = 0{,}05.K$$

$$C = 0{,}02.K$$

Como temos 272 cédulas, então: $A + B + C = 272$.

Fazendo as trocas de variáveis, ficamos com:

$$0{,}1.k + 0{,}05.k + 0{,}02 = 272$$

$$0{,}17.k = 272$$

$$K = 1600$$

O valor monetário será: 10.A + 20.B + 50.C. Como: 10.A = 20.B = 50.C = K, então:

$$K + k + k = 3.k = 3.\ (1600) = 4.800{,}00$$

Gabarito: E

(Exercício Modelo)

28. A soma de x com 10 está para 3, assim como a diferença entre 15 e x está para 2. O valor de x é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 10.

Comentários:

A questão é bem direta. Assim, iremos partir direto para sua resolução.

$$(X+10)/3 \quad = \quad (15 - x)/2$$

Multiplicando cruzado, ficamos com:

$$2\ (x + 10) = 3\ (15 - x)$$

$$2x + 20 = 45 - 3x$$

$$5x = 25$$

$$X = 5$$

Gabarito: B

(Exercício Modelo)

29. José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles

diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

Seja "k" a constante de proporcionalidade ente o número de tarefas e o número de consoantes do sobrenome: tarefas $=k\times$ consoantes

- ✓ O sobrenome de José Souza tem 2 consoantes, portanto, José realizou "2k" tarefas.
- ✓ O sobrenome de Paulo Almeida tem 3 consoantes, portanto, Paulo realizou "3k" tarefas.
- ✓ O sobrenome de Claudio Prinot tem 4 consoantes, portanto, Claudio realizou "4k" tarefas.

No total, eles realizaram 72 tarefas: $2k+3k+4k=72$

Resolvemos a equação: $9k=72 \rightarrow k=8$

Paulo realizou: $3k = 3\times 8=24$ tarefas.

Gabarito: E

(Exercício Modelo)

30. José tem três filhas, Ana de 15 anos, Alice de 20 anos e Andressa de 25 anos. José pretende dividir R$ 3.000,00 para as três filhas em valores proporcionais às suas idades. Nessas condições, o valor que Ana deve receber é:

a) R$ 1.000,00

b) R$ 1.250,00

c) R$ 750,00

d) R$ 850,00

e) R$ 900,00

Comentários:

Seja "k" a constante de proporcionalidade entre o valor a receber e a idade: valor a receber =k . idade

- ✓ Como Ana tem 15 anos, irá receber "15k".
- ✓ Alice tem 20 anos e irá receber "20k".
- ✓ Andressa tem 25 anos e irá receber "25k".

Elas receberão um total de 3.000 reais: 15k+20k+25k=3.000

$$60k=3.000$$

$$k=50$$

Ana irá receber: 15k = 15×50=750 reais.

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

31. A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24

Comentários:

Foi dito que G é diretamente proporcional a "A" e inversamente proporcional a "B". Logo, a relação entre elas é do tipo:

$$G=k\times A/B$$; em que "k" é uma constante de proporcionalidade.

Quando A vale o dobro de B, G vale 10. Ou seja:

$$10=k\times 2B/B$$

$$k=10/2$$

$$k=5$$

Em seguida, numa segunda situação, o valor de A passou a ser 144, o de B passou a 40. Vamos calcular G:

$$G=k\times A/B$$

$$G=5\times 144/40$$

$$G=144/8$$

$$G=18$$

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

32. Um cartão de banco mede 5,0 cm de largura por 8,5 cm de comprimento. A razão entre a largura e o comprimento dele é da ordem de 1 para

a) 1,35.

b) 1,55.

c) 1,65.

d) 1,70.

e) 1,85.

Comentários:

Questão bem direta. Vamos a ela!

A razão (quociente) entre a largura e o comprimento é igual a:

$$5/8{,}5$$

Vamos simplificar o numerador e o denominador por 5:

$$1/1{,}7$$

Vimos que a relação entre a largura e o comprimento é de 1 para 1,7.

Em outras palavras, a divisão da largura com o comprimento é igual a 1 dividido por 1,7.

Gabarito: D

(Exercício Modelo)

33. Observando a relação $y=1/9x$, com x e y estritamente positivos, é correto concluir que

a) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

b) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

c) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

d) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

Comentários:

Quando duas grandezas "x" e "y" são inversamente proporcionais, a multiplicação entre elas é uma constante, que podemos chamar de "k".

$$x \times y = k$$

Essa constante "k" é a constante de proporcionalidade.

