EQUAÇÕES ESPECIAIS

Além das equações do primeiro e do segundo grau que vimos anteriormente, temos alguns tipos de equações que podem ser chamadas de equações especiais: equações irracionais e equações com mudança de variável. Vamos a elas:

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

São aquelas em que a incógnita aparece no radicando.

Para resolver uma equação irracional, utilizamos a potenciação. Seguimos então os seguintes passos:

- Passo 1: isolar o radical em um lado da igualdade;
- Passo 2: elevar os dois lados da igualdade ao quadrado;
- Passo 3: se necessário, repita os passos anteriores;
- Passo 4: resolver a equação e verificar as soluções.

Exemplos:

1) $\sqrt{x+4}+8=13$

Isolando a raiz:

$$\sqrt{x+4}=13-8$$

$$\sqrt{x+4}=5$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado:

$$(\sqrt{x+4})^2= 5^2$$

$$x+4=25$$

$$x=25-4$$

$$x=21$$

Verificando se a solução satisfaz a equação:

$$\sqrt{x+4} + 8 = 13 \text{ , sendo } x{=}21$$

$$\sqrt{21+4} + 8 =$$

$$\sqrt{25} + 8 =$$

$$5+8=13$$

Verificado. Então, o conjunto solução dessa equação é $S=\{21\}$.

Observação: Isolamos o radical antes de elevar ao quadrado pois se fizéssemos antes a potência, precisaríamos fazer mais contas durante a resolução.

2) $\sqrt{x+5} = x-1$

Perceba que a raiz já está isolada, então basta elevarmos os dois lados da igualdade ao quadrado:

$$(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2$$

$$x+5= x^2-2x+1$$

$$x^2-2x-x+1-5=0$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$x'=4$$

$$x''=-1$$

Verificando as soluções:

$$\sqrt{x+5}=x-1, \text{ para } x=4$$

$$\sqrt{4+5}=4-1$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3=3$$

$$\sqrt{x+5}=x-1, \text{ para } x=-1$$

$$\sqrt{-1+5} = -1-1$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2\neq-2$$

Como o -1 não satisfaz a igualdade, somente o 4 é solução desta equação e, assim, $S=\{4\}$.

3) $\sqrt{x+7}-\sqrt{2x}=1$

Neste caso, o primeiro passo é deixar cada raiz em um lado da igualdade:

$$\sqrt{x+7}=1+\sqrt{2x}$$

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$$(\sqrt{x+7})^2=(1+\sqrt{2x})^2$$

$$x+7=1+2\sqrt{2x}+(\sqrt{2x})^2$$

$$x+7=1+2\sqrt{2x}+2x$$

Perceba que ainda sobrou uma raiz, sendo assim, precisamos isolá-la:

$$x+7-1-2x=2\sqrt{2x}$$

$$6-x=2\sqrt{2x}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$(6-x)^2=(2\sqrt{2x})^2$$

$$36-12x+x^2=4\cdot 2x$$

$$36-12x+x^2=8x$$

$$x^2-12x-8x+36=0$$

$$x^2-20x+36=0$$

$$x'=2$$

$$x''=18$$

Verificando as soluções:

Para $x=2$:

$$\sqrt{x}+7-\sqrt{2x}=1$$

$$\sqrt{2+7}-\sqrt{2\cdot 2}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$$

Para $x=18$:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{2x}=1$$

$$\sqrt{18+7}-\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{25}-\sqrt{36}=5-6=-1$$

Como o 18 não satisfaz a igualdade, somente o 2 é solução desta equação e, assim, $S=\{2\}$.

Observação: perceba a importância da verificação da solução nos exemplos acima.

EQUAÇÕES COM MUDANÇA DE VARIÁVEL

As equações com mudança de variável são aquelas em que é necessário fazer uma mudança de variável na incógnita da equação para transformá-la em uma equação conhecida.

Exemplo: $(\sqrt[3]{x+1})^2+2\cdot\sqrt[3]{x+1}=15$.

Neste caso, aplicamos a mudança de variável: $y=\sqrt[3]{x+1}$

Logo,

$$(\sqrt[3]{(x+1})^2+2\cdot\sqrt[3]{x+1}=15$$

$$y^2+2y=15$$

$$y^2+2y-15=0$$

$$y'=-5$$

$$y''=3$$

Como $y=\sqrt[3]{x+1}$, substituindo y pelos valores encontrados, acharemos os valores de x:

Para $y=-5$:

$$y=\sqrt[3]{x+1}$$

$$-5=\sqrt[3]{x+1}$$

$$(-5)^3=(\sqrt[3]{x+1})^3$$

$$-125=x+1$$

$$x=-126$$

Para $y=3$:

$$y=\sqrt[3]{x+1}$$

$$3=\sqrt[3]{x+1}$$

$$3^3=(\sqrt[3]{x+1})^3$$

$$27=x+1$$

$$x=26$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação é: $S=\{-126,26\}$.

Um outro exemplo de equação com mudança de variável é a chamada **equação biquadrada**. Essas equações se apresentam na forma geral $ax^4+bx^2+c=0$ com a,b e c reais e $a \neq 0$.

Para resolvê-las, transformamos essas equações em uma equação do segundo grau através da mudança de variável:

$$y= x^2$$

Assim, onde aparecer x^2 na equação, vamos substituir por y.

Observação: se $y=x^2$ e, podemos dizer que $x^4=(x^2)^2$, então, $x^4= y^2$.

Exemplo: $x^4-13x^2+36=0$

$$x^4-13x^2+36=0$$

$$(x^2)^2-13x^2+36=0$$

Estabelecendo a mudança de variável $y= x^2$, então:

$$y^2-13y+36=0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau chegamos em:

$$y'=9$$

$$y'=4$$

Como havia sido estabelecido que $y=x^2$, após encontrar o valor de y, basta substituí-lo nesta igualdade para encontrarmos os valores de x que satisfazem a equação biquadrada:

Para $y=4$:

$$x^2=4 \Rightarrow x= \pm 2$$

Para $y=9$:

$$x^2=9 \Rightarrow x= \pm 3$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação é: $S=\{-3, -2, 2, 3\}$.

Observação: na resolução de equações biquadradas, lembre-se que não existe raiz

ANOTAÇÕES