Na relação y=1/9x, vamos multiplicar os dois lados da equação por "x":

xy=1/9

Veja que a multiplicação de x com y é uma constante que vale 1/9.

Portanto, x e y são grandezas inversamente proporcionais e 1/9 é a razão de proporcionalidade.

Gabarito: D

---

34. (CN) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:

a) 5/3
b) 3/5
c) 2/5
d) 5/2
e) 3/2

Comentário:

Numa mistura de x litros de A e y litros de B, a quantidade de álcool é:

$$0,2x + y \text{ .}$$

Se o percentual de álcool nesse combustível é $50\% = \frac{1}{2}$, então:

$$\frac{0,2x + y}{x + y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0,4x + 2y = x + y \Leftrightarrow y = 0,6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}.$$

Gabarito: A

---

6 – Lista de Questões

(Exercício Modelo)

1. Determine x e y, respectivamente, sendo $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ x.y = 160 \end{cases}$

(Exercício Modelo)

2. Determine x e y, respectivamente, sendo $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$ e $x^2 + y^2 = 52$

(Exercício Modelo)

3. Sendo $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x.y.z = 1920 \end{cases}$, calcule os valores de x, y e z.

(Exercício Modelo)

4. A diferença entre os consequentes de uma proporção é 2, e os antecedentes são 75 e 45. Ache os consequentes desta proporção.

---

5. (ESA 85) A idade de um pai somada com a de seu filho dá 45 anos. Sabendo-se que a idade do filho está para a idade do pai assim como 1 está para 4, podemos dizer que as idades são:

a) 9 e 36 anos

b) 8 e 32 anos

c) 8 e 37 anos

d) 6 e 39 anos

---

6. (ESA 87) Os preços de duas peças de fazenda estão entre si como 7 está para 8. Sabendo-se que o triplo do preço de uma menos o dobro do preço da outra vale R$ 50,00. Os preços dessas peças são:

a) R$ 60,00 e R$ 70,00

b) R$ 70,00 e R$ 80,00

c) R$ 30,00 e R$ 40,00

d) R$ 80,00 e R$ 90,00

e) R$ 50,00 e R$ 60,00

---

7. (ESA 91) Um atirador acerta, no alvo, 3(três) de cada 5(cinco) disparos que faz. Tendo feito uma série de 30 tiros, ele errou:

(A) 28

(B) 15

(C) 12

(D) 25

(E) 24

---

8. (ESA 91) Se a razão entre os números a e b, nesta ordem, é de 0,75; então a razão entre os números (a + b) e b é:

(A) 4/3

(B) 1/3

(C) 3/4

(D) 1,75

(E) 0,25

(Exercício Modelo)

9. Dividir o número 280 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 5 e 7

(Exercício Modelo)

10. Paulo e Roberto apostaram R$ 15,00 e R$ 25,00 num sorteio da loteria. Faça a divisão correta, sabendo que o prêmio foi de R$ 300.000,00

(Exercício Modelo)

11. Dividir o número 3.850 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5

(Exercício Modelo)

12. João e José trabalharam um ano inteiro como sócios. Sabendo que João tirou três meses de férias e José 4 meses, efetue a divisão correta do lucro total obtido de R$ 36000,00

(Exercício Modelo)

13. Dividir o número 23,5 em três partes simultaneamente proporcionais às sucessões (5, 3, 2) e (4, 7, 3)

(Exercício Modelo)

14. Dois técnicos receberam juntos a quantia de R$ 8.680,00. O primeiro trabalhou 20 dias à razão de 8 horas por dia; o segundo 30 dias, à razão de 4 horas por dia. Quanto receberá cada um?

(Exercício Modelo)

15. Dividir 3.400 em duas partes que sejam ao mesmo tempo, diretamente proporcionais a 4 e 10 e inversamente proporcionais a 8 e 14.

(Exercício Modelo)

16. Se um operário levou 9 dias para fazer um muro de 560 metros. Quantos dias o mesmo operário nas mesmas condições de trabalho levará para fazer outro muro de 364 metros?

(Exercício Modelo)

17. As rodas dianteiras de um trator tem perímetro 1,80m e as traseiras 3m de perímetro. Enquanto a roda menor dá 90 voltas, quantas voltas dá a roda maior?

(Exercício Modelo)

18. Doze operários deviam construir uma estrada de rodagem em 20 dias. Cinco dias depois foram admitidos mais 6 operários. Em quanto tempo será construída a estrada?

(Exercício Modelo)

19. As capacidades de duas destilarias de petróleo estão na razão de 3/5. Se a primeira destila 6000 barris diários, quanto destilará a segunda?

(Exercício Modelo)

20. Um fazendeiro tem milho para alimentar 15 galinhas durante 20 dias. No fim de 2 dias compra mais 3 galinhas; 4 dias depois desta compra, uma raposa mata várias galinhas e o fazendeiro pode alimentar as que restam durante 18 dias. Quantas galinhas a raposa matou?

(Exercício Modelo)

21. Trinta e seis operários, trabalhando 8 horas por dia durante 12 dias, abrem uma estrada de 15km. Quantos dias de 6 horas gastarão 48 operários para abrir outra estrada de 20km, supondo-se que os operários da 2ª turma são duas vezes mais produtivos que os da 1ª turma, e que a dificuldade do 1º trabalho está para o 2º como 4 para 5?

(Exercício Modelo)

22. Dois trabalhadores podem fazer um trabalho em 15 e 16 dias, respectivamente, trabalhando sós. Com o auxílio de um terceiro podem fazê-lo em 6 dias. Em quanto tempo o terceiro trabalhador pode fazer o serviço, trabalhando só?

(Exercício Modelo)

23. Uma torneira aberta só enche um tanque em 5 horas e outra, igualmente só, o enche em 6 horas. Por outro lado um ralo aberto esvazia o mesmo tanque em 10 horas. Estando o tanque, inicialmente, vazio, e abertas as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

---

24. (ESA 88) Dividindo-se 580 em partes diretamente proporcionais a 7, 10 e 12, obtém-se:

a) 100, 220 e 26

b) 140, 200 e 240

c) 120, 220 e 240

d) 150, 200 e 230

e) 70, 100 e 120

---

25. (ESA 94) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus. Num triângulo, as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 2, respectivamente. Então, os ângulos desse triângulo medem, em graus:

a) 100, 50 e 30

b) 60, 70 e 50

c) 60, 80 e 40

d) 60, 90 e 30

e) 50, 90 e 40

(Exercício Modelo)

26. Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

a) 12 e 13 anos.

b) 13 e 14 anos.

c) 14 e 15 anos.

d) 15 e 16 anos.

e) 16 e 17 anos.

(Exercício Modelo)

27. Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

(Exercício Modelo)

28. A soma de x com 10 está para 3, assim como a diferença entre 15 e x está para 2. O valor de x é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 10.

---

29. FCC - AJ TRT11/TRT 11/Administrativa/"Sem Especialidade"/2017

José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24.

(Exercício Modelo)

30. José tem três filhas, Ana de 15 anos, Alice de 20 anos e Andressa de 25 anos. José pretende dividir R$ 3.000,00 para as três filhas em valores proporcionais às suas idades. Nessas condições, o valor que Ana deve receber é:

a) R$ 1.000,00

b) R$ 1.250,00

c) R$ 750,00

d) R$ 850,00

e) R$ 900,00

(Exercício Modelo)

31. A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24

(Exercício Modelo)

32. Um cartão de banco mede 5,0 cm de largura por 8,5 cm de comprimento. A razão entre a largura e o comprimento dele é da ordem de 1 para

a) 1,35.

b) 1,55.

c) 1,65.

d) 1,70.

e) 1,85.

(Exercício Modelo)

33. Observando a relação y=1/9x, com x e y estritamente positivos, é correto concluir que

a) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

b) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

c) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

d) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

---

34. (CN) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:
a) 5/3
b) 3/5
c) 2/5
d) 5/2
e) 3/2

---

7 - GABARITO:

1- x = 20 ; y = 8

2- x = 4 ; y = 6

3- x = 8 ; y = 12 ; z = 20

4- x = 5 ; y = 3

5- A

6- B

7- C

8- D

9- x = 40 ; y = 100 ; z = 140

10- x = 112.500 ; y = 187.500

11- x = 1500 ; y = 1000 ; z = 750 ; w = 600

12- x = R$ 20.571,47 ; y = R$ 15.428,56

13- x = 10 ; y = 10,5 ; z = 3

14- x = 4960 ; y = 3720

15- x = 1400 ; y = 2000

16- 58h30min

17-54 voltas

18- 10 dias

19- 10000 barris

20- 7 galinhas

21- 10

22- 26 $\frac{2}{3}$

23- 3h45min

24- B

25- C

26- D

27- E

28- B

29- E

30- C

31- C

32- D

33- D

34- A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.